Kapitel 5

Asymptotisches Verhalten und Stabilität

Thema dieses Abschnittes ist das Langzeitverhalten ($x \to \pm\infty$) von Lösungen und die Stabilität von Lösungen auf unendlichen Intervallen, d.h. die Frage, ob Lösungen einer Differentialgleichung bei „nahe“ beieinander liegenden Anfangswerten auch noch auf einem unendlichen Existenzintervall „nahe“ beieinander liegen.

Zur Erninnerung:
In Kapitel 3 hatten wir schon gesehen, dass für eine Differentialgleichung vom Typ $y' = f(x, y)$ mit stetiger rechter Seite f, die auch lokal Lipschitz-stetig bzgl. y ist, diese Satbilität bzgl. der Variation des Anfangswertes auf endlichen Intervallen gilt.

Beispiele von asymptotischen Verhalten und Stabilitätseigenschaften von Lösungen auf unendlichen Intervallen

1.

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

hat die globale Lösung $y(x) = y_0 \cdot e^x$
Vergleiche mit

$$\begin{cases} y_\varepsilon' = y_\varepsilon \\ y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon \, , \, \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$y_\varepsilon(x) = (y_0 + \varepsilon)e^x \, , \, x \in \mathbb{R}.$

y, y_ε haben qualitativ das gleiche Lösungsverhalten, aber auch wenn $|\, y_0 - (y_0 + \varepsilon)| = \varepsilon$ klein ist, gilt $|\, y(x) - y_\varepsilon(x)| = \varepsilon \, e^x \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Also keine Stabilität.

2.

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

vergleiche mit

$$\begin{cases} y_\varepsilon' = -y_\varepsilon \\ y_\varepsilon(0) = y_{0\,\varepsilon} = y_0 + \varepsilon \end{cases}$$

mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ klein.
Dann:

$$y(x) = y_0 e^{-x}\ ,\ y_\varepsilon(x) = y_{0\,\varepsilon} e^{-x}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Somit:

$$|\, y_\varepsilon(x) - y(x)| = \varepsilon e^{-x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

asymptotische Stabilität von y, y_ε.

3.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{bmatrix} \end{cases}$$

vergleiche mit der Lösung $y_\varepsilon = \begin{bmatrix} y_{1\varepsilon} \\ y_{2\varepsilon} \end{bmatrix}$ des Anfangswertprobles mit Anfangsbedingung $y_\varepsilon(0) = \begin{bmatrix} y_{01} + \varepsilon \\ y_{02} + \varepsilon \end{bmatrix}$.

Das Anfangswertproblem besitzt die eindeutige globale Lösung:

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = y_{01} \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + y_{02} \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix}$$

und

$$y_\varepsilon(x) = (y_{01} + \varepsilon) \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + (y_{02} + \varepsilon) \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} ||\, y_\varepsilon(x) - y(x)||_2 &= \left|\left| \varepsilon_1 \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix} \right|\right|_2 \\ &= \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \\ &= \left|\left| \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{01} + \varepsilon_1 \\ y_{02} + \varepsilon_2 \end{bmatrix} \right|\right|_2, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

d.h. der Abstand zwischen den Lösungen y, y_ε ist konstant.

4.

$$\begin{cases} y' = y - y^2 = y(1-y) \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

vergleiche mit

$$\begin{cases} y_\varepsilon' = y_\varepsilon - y_\varepsilon^2 \\ y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ klein} \end{cases}$$

Hier hängt das Stabilitätsverhalten der Lösung y vom Anfangswert y_0 und der Störung ε ab.

- wenn $y_0 > 0$ und ε genügend klein, dann:

  $$|\, y_\varepsilon(x) - y(x)| \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

- wenn $y_0 = 0$ und $\varepsilon > 0$, dann:

  $$|\, y_\varepsilon(x) - y(x)| \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

- wenn $y_0 = 0$ und $\varepsilon < 0$, dann

  $$|\, y_\varepsilon(x) - y(x)| \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Im Gegensatz dazu: in den linearen Beispielen 1. - 3. einheitliches Stabilitätsverhalten (unabhängig von y_0).

Definition 5.1
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf D.
Sei y eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{5.1}$$

auf einem Intervall $[x_0; +\infty[$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 := y(x_0)$.
Dann heißt die Lösung y *stabil* (auf $[x_0; +\infty[$), wenn gilt:
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ so, dass für alle $(x_0, z_0) \in D$ mit $||\, z_0 - y_0|| < \delta$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z' = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

eine Lösung z auf $[x_0; +\infty[$ besitzt, welche der Ungleichung

$$||\, z(x) - y(x)|| < \varepsilon \qquad \forall x > x_0$$

genügt.

Falls y nicht stabil ist, dann heißt y *instabil*.

Beispiele:
In Beispiel 1) ist y instabil. y aus 2) und 3) ist stabil. y aus 4) ist stabil, wenn $y_0 > 0$, y ist instabil, wenn $y_0 = 0$.

Definition 5.2
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf D.
Sei y eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

auf einem Intervall $[x_0; +\infty[$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 := y(x_0)$.
Dann heißt y *asymptotisch stabil* (auf $[x_0; +\infty[$), wenn gilt:
y ist stabil und y ist *attraktiv*, d.h. $\exists\, \delta > 0$, so dass für alle $(x_0, z_0) \in D$ mit $||\, z_0 - y_0|| < \delta$ die Lösung z des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} z' = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

für alle $x \geq x_0$ existiert und $||\, y(x) - z(x)|| \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beispiele:
Beispiele 2) und 4) wenn $y_0 > 0$ sind asymptotisch stabil.
1) , 3) sind nicht asymptotisch stabil.

Bemerkungen:

1) Die Begriffe der (asymptotischen) Stabilität hängen nicht von der Wahl von x_0 ab, d.h. wenn y eine Lösung auf $]a; +\infty[$ der Differentialgleichung (5.1) ist, dann ist y (asymptotisch) stabil auf $[x_0; +\infty[\Leftrightarrow y$ (asymptotisch) stabil auf $[x_1; +\infty[\ \forall x_0, x_1 > a$. (Beweis: Satz 3.2. : gleichmäßige stetige Abhängigkeit vom Anfangswert der Lösung eines Anfangswertproblems auf kompakten Intervallen).

2) Falls $N = 1$, ist eine attraktive Lösung automatisch stabil.

   Beweis:
   Sei y attraktive Lösung auf $[x_0; +\infty[$ von $y' = f(x, y), y_0 = y(x_0)$.

   z.z.: y ist stabil.

   Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ aus der Attraktivitätsbedingung.
   Seien z_+ bzw. z_- die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} z_+' = f(x, z_+) \\ z_+(x_0) = y_0 + \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

   bzw.

$$\begin{cases} z_-' = f(x, z_-) \\ z_-(x_0) = y_0 - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

   Es existiert $T > x_0$ so, dass

$$\begin{cases} |\, z_-(x) - y(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x > T \\ |\, z_+(x) - y(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x > T \end{cases} \tag{5.2}$$

   da y attraktiv.

Wegen der gleichmäßigen stetigen Abhängigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems auf dem kompakten Intervall $[x_0; T]$ (Satz 3.2) existiert $0 < \hat{\delta} < \frac{\delta}{2}$ so, dass für alle $|\, z_0 - y_0| < \hat{\delta}$ gilt, dass die zugehörige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} z' = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

erfüllt, dass $|\, y(x) - z(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [x_0; T]$.

