Analysis I

Prof. Dr. Dirk Ferus

Wintersemester 2006/07

Version vom 10.04.2008

Inhaltsverzeichnis

0 Literatur

Zur Analysis

M. Barner/F. Flohr: Analysis I. Walter de Gruyter.

O. Forster: Analysis I. Differential und Integralrechnung in einer Variablen. Vieweg.

H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Teubner.

S. Hildebrandt: Analysis I, Springer 2002.

S. Lang: Analysis I, Addison-Wesley, 1968.

W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill 1964

Zum Aufbau des Zahlsystems aus den natürlichen Zahlen

E. Landau: Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930

Zur Geschichte der Mathematik (und der Analysis)

M. Cantor: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 4 Bände, um 1900

N. Bourbaki: Elements of the History of Mathematics, Springer

M. Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Pres 1972

Die historische Entwicklung der Analysis wird in der heute üblichen (und auch in diesem Skriptum gebotenen) Darstellung nur dann reflektiert, wenn man "reflektieren" wörtlich als "spiegeln" versteht. Ein Lehrbuch der Analysis mit der historischen Reihenfolge ist das sehr lesenswerte

E. Hairer/G. Wanner: Analysis by Its History, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1995

Zur Integration durch elementare Funktionen

R. Risch: The problem of integration in finite terms. Trans. AMS 139 (1969), 167-189

M. Rosenlicht: Integration in finite terms. American Math. Monthly 9 (1972), 963-972

Das Griechische Alphabet

α	A	Alpha	ι	I	Iota	ρ	P	Rho
β	B	Beta	κ	K	Kappa	σ	$\sum$	Sigma
γ	Γ	Gamma	λ	Λ	Lambda	τ	T	Tau
δ	Δ	Delta	μ	M	My	υ	Y	Ypsilon
ϵ, ε	E	Epsilon	ν	N	Ny	ϕ, φ	Φ	Phi
ζ	Z	Zeta	ξ	Ξ	Xi	χ	X	Chi
η	H	Eta	o	O	Omikron	ψ	Ψ	Psi
θ, ϑ	Θ	Theta	π	Π	Pi	ω	Ω	Omega

1 Die reellen Zahlen

Wir setzen die reellen Zahlen als gegeben voraus und schreiben zunächst auf, welche ihrer Eigenschaften wir (ausschließlich) benutzen werden. Wir tun das in Form von „Axiomen“, die wir in drei Gruppen zusammenfassen:

1. Die Rechenregeln für Addition und Multiplikation (Körperaxiome).
2. Die Rechenregeln für Ungleichungen (Anordnungsaxiome).
3. Die Vollständigkeit. Diese Gruppe enthält nur ein Axiom, das wir bis zum Abschnitt 5.1 zurückstellen. Es unterscheidet die reellen von den rationalen Zahlen und wird nötig, wenn wir über Grenzwerte sprechen wollen.

Man kann auf einem sehr viel niedrigeren Niveau ansetzen, mit den sogenannten Peano-Axiomen für die *natürlichen* Zahlen und aus diesen die ganzen, rationalen und reellen Zahlen konstruieren und ihre Eigenschaften beweisen; aber das kostet mehr Zeit, als wir zur Verfügung haben. Vergleichen Sie dazu das hübsche Büchlein von Edmund Landau.

1.1 Die Körperaxiome

Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. Wir setzen voraus, dass darin eine Addition und eine Multiplikation gegeben sind, die je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ eine neue reelle Zahl $a + b$ bzw. ab zuordnen und folgende Eigenschaften haben:

1. **Axiome für die Addition**

   (A1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt
   $$a + (b + c) = (a + b) + c. \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$

   (A2) Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

   (i) $a + 0 = a$. (Neutrales Element der Addition)

   (ii) Es gibt genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a + b = 0$. (Additives Inverses)

   (A3) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist
   $$a + b = b + a. \quad \text{(Kommutativgesetz)}$$

2. **Axiome für die Multiplikation**

   (M1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt
   $$a(bc) = (ab)c. \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$

   (M2) Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

   (i) $a1 = a$. (Neutrales Element der Multiplikation)

