DGL I, 7. Übungsblatt

Duc Nguyen (395220), Jan Walczak (371626)

Aufgabe 1

(i) Die Folge F mit $f_n(x) = \arctan(nx)$ ist auf $[0, 1]$ nicht gleichgradig stetig und somit auch nicht relativ kompakt. F ist nicht gleichgradig stetig, da man für $\epsilon = 1$ immer ein $n(\delta) \in \mathbb{N}$ für jedes $\delta > 0$ findet, sodass es ein $0 < x \leq \delta$ gibt mit

$$\arctan(nx) \geq \epsilon. \tag{1}$$

Sei $\delta > 0$. Nun gilt aufgrund der Monotonie von tan auf $[0, 1]$:

$$\arctan(nx) \geq \epsilon \iff nx \geq \tan(\epsilon) \iff n \geq \frac{\tan(\epsilon)}{x}.$$

Daher sei $n(\delta) := \frac{\tan(\epsilon)}{\delta}$ und man hat mit $x = \delta$ solch ein x gefunden, das (1) erfüllt. Somit ist die Folge F nicht gleichgradig stetig.

(ii) Die Folge F mit $f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}$ ist auf $[0, \infty)$ gleichgradig stetig. Man zeigt dafür, dass $\frac{d}{dx}e^{-\frac{x}{n}}$ für $n = 1$ und $x = 0$ sein Maximum mit 1 annimmt. Daraus folgt, dass f_n lipschitz stetig mit Lipschitz Konstante 1 für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Daher ist F gleichgradig stetig.

Es gilt nun

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{x}{n}} = -\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n} \implies \max|-\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}| = 1,$$

wobei das Maximum bei $n = 1$ und $x = 0$ angenommen wird.

Auch ist die Folge F relativ kompakt, da sie gleichmäßig beschränkt ist mit Konstante $c = 1$. Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : e^{-\frac{x}{n}} = \frac{1}{e^{\frac{x}{n}}} \leq 1,$$

da $e^x \geq 1$ für alle $x \geq 0$.

(iii) Auch diese Folge ist gleichgradig stetig mit der selben Argumentation wie in (ii). Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dt}ne^{-\frac{x}{n}} = -e^{-\frac{x}{n}} \implies \max|-e^{-\frac{x}{n}}| = 1,$$

für $x = 0$. Aber F ist nicht relativ kompakt, da F nicht gleichmäßg beschränkt ist. Für jedes $c > 0$ ist nämlich $(c+1)e^{-\frac{x}{c+1}} > c$ für $x = 0$.