Da wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems jede dieser Lösungen z erfüllt:

$$z_-(x) < z(x) < z_+(x) \quad \forall\, x \geq x_0$$

folgt wegen (5.2) auch:

$$|\, z(x) - y(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \geq T$$

□

3) Für $N > 1$ sind attraktive Lösungen nicht notwendig stabil.

Definition 5.3
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf D.
Sei y eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

auf einem Intervall $[x_0; +\infty[$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 := y(x_0)$.
Die Lösung y heißt *exponentiell stabil*, wenn $\delta, L, \omega > 0$ existieren, so dass für jeden Anfangswert $(x_0, z_)\in D$ mit $||\, z_0 - y_0|| < \delta$ die Lösung z des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} z' = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

für alle $x \geq x_0$ existiert und

$$||\, y(x) - z(x)|| \leq L\, ||\, y_0 - z_0||\, e^{-\omega(x - x_0)}, \qquad x \geq x_0$$

Beispiel:
Beispiel 2) ist exponentiell stabil.

Bemerkung:
Es gilt folgende Implikationskette:
exponentiell stabil ⇒ asymptotisch stabil ⇒ stabil

Autonome Differentialgleichungen

Betrachte jetzt nur noch *autonome Differentialgleichungen*, d.h. Differentialgleichungen von der Form $y' = f(y)$ mit $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig auf D

($\rightarrow$ x-unabhäbgige rechte Seite).
Autonome Differentialgleichungen sind *translationsinvariant*, d.h. wenn y Lösung von $y' = f(y)$ auf $[x_0; +\infty[$ ist, dann ist $z(x) := y(x_0 + x)$ eine Lösung von $y' = f(y)$ auf $[0; +\infty[$, und es gilt: y ist stabil (asymptotisch, exponentiell) $\Leftrightarrow$ z ist stabil (asymptotisch, exponentiell).

Von nun an sei also $x_0 = 0$.

Definition 5.4
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig.
Eine Lösung y von $y' = f(y)$ heißt *stationäre* (oder zeitunabhängige) *Lösung*, wenn y eine konstante Funktion ist, die $y' = f(y)$ löst, d.h. $y(x) \equiv z \in \mathbb{R}^N \; \forall x \in \mathbb{R}$, wobei z eine Nullstelle des Vektorfeldes f ist. Jede solche Nullstelle von f heißt *Ruhelage von f*.
Jede nicht-konstante Lösung von $y' = f(y)$ heißt *nicht-stationäre Lösung*.

Lineare, autonome Systeme

Betrachte zunächst den *linearen, autonomen* Fall:

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{N \times N} \tag{5.3}$$

Beobachtung: y ist (asymptotisch / exponentiell) stabil $\Leftrightarrow$ die stationäre Nulllösung ist (asymptotisch / exponentiell) stabil.

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Setze $\omega := y - z$

$$\begin{cases} \omega' = A\omega \\ \omega(0) = y_0 - z_0 \end{cases}$$

Satz 5.1
Alle Lösungen der Differentialgleichung (5.3) sind genau dann

i) *stabil*, wenn alle Eigenwerte von A Realteil ≤ 0 haben und außerdem für diejenigen Eigenwerte mit $= 0$ gilt, dass die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
In diesem Fall gilt:

$$\left|\left| e^{Ax} y_0 \right|\right| \leq M \left|\left| y_0 \right|\right| \qquad \forall x \geq 0$$

für ein $M \geq 1$.

ii) *exponentiell stabil*, wenn alle Eigenwerte λ von A Realteile < 0 besitzen.
In diesem Fall gilt: falls $s := \max_{\lambda} \operatorname{Re}(\lambda)$, dann existiert zu jedem $\omega > 0$ mit $\omega + s < 0$ ein $L \geq 1$ mit:

$$\left|\left| e^{Ax} y_0 \right|\right| \leq L \left|\left| y_0 \right|\right| e^{-\omega x} \qquad \forall x \geq 0 \tag{5.4}$$

Fall szusätzlich die algebaraische und geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert übereinstimmt, dann gilt sogar:

$$\left|\left| e^{Ax} y_0 \right|\right| \leq L \,||\, y_0 \,||\, e^{sx} \qquad \forall x \geq 0$$

Beweis:

i) Erinnerung: Fundamentalsystem von $y' = Ay$: mit p, q, r Polynome $\to \mathbb{R}^N$, λ Eigenwert von A
$e^{\lambda x} p(x)$
$e^{\alpha x} \cos(\beta x) q(x)$
$e^{\alpha x} \sin(\beta x) r(x)$

Eigenwertbedingung
$\Leftrightarrow$ alle Lösungen eines Fundamentalsystems von (5.3) sind beschränkt auf $[0; +\infty[$
$\Leftrightarrow$ alle Spalten der Fundamentalmatrix e^{Ax} sind beschränkt auf $[0; +\infty[$
$\Leftrightarrow \exists\, M \geq 1$ so, dass $\left|\left| e^{Ax} \right|\right| \leq M$, und somit $\left|\left| e^{Ax} y_0 \right|\right| \leq M \,||\, y_0 \,||\; \forall\, y_0 \in \mathbb{R}^N$
$\Leftrightarrow$ die Nulllösung von $y' = Ay$ ist stabil.
$\Leftrightarrow$ alle Lösungen von $y' = Ay$ sind stabil.

ii) Eigenwertbedingung
$\Leftrightarrow$ alle Lösungen eines Fundamentalsystems von $y' = Ay$ konvergieren gegen 0 für $x \to +\infty$
$\Leftrightarrow$ alle Lösungen von $y' = Ay$ sind asymptotisch stabil

Es reicht zu zeigen, dass die Eigenwertbedingung (5.4) impliziert. Aus (5.4) folgt dann die exponentielle Stabilität der Nulllösung und somit von allen Lösungen.

Sei nun $\omega > 0$ mit $\omega + s < 0$. Dann gilt für jede Lösung y_i eines Fundamentalsystems:
für gewisses Polynom $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, λ Eigenwert von A:

$$\begin{aligned} ||\, y_i(x) \,|| &\leq \left|\left| e^{\mathrm{Re}(\lambda)} p_i(x) \right|\right| \\ &\leq e^{sx} \,||\, p_i(x) \,|| \\ &= e^{-\omega x} \,||\, p_i(x) \,||\, e^{(\omega+s)x} \end{aligned}$$

Da $\omega + s < 0$, ist die Funktion $||\, p_i(x) \,||\, e^{(\omega+s)x}$ beschränkt $\leq M_i$ auf $[0; +\infty[$
$\Rightarrow \left|\left| e^{Ax} \right|\right| \leq M e^{-\omega x}, \forall\, x \geq 0$, für ein $M \geq 1$.
Falls alle Eigenwerte halbeinfach[1] sind, dann ist $p_i(x) = p_i \in \mathbb{R}^N$ konstant und somit folgt direkt:

$$||\, y_i(x) \,|| \leq e^{sx} \underbrace{||\, p_i \,||}_{=:M_i}, \forall\, i = 1, \ldots, n$$

$\square$

[1] algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit

Nichtlineare, autonome Systeme

Nichtlineare, autonome Systeme sind Systeme der Form

$$y' = f(y) \tag{5.5}$$

mit $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N, D \neq \emptyset$, f lokal Lipschitz-stetig.

