BAB I BILANGAN REAL

Penyusun : Titis Anjarwani, S.Pd.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

Definisi

> Bilangan real terdiri atas himpunan bilangan Asli, bilangan Cacah, bilangan Bulat, bilangan Rasional dan bilangan Irrasional

Operasi pada bilangan Real :

1. Penjumlahan
   Komutatif : a+b = b+a
   Misalkan : 3+5 = 5+3
   Assosiatif : (a+b)+c = a+(b+c)
   Misalkan : (3+5)+2 = 3+(5+2)

2. Pengurangan
   Tidak berlaku sifat komutatif dan assosiatif,tetapi berlaku a-b = a+(-b)
   Misalkan : 5-3 = 5+(-3)

3. Perkalian
   Komutatif : axb = bxa
   Misalkan : 5x7 = 7x5
   Assosiatif : (axb)xc = ax(bxc)
   Misalkan : (2x5)x7 = 2x(5x7)
   Distributif : ax(b+c) = (axb)+(axc)
   ax(b-c) = (axb)-(axc)
   Misalkan : 2x(3+5) = (2x3)+(2x5)
   2x(5-2) = (2x5)-(2x2)
4. Pembagian
   Pada pembagian tidakberlaku sifat komutatif, assosiatif, maupun distributif

<u>Soal latihan 1</u>

Selesaikanlah soal-soal dibawah ini

1. 2x(3+5)
2. 2x3+5
3. -2+6x2
4. 5+(-8)+9+4
5. -9-(-5)
6. -4-9
7. (36:12):3
8. -64:8x(-4)
9. -2+4x6-5+10:2
10. $\frac{3}{4}+\frac{4}{3}$
11. $1\frac{2}{5}+2\frac{1}{10}$

12. $3\frac{1}{5}-2\frac{2}{5}$
13. $7\frac{1}{2}+8\frac{1}{4}-9\frac{3}{4}$
14. $\frac{5}{7}\times\frac{7}{10}\div\frac{1}{2}$
15. $3\frac{3}{4}\div 2\frac{1}{5}\times 1\frac{5}{8}$

A. KONVERSI BILANGAN

Mengubah bentuk pecahan menjadi desimal, persen dan sebaliknya

<u>Soal latihan 2</u>

1. Rubahlah ke bentuk persen dan desimal :
   a. $\frac{2}{3}$ c. $2\frac{1}{4}$ e. $4\frac{6}{75}$
   b. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{6}{25}$
2. Rubahlah ke bentuk persen dan pecahan :
   a. 0,05 c. 3,25 e. 0,325
   b. 0,2 d. 4,10
3. Rubahlah ke bentuk desimal dan pecahan :
   a. 15% c. 120% e. 85%
   c. 30% d. 225%

B. PERBANDINGAN, SKALA DAN PERSEN

Definisi

a. Perbandingan senilai

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

b. Perbandingan berbalik nilai

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_2}{B_1}$$

c. Skala

Merupakan perbandingan antara ukuran pada gambar dengan ukuran sebenarnya. Skala dapat berupa pembesaran atau pengecilan dari ukuran sebenarnya

$$skala=\frac{ukuran\ pd\ gambar}{ukuran\ sebenarnya}$$

d. Persen
Persen merupakan bentuk perbandingan yang nilai penyebutnya seratus

Soal latihan 3

1. Harga 3 kg gula adalah Rp. 28.500,- maka harga 15 kg gula adalah....
2. Perbandingan gaji istri dan suami adalah 2 : 3 jika gaji suami adalah Rp. 1.800.000,- maka jumlah gaji suami istri tersebut adalah....
3. Suatu proyek bangunan bila dikerjakan oleh 5 orang dapat selesai dalam waktu 12 hari. Berapakah banyaknya pekerja yang diperlukan jika pekerjaan tersebut harus selesai dalam waktu 4 hari !
4. Pebandingan gaji seorang suami dan istrinya adalah 4:3 jika gaji suaminya adalah Rp.6.000.000,- maka gaji istrinya adalah....
5. Sebuah lantai kamar berbentuk persegi panjang di gambar menggunakan skala 1 : 200 dengan panjang 3 cm dan lebar 2 cm. luas kamar sebenarnya adalah.... m^2
6. Harga 2 kg jeruk adalah Rp. 22.000,- dan harga 3 kg apel adalah Rp. 52.000,-. Jika ibu membeli 3 kg jeruk dan 5 kg apel berapabanyaknya uang yang harus di keluarkan ibu untuk membayar jeruk dan apel tersebut !
7. Suatu toko pakaian memberikan diskon 70% untuk semua produknya. Jika Ani ingin membeli sebuah baju dan celana dengan harga masing-masing adalah Rp. 210.000,- dan Rp. 450.000,- berapa banyaknya uang yang harus dibayarkan oleh Ani.
8. Jarak kota A ke kota B pada peta 2 cm. jika jarak kedua kota sebenarnya adalah 36 km. berapakah skala peta tersebut.
9. Empat orang tukang dapat menyelesaikan pengecatan suatu gedung dalam waktu 300 jam. Jika pekerjaan itu dikerjakan oleh 6 orang dapat selesai dalam waktu berapajam ?
10. Sebuah tempat air berbentuk balok digambar dengan menggunakan skala 1 : 200 mempunyai ukuran 4 cm x 2 cm x 2 cm volume tempat air sebenarnya adalah.... (dalam liter)

C. BILANGAN BERPANGKAT (EKSPONEN)

Bentuk : a^n a disebut bilangan pokok ; n disebut pangkat atau eksponen
Definisi:

1. Untuk $n \in R\oplus$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ......\times a}_{\text{Sebanyak n faktor}}$$

2. Untuk n = 0

$$a^0 = 1$$

3. Untuk $n \in B \ominus$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{a^n} \times \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{a^n} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{1}{a^n}}_{\text{Sebanyak n faktor}}$$

Sifat-sifat bilangan berpangkat

1. $a^m x a^n - a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m x n}$
4. $(a x b)^n = a^n x b^n$
   $(a^m x b^n)^p = a^{mp} x b^{np}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,dimana $b \neq 0$
6. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{mp}}{b^{np}}$, dimana $b \neq 0$

<u>Soal latihan 4</u>

1. Sederhanakanlah bentuk bilangan berpangkat berikut :
   a. $(2^2 \text{ x } 3^3)^2$
   b. $3^3 \text{ x } 4^3$
   c. $(x^3 y^4)^5$
   d. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
   e. $\left(\frac{3m}{2n}\right)^4$, dg. $n \neq 0$
   f. $\frac{(a^2 + b^3)}{a^3 b^2}$
   g. $\frac{3^{10}}{3^6}$
   h. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$
   i. $(4x^2 y^{-2})(3xy^6)$
   j. $\frac{x^2}{y^6} \cdot x^4$
   k. $\left(\frac{x^{-3}}{4x^2 y}\right)^3$
   l. $5^2 + 5^{-1} + 5^0$

2. Nyatakan bilangan berikut ke dalam pangkat positif
   a. $\frac{1}{5p^{-2}}$
   b. 4^{-2}
   c. $3^{-4} \times 3^{-5}$
   d. $\left(2^{-3} \times 3^{-2}\right)^2$
   e. $\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^2$
   f. $2x^2 y^{-3}$
   g. $9x^3 : 3x^6$
   h. $\left(a^2 b^{-4}\right)^3$
   i. $\left(a^{-2} b^3 c^{-4}\right)^{-3}$
3. Carilah nilai x dari
   a. $2^{x+5} = 4^{x-3}$
   b. $3^{2x+16} = 4^{x-3}$
   c. $\frac{2^{2x+4}}{4^{3x-3}} = 1$

D. BENTUK AKAR (BILANGAN IRASIONAL)

Definisi

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Dengan $n \geq 2$

Sifat-sifat bentuk akar:

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
2. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
4. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$
5. $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$
6. $\sqrt[m]{a^m} = a^{m/m} = a$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = a^{\frac{p}{mn}}$

Soal latihan 5

Sederhanakanlah bentuk-bentuk akar di bawah ini

1. $\sqrt{300}$
2. $3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{48}-2\sqrt{27}+6\sqrt{75}$
4. $\sqrt{12}x\sqrt{8}$
5. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
6. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$
7. $\sqrt{18}+\sqrt{98}$
8. $5\sqrt{75}-\sqrt{243}-\sqrt{192}$
9. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{32})$
10. $(4\sqrt{27}+3\sqrt{2})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Merasionalkan penyebut

1. $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$
2. $\frac{a}{c\sqrt{b}}=\frac{a}{c\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$
3. $\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b+\sqrt{c}}\times\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}$
4. $\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a}{b-\sqrt{c}}\times\frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}}$

Soal latihan 6

Rasionalkan penyebutnya :

1. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
3. $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$
4. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
5. $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
6. $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$
7. Diketahui $a=(\sqrt{7}+\sqrt{5})$ dan $a=(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ nilai dari $\frac{a\cdot b}{a+b}$ adalah…

8. Tentukan nilai x dari
   a. $2^{x+3} = \sqrt[5]{32}$
   b. $5^{2x+1} = \frac{1}{125}$
   c. $\left(\sqrt{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}$
   d. $\sqrt{5^{2x+1}} = 25^{x-2}$
   e. $2^{x+1} = \sqrt[4]{8^{x+5}}$
   f. $8^{3x+1} = 128^{x-1}$

E. LOGARITMA

Logaritma adalah invers dari perpangkatan.

Definisi : $\boxed{{}^{a}\log\ b = c \Leftrightarrow a^{c} = b}$

Keterangan :

- a disebut bilangan pokok atau basis logaritma
  dengan ketentuan (0 < a < 1) atau (a > 1)
  Jika a = 10 maka penulisan ${}^{10}\log x$ ditulis dengan $\log x$
  Jika a = e (e ≈ 2,7128...) maka penulisan ${}^{e}\log x$ ditulis dengan $\ln x$
- b disebut numerus dengan ketentuan b > 0
- c disebut hasil logaritma

Sifat-sifat Logaritma

1. ${}^{a}\log 1 = 0$
2. ${}^{a}\log a = 1$
3. ${}^{a}\log \frac{1}{a} = -1$
4. ${}^{a}\log b^{n} = n \cdot {}^{a}\log b$
5. ${}^{a^{m}}\log b^{n} = \frac{n}{m} \cdot {}^{a}\log b$
6. ${}^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log (b \times c)$
7. ${}^{a}\log b - {}^{a}\log c = {}^{a}\log \left(\frac{b}{c}\right)$
8. $a^{{}^{a}\log b} = a$
9. ${}^{a}\log b = \frac{{}^{p}\log b}{{}^{p}\log a}$
10. ${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$
7. ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

Soal latihan 7

1. Nyatakan dalam bentuk logaritma
   a. $2^3 = 8$
   b. $3^0 = 1$
   c. $9^{1/2} = 3$
   d. $81^{1/4} = 3$
2. Tentukan nilai x dari :
   a. ${}^5\log 1 = x$
   b. ${}^2\log 2 = x$
   c. ${}^x\log 2 = 1$
   d. ${}^3\log 1/3 = x$
   e. ${}^{1/2}\log 2 = x$
   f. ${}^5\log x = -1$
3. Tentukan nilai dari
   a. ${}^2\log 64 + {}^2\log 1/8$
   b. ${}^2\log 4 + {}^2\log 32 - {}^2\log 16$
   c. ${}^3\log 243 - {}^3\log 27 + {}^3\log 9$
   d. ${}^8\log 64$
   e. ${}^8\log 2$
   f. $\dfrac{1}{{}^{64}\log 2} + \dfrac{1}{{}^{8}\log 2}$
   g. Log 2 + log 4 + log 125
   h. Log 50 + log 6 – log 30
4. Diketahui log 2 = 0,301 dan log 3 = 0,477 hitunglah nilai dari :
   a. log 6
   b. log 2/3
   c. log 180
   d. log 24
   e. log 72
5. jika ${}^2\log 3 = a$ dan ${}^2\log 5 = b$ maka ${}^2\log 60$ =.... (dalam a dan b)

Bagaimana Mendapatkan Modul Ini Di Internet Secara GRATIS?

Modul ini bersama modul-modul yang lain, serta semua informasi tentang E-Learning matematika SMA-SMK dapat kalian manfaatkan secara **GRATIS** .

Semua modul merupakan hasil karya semua anggota MGMP Matematika SMK Kota Pasuruan. Mohon maaf apabila ada kesalahan penulisan. Tahun pelajaran 2010/2011 merupakan tahun pertama kami merintis. Akan kami revisi di tahun pelajaran berikutnya. Kritik dan saran kami terima lewat E-mail : **mgmpmtk_smkpasuruan@yahoo.co.id**

Bagaimana caranya memanfaatkannya :

A. Weblog : **www.matematika-pas.blogspot.com**

(i) Buka browser internet (contoh : Mozilla Firefox, Opera, Internet Explorer, Google Crome, dll)

(ii) Pada Addres (alamat) gantilah dengan : **www.matematika-pas.blogspot.com** lalu tekan Enter

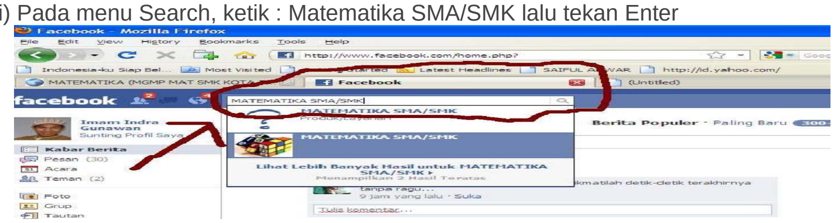
(iii) Untuk mendapatkan Modul Ini secara **GRATIS**, pilih menu Modul, lalu pilih Modul yang sesuai & klik

(iv)Terhubung (Link) dengan ziddu.com. Ikuti saja perintahnya. Ulangi beberapa kali jika gagal.

B. Facebook

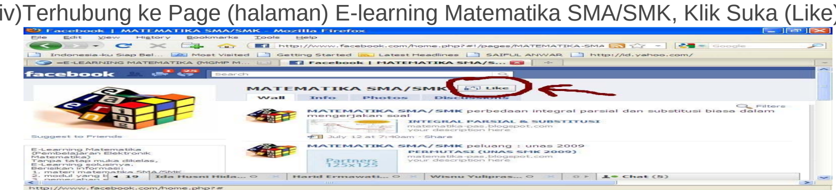
(i) Masuk akun facebook

(ii) Pada menu Search, ketik : Matematika SMA/SMK lalu tekan Enter



(iii) Klik (Pilih) Matematika SMA/SMK dengan gambar kubus ajaib bertuliskan E-Learning

(iv)Terhubung ke Page (halaman) E-learning Matematika SMA/SMK, Klik Suka (Like)



(v) Semua Informasi E-Learning (Pembelajaran Elektronik) matematika tanpa tatap muka dikelas secara otomatis akan masuk di Beranda (Home) akun facebook kalian.

(vi) Segera ajak teman-teman facebook kalian untuk bergabung disini.

Tidak semua Internet itu tidak baik, banyak sisi positif yang dapat diambil dari sana. Hanya keyakinan kita pada ajaran agama masing-masing yang dapat membentenginya. Kami sudah dapat membuktikannya melalui E-LEARNING MATEMATIKA dengan memanfaatkan Weblog dan Facebook.

BAB II APROKSIMASI KESALAHAN

Penyusun : H. Mokhamad Muklas, S.Pd. M.M.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

Dalam percakapan sehari-hari,sering kita menyebut suatu bilangan,misalnya ”Keranjang ini isinya 12 butir telur” ,atau ” Model pakaian ini memerlukan kain 3 meter”.Dua contoh kalimat tadi menyebut bilangan 12 yang diperoleh dari kegiatan ”membilang” karena bilangan yang dimaksud adalah eksak yang hanya ada satu jawaban yang tepat untuk persoalan itu,sedangkan bilangan 3 diperoleh dari ”pengukuran” karena bilangan yang didapat hasilnya tidak pasti (tidak eksak) mungkin 2,99...... meter,sehingga dibulatkan saja menjadi 3 meter.Dari kegiatan pengukuran tersebut walaupun telitinya dalam mengadakan suatu pengukuran,tidak akan dapat menyatakan ukuran yang tepat,meskipun suatu ukuran yang demikian itu ada.Dengan demikian bilangan yang diperoleh dari mengukur itu hanyalah pendekatan atau pembulatan.

Dari contoh diatas dapat disimpulkan bahwa bilangan dibedakan menjadi dua macam yaitu : bilangan eksak (bilangan yang dinyatakan dengan cara membilang) dan bilangan tidak eksak (bilangan yang dinyatakan dengan cra mengukur). Pada konyeks aproksimasi yang dibicarakan adalah bilangan yang tidak eksak.

A.Pembulatan

Semua pengukuran adalah ”pendekatan” oleh karena itu hasil-hasil pengukuran panjang,massa,waktu,luas dan sebagainya harus diberikan menurut ketelitian yang diperlukan.

Pembulatan dilakukan dengan aturan ,jika angka berikutnya 5 atau lebih dari 5 maka angka di depannya ditambah satu.Kalau angka berikutnya kurang dari 5 maka angka tersebut dihilangkan dan angka didepannya tetap.

Ada tiga macam cara pembulatan,yaitu :
a.pembulatan ke satuan ukuran terdekat
b.pembulatan ke banyaknya angka desimal,dan
c.pembulatan ke banyaknya angka-angka yang signifikan

1. Pembulatan k Satuan Ukuran Terdekat

Dalam hal pembulatan ke ukuran satuan yang terdekat,ditetapkan lebih dahulu satuan terkecil yang dikehendaki oleh yang megukur.

Contoh :
1. a.165,5 cm bulatkan ke cm terdekat!
   jawab : 166 cm
   b.2,43 kg bulatkan ke kg terdekat!
   Jawab : 2 kg
   c. 14,16 detik bulatkan ke persepuluh detik terdekat!
   Jawab : 14,2 detik

2. Bulatkan 8.423,1282 gram ke satuan ukuran berikut :
   a. Gram terdekat
      Jawab : 8.423 gam
   b. Persepuluhan gram terdekat
      Jawab : 8.423,1 gram
   c. Perseratusan gram terdekat
      Jawab : 8.423,13 gram
   d. Kilogram terdekat
      Jawab : 8,4231282 kg = 8 kg

2. Pembulatan ke Banyaknya Angka- angka Desimal

Untuk mempermudah pekerjaan,kadang-kadang perlu diadakan pembulatan suatu bilangan desimal sampai ke sekian banyak tempat desimal sesuai dengan maksud yang dikehendaki.

Contoh :

Bulatkan 5,47035 kg sampai :

a. empat tempat desimal
   jawab : 5,4704 kg

b. tiga tempat desimal
   jawab : 5,470 kg

c. dua tempat desimal
   jawab : 5,47 kg

d. satu tempat desimal
   jawab : 5,5 kg

3. Pembulatan ke Banyak Angka-angka yang Signifikan

Cara lain menyatakan ketelitian pendekatan, yaitu dengan cara menetapkan banyaknya angka yang signifikan. Istilah signifikan berasal dari Bahasa Inggris ”Significant” yang berarti ”bermakna” kita menyatakan bahwa 64,5 cm mempunyai 3 angka signifikan dan 65 cm mempunyai dua angka signifikan.

Hasil pengukuran seperti : 0,34 cm dan 34 mm mempunyai makna ketelitian yang sama yaitu masing-masing satuan ukuran terkecil terkecilnya 1 mm,sehingga banyaknya angka signifikan adalah 2,sehingga nol pada bilangan 0,34 cm tidak signifikan.

Berikut ini adalah aturan-aturan untuk menentukan angka-angka signifikan :

i. Angka yang bukan nol adalah angka signifikan
   Contoh : 41,23 m mempunyai 4 angka signifikan
ii. Angka nol yang terletak diantara angka signifikan merupakan angka signifikan.
   Contoh : 3,0417 gram mempunyai 5 angka signifikan.
iii. Angka nol yang terletak dibelakang yang didahului oleh angka signifikan merupakan angka signifikan
   Contoh : 17,0700 m,mempunyai 6 angka yang signifikan
iv. Angka nol yang terletak di depan yang tidak didahului angka signifikan bukan angka signifikan.
   Contoh : 0,05 mempunyai 1 angka signifikan

Contoh

1. Tentukan banyak angka signifikan dari hasil pengukuran berikut :
   a.4,167 m
      jawab : memiliki 4 angka signifikan karena semua angka bukan nol.
   b. 0,305 ton
      jawab : memiliki 3 angka signifikan karena nol di depan bukan angka signifikan
   c. 0,00100480 ampere
      jawab : memiliki 6 angka signifikan karena tiga nol di depan bukan angka signifikan
   d. 6.000 kg
      jawab : memiliki 4 angka signifikan karena tiga nol di belakang angka signifikan (aturan iii)

2. Bulatkan bilangan-bilangan berikut ke tiga angka signifikan!
   a. 0,017368 m
      jawab : 0,017368 m mempunyai 5 angka signifikan.
      Dibulatkan ke tiga angka signifikan menjadi :
      0,017368 m = 0,0174 m
   b. 129,520 detik
      jawab : 129,520 detik mempunyai 6 angka signifikan.
      Dibulatkan ke tiga angka signifikan menjadi :
      129,520 detik = 130 detik

Rangkuman :

1.Aproksimasi merupakan cara pendekatan atau pembulatan dari hasil suatu pengukuran yang dilakukan.
2.Aturan pembulatan adalah jika angka berikutnya 5 atau lebih dari 5 maka angka didepannya ditambah satu,tetapi jika angka berikutnya kurang dari 5 maka angka tersebut dihilangkan dan angka didepannya tetap.
3.Cara pembulatan dapat dilakukan dengan pembultan ke ukuran satuan terdekat,pembulatan ke banyaknya angka desimal,dan pembulatan ke banyaknya angka-angka yang signifikan.

Latihan 1 :

1. Manakah dari pernyataan berikut ini yang eksak (ditemukan dengan membilang) dan mana yang merupakan tidak eksak (ditemukan dengan pengukuran). Jelaskan!
   a. Waktu yang digunakan untuk memasak makanan
   b. Banyaknya kancing yang dipelukan untuk satu kemeja panjang
   c. Harga 1 Kg gula pasir
   d. Volume minyak dalam botol ialah 1 liter air
   e. Jumlah uang yang dikumpulkan oleh suatu kelas untuk dana sosial
   f. Kecepatan kendaraan yang menabrak pohon
   g. Banyaknya gula yang diperlukan untuk membuat kue tar
   h. Beratnya suatu paket ialah 235 gram

2. Bulatkan hasil pengukuran 684.573 meter sampai :
   a. Puluhan meter terdekat
   b.Ratusan meter terdekat
   c.Ribuan meter terdekat
   d.Puluhanribu meter terdekat

3. Bulatkan sampai satu tempat desimal:Jelaskan !
   a. 4,89 cm
   b. 0,453 ons
   c. 308,04 menit
   d.48,08 volt
   e.13,2503 ohm

4. Bulatkan bilangan ini sampai banyaknya angka signifikan yang dinyatakan dalam kurung; Jelaskan !
   a. 3,832 km (1)
   b. 28,091 gram(4)
   c. 17,929 ampere (3)
   d. 0,00529 ohm(2)
   e. 3,2416 detik (3)

5. Nyatakan $1\frac{2}{7}$ cm sebagai pecahan desimal dan bulatkan sampai :
   a. seperpuluhan cm terdekat
   b. 2 angka signifikan
   c. 3 tempat desimal
   d. 3 angka signifikan

B. **Pengukuran**

1.Kesalahan Hasil Pengukuran

Sering kali terjadi sebuah benda diukur dengan hasil yang berbeda – beda,dan secara logis hal ini jelas salah.Mengapa kejadian ini dapat terjadi?

Selisih antara ukuran sebenarnya dan ukuran yang diperoleh dari pengukuran itu disebut kesalahannya.Kesalahan dalam pengukuran tidak mungkin dapat di hilangkan, tetapi hanya dapat di kurangi (di perkecil) dengan menggunakan alat ukur yang lebih teliti. Besarnya kesalahan ini dapat di perkecil dengan menggunakan alat ukur yang lebih teliti dan cara penggunaan yang lebih teliti pula. Akan tetapi, hasil pengukuran tidak akan pernah eksak sekalipun tidak terjadi kesalahan cara mengukurnya. Oleh karena itu, kita perlu mengetahui pada setiap keadaan, sampai di mana kita dapat mempercayai sampai dimana kita dapat mempercayai pengukuran kita, yaitu kita harus mengetahui kesalahan maksimum yang dapat ditenggang.Maka kita menggunakan satuan ukuran terkecil,yaitu satu angka yang diperhitungkan sebagai tingkat ketelitian alat ukur,misalnya:sebuah benda diukur dengan tiga alat ukur 5,2 satuan ukur dan 5,16 satuan ukur,sehingga satuan ukuran terkecil dari masing – masing alat ukur tersebut adalah satu satuan,0,1 satuan dan 0,01 satuan.

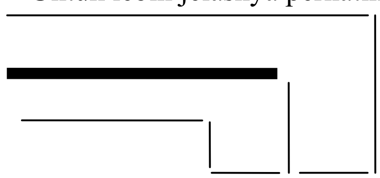
Berikut ini akan diuraikan beberapa macam keslahan :

a. Salah Mutlak
b. Salah Relatif
c. Persentase Kesalahan

a. Salah Mutlak

Misalnya,sebuah benda diukur dengan penggaris yang ditera dalam sentimeter dan hasilnya 5 cm.Ini tidak berarti panjangnya 5 cm tepat,tetapi pengukuran ini tepat sampai satu angka signifikan dengan satuan ukuran terkecil 1 cm. Jadi panjang sebenarnya lebih dekat ke 5 cm daripada 4 cm atau ke 6 cm. Dengan kata lain panjang sebenarnya terletak antara 4,5 cm dan 5,5 cm. Hal ini kesalahan yang masih diterima dan pengukuran ini adalah 0,5 cm atau salah mutlaknya ialah 0,5 cm.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini.



5,5, cm Batas atas pengukuran
5 cm Pengukuran sampai cm terdekat
4,5 cm Batas bawah pengukuran

0,5 cm 0,5 cm = Salah Mutlak

Jadi dapat disimpulkan bahwa

Salah mutlak = ½ x satuan ukuran terkecil

Contoh :

1. Tentukan Saruan ukuran terkecil dari hasil pengukuran :
   a. 12 kg
      jawab : satuan ukuran terkecilnya = 1 kg
   b. 5,6 m
      jawab : satuan ukuran terkecilnya = 0,1 m
   c. 6,17 volt
      jawab : satuan ukuran terkecilnya = 0,01 volt
   d. 32,151 °C
      jawab : satuan ukuran terkecilnya = 0,001 °C

2. Seorang siswa dari program keahlian Tata Boga akan membuat kue, bahan yang diperlukan 0,6 kg tepung dan 8 butir telor ayam.
   Dari keadaan tersebut dapat diketahui aspek pengukuran:
   Tepung:
   Satuan ukuran terkecil = 0,1 kg
   Jadi salah mutlak = $\frac{1}{2}$ x 0,1 kg = 0,05 kg
   Batas atas pengukuran = 0,65 kg ; batas bawah pengukuran = 0,55 kg
   Berarti ukuran yang sebenarnya dari bahan tepung adalah antara 0,55 kg sampai 0,65 kg
   Telor :
   Banyaknya telor ayam tepat 8 butir (eksak)

b. Salah Relatif

Besarnya kesalahan yang sama adang mempunyai tingkat kepentingan berbeda. Hal inimenyebabkan ukuran yang satu dapat diterima sedangkan yang lain ditolak. Oleh karena itu memilih alat ukuran yang digunakan harus disesuaikan dengan kebutuhannya. Kesalahan pengukuran yang dipengaruhi tingkat kepentingan tertentu disebut salah relatif.

Misalkan seorang bekerja membuat garis pinggir lapangan sepakbola, kesalahan sebesar 1 cm sampai 5 cm adalah relatif tidak masalah. Akan tetapi, suatu kesalahn 1 cm saja yang diperbuat oleh seorang tukang kayu akan berakibat fatal. Demikian halnya jika kita membuat kue dengan tepung 2 kg, yang dibubuhi esens terlalu banyak ½ cangkit, akibatnya kue itu tidak enak dimakan. Oleh karena itu, apabila kita memandang suatu kesalahan, tentu kita membandingkan dengan pengukuran yang sebenarnya. Karena itu kitamenggunakan isitlah salah relatif (nisbi).

