Analysis III Problem Sheet 05

Viet Duc Nguyen (395220), Moritz Bichlmeyer (392374)
Tutor: Nils - Freitag 12-14 Uhr, MA551

Exercise 1

(i) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Definiere die Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ als

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{falls } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

> To prove
>
> g ist eine messbare Funktion.

Proof. Dazu zeigen wir, dass $g^{-1}((c, \infty)) \in \mathcal{A}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt.

- **Fall 1:** $c \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} g^{-1}((c, \infty)) &= \{x : f(x) = \frac{1}{d} \text{ für ein } d \in (c, \infty)\} \\ &= \{x : f(x) \in (0, \frac{1}{c})\}. \end{aligned}$$

Beachte, dass $c \neq 0$, sodass die Menge in der zweiten Zeile wohldefiniert ist. Daher ist $g^{-1}((c, \infty)) = f^{-1}((0, \frac{1}{c})) \in \mathcal{A}$.

Fall 2: $c \leq 0$. Dann ist

$$g^{-1}((c, \infty)) = g^{-1}((c, 0)) \cup g^{-1}((0, \infty)) \cup g^{-1}(\{0\}).$$

Nun gilt $g^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}$, da f messbar ist. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} g^{-1}((c, 0)) &= \{x : f(x) = \frac{1}{d} \text{ für ein } d \in (c, 0)\} \\ &= \{x : f(x) = d \text{ für ein } d \in (-\infty, \frac{1}{c})\} \\ &= f^{-1}((-\infty, \frac{1}{d})) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Aus Fall 1 wissen wir, dass $g^{-1}((0, \infty)) \in \mathcal{A}$. Damit ist

$$g^{-1}((c, \infty)) \in \mathcal{A}$$

als Vereinigung messbarer Mengen in $\mathcal{A}$. Somit ist g eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

$\square$

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(a,\infty] \in \mathcal{A}.$$

Dann ist auch $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar, da $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$.

Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} g_m$$

mit $g_m = \sup_{n\geq m} f_n$. Da g_m messbar ist, ist auch $\inf_{m\in\mathbb{N}} g_m$ messbar und somit $\limsup_{n\to\infty} f_n$ messbar

Ebenso kann man zeigen, dass $\liminf_{n\to\infty} f_n$ messbar ist, indem,

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_m$$

mit $g_m = \inf_{n\geq m} f_n$.

Daher ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ebenfalls messbar, falls f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar ist, da $f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$.

(iii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

> To prove
>
> f ist messbar.

Proof. Aus der Vorlesung wissen wir, dass stetige Funktionen messbar sind *(siehe Beispiel 1.44 (2) im Skript von Mehl, Kapitel 1, Maß- und Integrationstheorie)*. Da f differenzierbar ist, ist f insbesondere auch stetig. Daher ist f messbar. $\square$

> To prove
>
> f' ist messbar.

Proof. Es gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definiere die Funktionenfolge $f_n(x) := \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $f_n \to f'$ punktweise. Insbesondere ist f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar, da f messbar ist. □

Exercise 2

(i) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Seien f und g numerische Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ mit $\mu(N) = 0$.

> To prove
>
> f ist messbar genau dann, wenn g messbar ist.

Proof. Sei f messbar. Wir wollen zeigen, dass g messbar ist. Sei $X \in \mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, dass $g^{-1}(X) \in \mathcal{A}$.

Schreibe die Menge $g^{-1}(X)$ als

$$g^{-1}(X) = \underbrace{\{x \in \Omega : g(x) \in X, f(x) = g(x)\}}_{:=A} \cup \underbrace{\{x \in \Omega : g(x) \in X, f(x) \neq g(x)\}}_{:=B}.$$

Beachte, dass $B \subset N$ und da μ ein vollständiges Maß ist, ist B als Teilmenge einer Nullmenge ebenfalls eine Nullmenge. Somit ist B messbar, denn Nullmengen sind messbar. Wir erhalten also

$$B \in \mathcal{A}.$$

Zudem ist

$$A = \underbrace{f^{-1}(X)}_{\in \mathcal{A}} \cap \{x \in \Omega : f(x) = g(x)\}.$$

Wir sehen auch, dass $\{x \in \Omega : f(x) = g(x)\} = \Omega \setminus N \in \mathcal{A}$ messbar ist, da Ω und N messbar sind und $\mathcal{A}$ unter Differenzbildung abgeschlossen ist. Damit ist

$$A \in \mathcal{A},$$

da A als Schnitt zweier messbarer Mengen darstellbar ist. □

(ii) Nicht bearbeitet.