   (ii) Falls $a \neq 0$, gibt genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $ab = 1$. (Multiplikatives Inverses)

   (M3) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist
   $$ab = ba. \quad \text{(Kommutativgesetz)}$$

3. **Distributivgesetz**

   (D) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt
   $$(a + b)c = ac + bc.$$

Das additive Inverse von a bezeichnen wir mit $-a$, das multiplikative Inverse mit $\frac{1}{a}$ oder a^{-1}. Beachten Sie, dass nur für $a \neq 0$ ein multiplikatives Inverses existiert, so dass $\frac{1}{0}$ nicht erklärt ist.

Statt der Menge der reellen Zahlen hätten wir zum Beispiel auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen oder die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen nehmen können, auch dafür gelten die vorstehenden Axiome. Allgemein nennt man eine Menge, in der eine „Addition" und eine „Multiplikation" mit den obigen Axiomen erklärt sind, einen *Körper*.

Aus diesen Axiomen folgen die Ihnen vertrauten Rechenregeln für die beiden Grundrechenarten. Wir geben zwei Beispiele

Beispiel 1. Zunächst gilt
$$0c \underset{A2.i}{=} (0 + 0)c \underset{D}{=} 0c + 0c. \tag{1}$$

Jetzt „ziehen wir auf beiden Seiten $0c$ ab".

$$0 \underset{A2.ii}{=} 0c + (-(0c)) \underset{(1)}{=} (0c + 0c) + (-(0c)) \underset{A1}{=} \quad 0c + (0c + (-(0c))) \underset{A2.ii}{=} 0c + 0 \underset{A2.i}{=} 0c$$

Also haben wir bewiesen, dass für alle $c \in \mathbb{R}$

$$0c = 0. \tag{2}$$

$\square$

Beispiel 2.

$$ab + (-a)b \underset{D}{=} (a + (-a))b \underset{A2.ii}{=} 0b \underset{(2)}{=} 0.$$

Andrerseits ist

$$ab + (-(ab)) \underset{A2.ii}{=} 0.$$

Aus der Eindeutigkeit im Axiom A2.ii folgt daher für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$(-a)b = -(ab).$$

$\square$

Weiter kann man beweisen, dass die Gleichung

$$ax = b$$

für $a \neq 0$ und beliebiges b genau eine Lösung x hat, nämlich $x = b(a^{-1})$, wofür wir auch $\frac{b}{a}$ schreiben.

Ebenso schreiben wir $a - b$ für $a + (-b)$.

Weitere Beispiele für Rechenregeln, die aus den Axiomen folgen:

$$\begin{gathered} -(-a) = a, \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \\ ab = 0 \implies a = 0 \text{ oder } b = 0, \\ (-a) + (-b) = -(a + b). \end{gathered}$$

1.2 Die Anordnungsaxiome

Die Anordnungsaxiome regeln das Rechnen mit Ungleichungen. Wir setzen voraus, dass für je zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Aussage „a ist kleiner als b“, geschrieben $a < b$ entweder wahr oder falsch ist, und dass die folgenden Axiome gelten:

Anordnungsaxiome

(O1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden Aussagen wahr:

$$a < b, \qquad b < a, \qquad a = b. \quad \text{(Trichotomie)}$$

(O2) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a < b \text{ und } b < c \implies a < c. \quad \text{(Transitivität)}$$

(O3) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a < b \implies a + c < b + c. \quad \text{(Additive Monotonie)}$$

(O4) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c$ gilt

$$a < b \implies ac < bc. \quad \text{(Multiplikative Monotonie)}$$

Reelle Zahlen a mit $0 < a$ heißen *positiv*, solche mit $a < 0$ *negativ*.

Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$ und sagt „b ist größer als a“.

Man schreibt $a \leq b$, gelesen „a kleiner (oder) gleich b“, falls $a < b$ oder $a = b$. Entsprechend ist $a \geq b$ erklärt.

Wieder folgt aus diesen Axiomen eine Fülle weiterer mehr oder weniger bekannter Regeln.

