Aufgabe 1

(i) Wir haben das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) &= \frac{1}{t}(u^2(t) - u(t)) \\ u(1) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Methode: Trennung der Variable

$$\int_1^t \frac{1}{s}\,ds = \int_1^t \frac{u'(s)}{u^2(s) - u(s)} ds \overset{u:=u(t)}{\Longrightarrow} \ln|t| = \int_{u(1)=\frac{1}{2}}^{u(t)} \frac{du}{u^2 - u} = \int_{\frac{1}{2}}^{u(t)} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du = \ln|u-1| - \ln|u|\Big|_{\frac{1}{2}}^{u(t)}.$$

Damit ergibt sich

$$\ln t = \ln|u(t) - 1| - \ln|u(t)| - \ln 0.5 + \ln 0.5 = \ln(|1 - \frac{1}{u(t)}|) \implies t = |1 - \frac{1}{u(t)}|.$$

Falls $1 - \frac{1}{u(t)} > 0$:

$$t = 1 - \frac{1}{u(t)} \iff u(t)t - u(t) = -1 \iff u(t) = -\frac{1}{t-1}.$$

Dies stellt keine Lösung da, weil bei $t = 1$ die Funktion nicht definiert ist. Falls $1 - \frac{1}{u(t)} < 0$:

$$t = \frac{1}{u(t)} - 1 \iff u(t)t + u(t) = 1 \iff u(t) = \frac{1}{t+1}.$$

Dies ist eine Lösung, da $u(1) = \frac{1}{2}$. Wir schauen jetzt, auf welchem Bereich die Lösung existiert. Es gilt $1 - \frac{1}{u(t)} < 0 \iff u(t) = \frac{1}{t+1} < 0$. Das ist genau dann der Fall, falls $t < -1$. Somit ist $\varphi : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t+1}$ eine Lösung.

(ii) Betrachte die lineare Differentialgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} u'(t) - \frac{2}{t}u(t) &= 2t^3 \\ u(1) &= 1 \end{cases}$$

Sei $a(t) := -2t^{-1}$ und $g(t) := 2t^3$. Eine allgemeine, homogene Lösung findet man mit

$$u_{allg,hom}(t) = c\exp(-\int_1^t -2s^{-1}ds) = c\exp(2\ln|t|) = ct^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems ergibt sich durch

$$u_{part} = \int_1^t \exp(-\int_s^t -2t^{-1}dr)2s^3 ds = \int_1^t \exp(2\ln|\frac{t}{s}|)2s^3 ds = 2t^2\int_1^t s\,ds = t^2(t^2 - 1).$$

Löse das Anfangswertproblem mit dem Superpositionsprinzip $\varphi = u_{part} + u_{allg,hom}$

$$\varphi(1) = 1^2(1^2 - 1) + c1^2 = 1 \implies c = 1.$$

Also ist $\varphi(t) := t^4$ eine Lösung.

Aufgabe 2

(i) Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) - \frac{1}{t} & = \ln(t) \\ u(1) & = 2 \end{cases}$$

Es gilt $t > 0$ wegen der rechten Seite der Gleichung ($\ln(t)$ ist nur für positive t definiert).Eine homogene Lösung der linearen Differentialgleichung ergibt sich mit

$$u_{hom} = \exp(\int_1^t s^{-1} ds) = \exp(\ln|t|) = |t|.$$

Wegen $t > 0$ ist $u_{hom} = t$. Wir finden eine partikuläre Lösung mit

$$u_{part} = \int_1^t \exp(\int_s^t \frac{dr}{r}) \ln(s) ds = |t| \int_1^t \frac{ln(s)}{|s|} ds.$$

Produktintegration und umstellen ergibt für alle $t > 0$:

$$\int_1^t \ln(s) \frac{1}{s} ds = \ln^2(t) - \ln^2(1) - \int_1^t \ln(s) \frac{1}{s} ds \implies \int_1^t \ln(s) \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln^2(|t|).$$

Damit

$$u_{part} = \frac{1}{2} |t| \ln^2(|t|).$$

Löse das AWP:

$$u(1) = c \cdot |1| + \frac{1}{2} \cdot |1| \cdot \ln^2(1) = 2 \implies c = 2.$$

Also ist $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}, t \mapsto 2t + \frac{1}{2} t \ln^2(t)$ eine Lösung. Das maximale Existenzintervall ist $(0, \infty)$.

