Analysis Problem Sheet 01

Exercise 1

Zeige: Das Gleichungssystem besitzt eine Lösung (x, y, z, u, v) der Form $g : V \to W, (x, y, z) \mapsto (u, v)$ mit $g(2, 0, 1) = (1, 0)$, offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^3$ und $W \subset \mathbb{R}^2$.

Proof. Schreibe das Gleichungssystem in der Form

$$f(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} xe^y + uz + \cos v - 4 \\ u\cos y + x^2 v + yz^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann suchen wir Umgebungen V, W und $g : V \to W$, sodass $f^{-1}(\{0\}) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 : g(\alpha) = \beta\}$. Wir verwenden das Theorem über *implizite Funktionen*.

1. f besitzt bei $(2, 0, 1, 1, 0)$ eine Nullstelle. Das rechnet man nach

$$f(2, 0, 1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 + 1 + 1 - 4 \\ 1 + (-1) \end{pmatrix} = \mathbf{o}.$$

2. f ist stetig differenzierbar nach (u, v):

$$\frac{\partial f}{\partial(u, v)}(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} z & -\sin(v) \\ \cos(y) & x^2 \end{pmatrix}$$

   Wir sehen, dass $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(2, 0, 1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Die Ableitung ist also an der Stelle $(2, 0, 1, 1, 0)$ nicht singulär, denn die Determinante beträgt 4.

Nach Satz über implizite Funktionen gibt es offene Umgebungen $(2, 0, 1) \in V$ und $(1, 0) \in W$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V \to W, (x, y, z) \mapsto (u, v)$ mit $f(x, y, z, g(x, y, z)) = 0$ für alle $(x, y, z, u, v) \in V \times W$. Außerdem gilt: $g(2, 0, 1) = (1, 0)$. $\square$

Suche: Das erste Taylor Polynom von g mit Entwicklungspunkt $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$.

$$T_1 g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{a}} g(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Wir wissen, dass $g(\mathbf{a}) = g(2, 0, 1) = (1, 0)$. Als nächstes berechne $D_{\mathbf{a}} g$:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a}} g &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(u, v)}(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}(\mathbf{a}, g(\mathbf{a})) \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(u, v)}(2, 0, 1, 1, 0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}(2, 0, 1, 1, 0) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^y & xe^y & z \\ 2xv & -u\sin(y) + z^2 & 2zy \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=(2,0,1,1,0)} \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechne nun $D_{\mathbf{a}} g(\mathbf{a}) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Das Taylor-polynom lautet dann für $\mathbf{x} = (x, y, z) \in V$:

$$\begin{aligned} T_1 g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - x - 2y - z \\ \frac{1}{4}(-3 + x + y + z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercise 2

Zeige: Nullstellen eines Polynoms hängen von einer stetig differenzierbaren Funktion f ab

Proof. Sei $F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\mathbf{a}, x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Sie ist stetig differenzierbar:

$$D_{(\mathbf{a},x)} f = \begin{pmatrix} x & x^2 & \dots & x^n & \sum_{i=1}^{n} a_i i x^{i-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig und nehmen man an, dass es eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $F(\mathbf{a}, x_0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial_2}(\mathbf{a}, x_0) \neq 0$.

Nach Satz über implizite Funktionen gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{a} \in U$ und $V \subset \mathbb{R}$, sodass $F(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) = 0$ für alle $\mathbf{a} \in U$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to V$.

Damit haben wir solch eine Funktion f gefunden. □

Exercise 3

Zeige: Für $p > 1$ ist S_p eine Untermannigfaltigkeit.

Proof. Wir versuchen S_p als Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit einer *stetig differenzierbaren* f darzustellen. Sei $p > 1$. Betrachte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p - 1$. Es gilt

$$S_p = f^{-1}(\{0\}).$$

Als nächstes müssen wir zeigen, dass f stetig differenzierbar auf eine Umgebung $U_{\epsilon(a)}(a)$ für beliebige $a \in S_p$ und $\epsilon(a) > 0$. Dies zeigen wir, indem wir die folgende stärkere Aussage beweisen: f ist stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^n$.