Salah relatif dirumuskan sebagai berikut :

$$\text{Salah Relatif} = \frac{\text{Salah mutlak}}{\text{Hasil pengukuran}}$$

Contoh:

1. Tentukan salah relatif dari hasil pengukuran 9,68 gram urea?
   Jawab : satuan ukuran terkecil 0,01 gram
   $$\text{Salah mutlak} = \frac{1}{2} \times 0{,}01 = 0{,}005$$
   $$\text{Salah relatif} = \frac{0{,}005}{9{,}68} = 0{,}00051$$
2. Seorang siswa membeli kain yang panjangnya 2,5 meter dengan satuan ukuran terkecil 0,1 meter, berapakah salah relatif dari pengukuran yang dilakukan ?
   Jawab : Salah mutlaknya = ½ x 0,1 m = 0,05 m
   $$\text{Salah relatif} = \frac{0{,}05}{2{,}5} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

c. Persentase Kesalahan

Untuk menghitung pesentase kesalahan dari suatu pengukuran terlbih dahulu dicari salah relatif dari pengukuran itu, kemudian mengalikan dengan 100 % (yaitu dengan1)

Jadi persentase kesalahan dirumuskan dengan sebagai berikut :

$$\boxed{\text{Persentase Kesalahan} = \text{Salah relatif} \times 100\ \%}$$

Contoh :

Sepucuk surat setelah ditimbang, ternyata berartnya 0,8 gram.

Carilah pesentase kesalahan pengukuran itu

Jawab : satuan ukuran terkecil = 0,.1 gram

Salah mutlak relatif = ½ x 0,1 gram = 0,05 gram

$$\text{Salah relatif} = \frac{0{,}05}{0{,}8} = \frac{5}{80}$$

$$\text{Persentase kesalahan} = \frac{5}{80} \times 100\ \% = 6{,}25\ \%$$

2. Toleransi

Pada industri modern yang menggunakan metode-metode produksi massal, bagian-bagian alat sering kali dibuat dalam pabrik-pabrik yang berbeda yang kemudian dikirim ke pabrik induk untuk dirakit. Karena itu penting sekali memastikan bahwa bagian-bagian alat itu dibuat cukup teliti, supaya cocok bila dirakit. Untuk itu biasanya kita menentukan kesalahan maksimum ukuran ayng diperbolehkan dalam pembuatgan bagian-bagiannya. Misalnya : Di sebuah pabrik kendaraan baut-bautnya dibuat dengan mesin dan diharuskan berdiameter 6 mm spesisikasinya mungkin memperbolehkan diameternya antara 5,8 mm dan 6,2 mm. Selisih antara batas-batas ini yaitu 0,4 m m, disebut toleransi dalam pengukuran dan dinyatakan dengan (6 ± 0 ,2 mm)

Jadi toleransi dalam pengukuran ialah selisih antara pengukuran terbesar yang apat diterima dan pengukuran yang terkecil yang dapat diterima.

Contoh:

1. Tuliskan batas-batas pengukuran yang dapat diterima dan toleransi pengukuran dari hasil pengukuran berikut :
   a. (5 ± 0,31) detik
   jawab : batas atas pengukuran = 5 + 0,31 = 5,31
   batas bawah pengukuran = 5 – 0,31 = 4,69
   toleransi pengukuran = 5,31 – 4,69 = 0,62
   b. (1.862 ± 1) cm
   jawab : batas atas pengukuran = 1.862 + 1 = 1.863
   batas bawah pengukuran = 1.862 – 1 = 1.861
   toleransi pengukuran = 1.863 – 1.831 = 2
2. Toleransi yang diperkenankan untuk massa (15 ± 0,5) gram, berarti masa terbesar yang dapat diterima ialah 15 + 0,5 = 15,5 gram dan massa terkecil yang dapat diterima ialah 15 – 0,5 = 14,5 gram sehingga toleransinya adalah 1 gram.

3. Operasi Hasil Pengukuran

Sebelum kitamengoperasikan hasil pengukuran terlebih dahulu kita ingat kembali batas-batas pengukuran bahwa: Batas Atas (BA) pengukuran adalah hasil pengukuran ditambah salah mutlaknya, sedangkan Batas Bawah (BB) pengukuran adalah hasil pengukuran dikurangi salah mutlaknya.

a. Jumlah Hasil Pengukuran

Jika dua pengukuran atau lebih dijumlahkan, maka salah mutlaknya adalah jumlah salah satu mutlak dari pengukuran-pengkuran asal. Untuk mengetahui batas-batas jumlah dari dua pengukuran (jumlah maksimum dan jumlah minimum) dapat dirumuskan:
Jumlah maksimum = BA pengukuran I + BA pengukuran II
Jumlah minimum = BB pengukuran I + BB pengukuran II

Contoh:
Berapakah batas-batas jumlah dari hasil-hasill pengukuran 5,2 cm dan 3,6 cm, masing-masing dibulatkan 0,1 cm terdekat ?

Jawab :
Pengukuran 5,2 cm terletak dalam jangkauan (5,2 ± 0.05) cm, yaitu antara 5,15 cm dan 5,25 cm
Pengukuran 3,6 cm terletak dalam jangkauan 3,6 ± 0,05) cm, yaitu antara 3,55 cm dan 3,65 cm.
Jumlah maksimum diproleh dari jumlah batas atas pengukuran yang pertama dengan batas atas pengukuran yang kedua, sedangkan jumlah minimum diperoleh dari jumlah batas bawah pengukuran yang kedua.
Jadi jumlah maksimum adalah 5,25 cm + 3,65 cm = 8.90 cm dan jumlah minimum adalah 5,15 cm + 3,55 cm = 8.70 cm.

Perhatikan bahwa ternyata jumlah pengukuran 8,8 cm mempunyai salah mutlak 0,1 cm, yang sama dengan jumlah dari salah mutlak dalam pengukuran-pengukuran asal. Jadi, pengukuran-pengukuran kalau dijumlahkan, maka salah mutlak dari jumlah pengukuran sama dengan jumlah salah mutlak dari tiap pengukuran asal.

b. Selisih Hasil Pengukurua

Jika dua pengukuran atau lebih dikurangkan, maka salah mutlak selisihnya adalah jumlah salah mutlak dari pengukuran-pengukuran asal. Untuk mengetahui batas-batas selisih dari dua pengukuran (selisih maksimum dan selisih minimum) dapat dirumuskan:

Selisih maksimum = BA pengukuran I – BB pengukuran II
Selisih minimum = BB pengukuran I – BA pengukuran II

Contoh:
Berapakah batas-batas selisih antara hasil-hasil pengukuran 5 cm dan 3 cm, masing-masing dibulatkan ke sentimeter terdekat ?
Jawab :
Pengukuran 5 cm terletak dalam jangkauan (5±0,5) cm, yaitu antara 4,5 cm dan 5,5 cm
Pengukuran 3 cm terletak dalam jangkauan (3±0,5) cm, yaitu antara 2,5 cm dan 3,5 cm.
Selisih maksimum didapat dari batas atas pengukuran yang pertama dikurangi dengan batas bawah pengukuran yang kedua. Jadi, jumlah maksimum=5,5cm – 2,5 cm = 3 cm.
Selisih minimum didapat dari jika batas bawah pengukuran yang pertama dikurangi dengan batas atas pengukuran yang kedua.
Jadi, selisih minimum = 4,5 cm – 3,5 cm = 1 cm.

Perhatikan bahwa ternyata selisih pengukuran 2 cm mempunyai salah mutlak 1 cm, yang sama dengan jumlah dari salah mutlak dalam pengukuran-pengukuran asal.
Jadi, jika hasl-hasil pengukuran dikurangkan, maka salah mutlak selisih pengukuran sama dengan jumlah salah mutlak dari tiap pengukurana asal.
Jadi, jika hasil-hasil pengukuran dikurangkabn, maka salah mutlak selisih pengukuran sama dengan jumlah salah mutlak dari tiap pengukuran asal.

c. Perkalian hasil Pengukuran

Untuk mengetahui batas-batas maksimum dan minimum perkalian dari dua pengukuran (hasilkali maksimum dan hasilkali minimum) dapat dirumuskan:

Hasilkali maksimum = BA pengukuran I x BA pengukuran II
Hasilkali minimum = BB pengukuran I x BB pengukuran II

Contoh :
Berapakah batas-batas luas persegi panjang dengan panjang 4,5 m dan lebar 3,4 m, masing-masing dibulatkan ke 0,1 m terdekat ?
Jawab :
Pengukuran 4,5 m dalam jangkauan (4,5±0,05) m,yaitu antara 4,4,5 m dan 4,55 m
Pengukuran 3,4 m dalam jangkauan (3,4 ± 0,05) m, yaitu antara 3,35 m dan 3,45 m
Luas maksimum yang mungkin = (4,55 x 3,45) m^2 = 15,6975 m^2
Luas minimum yang mungkin = (4,45 x 3,35) m^2 = 14,9075 m^2
Jadi luas sebenarnya terletak antara 14,9075 m^2 dan 15,6975 m^2

Rangkuman :
1. Salah mutlak = ½ x satuan ukuran terkecil
2. Salah Relatif = $\dfrac{\text{salah mutlak}}{\text{hasil pengukuran}}$
3. Persentase Kesalahan = Salah relatif x 100 %
4. Toleransi dalam pengukuran ialah selisih antara pengukuran terbesar yang dapat diterima dan pengukuran yang terkecil yang dapat diterima.

Latihan 2
1. Jelaskan dan lengkapi daftar berikut ini :

Pengukuran	Satuan Ukuran terkecil	Salah mutlak	Batas atas pengukuran	Batas bawah pengukuran
a.8 cm	1 cm	0.5 cm		
b.6,7 m	0,1 m	0.05 m		
c.37,2 gram	0,1 gram	0.05 gram		
d. 8,63 m	0,01 m	0.005 m		

2. Tinggi seorang anak laki-laki ialah 153 cm. Teliti sampai sentimeter terdekat. Antara batas-batas manakah letak tingginya !

3. Carilah salah relatif dan pesentase kessalahan dari hasil pengukuran berikut :
   a. 11 cm b. 0,8 kg c. 4,15 m d. 0,000025 ton

4. Tuliskan batas-batas pengukuran yang dapat diterima dan toleransi pengukuran dari hasil pengukuran berikut :
   a. (125 ± 4) detik c. (2,58 ± 0,007) mm
   b. (1,02 ± 0.03) dm d. (1046 ± 2,5) km

5. Carilah batas-batas atas dan bawah dari jumlah dan selisih pengukuran-pengukuran berikut ini:
   a. 7.6 gram dan 2,9 gram   c. 1276 km dan 291 km
   b. 3,16 mm dan 0,85 mm   d. 25,74 m dan 2,5 m

6. Berapakah panjang minimum kawat yang harus dibeli supaya cukup untuk membuat bingkai suatu segi lima beraturan dengan sisi 15 cm.

7. Panjang dan lebar sampul ldiukur sampai sentimeter terdekat dan hasilnya masing-masing 12 cm dan 10 cm. Carilah jangkauan yang mungkin dari keliling sampul itu.

8. Panjang kawat ialah (250 ± 10) meter. Saya hendak memotong 10 potongan masing-masing sepanjang 15 meter, tetapi pengukuran setiap potong mempunyai salah mutlak sebesar 0,1 m. Dalam batas-batas mana sisa potongannya ?

9. Dari 2,10 meter panjang kain, dipotong sebagian panjangnya 65,5 cm. Berapakah batas-batas sisanya ? Jelaskan !

10. Jelaskan batas-batas dari luas suatu pekarangan yang berbentuk segitiga siku-siku dengan sisi tegak 9 m dan 6 m.

== oOo ==

Panjang jari tangan menentukan kecerdasan?

Menentukan seseorang cerdas atau tidak tanpa menguji otaknya memang tidaklah mudah. Apalagi jika hanya mengandalkan tampilan fisik. Seringnya kita mendapatkan fakta yang berseberangan. Seseorang dengan tampilan fisik menarik tak berkorelasi positif dengan kemampuan otaknya yang cerdas. Demikian pula sebaliknya. Meski demikian, berdasarkan hasil penelitian ada bagian tubuh manusia yang bisa digunakan untuk mengungkapkan kecerdasan seseorang.

Mark Brosnan salah satu peneliti dari Universitas Bath mengungkapkan bahwa kecerdasan seseorang dapat dilihat dari perbandingan panjang jari manis dan jari telunjuknya. Seorang anak yang memiliki jari manis lebih panjang daripada jari telunjuk cenderung memiliki kemampuan matematika lebih tinggi daripada kemampuan verbal dan bahasa. Jika perbandingan sebaliknya anak umumnya memiliki kemampuan verbal seperti menulis dan membaca yang lebih baik dari matematika. Panjang jari tangan merefleksikan perkembangan bagian-bagian di otak.

Para ilmuwan telah lama mengetahui bahwa pertumbuhan jari-jari tangan manusia berbeda-beda tergantung hormon testosteron dan estrogen di dalam rahim saat bayi dikandung ibunya. Kadar testosteron yang tinggi diyakini mendukung perkembangan bagian otak yang berhubungan dengan matematika dan pandang ruang. Hormon itu pula yang menyebabkan jari manis tumbuh lebih panjang. Estrogen juga mendorong efek yang sama pada bagian otak, namun yang berhubungan dengan kemampuan verbal. Hormon ini mendukung pertumbuhan jari telunjuk, sehingga lebih panjang dari jari manis.

Untuk menguji hubungan kecerdasan dengan rasio panjang jari tangan, Brosnan dan koleganya membandingkan tes scholastic (SAT) semacam psikotes kepada calon siswa yang mendaftar sekolah dengan panjang cap jari setiap siswa yang telah diminta sebelumnya. Mereka mengukur panjang jari-jari secara teliti menggunakan jangka sorong yang memiliki tingkat ketelitian 0,01 mm. Kemudian rasio panjang jari dicatat untuk memperkirakan perbandingan kadar testosteron dan estrogen.

Hasil tes siswa laki-laki dan perempuan dipisahkan. Mereka menemukan hubungan yang jelas antara tingginya paparan testosteron terlihat dari panjang jari manis yang lebih panjang daripada jari telunjuk dengan nilai uji matematika yang tinggi. Juga tingginya paparan estrogen dengan kemampuan bahasa dan verbal pada sebagian anak perempuan. "Rasio panjang jari memberikan kita gambaran mengenai kemampuan pribadi yang berhubungan dengan kognitif (daya pikir)." Ujar Brosnan yang akan melaporkan temuannya dalam *British Journal of Psychology*.

Sumber : Harian pikiran rakyat, 31 Mei 2007

BAB III MATRIKS

Penyusun : Sulistyowati, S.Pd. ; Sumani, S.Pd.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

A. Pengertian Matriks

1. Pengertian Matriks dan Ordo Matriks

Matriks yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari misalnya : tabel matrikulasi di sekolah, penyajian data pada suatu sekolah yang disajikan dalam bentuk matriks, sebagaiberikut.

Contoh : tabel matrikulasi yang memuat data jumlah siswa di suatu sekolah

Tabel Jumlah Siswa

Kelas	Laki-laki	Wanita
I	240	180
II	220	210
III	205	205

Dari tabel di atas, bila diambil angka-angkanya saja dan ditulis dalam tanda siku, bentuknya menjadi $\begin{bmatrix} 240 & 180 \\ 220 & 210 \\ 205 & 205 \end{bmatrix}$. Bentuk sederhana inilah yang kita sebut sebagai matriks.

Pengertian Matriks : Susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom yang diletakkan dalam kurung biasa atau kurung siku.

Matriks dinotasikan dengan huruf kapital (A, B, C), dan sebagainya.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 14 & 26 \\ 13 & 30 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$

Bilangan–bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom tersebut dinamakan elemen / unsur. Elemen matriks A yang terletak di baris ke-2 dan kolom ke-1 dinotasikan sebagai a_{12}=13.

Contoh: Berapakah nilai a_{31} dan a_{32}untuk matriks A di atas ?

Jawab: a_{31}=15, a_{32}=25

Matriks A di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom. Banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks menentukan ukuran dari matriks tersebut.

Ordo adalah ukuran suatu matriks yang dinyatakan dalam banyaknya baris kali banyaknya kolom

Jadi matriks A berordo 3 x 2 dan ditulis $A_{3\times2}$

2. Jenis-jenis Matriks

Setelah memahami pengertian matriks dan ordo suatu matriks, siswa dapat diperkenalkan dengan jenis-jenis matriks. Berdasarkan ordonya terdapat beberapa jenis matriks, sebagai berikut :

a. Matrik bujursangkar/persegi yaitu matriks berordo n x n atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom disebut juga sebagai matriks kuadrat berordo n.

<u>Contoh</u>: Matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, maka 1 dan 12 dikatakan berada pada diagonal utama matrik B.

b. Matriks baris yaitu matriks berordo 1 x n atau hanya memiliki satu baris.

<u>Contoh</u>: Matriks $C_{1x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

c. Matriks kolom yaitu matriks berordo n x 1 atau hanya memiliki satu kolom

<u>Contoh</u>: Matriks $E_{2x1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

d. Matriks tegak yaitu matriks berordo m x n dengan m>n

<u>Contoh</u>: $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, A berordo 3 x 2 dan 3 > 2 sehingga matriks A tampak tegak

e. Matriks datar yaitu matriks berordo m x n dengan m<n

<u>Contoh</u>: $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, F berordo 2 x 3 dan 2 < 3 sehingga matriks F tampak datar

Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya terdapat jenis-jenis matriks :

a. **Matriks nol** yaitu matriks yang semua elemen penyusunnya adalah 0 dan dinotasikan sebagai O.

<u>Contoh</u>: $O_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. **Matriks diagonal** yaitu matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah 0 dan dinotasikan sebagai D.

<u>Contoh</u>: $D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. **Matriks skalar** yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama.

<u>Contoh</u>: $D_{4x4} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d. **Matriks simetri** yaitu matriks persegi yang setiap elemennya, selain elemen diagonal, adalah simetri terhadap diagonal utama.

<u>Contoh</u>: $F_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

e. **Matriks simetri** miring yaitu matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal, saling berlawanan.

Contoh: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

f. **Matriks Identitas/satuan** yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya adalah 1 dan dinotasikan sebagai I.

Contoh: $I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. **Matriks segitiga atas** yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah 0.

Contoh: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

h. **Matriks segitiga bawah** yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah 0.

Contoh: $H_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

i. **Matriks transpose** yaitu matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen kolom dan elemen-elemen kolom menjadi elemen baris. Sebagai pengingat adalah trans = perpindahan dan pose = letak. Transpose matriks A dilambangkan dengan A^T

Contoh: $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

perhatikan bahwa ordo dari A^T adalah 2 X 3

3. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks atau lebih dikatakan sama bila dan hanya bila mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen penyusun yang seletak juga sama.

Contoh: $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka A = B

Perhatikan bahwa $C_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ dan $C_{2x3} \neq A_{2x3}$ karena ada elemennya yang seletak dan nilainya tidak sama.

Perhatikan juga bahwa $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ dan $D \neq A$ karena ordo kedua matriks tersebut tidak sama.

B. Operasi Matriks dan Sifat-sifatnya

Dalam menjelaskan operasi hitung pada matriks, kita dapat mengangkat peristiwa sehari-hari atau memberi contoh, sebagai berikut:

1. Penjumlahan Matriks

Prinsip penjumlahan dua atau lebih matriks yaitu menjumlahkan setiap elemennya yang seletak.

Pengertian penjumlahan matriks : Jika A + B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari penjumlahan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk elemen C pada baris ke-i dan kolom ke-j. Akibatnya, matriks A dan B dapat dijumlahkan apabila kedua matriks memiliki ordo yang sama.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ maka $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = C$

Perhatikan bahwa C mempunyai ordo sama dengan A dan B

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

a. A+B = B+A (hukum komutatif untuk penjumlahan)

b. A+(B+C) = (A+B)+C (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

c. A+O = O+A

d. $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. Pengurangan Matriks

Operasi pengurangan pada matriks menggunakan prinsip yang sama seperti pada operasi penjumlahan. Matriks A dikurangi matriks B dengan cara mengurangi elemen matriks A dengan elemen matriks B yang seletak.

Pengertian pengurangan matriks : Jika A–B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari pengurangan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ atau pengurangan dua matriks ini dapat dipandang sebagai penjumlahan, yaitu A + (-B)

Syarat : Matriks A dan B dapat dikurangkan jika ordo kedua matriks tersebut sama.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Kaidah ilmu hitung yang berlaku pada pengurangan adalah :

a. A – A = O
b. A – O = A

3. Perkalian Matriks

Operasi perkalian pada matriks ada dua macam yaitu perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Sebelum memperkenalkan perkalian matriks dengan matriks, siswa terlebih dahulu diperkenalkan perkalian matriks dengan bilangan/skalar.

a. Perkalian Matriks dengan skalar

Matriks A dikalikan dengan c suatu bilangan/skalar maka cA diperoleh dari hasilkali setiap elemen A dengan c. Dengan demikian, matriks –A dapat dipandang sebagai hasil kali matriks A dengan skalar (–1). Jadi –A = (–1)A.

Berikut ini adalah contoh perkalian matriks dengan bilangan skalar,

Contoh: $P = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ maka $4P = 4\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$

Jika p dan q bilangan real dan B, C dua matriks dengan ordo sedemikian hingga dapat dilakukan operasi hitung berikut, maka berlaku sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar :

1) p (B+C) = pB + pC
2) p (B–C) = pB – pC
3) (p + q) C = pC + qC
4) (a – b) C = pC – qC
5) (pq) C = p (qC)
6) $(pB)^T = pB^T$

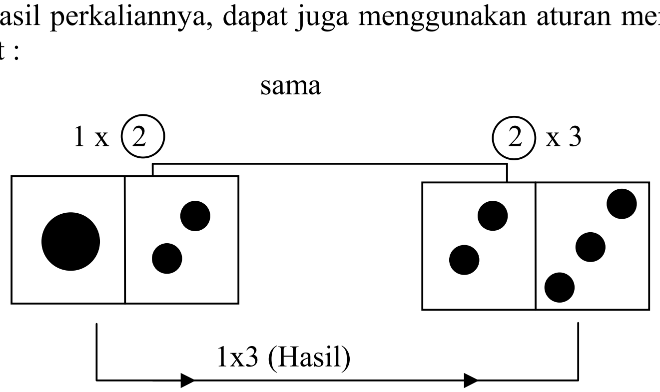
b. Perkalian matriks dengan matriks

Untuk memahami perkalian matriks dengan matriks, kita perhatikan pernyataan berikut. Dua matriks AB dapat dikalikan bila dan hanya bila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B. Jadi $A_{m\times n} \times B_{n\times p}$ bisa didefinisikan, tapi $B_{n\times p} \times A_{m\times n}$ tidak dapat didefinisikan.

A	x	B	=	AB
mxn		nxp		mxp

Perhatikan bahwa hasil kali matriks AB berordo m x p

Untuk menguji apakah dua matriks dapat dikalikan atau tidak dan juga untuk menentukan ordo hasil perkaliannya, dapat juga menggunakan aturan memasang kartu domino sebagai berikut :



Elemen-elemen dari AB diperoleh dari hasil kali setiap baris pada matriks A dengan setiap kolom pada matriks B, kemudian dijumlahkan menjadi satu elemen. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diberikan contoh- contoh perkalian matriks dengan matriks.

Contoh Perkalian Matriks 1 x p dengan matriks p x 1 :

B = $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\text{B x C} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6x4) + (8x7) + (7x2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 \end{bmatrix}$$

Contoh perkalian matriks px1 dengan matriks 1xp:

A= $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan B= $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$,

$$\text{A x B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x6 & 2x8 & 2x7 \\ 5x6 & 5x8 & 5x7 \\ 4x6 & 4x8 & 4x7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 30 & 40 & 35 \\ 24 & 32 & 28 \end{bmatrix}$$

Hasil kalinya merupakan suatu matriks berordo 3x3.

Contoh perkalian matriks mxn dengan matriks nxp:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{A x B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1x1) + (2x0) & (1x0) + (2x2) & (1x1) + (2x0) \\ (3x1) + (4x0) & (3x0) + (4x2) & (3x1) + (4x0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks A= $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan matriks C = $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ hasil perkalian A x C tidak dapat didefinisikan.

Sifat-sifat perkalian matriks dengan matriks :

1) A(BC) = (AB)C
2) A(B+C) = AB + AC
3) (B+C)A = BA + CA
4) A(B−C) = AB−AC
5) (B−C)A = BA−CA
6) a(BC) = (aB)C = B(aC)
7) AI = IA = A

Perlu diingat bahwa bila AB dapat didefinisikan, maka BA belum tentu dapat didefinisikan, sehingga AB belum tentu sama dengan BA.

C. Determinan Matriks

Untuk setiap matriks persegi terdapat suatu bilangan tertentu yang disebut determinan. **Pengertian Determinan matriks** adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan det(A).
Yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian elementer pada suatu kolom dengan +1 atau –1. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diuraikan cara mencari determinan matriks berordo 2 x 2 dan matriks berordo 3 x 3.

1. Determinan matriks berordo 2 x 2

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\boxed{\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

<u>Contoh</u>: P = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka det(P) = $|P| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = (8x4) – (4x3) = 20

2. Determinan matriks berordo 3 X 3

Untuk mencari determinan matriks berordo 3 X 3 dapat digunakan dua metode, sebagai berikut :

a. Metode Sarrus

Jika matriks B = $\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$

maka det(B) = $|B| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{vmatrix}$ = ptx + quv + rsw – rtv – qsx – puw

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix} \begin{matrix} p & q \\ s & t \\ v & w \end{matrix}$

Perlu diperhatikan bahwa cara demikian **tidak berlaku** bila matriks berordo 4x4 dan yang lebih tinggi lagi.

<u>Contoh</u>: Q = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka det(Q) = $|Q|$ adalah

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

= (2x3x9) + (4x5x7) + (6x1x8) – (6x3x7) – (2x5x8) – (4x1x9) = 242 –242 = 0

b. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu siswa dijelaskan tentang sub matriks atau minor dari suatu matriks. Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom ke-j.

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka $M_{11} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{4} & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \boxed{6} \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

M_{11}, M_{12} dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks Q.

Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right| = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Untuk mencari det(A) dengan metode kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja misal ekspansi baris ke-1

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, untuk mendapatkan det(Q) dengan metode kofaktor adalah mencari terlebih dahulu determinan-determinan minornya yang diperoleh dari ekspansi baris ke-1 diatas, yaitu $\det(M_{11}) = -13$, $\det(M_{12}) = -26$ dan $\det(M_{13}) = -13$, maka :

$$|Q| = q_{11}.k_{11} - q_{12}.k_{12} + q_{13}.k_{13}$$

$$= q_{11}.(-1)^{1+1} \det(M_{11}) - q_{12}(-1)^{1+2} \det(M_{12}) + q_{13}(-1)^{1+3} \det(M_{13})$$

$$= 2.13 - 4.26 + 6.13 = 0$$

Suatu matriks yang nilai determinannya = 0 disebut *matriks singular*.

3. Adjoin Matriks

Adjoin matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan adj A = $(k_{ij})^t$

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ telah diketahui dari hitungan sebelumnya bahwa $k_{11} = 13$,

$k_{12} = 26$ dan $k_{13} = 13$ sekarang kita hanya mencari kofaktor dari ekspansi baris ke-2 dan ekspansi baris ke-3, yaitu :

$k_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} = 12$; $k_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix} = -24$; $k_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 7 & 8\end{vmatrix} = 12$

$k_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 6\\ 3 & 5\end{vmatrix} = 2$; $k_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 5\end{vmatrix} = -4$; $k_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 2$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix}k_{11} & k_{21} & k_{31}\\ k_{12} & k_{22} & k_{32}\\ k_{13} & k_{23} & k_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & 12 & 2\\ 26 & -24 & -4\\ 13 & 12 & 2\end{bmatrix}$$

Hal yang menarik dalam mencari adjoin matriks berordo 2x2 ditunjukkan sebagai berikut :

Jika $A_{2x2} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, maka kofaktor-kofaktornya adalah $k_{11} = d$, $k_{12} = -c$, $k_{21} = -b$ dan $k_{22} = a$. Kemudian $\text{Adj } A = \begin{bmatrix}k_{11} & k_{21}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

Hal ini sama artinya dengan menukarkan elemen-elemen pada diagonal utamanya dan mengubah tanda pada elemen-elemen pada diagonal lainnya

D. Invers Matriks

Untuk menjelaskan invers matriks, perhatikan pengertian berikut:

Invers matriks adalah lawan atau kebalikan suatu matriks dalam perkalian yang dilambangkan dengan A^{-1}.

