Aufgabe 2

$\mathcal{C}^1([a,b],X)$ ist ein Vektorraum. Bleibt zu zeigen, dass jede Cauchy Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^1([a,b],X)$ konvergiert.

1. Sei also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge. Das heißt, für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $k(\epsilon) > 0$, sodass für alle $k, l \geq k(\epsilon)$ gilt:

$$\max_{t\in[a,b]}(\|f_k(t) - f_l(t)\| + \|f_k'(t) - f_l'(t)\|) < \epsilon. \tag{1}$$

   Beachte, dass wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ und der Stetigkeit von f sowie f' die obige Metrik wohldefiniert ist. Das heißt, es gibt tatsächlich ein $\xi \in [a,b]$, sodass

$$\|f_k(\xi) - f_l(\xi)\| + \|f_k'(\xi) - f_l'(\xi)\| \text{ ist maximal und kleiner } \epsilon. \tag{2}$$

2. Betrachte für ein festes $t \in [a,b]$ die Folge $(x_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$x_k(t) := f_k(t).$$

   Definiere eine Funktion $x : [a,b] \to X$ mit

$$x(t) := \lim_{k\to\infty} x_k(t).$$

   Wir zeigen, dass x wohldefiniert ist für jedes $t \in [a,b]$. Dazu sei $t_0 \in [a,b]$ beliebig. Wegen (1) gibt es für beliebige $\epsilon > 0$ ein Index $k(\epsilon) > 0$, sodass für alle $k, l \geq k(\epsilon)$ gilt

$$||x_k(t_0) - x_l(t_0)|| \leq \max_{t\in[a,b]}(\|f_k(t) - f_l(t)\| + \|f_k'(t) - f_l'(t)\|) < \epsilon$$

   Das bedeutet also, dass $x_n(t_0)$ eine Cauchy Folge in X ist und wegen der Vollständigkeit von X konvergiert $x_n(t_0)$ gegen ein $x^*(t) \in X$ für $n \to \infty$. Also

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t) \in X, \quad \forall t \in [a,b].$$

3. Wir differenzieren nun $x(t)$. Dazu zeigen wir, dass der gewöhnliche Ableitungsoperator stetig ist. Es soll also gelten, dass

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{d}{dt}x_k(t). \tag{3}$$

   Wir wissen, dass der Operator $\frac{d}{dt}$ linear ist. Nun sind lineare Abbildungen sind genau dann stetig, wenn sie auch beschränkt sind. Beschränktheit heißt, dass die lineare Abbildung beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet. Dies wollen wir zeigen. Sei $A \subset C^1([a,b],X)$ eine beschränkte Menge.

$$\frac{d}{dt}A = \{\frac{d}{dt}f : f \in A\}.$$

   Da f stetig differenzierbar ist, ist auch $\frac{d}{dt}f$ stetig und somit ist $\frac{d}{dt}A$ beschränkt auf dem kompakten Intervall $[a,b]$. Also ist $\frac{d}{dt}$ stetig.

4. Im letzten Schritt zeigen wir, dass $f_k \to x$ für $k \to \infty$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\max_{t\in[a,b]}(\|f_n(t) - x(t)\| + \|f_n'(t) - \frac{d}{dt}x(t)\|) < \epsilon$$

Aus (2) folgt, dass es ein $m_1 \in \mathbb{N}$ und $\xi \in [a,b]$ gibt, sodass für alle $k, l \geq m_1$ gilt:

$$\|f_k(t) - f_l(t)\| + \|f_k'(t) - f_l'(t)\| \leq \|f_k(\xi) - f_l(\xi)\| + \|f_k'(\xi) - f_l'(\xi)\| \quad \forall t \in [a,b].$$

Da $f_k(\xi) \to x(\xi)$ für $k \to \infty$, gibt es auch ein $m_2 \in \mathbb{N}$, sodass $\|f_k(\xi) - x(\xi)\| < \frac{\epsilon}{4}$ für alle $k \geq m_2$. Wegen (3) gibt es auch ein $m_3 \in \mathbb{N}$, sodass $\|f_k'(\xi) - x'(\xi)\| < \frac{\epsilon}{4}$. Sei $m := \max(m_1, m_2, m_3)$. Dann gilt für alle $k, l \geq m$ und $\forall t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}\|f_k(t) - f_l(t)\| + \|f_k'(t) - f_l'(t)\| &\leq \|f_k(\xi) - f_l(\xi)\| + \|f_k'(\xi) - f_l'(\xi)\| \\ &= \|f_k(\xi) - x(\xi) + x(\xi) - f_l(\xi)\| + \|f_k'(\xi) - x(\xi) + x(\xi) - f_l'(\xi)\| \\ &\leq \|f_k(\xi) - x(\xi)\| + \|f_l(\xi) - x(\xi)\| + \|f_k'(\xi) - x'(\xi)\| + \|f_l'(\xi) - x'(\xi)\| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei $\epsilon > 0$ und bezeichne $\|\cdot\|$ die Norm in X. Wir wollen zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\sup_{t\in[a,b]} \|u_n(t) - u(t)\| < \epsilon. \tag{4}$$

