Technische Universität Berlin

Mitschrift zu

Differentialgleichungen I

gehalten von Dr. Hans-Christian Kreusler
im Wintersemester 2018/19

Letzte Änderung am 20. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung und Klassifizierung von Differentialgleichungen

18.10.18

Beispiele von Differentialgleichungen

- **SIR-Modell für Krankheitsausbildung:** $S = S(t)$ beschreibt die Personen, die sich infizieren können (*susceptible individuals*), $I = I(t)$ sind die Erkrankten und $R = R(t)$ sind die Gesundeten.
- **Durchbiegung einer Platte:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet
- **Navier-Strokes-Gleichung:**

6 Problemstellungen

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit von Lösungen
- Stabilität von Lösungen: Wie verhält sich das System von Gleichungen unter Veränderung von Parametern? Beispiel: Wettervorhersage, Diffusion
- Qualitatives Verhalten: Regularität (wie glatt sind die Lösungen wirklich?)
- Explizite Lösbarkeit
- Approximierbarkeit von Lösungen

Typen von Differentialgleichungen

- explizit vs implizit: Eine Gleichung der Form $F(x, u(x), u'(x), ...) = 0$ nennt man *implizit*. Kann man eine Gleichung nach der höchsten Ableitung von u auflösen, so nennt man sie *explizit*.

Kapitel 1

Elementare Lösungsmethoden

19.10.18

1.1 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Einige Beispiele:

- Betrachte die Differentialgleichung:

$$\begin{cases} u'(t) & = \lambda u(t), \quad t > t_0, \\ u(t_0) & = u_0. \end{cases}$$

  Hier sind $t_0, u_0, \lambda \in \mathbb{R}$ und wir suchen eine Lösung $u : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$.

  Dann ist *die* Lösung f gegeben durch

$$u(t) = e^{\lambda(t-t_0)}u_0.$$

  Gibt es noch andere Lösungen?

- Schwingungen können beschrieben werden durch

$$\begin{cases} -u''(t) + pu'(t) + qu(t) & = 0, \quad t > 0, \\ u(t_0) & = u_0, \\ u'(t_0) & = v_0, \end{cases}$$

  mit $p, q \in \mathbb{R}$ und $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Löse mit dem **Exponentialansatz**. Setze dazu

$$u(t) := e^{\lambda t}.$$

  Wir überprüfen nun, wann u die Differentialgleichung löst. Das heißt, wir suchen nach einem λ. Wir setzen u in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$(-\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda t} = 0.$$

  Da $e^{\lambda t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ ist, muss das Polynom $-\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ sein. Wie muss also das λ gewählt werden, damit das Polynom verschwindet?

1.Fall: Es existieren für das Polynom zwei verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die Lösungen lauten

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t},\ u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

.

2.Fall: Das Polynom besitzt eine doppelte Nullstelle bei $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Lösungen lauten

$$u_0(t) = e^{\lambda t}, u_1(t) = te^{\lambda t}.$$

Das Problem wurde also auf ein Nullstellenproblem zurückgeführt.

Als nächstes befassen wir uns mit dem **Superpositionsprinzip**. Dies ist ein Konzept in der *linearen Algebra* und findet Anwendung in der Lösungstheorie für lineare Differentialgleichungen.

Seien X, Y Vektorräume und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Das Problem lautet:

Zu einem $f \in Y$ finde ein $x \in X$, sodass $Ax = f$.

Das Problem heißt *homogen*, falls $f = 0$. Ansonsten heißt es *inhomogen*.

Superpositionsprinzip Die Lösungsmenge eines homogenen Problems ist ein Vektorraum, insbesondere gibt es eine Basis $x_1, ..., x_n$ von Lösungen, sodass jede Lösung eine Linearkombination von $x_1, ..., x_n$ ist. Also

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

Die Lösungsmenge des inhomogenen Problems ist ein zum Lösungsraum des homogenen Problems affiner Raum, d.h. ist x_p eine Lösung des inhomogenen Problems (genannt *partikuläre Lösung*) und x_{allg} die allgemeine Lösung des homogenen Problems, so ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems gerade

$$x_{allg,inh} = x_p + x_{allg}.$$

1.1.1 Das homogene Problem

Das homogene lineare DGL n-ter Ordnung hat die Form

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1 u' + a_0 u = 0.$$

konstante Koeffizienten, beliebige Ordnung

Beachte, dass $a_0, ..., a_{n-1}$ Funktionen sein dürfen! Der Lösungsraum ist ein n-dimensionaler Raum, d.h. wir suchen n linear unabhängige Lösungen $u_1, ..., u_n$. Sind nun $\underline{a_0, ..., a_{n-1} \text{ konstant}}$, so funktioniert der Exponentialansatz

$$u(t) := e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Ist dann λ_i eine μ_i-fache Nullstelle, so sind

$$t \mapsto e^{\lambda_i t}, t \mapsto te^{\lambda_i t}, ..., t \mapsto t^{\mu_i - 1}e^{\lambda_i t},$$

linear unabhängige Lösungen.