Definisi:

Jika matriks A dan B sedemikian sehingga A x B = B x A = I , dimana I matriks identitas maka B disebut invers dari A dan A invers dari B.

Karena invers matriks A dilambangkan dengan A^{-1} maka berlaku :

A x A^{-1} = A^{-1} x A = I, dimana I matriks identitas.

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix}7 & 9\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix}$

Apakah B adalah invers matriks A ?

<u>Jawab</u>

Karena $A \times B = \begin{bmatrix}7 & 9\\ 3 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$ dan

$B \times A = \begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}7 & 9\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$

Maka B adalah invers A ditulis $A^{-1} = B = \begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix}$

Cara mencari invers matriks berordo 2 x 2 dan invers matriks berordo 3 x 3 dipaparkan berikut ini.

1. **Invers matriks berordo 2x2**

Jika A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$.Adj (A)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ ; syarat } \det(A) \neq 0$$

Contoh: A= $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1} !

Jawab: det(A) = (5 x 2) – (3 x 3) = 1

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. **Invers matriks berordo 3x3**

Jika B_{3x3}, maka $B^{-1} = \dfrac{1}{\det(B)}$.Adj(B) ; syarat det(B) $\neq 0$

Contoh : B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,tentukan invers dari matriks segitiga tersebut!

Jawab : Untuk mencari determinan matriks B, cara paling praktis adalah dengan metode kofaktor dengan mengekspansi baris yang memuat nol terbanyak yaitu baris ke-3, maka

$$\det(Q) = |Q| = b_{31}.k31 - b_{32}.k_{32} + b_{33}.k_{33} = 0 - 0 + 6(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

$$\text{Adj B} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat invers matriks :

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

2. Jika AB = BA = I, maka A dan B dikatakan sebagai matriks yang saling invers karena $A = B^{-1}$ dan $B = A^{-1}$

Bila suatu matriks A mempunyai determinan nol atau det(A) = 0 maka matriks A tidak mempunyai invers. Suatu matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks singular. Bila det(A)≠0, maka matriks A pasti mempunyai invers. Suatu matriks persegi yang mempunyai invers disebut matriks non singular.

Contoh Soal Aplikasi Matriks

a. Hasil matriks perkalian berikut adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ x } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

b. Hasil perkalian matrik berikut adalah:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P \text{ x } Q = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 136 \\ 85 \end{bmatrix}$$

c. Dewi dan teman-temannya memesan 3 mangkok bakso dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, datang Doni dan teman-temannya memesan 5 mangkok bakso dan 3 gelas es jeruk. Dewi menantang Amir, seorang siswa SMK non Teknik, untuk menentukan harga bakso per mangkok dan harga es jeruk per gelas jika Dewi harus membayar Rp. 7000,00 untuk semua pesanannya, dan Doni harus membayar Rp. 11.500,00 untuk semua pesanannya itu. Maka berapakah harga bakso per mangkok dan es jeruk per gelasnya?

Petunjuk : Buatlah sistem persamaan linearnya lalu selesaikan dengan matriks.

Jawab:

Misalkan x = harga bakso per mangkok
y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya : $3x + 2y = 7000$
$5x + 3y = 11500$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 11500 \end{bmatrix} \text{ atau } A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B, \text{ maka } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(3.3-5.2)}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7000 \\ 11500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-21000+23000) \\ (35000-34500) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Harga bakso Rp. 2000,00 per mangkok dan harga es jeruk Rp. 500,00 per gelas.

Contoh penyelesaian aplikasi matriks pada soal-soal di atas bukanlah satu-satunya cara. Siswa hendaknya diperbolehkan mencari penyelesaian lain selama penyelesaian dibuat dengan logis dan mengikuti kaidah aljabar matriks serta memperoleh hasil sama. Untuk tahap selanjutnya kepada siswa dapat diajarkan tentang persamaan dan pertidaksamaan, baik yang linear atau kuadrat, juga relasi dan fungsi.

Lembar Kerja

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan ordo matriks A dan a_{23} !

2. Sebutkan jenis matriks berikut ini :

a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A + B = C^T$, tentukanlah matriks C !

4. Hitunglah perkalian matriks berikut :

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

5. Jika A = $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}$, maka :

a. Tentukan A^{-1}

b. Tentukan B^{-1}

c. Tentukan A x B

d. Tentukan $(A \times B)^{-1}$

6. Jika P = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ Tentukanlah : a. PQ b. $P \times \frac{1}{2} Q$

7. Untuk sembarang nilai a carilah nilai x yang memenuhi bila diketahui det(A)=0 untuk matriks :

a. A = $\begin{bmatrix} x & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$

b. A = $\begin{bmatrix} a & 4 \\ a & x \end{bmatrix}$

8. Jika P = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah :

a. Det(P) b. Det(Q) c. Det(PQ)

Apa kesimpulan anda setelah melakukan perhitungan di atas ?

9. Jika P_{3x3} = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ carilah det(P) dengan menggunakan :

a. Metode Sarrus

b. Metode Kofaktor

10. Tentukan matriks X berordo 2 x 2 yang memenuhi persamaan :

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

c. $X \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

11. Tentukan HP sistem persamaan linear dengan cara matriks $\begin{cases} 3x + 4y = -11 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

12. Tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan berikut :

a. $\begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & 5 \\ x-3y & 5 \end{bmatrix}$

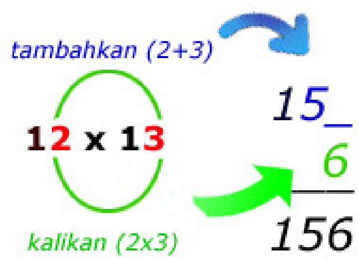
b. $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 5 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

== oOo ==

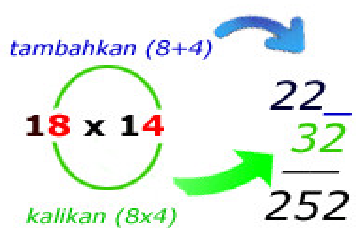
Trik Menghitung 2 Bilangan Belasan

Menghitung perkalian dua angka belasan dapat dilakukan dengan cara konvensional juga dapat dilakukan dengan trik perkalian khusus. Tulisan ini akan membahas bagaimana melakukan perkalian mudah dengan contoh kita akan mencoba perkalian 12×13. Langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Hasil akhir perkalian diasumsikan 100 lebih, jadi asumsikan hasil akhir diawali angka 1.
2. Tambahkan angka satuan dari dua bilangan tersebut yaitu 2+3 nilainya adalah 5. Sekarang kita memperoleh hasil sementara 15_ (1 dari langkah 1, dan 5 dari langkah 2) atau 150 lebih.
3. Sekarang lakukan perkalian angka satuan dari dua bilangan, yaitu 2×3 sehingga nilainya 6.
4. Tambahkan nilai hasil dari langkah 3 dan , yaitu 150+6 sehingga ditemukan nilai akhir.



Untuk angka yang lebih besar, dengan hasil penambahan dan perkalian angka satuan (langkah 2 dan 3) maka angka puluhan ditambahkan dengan ke digit depannya. Misalnya perkalian angka 18×14. Hasil penambahan 8+4 adalah 12. Angka puluhan harus ditambahkan ke digit depannya (yaitu angka 1, lihat langkah 1) sehingga menjadi 22. Hal yang sama dilakukan untuk langkah perkalian 8×4=32.



Semoga Bermanfaat.

BAB IV LOGIKA MATEMATIKA

Penyusun : Istijab, S.H. M.Hum. ; Lustya Rubiati, S.Pd.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

A. Bahasa Matematika

Logika matematika adalah terjemahan dari *symbolic logic*. Bahasa yang bernilai benar atau salah yang konsisten. Benar secara kenyataan atau benar secara aturan yang disepakati.

Komponen bahasa adalah kalimat, namun tak semua kalimat terpakai dalam logika. **Kalimat deklaratif** yang bernilai benar atau salah namun tak sekaligus benar dan salah.

Perhatikan beberapa pengertian kalimat berikut:

Kalimat tak deklaratif adalah kalimat yang tidak mengungkapkan berita, contohnya:

"Siapakah Presiden Indonesia yang memerintahkan ganyang Malaysia?" atau *"Keluarkan semua kemampuanmu!"*

Kalimat deklaratif adalah kalimat yang mengungkapkan berita, contohnya:

"Seorang Presiden Indonesia pernah memerintahkan ganyang Malaysia" atau *"Setiap mahluk mempunyai kemampuan"*

Sedangkan **kalimat deklaratif** terbagi menjadi dua, yaitu:

Kalimat terbuka yaitu kalimat yang mengandung variabel yang belum pasti benar atau salah. Jika variabel tersebut diganti konstanta dengan semesta yang sesuai kalimat itu akan menjadi kalimat yang bernilai benar saja atau salah saja yang disebut **Kalimat tertutup**. Sedangkan **variabel** adalah simbol yang menunjukkan suatu anggota yang belum spesifik dalam semesta pembicaraan. **Konstanta** adalah simbol yang menunjukkan anggota tertentu dakan semesta pembicaraan. Perhatikan contoh berikut:

Kalimat terbuka:

"Orang itu seorang petinju"

Kalimat tertutup

"Mike Tyson seorang petinju"

Yang bernilai benar.

Orang itu merupakan **variabel,** sedangkan *Mike Tyson* merupakan *konstanta.*

Kalimat terbuka : "$4x + 10 = 25$"

Kalimat tertutup : "$4(5) + 10 = 25$"

x merupakan variabel, sedangkan 5 merupakan konstanta.

Selanjutnya kalimat tertutup kita namakan **pernyataan (statment)**. Ragam pernyataan adalah sebagai berikut:

Pernyataan sederhana adalah pernyataan yang hanya menyatakan pikiran tunggal dan tak mengandung kata hubung, yang disebut juga *pernyataan primer* atau *peryataan atom.*

Pernyataan majemuk adalah racikan dari beberapa pernyataan sederhana dengan menggunakan kata hubung.

Contoh:
Sederhana : “2 + 4 = 7”
Majemuk : “3 – 4 = 2 dan 6 + 4 = 10”
Sederhana : “dua adalah bilangan prima”
Majemuk : “hari hujan dan jalanan basah”

Kata hubung (operator) dalam ilmu logika matematika terdiri atas kata:

Tidak, bukan, salah bahwa	lambangnya ($\sim$)
Dan, tetapi, serta, namun	lambangnya ($\wedge$)
Atau (arti : dan atau)	lambangnya ($\vee$)
Jika... maka...	lambangnya ($\rightarrow$)
... jika dan hanya jika ...	lambangnya ($\leftrightarrow$)

Adapun **kata keterangan** dalam ilmu logika matematika yang sering digunakan yaitu:

Semua, setiap	lambangnya ($\forall$)
Ada, beberapa, sebagian	lambangnya ($\exists$)

Latihan 1

1. Manakah diantara kalimat-kalimat berikut yang merupakan pernyataan? Jika pernyataan, tentukan benar atau salah!
   a) Jakarta ibu kota Indonesia
   b) Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil
   c) Gunung Bromo adalah gunung tertinggi di Jawa Timur
   d) 243 habis dibagi 9 dan 3
   e) Mudah-mudahan kita sehat walafiat
   f) Ikan paus bernafas dengan paru-paru
   g) Jumlah besar ukuran sudut-sudut dalam sebuah segitiga adalah 180°
   h) Kerjakan tugas-tugasmu dengan baik !
   i) 21 adalah bilangan prima
   j) x adalah Faktor dari 10
   k) Buktikan bahwa $\sqrt{3}$ adalah bilangan irasional
   l) 3 + 5 = 35
   m) Dua buah garis sejajar berpotongan di satu titik di jauh tak terhingga
   n) Lingkaran memiliki titik pusat yang berjarak sama terhadap setiap titik yang terletak pada lingkaran itu
   o) Lawan dari bilangan prima disebut bilangan komposit
2. Tentukan himpunan penyelesaian soal-soal berikut jika semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan asli !
   a. $3x - 12 = x$
   b. $3x + 1 = 2x + 3(x - 4)$
   c. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x - \frac{8}{6}$
   d. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
   e. $\frac{1}{2}x + 2 = 3x + 8$
   f. $3x - = x + 2$
   g. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x = \frac{8}{3} - x$
   h. $x^2 - 2x - 3 = 0$
   i. $2x^2 + 11x + 5 = 0$
   j. $2x - 5 = 3x + 1$

B. Operasi dalam Logika

Ilmu logika matematika menjadi tak menarik jika hanya mengurusi pernyataan-pernyataan sederhana saja. Justru sangat menarik jika pernyataan-pernyataan sederhana ini dihubung-hubungkan dengan menggunakan kata hubung sehingga menjadi **pernyataan majemuk**. Penghubung ini melahirkan apa yang disebut dengan *operasi dalam logika matematik* yang terdiri atas dua jenis operasi, yaitu:

I. **Operasi Uner**

Operasi yang memerlukan paling sedikit pernyataan. Operasi ini hanya terdiri atas satu operasi yaitu :

Negasi (Ingkaran) yang dilambangkan (~) atau (¬) atau (-) dan dibaca **tidak** atau **bukan**

Definisi **:** penyangkalan p ialah benar bila p merupakan pernyataan yang salah, dan sebaliknya penyangkalan p itu salah bila p merupakan pernyataan benar.

Tabel Kebenaran I :

p	~p
B	S
S	B

Contoh :

p : Indonesia adalah negara republik.
~p : Indonesia adalah <u>bukan</u> negara republik.
q : Hari ini matahari bersinar terang.
~q : Hari ini matahari <u>tidak</u> bersinar terang.
r : Surabaya <u>bukan</u> ibukota Jawa Timur
~r : Surabaya ibukota Jawa Timur

II. Operasi Biner : operasi yang memerlukan paling tidak dua pernyataan atau lebih. Operasi ini terdiri atas empat operasi yaitu :

a. **Konjungsi**

Simbol $\wedge$ dibaca **dan**.
Untuk menentukan nilai kebenarannya digunakan definisi berikut :
Definisi :
Nilai kebenaran $p \wedge q$ (baca: p konjungsi q) adalah benar jika nilai kebenaran p dan q masing-masing benar, jika dinyatakan lain maka nilai kebenarannya salah.

Tabel kebenaran II :

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

b. **Disjungsi**

Simbol ∨ dibaca **atau.**

Untuk menentukkan nilai kebenarannya digunakan kaidah **salah satu benar pasti benar**melalui definisi berikut :

Definisi :

Nilai kebenaran p∨q (baca: p disjungsi q) adalah **salah** jika nilai kebenaran p dan q masing-masing salah, jika dinyatakan lain maka bernilai **benar**.

Tabel kebenaran III :

p	q	p ∨ q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

c. **Implikasi**

Simbol → dibaca**jika ... maka ...** (p→q dibaca **jika p maka q** atau **q jika p** atau **p syaratperlu untuk q**atau**q syarat cukup bagi q**). Untuk menentukan nilai kebenarannya digunakan kaidah **kiri salah pasti benar kanan benar pasti benar.**

Definisi :

Nilai kebenaran p→q (baca: p implikasi q) adalah **salah** jika nilai kebenaran p adalah benar dan nilai kebenaran q adalah salah, jika dinyatakan lain maka bernilai **benar**.

Tabel kebenaran IV :

p	q	p→q
B	B	B
B	S	S
S	B	**B**
S	S	B

d. **Biimplikasi**

Simbol ↔ dibaca ... **jika dan hanya jika ... (jhj)** (p ↔ q dibaca **p jika dan hanya jika q** atau **p syarat perlu dan syarat cukup untuk q**). Untuk kebenarannya digunakan kaidah **tanda sama pasti benar.**

Definisi :

Nilai kebenaran p ↔ q (baca: p biimplikasi q) adalah **benar** jika nilai kebenaran p dan q adalah **sama**, **sama-sama benar atau sama-sama salah**, jika dinyatakan lain maka bernilai **salah**.

Tabel kebenaran V :

p	q	p↔q
B	B	B
B	S	S
S	B	**S**
S	S	B

Latihan 2

1. Buatlah **ingkaran/negasi** dari kalimat-kalimat berikut!
   a. 2 adalah bilangan prima genap
   b. 3 + 7 = 10
   c. Siti tidak pergi ke sekolah
   d. 35 bilangan prima
   e. 5 < 1
   f. Jumlah sudut-sudut suatu segitiga 180°
   g. Diagoal-diagonal suatu jajaran genjang sama panjang
   h. Ada jenis ikan yang tidak bertelur
2. Tentukan **nilai kebenaran** dari pernyataan-pernyataan berikut!
   a. Ingkaran dari "kertas itu hitam" adalah "kertas itu putih"
   b. Ingkaran dari "5 ≤ 7" adalah "5 ≥ 7"
   c. Ingkaran dari "2 bilangan positif" adalah "2 bilangn negatif"
   d. Ingkaran dari "hal ini bukan tidak mungkin" adalah "hal ini tidak mungkin"
   e. Ingkaran dari "9 + 6 ≠ 14" adaah "9 + 6 = 12"
   f. Ingkaran dari "tidak benar 8 bukan bilangan prima" adalah "18 bilangan prima"
   g. Ingkaran dari "tidak benar 4 bilangan ganjil" adalah "4 bukan bilangan ganjil"
3. Tentukan **komponen-komponen dari pernyataan-pernyataan majemuk** berikut:
   a. Diana dan Joni pergi tamasya
   b. Segitiga ABC siku-siku dan sama kaki
   c. Suryani cantik lagi pandai
   d. Hari teruasa panas meskipun masih pagi
   e. Bapak pergi ke kantor walaupun sakit
   f. Nani ingin belajar menyanyi atau menari
   g. Artis film itu sangat tekenal, tetapi rendah hati
   h. Jika Atik rajin, maka lulus ujian
   i. Suatu segitiga sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama besar
   j. Jika suatu bilangan habis dibagi 2, maka bilangan itu bilangan genap.
4. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut!
   a. 5 bilangan prima dan 2 > 5
   b. 50 habis dibagi 5 dan 6
   c. 3 bukan bilangan prima atau faktor dari 24
   d. 8 + 3 = 11 atau 2 bilangan prima
   e. Jika panjang sisi suatu persegi 5 m, maka luas persegi = 20 m^2
   f. Jika 5 < 3, maka -5 < -3
   g. 2 + 2 = 4 atau 3 + 5 = 6
   h. Jika *k* bilangan bulat, maka *k* bilangan real
   i. Bumi berhenti berputar jika dan hanya jika matahari terbit dari barat

5. Jika pernyataan p: “ia kaya” dan pernyataan q: “ia bahagia”, maka terjemahkan lambang-lambang berikut:
   a. $p \wedge q$
   b. $\sim p \vee \sim q$
   c. $p \rightarrow q$
   d. $p \vee q$
   e. $\sim p \wedge q$
   f. $q \leftrightarrow \sim p$
   g. $p \leftrightarrow q$
   h. $p \vee \sim q$
   i. $\sim q \rightarrow p$
   j. $\sim p \rightarrow q$
   k. $\sim p \rightarrow \sim q$
   l. $\sim(p \rightarrow \sim q)$
6. Jika pernyataan p: “hari ini cuaca cerah” dan pernyataan q: “matahari bersinar”, maka tulislah lambang-lambang dari penyataan-pernyataan berikut!
   a. Hari ini cuaca cerah dan matahari bersinar
   b. Hari ini cuaca cerah atau matahari bersinar
   c. Jika hari ini cuaca cerah, maka matahari tidak bersinar
   d. Hari ini cuaca tidak cerah atau matahari bersinar
   e. Hari ini cuaca tidak cerah jika dan hanya jika matahari bersinar
   f. Jika matahari tidak bersinar, maka hari ini cuaca cerah
   g. Matahari bersinar dan hari ini cuaca tidak cerah
   h. Matahari tidak bersinar jika dan hanya jika hari ini cuaca cerah
7. Buatlah tabel kebenaran dari:
   a. $\sim p \wedge \sim q$
   b. $\sim (p \leftrightarrow q)$
   c. $p \rightarrow \sim q$
   d. $\sim p \rightarrow q$
   e. $(p \vee q) \leftrightarrow \sim p$
   f. $p \rightarrow (p \vee q)$
   g. $p \rightarrow (\sim p \vee q)$
   h. $\sim p \rightarrow \sim q$
   i. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (`\sim p \vee q)$
   j. $p \rightarrow (\sim q \leftrightarrow p)$
   k. $(p \wedge q) \leftrightarrow p$
   l. $(p \rightarrow \sim q) \vee \sim p$

C. Tabel Kebenaran

Kesimpulan kaidah di atas dapat dituliskan dalam satu tabel kebenaran berikut ini:

p	q	~p	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B
			Salah satu salah pasti salah	Salah satu benar pasti benar	Kiri salah pasti benar, kanan benar pasti benar	Tanda sama pasti benar

Jika nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk semuanya bernilai B maka dinamakan **TAUTOLOGI**.

Contoh $\mathbf{p \wedge q \rightarrow q}$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \wedge q}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \wedge q \rightarrow q}$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	S	B	B
S	S	S	S	B

Jika semuanya bernilai S maka dinamakan **KONTRADIKSI**.

Contoh $\mathbf{(p \wedge q) \wedge \sim q}$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \wedge q}$	$\mathbf{\sim q}$	$\mathbf{(p \wedge q) \wedge \sim q}$
B	B	B	S	S
B	S	S	B	S
S	B	S	S	S
S	S	S	B	S

Sedangkan jika campuran B $\wedge$S maka dinamakan**KONTINGENSI**.

Contoh :

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \wedge q}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \wedge q \wedge q}$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	S
S	B	S	B	B
S	S	S	S	S

D. Sifat Implikasi

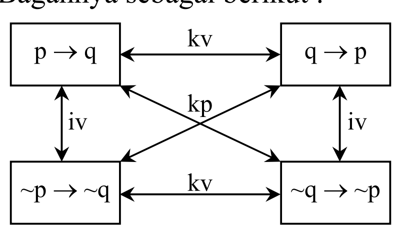
Bentuk **implikasi** $\mathbf{p \rightarrow q}$ dapat diubah dengan beberapa aturan, yaitu :

Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
Ganti tanda

Konvers : $q \rightarrow p$
Ganti Posisi

Kontaposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$
Ganti tanda dan ganti posisi

Bagannya sebagai berikut :



Tabel Kebenaran VI :

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{\sim p}$	$\mathbf{\sim q}$	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{q \rightarrow p}$	$\mathbf{\sim p \rightarrow \sim q}$	$\mathbf{\sim q \rightarrow \sim p}$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	**B**	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Contoh:

- Jika bakso gurih maka cendol manis
  Konvers: jika bakso gurih maka cendol manis
  Invers : jika bakso tidak gurih maka cendol tidak manis
  Kontraposisi : jika cendol tidak manis maka bakso tidak gurih
- $p \rightarrow \sim q$
  konvers : $\sim q \rightarrow p$
  invers : $\sim p \rightarrow r$
  kontraposisi : $q \rightarrow \sim p$
- $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim r$
  Konvers : $\sim r \rightarrow (p \vee \sim q)$
  Invers : $(\sim p \vee q) \rightarrow r$
  Kontraposisi : $r \rightarrow (\sim p \wedge q)$

E.Kesetaraan atau Ekuivalensi

Dua buah pernyataan majemuk dikatakan setara atau ekuivalen jika dan hanya jika kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama.
Beberapa pernyataan majemuk mempunyai pernyataan majemuk lain yang setara, diantaranya:

- $\mathbf{p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q}$
- $\mathbf{\sim (p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$
- $\mathbf{p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$
- **Dalil De Morgan:**
  $\mathbf{\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q}$
  $\mathbf{\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q}$
- **Komutatif**
  $p \wedge q \equiv q \wedge p$
  $p \vee q \equiv q \vee p$
- **Asosiatif**
  $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
  $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- **Distributif**
  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Contoh:

- Jika api panas **maka** es dingin, setara dengan
  Jika es tidak dingin **maka** api tidak panas,
  atau
  Api tidak panas**atau** es dingin
- Tidak benar bahwa **jika** kopi pahit maka gula manis, setara dengan:
  Kopi pahit **dan** gula tidak manis.

- $x = 2$ **jika dan hanya jika** $2x = 4$, setara dengan
  jika $x = 2$ jika dan hanya jika $2x = 4$, setara dengan
  jika $x = 2$ maka $2x = 4$ dan jika $2x = 4$ maka $x= 2$
- Tidak benar bahwa a ganjil dan 2a ganjil,setara dengan a tidak ganjil atau 2a tidak ganjil

Latihan 3

1. Buatlah ingkaran dari pernyataan berikut dengan menggunaan Dalil De Morgan!
   a. Aku dan kau suka membaca buku cerita
   b. Hari ini hujan atau anginnya kencang
   c. Emas tenggelam dalam air raksa atau air tawar
   d. Segitiga ABC siku-siku dan sama kaki
   e. Katak bernafas dengan insang atau paru-paru
   f. Harga barang-barang murah dan jumlah barang tidak berkurang
2. Buktikan dengan tabel kebenaran!
   a. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
   b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   c. $p \wedge q \equiv p \wedge (q \vee \sim p)$
   d. $p \vee q \equiv q \vee p$
   e. $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
   f. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
3. Buatlah pernyataan konvers, invers, dan kontrapositif dalam bentuk kalimat!
   a. Jika engkau rajin belajar, maka engkau dapat naik kelas
   b. Jika ABCD persegi panjang, maka AC=BD
   c. Jika x bilangan genap, maka x^2habis dibagi 4
   d. Jika x^2 bilangan ganjil, maka x bilangan ganjil
   e. Jika $3 + 3 = 7$ maka $4 + 4 = 8$
   f. Jika guru tidak datang, maka semua murid senang
   g. Jika hari hujan, maka matahari tidak bersinar
4. Tentukan ingkaran dari pernyataan-pernyataan berikut ini!
   a. Dua garis *a* dan *b* yang sebidang sejajar atau berpotongan
   b. Jika Amir orang kaya, maka ia sombong
   c. ABCD jajargenjang adalah syarat perlu bagi *ACD* persegi panjang
5. Tentukan konvers dan invers dari implikasi berikut :
   a. "*ABCD* persegi panjang hanya jika *AC = BD*"
   b. "Jika hari tidak hujan maka halaman tidak basah"
   c. " Jika saya datang maka dia tidak pergi "

F. Pernyataan Berkuantor

Pengertian Kuantor

Kuantor adalah suatu kata yag letaknya didepan kalimat terbuka sedemikian sehingga kalimat terbuka tersebut menjadi kalimat tertutup.

Contoh: Bilangan prima adalah ganjil (*kalimat terbuka*)
Semua bilangan prima adalah ganjil (*kalimat tertutup*)
Beberapa bilangan prima adalah ganjil (*kalimat tertutup*)

Macam – macam kuantor:

1. **Kuantor Universal** disimbolkan sebagai berikut :
   $\forall$ (x) p(x) dibaca : setiap (semua) x bersifat p.
   Negasinya :
   $\exists$(x)~p(x) dibaca : ada beberapa x tidak bersifat p.
2. **Kuantor Eksistensial** disimbolkan sebagai berikut :
   $\exists$(x) p(x) dibaca : ada (beberapa) x bersifat p
   Negasinya :
   $\forall$(x) ~p(x) dibaca : setiap (semua) x tidak bersifat p.

Contoh :

1. X : siswa SMA
   p(x) : x memakai seragam
   Maka $\forall$ (x) p(x) dibaca :
   Semua siswa SMA memakai seragam.
   Negasinya : $\exists$(x)~p(x) dibaca :
   Ada siswa SMA yang tidak memakai seragam
   Atau
   Tidak semua siswa memakai seragam.
2. X : bilangan genap.
   p(x) : x bilangan prima.
   Maka $\exists$(x) p(x) dibaca :
   Terdapat bilangan genap yang prima.
   Negasinya : $\forall$(x) ~p(x) dibaca :
   Semua bilangan genap bukan bilangan prima
   Atau
   Tidak ada bilangan genap prima.

