Aufgabe 1

(a) Der absolute Fehler f_1 beträgt $f_1 = \tilde{s}_1 - s_1 = x_1 - x_1 = 0$. Für f_2 ergibt sich:

$$f_2 = \tilde{s}_2 - s_2 = (\tilde{s}_1 \oplus x_2) - (x_1 + x_2) = (x_1 \oplus x_2) - (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)(1 + \epsilon_{f_2}) - (x_1 + x_2) = \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2)$$

Der absolute Fehler f_3 lautet

$$\begin{aligned}
f_3 = \tilde{s}_3 - s_3 &= (\tilde{s}_2 \oplus x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)\\
&= ((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)\\
&= ((x_1 + x_2)(1 + \epsilon_{f_2}) \oplus x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)\\
&= ((x_1 + x_2 + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2)) \oplus x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)\\
&= ((x_1 + x_2 + x_3 + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2))(1 + \epsilon_{f_3})) - (x_1 + x_2 + x_3)\\
&= \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2) + \epsilon_{f_3}(x_1 + x_2 + x_3 + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2))\\
&= \epsilon_{f_3}(x_1 + x_2 + x_3) + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2)(1 + \epsilon_{f_3})\\
&= \epsilon_{f_3}(x_1 + x_2 + x_3) + f_2(1 + \epsilon_{f_3})
\end{aligned}$$

Für f_4 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
f_4 = \tilde{s}_4 - s_4 &= (\tilde{s}_3 \oplus x_4) - \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}_{:=\xi}\\
&= \Big(((x_1 + x_2 + x_3 + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2))(1 + \epsilon_{f_3})) \oplus x_4\Big) - \xi\\
&= \big((x_1 + x_2 + x_3 + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2))(1 + \epsilon_{f_3}) + x_4\big)(1 + \epsilon_{f_4}) - \xi\\
&= \big(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2) + \epsilon_{f_3}(x_1 + x_2 + x_3 + \epsilon_{f_2}(x_1 + x_2))\big)(1 + \epsilon_{f_4}) - \xi\\
&= (\xi + f_2 + f_3)(1 + \epsilon_{f_4}) - \xi\\
&= f_2 + f_3 + \epsilon_{f_4}(\xi + f_2 + f_3)\\
&= \epsilon_{f_4}\xi + (f_2 + f_3)(1 + \epsilon_{f_4})\\
&= \epsilon_{f_4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (f_2 + f_3)(1 + \epsilon_{f_4})
\end{aligned}$$

(b) **Diskussion:** Betrachte den relativen Fehler τ_{rel}

$$\tau_{rel} = \frac{|s_n + f_n|}{|s_n|} = 1 + \frac{|f_n|}{|\sum_{i=0}^n x_i|} \leqslant (1 + \epsilon^*)^n \frac{\sum_{i=0}^n |x_i|}{|\sum_{i=0}^n x_i|}.$$

Da $\sum_{i=0}^n |x_i| \geqslant |\sum_{i=0}^n x_i|$, kann τ_{rel} besonders groß werden, wenn sich die einzelnen Summanden x_i gegenseitig auslöschen. Das heißt, wenn $\sum x_i \approx 0$ gilt. Andererseits wird der relative Fehler klein, wenn alle Summanden das selbe Vorzeichen besitzen.

Wir sehen auch, dass der relative Fehler größer wird, umso mehr Summanden hinzuaddiert werden, da $(1 + \epsilon^*)^n \geqslant (1 + \epsilon^*)^{n-1} \geqslant ... \geqslant 1$.

Im folgenden werden wir die Abschätzung per Induktion über n beweisen.

Beweis. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ergibt: $f_1 = 0 \leqslant (1 + \epsilon^* - 1)|x_1|$ ✓

Angenommen, die Abschätzung gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für $n \rightsquigarrow n+1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{n+1} = \tilde{s}_{n+1} - s_{n+1} &= \tilde{s}_n \oplus x_{n+1} - s_{n+1} \\ &= (s_n + f_n) \oplus x_{n+1} - s_{n+1} \\ &= (s_{n+1} + f_n)(1+\epsilon) - s_{n+1} \\ &= s_{n+1} + f_n + \epsilon(s_{n+1} + f_n) - s_{n+1} \\ &= f_n(1+\epsilon) + \epsilon s_{n+1} \\ &\overset{(IV)}{\leqslant} \big((1+\epsilon^*)^n - 1\big) \sum_{i=0}^{n} |x_i|(1+\epsilon) + \epsilon \sum_{i=0}^{n+1} |x_i| \\ &\leqslant \big((1+\epsilon^*)^n - 1\big) \sum_{i=0}^{n+1} |x_i|(1+\epsilon^*) + \epsilon^* \sum_{i=0}^{n+1} |x_i| \\ &= \big[\big((1+\epsilon^*)^n - 1\big)(1+\epsilon^*) + \epsilon^*\big] \sum_{i=0}^{n+1} |x_i| \\ &= \big[(1+\epsilon^*)^{n+1} - 1\big] \sum_{i=0}^{n+1} |x_i| \end{aligned}$$