nicht konstante Koeffizienten, erste Ordnung

Betrachte nun den Fall, falls die $\underline{a_0, ..., a_{n-1}}$ nicht konstant sind. Sei $n = 1$.

$$\begin{aligned} &u'(t) + a_0(t)u(t) = 0 \\ \text{bzw.}\quad &u'(t) = -a_0(t)u(t). \end{aligned}$$

Dann ist für beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$

$$u(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_0(s)ds\right) \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}$$

eine allgemeine Lösung des Problems, denn es gilt

$$u'(t) = -a_0(t) \underbrace{\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_0(s)ds\right) \cdot c}_{=u(t)} = -a_0(t)u(t).$$

Betrachten wir ein zugehöriges Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + a_0(t)u(t) = 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Dann ist $u(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_0(s)ds\right) \cdot u_0$ die einzige Lösung!

nicht konstante Koeffizienten, höhere Ordnung

Ist $n > 1$, so kann das **Reduktionsverfahren nach d'Alembert** helfen. Wenn u_1 eine bereits bekannte Lösung ist, so verfolgen wir den Ansatz

$$u_2(t) := u_1(t) \int_{t_0}^{t} v(s)ds$$

für eine *vorerst* unbekannte Funktion v.

Wir führen das Verfahren am Beispiel einer Differentialgleichung zweiter Ordnung durch. Sei das folgende DGL gegeben:

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0. \tag{1.1}$$

Wir leiten u_2 mit der Produktregel ab und erhalten

$$\begin{aligned}
u_2'(t) &= u_1'(t)\int_{t_0}^{t} v(s)ds + u_1(t)v(t)\\
u_2''(t) &= u_1''(t)\int_{t_0}^{t} v(s)ds + u_1'(t)v(t) + u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t)\\
&= u_1''(t)\int_{t_0}^{t} v(s)ds + 2u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t).
\end{aligned}$$

Setze u_2 in das DGL (1.1) ein. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) =& u_1''(t)\int_{t_0}^{t} v(s)ds + 2u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t)\\
&+ p(t)u_1'(t)\int_{t_0}^{t} v(s)ds + u_1(t)v(t)\\
&+ q(t)u_1(t)\int_{t_0}^{t} v(s)ds\\
=& \int_{t_0}^{t} v(s)ds \cdot \underbrace{\big(u_1''(t) + p(t)u_1'(t) + q(t)u_1(t)\big)}_{=0}\\
&+ u_1(t)v'(t) + 2u_1'(t)v(t) + u_1(t)v(t) = 0.
\end{aligned}$$

Finden wir also ein v, sodass v das DGL erster Ordnung mit

$$u_1v' + 2u_1'v + u_1v = 0$$

löst, so haben wir eine weitere Lösung für unser DGL (1.1) gefunden.

1.1.2 Das inhomogene Problem

Die Differentialgleichung hat die Form

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1u' + a_0u = f.$$

Variation der Konstanten. Sei u_{allg} die allgemeine Lösung des zugehörigen, homogenen Problems.

$$u_{allg}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i(t), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Wir verfolgen den Ansatz

$$u_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)u_i(t)$$

für zu bestimmende $c_1, ..., c_n$, um eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu erhalten.

Im Allgemeinen ist nicht klar, ob oder wie man zu einer Lösung kommt. Ist aber $n = 1$, so haben wir

$$u'(t) + a(t)u(t) = f(t).$$

Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$u_p(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{s}^{t} a(r)dr\right) f(s)ds.$$

Eine allgemeine Lösung des inhomogenen Problems für $n = 1$ lautet nach dem Superpositionsprinzip:

Formel von Duhamel

$$u(t) = \underbrace{\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)c}_{=u_{allg,hom}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{s}^{t} a(r)dr\right) f(s)ds}_{=u_p}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.1.3 Umschreiben in ein System 1. Ordnung

Betrachten wir

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1 u' + a_0 u = f. \tag{$*$}$$

Ist u eine Lösung dieser Differentialgleichung und setzen wir

$$\begin{aligned} v_0 &= u \\ v_1 &= u' \\ &... \\ v_{n-1} &= u^{(n-1)} \\ \bar{v} &= \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dann erfüllt $\bar{v}$ die Differentialgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}'}_{\bar{v}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & ... & ... & ... & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}}_{\bar{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\tilde{f}}.$$

In der n-ten Zeile steht die Differentialgleichung. $\bar{v}$ löst also

$$\bar{v}' + A\bar{v} = \tilde{f} \text{ und } \bar{v} \text{ ist } \mathbb{R}^n\text{-wertig.} \tag{$**$}$$

Ist umgekehrt $\bar{v}$ eine Lösung von $(**)$, so löst

$$u := v_0$$

die Differentialgleichung $(*)$.