TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 2018
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 30.4. - 04.05.2018

2. Übung Analysis II für Mathematiker(innen)

(Metrische Räume, Topologie, beschränkte Mengen)

Themen der Großen Übung am 24.04.

Topologische Grundbegriffe: Offene/abgeschlossene Mengen, Abschluss, Rand, offener Kern

Alternativer Zugang zu Topologien: Umgebungen

Umgebungsfilter eines Punktes. Sei X eine Menge, und für jedes $a \in X$ sei eine Menge $\mathcal{U}(a)$ von Teilmengen von X so gewählt, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(U1) $a \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(a)$ und alle $a \in X$.

(U2) Ist $U \in \mathcal{U}(a)$ für ein $a \in X$ und $U \subseteq V$, so gilt $V \in \mathcal{U}(a)$.

(U3) Aus $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(a)$ für ein $a \in X$ folgt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(a)$.

(U4) Zu jedem $U \in \mathcal{U}(a)$ für ein $a \in X$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}(a)$, so dass gilt $U \in \mathcal{U}(b)$ für jedes $b \in V$.

Dann nennen wir $\{\mathcal{U}(a)\}_{a \in X}$ einen *Umgebungsfilter*. Eine Teilmenge $\mathcal{B}(a) \subseteq \mathcal{U}(a)$, so dass es für jedes $U \in \mathcal{U}(a)$ ein $B \in \mathcal{B}(a)$ mit $B \subseteq U$ gibt, nennen wir *Umgebungsbasis* von a.

In einem topologischen Raum betrachten wir die Familie aller Umgebungen von Punkten und zeigen, dass diese Wahl einen Umgebungsfilter bildet. Für diesen Filter bilden die offenen Teilmengen, welche a enthalten, eine Umgebungsbasis von a.

Tutoriumsvorschläge

1. Gruppenübung

Wie in der Vorlesung seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$ für $p \in [1, \infty)$ und $d_\infty(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$. Skizzieren Sie für $n \in \{1, 2, 3\}$ und $p \in \{1, 2, \infty\}$ die Kugel

$$U_1^p(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_p(x, y) < 1\}.$$

2. Gruppenübung ⋆

Betrachte $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, definiert durch $x \mapsto \frac{x}{1+x}$, und die Metrik d, gegeben durch $d(x, y) := |x - y|$. Zeigen Sie:

(i) f ist streng monoton wachsend.

(ii) die Abbildung $d_f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $d_f(x, y) := f(d(x, y))$, definiert eine Metrik.

3. Gruppenübung ⋆

Sei $d_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Standardmetrik und $P \in \mathbb{R}^2$ ein festgelegter Punkt. Zeigen Sie, dass die sogenannte SNCF-Metrik

$$d_F(x, y) := \begin{cases} d_2(x, y) & x, y \text{ liegen auf einer Geraden durch } P, \\ d_2(x, P) + d_2(P, y) & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

4. Gruppenübung

Betrachten Sie die folgenden Mengen

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(0, x)^2 < 4\}$
$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(0, x)^2 \le 4\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$,
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z \in [0, 2[\}$,
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \le z^2, z \in [0, 2[\}$, $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 2[\}$,
$I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 16\}$.

(i) Skizzieren Sie die Mengen.

(ii) Bestimmen Sie jeweils den Rand sowie die Menge der inneren Punkte, und geben Sie diese beiden Mengen formal an.

(iii) Bestimmen Sie die topologischen Eigenschaften (offen, abgeschlossen) der Mengen, sowie ob die Mengen beschränkt sind.

Hausaufgaben

5. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\mathcal{G} := (K, E)$ ein endlicher, zusammenhängender Graph (vgl. 1. Übungsblatt) und $B\colon K \to]0, \infty[$ eine Abbildung. Sei $w = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ein Weg von a nach b in $\mathcal{G}$. Wir definieren die bewertete Länge $\ell_B(w) := \sum_{i=1}^{n} B(k_i)$. Zeigen Sie, dass die folgende Vorschrift eine Metrik auf $\mathcal{G}$ definiert:

$$d(a, b) := \min\{\ell_B(w) \mid w \text{ ist ein Weg von } a \text{ nach } b\}$$

6. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir setzen $d(x, y) := n(x - y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine möglichst einfache notwendige und hinreichende Bedingung an n dafür, dass d eine Metrik ist.

Hinweis: Können Sie die Dreiecksungleichung als Bedingung an $n(r \pm s)$ umformulieren?

7. Aufgabe (5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $d_f(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ die Metrik aus Gruppenübung 2.

(i) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen bezüglich der Metrik d, wenn sie offen bezüglich der Metrik d_f ist.

(ii) Beschreiben Sie alle beschränkten Teilmengen von X bezüglich der Metrik d_f.

(iii) Geben Sie ein Beispiel eines metrischen Raumes (X, d) und einer Menge $M \subseteq X$, so dass M bezüglich d_f beschränkt, aber bezüglich d unbeschränkt ist.

8. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, die konstante Nullfunktion 0 ist das Nullelement). Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ definieren wir die Abbildungen

$$D_n\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \sup_{-n \le x \le n} |f(x) - g(x)|.$$

(i) Zeigen Sie, dass $D(f, g) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{D_n(f, g)}{1 + D_n(f, g)}$ eine Metrik auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert.

(ii) Betrachte $B_\varepsilon(0) = \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid D(0, g) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ und zeigen Sie, dass es $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\delta > 0$ gibt, so dass $\{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid D_k(0, g) < \delta\} \subseteq B_\varepsilon(0)$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass für $k < \infty$ die Abbildung $D^k(f, g) := \displaystyle\sum_{n=1}^{k} 2^{-n} \frac{D_n(f, g)}{1 + D_n(f, g)}$ **keine** Metrik auf $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert.

Gesamtpunktzahl: 20