# Aufgabe 1

(i) *Zu zeigen:* $u$ ist gleichmäßig stetig.

*Beweis per Widerspruch.* Angenommen, $u$ ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe ein $\epsilon > 0$, sodass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwei reelle Zahlen $x_n, y_n$ gibt mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad (*) \qquad \text{und } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \quad (**).$$

Wegen $(*)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Sei $\gamma := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Es gilt $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Falls $\gamma \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\gamma) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n). \tag{$\star$}$$

Falls $\gamma = \infty$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = 0 = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n). \tag{$\star\star$}$$

Aussage $(\star), (\star\star)$ stehen im Widerspruch zu $(**)$, da wegen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ es einen Index $N \in \mathbb{N}$ geben muss mit

$$f(x_N) - f(y_N) < \epsilon.$$

Aber $x_N - y_N < \frac{1}{N}$ nach $(*)$. Demnach ist $u$ gleichmäßig stetig. $\square$

*Zu zeigen:* $u$ ist beschränkt.

*Beweis.* Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\forall x \geq x_0 : |u(x)| < 1 \text{ und } |u(-x)| < 1.$$

Zudem ist $u|_{[-x_0,x_0]}$ beschränkt nach Satz von Heine, da $u$ stetig ist und $[-x_0, x_0]$ kompakt. Sei $M := \sup_{x\in[-x_0,x_0]} |u|$ und insbesondere ist $M \in \mathbb{R}$. Dann wird u durch $\max(1, M) \in \mathbb{R}$ beschränkt. $\square$

(ii) *Zu zeigen:* $K$ ist eine Abbildung von $X$ nach $X$.

*Beweis.* Sei $u \in X$ beliebig

- Zeige, dass $Ku$ wohldefiniert ist. Es muss insbesondere $\int k(x-y)u(y)dy < \infty$ gelten, damit $k(x-y)u(y)dy$ integrierbar ist. Da $k, u \in L^1$, ist $h_x(y) := u(y)k(x-y)$ messbar. Nun ist $u$ beschränkt durch eine Konstante $M$, wie in Aufgabe 1(i) gezeigt wurde. Wegen $\int k(y)dy < \infty$ ist $Mk$ eine Majorante von $h_x$; es gilt also

  $$|h_x| = |uk| \leq Mk \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

  Daher ist $|h_x|$ integrierbar (nach der majorisierten Konvergenz) und somit auch $h_x$. Insbesondere ist

  $$\forall x \in \mathbb{R} : (Ku)(x) \leq M \int k(x-y)dy < \infty. \tag{1}$$

- Zeige, dass $Ku$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Da $(Ku)(x) = \int h_x(y)dy$ und $h_x(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lebesgue integrierbar ist, ist $Ku$ absolut stetig; daher auch stetig für alle $x$.
- Zeige, dass $(Ku)(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$. Aus der Analysis III Vorlesung ist bekannt:
$$k \in L^1 \implies k(y) \to 0 \quad \text{für} \quad y \to \pm\infty. \tag{2}$$
Nun gibt es für $k_x(y) := k(x-y)$ eine Majorante mit $k(y)$, da
$$\forall x \in \mathbb{R} : k_x(y) = k(x-y) \implies \forall x \in \mathbb{R} : |k_x| \leq k.$$
Zudem ist $\lim\limits_{y \to \pm\infty} k_x(y) = 0$ wegen (2). Es gilt nun mit der majorisierten Konvergenz:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} (Ku)(x) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \int k(x-y)u(y)dy &\overset{(1)}{\leq} M \lim_{x\to\pm\infty} \int k_x(y)dy \\ &= M \int \lim_{x\to\pm\infty} k_x(y)dy \\ &= M \int 0dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

*Zu zeigen:* $K$ ist linear.

*Beweis.* Sei $v \in X$.
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : (K(u+v))(x) = \int k(x-y)(u+v)(y)dy &= \int k(x-y)u(y)dy + \int k(x-y)u(y)dy \\ &= (Ku)(x) + (Kv)(x).\end{aligned}$$
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\forall x \in \mathbb{R} : K(\lambda u)(x) = \int k(x-y)\lambda u(y)dy = \lambda \int k(x-y)u(y)dy = \lambda(Ku)(x).$$

□

*Zu zeigen:* $K$ ist beschränkt.