---

1. Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann ist

   $$D_{\mathbf{x}} f = p \begin{pmatrix} x_1 ||x_1||^{p-2} & \dots & x_n ||x_n||^{p-2} \end{pmatrix},$$

   denn $D_x ||x|| = D_x \sqrt{x^2} = \frac{x}{||x||}$ und mit der Kettenregel ergibt sich $D_x ||x||^p = p||x||^{p-1} \cdot \frac{x}{||x||} = px||x||^{p-2}$.

   Wir sehen, dass f natürlich stetig ist und auch wohldefiniert ist für alle $\mathbf{x}$ mit $x_i \neq 0$.

2. Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i = 0$ für alle $i \in I \subset \{1, \dots, n\}$, wobei I nicht leer ist. Die Frage ist, ob $D_{\mathbf{x}} f$ existiert. Die kritischen Stellen sind die $x_i = 0$ mit $i \in I$. Untersuche also, ob der Grenzwert von $x||x||^{p-2}$ für $x \to 0$ existiert. Sei $q = p - 2$ und es gilt $q > -1$ wegen $p > 1$. Daher gilt

   $$\lim_{x \to 0} x||x||^q = (\pm 1) \cdot \lim_{x \to 0} x^{\overbrace{1+q}^{>0}} = 0.$$

   Der Grenzwert existiert also.

3. Zusammengefasst: Sei $\varphi(x) = \begin{cases} x||x||^{p-2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

   $$D_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \dots & \varphi(x_n) \end{pmatrix}.$$

   Die Ableitung existiert damit überall. Sie ist natürlich auch stetig; insbesondere um der Umgebung $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, wie wir gezeigt haben.

Als nächstes zeigen wir, dass $D_{\mathbf{x}} f$ injektiv ist. Dafür muss $D_{\mathbf{x}} f \neq \mathbf{o}$ für alle $\mathbf{x} \in S_p$. Wir sehen, dass $D_{\mathbf{x}} f = \mathbf{o} \iff \mathbf{x} = \mathbf{o}$, aber $\mathbf{o} \notin S_p$. Somit ist S_p eine $n-1$-Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, denn S_p kann als Lösungsmenge eines Gleichungssystem (mit einer Gleichung) dargestellt werden. □

Zeige: Für $p = 1$ ist S_p keine Untermannigfaltigkeit.

Proof. sadsad □

Exercise 4

Gegeben ist das folgende Minimierungsproblem

$$\begin{cases} \min f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

mit $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ und $g(x,y) = x^2+y^2+xy-1$. Da die Wurzelfunktion monoton ist, betrachten wir das einfachere Problem

$$\begin{cases} \min x^2+y^2 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} .$$

Wir führen die Lagrangefunktion ein:

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+xy-1).$$

Diese leiten wir ab und erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x+\lambda(2x+y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y+\lambda(2y+x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2+y^2+xy-1 = 0 \end{aligned}$$

1. Fall: $y \neq -\frac{1}{2}x$ und $y \neq -2x$.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+y} + \lambda &= 0 \\ \frac{2y}{2y+x} + \lambda &= 0 \\ x^2+y^2+xy-1 &= 0 \end{aligned}$$

Subtraktion der ersten beiden Gleichungen ergeben

$$2x(2y+x) - 2y(2x+y) = 0$$

und somit

$$2x^2 - 2y^2 = 0 \implies x = \pm y.$$

1. Setzt man $x = y$, so ergibt sich:

   $$3x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

   Daher $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Es gilt: $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ in beiden Fällen.

2. Für $x = -y$:

   $$x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

   Daher $x = 1, y = -1$ und $x = -1, y = 1$. In beiden Fällen ist $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems lautet demnach

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ x &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ x &= 1, y = -1, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x &= -1, y = 1, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2. Fall: $y = -\frac{1}{2}x$. Wir setzten das in die zweite Gleichung ein und erhalten$2y = 0$, sodass $x = y = 0$. Die Nebenbedingung ist nicht erfüllt.

3. Fall: $y = -2x$. Wir setzten das in die zweite Gleichung ein und erhalten$2x = 0$, sodass $x = y = 0$. Die Nebenbedingung ist nicht erfüllt.

Art der Extrema: Wir untersuchen die geänderte Hesse-Matrix $H(\lambda, x, y)$.

$$H(\lambda,x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2x+y & 2y+x \\ 2x+y & 2+2\lambda & \lambda \\ 2y+x & \lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix}$$

Wir setzen die kritischen Punkte ein:

$$H(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & \frac{6-\sqrt{6}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 3\sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{6-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$