Beispiel 3. Wir zeigen

$$a > 0 \implies -a < 0.$$

Nach (O3) folgt nämlich aus der Voraussetzung $0 < a$, dass

$$0 + (-a) < a + (-a),$$

also $-a < 0$. Ebenso zeigt man

$$a < 0 \implies -a > 0.$$

□

Beispiel 4. Bei Multiplikation mit negativen Zahlen kehren Ungleichungen sich um:

$$x < y \text{ und } a < 0 \implies ax > ay.$$

Nach dem letzten Beispiel ist $-a > 0$ und daher nach (O4)

$$(-a)x < (-a)y, \text{ d.h. } -ax < -ay.$$

Nach (O3) können wir dazu $ax + ay$ addieren und erhalten

$$-ax + ax + ay < -ay + ax + ay,$$

also $ay < ax$ wie behauptet.

□

Beispiel 5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist $a > 0$, so folgt aus (O4)

$$0 = 0a < aa =: a^2.$$

Ist andrerseits $a < 0$, so folgt aus dem letzten Beispiel

$$a^2 = aa > 0a = 0.$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\boxed{a \neq 0 \implies a^2 > 0.}$$

Insbesondere ist $1 = 1 \cdot 1 > 0$ und daher $-1 < 0$.

□

Beispiel 6. Nur nicht-negative Zahlen $b \geq 0$ können nach dem vorstehenden Beispiel eine Quadratwurzel in $\mathbb{R}$ besitzen. Genauer: Die Gleichung

$$x^2 = b \tag{3}$$

hat allenfalls für $b \geq 0$ Lösungen. Wieviele? Ist $a^2 = b$, so ist natürlich auch $(-a)^2 = b$, und wir behaupten, dass das alle möglichen Lösungen sind, d.h. dass die Gleichung (3) höchstens 2 Lösungen hat. Ist nämlich

$$a^2 = b \text{ und } c^2 = b,$$

so folgt

$$0 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c).$$

Also ist $c = a$ oder $c = -a$. Insbesondere hat die Gleichung für nicht-negatives b höchstens eine nicht-negative Lösung $a \geq 0$. Gegebenenfalls nennt man die dann die *(Quadrat)Wurzel* $\sqrt{b}$ aus b. Dass wirklich jedes reelle $b \geq 0$ eine Quadratwurzel besitzt, werden wir später sehen.

□

Ein Körper, in dem eine „$<$"-Beziehung mit den obigen Axiomen gegeben ist, nennt man einen *angeordneten Körper*. In den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ hat man „dieselbe" Anordnung wie in den reellen Zahlen gegeben. Aber im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen gibt es keine Anordnung mit den obigen Axiomen. Sonst wäre nämlich nach dem eben Bewiesenen $0 > -1 = i^2 > 0$. Widerspruch!

Mittels „$<$" kann man den Betrag reeller Zahlen definieren:

Definition 7 (Betrag). Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ liest man „a absolut" oder „Betrag a".

Offenbar ist

$$|-a| = |a|.$$

Ist $a < 0$, so ist $-a > 0$, also

$$a < 0 < -a = |a|.$$

Ist andrerseits $a \geq 0$, so ist $a \leq |a|$, in Wahrheit nämlich $a = |a|$. Also gilt für alle a, dass $a \leq |a|$. Ebenso zeigt man $-|a| \leq a$ für alle a. Damit gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Wir führen einige weitere Eigenschaften des Betrags als Satz auf:

Satz 8 (Betrag). *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} |a| \geq 0 \textit{ mit } |a| = 0 \textit{ genau dann, wenn } a = 0,\\ |ab| = |a|\,|b|,\\ |a+b| \leq |a| + |b|. \quad \textit{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung, der Beweis der beiden anderen Aussagen ist sehr leicht.