*Beweis.* Der lineare Operator $K : X \to X$ ist beschränkt, falls
$$\sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \|Ku\|_\infty < \infty.$$
Sei $v \in X$ mit $\|v\|_\infty \leq 1$. Damit ist $|v(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt
$$(Kv)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)v(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}} k(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)dy < \infty.$$
Wir verwenden die Translationsinvarianz des Integrals sowie $k \in L^1$. Damit ist
$$\sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \|Ku\|_\infty \leq \int_{\mathbb{R}} k(y)dy < \infty.$$

□

(iii) *Zu zeigen:* Für ein $f$ hat die Gleichung $u - Ku = f$ genau eine Lösung, falls $\int |k(x)|dx < 1$.

*Beweis.* Benutze den Banachschen Fixpunktsatz. Wir definieren den Operator $F : X \to X$ mit $Fu := Ku + f$ für ein festes $f \in X$. Der lineare Operator $F$ bildet $X$ nach $X$ ab, da $K : X \to X$ wie in 1(ii) gezeigt wurde und $X$ ein Vektorraum ist, sodass $Ku + f \in X$ für jedes $u \in X$. Wir zeigen als nächstes, dass $K$ eine Kontraktion ist. Es soll also ein $J \in [0, 1)$ geben mit

$$\forall u, v \in X : \|Fu - Fv\|_\infty \leq J\|u - v\|_\infty$$

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (im folgenden bezeichne $\int$ immer $\int_\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
|(Fu - Fv)(x)| &= |\int k(x-y)u(y) + f(x)dy - \int k(x-y)v(y) - f(x)dy| \\
&= |\int k(x-y)(u-v)(y)dy| && \text{Dreiecksungleichung} \\
&\leq \int |k(x-y)(u-v)(y)|dy
\end{aligned}$$

Es gilt: $\forall x \in \mathbb{R} : (u - v)(x)| \leq \|u - v\|_\infty$ und somit:

$$\begin{aligned}
&\leq \|u-v\|_\infty \int |k(x-y)|dy && \text{Translationsinvarianz} \\
&= \|u-v\|_\infty \underbrace{\int |k(y)|dy}_{<1}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\|Fu - Fv\|_\infty \leq \int |k(y)|dy\|u - v\|_\infty$ mit Kontraktionszahl $\int |k(y)|dy$. Der Banachsche Fixpunktsatz ist anwendbar und besagt, dass es genau ein $u$ mit $Fu = u$ gibt. Damit ergibt sich die Behauptung. □

# Aufgabe 2

Zeige, dass $u(x) = \alpha \int_a^b \sin(u(y))dy + f(x)$ eine Lösung $u : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ besitzt. Verwende dazu den Satz von Leray und Schauder. Definiere die Abbildung $A$ mit

$$(Au)(x) := \alpha \int_a^b \sin(u(y))dy + f(x), \quad x \in [a, b].$$

Wir zeigen zuerst, dass $A$ eine Abbildung von $\mathcal{C}([a, b])$ nach $\mathcal{C}([a, b])$ ist. Das ist klar, da $\int_b^a : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ ein Operator ist, der auf konstante Abbildungen in $\mathcal{C}([a, b])$ abbildet. Da $f \in \mathcal{C}([a, b])$ und $\mathcal{C}([a, b])$ ein Vektorraum ist, gilt: $Au \in \mathcal{C}([a, b])$ für alle $u \in \mathcal{C}([a, b])$.

Wir zeigen weiter, dass $A$ kompakt ist; das heißt, $A$ ist stetig und bildet beschränkte Teilmengen von $\mathcal{C}[a, b]$ nach relativ kompakte Teilmengen von $\mathcal{C}([a, b])$ ab. Um die Stetigkeit von $A$ zu beweisen, muss man nur die Stetigkeit des Integrals $\int_a^b : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ und $\sin : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ zeigen. Das Integral ist stetig in $\mathcal{C}([a, b])$, denn sei $\epsilon > 0$ und sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a, b])$ mit

$u_k \to u$. Wegen $u_k \to u$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, sodass $\|u_k - u\|_\infty < \epsilon$ für alle $k \geq K$. Also gilt unter Ausnutzung der Dreiecksungleichung für das Integral:

$$\forall k \geq K : \| \int_a^b u_k(y)dy - \int_a^b u(y)dy\|_\infty = \| \int_a^b u_k(y) - u(y)dy\|_\infty \overset{(\triangle)}{\leq} \int_a^b \|u_k(y) - u(y)\|_\infty dy < \epsilon.$$