Wie im skalaren Fall $N = 1$, zeigt man auch für $N > 1$, dass, falls y eine Lösung von (5.5) auf $[0; +\infty[$ ind $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) =: y_\infty \in \mathbb{R}^N$ existiert, dann ist y_∞ eine Ruhelage von f, d.h. $f(y_\infty) = 0$.
Beweis:
Komponentenweise:

$$\underbrace{y_i(n+1) - y_i(n)}_{\longrightarrow y_{\infty,i} - y_{\infty,i} = 0} = \frac{d}{dx} y_i(n + \underbrace{\theta_n}_{\in]0;1[}) = f_i(\underbrace{y(n+\theta_n)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_\infty}) \longrightarrow f_i(y_\infty)$$

$$\Rightarrow f_i(y_\infty) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$$

$\square$

Satz 5.2 (Linearisierte Stabilität)
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Sei y_s eine Ruhelage von f, $\overline{y}_s$ die zugehörige stationäre Lösung. Weiter sei $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y_s)\right)_{i,j=1}^N$ die Jacobi-Matrix von f an der Stelle y_s.
Dann gilt:

i) Wenn jeder Eigenwert von J einen Realteil < 0 hat, dann ist $\overline{y}_s$ asymptotisch stabil.

ii) Hat mindestens ein Eigenwert von J Realteil > 0, dann ist $\overline{y}_s$ instabil.

Bemerkung:
Falls alle EW von J Realteil ≤ 0 besitzen, aber mindestens ein EW einen Realteil $= 0$ besitzt, dann kann keine Aussage über ide Stabilität von $\overline{y}_s$ gemacht werden.
$\overline{y}_s$ kann

- instabil sein (Beispiel: $y' = y^2, y_s = 0$)
- stabil sein (Beispiel: $y' = 0, y_s = 0$ ist stabil aber nicht asymptotisch stabil).
- asymptotisch stabil sein (Beispiel: $y' = -y^3, y_s = 0$, $\overline{y}_s$ ist asymptotisch stabil, aber nicht exponentiell stabil)
- exponentiell stabil (Beispiel: $y' = -y, y_s = 0$)

Beweis:
(von Satz 5.2, nur Teil i))
oBdA darf man annehmen, dass $y_s = 0$ ist (in der Tat: $\overline{y}_s$ ist asymptotisch stabile

Lösung von $y' = f(y) \Leftrightarrow$ die Nulllösung ist asymptotisch stabile Lösung der Differentialgleichung $y' = g(y)$, wobei $g(y) := f(y + y_s) - f(y_s), y \in \mathbb{R}^n$ mit $y + y_s \in D$, und $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y_s) = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0) \; \forall \, i, j)$.

1. Schritt:

f stetig diffbar $\Rightarrow f(y) = \underbrace{(J_f)(0)}_{=:A} y + r(y)$ mit $\frac{r(y)}{||y||} \overset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$, d.h. die Differentialgleichung $y' = f(y)$ kann in der Form

$$y' = Ay + r(y) \tag{5.6}$$

mit $r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar unf $r(0) = 0, (J_r)(0) = 0$ geschrieben werden.
Sei y eine maximale Lösung von (5.6) auf dem Intervall $[0; I^+[$ mit $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^N$.
z.z. ist: Für $\varepsilon > 0$, $||\, y_0||$ genügend klein, ist $I^+ = +\infty$ und

$$||\, y(x)|| \leq \varepsilon \quad \forall \, x \geq 0 \text{ und } y(x) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Nenne $f(x) := r(y(x)), x \in [0; I^+[$. (5.6) lautet also: $y' = Ay + f(x)$ und ist somit eine inhomogene, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Daher gilt:

$$y(x) = e^{Ax} y_0 + e^{Ax} \int_0^x e^{-As} \underbrace{f(s)}_{=r(y(s))} \, ds \quad \forall \, x \in [0; I^+[.$$

2. Schritt:

i) $\overset{\text{Satz 5.1}}{\Rightarrow} \left|\left| e^{Ax} \right|\right| \leq K e^{-\omega x} \quad \forall \, x \geq 0$, für gewisses $K \geq 1, \omega > 0$.
Wähle $M > 0$ mit $MK - \omega < 0$ und zu M ein $\rho > 0$ mit $||\,(J_r)(y)|| \leq M \quad \forall \; ||\, y|| \leq \rho$.
Dann gilt auch:

$$||\, r(y)|| \leq M \, ||\, y|| \quad \forall \; ||\, y|| \leq \rho.$$

Für $||\, y_0|| < \rho$, sei $T^*(y_0) := \sup\{T > 0 | \; ||\, y(x)|| \leq \rho \; \forall \, x \in [0; T[\}$, ($y$ Lösung des Anfangswertproblems (5.6) mit $y(0) = y_0$).
Mit den obigen Bezeichnungen folgt aus der Integraldarstellung von y:

$$\begin{aligned} ||\, y(x)|| &\leq K e^{-\omega x} \, ||\, y_0|| + K \int_0^x e^{-\omega(x-s)} M \, ||\, y(s)|| \, ds \quad \forall \, x \in [0; T^*[\\ \Rightarrow \underbrace{e^{\omega x} \, ||\, y(x)||}_{=:u(x)} &\leq K \, ||\, y_0|| + KM \int_0^x \underbrace{e^{\omega s} \, ||\, y(s)||}_{=u(s)} \, ds \quad \forall \, x \in [0; T^*[\end{aligned}$$

An dieser Stelle benutzen wir das *Lemma von Gronwall* (siehe unten)

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{\omega x} \, ||\, y(x)|| &\leq K \, ||\, y_0|| \, e^{KMx} \quad \forall \, x \in [0; T^*[\\ \Rightarrow ||\, y(x)|| &\leq K \, ||\, y_0|| \, e^{(\overbrace{KM - \omega}^{<0})x} \quad \forall \, x \in [0; T^*[\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $||\, y_0|| \leq \frac{\rho_0}{K} < \frac{\rho}{K}$ folgt:

$$\begin{aligned} & ||\, y(x)|| < \rho_0 < \rho \quad \forall\, x \in [0; T^*[\\ \Rightarrow \quad & \limsup_{x \to T^*} ||\, y(x)|| \leq \rho_0 < \rho \\ \Rightarrow \quad & T^* = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow y$ ist stabil und $||\, y(x)|| \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. y ist asymptotisch stabil. $\square$

Lemma (Lemma von Gronwall)
Sei $u : [a; b[\to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion, $a < b \leq +\infty$, und es gelte

$$u(x) \leq L + \omega \int_a^x u(s)\, ds \quad \forall x \in [a; b[$$

Dann gilt:

$$u(x) \leq L e^{\omega(x-a)} \quad \forall x \in [a; b[$$

Beweis:

$$0 \leq u(x) \leq L + \omega \int_a^x u(s)\, ds \quad \forall x \in [a; b[\tag{5.7}$$

u stetig.

