TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 21.-25.01.2019

12. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(Riemann- vs. Lebesgue-Integral, Konvergenzsätze, $\mathcal{L}^p/L^p$-Räume)

Themen der großen Übung am 14.01.

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Dann zeigen wir, dass

(i) für messbares $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \qquad \text{für jedes } g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

bereits $\|f\|_\infty < \infty$ gilt.

(ii) falls $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ nicht endlich ist, für alle $1 \leq r < s \leq \infty$ dann $\mathcal{L}^s(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \setminus \mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \neq \emptyset$ gilt.

Wir beweisen
Lemma 3.3.2.: *Jede auf einem unbeschränkten Intervall I messbare nichtnegative Funktion, die über jedes kompakte Teilintervall Riemann-integrierbar ist, ist genau dann Lebesgue-integrierbar über I, wenn ihr uneigentliches Riemann-Integral über I existiert, und die beiden Integrale stimmen dann überein.*

Dann betrachten wir die uneigentlichen Riemann-Integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x$$

und werden sehen, dass es Riemann-integrierbare Funktionen gibt, welche nicht Lebesgue-integrierbar sind.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ die Menge der p-integrierbaren numerischen Funktionen, $\mathcal{N}^p(\mu) := \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid \|f\|_p = 0\}$ und $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}^p(\mu)$. Wir beweisen, dass $\mathcal{L}^p(\mu), \mathcal{N}^p(\mu)$ und $L^p(\mu)$ Vektorräume sind und $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $L^p(\mu)$ definiert.

Tutoriumsvorschläge

38. Aufgabe $\star$

(i) Seien $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion und $a < b < c$. Für eine Lebesgue-messbare Menge I setzen wir $\int_I f \,\mathrm{d}\lambda = \int f \cdot \mathbb{1}_I \,\mathrm{d}\lambda$. Zeigen Sie, dass dann gilt $\int_{(a,c)} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\lambda + \int_{(b,c)} f \,\mathrm{d}\lambda$.

(ii) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\,\lambda(\mathrm{d}x) = 0.$$

(iii) Wir betrachten $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x+y$. Bestimmen Sie $\int g \cdot \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]} \,\mathrm{d}\lambda$.

39. Aufgabe $\star$

Beweisen Sie den Satz von Beppo-Lévy (Korollar 3.4.2.): *Sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen mit $f_n \uparrow f$ μ-f.ü. und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist auch f integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

40. Aufgabe

Beweisen Sie Korollar 3.4.8 (Stetigkeitslemma): *Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass gelten:*

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $f(\cdot, x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

(ii) für fast alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\omega, \cdot)$ stetig in x_0,

(iii) es gibt eine Umgebung U von x_0, so dass die Abbildung $\sup_{x\in U} |f(\cdot, x)|$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegt.

Dann ist die Abbildung $x \mapsto \int f(\omega, x)\mu(\mathrm{d}\omega)$ stetig in x_0.

41. Aufgabe

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie, dass

(i) für $1 \le p \le q \le \infty$ die Inklusionen $\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ und $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ gelten.

(ii) wenn zusätzlich $\mu(\Omega) = 1$ und f eine messbare numerische Funktion auf Ω ist, die Abbildung $[1,\infty] \to [0,\infty], p \mapsto \|f\|_p$, monoton nichtfallend ist.

Hausaufgaben

44. Aufgabe (6 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq r < s \leq \infty$. Zeigen Sie:

(i) Falls ein $a > 0$ existiert mit $\mu(A) \notin (0, a)$ für jedes $A \in \mathcal{F}$, so gilt $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^s(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

(ii) $\iota\colon L^r(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to L^s(\Omega, \mathcal{F}, \mu), f \mapsto f$, ist genau dann wohldefiniert und stetig, wenn ein $a > 0$ existiert mit $\mu(A) \notin (0, a)$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

Hinweis: Sie dürfen in (ii) ohne Beweis folgendes Lemma verwenden:

Lemma *Ist $L^r(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subseteq L^s(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, so ist die Inklusion ι automatisch stetig.*
Der Beweis benutzt Funktionalanlysis siehe A. G. Miamee: *The Inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$* in The American Mathematical Monthly Vol. 98, No. 4 (Apr., 1991), pp. 342-345 (Teil des Beweis des Main Theorem)
Bemerkung: (ii) ist ebenfalls wahr für die Räume $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Da diese Räume aber nur über eine Halbnorm verfügen, ist der Beweis etwas involvierter.

45. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion. Wir erinnern an die Definition $\|f\|_\infty := \sup\{a \geq 0 \mid \mu(\{|f| \geq a\}) > 0\}$. Zeigen Sie:

(i) $\|f\|_\infty = \inf\{c \in [0, \infty] \mid |f| \leq c \quad \mu\text{-fast überall}\}$.

(ii) Falls $\|f\|_p < \infty$ für ein $p > 1$, dann gilt $\liminf_{r\to\infty} \|f\|_r \geq \|f\|_\infty$.

46. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine nichtnegative messbare numerische Funktion. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) Die Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}) < \infty$.

(ii) Falls f integrierbar ist, so gilt $\lim_{n\to\infty} n\mu(\{f \geq n\}) = 0$.

(iii) Falls $f(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$, so gilt $\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}) \in [0, \infty]$.

47. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass

(i) durch die Vorschrift

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_\Omega f(\omega) g(\omega) \,\mu(\mathrm{d}\omega), \qquad [f], [g] \in L^2(\mu),$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$ definiert ist, d.h. $L^2(\mu)$ ist ein (prä-)Hilbertraum.

(ii) für jedes $[f] \in L^2(\mu)$ die Abbildung

$$T_{[f]} \colon L^2(\mu) \to \mathbb{R}, [g] \mapsto \langle [f], [g] \rangle$$

eine stetige lineare Abbildung ist mit $\|T_{[f]}\|_{\mathrm{op}} = \|[f]\|_2$ und folgern Sie, dass

$$T \colon L^2(\mu) \to (\mathcal{L}(L^2(\mu), \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}), [f] \mapsto T_{[f]}$$

eine eine injektive, stetige und normerhaltende Abbildung ist.

Hinweis: In dieser Aufgabe setzen wir voraus, dass $L^2(\mu)$ vollständig ist. Dafür wurde in der Vorlesung auf eine Funktionalanalysis Vorlesung verwiesen. Das ist allerdings auch eine schöne Übung, machen Sie das doch mal! Für eine Cauchy Folge sieht man mit Hölder Ungleichung und Lemma von Fatou, dass der Grenzwert in L^2 ist.

Gesamtpunktzahl: 20