Latihan 4

1. Ucapkanlah dengan benar pernyataan-pernyataan dibawah ini dengan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan real!
   a. $(\forall x)\,|x| = x$
   b. $(\forall x)\,(x + 1 > x)$
   c. $(\forall x)\,(2x + 3x = 5x)$
   d. $(\exists x)\,(x^2 - 2x + 5 = 0)$
   d. $(\exists x)(2x = x)$
   f. $(\forall x)\,(\exists y)(x + y = 1)$
   g. $(\exists x)\,(\forall y)\,(x + y = 1)$
   h. $(\forall x)\,(\forall y)\,(x^2 + y^2 > 10)$
   i. $(\exists x)\,(\forall y)\,(p(x) \vee \sim q(y))$
   j. $(\exists x)\,(\exists y)\,(p(x) \wedge \sim q(y))$

2. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan dibawah ini dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real!
   a. $(\forall x)\,|x| = x$
   b. $(\exists x)\,x^2 = x$
   c. $(\forall x)\,(x + 1 > x)$
   d. $(\exists x)\,|x| = 0$
   e. $(\forall x)\,(x - 3 < x)$
   f. $(\exists x)\,(x^2 + 3x - 2 = 0)$
   g. $(\forall x)\,(\forall y)\,(x + y = 1)$
   h. $(\forall x)\,(\forall y)\,(x^2 + y^2 > 10)$
   i. $(\exists x)\,(\forall y)\,(p(x) \vee \sim q(y))$
   j. $(\forall x)\,(\forall y)\,(\exists z)\,(xz = y)$

3. Tulislah ingkaran dari kalimat-kalimat dibawah ini!
   a. Semua burung bersayap.
   b. Semua orang Indonesia makanan pokoknya nasi.
   c. Beberapa guru susah jika ada beberapa murid yang tidak lulus ujian.
   d. Di semua sekolah ada murid yang menganggap matematika mudah.
   e. Tidak ada seorang pun yang boleh melihat.
4. Tulislah ingkaran dari pernyataan dibawah ini!
   a. $(\forall x)p(x) \wedge (\exists y)\ q(y)$
   b. $(\exists x)p(x) \wedge (\forall y)\ q(y)$
5. Semesta pembicaraan {1, 2, 3,}, tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan dan tulislah ingkaran!
   a. $(\forall x)(\forall y)\ (x^2+2y < 10)$
   b. $(\exists x)(\forall y)(x^2+2y < 10)$
   c. $(\forall x)\ (\exists y)\ (x^2+2y < 10)$
   d. $(\exists x)\ (\exists y)\ (x^2+2y < 10)$

H. Penarikan Kesimpulan

Berbicara logika matematika berarti juga berbicara tentang kebenaran. Suatu rangkaian pernyataan majemuk yang terdiri atas premis-premis dikatakan benar atau sah jika memenuhi aturan dalam penarikan kesimpulannya. Premis dapat berupa aksioma (pernyataan yang tidak terbantah kebenarannya). Hipotesis (dugaan sementara). Definisi (pemberian nama dengan arti), atau pernyataan. Terdapat beberapa cara penarikan kesimpulan untuk membuktikan keabsahan suatu argumen.

Yaitu :

1. Modus Ponens (ponendo ponen)

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \text{(B atau sah)} \\ \underline{p\qquad\qquad} & \text{(B atau sah)} \\ \therefore q & \text{(B atau sah atau valid)} \end{array}$$

2. Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \text{(B atau sah)} \\ \underline{\sim q\qquad\qquad} & \text{(B atau sah)} \\ \therefore \sim p & \text{(B atau sah atau valid)} \end{array}$$

3. Silogisme

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \text{(B atau sah)} \\ p \rightarrow r & \text{(B atau sah)} \\ \underline{r \rightarrow s\qquad} & \text{(B atau sah)} \\ \therefore p \rightarrow s & \text{(B atau sah atau valid)} \end{array}$$

Contoh :

1. Diketahui premis-premis berikut :
   Jika harga BBM naik, maka harga barang naik.
   Ternyata harga BBM naik.
   Kesimpulannya : harga barang naik.

2. Diketahui premis-premis berikut :
   Jika negara perang maka ada program wajib militer.
   Ternyata tidak ada program wajib militer.
   Kesimpulannya : negara tidak perang.
3. Diketahui premis-premis yang sah berikut :
   Jika anak cerdas maka anak itu kreatif.
   Jika anak itu kreatif maka anak mampu berkarya.
   Kesimpulannya : jika anak cerdas maka anak itu mampu berkarya.

Latihan 5

Tentukan sah atau tidak argumentasi berikut, jika tidak sah anda diminta membenarkan kesimpulan tersebut !

a. Premis 1 : jika orang Negro, maka kulitnya hitam
   Premis 2 : Alfred seorang Negro
   Konklusi: ∴ kulit Alfred hitam

b. Premis 1 : Jika udara dingin, maka penyakit Mulia kambuh.
   Premis 2 : Penyakit mulia kambuh
   Konklusi: ∴ udara dingin

c. Jika $a \times b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$
   $a \neq 0$ dan $b \neq 0$
   $\therefore\ a \times b \neq 0$

d. Jika seorang laki-laki membujang, maka hidupnya tidak bahagia, jika hidupnya tidak bahagia, maka ia akan mati muda.
   ∴ Jika seorang laki-laki membujang, maka ia akan mati muda.

e. Jika saya lulus ujian, maka saya dibelikan motor.
   Saya tidak lulus ujian.
   ∴ saya tidak dibelikan motor.

f.	g.	h.	i.
$p \rightarrow \sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$
q	$\sim p$	p	$\sim r \rightarrow \sim q$
$\therefore\ p$	$\therefore\ q$	$\therefore\ q$	$\therefore\ \sim r \rightarrow \sim p$

j. Jika Carli seorang pegawai negeri, maka ia mendapat gaji bulanan
   Jika Carli mendapat gaji bulanan, maka ia hidup bahagia.
   ∴ Jika Carli seorang pegawai negeri, maka ia hidup bahagia

k. Jika *n* adalah bilangan asli, maka *2n* adalah bilangan asli genap.
   Jika *2n* adalah bilangan asli genap, maka.
   ∴ Jika *n* adalah bilangan asli, maka (*2n + 1*) adalah bilangan asli ganjil

l. Jika Badu hendak ujian, maka ia giat belajar
Badu giat belajar.
$\therefore$ Badu hendak ujian

m. Jika masuk lewat kuping kiri, maka keluar lewat kuping kanan
Keluar lewat kuping kanan
$\therefore$ Masuk lewat kuping kiri

n. Jika ada gula, maka ada semut
Tidak ada semut
$\therefore$ Tidak ada gula

o. Jika $f(-x) = f(x)$ untuk semua $x \in R$, maka $f(x)$ fungsi genap
Cos $(-x)$ = cos x untuk semua $x \in R$
$\therefore$ cos x adalah fungsi genap

p. Jika x bilangan real, maka $|x| \geq 0$
$|x| < 0$
$\therefore x$ bukan bilangan real

q. Jika ${}^{g}\log a = x$ $(g > 0$ dan $g \neq 1, a > 0)$, maka $g^x = a$
${}^{2}\log 4 = 2$
$\therefore 2^2 = 4$

r. Jika Amir datang maka Susi pulang kampung
Jika Susi pulang kampung maka orangtua Susi marah-marah
$\therefore$ Amir dan Susi lagi bertengkar

s. Jika Nita ikut UAN, maka Nita rajin berlatih soal-soal
Nita tidak rajin berlatih soal ujian
$\therefore$ Nita tidak ikut UAN

t. Semua peserta UANrajin berlatih soal-soal
Nita tidak rajin berlatih soal ujian
$\therefore$ Nita belum tentu tidak ikut UAN

== oOo ==

Untuk apa belajar Logika Matematika?

Logika masuk kedalam kategori matematika murni karena matematika adalah logika yang tersistematisasi. Matematika adalah pendekatan logika kepada metode ilmu ukur yang menggunakan tanda-tanda atau simbol-simbol matematik (logika simbolik). Logika tersistematisasi dikenalkan oleh dua orang dokter medis, Galenus (130-201 M) dan Sextus Empiricus (sekitar 200 M) yang mengembangkan logika dengan menerapkan metode geometri.

Puncak logika simbolik terjadi pada tahun 1910-1913 dengan terbitnya *Principia Mathematica* tiga jilid yang merupakan karya bersama Alfred North Whitehead (1861 - 1914) dan Bertrand Arthur William Russel (1872 - 1970).

Kegunaan logika

1. Membantu setiap orang yang mempelajari logika untuk berpikir secara rasional, kritis, lurus, tetap, tertib, metodis dan koheren.
2. Meningkatkan kemampuan berpikir secara abstrak, cermat, dan objektif.
3. Menambah kecerdasan dan meningkatkan kemampuan berpikir secara tajam dan mandiri.
4. Memaksa dan mendorong orang untuk berpikir sendiri dengan menggunakan asas-asas sistematis
5. Meningkatkan cinta akan kebenaran dan menghindari kesalahan-kesalahan berpkir, kekeliruan serta kesesatan.
6. Mampu melakukan analisis terhadap suatu kejadian.
7. Terhindar dari klenik , gugon-tuhon (bahasa Jawa)
8. Apabila sudah mampu berpikir rasional,kritis ,lurus,metodis dan analitis sebagaimana tersebut pada butir pertama maka akan meningkatkan citra diri seseorang.

Pengambilan keputusan oleh seorang hakim dalam mengadili seorang terdakwa merupakan contoh sederhana penerapan Logika Matematika. Tentu saja sebelum mengambil keputusan, seorang hakim perlu didukung bukti-bukti yang menguatkan.

BAB V PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR DAN KUADRAT

Penyusun : Afifatuz Zahro, S.Pd.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

Pendahuluan

Modul ini menyajikan standart kompetensi "Memecahkan Masalah Yang Berkaitan Dengan Persamaan Dan Pertidaksamaan Linier Dan Kuadrat". Didalamnya dibahas tentang menentukan himpunan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan linier, menentukan himpunan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, menerapkan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, dan menyelesaikan sistem persamaan linier.

I. Persamaan dan pertidaksamaan linier.

a. Persamaan linier dengan satu variabel.

Persamaan linier dengan satu variabel didefinisikan sebagai suatu persamaan yang peubah (variabel) dari persamaan tersebut pangkat tertingginya adalah satu. Bentuk umum persamaan linier dengan satu variabel dinyatakan dengan :

$$\boxed{ax + b = 0 \;\; ; \text{a,b} \in \text{R} \; ; \text{a} \neq 0}$$

Dengan : a = koefisien dari x
x = variabel
b = konstanta

Nilai x yang memenuhi persamaan linier tersebut disebut *penyelesaian dari persamaan linier.*

Beberapa sifat yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan persamaan linier satu variabel, yaitu :

1. Nilai persamaan tidak berubah jika pada ruas kiri dan kanan ditambahkan atau dikurangkan dengan bilangan negatif atau bilangan positif yang sama.
2. Nilai persamaan tidak berubah jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif atau bilangan positif yang sama.

Contoh :

Tentukan nilai x dari :

a. 2 – 3x = 8
b. 2x + 1 = 3x -5

Jawab :

a. 2 – 3x = 8
– 3x = 8 – 2
– 3x = 6
x = –2

b. 2x + 1 = 3x – 5
2x – 3x = –5 – 1
–x = –6
x = 6

Latihan Soal 1

Tentukan nilai variabel tiap persamaan berikut :

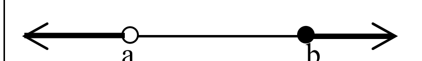
1. $2x - 4 = -10$
2. $7 - 2b = b + 19$
3. $\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3} = \frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$
4. $3t - (t - 6) = 5(t - 3)$
5. $\frac{2y-1}{5} = \frac{y+2}{3}$
6. $2 - 3(1 - 2m) = 5 - 2(2m + 3)$
7. $\frac{2x-11}{3} + 5 = \frac{1+x}{2} - 4$
8. $3(2p + 1) = -2(p - 3)$
9. $6q + 5 = 2q - 3$
10. $\frac{3r}{5} = -2(r + 5)$

b. Pertidaksamaan linier dengan satu variabel

Pertidaksamaan linier adalah kalimat terbuka yang variabelnya berderajat satu dengan menggunakan tanda hubung "$\leq, <, \neq, \geq, >$". Bentuk umum dari pertidaksamaan linier satu variabel dinyatakan dengan :

$$ax + b < 0 \text{ atau } ax + b \leq 0 \text{ atau } ax + b > 0 \text{ atau } ax + b \geq 0$$

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan biasanya dinyatakan dengan himpunan atau dituliskan dalam bentuk interval atau selang pada garis bilangan. Beberapa bentuk atau jenis interval disajikan sebagai berikut :

Pertidaksamaan	Grafik
$a \leq x \leq b$	
$a < x < b$	
$a \leq x < b$	
$a < x \leq b$	
$x \geq a$	
$x < b$	
$x < a$ atau $x \geq b$	

Beberapa sifat yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan pertidaksamaan :

1. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika pada ruas kiri dan kanan ditambahkan atau dikurangkan dengan bilangan positif atau bilangan negatif yang sama.
2. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.
3. Tanda pertidaksamaan berubah jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama.

Contoh.
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan dibawah ini $(x \in \Re)$:

a. $10x < 2x - 8$

b. $3 - 4x \geq 9 - x$

c. $\frac{3+6x}{2} < \frac{x-1}{3}$

Jawab.

a. $10x < 2x - 8$

$\Leftrightarrow 10x - 2x < -8$

$\Leftrightarrow \quad 8x < -8$

$\Leftrightarrow \quad x < -1$

Jadi HP = $\{x \mid x < -1, x \in \Re\}$

b. $3 - 4x \geq 9 - x$

$\Leftrightarrow -4x + x \geq 9 - 3$

$\Leftrightarrow \quad -3x \geq 6$

$\Leftrightarrow \quad x \leq -2$

Jadi HP = $\{x \mid x \leq -2, x \in \Re\}$

c. $\frac{2+6x}{2} < \frac{x-1}{3}$

$\Leftrightarrow 3(2+6x) < 2(x-1)$

$\Leftrightarrow \quad 6 + 18x < 2x - 2$

$\Leftrightarrow 18x - 2x < -2 - 6$

$\Leftrightarrow \quad 16x < -8$

$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{8}{16}$

$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{2}$

Jadi HP = $\left\{x \,\middle|\, x < -\frac{1}{2}, x \in \Re\right\}$

Latihan soal 2.
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut ini $(x \in \Re)$:

1. $7x - 5 > 5x + 1$
2. $5x + 2 \leq 8x - 7$
3. $\frac{2+3x}{2} \geq \frac{x-4}{3}$
4. $\frac{5x-7}{4} < \frac{3x-1}{2}$
5. $\frac{2x-1}{3x+5} \leq 1$
6. $\frac{2x-3}{5} \geq \frac{12+x}{2}$
7. $\frac{10}{2x+2} > 1$ dengan $x \neq -1$
8. $\frac{2-x}{x+1} + 4 \leq 0$ dengan $x \neq -1$
9. Sebuah pabrik yang memproduksi pensil membutuhkan biaya Rp.3.500,- untuk memproduksi tiap unit pensil. Biaya operasionalnya Rp.100.000,-. Jika pensil akan dijual Rp.5.000,- per unit, tentukan banyaknya pensil yang harus diproduksi agar memperoleh untung paling sedikit Rp.80.000,-.
10. Berat astronot dan pesawatnya ketika mendarat di bulan tidak boleh melebihi 200 kg. Jika berat pesawat di bumi 900 kg dan berat benda di bulan seperenam dari berat benda di bumu. Tentukan berat maksimum astronot di bumi.

II. Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat.

a. Persamaan Kuadrat.

Persamaan kuadrat didefinisikan sebagai kalimat terbuka yang menyatakan hubungan sama dengan (=) dengan pangkat tertinggi dari peubahnya (variabelnya) adalah dua. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ ; dengan a, b, c} \in \text{R ; a} \neq 0}$$

1. Menentukan akar-akar persamaan kuadrat.

Sama seperti pada persamaan linier, nilai-nilai yang memenuhi persamaan kuadrat disebut penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut dan dikenal juga dengan istilah *akar-akar persamaan kuadrat*. Ada tiga cara yang dapat difgunakan untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat, yaitu dengan faktorisasi, melengkapkan kuadrat sempurna dan rumus kuadrat (rumus abc).

Faktorisasi (memfaktorkan).

Untuk menyelesaikan persamaan $ax^2+bx+c=0$ dengan faktorisasi terlebih dahulu cari dua bilangan (misalnya x_1 dan x_2) yang memenuhi syarat sebagai berikut : $x_1 . x_2 = a.c$ dan $x_1 + x_2 = b$.

Prinsip dasar yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan faktorisasi adalah sifat perkalian, yaitu : jika ab = 0 maka a = 0 atau b = 0.

Contoh.

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat berikut dengan cara faktorisasi :

a. $x^2+3x-28=0$ c. $x^2-9=0$

b. $3x^2-2x-5=0$

Jawab.

a. $x^2+3x-28=0$, dengan a = 1, b = 3, dan c = – 28

Cari dua bilangan yang hasil kalinya=1.(–28)=–28 dan jumlahnya 3. Bilangan yang dimaksud adalah – 4 dan 7, sehingga :

$x^2+3x-28=0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+7)=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-4)=0 \; atau \; (x+7)=0$

$\Leftrightarrow \quad x_1=4 \; atau \quad x_2=-7$

Untuk a = 1 berlaku :

$x^2 + 3x - 28 = 0$

$-28\begin{cases} 7 \\ -4 \end{cases}$

$\underline{} \; +$

3

(x + 7) (x – 4) = 0

x + 7 = 0 V x – 4 = 0

x = – 7   x = 4

b. $3x^2-2x-5=0$, dengan a = 3, b = - 2 , dan c = -5

Cari dua bilangan yang hasil kalinya=3.(–5)= –15 dan jumlahnya –2. Bilangan yang dimaksud adalah -5 dan 3, sehingga :

$3x^2-2x-5=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2-2x-5}{3}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x-5)(3x+3)}{3}=0$

$\Leftrightarrow \quad 3x-5=0 \; atau \; 3x+3=0$

$\Leftrightarrow \quad 3x=5 \; atau \quad 3x=-3$

$\Leftrightarrow \quad x_1=\dfrac{5}{3} \; atau \quad x_2=-1$

Untuk a ≠ 1 berlaku :

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$3 \cdot (-5) = -15\begin{cases} -5 \\ 3 \end{cases}$

$\underline{} \; +$

-2

$3x^2 - 5x + 3x - 5 = 0$

$x(3x-5) + (3x-5) = 0$

$(3x-5)\,(x+1) = 0$

$3x - 5 = 0 \text{ V } x + 1 = 0$

$x = \dfrac{5}{3} \qquad x = -1$

c. $x^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+3) = 0 \; atau \; (x-3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = -3 \quad atau \quad x_2 = 3$

Melengkapkan kuadrat sempurna.

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diubah menjadi bentuk kuadrat sempurna dengan cara sebagai berikut :

1. Pastikan bahwa koefisien x^2 adalah 1, jika belum bernilai 1 bagilah dengan suatu bilangan sehingga koefisiennya menjadi 1.
2. Tambahkah ruas kiri dan kanan dengan setengah koefisien dari x, kemudian kuadratkan.
3. Buatlah ruas kiri menjadi kuadrat sempurna, sedangkan ruas kanan sederhanakan.

Contoh.

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat berikut dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna :

a. $x^2 + 6x - 16 = 0$ b. $3x^2 - 9x = 0$

Jawab.

a. $x^2 + 6x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x = 16$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + \left(\frac{1}{2}.6\right)^2 = 16 + \left(\frac{1}{2}.6\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 3^2 = 16 + 3^2$

$\Leftrightarrow \quad (x+3)^2 = 25$

$\Leftrightarrow \quad x + 3 = \pm 5$

$\Leftrightarrow \quad x + 3 = 5 \; atau \; x + 3 = -5$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 - 3 \; atau \; x = -5 - 3$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 2 \; atau \; x_2 = -8$

b. $3x^2 - 9x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{1}{2}.(-3)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}.(-3)\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \; atau \; x_2 = -\frac{3}{2} +$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 3 \; atau \; x_2 = 0$

Rumus kuadrat (rumus abc).

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka :

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Rumus diatas disebut *rumus abc*.

Contoh.

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat berikut dengan cara faktorisasi :

a. $x^2 + 3x - 28 = 0$

b. $3x^2 - 2x - 5 = 0$

Jawab.

a. $x^2+3x-28=0$, dengan a = 1,b = 3, c = –28

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.1.(-28)}}{2.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{-3\pm\sqrt{121}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{-3+11}{2}\ \textit{atau}\ x_2=\frac{-3-11}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad =4 \quad \textit{atau} \quad =-7$$

b. $3x^2-2x-5=0$,dengan a=3,b = –2,c =–5

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.3.(-5)}}{2.3}$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{2\pm\sqrt{64}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{2+8}{6}\ \textit{atau}\ x_2=\frac{2-8}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{10}{6} \quad \textit{atau} \quad =-1$$

$$\Leftrightarrow \quad =\frac{5}{3}$$

2. Jenis-jenis akar persamaan kuadrat.

Jika diperhatikan cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat, maka jenis akar-akar tersebut akan bergantung pada nilai diskriminan (D), yaitu D = b^2-4ac .
Beberapa jenis akar berdasarkan nilai diskriminan adalah :

a. Jika D > 0, maka persamaan kuadrat memiliki dua akar real yang berbeda.
b. Jika D = 0, maka persamaan kuadrat memiliki dua akar real yang sama (dua akar kembar).
c. Jika D < 0, maka persamaan kuadrat memiliki akar-akar yang tidak real (imajiner).
d. Jika D ≥ 0, maka persamaan kuadrat memiliki akar-akar real
e. Jika D = k^2, k = 1, 2, 3, … maka persamaan kuadrat memiliki akar-akar rasional.

Contoh.

Tanpa menentukan nilai akar-akarnya terlebih dahulu, selidiki jenis akar-akar persamaan kuadrat berikut :

a. $2x^2+x+5=0$
b. $x^2-2x-3=0$
c. Tentukan harga k agar persamaan kuadrat $x^2+4x+2k-4=0$ memiliki dua akar kembar.

Jawab.

a. $2x^2+x+5=0$

$$D=b^2-4ac$$

$$\Leftrightarrow D=1^2-4.2.5$$

$$\Leftrightarrow D=1-40$$

$$\Leftrightarrow D=-39<0$$

Jadi persamaan kuadrat $2x^2+x+5=0$ memiliki akar-akar imajiner.

b. $x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow D = (-2)^2 - 4.1.(-3)$

$\Leftrightarrow D = 4 + 12$

$\Leftrightarrow D = 16 > 0$

Jadi persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 3 = 0$ memiliki dua akar real yang berbeda.

c. $x^2 + 4x + 2k - 4 = 0$, dengan a = 1, b = 4, dan c = 2k – 4

Syarat dua akar kembar D = 0, sehingga :

$D = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow 0 = 4^2 - 4.1.(2k - 4)$

$\Leftrightarrow 0 = 16 - 8k + 16$

$\Leftrightarrow 0 = 32 - 8k$

$\Leftrightarrow 8k = 32$

$\Leftrightarrow k = 4$

3. Rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat.

Jika suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka berlaku :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jika kedua akar-akar tersebut dijumlahkan atau dikalikan maka diperoleh rumus jumlah dan hasil kali persamaan kuadrat sebagai berikut :

a. Jumlah akar $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

b. Hasil kali akar $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Contoh.

1. Jika x_1 dan x_2 adalah akar akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 2 = 0$, tentukanlah :

   a. $x_1 + x_2$ b. $x_1 \cdot x_2$ c. $x_1^2 + x_2^2$

Jawab.

Dari persamaan $x^2 - 4x + 2 = 0$ diperoleh a = 1, b = -4, dan c = 2

a. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$

b. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

c. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= 4^2 - 2 \cdot 2$

$= 12$

2. Hitunglah nilai k agar persamaan $3x^2 + (k-2)x + k + 1 = 0$ mempunyai akar-akar yang saling berlawanan.

Jawab.

Dari persamaan kuadrat $3x^2 + (k-2)x + k + 1 = 0$ diperoleh :
a = 3, b = k – 2, dan c = k + 1.
Karena akar-akarnya berlawanan maka $x_1 = -x_2$, sehingga :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow -x_2 + x_2 = -\frac{k-2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{k-2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = -k + 2$$
$$\Leftrightarrow \quad k = 2$$

4. Menyusun persamaan kuadrat.

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka dapat disusun suatu persamaan kuadrat dengan rumus :

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad \text{atau} \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0}$$

Contoh.

1. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya -3 dan 5.

Jawab.

$x_1 = -3$ dan $x_2 = 5$, maka :

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - (-3))(x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x + 3)(x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

2. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 8 = 0$, maka tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya dua kali akar-akar semula.

Jawab.

Dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 8 = 0$ diperoleh

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{1} = -2 \quad \text{dan} \quad \alpha \cdot \beta = \frac{-8}{1} = -8$$

Misal akar-akar persamaan kuadrat baru adalah $x_1 = 2\alpha$ dan $x_2 = 2\beta$, sehingga :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2\alpha + 2\beta \\ &= 2(\alpha + \beta) \\ &= 2 \cdot (-2) \\ &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= 2\alpha \cdot 2\beta \\ &= 4 \cdot \alpha \cdot \beta \\ &= 4 \cdot (-8) \\ &= -32 \end{aligned}$$

Jadi persamaan kuadratnya adalah :

$$x^2 - (x_1 + x_2)x - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$
$$x^2 - (-4)x - 2 \cdot (-32) = 0$$
$$x^2 + 4x + 64 = 0$$

Latihan soal 3.

1. Selesaikan persamaan kuadrat berikut dengan faktorisasi.
   a. $x^2 - 7x + 6 = 0$
   b. $2x^2 + 7x + 5 = 0$
   c. $6x^2 - 11x = -3$
   d. $-4x^2 + 2x = 0$
   e. $x^2 - 64 = 0$
2. Selesaikan persamaan kuadrat berikut dengan melengkapkan kuadrat sempurna.
   a. $x^2 + 5x - 14 = 0$
   b. $4x^2 + 5x - 3 = 0$
   c. $2x^2 - 8 = 0$
3. Gunakan rumus abc untuk menyelesaikan persamaan kuadrat berikut.
   a. $3x^2 - 4x = 7$
   b. $x^2 - x - 5 = 0$
   c. $x^2 + 5x - 14 = 0$
4. Selidikilah jenis-jenis akar dari persamaan kuadrat berikut.
   a. $x^2 - 22x + 121 = 0$
   b. $x^2 + 5x = 36$
   c. $x(x - 4) = 36$
5. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 3 = 0$, tentukan :
   a. $x_1 + x_2$
   b. $x_1 \cdot x_2$
   c. $x_1^2 + x_2^2$
   e. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
   f. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$
6. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya -3 dan 2.
7. Jika m dan n adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 11x + 30 = 0$, maka tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya (m – 4) dan (n – 4).
8. Salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 + 7x + c = 0$ adalah 2. Tentukan nilai c dan akar yang lainnya.
9. Diketahui x =1 memenuhi persamaan $(k-1)x^2 + (3k-1)x = 3k$. Tentukan nilai k dan akar-akar persamaan tersebut.
10. Tentukan nilai p agar persamaan $x^2 - 2px - p + 2 = 0$ memilik akar kembar.

b. Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk umum : $ax^2+bx+c<0$ atau $ax^2+bx+c\leq 0$
atau $ax^2+bx+c>0$ atau $ax^2+bx+c\geq 0$

Pertidaksamaan adalah suatu pertidaksamaan yang mempunyai variabel dengan pangkat tertingginya dua. Himpunan penyelesaian dari pewrtidaksamaan kuadrat dapat dituliskan dalam bentuk notasi himpunan atau garis bilangan. Langkah-langkah untuk menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat adalah :

1. Nyatakan pertidaksamaan kuadrat dalam bentuk persamaan kuadrat.
2. Carilah akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut.
3. Buatlah garis bilangan yang memuat akar-akar tersebut, kemudian tentukan tanda (positif atau negatif) pada masing-masing interval.
4. Himpunan penyelesaian diperoleh dari interval yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

Contoh.
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksaman berikut ini :

a. $x^2+5x-14<0$
b. $x^2-6x+5\leq 0$

Jawab.