Sei $c \in [a; b[$. Da u stetig ist, existiert $M := \max_{[a;c]} |\, u| < +\infty$
Aus (5.7) folgt dann:

$$u(x) \leq L + \omega \int_a^x M\, ds = L + \omega M(x-a) \quad \forall x \in [a; c] \tag{5.8}$$

Benutze nun (5.8) in (5.7)

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x) \quad & \leq \quad L + \omega \int_a^x L + \omega M(s-a)\, ds \\ & = \quad L + \omega L(x-a) + M\omega^2 \frac{(x-a)^2}{2} \quad \forall x \in [a; c] \end{aligned} \tag{5.9}$$

Jetzt (5.9) in (5.7) usw.

Behauptung:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : u(x) \leq L \sum_{k=0}^{n} \omega^k \frac{(x-a)^k}{k!} + M\omega^{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall\, x \in [a; c] \tag{5.10}$$

Beweis durch Induktion:
$n = 0, 1, 2$ sind schon gezeigt.
$n \to n+1$: Wenn Abschätzung für ein n gilt, dann ergibt Einsetzen in (5.7):

$$\begin{aligned} u(x) &\leq L + \omega \int\limits_a^x \left(L \sum_{k=0}^{n} \omega^k \frac{(s-a)^k}{k!} + M\omega^{n+1} \frac{(s-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right) ds \\ &= \underbrace{L + L \sum_{k=0}^{n} \omega^{k+1} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}} + M\omega^{n+2} \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= L \sum_{k=0}^{n+1} \omega^k \frac{(x-a)^k}{k!} + M\omega^{n+2} \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!} \quad \forall\, x \in [a;c] \end{aligned}$$

Übergang zum Limes in (5.10) liefert

$$u(x) \leq L e^{\omega(x-a)} \quad \forall\, x \in [a;c]$$

und $c \in [a;b[$ beliebig $\Rightarrow$ Behauptung. □

Bemerkung:
Der Beweis des Satzes 5.2 zeigt, dass unter der Vorraussetzung i) die stationäre Lösung sogar exponentiell stabil ist.

Was, wenn die Jacobimatrix nur Eigenwerte mit nicht-positiven Realteilen besitzt, aber mindestens ein Realteil $= 0$?

Beispiele:

1) Schwingungsgleichung:

$$mx'' = -ax - \underbrace{2\delta x'}_{\text{Reibungseffekte}}$$

wobei m: Masse des Massepunktes M. Betrachte $m = 1, a > 0, \delta \geq 0$.

Als System 1. Ordnung

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \text{wobei } y = x, z = x'$$

Kinetische Energie: $\frac{1}{2}z^2$
Potentielle Energie:

$$\int\limits_a^x as\,ds = a\frac{x^2}{2} = a\frac{y^2}{2}$$

Gesamtenergie: $E(y,z) = \frac{1}{2}z^2 + a\frac{y^2}{2}$

Erwartung: Falls $\delta > 0$ (keine Reibung), dann sollte die Gesamtwenegie konstant bleiben, d.h.

$$\frac{d}{dt} E\left(y(t), z(t)\right) = 0 \quad \forall t$$

für jede Lösung $\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ des Differentialgleichungssystems.

Tatsächlich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E\left(y(t), z(t)\right) &= \nabla E\left(y(t), z(t)\right) \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}' \\ &= (ay(t), z(t)) \begin{bmatrix} z(t) \\ -ay(t) \end{bmatrix} \\ &= ay(t)z(t) - ay(t)z(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Falls $\delta > 0$ erwartet man, dass die Gesammtenergie des Systems abnimmt. In der Tat gilt, wenn $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E\left(y(t), z(t)\right) &= (ay(t), z(t)) \begin{bmatrix} z(t) \\ -ay(t) - 2\delta z(t) \end{bmatrix} \\ &= -2\delta \mid z(t)|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

2) Mathematisches Pendel

Sei γ der Auslenkungswinkel des Pendels.
Die tangentiale Richtung der Erdanziehungskraft ist gegeben durch: $-mg\sin(\gamma)$.

Ort des Massepunktes (in Bogenlänge zur Zeit: $x(t)$, $x(t) = l\gamma(t) = \gamma(t)$) genügt der Differentialgleichung:

$$ml\gamma''(t) = -mg\sin(\gamma)$$

d.h.

$$x''(t) = -\sin(x(t))$$

(wobei alle Konstanten der Einfachheit halber $= 1$ gesetzt wurden). Daraus ergibt sich ein System 1. Ordnung. Mit $y(t) = x(t), z(t) = x'(t)$:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ -\sin(y) \end{bmatrix} =: f(y, z)$$

Ruhelagen der rechten Seite $f(y, z)$: $(0, 0), (\pi, 0)$ (und allgemein $y = k\pi, z = 0, k \in \mathbb{Z}$).

Stabilität der Ruhelagen:

$$J_f(y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(y) & 0 \end{bmatrix}$$

Falls $(y,z) = (0,0)$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Somit sind die Eigenwerte $\pm i$: keine Aussage über Stabilität mit Prinzip der linearen Stabilität möglich.

Aber auch hier gilt wieder: die Gesamtenergie des Systems

$$E(y,z) = \underbrace{\frac{1}{2}z^2}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\int_0^y \sin(s)\,ds}_{\text{potentielle Energie}}$$

sollte konstant bleiben; in der Tat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(y(t),z(t)) &= \nabla E(y(t),z(t)) \cdot \begin{bmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \\ &= (\sin(y(t)), z(t)) \cdot \begin{bmatrix} z(t) \\ -\sin(y(t)) \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\forall\, t \in \mathbb{R}$, für jede Lösung $(y(t), z(t))$ der Differentialgleichung.

Dagegen: falls $(\pi, 0)$: $J_f(\pi,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
$\Rightarrow$ Eigenwerte: $1, -1$.
Also folgt direkt aus dem Prinzip der linearen Stabilität: die Ruhelage $(\pi, 0)$ ist instabil.

Definition 5.5
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig.
Eine stetig differenzierbare Funktion $E : D \to \mathbb{R}$ jeißt *erste Integral* der Differentialgleichung $y' = f(y)$, wenn gilt:

$$\langle \nabla E(y); f(y) \rangle = 0 \quad \forall y \in D$$

($\langle \nabla E(y); f(y) \rangle$ ist die Richtungsableitung von E an der Stelle y in Richtung $f(y)$).

Beispiele:

1) $E(y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{a}{2}y^2$ für die Schwingungsgleichung

2) $E(y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \int_a^y \sin(s)\,ds$ für das mathematische Pendel.

Allgemein:
für *Hamiltonsche Systeme* der Gestalt

$$y' = \frac{\partial}{\partial z}H(y,z)$$
$$z' = -\frac{\partial}{\partial y}H(y,z)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $H(y,z)$ („Hamilton-Funktion“) ist die Hamilton-Funktion stets ein erstes Integral.

Bemerkung:
Trivialerweise sind alle konstanten Funktionen stets erste Integrale für jede Differentialgleichung. Diese trivialen ersten Intergrale bringen keine zusätzlichen Informationen.

Nicht jede Differentialgleichung besitzt ein nicht-triviales erstes Integral.