Aus $a \leq |a|$ (und $b \leq |b|$) folgt

$$a + b \leq |a| + |b|,$$

und aus $-a \leq |a|$ (und $-b \leq |b|$) folgt

$$-(a + b) \leq |a| + |b|,$$

Eine der beiden linken Seiten ist aber $= |a + b|$, und damit ist die Dreiecksungleichung bewiesen. □

Für das Abschätzen von Differenzen ist folgende Ungleichung nützlich:

Korollar 9. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$||b| - |a|| \leq |b - a|.$$

Beweis. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a|,$$

also

$$|b| - |a| \leq |b - a|.$$

Daraus folgt unter Vertauschung von a und b

$$-(|b| - |a|) = |a| - |b| \leq |a - b| = |b - a|.$$

Wieder ist $||b| - |a|| = (|b| - |a|)$ oder $||b| - |a|| = -(|b| - |a|)$, und aus einer der beiden letzten Ungleichungen ergibt sich die Behauptung. □

Mit der Anordnungsbeziehung definiert man wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Definition 10 (Intervalle). Eine Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ heißt ein *Intervall*, wenn sie mit je zwei „Punkten“ auch alle dazwischen liegenden enthält:

$$J \text{ Intervall} \quad \iff \forall_{u,v,x \in \mathbb{R}} (u < x < v \text{ und } u \in J \text{ und } v \in J \implies x \in J).$$

Beispiel 11. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Ist $b = a$, so besteht $[a, b]$ nur aus dem Punkt a, ist $b < a$, so ist $[a, b]$ die leere Menge $\emptyset$. In jedem Fall ist $[a, b]$ ein Intervall. Sind nämlich $u, x, v \in \mathbb{R}$ mit $u \in [a, b], v \in [a, b]$ und $u < x < v$ so folgt

$$a \le u < x < v \le b,$$

also $a \le x \le b$ nach der Transitivität.

Ebenso sieht man, dass die Mengen

$$\begin{aligned}]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, \\ ]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \le b\}, \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x < b\}, \\ ]a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}, \\ [a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x\}, \\ ]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}, \\ ]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \le b\}, \\ ]-\infty, \infty[&:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Intervalle sind.

Man nennt $[a, b]$ das *abgeschlossene* oder *kompakte* Intervall zwischen a und b.

Intervalle der Form $]., .[$ heißen *offen*, Intervalle der Form $[., .[$ oder $]., .]$ *halboffen*.

Es ist wahr, aber aus den bisher angeführten Axiomen noch nicht beweisbar, dass *jedes* Intervall in $\mathbb{R}$ von einem dieser Typen ist.

$\square$

Übungsaufgabe. Finden Sie die Mathematische Fachbibliothek und in dieser das Analysis-Buch von S. Hildebrandt. Lesen Sie darin Seite 1-8.

1.3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Eine wichtige Teilmenge der reellen Zahlen bilden die natürlichen Zahlen, die wir jetzt definieren wollen.

Definition 12. Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, wenn für sie gilt:

1. $0 \in N$
2. Ist $a \in N$, so ist auch $a + 1 \in N$.

Beispiel 13. Die Menge $N = \mathbb{R}$ ist trivialerweise induktiv.

Weil $0 < 1$, ist $a < a + 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Daher ist $N = [0, +\infty[$ eine induktive Menge.

□

Es ist klar, dass eine induktive Menge mindestens die reellen Zahlen $0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots$ enthalten muss: Eben die natürlichen Zahlen nach unserem naiven Verständnis.

Lemma 14. *Der Durchschnitt von beliebig vielen induktiven Mengen ist wieder induktiv.*

Beweis. Sei I eine Menge und $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie von induktiven Mengen und

$$N := \bigcap_{i\in I} N_i := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in N_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Weil $0 \in N_i$ für alle $i \in I$, ist $0 \in N$.

Ist weiter $a \in N$,also $a \in N_i$ für alle $i \in I$, so ist auch $a + 1$ in N_i für alle $i \in I$, also $a + 1 \in N$. □

Definition 15 (Natürliche Zahlen). Die Menge der *natürlichen Zahlen* ist definiert als Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\mathbb{R}\supset N \text{ induktiv}} N.$$

Sie ist also die kleinste induktive Menge. Insbesondere ist $n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weil $[0, \infty[$ induktiv ist.

Bemerkung. Die Literatur ist sich nicht einig, ob $\mathbb{N}$ die 0 einschließt oder nicht. Die DIN-Norm DIN 5473 oder der *Forster* meinen "ja", und das wollen wir hier übernehmen. Der *Barner/Flohr* bezeichnet diese Menge mit $\mathbb{N}_0$.