Wir wissen, u ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$. Also ist u gleichmäßig stetig. Daher gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $t_1, t_2 \in [a,b]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$ gilt

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| < \epsilon.$$

Wir wählen N so geschickt, sodass $\frac{b-a}{2^N} < \delta$ gilt. Behauptung: Für jedes $t \in [a,b]$ ist

$$\|u_n(t) - u(t)\| < \epsilon.$$

Da die Zerlegung $[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)})$ ganz $[a,b]$ überdeckt, gibt es ein $\tilde{k} \in \{1, ..., 2^n\}$, sodass $t \in [t_{\tilde{k}-1}^{(n)}, t_{\tilde{k}}^{(n)})$. Das heißt,

$$u_n(t) = u(t_{\tilde{k}-1}^{(n)}).$$

Nun ist $t - t_{\tilde{k}-1}^{(n)} < \delta$ und damit ist $\|u_n(t) - u(t)\| = \|u(t_{\tilde{k}-1}^{(n)}) - u(t)\| < \epsilon$ nach (4). Falls $t = b$, so ist $u_n(b) = u(t_{2^n-1}^{(n)})$ und $t - t_{2^n-1}^{(n)} < \delta$ und die Behauptung gilt wegen (4).

Zum Schluss müssen wir noch zeigen, dass $\|u_m(t) - u(t)\| < \epsilon, \forall t \in [a,b]$ für alle $m > n$ (für n haben wir es gezeigt). Das ist aber klar, denn für beliebige $t \in [a,b]$ gilt: $t \in [t_{\tilde{k}-1}^{(m)}, t_{\tilde{k}}^{(m)})$ für ein $k = 1, ..., 2m$ und $t_{\tilde{k}-1}^{(m)} - t_{\tilde{k}}^{(m)} < t_{\tilde{k}-1}^{(n)} - t_{\tilde{k}}^{(n)} < \delta$ und wir können wieder die gleichmäßige Stetigkeit verwenden.

Aufgabe 4

Seien zwei Zerlegungen $Z_1^{(n)} : a = x_0 < ... < x_n = b$ und $Z_2^{(m)} : a = y_0 < ... < y_m = b$ von $[a, b]$ gegeben. Seien $\alpha_0^{(n)}, ..., \alpha_{n-1}^{(n)} \in X$, sodass $\alpha_j^{(n)} = u(t)$ für $t \in [x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)})$ und$\beta_0^{(m)}, ..., \beta_{m-1}^{(m)} \in X$, sodass $\beta_j^{(m)} = u(t)$ für $t \in [y_j^{(m)}, y_{j+1}^{(m)})$. Wir haben zwei Fälle:

1. Jeder Punkt $x_j^{(n)}$ für $j = 0, ..., n$ ist auch in $Z_2^{(m)}$ für ein m enthalten. Das heißt, es gibt $i_0, ..., i_n \in \{0, ..., m\}$ und $i_0 = 0, i_n = m$, sodass $x_j^{(n)} = y_{i_j}^{(m)}$. Also folgt

   $$x_{j-1}^{(n)} = y_{i_{j-1}}^{(m)} < y_{i_{j-1}+1}^{(m)} < ... < y_{i_j}^{(m)} = x_j^{(n)} \quad \text{und} \quad \alpha_j^{(n)} \approx \beta_l^{(m)} \text{ für } l = i_{j-1}, ..., i_j - 1.$$

   Den Fehler $\xi_n := |\alpha_j^{(n)} - \beta_l^{(m)}|$ kann man aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von u für jedes m abschätzen und zeigen, dass $\xi_n n$ für $n \to \infty$ gegen 0 geht. Somit ist für hinreichend große n, m:

   $$\lim_{m\to\infty} \sum_{l=0}^{m-1} \beta_l(y_l - y_{l-1}) \leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=i_{j-1}}^{i_j - 1} \alpha_j(y_l - y_{l-1}) + n\xi = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x_j - x_{j-1})$$

   Also $\sum_{l=0}^{m-1} \beta_l(y_l - y_{l-1}) \to \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x_j - x_{j-1})$ für $n \to \infty$, was die Unabhängigkeit der Zerlegung zeigt.

   ... die technischen Details fehlen für $\xi_n \to 0$.