Beispiel:

$$\begin{cases} y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{cases} y' = y_0 e^{-x} \\ z' = z_0 e^{-x} \end{cases}, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$$

Wenn E ein erstes Integral der Differentialgleichung ist, dann gilt:

$$\frac{d}{dx} E\left(y(x), z(x)\right) = \nabla E\left(y(x), z(x)\right) \begin{bmatrix} -y(x) \\ -z(x) \end{bmatrix} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

d.h. $E\left(y(x), z(x)\right) = E\left(y_0 e^{-x}, z_0 e^{-x}\right) = E\left(y_0, z_0\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow E(y_0, z_0) = E(0,0)$ für alle $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, d.h. E ist konstant.

Definition 5.6
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig, y_s eine Ruhelage von f, $\overline{y}_s$ die zugehörige stationäre Lösung, $O \overset{\text{offen}}{\subset} D$ eine Umgebung von y_s.
Eine stetig differenzierbare Funktion $V : O \to \mathbb{R}$ heißt

i) *schwache Lyapunov-Funktion* der Differentialgleichung in y_s, wenn

$$\nabla V(y) \cdot f(y) \leq 0 \quad \forall y \in O$$

ii) *starke Lyapunov-Funktion* der Differentialgleichung in y_s, wenn

$$\nabla V(y) \cdot f(y) < 0 \quad \forall y \in O \setminus \{y_s\}$$

Besipiel:
$E(y,z) = \frac{1}{2} z^2 + \frac{a}{2} y^2$ für die Schwingungsgleichung mit Reibung ($\delta > 0$):

$$\nabla E(y,z) \cdot \begin{bmatrix} z \\ -ay - 2\delta z \end{bmatrix} = -2\delta \,|\, z| \leq 0$$

Also ist $E(y,z)$ eine *schwache* Lyapunov-Funktion für die Differentialgleichung in der Ruhelage $(0,0)$, aber keine starke Lyapunov-Funktion.

Bemerkungen:

1) Erste Integrale sind schwache Lyapunov-Funktionen.

2) $\frac{d}{dx}V(y(x)) \leq 0 \; \forall x$ für jede Lösung der Differentialgleichung, V Lyapunov-Funktion.

Satz 5.3
Sei $f : D^{\text{ offen}} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitzstetig, y_s eine Ruhelage von f, $\overline{y}_s$ die zugehörige stationäre Lösung.
Sei $V : O^{\text{ offen}} \to \mathbb{R}, y_s \in O \subset D$, eine schwache Lyapunov-Funktion der Differentialgleichung $y' = f(y)$ in y_s und es gelte:

$$V(y_s) < V(y) \quad \forall\, y \in O \setminus \{y_s\}$$

Dann ist $\overline{y}_s$ stabil.

Beweis:
o.B.d.A. $y_s = 0$ und $V(0) = 0, V(y) > 0 \,\forall\, y \neq 0$ un Umgebung der 0.
In der Tat: $\overline{y}_s$ ist stabile Lösung von $y' = f(y) \Leftrightarrow 0$ ist stabile Lösung von $y' = \tilde{f}(y)$ mit $\tilde{f}(y) = f(y + y_s) - f(y_s) = f(y + y_s)$ und $V \to \tilde{V} = V(y + y_s) - V(y_s)$ schwache Lyapunov-Funktion bezüglich 0.

Sei $\varepsilon > 0$ mit $\{y \in \mathbb{R}^N | \, || y|| \leq \varepsilon\} \subseteq O \subset D$.
Definiere $m = m(\varepsilon) := \min\{V(y) | \, || y|| = \varepsilon\} > 0$ (nach Vorraussetzung an V).
Da $V(0) = 0$ und V stetig ist, existiert $(\varepsilon >)\delta > 0$ so, dass

$$(0 \leq) V(y) < \frac{m}{2} \quad \forall y \in D \text{ mit } || y|| \leq \delta$$

Sei $y_0 \in D, || y_0|| < \delta$; sei y die zugehörige maximale Lösung des rechtsseitigen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Sei $T^* = \sup\{T >= | \, || y(x)|| < \varepsilon \,\forall\, x \in [0; T^*[\}$. Klar: $T^* \leq I^+_{\max}$.

Angenommen $T^* < \infty$.
Dann gilt: $|| y(T^*)|| = \varepsilon, || y(x)|| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [0; T^*[$. Da V entlang der Lösung y fällt, folgt

$$m \leq V(y(T^*) \leq V(y_0) \leq \frac{m}{2}$$

Widerspruch, da $m > 0$
$\Rightarrow T^* = I^+_{\max} = \infty$ und 0 ist stabil. $\square$

<u>Anwendungsbeispiel:</u> Mathematisches Pendel

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ -\sin(y) \end{bmatrix}$$

Ruhelage $(0, 0)$ (und andere)
Energie:

$$E(y, z) = \frac{1}{2}z^2 + \int\limits_0^y \sin(s)\, ds$$

ist eine Hamilton-Funktion, d.h. insbesondere eine schwache Lyapunovfunktion, und

$$E(0,0) < E(y,z) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi, (y,z) \neq (0,0) \tag{5.11}$$

$\overset{\text{Satz 5.3}}{\Rightarrow}$ die stationäre Lösung $\overline{y}_s = (0,0)$ ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil. (Beweis: wenn $(y_0, z_0) \neq (0,0)$, dann gilt für die Lösung (y,z) des Anfangswertproblems zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0, z(0) = z_0$:

$$E(y_0, z_0) = E(y(x), z(x)) \quad \forall\, x \geq x_0$$

Angenommen, $(0,0)$ wäre asymptotisch stabil, dann würde folgen:

$$E(y(x), z(x)) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} E(0,0) = 0$$

wenn (y_0, z_0) nahe bei $(0,0)$
$\Rightarrow E(y_0, z_0) = E(0,0) = 0$, Widerspruch zu (5.11)).

Satz 5.4
Sei $f : D^{\text{ offen}} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitzstetig, y_s eine Ruhelage von f, $\overline{y}_s$ die zugehörige stationäre Lösung.
Sei $V : O^{\text{ offen}} \to \mathbb{R}, y_s \in O \subset D$, eine starke Lyapunov-Funktion der Differentialgleichung $y' = f(y)$ in y_s und es gelte:

$$V(y_s) < V(y) \quad \forall\, y \in O \setminus \{y_s\}$$

Dann ist $\overline{y}_s$ asymptotisch stabil.

Beweis:
o.B.d.A. $\overline{y}_s = 0$ und $V(0) = 0$ (wie in Satz 5.3). Nach Satz 5.3 ist $\overline{y}_s$ stabil. Es genügt also zu zeigen, dass $\overline{y}_s$ attraktiv ist.