Definition 16. Die Menge

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

heißt die Menge der *ganzen Zahlen*.

Die Menge

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \,|\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$$

heißt die Menge der *rationalen Zahlen*.

Satz 17 (Vollständige Induktion). *Sei $W \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

1. $0 \in W$
2. *Ist $a \in W$, so ist auch $a + 1 \in W$.*

Dann gilt $W = \mathbb{N}$.

Beweis. Der Beweis ist trivial: Offenbar ist W eine induktive Menge. Weil $\mathbb{N}$ nach Definition in jeder induktiven Menge enthalten ist, ist daher $\mathbb{N} \subset W$. Nach Voraussetzung ist aber $W \subset \mathbb{N}$, also $W = \mathbb{N}$. □

Dieser Satz ist ein wichtiges Beweismittel, er ermöglicht Beweise über Aussagen für natürliche Zahlen durch die sogenannnte

Vollständige Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Kann man zeigen, dass sie

1. für $n = 0$ wahr ist und
2. für $n + 1$ wahr ist, falls sie für n wahr ist,

so folgt, dass sie für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist: Man setze einfach

$$W := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Dann ist $W \subset \mathbb{N}$ induktiv, also $W = \mathbb{N}$ nach Satz 17.

Für Beispiele zur vollständigen Induktion ist es hilfreich, Addition und Multiplikation in den reellen Zahlen nicht nur für zwei, sondern für eine beliebige Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von Summanden bzw. Faktoren zu haben.[1] Die offensichtlichen Verallgemeinerungen von Assoziativgesetz, Kommutativgesetz und Distributivgesetz auf diese Fälle beweist man ebenfalls mit vollständiger Induktion.

Wir stellen hier die Eigenschaften des Summen- und Produktzeichens zusammen:

Seien $m \leq n$ ganze Zahlen und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq k \leq n$ sei a_k eine reelle Zahl. Dann setzt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m a_{m+1} \ldots a_n.$$

Ist $m > n$, so vereinbart man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0,$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1.$$

[1] Die exakte Definiton dieser Operationen über den sogenannten *Rekursionssatz* benutzt selbst die vollständige Induktion. Wir gehen darauf nicht ein, vgl. *Barner/Flohr*, §2.3

Insbesondere setzt man für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a = a \cdot \ldots \cdot a$$

und erhält

$$a^0 := 1.$$

Zurück zur vollständigen Induktion. Wir geben Beispiele:

Beispiel 18. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 0$. Nach Definition ist

$$\sum_{k=1}^{0} k = 0.$$

Andrerseits ist

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0.$$

Also ist die Aussage für $n = 0$ wahr.

Induktionsschritt: $n \to (n+1)$. Wir nehmen an, dass die Aussage für n wahr sei, dass also gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zu zeigen: Dann ist sie auch für $n+1$ gültig, d.h. es gilt auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Das zeigen wir so:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1).$$

Nach unserer Induktionsannahme können wir den ersten Summanden rechts ersetzen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Beispiel 19 (Bernoullische Ungleichung). Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis durch vollständige Induktion.

$\underline{n = 0.}$ Dann ist

$$(1+x)^0 = 1,$$
$$1 + 0 \cdot x = 1.$$

Also stimmt die Behauptung.

$\underline{n \to (n+1).}$ Es gelte bereits

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dann folgt durch Multiplikation mit der (positiven!) Zahl $1+x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

$\square$

Als nächstes Beipiel wollen wir die allgemeine Binomialformel beweisen. Dafür noch zwei Definitionen:

Definition 20 (Fakultät). Wir definieren n *Fakultät* durch

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere ist $0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$. Durch vollständige Induktion(!) kann man zeigen, dass man $n!$ interpretieren kann als die Anzahl der Möglichkeiten, n Dinge linear anzuordnen (=Anzahl der Permutationen von n Elementen).