(ii) Löse die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) - \sin(t) u(t) & = \exp(t - \cos t) \\ u(0) & = 1 \end{cases}$$

Homogene Lösungen:

$$u_{hom}(t) = c \exp(\int_0^t \sin(s) ds) = c \exp(1 - \cos(t)) = \tilde{c} \exp(-\cos(t)), \quad c, \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} u_p(t) = \int_0^t \exp(\int_s^t \sin(r) dr) \exp(s - \cos(s)) ds &= \int_0^t \exp(-\cos r \Big|_s^t) \exp(s - \cos(s)) ds \\ &= \int_0^t \exp(\cos(s) - \cos(t) + s - \cos(s)) ds \\ &= \exp(-\cos(t)) \int_0^t \exp(s) ds \\ &= \exp(-\cos t)[\exp(t) - 1]. \end{aligned}$$

Anfangswertproblem:

$$u(0) = \tilde{c}\exp(-1) + \exp(-1)(\exp(0) - 1) = \tilde{c}\exp(-1) = 1 \implies \tilde{c} = \exp(1) = e.$$

Die Lösung lautet

$$u(t) = \exp(1 - \cos(t)) + \exp(-\cos(t))[\exp(t) - 1] = \exp(-\cos t)(\exp(t) + \exp(1) - 1).$$

Das maximale Existenzintervall ist $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$u'''(t) + u''(t) - 8u'(t) - 12u(t) = \underbrace{5(10t - 1)\exp(3t) - 104\cos(2t)}_{:=g(t)}.$$

Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2$. Der homogene Lösungsraum hat die Form:

$$u_{hom} = c_1 \exp(3t) + c_2 \exp(-2t) + c_3 t \exp(-2t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

DIe Summanden sind linear unabhängig, wie in der Vorlesung gezeigt wurde. Variation der Konstante. Wir suchen zu bestimmende Funktionen $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$. Bestimme die Wronski Matrix:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \exp(3t) & \exp(-2t) & t\exp(-2t) \\ 3\exp(3t) & -2\exp(-2t) & \exp(-2t)(1-2t) \\ 9\exp(3t) & 4\exp(-2t) & 4\exp(-2t)(t-1) \end{pmatrix}.$$

Also

$$W(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t). \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t). \end{pmatrix}.$$

Berechne die Inverse der Wronski Matrix:

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4e^{-3t} & 4e^{-3t} & e^{-3t} \\ -3(10e^{2t}t - 7e^{2t}) & -5e^{2t}t - 4e^{2t)} & 5e^{2t}t - e^{2t} \\ 30e^{2t} & 5e^{2t} & -5e^{2t} \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} e^{-3t}g(t) \\ (5e^{2t}t - e^{2t})g(t) \\ -5e^{2t}g(t) \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
c_1'(t) &= \frac{1}{25}e^{-3t}(5(10t-1)e^{3t} - 104\cos(2t)) = \frac{1}{25}(50t - 5 - 104e^{-3t}\cos(2t)) \\
c_1(t) &= \frac{1}{25}\left(25t^2 - 5t - 104\int e^{-3t}cos(2t)dt\right) = \frac{1}{25}\left(25t^2 - 5t + 8e^{-3t}(3cos(2t) - 2sin(2t))\right) \\
c_2(t) &= \frac{1}{25}e^{2t}\left(e^{3t}(50t^2 - 35t + 8) + (91 - 130t)\sin(2t) - 26(5t-1)\cos(2t)\right) \\
c_3'(t) &= -\frac{1}{5}e^{2t}\left(5(10t-1)e^{3t} - 104\cos(2t)\right) \\
c_3(t) &= e^{5t}\left(\frac{3}{5} - 2t\right) + \frac{26}{5}e^{2t}\sin(2t) + \frac{26}{5}e^{2t}\cos(2t)
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$u(t) = c_1(t)e^{3t} + c_2(t)e^{-2t} + c_3(t)te^{-2t}.$$