Sei $\varepsilon > 0$ mit $\{y \in D |\, ||\, y|| \leq \varepsilon\} \subset = \subseteq D$.
Da $\overline{y}_s$ stabil ist, existiert $(\varepsilon >)\delta > 0$ so, dass $\forall\, y_0 \in D$ mit $||\, y_0|| < \delta$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

für alle $x \geq 0$ existiert und erfüllt: $||\, y(x)|| < \varepsilon \;\forall\, x \geq 0$.
Nach Voraussetzung ist die Funktion

$$x \in [0; +\infty[\mapsto V(y(x)) (\geq 0)$$

streng monoton fallend; daher existiert

$$(0 \leq)\; V_\infty := \lim_{x \to \infty} V(y(x))$$

Angenommen, $V_\infty > 0$. Da $V(y)(x)$ streng monoton fallend, gilt

$$V(y(x)) > V_\infty (> 0) \quad \forall\, x \geq 0$$

Da $V(0) = 0$ und V stetig, existiert $(\varepsilon >)\sigma > 0$ so, dass

$$0 \leq V(y) < V_\infty \quad \forall\, y \in D \text{ mit } ||\, y|| < \sigma$$

Also folgt

$$\sigma \leq y(x) \leq \varepsilon \quad \forall\, x \geq 0$$

Da V starke Lyapunov-Funktionauf O und $y \mapsto \nabla V(y) \cdot f(y)$ eine stetig Funktion auf O , nimmt diese strikt negative Funktion ihr Maximum m auf der kompakten Menge $\{y \in \mathbb{R}^N | \sigma \leq ||y|| \leq \varepsilon\}$ an, und es gilt $m < 0$.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
V(y(x)) - V(y_0) &= \int_0^x \underbrace{\frac{d}{dt} V(y(t))}_{\nabla V(y(t)) \cdot y'(t)} \, dt \\
&= \int_0^x \underbrace{\nabla V(y(t)) \cdot f(y(t))}_{\leq m} \, dt \\
&\leq mx \\
\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \underbrace{V(y(x)) - V(y_0)}_{\to V_\infty - V(y_0)} &= -\infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Widerpsruch.
Also gilt: $V_\infty = 0$.

Da $\{y(x) | x \geq 0\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^N | \, ||y|| \leq \varepsilon\} =: \overline{B_\varepsilon(0)}$, und $\overline{B_\varepsilon(0)}$ kompakt, existert für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit $x_n \to +\infty$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \to +\infty$ und $\lim\limits_{k \to \infty} y(x_{n_k})$ existiert.

Sei z ein solcher Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(y(x_{n_k}))_k$.
Wegen

$$\lim_{x \to \infty} V(y(x)) = 0$$

gilt auch

$$\lim_{k \to \infty} \underbrace{V(y(x_{n_k}))}_{\to V(z)} = 0$$

d.h. $V(z) = 0$. Da $z \in O$, und $V(y) > 0 \quad \forall y \in O, y \neq 0 \quad \Rightarrow z = 0$.
Da dies für jeden Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge gilt, folgt:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$

$\square$

Bemerkung:
Es ist möglich, dass eine Ruhelage y_s einer Differentialgleichung $y' = f(y)$ asymptotisch stabil ist, aber die Jacobi-Matrix $J_f(y_s)$ Eigenwerte mit Realteil $= 0$ besitzt und daher der Satz der linearisierten Stabilität anwendbar ist.

Beispiel:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = -z - y^3 \\ y - z^3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -z - y^3 \\ y - z^3 \end{bmatrix} =: f(y, z)$$

Es gilt: f ist lokal Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Existenz von maximaler Lösung (bereits gesehen in der Übung: globale Existenz auf $[0; +\infty[$).

Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$:

f ist sogar stetig differenzierbar und

$$J_f(y,z) = \begin{bmatrix} -3y^2 & -1 \\ 1 & -3z^2 \end{bmatrix} \quad \forall (y,z)$$
$$\Rightarrow \quad J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte : $\pm i$
$\Rightarrow$ Prinzip der lineariseirten Stabilität nicht anwendbar.

Betrachte die Funktion $V(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2, (y,z) \in \mathbb{R}^2$.
klar: V ist C^1-Funktion, $V(0,0) < V(y,z) \; \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla V(y,z) \cdot f(y,z) &= (y,z) \begin{bmatrix} -z - y^3 \\ y - z^3 \end{bmatrix} \\ &= -yz - y^4 + zy - z^4 \\ &= -y^4 - z^4 \\ &< 0 \qquad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{aligned}$$

Also folgt: $V(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$ ist eine starke Lyapunov-Funktion der Differentialgleichung bzgl. der Ruhelage $(0,0)$.
$\overset{\text{Satz 5.4}}{\Rightarrow} \; \overline{y}_s \equiv (0,0)$ ist asymptotisch stabil.

Ein anderes Beispiel: Mathematisches Pendel mit Reibung

Gesehen: Mathematisches Pendel ohne Reibung:

$$x'' = -\sin(x)$$

Modell mit Reibung:

$$x'' = -\sin(x) - g(x')$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$,

- $g(0) = 0$ (keine Geschwindigkeit = keine Reibung)
- $g(r) \cdot r > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (falls Geschwindigkeit $\neq 0$, dann wirken Reibungskräfte; die Reibungskräfte wikren entgegen der Geschwindigkeit)
- $g'(r) \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$ (größere Reibung bei größerer Geschwindigkeit)

Spezialfälle:
$g(r) = kr, k > 0$
$g(r) = r^3 \leftarrow$ betrachte diesen Fall

Betrachte das äquivalente System:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ -\sin(y) - z^3 \end{bmatrix} =: f(y,z)$$

Frage: Stabilität / asymptotische Stabilität der Ruhelage $(0,0)$

$$J_f(y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(y) & -3z^2 \end{bmatrix}$$

also

$$J_f(y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\pm i$.

$\Rightarrow$ keine Aussage mit Prinzip der linearisierten Stabilität möglich.

Sei

$$V(y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \int\limits_0^x \sin(s)\,ds, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

Es gilt:

- V ist C^1-Funktion
- $V(0,0) < V8y,z) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi$
- $$\begin{aligned} \nabla V(y,z) \cdot f(y,z) &= \left\langle \begin{bmatrix} \sin(y) \\ z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} z \\ -\sin(y) - z^3 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= -z^4 \leq 0 \quad \forall\, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Also gilt: V ist schwache Lyapunov-Funktion der Differentialgleichung bzgl. der Ruhelage $(0,0)$, aber V ist keine starke Lyapunov-Funktion, da $\nabla V(y,z) \cdot f(y,z) = 0 \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = 0$.

Schlussfolgerung:
$\overline{y}_s \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist stabil (nach Satz 5.3).
Es kann nicht auf asymptotische Stabilität von $(0,0)$ geschlossen werden.
Aber: wir erwarten dennoch, dass $\overline{y}_s \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ asymptotisch stabil ist.
Somit ist ein weiteres Studium der Asymptotik notwendig.

Definition 5.7
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig.
Eine Teilmenge $T \subset D$ heißt *Trajektorie* (oder *Orbit, Bahn*) von $y' = f(y)$, falls es eine maximale Lösung $y : I_{\max} \to \mathbb{R}^N$ der Differentialgleichung $y' = f(y)$ gibt, mit

$$T = \{y(x) | \, x \in I_{\max}\}$$

Falls $y_0 \in D$, y die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dann heißt

$$O(y_0) := \{y(x) | \, x \in I_{\max}\}$$

die *Trajektorie durch* y_0,

$$O^+(y_0) := \{y(x) | \, x \in I_{\max}, x \geq 0\}$$

die *positive (Halb-)Trajektorie durch* y_0,

$$O^-(y_0) := \{y(x) | \, x \in I_{\max}, x \leq 0\}$$

die *negative (Halb-)Trajektorie durch* y_0.