2. $Z_1^{(n)}$ und $Z_2^{(m)}$ sind nicht identisch. Wir betrachten die gemeinsame Zerlegung $G = g_0, ..., g_{n+m}$ und $g_i \in \{x_0, ..., x_m, y_0, ...y_m\}$ für alle $i = 1, ..., m$ mit $g_0 < g_1 < ... < g_{n+m}$. Wir wenden Fall 1 auf Z_1, Z_2 und G an und erhalten

   $$\text{Int}_{Z_1}(u) = \text{Int}_G(u) = \text{Int}_{Z_1}(u).$$

Aufgabe 5

Satz von Mazur

Sei X ein Banach-Raum und $A \in X$ eine relativ kompakte Menge. Dann ist auch die konvexe Hülle $co(A)$ von A relativ kompakt.

Literaturquellen

- **Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz: Linear Operators, Part 1: General Theory.** *John Wiley & Sons Inc., 1958, ISBN 0-470-22605-6, S.416*
- **Lothar Collatz: Funktionalanalysis und numerische Mathematik.** *Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1964, ISBN 978-3-642-95029-2, S. 352*
- **Michael Růžička: Nichtlineare Funktionalanalysis. Eine Einführung.** *Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, ISBN 978-3-540-20066-6, S. 27*

Hilfsmittel

Wir orientieren uns an der Beweisführung von Michael Růžička und nutzen die folgenden Definitionen und den folgenden Satz für den Beweis des Satzes von Mazur:

Definition 1: Ein ε-Netz für eine Teilmenge M eines metrischen Raums X ist eine endliche Überdeckung aus Kugeln mit Radius ε. Also existieren $x_i \in X$, $i = 1, ..., n$, sodass

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon). \tag{5}$$

Definition 2: Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt totalbeschränkt (oder auch präkompakt), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge von Punkten $x_1, \ldots, x_n \in M$ (ein ε-Netz) gibt, so dass gilt:

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in X : d(x, x_k) < \varepsilon\}. \tag{6}$$

Satz 1: Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann total beschränkt, wenn sie relativ kompakt ist.

Beweis des Satzes

Wir zeigen, dass $co(A)$ total beschränkt und somit nach Satz 1 relativ kompakt ist. Dazu werden wir ein ε-Netz konstruieren, sodass $co(A)$ in diesem enthalten ist.
Sei also $A \subset X$ eine relativ kompakte Teilmenge. Nach Satz 1 ist A also total beschränkt. Somit existiert nach Definition 2 ein $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz, sodass $x_1, ..., x_n \in A$ existieren, sodass für alle $y \in A$ gilt:

$$\forall\ y \in A\ \exists\ i \in \{1, ..., n\} : d(y, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Mithilfe des Auswahlaxioms können wir nun folgende Funktion definieren

$$f : A \to \{1, ..., n\},\ \ f(y) = i, \tag{8}$$

wobei i der kleinste Index sei, für den $d(y, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.
Nun betrachten wir die konvexe Hülle $co(A)$. Für jedes $y \in co(A)$ können wir nun folgende Konvexkombination finden:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i, \tag{9}$$

wobei $m = m(y) \in \mathbb{N}$, $y_i \in A$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, ..., m$ und $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Mit (4) und (5) erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
||y - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{f(y_i)}|| &= ||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (y_i - x_{f(y_i)})|| && (10)\\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i ||y_i - x_{f(y_i)}|| && (11)\\
&\overset{(3)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\varepsilon}{2} && (12)\\
&\overset{\sum \lambda_i = 1}{=} \frac{\varepsilon}{2}. && (13)
\end{aligned}$$

Da nun $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{f(y_i)}$ als Konvexkombination Element der konvexen Hülle $K := co(x_1, ..., x_n)$ ist, haben wir also gezeigt

$$co(A) \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{\varepsilon}{2}). \tag{14}$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass dies auch für endlich viele $x \in K$ gilt, damit wir eine endliche Überdeckung von $co(A)$ erhalten. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\Psi : [0,1]^n \to X, \ (\lambda_1, ...\lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i. \tag{15}$$

Diese ist stetig (Analysis II). Betrachten wir das Bild der Menge

$$B = \{(\lambda_1, ...\lambda_n) \in [0,1]^n | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{16}$$

so gilt offensichtlich

$$\Psi(B) = K. \tag{17}$$

Da die Menge B kompakt und die Funktion Ψ stetig ist, ist auch K kompakt. Also existiert zu jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung, d.h. wir finden endlich viele $k_j \in K$, sodass

$$co(A) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(k_j, \frac{\varepsilon}{2}). \tag{18}$$

Somit besitzt $co(A)$ ein endliches ε-Netz, ist daher nach Definition 2 total beschränkt und nach Satz 1 relativ kompakt.

□