Aufgabe 1

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $t_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ von der Form

$$t_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{ikx}.$$

Bezeichne d_k die k-te Komponente von

$$DFT(f) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi i \cdot j \frac{0}{n}} \\ \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi i \cdot j \frac{1}{n}} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi i \cdot j \frac{n-1}{n}} \end{pmatrix}, \quad \text{also } d_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi i \cdot j \frac{k}{n}}.$$

Wir wollen zeigen, dass für beliebige $x_0, ..., x_{n-1}$ gilt, dass $t_n(x_j) = g(x_j) =: f_j$ für $j = 0, ..., n-1$. Dafür benötigen wir das folgende Lemma

Lemma 1. *Es gilt für alle ganzzahlige* $\alpha \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \cdot \frac{k\alpha}{n}} = 0.$$

Beweis. Wir erhalten eine geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \cdot \frac{k\alpha}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i \cdot \frac{\alpha}{n}}\right)^k = \frac{1 - (e^{2\pi i \cdot \frac{\alpha}{n}})^n}{1 - e^{2\pi i \cdot \frac{\alpha}{n}}} = \frac{1 - e^{2\pi i \cdot \alpha}}{1 - e^{2\pi i \cdot \frac{\alpha}{n}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi i \cdot \frac{\alpha}{n}}} = 0.$$

□

Nun ergibt sich für alle $m = 0, ..., n-1$ mit $x_m = 2\pi \frac{m}{n}$, dass

$$t_n(x_m) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi i \cdot j \frac{k}{n}} e^{ik2\pi \frac{m}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{2\pi i \frac{k}{n}(m-j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i \frac{m-j}{n}}\right)^k$$

Mit Lemma 1 ergibt sich, dass die letztere Summe $\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i \frac{m-j}{n}}\right)^k = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \neq m \\ n & \text{falls } j = m \end{cases}$. Beachte, dass m und j ganze Zahlen sind und daher das Lemma anwendbar ist. Wir erhalten das gewünschte Resultat

$$t_n(x_m) = \frac{1}{n} \cdot f_m \cdot n = f_m.$$

(b) Betrachten wir nun

$$u_n(x) := \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} d_k e^{ikx} + d_{n-k-1} e^{-i(k+1)x}.$$

Wir zeigen folgendes Lemma[1]:

[1]Dieses Lemma brauchen wir auch in Aufgabe 2, weshalb das Lemma einen Namen verdient.

Lemma 2 (Periodizitätlemma nach Kovalevskaya-Clifford). *Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt, dass*

$$e^{-2\pi ik\frac{m}{n}} = e^{2\pi i(n-k)\frac{m}{n}}.$$

Beweis. Es gilt nämlich, dass

$$e^{-2\pi ik\frac{m}{n}} = e^{2\pi im}e^{-2\pi ik\frac{m}{n}} = e^{2\pi i(m-k\frac{m}{n})} = e^{2\pi i(n-k)\frac{m}{n}}.$$

□

Nun gilt also mit Lemma 2 für $m, n \in \mathbb{N}$ und n gerade, dass

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} d_{n-k-1}e^{-2\pi i(k+1)\frac{m}{n}} \overset{\text{Lemma 2}}{=} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} d_{n-(k+1)}e^{2\pi i(n-(k+1))\frac{m}{n}} = \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} d_k e^{2\pi ik\frac{m}{n}}.$$

Damit ist für alle $m = 0, ..., n-1$:

$$u_n(x_m) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} d_k e^{2\pi ik\frac{m}{n}} d_{n-k-1}e^{-2\pi i(k+1)\frac{m}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{2\pi ik\frac{m}{n}}.$$

Beachte, dass n gerade ist. Ansonsten ist die Summe $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}$ nicht definiert.

Aufgabe 2

Wir sollen zeigen, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$ folgende Beziehung gilt:

$$DCT(f) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos[\frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2})0] \\ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos[\frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2})1] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos[\frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2})(n-1)] \end{pmatrix} = \frac{2n}{4n} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{4n-1} \tilde{f}_k e^{-2\pi ik\frac{0}{4n}} \\ \sum_{k=0}^{4n-1} \tilde{f}_k e^{-2\pi ik\frac{1}{4n}} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{4n-1} \tilde{f}_k e^{-2\pi ik\frac{n-1}{4n}} \end{pmatrix} = 2n\cdot \Big(DFT(\tilde{f})\Big)_{j=0}^{n-1}.$$

Der Vektor $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{4n}$ ist dabei definiert mit Komponenten

$$\tilde{f}_k := \begin{cases} f_j & \text{falls } k = 2j+1 \text{ oder } k = 4n-(2j+1) \text{ für ein } j = 0, ..., n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \forall k = 0, ..., 4n{-}1.$$