Definition 21 (Binomialkoeffizienten). Für $n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$ definieren wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Das hat im Zähler wie im Nenner ein Produkt von k Faktoren. Wir setzen weiter

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$\binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n.$$

Weiter ist für alle $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{4}$$
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{5}$$

Für $1 \leq k \leq n$ ist nämlich

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k) \ldots 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k},$$

und das beweist (4) in diesem Fall. Die Fälle $k = 0, k < 0, k > n$ kann man im Kopf nachprüfen.

Die Formel (5) beweist man ähnlich: zunächst mit Hilfe von (4)für $2 \leq k \leq n$, und dann die Fälle $k = 1, k = 0, k < 0$ und $k = n + 1, k > n + 1$ im Kopf.

Die Formel (5) ist eine „Rekursionformel“: Wenn man alle $\binom{n}{k}$ für ein gewisses n schon hat, so kann man daraus sehr einfach die $\binom{n+1}{k}$ berechnen, nämlich gerade so, wie man es beim Pascalschen Dreieck tut:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Das liefert also gerade die Binomialkoeffizienten.

Satz 22 (Binomialsatz). *Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion:

$n = 0.$

$$(a+b)^0 = 1$$
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Also gilt die Formel für $n = 0$.

$n \to (n+1).$ Wir nehmen also an, dass

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{6}$$

für ein bestimmtes n gilt, und wollen zeigen, dass dann

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \tag{7}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\underset{(6)}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&\underset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k \\
&\underset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k \\
&\underset{(7)}{=} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}$$

Daraus folgt (7). Überlegen Sie sich, dass bei der mit (*) gekennzeichneten Gleichung die zweiten Summen auf beiden Seiten gleich sind, dass also die „Indexverschiebung“ den Wert der Summe nicht ändert. Bei der Gleichheit (**) haben wir benutzt, dass $\binom{n}{n+1} = 0 = \binom{n}{-1}$. □

Beispiel 23. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Beweis. Beim Ausmultiplizieren von

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ Faktoren}}$$

erhält man die Summe von allen Produkten, die aus k Klammern den Faktor b und aus $(n-k)$ Klammern den Faktor a auswählen. Für festes k liefert das gerade $\binom{n}{k}$-mal das Monom $a^{n-k}b^k$. So viele Möglichkeiten gibt es also zur Auswahl von k „b-Klammern“.

□

Eine ganze Reihe von Eigenschaften der natürlichen Zahlen, die Ihnen selbstverständlich vorkommen, sind auf dem Hintergrund unserer Definition gar nicht selbstverständlich:

- Warum sind die Summe oder das Produkt von zwei natürlichen Zahlen wieder eine solche?
- Warum folgt aus $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$, dass $n - m \in \mathbb{N}$?

Diese Aussagen lassen sich aber (mit vollständiger Induktion) aus unseren Axiomen beweisen, vgl. *Barner/Flohr.*

Als Konsequenz ergibt sich, dass für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \geq n_0\right\} = \left\{m + n_0 \;\middle|\; m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Hieraus folgt ziemlich leicht eine öfter benutzte

Variante der vollständige Induktion: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und sei $B(n)$ eine Aussage, die für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ wahr oder falsch ist. Kann man zeigen, dass sie

1. für $n = n_0$ wahr ist und
2. für $n + 1$ wahr ist $(n \geq n_0)$, falls sie für n wahr ist,

so folgt, dass sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ wahr ist.

Etwas kniffliger, aber ebenfalls mit der Methode der vollständigen Induktion, zeigt man:

Satz 24 (Wohlordnungsprinzip). *Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.*

Beweis. Vgl. Barner/Flohr. □

Dagegen läßt sich der folgende Satz aus den bisherigen Axiomen für die reellen Zahlen **nicht** beweisen, der Körper der hyperreellen Zahlen der Nonstandard-Analysis ist ein angeordneter, aber nicht archimedisch-angeordneter Körper. Wir führen den Satz hier an, weil er manchmal als weiteres Anordnungsaxiom fungiert. Vergleichen Sie den Abschnitt 5.1.

Satz 25 (Archimedisches Prinzip). *Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$x < n.$$

Für den Beweis vergleiche Satz 67.