Nach Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung für alle $n > 0$. □

(c) *Beweis per Induktion über n.* Für $n = 1$ setze $\delta_1 := 0$ und dann gilt:

$$\tilde{s}_1 = x_1 = x_1(1+0) \text{ und } -\epsilon^* \leqslant 0 \leqslant \epsilon^* \qquad \checkmark$$

Angenommen, es gäbe δ_i für $i = 1, \dots, n$, sodass $\tilde{s}_n = \sum x_i(1+\delta_i)$ und $(1-\epsilon^*)^n - 1 \leqslant \delta_i \leqslant (1+\epsilon^*)^n - 1$. Betrache nun $n \rightsquigarrow n+1$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{n+1} = \tilde{s}_n \oplus x_{n+1} \overset{IV}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(1+\delta_i)\right) \oplus x_{n+1} &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(1+\delta_i)\right) + x_{n+1}\right](1+\epsilon) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i(1+\delta_i)(1+\epsilon) + x_{n+1}(1+\epsilon) \end{aligned}$$

Definiere $\tilde{\delta}_i := (1+\delta_i)(1+\epsilon) - 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\tilde{\delta}_{n+1} := \epsilon$. Dann gilt

$$\tilde{s}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(1+\tilde{\delta}_i).$$

Zum Schluss überprüfen wir noch, dass $\tilde{\delta}_i$ im richtigen Intervall liegt. Es gilt $\epsilon > 0$. Für $\tilde{\delta}_{n+1}$ ergibt sich

$$\tilde{\delta}_{n+1} = \epsilon \leqslant (1+\epsilon) - 1 \leqslant (1+\epsilon)^n - 1 \leqslant (1+\epsilon^*)^n - 1.$$

Die Abschätzung in die andere Richtung ergibt

$$\tilde{\delta}_{n+1} = \epsilon \geqslant (1-\epsilon) - 1 \geqslant (1-\epsilon)^n - 1 \geqslant (1-\epsilon^*)^n - 1.$$

Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\tilde{\delta}_i = (1+\delta_i)(1+\epsilon) - 1 \leqslant (1+\epsilon^*)^{n+1} - 1, \text{ da wegen IV gilt: } 1+\delta_i \leqslant (1+\epsilon^*)^n.$$

In die andere Richtung ergibt sich

$$\tilde{\delta}_i = (1+\delta_i)(1+\epsilon) - 1 \overset{IV}{\geqslant} (1-\epsilon^*)^n(1+\epsilon) - 1 \geqslant (1-\epsilon^*)^{n+1} - 1$$

Tatsächlich liegen die $\tilde{\delta}$ im richtigen Intervall. Nach Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage für alle $n > 0$ gezeigt. □

Wir wollen nun folgende Abschätzung zeigen:

$$|\delta_i| \leqslant \frac{n\epsilon^*}{1-n\epsilon^*}, \quad \text{falls } n\epsilon^* < 1.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei x reell mit $x < \frac{1}{n}$. Daraus folgt, dass $1 - nx > 0$.

$$(1+x)^n - 1 \leqslant \frac{nx}{1-nx} \overset{1-nx>0}{\iff} \big((1+x)^n - 1\big)(1-nx) \leqslant nx \iff (1+x)^n(1-nx) - 1 \leqslant 0.$$

Wir zeigen nun per Induktion über n, dass $(1+x)^n(1-nx) - 1$ immer negativ bzw. null ist für alle $x < \frac{1}{n}$. Für $n = 1$ ergibt sich

$$(1+x)(1-x) - 1 = 1 - x^2 - 1 = -x^2 \leqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. $n \rightsquigarrow n+1$.

$$(1+x)^{n+1}(1-(n+1)x) - 1 = (1+x)^{n+1}(1-nx-x) - 1 = (1+x)^{n+1}(1-nx) - x(1+x)^{n+1} - 1$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1}(1-nx) - x(1+x)^{n+1} - 1 &= (1+x)^n(1-nx)(1+x) - x(1+x)^{n+1} - 1 \\ &= \underbrace{(1+x)}_{\geqslant 0}\big(\underbrace{(1+x)^n(1-nx)}_{\leqslant 0 \text{ nach IV}} - \underbrace{x(1+x)^n}_{\geqslant 0}\big) - 1 \leqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Damit ist $(1+x)^n(1-nx) - 1 \leqslant 0$ und es folgt, dass $(1+x)^n - 1 \leqslant \frac{nx}{1-nx}$ für alle $xn < 1$. Für $x = \epsilon^*$ folgt die Behauptung, die zu beweisen war. □

Aufgabe 3

Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich $|a+b| - |b| \leqslant |a|$. Sei $a := \alpha + \beta$ und $b := -\beta$. Damit $|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha + \beta|$. Sei $b := -a$, so ergibt sich $|\beta| - |\alpha| \leqslant |\alpha + \beta|$. Insgesamt

$$|\alpha + \beta| \geqslant \big||\alpha| - |\beta|\big|.$$

Die Ungleichung gilt für jede Norm, da wir nur die Dreiecksungleichung ausnutzen.