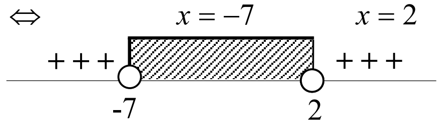
a. $x^2+5x-14<0$

$x^2+5x-14=0$

$\Leftrightarrow (x+7)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad x+7=0 \; atau \; x-2=0$

$\Leftrightarrow \quad x=-7 \qquad x=2$



Jadi HP = $\{x|-7<x<2\}$

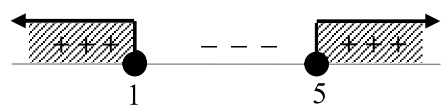
b. $x^2-6x+5\geq 0$

$x^2-6x+5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow \quad x-1=0 \; atau \; x-5=0$

$\Leftrightarrow \quad x=1 \qquad x=5$



Jadi HP = $\{x|x\leq 1 \; atau \; x\geq 5\}$

Latihan soal 4

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut :

1. $5x^2+9x-2>0$
2. $x^2-x-12\leq 0$
3. $2x^2+5x\geq 7$
4. $-3x^2+2x<-1$
5. $5x^2>2x+3$
6. Sebuah industri rumah tangga memproduksi suatu jenis barang dan menjualnya seharga Rp.7.000,- per unit. Biaya pembuatan x unit barang tersebut diperoleh menurut persamaan $B=2x^2+2.000x$. Berapa unit barang harus diproduksi dan kemudian dijual agar mendapatkan laba paling banyak Rp.2.000.000,- ?
7. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $(2x-1)^2\leq(5-x)^2$!
8. Gambarkan interval grafik penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2+2\geq 90$!

III. Sistem Persamaan Linier dengan Dua Variabel.

Bentuk umum : $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$; a, b, c, d, p, q $\in$ R

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dapat dicari dengan cara substitusi, eliminasi atau gabungan (eliminasi dan substitusi).

Contoh.

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$ dengan menggunakan cara substitusi, eliminasi, dan gabungan!

Jawab.

a. Cara substitusi

Misalkan yang akan disubstitusi adalah variabel x pada persamaan x – y = 1. Dari persamaan tersebut diperoleh x = y + 1, yang kemudian disubstitusi ke persamaan berikutnya, diperoleh :

$$
\begin{aligned}
& 2x - 3y = 6 \\
\Leftrightarrow\ & 2(y+1) - 3y = 6 \\
\Leftrightarrow\ & 2y + 2 - 3y = 6 \\
\Leftrightarrow\ & -y = 6 - 2 \\
\Leftrightarrow\ & -y = 4 \\
\Leftrightarrow\ & y = -4
\end{aligned}
$$

Sehingga x = -4 + 1 = -3

Jadi HP = $\{(-3,-4)\}$

b. Cara eliminasi.

Untuk mencari variabel y berarti variabel x dieliminasi.

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x - 3y = 6 & \times 1 & 2x - 3y = 6 \\
x - y = 1 & \times 2 & \underline{2x - 2y = 2} \\
 & & -y = 4 \\
 & & y = -4
\end{array}
$$

Untuk mencari variabel x berarti variabel y dieliminasi.

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x - 3y = 6 & \times 1 & 2x - 3y = 6 \\
x - y = 1 & \times 3 & \underline{3x - 3y = 3} \\
 & & -x = 3 \\
 & & x = -3
\end{array}
$$

Jadi HP = $\{(-3,-4)\}$

c. Cara gabungan (eliminasi dan substitusi)

Misalnya mengeliminasi variabel x.

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x - 3y = 6 & \times 1 & 2x - 3y = 6 \\
x - y = 1 & \times 2 & \underline{2x - 2y = 2} \\
 & & -y = 4 \\
 & & y = -4
\end{array}
$$

Substitusikan nilai tersebut ke persamaan x – y = 1

x – (-4) = 1

x + 4 = 1

x = -3

Jadi HP = $\{(-3,-4)\}$

Latihan soal 5

Jadi HP = $\{(-3,-4)\}$

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier berikut.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3a + b = 5 \\ 2a - b = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = -7 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 4x - 3y = 15 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 6 \\ -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut :

a. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -6x \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 + x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x + 21 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 - y^2 = 45 \end{cases}$

3. Selisih dua bilangan positif adalah 3 dan jumlah kuadratnya adalah 65. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.
4. Empat tahun yang lalu umur ayah delapan kali umur anaknya. Enam tahun yang akan datang jumlah umur ayah dan anaknya adalah 56 tahun. Tentukan umur ayah dan anaknya sekarang.
5. Jumlah siswa suatu kelas adalah 52 anak. Jika banyak murid laki-laki adalah 7 orang lebihnya daripada dua kali banyaknya murid wanita, tentukan banyaknya murid wanita dan laki-laki !

== oOo ==

Latihan Akhir Kompetensi

A. Pilihan Ganda.

1. Himpunan penyelesaian dari $-6 < 3(x-1) < 9$ adalah ....
   a. $\{x \mid -2 < x < 3\}$
   b. $\{x \mid -1 < x < 3\}$
   c. $\{x \mid -2 < x < 2\}$
   d. $\{x \mid 1 < x < 4\}$
   e. $\{x \mid -1 < x < 4\}$
2. Nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{2-4x}{9} = \frac{x+5}{-2}$ adalah ....
   a. -49
   b. -43
   c. -39
   d. 43
   e. 47
3. Penyelesaian dari persamaan $5(x-6)+15-3(x+5)=4(x-1)$ adalah ....
   a. -11
   b. -12
   c. -13
   d. -14
   e. -15
4. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{1}{2}(x-2) < 3(x-1)$ adalah ....
   a. $\{x \mid x > 4\}$
   b. $\{x \mid x < 5\}$
   c. $\left\{x \mid x < \frac{2}{3}\right\}$
   d. $\left\{x \mid x > \frac{4}{3}\right\}$
   e. $\left\{x \mid x > -\frac{4}{3}\right\}$
5. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 dan $\frac{2}{5}$ adalah ....
   a. $5x^2 - 17x + 6 = 0$
   b. $4x^2 - 10x + 3 = 0$
   c. $5x^2 - 5x + 4 = 0$
   d. $5x^2 - 12x + 2 = 0$
   e. $5x^2 - 12 = 0$
6. Jika $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} < \frac{x}{6} + \frac{3}{4}$ maka nilai x yang memenuhi adalah ....
   a. $x < \frac{4}{5}$ 2
   b. $x < \frac{4}{6}$
   c. $x < \frac{5}{4}$
   d. $x > \frac{6}{4}$
   e. $x > \frac{4}{5}$
7. Penyelesaian dari $3t - 1 \le \frac{5}{3}(-3+t)$ adalah ....
   a. $t \le 24$
   b. $t > -24$
   c. $t \ge 24$
   d. $0 \le t < 24$
   e. $-24 \le t \le 0$

8. Agar persamaan $x^2 + (k+2)x + (x+3) = 0$ mempunyai akar kembar, maka nilai k adalah ....
   a. ± 8
   b. ± 4
   c. $\pm 2\sqrt{2}$
   d. ± 2
   e. ± 1
9. Jika persamaan $ax^2 - 4x + 10 = 0$ mempunyai akar-akar α dan β dengan $\alpha \cdot \beta = 5$ maka nilai dari $\alpha + \beta$ adalah ....
   a. -8
   b. -4
   c. -2
   d. 2
   e. 8
10. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $4x^2 - 8x + 3 > 0$ adalah ....
   a. $x < \frac{1}{2}$ *atau* $x > \frac{3}{2}$
   b. $x > \frac{1}{2}$ *atau* $x > \frac{3}{2}$
   c. $x < -\frac{1}{2}$ *atau* $x > -\frac{3}{2}$
   d. $x > -\frac{1}{2}$ *atau* $x < -\frac{3}{2}$
   e. $x > -\frac{1}{2}$ *atau* $x > -\frac{3}{2}$
11. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 < 9$ adalah ....
   a. $x > -3$
   b. $x > 3$
   c. $-3 < x < 3$
   d. $x < -3$ *atau* $x > 3$
   e. $x < 3$ *atau* $x > -3$
12. Himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x + 4y = 27 \end{cases}$ adalah ....
   a. {-1,-6}
   b. {-1,6}
   c. {2,-6}
   d. {1,6}
   e. {2,6}
13. Jika diskriminan $x^2 - x - m = 0$ adalah 0, maka nilai m adalah ....
   a. -4
   b. -0,25
   c. 0
   d. 0,25
   e. 4
14. Salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 + 3px + p + 2 = 0$ adalah 6, maka nilai p adalah ....
   a. -5
   b. -2
   c. 0
   d. 1
   e. 2
15. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 4 dan -6 adalah ....
   a. $x^2 - 10x - 24 = 0$
   b. $x^2 + 10x - 24 = 0$
   c. $x^2 + 2x + 24 = 0$
   d. $x^2 - 2x - 24 = 0$
   e. $x^2 + 2x - 24 = 0$
16. Bentuk perkallian dari $8x^2 + 18x - 5 = 0$ adalah ....
   a. $(4x+5)(2x-1)$
   b. $(4x-1)(2x-5)$
   c. $(4x+1)(2x+5)$
   d. $(4x-5)(2x-1)$
   e. $(4x-1)(2x+5)$
17. Sepuluh tahun yang lalu umur Hani dua kali umur Fani. Lima tahun dari sekarang umur Hani menjadi satu setengah kali umur Fani. Umur Hani sekarang adalah

a. 20 tahun
b. 25 tahun
c. 30 tahun
d. 35 tahun
e. 40 tahun

18. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 6 = 0$, maka nilai dari $x_1^2 + x_2^2$ adalah ....
a. -8
b. -3
c. 3
d. 6
e. 8

19. Sepotong kawat sepanjang x cm akan dibentuk menjadi persegi. Agar luasnya lebih besar daripada kelilingnya, maka nilai x yang memenuhi adalah ....
a. x > 4
b. x > 8
c. x < 8
d. x < 16
e. x >16

20. Nilai x dari persamaan $\frac{-2-4x}{7} = \frac{x+5}{2}$ adalah ....
a. -39
b. -31
c. -3
d. 3
e. 39

21. Nilai x dari sistem persamaan $\begin{cases} x - 5y = -15 \\ -3x + 7 = 17 \end{cases}$ adalah ....
a. -6
b. -5
c. -2
d. 2
e. 5

22. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 3x - 2 = 0$ adalah p dan q. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $\frac{p}{q}$ dan $\frac{q}{p}$ adalah ....
a. $2x^2 + 13x + 2 = 0$
b. $2x^2 + 13x - 2 = 0$
c. $2x^2 - 13x - 2 = 0$
d. $x^2 - 13x + 2 = 0$
e. $x^2 + 13x - 2 = 0$

23. Jika x dan y adalah merupakan penyelesaian dari $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$ maka nilai x+y =...
a. -4
b. -1
c. 1
d. 2
e. 7

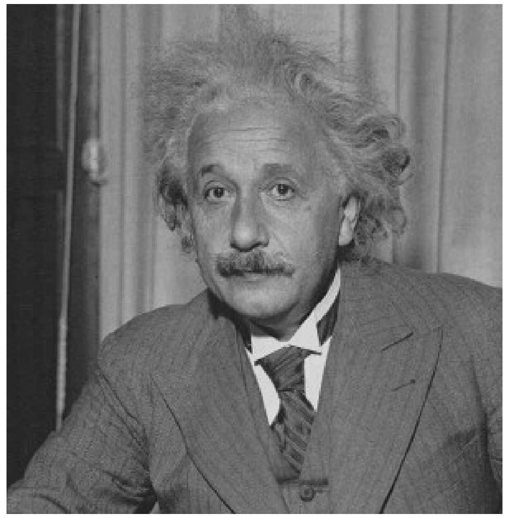
24. Persamaan $(m+2)x + 6x + 3m = 0$ mempunyai akar-akar real. Maka batas-batas nilai m adalah ....
a. $m \le -3$ *atau* $m \ge 1$
b. $-1 \le m \le 3$
c. $m \le -1$ *atau* $m \ge 3$
d. $-3 \le m \le -1$
e. $-3 \le m \le 1$

25. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat dengan hasil penjumlahannya adalah -2 dan hasil perkaliannya adalah -3. Maka persamaaan kuadrat tersebut adalah ....
a. $x^2 - 3x + 2 = 0$
b. $x^2 - 3x - 2 = 0$
c. $x^2 - 2x - 3 = 0$
d. $x^2 - 2x + 3 = 0$
e. $x^2 + 2x - 3 = 0$

B. Soal Essay.

26. Tentukan penyelesaian dari persamaan $2(4x + 7) = 4 - 2(x + 5)$!
27. Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya merupakan lawan dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 10x = 3$!
28. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksaman $-x^2 - 7x - 18 \geq 0$!
29. Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$!
30. Sebuah kotak terbuka akan dibuat dari bahan seluas 160 cm^2. Jika tinggi kotak adalah 3 cm dan sisi alas kotak berbentuk persegi, tentukan panjang sisi alasnya !
31. Persamaan kuadrat $2x^2 - px + 8 = 0$ mempunyai dua akar real berbeda. Tentukan nilai p yang memenuhi persamaan tersebut !
32. Gambarkan grafik himpunan penyelesaian $x^2 - 2x - 15 \geq 0$!
33. Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - x - 28 = 0$!
34. Keliling sebuah persegipanjang adalah 50 cm. Jika lebarnya 5 cm lebih pendek daripada panjangnya, tentukan luas persegipanjang tersebut !
35. Perbandingan uang Andra dan Dani adalah 2 : 3. Perbandingan uang Andra dan Iman adalah 1 : 4. Jika jumlah uang Andra dan Dani adalah Rp.150.000,- kurangnya dari uang Iman. Tentukan jumlah uang masing-masing !

Permintaan Terakhir Einstein



Tahun 1955, Albert Einstein, fisikawan terkemuka di dunia, harus dirawat di rumah sakit karena pendarahan akibat pembuluh nadinya pecah.

Sejak Einstein mempublikasikan teori relativitasnya, dia berhasil mendapat anugerah Nobel dan ikut berperan dalam pembuatan bom atom. Fisikawan ini telah terkenal diseluruh dunia semasa dia hidup hingga sekarang.

Semasa perawatan dirumah sakit, Einstein menyadari tidak memiliki banyak waktu untuk tinggal didunia ini.

Jadi dia meminta dua hal pada kerabat dan teman-temannya. Yakni pertama, jangan menjadikan tempat tinggalnya menjadi sebuah museum peringatan untuk memuliakan dirinya. Kedua, meminta untuk memberikan tempat kerjanya kepada orang lain yang membutuhkannya.

Meskipun Einstein telah menjadi ilmuwan yang sukses dan memiliki reputasi di masyarakat internasional, permohonannya akan dua hal ini, lenyap begitu saja saat dia meninggal dunia.

Hingga menit-menit terakhir sebelum kepergiannya, dia tak bosan-bosan mengulang perkataannya untuk tidak mengadakan upacara pemakaman bagi dirinya maupun mendirikan sebuah monumen peringatan apapun.

Pemakaman Einstein berlangsung dengan amat sederhana. Berdasarkan permintaan terakhirnya, tubuhnya dikremasi dan abu jenasahnya disimpan disebuah tempat yang tidak diumumkan ke publik.

BAB VI FUNGSI LINEAR DAN KUADRAT

Penyusun : Haula, S.Pd. ; Bambang S. S.Pd.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

I. Mendeskripsikan Perbedaan Konsep Relasi dan Fungsi

1. Pengertian Relasi dan Fungsi

A. Relasi adalah pemasangan atau perkawanan antara anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.

Contoh :

Jika himpunan A = {Bandung, Denpasar, Medan}
B = {Jabar, Bali, Sumut}

Bandung adalah ibukota propinsi Jabar, Denpasar ibukota propinsi Bali dan Medan ibukota propinsi Sumut. Jadi relasi antara himpunan A ke himpunan B adalah ”ibukota propinsi”

Relasi antar himpunan dapat dinyatakan dalam 3 cara:

- Diagram panah
- Diagram cartesius
- Pasangan berurutan

Contoh :

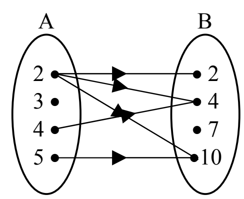
Jika A = {2, 3, 4, 5} dan B = {2, 4, 7, 10}

Jika relasi A ke B adalah ”faktor dari”, maka nyatakan relasi A ke B dengan:

a) Diagram panah
b) Pasangan berurutan
c) Diagram cartesius

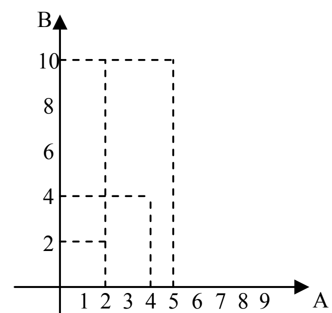
Jawab :

a) Dengan diagram panah



b) Himpunan pasangan berurutan:
{(2,2), (2,4), (2,10), (4,4), (5,10)}

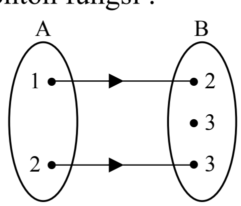
c) Diagram cartesius



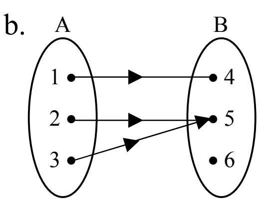
B. Fungsi adalah relasi (hubungan) antara himpunan A ke himpunan B yang memasangkan setiap anggota pada himpunan A dengan tepat satu pada anggota B.

Contoh fungsi :

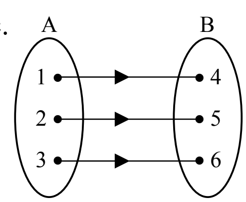
a.



b.



c.



A disebut daerah asal (domain)

B disebut daerah kawan (kodomain)

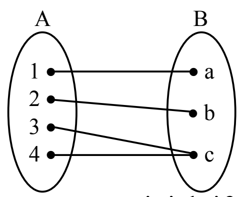
Himpunan semua kawan anggota A disebut daerah asli (range)

Sifat-sifat fungsi :

1) Fungsi Onto (Fungsi Surjektif)

   Suatu fungsi mempunyai range fungsi sama dengan kodomain maka fungsi tersebut dikatakan surjektif

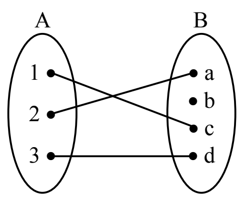
   Contoh :



2) Fungsi Satu-satu atau injektif

   Fungsi f : A → B disebut fungsi satu-satu apabila setiap anggota B yang mempunyai pasangan di A hanya tepat satu B.

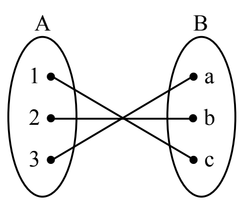
   Contoh :



3) Fungsi Bijektif

   Fungsi f : A → B disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

   Contoh :

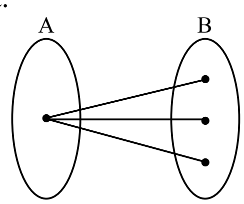


Latihan Soal!

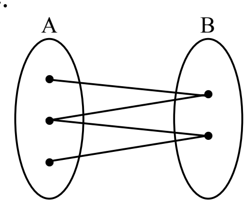
A. Pilihlah salah satu jawaban yang paling benar!

1. Dari diagram panah di bawah ini yang menunjukkan fungsi adalah….

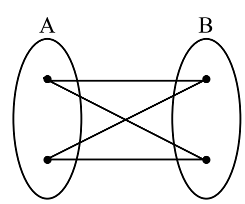
   a.



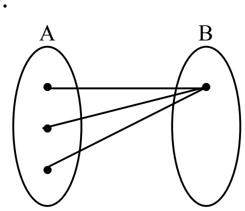
   c.



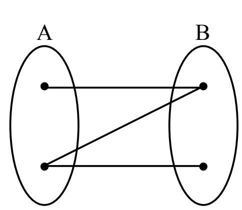
   e.



   b.



   d.



2. Diketahui sebuah fungsi $f(x) = x^2 + 1$, maka nilai f(3) adalah .....

   a. -9 b. 9 c. -3 d. 8 e. 10

3. Jika relasi anggota himpunan bilangan real dan f suatu fungsi dari R ke R dengan $f(x) = 2x^2 + 1, x \in R$, maka nilai $f(x + 1)$ adalah.....
   a. $2x^2 - 4ac + 3$
   b. $-2x^2 + 4x + 3$
   c. $-2x^2 + 4 - 3$
   d. $-2x^2 + 4x + 3$
   e. $-2x^2 - 4x - 3$
4. Dua buah himpunan A = {-2, -1, 0, 1, 2, 3} dan B = {0, 1, 2, 4, 9, 16} Bila A direlasikan dengan B sebagai "kuadrat dari" maka rangenya adalah.....
   a. {0, 1, 4, 9}
   b. {2, 4, 6, 8}
   c. {2, 4, 6, 8}
   d. {1, 2, 3}
   e. {-2, -1, 0, 1, 2, 3}
5. Diketahui f didefinisikan :
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, \text{ jika } x \in \text{prima} \\ (x - 4), \text{ jika } x \in \text{komposisi genap} \\ (x + 7), \text{ jika } x \in \text{bilanganganjil} \end{cases}$$
   Nilai dari f(6) adalah......
   a. 32 b. 60 c. 2 d. 13 e. 17

B. Jawablah soal di bawah ini dengan benar!

1. Diketahui $f(x) = x2 + 1, x \in B$ dan $B = \{x| -2 \le x \le 2\}$. Tentukan:
   a. Daerah asal
   b. Daerah kawan
   c. Daerah hasil
   d. Nyatakan fungsinya dengan pasangan berurutan
   e. Nyatakan fungsinya dengan grafik cartesius
2. Dari fungsi-fungsi yang disajikan dengan himpunan pasangan berurutan berikut ini manakah yang merupakan fungsi onto, injektif, atau bijektif. Jika domain A = {a, b, c, d} dan kodomain B = {1, 2, 3, 4}?
   a. {(a, 1), (b, 1), (c, 3), (d, 4)}
   b. {(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 3)}
   c. {(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 4)}
   d. {(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2)}
   e. {(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)}

2. Konsep Fungsi Linear

1) Pengertian fungsi linear

Fungsi linear adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus. Oleh karena itu, fungsi linear sering disebut dengan persamaan garis lurus (pgl) dengan bentuk umumnya sebagai berikut:

$f : x \to mx + c$ atau $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$
m adalah gradien / kemiringan / kecondongan dan c adalah konstanta.

Contoh :

1. Fungsi linear
   a. $f : x \to 2x + 5$
   b. $f(x) = 5x - 10$
   c. $y = x - 7$
   d. $3y + 4x = 12$
   e. $y = 5$
2. Bukan fungsi linear
   a. $y = x^2 + 1$
   b. $\frac{2}{y} = x$
   c. $5xy + y = 10$

2) *Melukis grafik fungsi linear*

Langkah-langkah melukis grafik fungsi linear

a. Tentukan titik potong dengan sumbu x, y = 0 diperoleh koordinat A (x_1, 0)

b. Tentukan titik potong dengan sumbu y, x = 0 diperoleh koordinat B (0, y_1)

c. Hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurus

Contoh 1 :

Lukislah grafik dari y = 2x – 6

Jawab :

Titik potong dengan sumbu x → y = 0

y = 2x – 6

0 = 2x - 6

6 = 2x

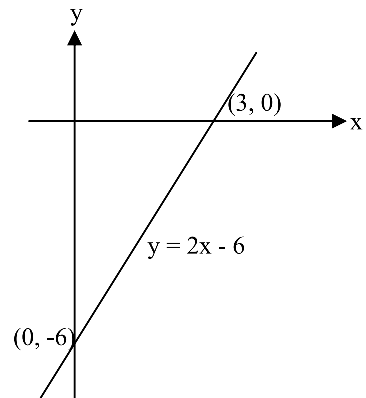
x_1 = 3 → (3, 0)

Titik potong dengan sumbu y → x = 0

y = 2x – 6

y = 2.0 - 6

y_1 = - 6 → (0, - 6)



Gb. 1

sehingga diperoleh tabel :

x	3	0
y	0	-6
(x, y)	(3, 0)	0, -6)

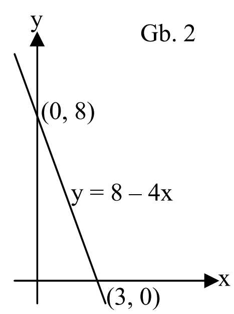
Contoh 2 :

Lukislah grafik dari y = 8– 4x

Jawab:

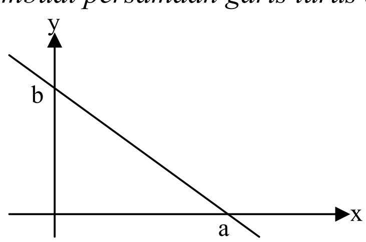
Dengan langkah di atas diperoleh tabel:

x	2	0
y	0	8
(x, y)	(2, 0)	(0, 8)

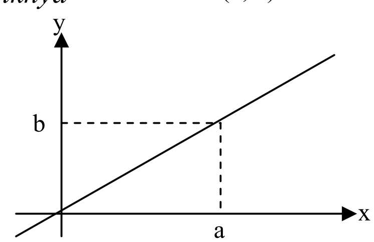


Gb. 2

3) *Membuat persamaan garis lurus dari grafiknya*



Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah bx + ay = ab

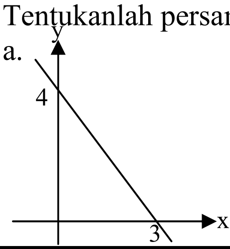


Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah y = $\frac{b}{a}$x

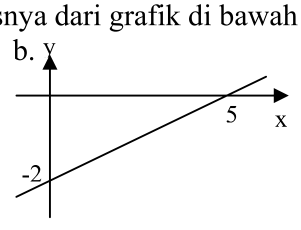
Contoh 1 :

Tentukanlah persamaan garisnya dari grafik di bawah ini

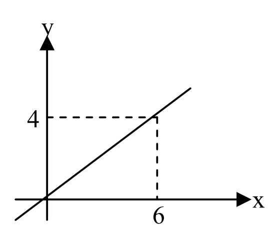
a.



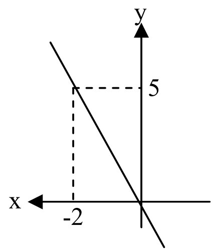
b.



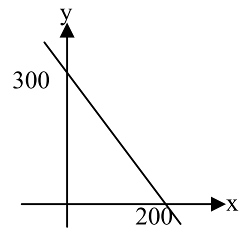
c.



d.



e.



