Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Scheutzow, A. Eikmeier

Sommersemester 2020

Maß- und Integrationstheorie

3. Hausaufgabenblatt

Abgabe bis Freitag, 15. Mai, 18:00 Uhr

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei messbare Räume und sei $f\colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Zeige die folgenden Aussagen:

i) Falls $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ zwei σ-Algebren auf Ω bzw. Ω' sind mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{A}'$ und falls f $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbar ist, so ist f auch $(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}')$-messbar.

ii) Sei Ω'_0 eine Teilmenge von Ω' mit $f(\Omega) \subset \Omega'_0$. Dann ist die Abbildung f genau dann $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbar, wenn sie $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'|_{\Omega'_0})$-messbar ist (als Abbildung mit Werten in Ω'_0). Hierbei bezeichnet
$$\mathfrak{A}'|_{\Omega'_0} = \{A \cap \Omega'_0 \mid A \in \mathfrak{A}'\}$$
die Spur-σ-Algebra auf Ω'_0.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und sei (X, d) ein metrischer Raum. Mit $\mathfrak{B}(X)$ bezeichnen wir die Borel-σ-Algebra über X, das heißt, die von den in X offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen erzeugte σ-Algebra. Seien $f, f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$, Abbildungen, wobei f der punktweise Grenzwert der Folge (f_n) ist, also
$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$
für alle $\omega \in \Omega$. Zeige, dass die $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}(X))$-Messbarkeit der Abbildungen f_n, $n \in \mathbb{N}$, die $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}(X))$-Messbarkeit von f impliziert.

Hinweis: Zeige, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ die Darstellung
$$f^{-1}(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=k}^{\infty} f_j^{-1}(U_n)$$
mit $U_n := \{x \in X \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\}$ gilt.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}})$-messbare, μ-integrierbare Abbildung. Zeige, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ die Abschätzung
$$\left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon$$
gilt.

Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für beschränkte Abbildungen.