Wir sind also mit der Axiomatik der reellen Zahlen noch nicht fertig, aber fürs erste ist das nicht weiter schlimm: Über weite Strecken scheint es, als könnten wir mit den bisherigen Axiomen schon alles tun, was wir mit den reellen Zahlen vorhaben. Also machen wir erst einmal unbeschwert weiter.

Im Kapitel 5 werden wir dann allerdings mit der dringenden Notwendigkeit konfrontiert, unser Axiomensystem durch das *Vollständigkeitsaxiom* zu vervollständigen.

2 Die komplexen Zahlen

Weil wir bewiesen haben, dass das Quadrat einer reellen Zahl immer ≥ 0 ist, gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$. Die komplexen Zahlen erhält man durch „Erweiterung" der reellen Zahlen um Ausdrücke der Form $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und i eine Zahl(?) mit

$$i^2 = -1$$

ist. Das klingt mysteriös, wenn nicht gar unsinnig. Woher soll denn dieses i kommen?

Seit dem 16. Jahrhundert benutzten Mathematiker die komplexen Zahlen und zwar nicht um $x^2 = -1$ lösen zu können, das wäre ihnen wirklich als unsinnig erschienen. Vielmehr traten die „imaginären", also „(nur) eingebildeten Zahlen" zunächst als Hilfskonstruktion bei der Lösung von Gleichungen *dritten* Grades der Form $x^3 + px + q = 0$ auf. Dafür hatte man folgende Formel gefunden: Man bildet $D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$ und daraus

$$u_\pm := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}}.$$

Dann gibt $x_1 = u_+ + u_-$ eine Lösung. Sie wissen aus der Schule, dass man dann durch Division mit $(x - x_1)$ auf eine quadratische Gleichung kommt, die „im allgemeinen" zwei weitere Nullstellen der Gleichung liefert.

Beispiel 26 (Kubische Gleichungen und komplexe Zahlen). Wir betrachten

$$x^3 - 15x - 4 =: x^3 + px + q = 0.$$

Nach den Cardanischen Formeln bildet man zunächst

$$D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = (-5)^3 + (-2)^2 = -121$$

und

$$u_\pm = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}} = \sqrt[3]{2 \pm 11i} = 2 \pm i.$$

Daraus erhalten wir eine makellos reelle Nullstelle

$$x_1 = u_+ + u_- = 4.$$

□

Auch Leonhard Euler (1707-1783) benutzte komplexe Zahlen auf diese Weise und fand seine berühmte Formel

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x.}$$

Die hat wiederum sehr praktische Konsequenzen: Wegen

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)\end{aligned}$$

sind die etwas komplizierten Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

nichts anderes als die simple (allerdings komplexe) Formel

$$e^{ix+iy} = e^{ix}e^{iy}.$$

Vergleichen Sie dazu die Abschnitte 8.6 und 10.9.

Seit Mitte des 19. Jahrhunderts gibt es komplexe Zahlen nun aber doch! Sie sind ebenso real wie die reellen Zahlen (– oder ebenso nur ein Produkt des menschlichen Geistes wie die letzteren). C.F. Gauß hat klargestellt, dass, wenn man sich die reellen Zahlen als Punkte auf dem Zahlenstrahl vorstellt, die komplexen Zahlen einfach die Punkte einer Ebene sind, die die reelle Zahlengerade enthält. Die „Zahl" $x + iy$ ist dann einfach der Punkt mit den Koordinaten (x, y). Man muss nur erklären, wie man Punkte in der Ebene addiert und multipliziert (so wie man das früher für Punkte auf der Zahlengeraden tun musste).

