1 Implizite Funktionen

Theorem 1.1: Satz über implizite Funktionen

Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit $F(x_0, y_0) =$ und $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)$ ist invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen U und V von x_0 bzw. y_0 und eine eindeutige Funktion $f : U \to V$ mit

$$F(x, f(x)) = 0$$

und $Df(x) = -(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)), \quad \forall x \in U.$

Aufgabe: Zeige, dass das Gleichungssystem

$$2xy + \cos x^2 + \sin y^2 - 4x + y = 1$$

in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eine Lösung der Form $y = f(x)$ hat und bestimmte das Taylorpolynom zweiten Grades in $x_0 = 0$.

Lösung: Setze $F(x, y) = 2xy + \cos x^2 + \sin y^2 - 4x + y - 1$. Dann ist

$$F(0, 0) = 0.$$

Bestimme die Ableitung und überprüfe, ob sie invertierbar ist.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y \cos y^2 + 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen erhalten wir Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von 0 und Funktion $f : U \to V$ mit $F(x, f(x)) = 0$.

Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \\ &= -\frac{1}{2x + 2f(x)\cos(f(x)^2) + 1}(2f(x) - 2x \sin x^2 - 4) \\ f'(0) &= -\frac{1}{0 + 0 + 1}(0 - 0 - 4) = 4. \end{aligned}$$

2 Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1: Untermannigfaltigkeit

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{M}$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn zu jedem $x \in \mathcal{M}$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ um x existiert und offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ und ein immersiver Homöomorphismus $\varphi : U \to \mathcal{M}$ (φ ist bijektiv, stetig diffbar, $D\varphi$ injektiv und φ^{-1} stetig), sodass

$$\varphi(U) = \mathcal{M} \cap V.$$

Aufgabe: Wie sehen die n- bzw. 0-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ aus?

Lösung: Die n-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind genau die offenen Teilmengen $\mathbb{R}^n$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wähle $\varphi = Id|_U$, $V = U$. φ ist dann ein immersersiver Homöomorphismus.

Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $x \in \mathcal{M}$ beliebig. Es existiert ein Flachmacher um x, d.h. ein Diffeomorphismus $\psi : U \to V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ mit $\psi(\mathcal{M} \cap U) = \mathbb{R}^n \cap V = V$. Es folgt, dass $M \cap U = \psi^{-1}(V)$ ist offen. Es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $U_\epsilon(x) \subset U \cap M \subset \mathcal{M} \implies x$ ist ein innerer Punkt von $\mathcal{M}$.

Die 0-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind genau die diskreten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, d.h. die Mengen M, sodass für jedes $x \in M$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $M \cap U_\epsilon(x) = \{x\}$.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ diskret. Sei $x \in M$ beliebig. Es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $M \cap U_\epsilon(x) = \{x\}$. Definiere $\psi : U \to V, v \mapsto v - x$. Setze $U = U_\epsilon(x), V = U_\epsilon(x) - x = U_\epsilon(0)$. Dann ist ψ ein Flachmacher, da

$$\psi(M \cap U) = \psi(\{x\}) = \{0\} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = ... = x_n = 0\} \cap V.$$

Sei M eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Sei $x \in M$ beliebig. Es existiert ein Flachmacher, das heißt, ein Diffeomorphismus $\psi : U \to V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in U$, sodass

$$\psi(M \cap U) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = ... = x_n = 0\} \cap V = \{0\} \cap V = \{0\}.$$

Damit $M \cap U = \psi^{-1}(\{0\}) = \{x\} \implies M$ ist diskret, da x beliebig war.

Zu den Hausaufgaben: $\updownarrow^p$ sind Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, wenn $p > 1$. Bei $p = 1$ gibt es Probleme bei den Ecken.

3 Lagrange Verfahren

Ziel: Finde Extrema von $f : \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$, wobei G offen ist. Unter Nebenbedingung $g(x) = 0$, wobei $g = (g_1, ..., g_m) : G \to \mathbb{R}^m$.

Verfahren

1. **Kandidaten für Extrema:** Definiere die Lagrange-Funktion

$$L(x_1, .., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n)$$

Kandidaten erfüllen

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) \quad \forall i = 1, ..., n$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) \quad \forall j = 1, ..., m$$

Gleichungssystem lösen.

2. **Art der Extrema bestimmen:** Betrachte die geänderte Hesse-Matrix

$$H(\lambda_1, ..., \lambda_m, x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_m} & \frac{\partial L}{\partial \lambda_1 \partial x_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_m} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m^2} & & & \\ \vdots & & & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Betrachte die Vorzeichenfolge der führenden Hauptminoren (führende $k > 2m$ Hauotminoren).

Beispiel: eine Nebenbedingung $m = 1$ und $n \geq 2$.

- 3. Hauptminor positiv und danach folgende alternierend $\implies$ Maximum
- 3. Hauptminor und alle folgenden negativ $\implies$ Minimum