Die Abbildung sin ist stetig in $\mathcal{C}([a,b])$, da sin gleichmäßig stetig in $[a,b]$ ist. Sei $\epsilon > 0$: Es gibt ein $k \geq K$, sodass jede Folge $u_k$ mit $u_k \to u$ gilt:

$$\forall k \geq K : \|u_k - u\|_\infty < \epsilon.$$

Jedes einzelne Folgenglied $u_k$ approximiert $u$ auf $[a,b]$ einen Fehler von höchstens $\epsilon$. Also $u_k(x) \approx u(x)$ für jedes $x \in [a,b]$, bzw. $u_k(x) - \epsilon \leq u_k(x) \leq u_k(x) + \epsilon$. Wir machen das jetzt ein wenig informal: Wegen der Stetigkeit von sin ist der Approximationsfehler begrenzt durch ein $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\| \sin(u_k(x)) - \sin(u(x))\|_\infty \approx \| \sin(u_k(x)) - \sin(u_k(x)) + \xi\|_\infty \to 0,$$

falls man nur genau genug approximiert, das heißt $K$ nur genug groß wählt. Wir erhalten: Als Komposition von stetigen Funktionen ist $Au = \alpha \int_a^b \sin(u(y))dy + f(x)$ stetig.

Nun zeige, dass $A$ beschränkte Teilmengen von $\mathcal{C}([a,b])$ in relativ kompakte Teilmengen von $\mathcal{C}([a,b])$ überführt. Sei $\Phi \subset \mathcal{C}([a,b])$ und beschränkt. Das heißt, für alle $m \in \mathcal{C}([a,b])$ gibt es ein $r > 0$, sodass $\sup_{u \in \Phi} \|u - m\|_\infty < r$. Betrachte dann das Bild $A(\Phi) = \{Au : u \in \Phi\}$. Wir müssen jetzt zeigen, dass $A(\Phi)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist, damit $A(\Phi)$ relativ kompakt ist.

- $A(\Phi)$ ist gleichmäßig beschränkt, denn für die Nullabbildung $v \equiv 0$ gibt es ein $r$ mit $\sup_{u \in \Phi} \|u - v\|_\infty = \sup_{u \in \Phi} \|u\|_\infty < r$. Also ist $A(\Phi)$ relativ beschränkt.
- $A(\Phi)$ ist gleichgradig stetig, denn sei $\epsilon > 0$. Jedes $u \in A(\Phi)$ ist gleichmäßig stetig, da $u$ stetig auf $[a,b]$ ist. Für jedes $u$ gibt es also ein gewissen $\delta(u)$, sodass gilt:

  $$\forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta(u) \implies |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

  Definiere $\delta \coloneqq \inf_{u \in A(\Phi)} \delta(u)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\delta > 0$. Angenommen, es wäre $\delta = 0$. Dann gäbe es eine Folge von $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\delta(u_k) \to 0$ für $k \to \infty$. Sei $l \coloneqq \lim_{k \to \infty} u_k$. Da $\mathcal{C}([a,b])$ abgeschlossen ist, wäre $l \in \mathcal{C}([a,b])$, aber $l$ ist nicht beschränkt in $[a,b]$! Widerspruch. Also ist $\delta > 0$ und es gilt

  $$\forall u \in A(\Phi), \forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta \implies |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

$A$ ist eine kompakte Abbildung.

Sei $0 \leq t < 1$. Betrachte eine Lösung $u$ für

$$\forall x \in [a,b] : u(x) = t\alpha \int_a^b \sin u(y)dy + tf(x) \leq t\alpha \int_a^b 1dy + tf(x) \leq t\alpha\Big((b-a) + f(x)\Big).$$

Nun ist $f$ auf $[a,b]$ beschränkt durch ein $M \in \mathbb{R}$, da $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Also gilt für jede Lösung $u$ die Abschätzung:

$$\forall x \in [a,b] : u(x) \leq t\alpha\Big((b-a) + M\Big).$$

Setze $r \coloneqq \alpha\Big((b-a) + M\Big)$. Dann gilt für jede Lösung $u$ der Gleichung $u = tAu$ mit $t \in [0,1)$, dass $\|u\|_\infty \leq r$. Also besitzt $u = Au$ eine Lösung, was zu zeigen war.