Satz 5.5
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig, $y_0 \in D$.
Dann gilt einer der drei folgenden Fälle:

- $I_{\max} =]-\infty; +\infty[$ und $y \equiv$konstant ($= y_0$ eine Ruhelage von f) und $O(y_0) = \{y_0\}$
- $I_{\max}$ und y ist nicht-konstant und periodisch, und $O(y_0) = O^+(y_0) = O^-(y_0)$ ist eine geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^N$
- die maximale Lösung $y : I_{\max} \to \mathbb{R}^N$ ist injektiv und $O(y_0)$ ist eine doppelpunktfreie Kurve ohne ihre Endpunkte.

Bemerkung:
Falls $N = 1$ (skalare Differentialgleichung), dann gibt es keine periodischen (nichkonstante) Lösungen.
Beweis:
$y' = f(y)$, f lokal Lipschitz-stetig.
Ist y periodisch, so folgt $\exists \, x_n : y'(x_n) = 0 \Rightarrow f(y(x_n)) = 0 \Rightarrow y(x_n) =$ Ruhelage. Widerspruch. □
Also sind die Orbits entweder einpunktig oder offene Intervalle.

Satz 5.6
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig, $y_0, y_1 \in D$.
Dann gilt entweder $O(y_0) = O(y_1)$ oder $O(y_0) \cap O(y_1) = \emptyset$.

Beweis:
Bezeichung:

Für $w \in D$, bezeichne $y(\cdot; w) : I_{\max}(w) \to \mathbb{R}^N$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = w \end{cases}$$

Betrachte $y(\cdot; y_0)$ und $y(\cdot; y_1)$.
Angenommen, es existiert $z \in O(y_0) \cap O(y_1)$, d.h. es existieren $x_0, x_1 \geq 0$ mit $y(x_0; y_0) = y(x_1; y_1) = z$.

Aufgrund der Translationsinvarianz von Lösungen autonomer Differentialgleichungen gilt:

$$\begin{aligned} y(\cdot + x_0; y_0) &= y(\cdot; z) \\ y(\cdot + x_1; y_1) &= y(\cdot; z) \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} O(y_0) &= \{y(x; y_0) | x \in I_{\max}(y_0)\} \\ &= \{y(x + x_0; y_0) | x \in -x_0 + I_{\max}(y_0)\} \\ &= O(z) \\ \text{und} & \\ O(y_1) &= \{y(x; y_1) | x \in I_{\max}(y_1)\} \\ &= \{y(x + x_1; y_1) | x \in -x_1 + I_{\max}(y_1)\} \\ &= O(z) \end{aligned}$$

folgt $O(y_0) = O(y_1)$. □

Bemerkung:
Aus Satz 5.6 folg: D ist die disjunkte Verinigung (von Äquivalenzklassen) von Trajektorien. Die Menge aller Trajektorien in D, dem sogenannten *Phasenraum*, bezeichnet man als *Phasenportrait* der Differentialgleichung. Die Trajektorien besitzen eine natürliche Orientierung: die wachsender x-Werte (x: unabhängige Variable der Differentialgleichung).
Der Tangentialvektor an die durch einen Punkt $y_0 \in D$ laufende Trajektorie ist $f(y_0)$.
Dies erlaubt die Konstruktion von Richtungsfeldern im Phasenraum.

Beispiele:

1) $y' = y - y^3 = y(1 - y^2)$
   Phasenraum: $\mathbb{R}$
   Trajektorien: $\{0\}, \{-1\}, \{1\},]-\infty; -1[,]-1; 0[,]0; 1[,]1; +\infty[$

2)

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ y \end{bmatrix}$$

   ist ein Hamilton-System mit Hamilton-Funktion

$$H(y, z) = -\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$$

Phasenraum: $\mathbb{R}^2$
Es gilt:

$$\frac{d}{dx}H(y(x),z(x)) = (-y,-z)\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

für alle Lösungen $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow$ Trajektorien sind gegeben durch die Niveaumengen: $\{(y,z)|\, H(y,z) = c\}, c \in \mathbb{R}$.

3) Allgemeiner: Bestimmung von Trajektorien einer 2-dimensionalen Differentialgleichung

$$\begin{cases} y' = f(y,z) \\ z' = g(y,z) \end{cases}, (y,z) \neq (y_0,z_0)$$

Zunächst: Ruhelagen

Dann: Bestimmung der Trajektorien nicht-stationärer Lösungen.

In diesem Fall gilt: entweder $f(y(x),z(x)) \neq 0$ oder $g(y(x),z(x)) \neq 0 \;\forall x \in I_{\max}$.

Dann ist $y : I \to y(I)$ eine Bijektion und der Orbit kann umparametrisiert werden: $s = y(x)$.

$$\{(y(x),z(x))|\, x \in I\} = \left\{(s, z(y^{-1}(s)))|\, s \in y(I)\right\}$$

Und $\varphi = z \circ y^{-1}$ ist maximale Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\{ds}{\varphi}(s) = \frac{d}{ds}z(y^{-1}(s)) \quad &= \quad \frac{z'(y^{-1}(s))}{y'(y^{-1}(s))} \\ &\overset{\text{DGL}}{=} \quad \frac{g(y(y^{-1}(s)), z(y^{-1}(s)))}{f(y(y^{-1}(s)), z(y^{-1}(s)))} \\ &= \quad \frac{g(s,\varphi(s))}{f(s,\varphi(s))} \end{aligned}$$

d.h. Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dy} = \frac{g(y,z)}{f(y,z)}$$

Analog gilt: wenn $g(y,z) \neq 0$ auf I, dann kann die Trajektorie bestimmt werden als die Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz} = \frac{f(y,z)}{g(y,z)}$$

Anwendungsbeispiel: Räuber-Beute-Modell

(y Beute, z Räuber)

$$\begin{cases} y' = y(1-z) \\ z' = z(y-1) \end{cases} \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

$y, z \geq 0$: biologisch relevant.

Trajektorien:
Ruhelagen: $(0,0), (1,1)$

$y = 0, z' = -z \Rightarrow z = z_0 e^{-x} : \{0\} \times \mathbb{R}_+^*, \{0\} \times \mathbb{R}_-^*$
$z = 0, y' = y \Rightarrow y = y_0 e^x : \mathbb{R}*_+ \times \{0\}$.

Weitere Trajektorien: Wenn $\begin{cases} z > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, $y \neq 1$: Trajektorien bestimmt durch Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(1-z)}{z(y-1)} = \frac{y}{y-1}\frac{1-z}{z}$$

ist Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int \frac{y-1}{y} dy = \int \frac{1-z}{z} dz \\ &\Rightarrow y - \ln y = \ln z - z + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Trajektorie $\subseteq$ Niveaumenge $\{(y,z) | E(y,z) = c\}$, wobei

$$E(y,z) = y - \ln y - \ln z + z$$

Zur Darstellung der Niveaumengen ist eine weitere Analyse erforderlich.

Bemerkung:
Rechnung liefert erstes Integral der Differentialgleichung, d.h. eine Lyapunovfunktion $\rightarrow$ wichtig für die Stabilitätsanayse.

Definition 5.8

i) Sei $f : D \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig, $y_0 \in D$, die Differentialgleichung y'=f(y).
Ein Punkt $z \in D$ heißt ω *Grenzwert/-punt von* y_0, wenn es eine gegen ∞ strebende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ gibt mit $\lim_{n \to \infty} y(x_n; y_0) = z$.
Die Menge aller ω-Grenzwerte heißt ω*-Grenzmenge von* y_0 und wird mit $\omega(y_0)$ bezeichnet.

ii) Eine Teilmenge $M \subseteq D$ heißt *invariant* (respective *positiv invariant* / *negativ invariant*), wenn $\forall y_0 \in M$ gilt: $O(y_0) \subset M$ (respective $O^+(y_0) \subset M$ / $O^-(y_0) \subset M$).

