TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 11.02.-15.02.2019

15. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(Untermannigfaltigkeiten, Integration über Untermannigfaltigkeiten)

Themen der großen Übung am 04.02.

Wir diskutieren, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ eindimensionale Untermannigfaltigkeiten sind:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}, \quad B := \mathbb{R} \times \{0\}, \quad C := \{(x, \sin(x)) \mid x \in]0, \pi[\},$$
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \text{ oder } y = -x\}.$$

Kompakta mit glattem Rand Wir betrachten die eindimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und bestimmen Tangential- und Normalraum am Punkt $p = (1,1)$. Dann zeigen wir, dass $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand ist, und bestimmen den äußeren Normalenvekor.

Kugeloberfläche: Wir bestimmen die Kugeloberfläche $\mathrm{Vol}_2(\mathbb{S}^2) = 4\pi$ mittels der Integration über Untermannigfaltigkeiten: Die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ in $\mathbb{R}^3$ hat die Karte

$$\Phi \colon (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

vgl. Beispiel 4.1.8.

Tutoriumsvorschläge

50. Aufgabe ⋆

Sei $f\colon I \to (0,\infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem (nicht entarteten) Intervall I. Wir definieren die Menge $M_f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2+y^2 = f(z)^2\}$. Zeigen Sie:

(i) M_f ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(ii) Bis auf eine 2-dimensionale Nullmenge kann man M_f durch die folgende Karte beschreiben:

$$\Phi\colon I \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \qquad (t,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} f(t)\cos(\varphi) \\ f(t)\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}.$$

(iii) Bestimmen Sie eine allgemeine Formel für $\mathrm{Vol}(M_f)$.

(iv) Seien nun $f\colon (0,2) \to (0,\infty), f(t) := t^2$. Skizzieren Sie die Menge M_f und wenden Sie dann Ihre Formel aus (iii) an, um die Oberfläche des Körpers zu bestimmen.

51. Aufgabe ⋆

Beweisen Sie Lemma 4.2.2: *Seien $\varphi\colon T \to V \subseteq M$ und $\tilde\varphi\colon \tilde T \to \tilde V \subseteq M$ zwei Karten der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und g, $\tilde g$ die zugehörigen Gram'schen Determinanten. Es gelte $V \cap \tilde V \neq \emptyset$, o.E. daher $V = \tilde V$ und $\tau\colon T \to \tilde T$ der zugehörige Kartenwechsel $\tilde\varphi = \varphi \circ \tau$. Dann gilt*

$$\tilde g(y) = |\det(D\tau(y))|^2 g(\tau(y)), \qquad y \in \tilde T.$$

52. Aufgabe

Wir definieren das sogenannte **Möbiusband** M als Bild der Abbildung

$$F\colon \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3, \qquad (t,s) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2t)(1+s\cos(t)) \\ \sin(2t)(1+s\cos(t)) \\ s\sin(t) \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass F eine Immersion ist.

(ii) Zeigen Sie, dass F auf geeigneten offenen Teilmengen zu einer C^∞-Karte von M eingeschränkt werden kann, und folgern Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.
Hinweis: Für die jeweiligen Umkehrabbildungen dürfen Sie annehmen, dass Sie stetig sind (das zeigt man mit trigonometrischen Überlegungen die etwas involviert sind).

(iii) Zeigen Sie, dass man bis auf eine Nullmenge M mit nur einer der Karten aus (ii) überdecken kann.

(iv) Bestimmen Sie eine Formel für das Volumen des Möbiusbandes.

Bemerkung: Für das Integral, das das Volumen angibt, scheint es keine geschlossene Form zu geben, es muss daher numerisch ausgewertet werden.

Hausaufgaben

Zur Erinnerung: Das 15. Übungsblatt kann als Bonusblatt auf beide Hälften des Hausaufgabenkriteriums angerechnet werden.

56. Aufgabe (7 Punkte)

Seien $k, d \in \mathbb{N}$ mit $k \leq d$. Sei $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ eine Familie von differenzierbaren Abbildungen $\varphi_i \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, deren Gram'sche Matrix wir definieren als $G(t) = (D\varphi(t))^\top (D\varphi(t))$. Die Determinante dieser Matrix nennen wir Gram'sche Determinante g.

(i) Zeigen Sie, dass $G(t) = [\langle \partial_i \varphi(t), \partial_j \varphi(t) \rangle]_{1 \leq i,j \leq k}$ gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt bezeichne. Beweisen Sie damit, dass $G(t)$ positiv semidefinit ist und $G(t)$ genau dann positiv definit ist, wenn die Vektoren $\partial_1 \varphi(t), \ldots, \partial_k \varphi(t)$ linear unabhängig sind.

(ii) Beweisen Sie *Formel von Cauchy-Binet* für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{d \times k}$:

$$\det(A^\top B) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq d} \det(A_{j_1,\ldots,j_k}) \det(B_{j_1,\ldots,j_k}),$$

wobei $A_{j_1,\ldots,j_k}$ die $k \times k$ Matrix ist, welche aus den Zeilen $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ von A (in dieser Reihenfolge!) besteht.

(iii) Beweisen Sie nun Lemma 4.2.1: Ist φ eine Karte der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^d$, so gilt für die Gram'sche Determinante g der Karte φ:

$$g = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq d} \left(\det \frac{\partial(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \ldots, \varphi_{j_k})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_k)} \right)^2.$$

57. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie Folgendes.

(i) Der Wert des Integrals einer Funktion f in einer Karte φ hängt nicht von der Wahl der Karte ab.

(ii) Die Abbildung $T_i \to \mathbb{R}, t \mapsto \alpha_i(\varphi(t))f(\varphi(t))\sqrt{g(\varphi(t))}$ ist unter den Voraussetzungen in Definition 4.2.3(ii) für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ über T_i integrierbar.

(iii) Sei $r \in (0, \infty)$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $rM = \{rm \mid m \in M\}$ ebenfalls eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion $f\colon rM \to \mathbb{R}$ ist genau dann über rM integrierbar, wenn die Abbildung $x \mapsto f(rx)$ über M integrierbar ist, und dann gilt

$$\int_{rM} f(y)\,\mathbb{S}(\mathrm{d}y) = r^k \int_M f(rx)\,\mathbb{S}(\mathrm{d}x).$$

Insbesondere ist für jede integrierbare Teilmenge A von M auch die Menge rA integrierbar mit $\mathrm{Vol}_k(rA) = r^k \mathrm{Vol}_k(A)$.

58. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Kompaktum mit glattem Rand, das den Nullpunkt in seinem Inneren enthält, und

$$\alpha(x) := \sphericalangle(x, \nu(x)), \quad x \in \partial A,$$

der Winkel zwischen dem Ortsvektor x und dem Normalenvektor $\nu(x)$ an ∂A. Man zeige

$$\int_{\partial A} \frac{\cos(\alpha(x))}{\|x\|^{d-1}}\,\mathbb{S}(\mathrm{d}x) = \omega_d,$$

wobei ω_d die Oberfäche der d-dimensionalen Einheitskugel (siehe Beispiel 4.2.13) ist.

Anleitung: Man wende den Gauß'schen Integralsatz an auf

$$F\colon \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d, \qquad F(x) := \frac{x}{\|x\|^d}$$

und die Menge $A_\varepsilon := \{x \in A \mid \|x\| \geq \varepsilon\}$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ an. Beachte, dass die folgende Identität gilt: $\cos(\alpha(x)) = \frac{\langle x, \nu(x)\rangle}{\|x\|\|\nu(x)\|}$.

Gesamtpunktzahl: 20