Wir zeigen folgende Beziehung: $\sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos[\frac{\pi}{n}(k+0.5)j] = 2n\frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{4n-1}\tilde{f}_k e^{-2\pi i k\frac{j}{4n}}$ für alle $j = 0,...,n-1$.

$$\begin{aligned}
2n\cdot\Big(DFT(\tilde{f})\Big)_j &= 2n\frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{4n-1}\tilde{f}_k e^{-2\pi i k\frac{j}{4n}} \\
&\Downarrow \tilde{f} \text{ verschwindet für gerade } k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1}\tilde{f}_{2k+1}e^{-2\pi i(2k+1)\frac{j}{4n}} \\
&\Downarrow \text{wegen } \tilde{f}_k = \tilde{f}_{4n-k} \text{ ergibt sich} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(e^{-2\pi i(2k+1)\frac{j}{4n}} + e^{-2\pi i(4n-(2k+1))\frac{j}{4n}}) \\
&\Downarrow \text{Lemma von Kovalevskaya-Clifford} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(e^{-2\pi i(2k+1)\frac{j}{4n}} + e^{2\pi i(2k+1)\frac{j}{4n}}) \\
&\Downarrow \text{der Kosinus ist definiert als der Realanteil von } e^{i\varphi} \text{ und } \Re(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + \overline{e^{i\varphi}}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f_k 2\cos\left[2\pi(2k+1)\frac{j}{4n}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos\left[\frac{\pi}{n}(k+0.5)j\right]
\end{aligned}$$

Genau dies wollten wir zeigen.

Aufgabe 3

(i) Wir wollen eine Näherungsformel für das Doppelintegral

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

finden. Seien $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Dazu definiere $U(v) := \int_a^b f(x,v)dx$. Für beliebiges $v\in[c,d]$ nähern wir $U(v)$ mithilfe der Simpsonsregel an:

$$U(v) = \int_a^b f(x,v)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0,v)+4f(x_1,v)+f(x_2,v)],$$

wobei $h = \frac{b-a}{2}$ and $x_k = a + k\cdot h$ für $k = 0,1,2$. Als nächstes wollen wir $\int_c^d U(v)dv$ durch die Simpsonsregel approximieren. Das ist dann

$$\int_c^d U(v)dv \approx \frac{\tilde{h}}{3}[U(v_0)+4U(v_1)+U(v_2)]$$

für $\tilde{h} = \frac{d-c}{2}$ und $v_k = c + k \cdot \tilde{h}$ für $k = 0, 1, 2$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_c^d U(v)dv \approx \frac{\tilde{h}}{3}[U(v_0) + 4U(v_1) + U(v_2)] =& \frac{\tilde{h}}{3}\left(\frac{h}{3}[f(x_0, v_0) + 4f(x_1, v_0) + f(x_2, v_0)]\right.\\ &+ 4\frac{h}{3}[f(x_0, v_1) + 4f(x_1, v_1) + f(x_2, v_1)]\\ &\left.+ \frac{h}{3}[f(x_0, v_2) + 4f(x_1, v_2) + f(x_2, v_2)]\right)\end{aligned}$$

Wir erhalten somit als Quadraturformel

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \int_c^d U(v)dv \approx \frac{h\tilde{h}}{9}&[f(x_0, v_0) + 4f(x_1, v_0) + f(x_2, v_0)\\ &+4f(x_0, v_1) + 16f(x_1, v_1) + 4f(x_2, v_1)\\ &+f(x_0, v_2) + 4f(x_1, v_2) + f(x_2, v_2)]\end{aligned}$$

(ii) Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$|\mathcal{I}(U) - \mathcal{Q}_2(U)| \leqslant \frac{\tilde{h}^4}{3!}\|U^{(3)}\|_\infty$$

(iii) Wir benutzen die Formel in Aufgabe 3(i). Es soll

$$\int_1^3 \int_0^1 (xy - 1)^3 dxdy$$

berechnet werden. Dazu ist

$$\tilde{h} = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ und } h = \frac{1}{2}.$$

Die Sützstellen sind $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ und $v_0 = 1, v_1 = 2, v_3 = 3$. Es gilt

$$\begin{gathered}f(x_0, v_0) = -1, f(x_0, v_1) = -1, f(x_0, v_2) = -1\\ f(x_1, v_0) = -0.125, f(x_1, v_1) = 0, f(x_1, v_2) = 0.125\\ f(x_2, v_0) = 0, f(x_2, v_1) = 1, f(x_2, v_2) = 8\end{gathered}$$

Wir setzen die Werte in die Formel ein und wir erhalten

$$\frac{1}{18}(-1 - 0.5 + 0 - 4 + 4 - 1 + 0.5 + 8) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$