Peyelesaian.

a. a = 3, b = 4, maka persamaan fungsinya
$4x + 3y = 3.4$
$4x + 3y = 12$

b. a = 5, b = -2, maka persamaan fungsinya
$-2x + 5y = -2.5$
$-2x + 5y = -10$ atau $2x - 5y = 10$

c. a = 6, b = 4, maka persamaan fungsinya
$y = \frac{4}{6}x$
$6y = 4x$
$3y = 2x$ atau $2x - 3y = 0$

d. a = -2, b = 5, maka persamaan fungsinya
$y = \frac{5}{-2}x$
$-2y = 5x$ atau $5x + 2y = 0$

e. a = 200, b = 300, maka persamaan fungsinya
$300x + 200y = 60.000$
$3x + 2y = 600$

4) Gradien dan persamaan garis lurus

a) Garis lurus yang melalui titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) memiliki gradien m :

$$\boxed{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ atau } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Contoh :
Tentukan gradien dari garis lurus yang melalui titik-titik:
a. A(2, 4) dan B(3, 8)
b. P(-2, 1) dan Q(4, -11)
Jawab:

a. A(2,4) berarti, $x_1 = 2$ dan $y_1 = 4$ dan B(3,8) berarti $x_2 = 3$ dan $y_2 = 8$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{3-2} = 4$

b. P(-2, 1) berarti, $x_1 = -2$ dan $y_1 = 1$ dan B(4, -11) berarti $x_2 = 4$ dan $y_2 = -11$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11-1}{4-(-2)} = \frac{-12}{6} = -2$

b) Persamaan garis lurus yang melalui titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2) adalah:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

Contoh :

Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui titik (3,-4) dan (-2,6)

Jawab :

$x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $x_2 = -5$ dan $y_2 = 5$

$\Leftrightarrow \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{5-1}=\frac{x-3}{-5-3}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{4}=\frac{x-3}{-8}$

$\Leftrightarrow$ -8(y – 1) = 4 (x – 3)

$\Leftrightarrow$ -8y + 8 = 4x – 12 dibagi -4

$\Leftrightarrow$ 2y – 2 = -x + 3

$\Leftrightarrow$ 2y + x – 2 – 3 = 0

$\Leftrightarrow$ 2y + x – 5 = 0 atau

$\Leftrightarrow$ 2y + x = 5

c) Persamaan garis lurus (pgl) yang bergradien m dan melalui titik A (x_1, y_1) adalah:

$$\boxed{y = m(x - x_1) + y_2}$$

Contoh :

Tentukanlah persamaan garis lurus yang bergradien 2 dan melalui titik (-3, 1)

Jawab :

$\Leftrightarrow$ y = m(x – x1) + y1

$\Leftrightarrow$ y = 2 (x – (-3)) + 1

$\Leftrightarrow$ y = 2 (x + 3) + 1

$\Leftrightarrow$ y = 2x + 6 + 1

$\Leftrightarrow$ y = 2x + 7

5) Menentukan gradien dari persamaan garis lurus (pgl)

a) Persamaan garis lurus : ax + by = c maka gradiennya m = $-\frac{a}{b}$
b) Persamaan garis lurus : y = ax + b maka m = a
c) Garis yang sejajar sumbu x memiliki persamaan y = c dan m = 0
d) Garis yang sejajar sumbu y memiliki persamaan x = c dan tidak memiliki gradien

Contoh :

a. gradien dari Pgl : 2x + y = 5 adalah m = $-\frac{a}{b}=-\frac{2}{1}$ = -2

b. gradien dari pgl : - 4x + 2y – 2 = 0 adalah m = $-\frac{a}{b}=-\frac{-4}{2}$ = 2

c. gradien dari pgl : -3y + 2x + 3 = 0 adalah m = $-\frac{a}{b}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$

d. gradien dari pgl : y = 4x + 1 adalah m = 4
e. gradien dari pgl : y = -10 adalah m = 0

6) *Titik potong dua buah garis*

Menentukan titik potong dua buah garis lurus identik dengan menyelesaikan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel baik dengan metode eleminiasi, metode substitusi maupun metode grafik.

Contoh :

Tentukan titik potong persamaan garis : y = 3x + 5 dan y = -2x + 15

Jawab:

Eliminasi y,

$$\begin{aligned} y &= 3x + 5 \\ y &= \underline{-2x + 15 \quad -} \\ 0 &= 5x - 10 \end{aligned}$$

$5x = 10 \leftrightarrow x = 2$

substitusi x = 2 ke $y = 3x + 5$
$y = 2.3 + 5$
$y = 11$

Jadi, titik potong kedua garis di atas adalah (2, 11)

7) *Hubungan dua buah garis*

Dua garis yang bergradien m_1 dan m_2 dikatakan sejajar jika $m_1 = m_2$ dan tegak lurus jika $m_1 \times m_2 = -1$

Contoh :

Dari beberapa persamaan garis di bawah ini, manakah yang paling sejajar dan berpotongan tegak lurus.

I. $2x + y - 4 = 0$
II. $y = -2x + 1$
III. $2y - x = 8$
IV. $3y + 2x + 1 = 0$
V. $y = \frac{3}{2}x$
VI. $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

Jawab :

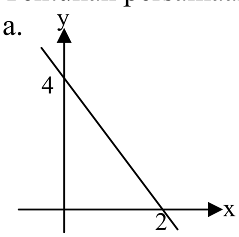
$m_I = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$, $m_{II} = -\frac{a}{b} = -2$, $m_{III} = -\frac{a}{b} = -\frac{-1}{2} = 2$

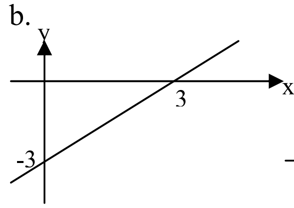
$m_{IV} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$, $m_V = -\frac{3}{2}$ dan $m_{VI} = \frac{2}{3}$

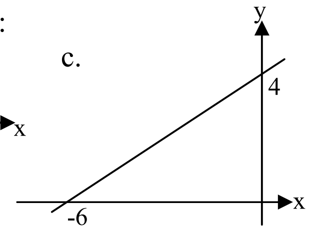
I dan II saling sejajar karena gradiennya sama, yaitu m = –2

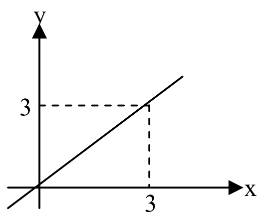
I dan III, IV dan V berpotongan tegak lurus karena $m_I.m_{III} = -1$ dan $m_{IV}.m_V = -1$

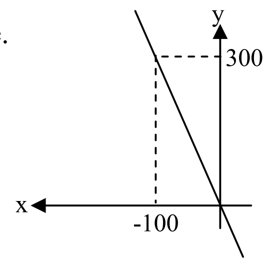
Latihan !

1. Lukislah grafik garis lurus di bawah ini:
   a. $y = 3x + 6$
   b. $y = 12 - 3x$
   c. $2x + 5y = 10$
   d. $y = -2x$
   e. $y = \frac{1}{2}x$
   f. $3x - 2y = 900$
   g. $Y - 2x = 0$
   h. $Y - 3x + 6 = 0$
   i. $360y + 240x = 42.000$
   j. $y = \frac{1}{2}x + 4$
2. Tentukan persamaannya dari grafik di bawah ini:
   a.
   

   b.
   

   c.
   

   d.
   

   e.
   

3. Tentukanlah gradiennya dari garis lurus yang melalui titik-titik di bawah ini:
   a. (-4, 5) dan (4, -1)
   b. (3, -5) dan (-3, 5)
   c. (-2, 4) dan (4, 5)
   d. (2, 6) dan (-4, 6)
   e. (4, -2) dan (4, 8)
4. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui dua titik di bawah ini:
   a. (2, 5) dan (5, 8)
   b. (4, -1) dan (-2, 11)
   c. (4, 3) dan (-1, -4)
   d. (-2, 4) dan (-2, 8)
5. Tentukanlah gradien garis yang memiliki persamaan :
   a. $y = -3x + 2$
   b. $3x - y + 6 = 0$
   c. $\frac{2}{3}x + 3y + 9 = 0$
   d. $y = x + 4$
   e. $x + y = -5$
   f. $-\frac{4}{5}x - 2y + 1 = 0$
6. Tentukanlah persamaan garis yang diketahui sebagai berikut:
   a. Gradien m = -4 dan melalui (2, 5)
   b. Gradien m = 2 dan melalui (-4, 5)
   c. Gradien $m = -\frac{1}{3}$ dan melalui titik pangkal
   d. Gradien $m = \frac{1}{2}$ dan melalui (-6, 1)
7. Selidiki apakah dua garis berpotongan tegak lurus, sejajar atau tidak keduanya:
   a. $4y - 2x = 0$
      $2y - x - 6 = 0$
   b. $2y - x - 4 = 0$
      $2y + 6x - 7 = 0$
   d. $3x - 9y + 1 = 0$
      $y = \frac{1}{3}x - 1$
   e. $2y - x + 8 = 0$
      $8y - 4x - 24 = 0$

c. $2y - x = 6$
   $y = -2x + 10$

f. $2y = 3x + 4$
   $-2y + 3x = 1$

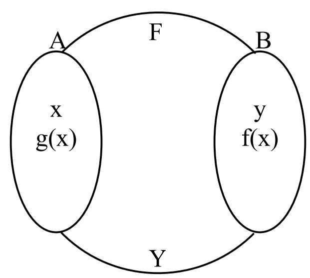
8. Tentukan persamaan garis lurus yang:
   a. Sejajar garis $x + y + 1 = 0$ dan melalui titik (1, 2)
   b. Tegak lurus garis $x + 5y = 0$ dan melalui titik (-3, 6)
9. Tentukanlah persamaan garis lurus yang diketahui sebagai berikut:
   a. Melalui dua titik (2, -4) dan (5, 5)
   b. Bergradien -5 dan melalui titik pangkal
   c. Bergradien 3 dan melalui (-5, -1)
   d. Melalui (8, -4) dan titik pangkal
   e. Sejajar garis : $y = 3x + 3$ dan melalui (-2, 4)
   f. Tegak lurus : $3y - x + 8 = 0$ dan melalui (3, -1)
10. Tentukan persamaan garis yang sejajar garis $5x - y = 2$ dan melalui titik potong dua garis $2x - y = 7$ dan $x + 3y = 7$.

B. Invers Fungsi Linear

1) Pengertian Invers Suatu Fungsi

Perhatikan gambar!

Jika fungsi $f:A \rightarrow B$ maka peta setiap $x \in A$ adalah $y \in B$ ditulis $y = f(x)$. Jika $g:B \rightarrow A$ maka peta setiap $y \in B$ adalah $x \rightarrow A$ dan ditulis $x:g(y)$. Maka dikatakan f dan g saling invers g invers dari f ditulis $g . f^{-1}$ dan f invers g ditulis $f . g^{-1}$. Jadi invers f dinyatakan dengan f^{-1}.



2) Cara Menentukan Fungsi Invers

- Misalkan $f(x) = y$
- Nyatakan nilai x dalam y yang dinamai dengan $f^{-1}(y)$
- Gantilah y pada $f^{-1}(y)$ dengan x untuk mendapatkan $f^{-1}(x)$

Contoh :

Fungsi $f(x) = \frac{3x-2}{2x+4}$, $x \neq -2$ tentukan $f^{-1}(x)$

$f(x) = \frac{3x-2}{2x+4}$, $x \neq -2 \rightarrow y = \frac{3x-2}{2x+4}$

$y(2x + 4) = 3x - 2$

$2xy + 4y = 3x - 2$

$2xy - 3x = -4y - 2$

$x(2y - 3) = -4y - 2$

$x = \frac{-4y-2}{2y-3} \rightarrow x = \frac{-(4y+2)}{-(3-2y)}$

$f^{-1}(y) = \frac{4y+2}{3-2y} \rightarrow$ Jadi $f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{3-2x}$

Latihan

1. Diketahui fungsi f:R → R ditentukan dengan $f(x) = \frac{2x+1}{4x-12}$. Tentukan $f^{-1}(x)$?
2. Tentukan $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$ jika diketahui:
   a. $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$
   b. $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $x \neq -\frac{d}{c}$

3. Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah : $f(x) = ax^2 + bx + c$ dimana a, b, c ∈ R dan a ≠ 0. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola dengan persamaan $y = ax^2 + bx + c$.

Beberapa langkah yang ditempuh untuk menggambar grafik fungsi kuadrat adalah:

a. Titik potong grafik dengan sumbu x, dengan mengambil y = 0
b. Titik potong grafik dengan sumbu y, dengan mengambil x = 0
c. Sumbu simetris grafik yaitu $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$
d. Koordinat titik balik atau titik puncak (x, y) dimana $\boxed{x = -\frac{b}{2a} \text{ dan } y = -\frac{D}{4a}}$
   dengan $\boxed{D = b^2 - 4ac}$
e. Grafik terbuka ke bawah jika a < 0 dan terbuka ke atas jika a > 0.

Contoh 1 :

Gambarlah grafik fungsi kuadrat (parabola) berikut ini dengan domain bilangan real!

a. $f(x) = x^2 - 2x - 8$ b. $g(x) = 4x - x^2$

Jawab:

a. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 8$ mempunyai persaman $y = x^2 - 2x - 8$ di mana a = 1, b = -2 dan c = -8

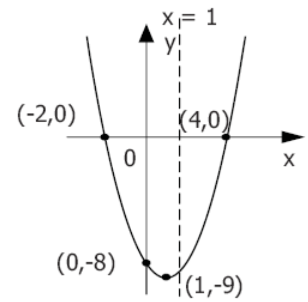
- Titik potong grafik dengan sumbu x, untuk y = 0
  $x^2 - 2x - 8 = 0$
  $(x - 4)(x + 2) = 0$
  x = 4 atau x = -2
  titik potong dengan sumbu x adalah (-2, 0) dan (4, 0)
  nilai x = 4 dan x = -2 disebut pembuat nol fungsi, artinya pada x = 4 dan x = -2 fungsi tersebut bernilai nol.
- Titik potong grafik dengan sumbu y, untuk x = 0
  $y = 0^2 - 4(0) - 8 = -8$
  Titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0, -8).
- Persamaan sumbu simtris $x = -\frac{b}{2a}$

- Koordinat titik balik

$x = -\frac{b}{2a}$ $\qquad$ $y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= -\frac{(-2)}{2(1)}$ $\qquad$ $y = -\frac{(-2)^2 - 4(1)(-8)}{4(1)}$

$= 1$ $\qquad$ $y = -\frac{4+32}{4} = -9$



Koordinat titik balik adalah (1, -9)

- Karena a = 1 > 0 maka grafik membuka ke atas.

b. Grafik fungsi $f(x) = 4x - x^2$ mempunyai persamaan $y = 4x - x^2$ dimana koefisien a = -1, b = 4 dan c = 0

- Titik potong grafik dengan sumbu x, untuk y = 0
  $4x - x^2 = 0$
  $x(4 - x) = 0$
  x = 0 atau x = 4
  Titik potong dengan sumbu x adalah (0, 0) dan (4, 0)
  Nilai x = 0 dan x = 4 disebut pembuat nol fungsi, artinya pada saat x = 0 dan x = 4 fungsi tersebut bernilai nol.
- Titik potong grafik dengan sumbu y, untuk x = 0
  $y = 4(0) - (0)^2 = 0$
  Titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0, -8)
- Persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$

$= -\frac{4}{2(-1)}$

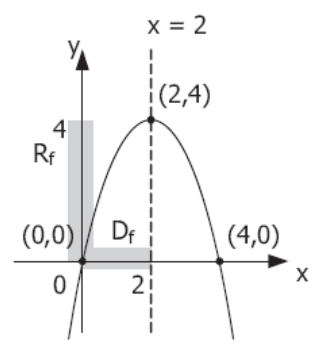
$= 2$

- Koordinat titik balik

$x = -\frac{b}{2a}$ $\qquad$ $y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$x = -\frac{4}{2(-1)}$ $\qquad$ $y = -\frac{(4)^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)}$

$= 2$ $\qquad$ $y = -\frac{16}{-4} = 4$



Koordinat titik balik adalah (2, 4)

- Karena a = –1 < 0 maka grafik membuka ke bawah.

Koordinat titik balik grafik fungsi kuadrat dapat berupa titik maksimum atau titik minimum tetapi tidak sekaligus kedua-duanya.

a. Jika a < 0 maka titik balik berupa titik maksimum dan
b. Jika a > 0 maka titik balik berupa titik minimum

Pada contoh 1b grafik fungsi mempunyai titik maksimum (2, 4) dengan nilai maksimum sama dengan 4 atau y = 4. Sedangkan pada contoh 37 a. grafik fungsi mempunyai titik minimum (1, –9) dengan nilai minimum –9 atau y = –9.

Sehingga nilai maksimum atau minimum grafik fungsi adalah

$\boxed{y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}\text{, ini terjadi pada saat } x = -\frac{b}{2a}}$

Contoh 2 :

Jika x + y = 5, Tentukanlah nilai x dan y agar bentuk (x – 2y + 4) (–x + 2y + 8) mencapai nilai maksimum, dan tentukan pula nilai maksimum tersebut.

Jawab:

Misalkan P = (x – 2y + 4)(–x + 2y + 8)

x + y = 5

y = 5 – x substitusi pada P

P = (x – 2(5 – x) + 4)(–x + 2(5 – x) + 8)

= (x – 10 + 2x + 4)(–x + 10 – 2x + 8)

= (3x – 6)(–3x + 18)

= $-9x^2 + 72x - 108$

P mencapai maksimum jika : $x = -\frac{b}{2a}$

$= -\frac{72}{2(-9)} = 4$

y = 5 – x

= 5 – 4 = 1

P maksimumnya = $-9x^2 + 72x - 108$

= $-9.4^2 + 72.4 - 108 = 36$

Latihan

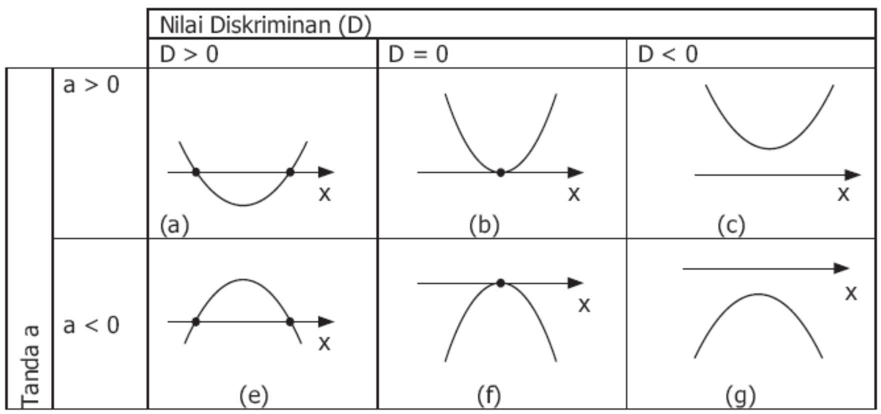
1. Tentukan: titik potong dengan sumbu x, sumbu y, persaman sumbu simetri, koordinat titik balik, gambar grafik dan range dari fungsi berikut ini!
   a. $f(x) = x^2 - 3x - 4$, Df ={x|-1< x < 4, x _ R}
   b. $g(x) = x^2 - 4$, Dg ={x| 0 < x < 3, x _ R}
   c. $h(x) = -x^2 + 6x$, Dh ={x|-1 _ x _ 7, x _ R}
   d. $k(x) = 2x^2 - 3x + 3$, Dk ={x|0 _ x _ 3, x _ R}
2. Bayangan x = -2 oleh fungsi $f(x) = x^2 - 3x + k - 1$ adalah 0, tentukan nilai k dan gambar grafiknya!
3. Grafik fungsi $g(x) = (a - 2)x^2 - 3x + a - 4$ melalui titik (-1,1), tentukan
   a. Nilai a
   b. Range fungsi dengan domain Dg = {x |-4 < x < 4, x ∈ B}.
4. Tentukan nilai p agar fungsi kuadrat $f(x) = px^2 + 4x + 2$ bernilai minimum sama dengan 3.
5. Sebuah peluru ditembakkan ke udara hingga lintasannya berbentuk parabola. Tinggi lintasan peluru setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 20t - 2t^2$. Dari grafiknya, tentukanlah:
   a. Setelah berapa detik peluruh tersebut mencapai tinggi maksimum.
   b. Tinggi maksimum peluruh tersebut.
   c. Waktu yang diperlukan peluru hingga jatuh kembali ke tanah.
6. Jumlah dua bilangan sama dengan 20. Tentukan dua bilangan tersebut supaya hasil kalinya maksimum dan bilangan-bilangan itu !
7. Tentukanlah nilai p dari data di bawah ini:
   a. Nilai maksimum $px^2 - 4x + p - 2$ adalah 1
   b. b. Nilai maksimum $px^2 + 4x + p$ adalah 3

8. Hitunglah nilai minimum dari $x^2 + y^2$ untuk $2x + y = 4$.
9. Nilai minimum fungsi $f(x) = ax + bx – 8$ adalah -9 dicapai pada $x = 1$, tentukanlah:
   a. Nilai a dan b
   b. Sketsa gambar grafiknya
10. Sebatang besi 400 centimeter akan dibuat persegipanjang dengan cara memotong kemudian mengelasnya untuk menyambungnya kembali, berapakah ukuran persegi panjang tersebut agar didapat luas persegi panjang yang maksimum dan hitung luas maksimum tersebut!

4. Menerapkan Konsep Fungsi Kuadrat

1) Kedudukan Grafik fungsi kuadrat

Kedudukan *grafik* fungsi kuadrat yang dilihat dari banyaknya titik potong dengan sumbu x, ditentukan oleh nilai diskriminan yaitu $D = b^2 – 4ac$. Sedangkan grafik membuka ke atas atau ke bawah ditentukan olh tanda a (koefisien x^2). Berikut beberapa kemungkinan kedudukan grafik dilihat dari harga diskriminan dan tanda a (koefisien x^2):



Gambar II.d : Kedudukan fungsi kuadrat berdasarkan nilai D dan tanda a

Keterangan:

a) Pada (a) dan (e) untuk $D > 0$ grafik memotong sumbu x di dua titik, jika $a > 0$ grafik membuka ke atas sebaliknya membuka ke bawah untuk $a < 0$.
b) Pada (b) dan (f) untuk $D = 0$ grafik memotong di satu titik atau menyinggung sumbu x.
c) Pada (c) dan (g) grafik tidak memotong sumbu x

(i) Untuk $a > 0$ dan $D < 0$ seluruh grafik berada di atas sumbu x artinya seluruh peta atau nilai fungsi bernilai positif untuk seluruh harga x dan ini biasa disebut dengan *definit positif*

(ii) Untuk $a < 0$ dan $D < 0$ seluruh grafik berada di atas sumbu x artinya seluruh peta atau nilai fungsi bernilai negatif untuk seluruh harga x dan ini biasa disebut dengan *definit negatif*

Contoh 1 :

Tanpa menggambar sebutkan sifat-sifat fungsi kuadrat $f(x) = x^2 – 3x – 4$

Jawab :

$f(x) = x^2 – 3x – 4$

$y = x^2 – 3x – 4$, diperoleh $a = 1$, $b = -3$ dan $c = -4$

- $a = 1$ berarti $a > 0$ (a positif), maka grafik membuka ke atas
- $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$
  Karena D > 0 (D positif), maka grafik memotong sumbu x di dua titik yang berbeda. Jadi, grafik fungsi f berupa parabola yang terbuka ke atas dan memotong sumbu x di dua titik yang berbeda (a > 0 dan D > 0).

Contoh 2 :

Tentukan nilai k agar grafik fungsi kuadrat berikut menyinggung sumbu x!

a. $f(x) = (1 + k^2)\, x^2 + 10kx + 16$ b. $g(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$

Jawab :

a. Dari rumus fungsi $a = 1 + k^2$, $b = 10k$ dan $c = 16$
Grafik menyinggung sumbu x, jika D = 0

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ b^2 - 4ac &= 0 \\ (10k)^2 - 4(1+k^2)16 &= 0 \\ 100\,k^2 - 64 - 64\,k^2 &= 0 \\ 36\,k - 64 &= 0 \\ (6k - 8)(6k + 8) &= 0 \end{aligned}$$

$6k - 8 = 0$ atau $6k + 8 = 0$

$$\begin{aligned} 6k &= 8 & \qquad 6k &= -8 \\ k &= \frac{8}{6} & k &= -\frac{8}{6} \\ k &= \frac{4}{3} & k &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

b. Agar $g(x)=mx^2 + (m+1)x +1$ grafiknya menyinggung sumbu x,D = 0

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ 0 &= (m + 1)^2 - 4.m.1 \\ 0 &= m^2 - 2m + 1 \\ 0 &= (m - 1)^2 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, agar $g(x) = mx^2+(m+1)x +1$ menyinggung sumbu x, nilai m = 1

2) *Menentukan Persamaan Grafik Fungsi Kuadrat*

Persamaan grafik fungsi kuadrat dapat dicari jika kondisi-kondisi dibawah ini diketahui:

a) Grafik memotong sumbu x di (x ,0) dan (x ,0) serta melalui titik sembarang (x_3,y_3) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
b) Grafik mempunyai titik balik $P(x_p,y_p)$ serta melalui titik sembarang (x_1,y_1) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.
c) Grafik melalui tiga buah titik yaitu (x_1,y_1), (x_2,y_2) dan (x_3,y_3), maka persamaannya adalah $y = ax^2 + bx + c$.

Contoh 1 :

Tentukan persamaan grafik fungsi yang mempunyai titik balik di titik (1,-1) serta melalui (2, 3).

Jawab :

Kondisi yang di ketahui adalah titik balik P(1,-1) serta melalui titik (2, 3) dan dari kondisi tersebut kita dapat xp = 1 dan yp = -1 sehingga persamaannya adalah

$y = a(x – 1)^2 + (-1)$ grafik melalui (2, 3) didapat

$3 = a(2 – 1)^2 + (-1)$

$3 = a – 1$

$a = 4$

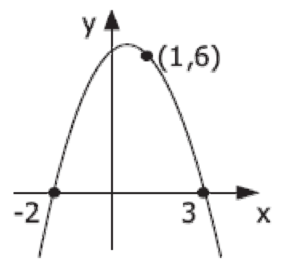
Sehingga $y = 4(x – 1)^2 + (-1)$

$y = 4(x – 2x +1) – 1 = 4x – 8x + 3$

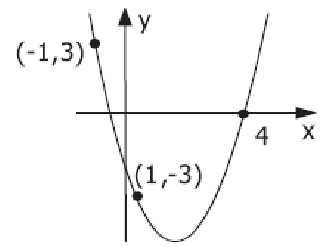
Contoh 2 :

Tentukan persamaan grafik dari fungsi grafik seperti pada gambar di bawah ini!

a.



b.



Jawab:

a. Grafik memotong sumbu x di titik (-2, 0) dan (3, 0)
   Sehingga $y = a(x + 2)(x – 3)$ melalui titik (1, 6)
   $6 = a(1 + 2)(1 – 3)$
   $6 = a(3)(-2)$
   $6 = -6a$
   $a = -1$
   Substitusikan kembali a = -1 ke $y = a(x + 2)(x – 3)$ didapat
   $y = -1(x + 2)(x – 3) = -1(x^2 – 3x + 2x – 6)$
   $= -x^2 + x + 6$
   Jadi persamaan grafik fungsi adalah $y = -x^2 + x + 6$.
b. Grafik melalui tiga buah titik, yaitu (-1,3), (1,-3) dan (4,0). Gunakan persamaan bentuk $y = ax^2 + bx + c$
   $(-1,3) \Rightarrow 3 = a(-1)^2 + b(-1) + c$
   $3 = a – b + c$ …1)
   $(1, -3) \Rightarrow -3 = a(1)^2 + b(1) + c$
   $-3 = a + b + c$ …2)
   $(4, 0) \Rightarrow 0 = a(4)^2 +b(4) + c$
   $0 = 16a + 4b + c$ …3)
   Eliminasi persamaan 1) dan 2) didapat
   $a – b + c = 3$
   $\underline{a + b + c = -3}$ –
   $-2b = 6$
   $b = -3$
   Eliminasi persamaan 1) dan 3) didapat
   $16a + 4b + c = 0$
   $a – b + c = 3$ –
   $15a + 5b = -3$ substitusi b = -3 didapat $15a + 5b = -4$
   $15a + 5(-3) = -3$

$15a - 15 = -3$

$15a = 12$

$a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Substitusi $a = \frac{4}{5}$ dan $b = -3$ ke persamaan 1) didapat $a - b + c = 3$

$3 = a - b + c$

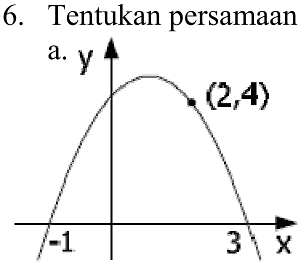
$3 = \frac{4}{5} - (-3) + c$

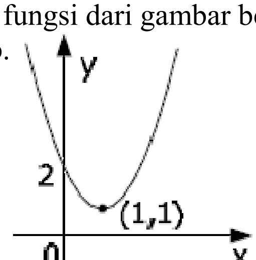
$c = -\frac{4}{5}$

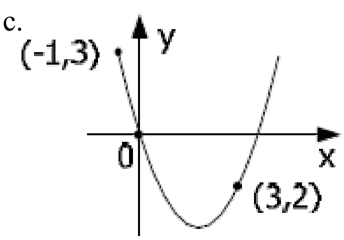
Substitusi $a = \frac{4}{5}$, $b = -3$ dan $c = -\frac{4}{5}$ ke persamaan $y = ax^2 + bx + c$, sehingga persamaan yang dicari adalah $y = \frac{4}{5}x^2 - 3x - \frac{4}{5}$

Latihan

1. Tentukanlah sifat-sifat grafik fungsi kuadrat berikut berdasarkan nilai a dan diskriminannya:
   a. $y = x^2 - 12x + 20$
   b. $y = -x^2 - 4x - 10$
   c. $y = x^2 - 12x + 36$
   d. $y = (x - 4)^2$
   e. $y = -x^2 - 2x + 35$
   f. $y = 2x^2 - x + 1$
   g. $y = 6x^2 + 9x$
   h. $y = 6x^2 - 17x + 5$
   i. $y = -x^2 - x + 10$
   j. $y = -x^2 - 4x + 5$
2. Tentukanlah batas-batas nilai m supaya grafik fungsi menyinggung sumbu x
   a. $f(x) = x^2 - 2mx + (3m + 4)$
   b. $g(x) = mx^2 + 6x + 9$
   c. $f(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + (m - 2)$
   d. $h(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$
3. Tentukan persamaan grafik fungsi berikut:
   a. Grafik memotong sumbu x di titik (-1, 0) dan (1, 0) serta melalui titik (2,1).
   b. Titik potong dengan sumbu x adalah (-3, 0) dan (1, 0) serta melalui titik (0, 9)
   c. Titik puncak (3, 1) dan melalui titik (0, 8)
   d. Grafik mempunyai titik puncak P(2, 1) serta melalui titik (0, 4).
   e. Grafik melalui titik (1, 0), (-1, -2) dan titik (3, 1).
4. Tentukan fungsi kuadrat jika grafiknya mempunyai titik balik P(3,-1) serta f(1) = 7
5. Tentukan fungsi kuadrat yang mempunyai nilai-nilai nol (pembuat nol) 2 dan 5, sedangkan nilai maksimumnya adalah 9!
6. Tentukan persamaan grafik fungsi dari gambar berikut:

a.


b.


c.