Bemerkungen:

1) Jede (positive/negative Halb-)Trajektorie ist (positiv/negativ) invariant (wegen der Translationsinvarianz von Lösungen).

2) Falls $\overline{O^+(y_0)} \subset D$ und beschränkt, dann ist $\omega(y_0) \neq \emptyset$, $\omega(y_0)$ ist abgeschlossen, $\omega(y_0) \subset D$ und $\omega(y_0)$ ist *positiv invariant.*
Beweis:
Beweis der positiven Invarianz:
Sei $z \in \omega(y_0), x \in I_{\max}(y(\cdot, z))$ wobei $y(\cdot, z)$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y), y(0) = z$.
Dann gilt: $y(x, z) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} y(x; y(x_n; y_0)) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} y(x + x_n; y_0)$, wobei $z = \lim_{n\to\infty} y(x_n; y_0)$. ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert nach Definition von $\omega(y_0)$).
Bei (1) wurde hierbei die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert ausgenutzt, bei (2) die Translationsinvarianz.
Da $(x + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ strebende Folge, folgt $y(x; z) \in \omega(y_0), x \geq 0$ beliebig.
$\Rightarrow \omega(y_0)$ ist positiv invariant. □

3) Wenn $A, B \subset D$ zwei (positiv/negativ) invariante Mengen, dann ist auch $A \cup B$ (positiv/negativ) invariant.
Insbesondere Besitzt jede Teilmenge $B \subset D$ eine größte (positiv) invariante Teilmenge.

Satz 5.7 (Invarianzprinzip von La Salle)
Sei $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig, V eine Lyapunov-Funktion der Differentialgleichung $y' = f(y)$ auf D^2. Dann gilt für alle $y_0 \in D$:

$$\omega(y_0) \subset \{y \in D\, \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\}$$

Beweis:
Sei $y_0 \in D$. Zu zeigen: $\omega(y_0) \subset \{y \in D | \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\}$.
o.B.d.A $\omega(y_0) \neq \emptyset$, da die Aussage sonst trivial ist.

Sei $z \in \omega(y_0)$.
Angenommen: $\nabla V(z) \cdot f(z) < 0$.

Die Funktion $v(x) := V(y(x; z))$ erfüllt dann $v'(0) < 0$. Hierbei ist $y(\cdot; z)$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = z \end{cases}$$

Aufgrund der Stetigkeit von v' gilt somit $v'(x) < 0\ \forall x \in$ Umgebung der 0.

Insbesondere existiert ein $x_0 > 0$ mit

$$v(x_0) = V(y(x_0; z)) < V(z) = v(0)$$

Anderseits gilt: V ist fallend entlang der Lösung $y(\cdot; y_0)$. Da $z \in \omega(y_0)$, existiert $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ und so, dass $\lim_{n\to\infty} y(x_n; y_0) = z$.

[2] ansonsten lokalisieren

Somit folgt:

$$V(y(x_n; y_0)) \geq V(z) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Sei nun $x \geq 0$ ein beliebiger Punkt. Da $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, existiert ein n_0 mit $x \leq x_{n_0}$. Also folgt

$$V(y(x; y_0)) \;(\geq V(y(x_n; y_0)) \geq)\; V(z) \quad \forall\, x \geq 0 \tag{5.12}$$

Da aufgrund der Translationsinvarianz der Lösungen einer autonomen Differentialgleichung

$$y(x_0 + x_n; y_0) = y(x_0; y(x_n; y_0))$$

und wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösungen des Anfangswertproblems vom Anfangswert

$$y(x_0; \underbrace{y(x_n; y_0)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y(x_0; z)$$

gilt, folgt

$$y(x_0 + x_n; y_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y(x_0; z)$$

Wegen der Stetigkeit von V folgt durch Übergang zum Limes $n \to \infty$ in der Ungleichung (5.12) mit $x = x_0 + x_n$:

$$V(y(x_0; z)) \geq V(z)$$

Andererseits gilt

$$V(y(x_0; z)) < V(z)$$

$\Rightarrow$ Widerspruch. $\square$

Korollar 5.1
Sei $f : D^{\text{ offen}} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lokal Lipschitz-stetig, V eine Lyapunov-Funktion der Differentialgleichung $y' = f(y)$ auf D. Dann gilt für alle $y_0 \in D$, außerdem gelte: y_s ist Ruhelage von f und $V(y_s) < V(y)$ für alle $y \neq y_s$ in einer Umgebung von y_s. Wenn $\{y_s\}$ die größte positiv invariante Untermenge von $\{y \in D |\, \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\}$, ist, dann ist y_s asymptotisch stabil.

Beweis:
Aus den Voraussetzungen folgt bereits, dass die Ruhelage y_s stabil ist (nach Satz 5.3). D.h. für $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so, dass $\forall\, y_0 \in D$ mit $||\, y_0 - y_s|| < \delta$ gilt: die Lösung $y(x; y_0)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

existiert $\forall\, x \geq 0$ und $||\, y(x; y_0) - y_s|| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \geq 0$.

Es folgt

$$O^+(y_0) \subset \overline{B_\varepsilon(y_s)} \subset D$$

für $\varepsilon > 0$ genügend klein.
Also folgt

$$\omega(y_0) \neq \emptyset$$

Außerdem gilt: $\omega(y_0)$ ist positiv invariant.

Nach Satz 5.7 gilt auch $\omega(y_0) \subset \{y \in D \,|\, \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\} =: N$.

Da $\{y_s\}$ die größte positiv invariante Teilmenge von N, und Vereinigungen positiv invarianter Mengen positiv invariant sind, folgt:

$$\omega(y_0) = \{y_s\}.$$

Somit folgt

$$y(x; y_0) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} y_s$$

und es folgt: y_s ist asymptotisch stabil. $\square$

Anwendungsbeispiel: Mathematisches Pendel mit Reibung

Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\sin(y) - z^3 \end{cases} \qquad \text{Setze } f(y,z) := \begin{bmatrix} z \\ -\sin(y) - z^3 \end{bmatrix}$$

Wir haben bereits gesehen:

- $(0, 0,)$ ist stabile Ruhelage
- $V(y,z) = \frac{z^2}{2} + \int\limits_0^y \sin(s)\,ds$ ist schwache Lyapunovfunktion auf $\mathbb{R}^2$
- $V(0,0) < V(y,z) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi.$

Da $\nabla V(y,z) \cdot f(y,z) = -z^4$, also

$$N = \Big\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \nabla V(y,z) \cdot f(y,z) = 0\Big\} = \mathbb{R} \times \{0\},$$

ist $V(y,z)$ keine starke Lyapunovfunktion.

Welche sind die positiv invarianten Teilmengen von N ?

Fluß in $(y, 0), y \neq 0$:

$$f(y,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(y) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{für } y \in]-\pi; \pi[$$

Es folgt: $\{(0,0)\}$ ist die größte (positiv) invariante Teilmenge von N
$\overset{\text{Korollar 5.1}}{\Longrightarrow}$ $(0,0)$ ist asymptotisch stabil.