7. Koordinat titik puncak grafik fungsi $y = ax^2 + bx + 5$ ialah (4,9), tentukan nilai a dan b!

== oOo ==

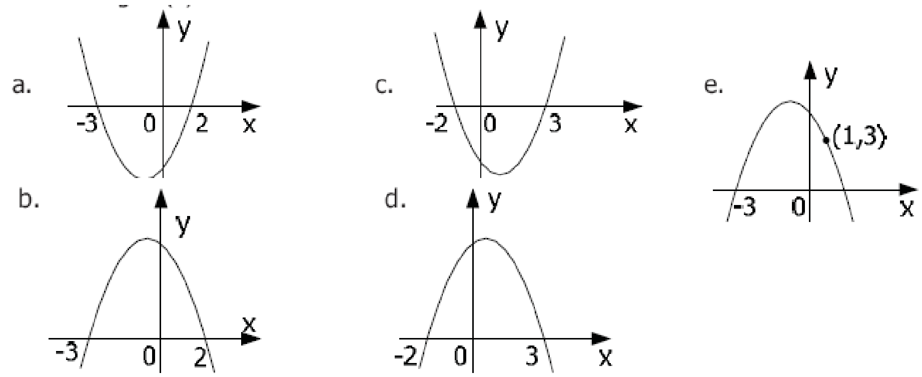
UJI KEMAMPUAN

a. Pilihan Ganda

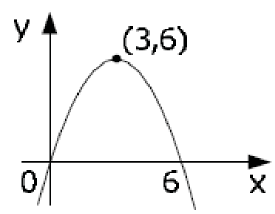
1. Untuk fungsi $f:x \rightarrow 3x^2 - 4x$ maka bayangan dari -6 adalah . . . .
   a. 112 c. 126 e. 142
   b. 122 d. 132
2. Pembuat nol fungsi dari fungsi kuadrat f(x) = 16 – x adalah . . . .
   a. 8 dan -8 c. 0 dan 16 e. 4 dan 8
   b. 4 dan -4 d. 0 dan -16
3. Persamaan sumbu simetri dari $f(x) = 6 - 5x - x^2$ adalah . . . .
   a. x = -2 c. $x = -2\frac{1}{2}$ e. x = 5
   b. x = 2 d. x = 3
4. Diketahui $f(x) = x^2 + 4x - 5$, maka nilai minimumnya adalah ……
   a. -17 c. -5 e. 4
   b. -9 d. -2
5. Diketahui fungsi kuadrat melalui titik (0, -6), (3, 0) dan (-2, 0) maka persamaan kuadratnya adalah….
   a. $f(x) = x^2 - x - 6$ c. $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ e. $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$
   b. $f(x) = x^2 + x + 6$ d. $f(x) = x^2 - 2x + 12$
6. Harga kesetimbangan pasar dari fungsi permintaan q = 15 – p dan fungsi penawaran q =2p – 6, jika p menyatakan harga dan q menyatakan jumlah adalah . . . .
   a. 3 c. 7 e. 9
   b. 6 d. 8
7. Diketahui f(x) = ax + 6, f(-2) = 10 maka f(5) = ...
   a. -4 c. 4 e. 6
   b. -2 d. 2
8. Jika f(x) = ax + b, f(1) = -1, f(3) = 5, maka . . . .
   a. f(x) = 3x – 4 c. f(x) = -3x + 4 e. f(x) = 2x – 4
   b. f(x) = 3x + 4 d. f(x) = -3x – 4
9. Diketahui f(x) = ax + 2b, f(1) = -1 dan f(2) = -10. Nilai f(6) = ...
   a. -22 c. 12 e. 22
   b. -14 d. 14
10. Himpunan pasangan berurutan berikut ini yang merupakan fungsi adalah ….
    a {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)} d {(2, 3), (3, 2), (4, 3), (4, 4)}
    b {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)} e {(a, b), (a, c), (a, d), (a, e)}
    c {(1, 1), (2,1), (3,1), (4, 1)}
11. Gradien dari garis yang melalui (-3, 6) dan (4, -5) adalah . . . .
    a. -3 c. -1 e. 3
    b. $-\frac{11}{7}$ d. $-\frac{3}{7}$
12. Persamaan garis yang bergradien –3 dan melalui titik pangkal adalah . . . .
    a. y = -3x c. 3y = x e. $y = -\frac{1}{3}x$
    b. y – 3x = 0 d. 3y + x = 0
13. Persamaan garis yang melalui (3, 7) dan (5, 11) adalah . . . .
    a. y + 2x + 1 = 0 c. y = 2x + 1 e. 2y – x – 1 = 0
    b. y = - 2x – 1 d. y = 2x – 1

14. Persamaan garis yang melalui (2, -3) dan tegak lurus garis y = 2x + 1 adalah . . .
    a. $y = \frac{1}{2}x + 2$ c. $y = -2x - 2$ e. $y = -\frac{1}{2}x - 2$
    b. $y = -\frac{1}{2}x + 2$ d. $y = -x - 2$
15. Koordinat titik potong dari garis y = 2x – 2 dan garis y = 3x – 5 adalah . . . .
    a. (-3, 4) c. (3, 4) e. (-4, -3)
    b. (-3, 4) d. (4, 3)
16. Persamaan garis yang melalui titik (2, 5) dan sejajar dengan garis y = 2x – 1 adalah ……
    a. y = -2x + 1 c. y = 2x – 1 e. y = -2x – 1
    b. y = x + 1 d. y = 2x + 1
17. Persamaan garis lurus yang melalui (2, 4) dan tegak lurus 2x – y + 3 = 0 = ...
    a. $y = -\frac{1}{2}x + 5$ c. $y = -\frac{1}{2}x - 5$ e. y = –2x – 5
    b. $y = \frac{1}{2}x - 5$ d. y = –2x + 5
18. Diketahui persamaan garis y = x + 2. Titik potong pada sumbu y adalah . . . .
    a. (0, -2) c. (-2, 0) e. (0, 2)
    b. (-2, 2) d. (2, 0)
19. Persamaan garis yang melalui titik (0, 0) dengan gradien 2 adalah . . . .
    a. y = -2x c. $y = \frac{1}{2}x$ e. y = 2x
    b. y = 4x d. y = 2x + 2
20. Diketahui garis y = 2x – 5 dan 3y – 9x + 6 = 0, maka titik potong kedua garis tersebut adalah . . . .
    a. (3, 11) c. (-3, -11) e. (-3, 11)
    b. (-11, -3) d. (3, -11)
21. Nilai maksimum dari f ngsi kuadrat $f(x) = -x^2 + 2x + 15$ adalah . . . .
    a. -32 c. 1 e. 32
    b. -16 d. 16
22. Nilai a supaya grafik fungsi y = (a –1) x – 2ax + (a – 3) menyinggung sumbu x adalah . . . .
    a. -0,75 c. 0,50 e. 1,00
    b. 0,25 d. 0,75
23. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas. Hubungan tinggi peluru (h) dalam meter dengan waktu dalam detik dinyatakan dengan $h(t) = 300t - 5t^2$. Waktu untuk mencapai tinggi maksimum adalah . . . .
    a. 20 detik c. 30 detik e. 45 detik
    b. 25 detik d. 40 detik
24. Koordinat titik balik grafik $y = x^2 - 6x + 8$ adalah . . . .
    a. (3,-1) c. (4,2) e. (-6,8)
    b. (-3,-1) d. (6,8)
25. Reaksi obat tidur setelah disuntikkan pada tubuh dapat dinyatakan dengan persamaan $F(t) = 6t - t^2$, dimana t adalah waktu perjam. Waktu yang diperlukan untuk mencapai reaksi maksimum . . . .
    a. 5 jam c. 8 jam e. 10 jam
    b. 6 jam d.9 jam

26. Grafik fungsi $f(x) = 6 - x - x^2$ adalah ……



27. Grafik $y = 2x^2 - x - 6$ memotong sumbu x di . . . .
    a. $(-\frac{3}{2},0)$ dan (2,0) c. $(-\frac{3}{2},0)$ dan (-2,0) e. $(\frac{1}{3},0)$ dan (-3,0)
    b. (3,0) dan (-2,0) d. (3,0) dan (-2,0)
28. Sebidang tanah persegi panjang akan dipagari kawat untuk beternak ayam. Kawat yang tersedia panjangnya 400 meter. Luas tanah maksimum sehingga kawat dapat memagari tanah tersebut adalah …..
    a. 2000 m^2 c. 18.000 m^2 e. 200.000 m^2
    b. 15.000 m^2 d. 20.000 m^2
29. Persamaan grafik fungsi disamping adalah…
    a. $y = 4x - \frac{2}{3}x^2$
    b. $y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x$
    c. $y = x^2 - 6x - 9$
    d. $y = x^2 - 6x + 9$
    e. $y = -x^2 + 6x + 9$



30. Harga kesetimbangan pasar dari fungsi permintaan P = 45 – 3Q dan fungsi penawaran P = 6Q + 9, jika P menyatakan harga dan Q menyatakan jumlah adalah . . .
    a. 4 c. 32 e. 35
    b. 12 d. 33
31. Grafik fungsi $f(x) = x^2 + 4x - 30$ simetris terhadap garis x = a . Nilai a =. . . .
    a.-4 c. -1 e. 4
    b. -2 d. 2
32. Akar-akar $2x^2 + ax + a = 6$ adalah p dan q. Nilai minimum dari $p^2 + q^2$ = ...
    a. 2,0 c. 3,0 e. 5,0
    b. 2,5 d. 4,5
33. Suatu fungsi kuadrat yang berbentuk $y = (x - a)^2 + b$ mempunyai nilai minimum 5 untuk x = 2, nilai a + b = ...
    a. 3 c. 7 e. 12
    b. 4 d. 8
34. Diketahui $f(x) = -2x + 4x + 3$ dengan daerah asal $\{x|-2 \le x \le 3, x \in R\}$ Range fungsi adalah . . . .
    a. $\{y|-3 \le y \le 5, y \in R\}$ c. $\{y|-13 \le y \le -3, y \in R\}$ e. $\{y|-13 \le y \le 5, y \in R\}$.
    b. $\{y|-3 \le y \le 3, y \in R\}$ d. $\{y|-13 \le y \le 3, y \in R\}$

35. Akar-akar persamaan $x^2 + (a + 2)x + a + 3 = 0$ adalah p dan q. Nilai minimum dari $p^2 + q^2 – pq$ tercapai untuk a = ….
a. -1,0 c. 0,5 e. 5
b. -0,5 d. 1,0
36. Absis titik balik grafik fungsi $px^2 + (p – 3)x + 3$ adalah p. Nilai p = ….
a. -3,5 b. -2,5 c. -1,0 d. 1,0 e. 1,5
37. Diketahui fungsi permintaan sebuah barang adalah p = 38 – 0,03x dan fungsi biaya total TC = 500 + 8x – $0,06x^2$. Biaya tercatat dalam ribuan rupiah. Jika x menyatakan jumlah barang dan p menyatakan harga maka besar keuntungan yang diperolah dari hasil penjualan 100 unit barang adalah. . . .
a. Rp2.800.000,00 c. Rp2.950.000,00 e. Rp3.100.000,00
b. Rp2.900.000,00 d. Rp3.050.000,00
38. Fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum 3 untuk x = 1 dan grafiknya melalui titik (3, 1). Grafik fungsi memotong sumbu y di titik . . . .
a. (0, 3,5) c. (0, 2,5) e. (0, 1,5)
b. (0, 3) d. (0, 2)
39. Perusahaan sepatu "CARDIL" memproduksi sepatu wanita dengan harga jual Rp100.000,00 perpasang. Untuk itu perusahaan tersebut mengeluarkan biaya variabel Rp5.000,00 per pasang dan biaya tetap sebesar Rp10.000.000,00. Jika jumlah sepatu yang terjual sebanyak 300 pasang maka besar keuntungan yang diterima adalah……
a. Rp2.500.000,00 c. Rp5.000.000,00 e. Rp10.000.000,00
d. Rp3.000.000,00 d. Rp7.500.0
40. Koordinat titik balik fungsi kuadrat f (x) = $x^2 – 2x – 3$ adalah . . . .
a. (1, 4) b. (-1, 4) c. (4, 1) d. (1, -4) e. (-1, -4)

b. Essay

1. Tentukanlah persamaan garis lurus yang diketahui sebagai berikut:
   a. Bergradien -5 dan melalui (2, -8)
   b. Melalui dua titik (2, -4) dan (5, 5)
   c. Sejajar garis y – 3x = 0 dan melalui titik pangkal
   d. Tegak lurus garis 3y + x = 6 dan melalui (5, -4)
   e. Memotong sumbu x pada (4, 0) dan sumbu y pada (0, -6)
2. Tentukanlah koordinat titik puncak dari fungsi kuadrat di bawah ini:
   a. $f(x) = x^2 – 4x – 1$ c. $f(x) = 3x^2 + 3x$
   b. $y = - 2x^2 – 8x + 7$
3. Diketahui $(m – 3) x^2 + (2m – 3)x + m = 0$. Tentukan nilai m !
   a. Agar mempunyai dua akar real berlainan
   b. Tidak mempunyai akar real
4. Diketahui $f(x) = -2x^2 – 5x + 7$ dengan domain $\{x|-5 \le x \le 5, x \in R\}$. Tentukanlah!
   a. Koordinat titik potong dengan sumbu x
   b. Koordinat titik potong dengan sumbu y
   c. Persamaan sumbu simetri
   d. Koordinat titik puncak
   e. Range
   f. Sketsa grafiknya
5. Diketahui f(x) = ax + b. dengan f (- 4) = - 13 dan f (2) = 5 Tentukan :
   a. Nilai a dan b kemudian tuliskan persamaannya
   b. Nilai dari f(-6)

   Nilai m jika f(m) = 14

Trik Menghitung Pembagian

Berikut ada beberapa trik yang cukup menarik hanya dengan menggunakan model perkalian dan kemudian dengan membaginya dengan kelipatan angka 10. Perhatikan penjelasan berikut ini :

1. Untuk membagi bilangan yang dibagi 125, caranya yaitu kalikan bilangan tersebut dengan 8, kemudian bagilah dengan 1000.misalnya; 7000/125 = (7000 x 8)/1000 = 56.
2. Untuk membagi bilangan yang dibagi 50, caranya; kalikan 2 dan bagi 100.
   contoh ; 300/50 = (300 x 2)/100 = 6.
3. Untuk membagi bilangan yang dibagi 500, kalikan 2 kemudian bagi 1000.
   contoh; 7500/500 = (7500×2)/1000 = 15.
4. Untuk membagi bilangan yang dibagi 5, kalikan 2 kemudian bagi 10.
   contoh; 35/5 = (35×2)/10 = 7.
5. Untuk membagi bilangan yang dibagi 25, kalikan 4 kemudian bagi 100.
   contoh; 3700/25 = (3700×4)/100= 148.
6. Untuk bilangan yang dibagi dengan 250, kalikan 4 kemudian bagi 1000
7. Untuk bilangan yang dibagi dengan 16 2/3, kalikan 6 kemudian bagi 100.
8. Untuk bilangan yang dibagi dengan 33 1/3, kalikan 3 kemudian bagi 100.
9. Untuk bilangan yang dibagi dengan 166 2/3, kalikan 6 kemudian bagi 1000.
10. Untuk bilangan yang dibagi dengan 333 1/3, kalikan 3 kemudian bagi 1000.
11. Untuk bilangan yang dibagi dengan 6 2/3, kalikan 15 kemudian bagi 100.
12. Untuk bilangan yang dibagi dengan 66 2/3, kalikan 15 kemudian bagi 1000.
13. Untuk bilangan yang dibagi dengan 8 1/3, kalikan12 kemudian bagi 100.
14. Untuk bilangan yang dibagi dengan 83 1/3, kalikan dengan12 kemudian bagi 1000.
15. Untuk bilangan yang dibagi dengan 6 1/4, kalikan dengan16 kemudian bagi dengan100.
16. Untuk bilangan yang dibagi dengan 62 1/2, kalikan dengan16 kemudian bagi engan1000.
17. Untuk bilangan yang dibagi dengan 18 3/4, kalikan dengan16, bagi 3, kemudian bagi 100.
18. Untuk bilangan yang dibagi dengan 37 1/2, kalikan dengan8 bagi 3, kemudian bagi 100.
19. Untuk bilangan yang dibagi dengan 87 1/2 bagi 7, kalikan 8 kemudian bagi 100.
20. Untuk bilangan yang dibagi dengan 75 bagi dengan 3, kalikan 4 kemudian bagi 100.

Semoga bermanfaat

BAB VII PROGRAM LINEAR

Penyusun : Rifan Nadhifi, S.Si. ; Imam Indra Gunawan, S.Si.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

A. Sistem Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya satu.

Hp suatu pertidaksamaan linear dua variabel adalah daerah himpunan pasangan titik (x,y) yang memenuhi pertidaksamaan linear tersebut.

Hp dari pertidaksamaan $ax + by \leq c$ dapat ditentukan dengan *metode grafik* dan *uji titik*, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

(i) Gambar garis $ax + by = c$

(ii) Uji titik : ambil sembarang titik diluar garis $ax + by = c$ kemudian substitusikan ke pertidaksamaan $ax + by \leq c$, jika :

a. BENAR, maka Hp adalah daerah yang memuat titik tersebut dengan batas garis $ax + by = c$

b. SALAH, maka Hp adalah daerah yang TIDAK memuat titik tersebut dengan batas garis $ax + by = c$

Contoh

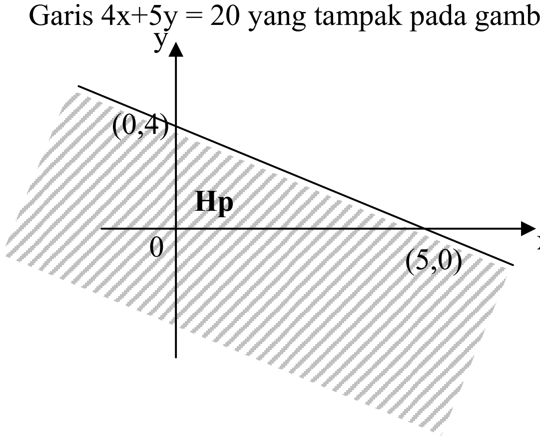
Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari $4x + 5y \leq 20$

Jawab :

$4x + 5y = 20$

x	0	5
y	4	0

Garis $4x+5y = 20$ yang tampak pada gambar membagi bidang menjadi 2 daerah

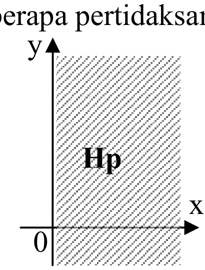


Untuk mengetahui daerah penyelesaian, misalkan kita ambil titik diluar garis yaitu titik (0,0) subtitusikan ke pertidaksamaan

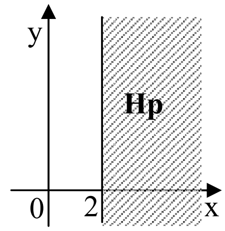
$$4x + 5y \leq 20$$
$$4(0) + 5(0) \leq 20$$
$$0 \leq 20 \text{ Benar}$$

Daerah tempat titik (0,0) berada merupakan daerah himpunan Penyelesaian (daerah yang diarsir)

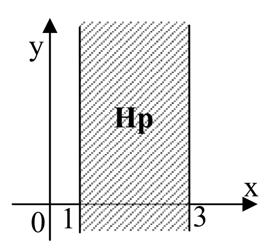
Beberapa pertidaksamaan yang sering dipakai antara lain :



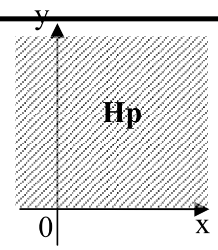
$x \geq 0$



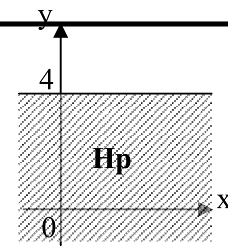
$x \geq 2$



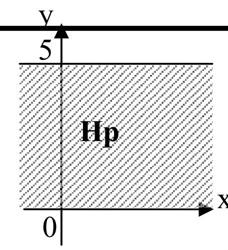
$1 \leq x \leq 3$



$y \geq 0$



$y \leq 4$



$0 \leq y \leq 5$

Gabungan dua atau lebih pertidaksamaan linear disebut sistem pertidaksamaan linear. Hp suatu pertidaksamaan linear dua variabel adalah daerah himpunan pasangan titik (x,y) yang memenuhi semua pertidaksamaan linear tersebut.

Contoh

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $\begin{cases} x + y \leq 14 \\ 3x - 2y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Jawab :

x + y = 14

x	0	14
y	14	0

Uji titik diluar garis misal (0,0)
$x + y \leq 14$
$0 + 0 \leq 14$
$0 \leq 14$ Benar

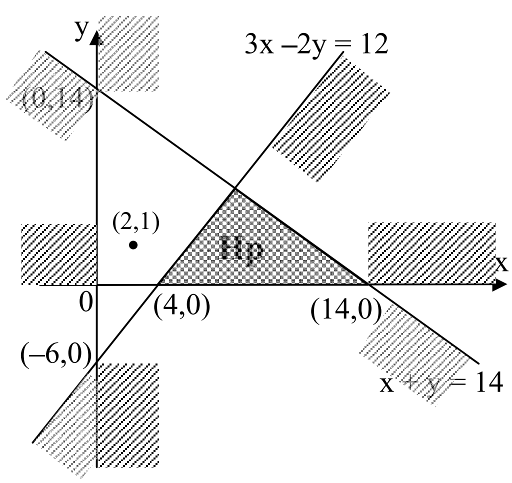
3x – 2y = 12

x	0	4
y	–6	0

Uji titik diluar garis misal (2,1)
$3x - 2y \geq 120$
$3.2 - 2.1 \geq 12$
$4 \geq 12$ Salah

x ≥ 0
kanan sumbu y

y ≥ 0
atas sumbu x



Lihat garis x + y = 14, karena uji titik (0,0) benar maka Hp adalah daerah yang memuat titik (0,0).
Lihat garis 3x – 2y = 12, karena uji titik (2,1) salah maka Hp adalah daerah yang **tidak** memuat titik (2,1).
$x \geq 0$ daerah x tidak boleh negatif (kanan sumbu y).
$y \geq 0$ daerah y tidak boleh negatif (atas sumbu x).
Daerah yang memenuhi keempat pertidaksamaan disebut Hp sistem pertidaksamaan.

Latihan 1

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut:

1. $2x + 5y \leq 20$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; x, y Є R
2. $5x + 8y \leq 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; x, y Є R
3. $2x + y \geq 12$; $4x + 3y \geq 12$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; x, y Є R
4. $x + y \leq 25$; $2x + y \leq 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; x, y Є R
5. $x + 3y \geq 6$; $4x + y \leq 8$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; x, y Є R
6. $x + 2y \leq 6$; $3x + y \leq 9$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; x, y Є R

<u>Menentukan pertidaksamaan linear apabila grafiknya diketahui</u>

(i) Tentukan persamaan garisnya

Garis melalui dua titik yaitu (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) ; rumus persamaan garis lurusnya :

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; sesuaikan hasilnya dalam bentuk : $ax + by = c$

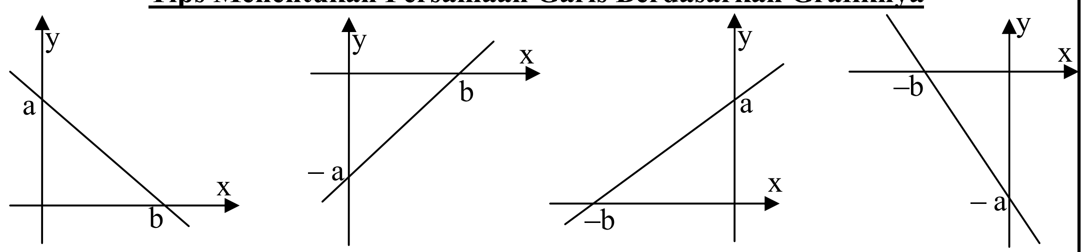
(ii) Uji titik sembarang diluar garis pada daerah yang diarsir.

Substitusi titik tersebut ke persamaan $ax + by = c$ kemudian sesuaikan tandanya $\geq$ atau $\leq$ atau $>$ atau $<$ berdasarkan hasil ruas kiri terhadap ruas kanan.

(iii) Jika terdapat lebih dari satu pertidaksamaan (sistem pertidaksamaan linear) maka ulangi langkah (i) dan (ii) untuk masing-masing garis.

(iv) Beberapa cara cepat menentukan persamaan garis bila memotong sumbu x dan sumbu y yaitu :

<u>Tips Menentukan Persamaan Garis Berdasarkan Grafiknya</u>

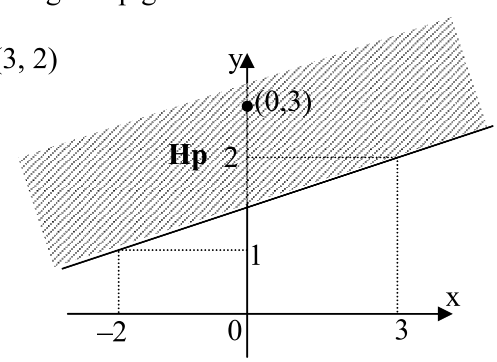


ax + by = ab | **–ax + by = –ab** | **ax – by = –ab** | **–ax – by = ab**

<u>Contoh</u>

Tentukan pertidaksamaan linear yang sesuai dengan Hp grafik di bawah!

<u>Jawab:</u>



(i) persamaan garis melalui titik (–2, 1) dan (3, 2)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{x - (-2)}{3 - (-2)}$$

$$\frac{y - 1}{1} = \frac{x + 2}{5}$$

$5(y - 1) = x + 2$

$5y - 5 = x + 2$

$-x + 5y = 2 + 5$

$-x + 5y = 7$

(ii) Substitusi titik (0,3) berada diluar garis dan didalam daerah arsiran ke persamaan :

$-x + 5y = 7$

$-0 + 5.3 = 7$

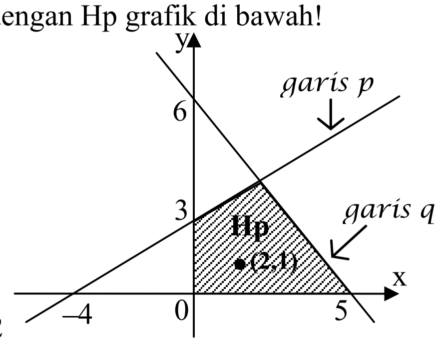
$15 = 7$

Dari hasil diatas dan karena garis penuh maka tanda yang sesuai adalah $\geq$

Jadi pertidaksamaan linearnya $-x + 5y \geq 7$

Contoh

Tentukan sistem pertidaksamaan linear yang sesuai dengan Hp grafik di bawah!



Jawab

Garis p

$ax - by = -ab$

$3x - 4y = -(3.4)$

$3x - 4y = -12$

Substitusi titik (2,1) diluar garis p di dalam arsiran

$3.2 - 4.1 = -12$

$2 = -12$

Tanda yang sesuai adalah $\geq$, sehingga $3x - 4y \geq -12$

Garis q

$ax + by = ab$

$6x + 5y = 6.5$

$6x + 5y = 30$

Substitusi titik (2,1) diluar garis q di dalam arsiran

$6.2 - 5.1 = 30$

$7 = 30$

Tanda yang sesuai adalah $\leq$, sehingga $6x + 5y \leq 30$

Lihat daerah yang diarsir

Daerah sebelah kiri sumbu y tidak diarsir maka x tidak boleh negatif sehingga $x \geq 0$

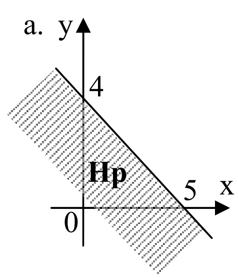
Daerah sebelah bawah sumbu x tidak diarsir maka y tidak boleh negatif sehingga $y \geq 0$

Jadi sistem pertidaksamaan yang sesuai adalah $\begin{cases} 3x - 4y \geq -12 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

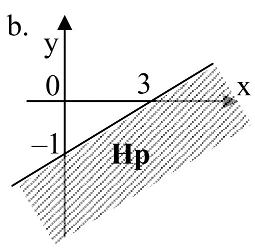
Latihan 2

1. Tentukan pertidaksamaan linear yang sesuai dengan Hp grafik berikut :

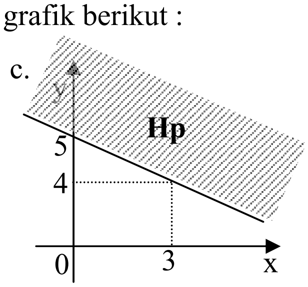
a.



b.

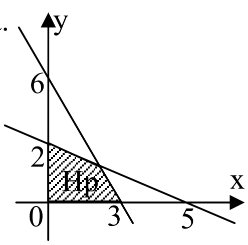


c.

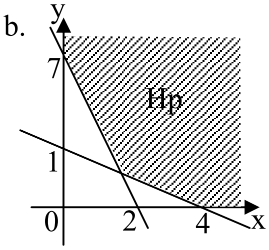


2. Tentukan sistem pertidaksamaan linear yang sesuai dengan Hp grafik berikut :

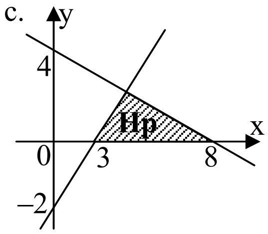
a.



b.



c.



B. Program Linear

Program linear adalah bagian matematika terapan yang digunakan untuk memecahkan masalah pengoptimalan (memaksimumkan / meminimumkan) suatu tujuan.
Dalam program linear bentuk objektif / fungsi objektif adalah fungsi f(x,y) = ax + by yang hendak dioptimumkan.
Nilai optimum bentuk objektif dapat ditentukan dengan :
(i) metode titik pojok (titik ekstrem)
Titik ekstrem adalah titik-titik pojok pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear. Nilai optimum didapat dengan cara menghitung nilai fungsi objektif f(x,y) = ax + by untuk setiap titik ektrem pada daerah himpunan penyelesaian.
(ii) garis selidik
Garis selidik dari fungsi objektif f(x,y) = Z = ax + by mempunyai persamaan ax + by = k. Dengan mengambil beberapa nilai k akan diperoleh himpunan garis-garis saling sejajar yang dinamakan *garis selidik.* Satu diantara garis-garis selidik tersebut akan melalui suatu titik yang mengakibatkan nilai bentuk objektif mencapai optimum.

Contoh :

Tentukan nilai maksimum Z = 10x + 15y pada sistem pertidaksamaan $\begin{cases} x + y \le 25 \\ 2x + y \le 40 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

untuk setiap x, y Є R
Jawab :

x + y = 25

x	0	25
y	25	0

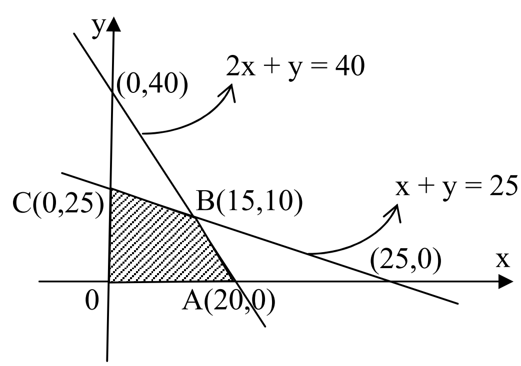
2x + y = 40

x	0	20
y	40	0

Koordinat titik B (titik potong kedua garis)

$$\begin{array}{r} 2x + y = 40 \\ \underline{x + y = 25} \\ x = 15 \end{array}$$

Sustitusi ke: x + y = 25
y = 25 – x
y = 25 – 15 = 10
Koordinat titik B (15,10)



Titik Ekstrem Z = 10x + 15y
O (0, 0) → Z = 10.0 + 15.0 = 0
A (20, 0) → Z = 10.20 + 15.0 = 200
B (15, 10) → Z = 10.15 + 15.10 = 300
C (0, 25) → Z = 10.0 + 15.25 = 375
Jadi nilai maksimum Z adalah
Z_{maks} = 375 dicapai di titik C(0, 25)

Contoh :
Dengan menggunakan metode garis selidik, tentukan nilai minimum Z = 5x + 4y pada sistem pertidaksamaan $\begin{cases} x+y \geq 18 \\ x+2y \geq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$; untuk setiap x, y Є R

Jawab :
Metode garis selidik mengharuskan menggambar grafik sesuai dengan proporsinya/perbandingannya (disarankan menggunakan kertas berpetak/strimin)

x + y = 18

x	0	18
y	18	0

x + 2y = 26

x	0	26
y	13	0

Koordinat titik B (titik potong kedua garis)

$$\begin{array}{r} x + 2y = 26 \\ \underline{x + y = 18} \\ y = 8 \end{array}$$

Sustitusi ke: x + y = 18
x = 18 – y
x = 18 – 8 = 10

Koordinat titik B (10,8)

Persamaan garis selidik 5x + 4y = k

Garis g_1
Misal nilai k = 80 sehingga persamaan g_1 adalah 5x + 4y = 80

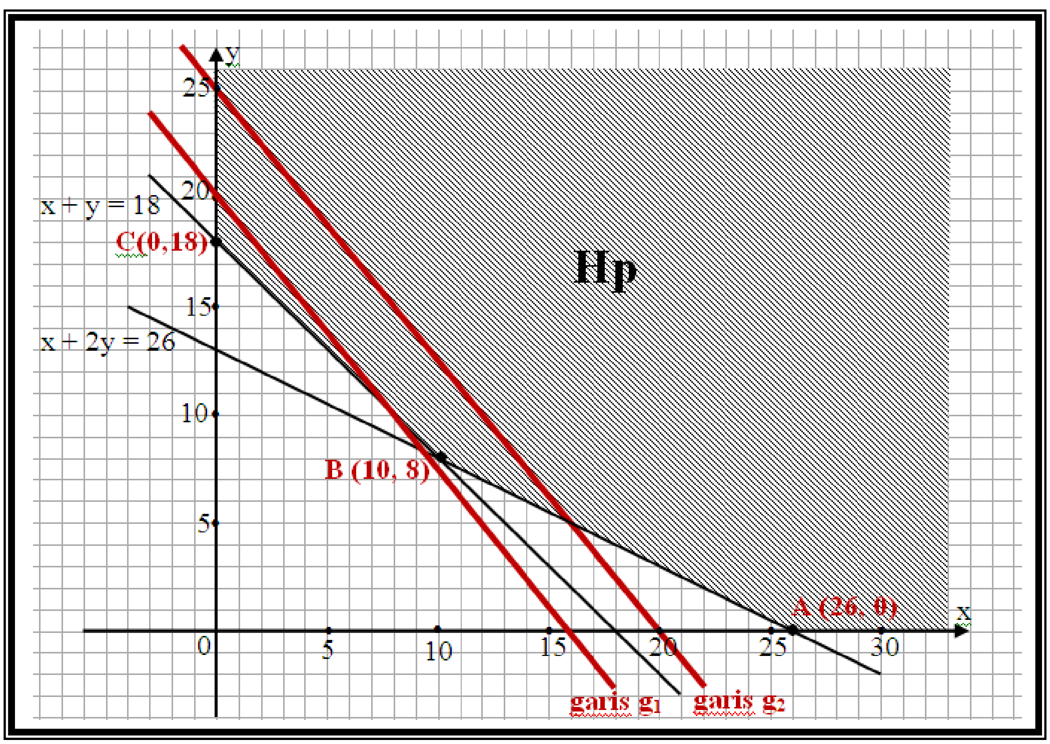
x	0	16
y	20	0

Garis g_2
Misal nilai k = 100 sehingga persamaan g_2 adalah 5x + 4y = 100

x	0	20
y	25	0

Lihat gambar, nilai k semakin besar bila garis selidik digeser ke kanan dan sebaliknya jika garis selidik digeser ke kiri maka nilai k semakin kecil. Pada daerah penyelesaian, jika digeser kekiri titik C(0,18) adalah titik terakhir yang dilalui garis selidik sehingga nilai minimum Z dicapai di titik C dengan Z_{min} = 5x + 4y = 5.0 + 4.18 = 72

.



Latihan 3

1. Diketahui Z=100x+80y. Tentukan nilai minimum dari Z pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan: $5x + 3y \geq 30$; $2x + y \geq 11$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; x,y Є R
2. Tentukan nilai minimum dari $Z = 10x + 15y$ untuk
   $x + 2y \geq 8$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, x, y Є R
3. Diketahui $Z = 10x + 3y$. tentukan nilai maksimum dari Z jika
   $x + y \leq 15$, $x + 2y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, x, y Є R
4. Tentukan nilai maksimum fungsi objektif $f(x,y) = 4x + 3y$ dari sistem pertidaksamaan : $2x + y \geq 11$; $x + 2y \geq 10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

C. Program Linear dan Model Matematika

Dalam memecahkan pengoptimalan terdapat kendala-kendala / batasan-batasan yang harus diterjemahkan ke dalam suatu sistem pertidaksamaan linear (model matematika).

Contoh :

P.T Ribut bermaksud membeli dan menyimpan dua jenis barang A dan B. setiap barang A biaya Rp 2000,- dan menempati seluas 0,2 m^2, setiap barang B biaya Rp 3000,- dan menempati seluas 0,1 m^2 . Perusahaan itu menyediakan Rp 1.200.000,- untuk membeli barang-barang dan 80 m^2 luas lantai untuk penyimpanannya. Buat model matematika dan grafiknya.

Jawab :

Misal : barang A = x
barang B = y

Maka model matematikanya:

1. $2000x + 3000y \leq 1.2000.000$ atau $2x + 3y \leq 1.200$
2. $0,2x + 0,1y \leq 80$ atau $2x + y \leq 800$
3. $x \geq 0$ karena x, merupakan bilangan bulat dan tidak negatif
4. $y \geq 0$ karena y, merupakan bilangan bulat dan tidak negatif

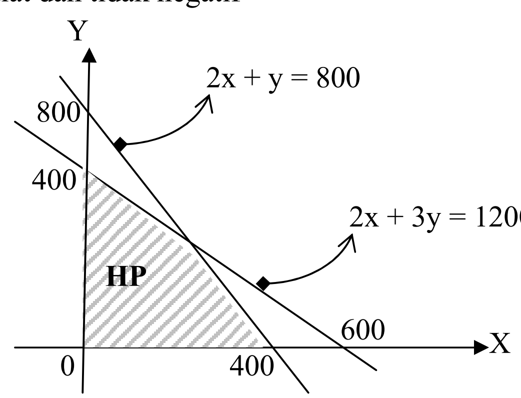
Grafik :

1. $2x + 3y = 1.200$

x	0	600
y	400	0

2. $2x + y = 800$

x	0	400
y	800	0



Contoh

Seorang ingin mengirimkan barang dagangnya yang terdiri atas 1200 kursi lipat dan 400 meja lipat, untuk keperluan tersebut ia akan menyewa truk dan colt. Truk dapat memuat 30 kursi lipat dan 20 meja lipat, sedangkan colt memuat 40 kursi lipat dan 10 meja lipat. Ongkos sewa truk Rp. 100.000,- sedangkan sewa colt Rp. 80.000,-

Tentukan :

a. Model matematikanya
b. Fungsi objektif
c. himpunan penyelesaian (Hp)
d. Banyaknya truk dan colt yang harus disewa agar ongkos seminimal mungkin

Jawab :
Misal : Truk = x
Colt = y

a. Model matematikannya
1) $30x + 40y \geq 1200$
$3x + 4y \geq 120$
2) $20x + 10y \geq 400$
$2x + y \geq 40$
3) $x \geq 0$
4) $y \geq 0$

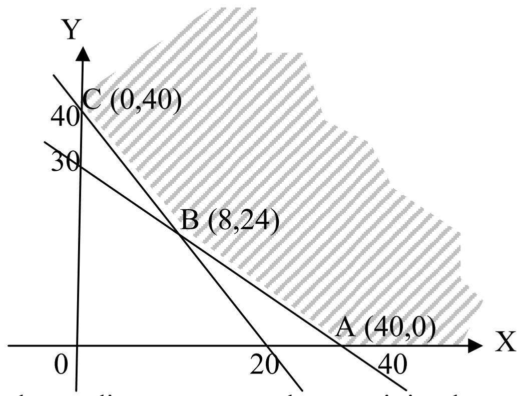
b. Fungsi objektif
$Z = 100000\,x + 80000\,y$

c. Daerah HP (grafik)
$3x + 4y = 120$

x	0	40
y	30	0

$2x + y = 40$

x	0	20
y	40	0



d. Banyak truk dan colt yang harus disewa agar ongkas seminimal mungkin
- Titik potong

$$\begin{array}{l|l|l} 3x + 4y = 120 & \times 1 & 3x + 4y = 120 \\ 2x + y = 40 & \times 4 & \underline{8x + 4y = 160}\ - \\ & & -5x = -40 \\ & & x = 8 \end{array}$$

x = 8 substitusikan (2)
$2x + y = 40$
$2.8 + y = 40$
$16 + y = 40$
$y = 40 - 16$
$y = 24$
Titik potongnya adalah (8,24)

Titik Ekstrem $Z = 100000\,x + 80000\,y$
A (40, 0) $\rightarrow Z = 100000.40 + 0 = 4.000.000$
B (8, 24) $\rightarrow Z = 100000.8 + 80000.24 = 2.720.000$
C (0, 40) $\rightarrow Z = 0 + 80000.40 = 3.200.000$
Jadi minimal ongkos angkutan Rp.2.720.000 dengan jumlah truk = 8 dan colt = 24

Latihan 4

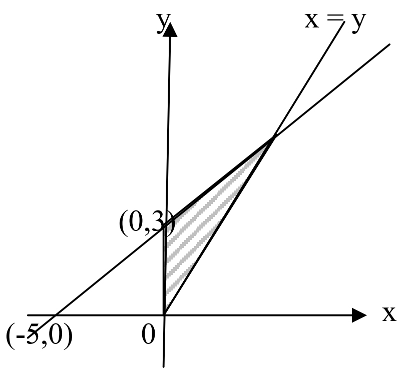
1. Makan jenis A dibuat dari 4 ons tepung dan 2 ons mentega. Sedangkan Makan jenis B dibuat dari 2 ons tepung dan 3 ons mentega, jika tersedia 6 kg tepung dan 4 kg mentega, tentukan model matematikanya!
2. Luas daerah parkir 600 m^2. luas rata-rata sebuah Sedan $6m^2$ dan sebuah Bus $24m^2$ Jika derah parkir itu tidak dapatmemuat lebih dari 45 kendaraan, banyak mobil sedan x buah dan banyak bus y buah maka tentukan model matematikanya !

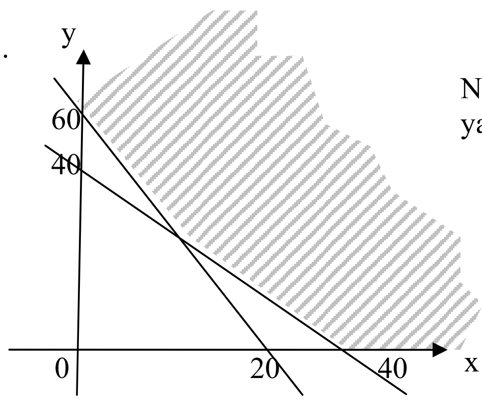
3. Sebuah pesawat terbang mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 48 penumpang, setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg dan setiap penumpang kelas ekonomi bagasinya dibatasi 20 kg, pesawat itu hanya dapat membawa bagasi 1,440 kg.Tentukan model matematikanya dari pernyataan tersebut!
4. Sebuah Kramik A membutuhkan 150 grm tanah liat jenis I dan 50 grm jenis II , Kramik bentuk B membutuhkan tanah liat 75 grm jenis I dan 75 grm jenis II, Jika tersedia 3 kg tanah liat jenis I dan 1,5 kg liat jenis II,akan dibuat sebanyak-bayaknya dari kedua jenis kramik tersebut. Tentukan model matematikanya!
5. Seorang penjahit mempunyai 65 m bahan katun dan 95 m bahan wol. Satu baju model A memerlukan 0.5 m katun dan 1.5 m wol sedangkan satu baju model B memerlukan 2 m untuk masing-masing bahan. Tentukan model matematikanya!
6. Seorang pengusaha ingin menyewakan rumah kepada 540 orang mahasiswa. Pengusaha tersebut membagun rumah tidak lebih dari 120 rumah yangterdiri atas tipe I (untuk 4 orang) di sewakan Rp.90.000,-/ bulan dan tipe II (untuk 6 orang) disewakan Rp. 107.000,- / bulan. Buatlah model matematikanya!
7. Seorang agen akan membeli 25 buah Sandal. Ia ingin membeli sandal biasa seharga @ Rp30.000 dan sepatu sandal @ Rp 40.000 jumlah uang yang ia miliki hanya Rp. 840.000,-
   a. Tulislah 4 buah pertidaksamaan dalam x dan y
   b. Perlihatkan dengan grafik HP
   c. Apabila agen mengharapkan laba Rp. 10.000 setiap sandal biasa dan Rp. 12.000 setiap sepatu sandal. Tentukan masing-masing jenis sandal yang harus dibeli.
   d. Berapa laba maksimumnya ?
8. Sebuah rumah sakit memerlukan 150 unit kalori dan 130 unit protein untuk setiap pasien perharinya. Apabila setiap kg daging sapi mengandung 500 unit kalori dan 200 unit protein. Sedangkan setiap 1 ikan segar mengandung 300 unit kalori dan 400 unit protein. Harga 1 daging sapi Rp. 30.000 sedangkan harga 1 kg ikan segar Rp. 15.000,-. Tentukan biaya minimal kebutuhan 100 orang pasien perhari pada rumah sakit tersebut!

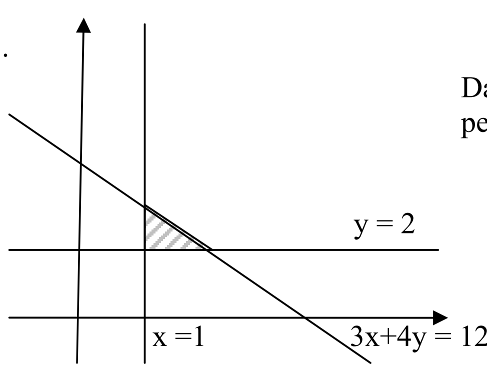
== oOo ==

EVALUASI
(waktu : 2 x 45 menit)

I. Berilah tanda silang pada huruf a, b, c, dan d pada jawaban yang paling benar !

1. Luas daerah yang di batasi oleh $1 \leq x \leq 5$ dan $0 \leq 4 \leq 4$
   a. 16 satuan luas b. 10 satuan luas
   c. 12 satuan luas d. 8 satuan luas
2. 

   Daerah yang diarsir pada grafik di samping adalah..
   a. $x - y \leq 0$, $-3x + 5y \leq 15$, $y \geq 0$
   b. $x + y \leq 0$, $-3x + 5y \leq 15$, $x \geq 0$
   c. $x - y \geq 0$, $-3x - 5y \geq 15$, $x \geq 0$
   d. $x + y \leq 0$, $-3x - 5y \leq 15$, $x \geq 0$
3. 

   Nilai minimum dari $P = 5x + 3y$ pada daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah…
   a. 140
   b. 160
   c. 150
   d. 180
4. Nilai maksimum dari $P = 2x + 3y$ pada sistem pertidaksamaan $3x + y \geq 72$, $x + y \geq 48$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah
   a. 48 b. 96 c. 150 d. 144
5. 

   Daerah yang disampingadalah himpunan penyelesaian dari …
   a. $3x + 4y \geq 12$, $x \geq 0, y \geq 0$
   b. $3x + 4y \leq 12$, $x \geq 0, y \geq 0$
   c. $3x + 4y \geq 12$, $x \geq 1, y \geq 2$
   d. $x \geq 1, y \geq 2$, $3x + 4y \leq 12$,

6. Diketahui luas suatu daerah parkir 360 m^2, luas rata-rata sebuah mobil 6 m^2 dan untuk sebuah Bus 24 m^2. daerah parkir itu tidak dapat memuat lebih dari 25 kendaraan. Jika banyaknya mobil x dan banyaknya Bus y maka model matematika dari persoalan tersebut adalah ……
   a. $x + 4y \le 60, x + y \le 25, x \ge 0, y \ge 0$
   b. $4x + y \le 60, x + y \le 25, x \ge 0, y \ge 0$
   c. $4x + y \le 60, x + y \le 25, x \ge 0, y > 0$
   d. $x + 4y \le 60, x + y \le 25, x \ge 0, y > 0$

7. Nilai minimum dari $P = 15x + 10y$ yang memenuhi syarat-syarat
   $3x + y \ge 6$, $x + y \ge 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ adalah ……
   a. 35 b. 37 c. 37,5 d. 45

8. Untuk Membuat roti jenis I memerlukan tepung 100 grm dan mentega 25 gram. Untuk membuat roti jenis II memerlukan tepung 100 grm dan mentega 50 gram. Jika tersedia tepung 4 kg dan mentega 2 kg, maka model matematikanya pada persoalan tersebut adalah ……….
   a. $2x + y \le 40, 2x + y \le 80, x \ge 0, y \ge 0$
   b. $x + y \le 40, x +2y \le 80, x \ge 0, y \ge 0$
   c. $x + y \le 40, 2x +y \le 80, x \ge 0, y \ge 0$
   d. $2x + y \le 40, x +2y \le 80, x \le 0, y \le 0$

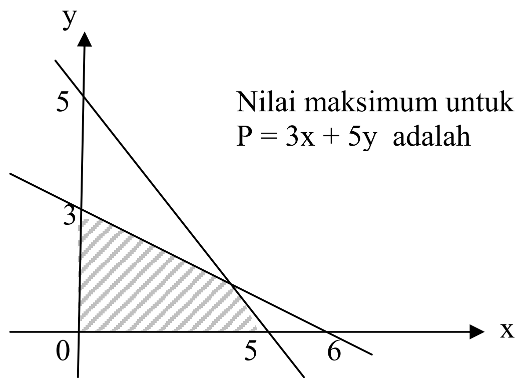
9. Suatu rombongan pelancong yang terdiri dari 18 orang akan menginap di wisma yang mempunyai 2 tipe kamar. Tipe I ditempati 3 orang dan Tipe II ditempati 2 orang. Pemilik wisma mengendaki menyewa 7 kamar. Sewa kamar untuk tipe I Rp. 7.000 dan tipe II Rp. 5.000. model matematikanya dari persoalan tersebut adalah ……
   a. $3x + 2y \le 18, x + y \le 7, x \ge 0, y \ge 0$
   b. $2x + 3y \le 18, x + y \ge 7, x \ge 0, y \ge 0$
   c. $3x + 2y \ge 18, x + y \ge 7, x \ge 0, y \ge 0$
   d. $2x + 3y \le 18, x + y \le 7, x \ge 0, y \ge 0$

10. Dari soal No.9 banyak kamar yang harus di sewa agar biaya yang dikeluarkan sekecil-kecilnya adalah …
    a. 6 kamar tipe I
    b. 4 kamar tipe I dan 3 kamar tipe II
    c. 3 kamar tipe I dan 4 kamar tipe II
    d. 5 kamar tipe II

II. Kerjakan dengan singkat dan jelas

1. Tentukan nilai maksimum dari fungsi objektif $P = 20x + 30y$ pada sistem pertidaksamaan $x + y \leq 4$, $x + 3y \leq 6$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

2. Daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini merupakan daerah penyelesaian dari suatu model matematika.



Nilai maksimum untuk fungsi objektif $P = 3x + 5y$ adalah

3. Rokok A yang harganya Rp. 2000 / bungkus di jual dengan laba Rp. 400 / bungkus, sedangkan rokok B yang harganya Rp.1000 dijual dengan laba Rp. 300 / bungkus. Seorang pedangan rokok mempunyai modal Rp. 800.000 dan kiosnya menampung 500 bungkus rokok, akan memperoleh keuntungan sebesar-besarnya jika ia membeli rokok A dab B sebanyak…..

4. Sebuah perusahaan kapal mempunyai kapal laut yang berkapasitaslebih dari 500 orang penumpang. Setiap penumpang kelas I boleh membawa begasi 80 kg sedangkan kelas ekonomi 20 kg kapal tersebut dapat membawa begasi paling banyak 16.000 kg jika harga tiket perorang untuk kelas I Rp. 100.000 dan untuk kelas ekonomi Rp. 50.000 pendapatan maksimum yang dapat diterima oleh perusahaan kapal tersebut adalah …..

5. Nilai minimum dari $Z = 40x + 10y$ pada sistem

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 4 \\ 2x + 4y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

adalah …….

6. Produk A membutuhkan 30 kg bahan mentah dan 18 jam waktu kerja mesin, sedangkan Produk B membutuhkan 20 kg bahan mentah dan 24 jam waktu kerja mesin bahan mentah yang tersedia 75 kg dan waktu kerja mesin 72 jam. Carilah nilai maksimum dari produk yang di buat jika produka A seharga Rp. 100.000 dan produk B seharga Rp. 200.000

Hubungan Huruf Awal di Setiap Nama Bilangan 0 -10

Mungkin tidak pernah kita sadari sampai sekarang bahwa nama nama dari bilangan 1 sampai 10 dalam Bahasa Indonesia memiliki hubungan yang unik, terutama pada huruf – huruf awal nama nama bilangan penyusun angka 10 tersebut.

Perhatikan penjelasan berikut :

10 = 9 + 1 = [**S**]embilan + [**S**]atu
10 = 8 + 2 = [**D**]elapan + [**D**]ua
10 = 7 + 3 = [**T**]ujuh + [**T**]iga
10 = 6 + 4 = [**E**]nam + [**E**]mpat
10 = 5 + 5 = [**L**]ima + [**L**]ima

Dari pejelasan diatas kita ketahui bahwa huruf awal pada nama – nama bilangan penyusun angka sepuluh memiliki huruf awal yang sama. Inilah salah satu dari fakta unik matematika yang tak pernah kita sadari.