Definition 27 (Der Körper $\mathbb{C}$). Sei

$$\mathbb{C} := \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen. Wir definieren in $\mathbb{C}$ eine *Addition*, also eine Abbildung

$$. + . : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

vermöge

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und eine *Multiplikation* vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Dann rechnet man nach, dass die Körperaxiome (A1) - (A3), (M1) - (M3) und (D) gelten. Insbesondere ist $(0, 0)$ das neutrale Element der Addition, $(1, 0)$ das neutrale Element der Multiplikation und für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist das multiplikative Inverse gegeben durch

$$(x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}).$$

$\mathbb{C}$ mit diesen Operationen heißt der *Körper der komplexen Zahlen.*

Die Einbettung der reellen Zahlen in die komplexen Zahlen. Nach der bisherigen Definition ist $\mathbb{R} \cap \mathbb{C} = \emptyset$. Aber man hat

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0).$$

Schreibt man also einfach x_1 statt $(x_1, 0)$, so fallen reelle und komplexe Rechenoperationen zusammen. Wir können daher die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen interpretieren, indem wir zwischen x und $(x, 0)$ nicht mehr unterscheiden. Dann gilt für $x_1, y_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zum Beispiel

$$(x_1, y_1)x_2 = (x_1, y_1)(x_2, 0) = (x_1 x_2, x_2 y_2).$$

Setzen wir weiter

$$i := (0, 1),$$

so gilt

$$\boxed{(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)y = x + iy.}$$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich also eindeutig in der Form

$$z = x + iy$$

mit reellen(!) x und y schreiben. Man nennt

$$x = \operatorname{Re} z$$

den *Realteil* und

$$y := \operatorname{Im} z$$

den *Imaginärteil* von z. Der Imaginärteil ist also *reell.* Zahlen der Form iy mit $y \in \mathbb{R}$ heißen auch *(rein) imginär.*

Wunderbarer Weise ist nun nach der Definition der Multiplikation

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0^2 - 1^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl. Für komplexe Zahlen gibt es keine Anordnung mit den Axiomen (O1) - (O4), denn dann wäre $i^2 > 0$. Aber man definiert für $z \in \mathbb{C}$ (im Vorgriff auf die später zu definierende Wurzelfunktion) den *Betrag* als

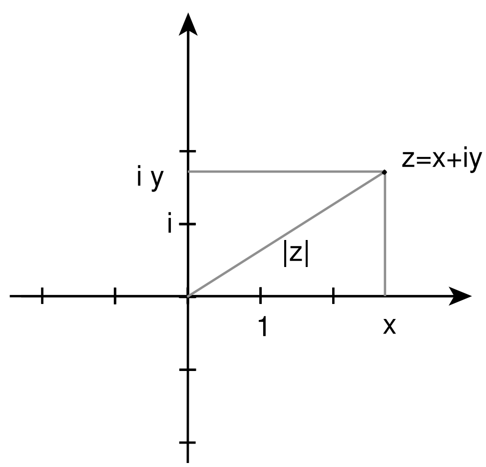
$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Weil der Betrag reell ist, machen Ungleichungen über den Betrag komplexer Zahlen Sinn und werden viel benutzt. Für den Betrag kann man die Eigenschaften aus Satz 8 nachweisen:

Satz 28. *Für alle* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$|z| \geq 0 \textit{ mit Gleichheit nur für } z = 0,$$
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Wir kommen darauf später zurück und schließen mit einem Bild der sogenannten *Gaußschen Zahlenebene*:



3 Mengen und Abbildungen

Wir setzen den (naiven) Mengenbegriff und die elementaren Begriffe und Bezeichnungsweisen der Mengenlehre voraus. Sie sollten die in dem folgenden Beispiel zusammengestellten Aussagen verstehen können.

Beispiel 29. Seien X, Y, Z Mengen.

1. $X \subset Y \iff \forall_{x \in X}\, x \in Y$.
2. $X \subset Y \wedge Y \subset Z \implies X \subset Z$.
3. $X \subset Y \iff Y \supset X$.
4. $X \subset X$.
   So wollen wir das Symbol „$\subset$" verwenden, es schließt mögliche Gleichheit ein. Andernorts finden Sie dafür „$\subseteq$".
5. $X \subset Y \wedge X \neq Y \iff X \subsetneq Y$.
6. $X \cap Y \neq \emptyset \iff \exists_x\, x \in X \wedge x \in Y$.
7. $X \cup Y = \{x \,|\, x \in X \vee x \in Y\}$.
8. Ist A eine Menge und für jedes $\alpha \in A$ eine Menge X_α gegeben, so nennt man $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ auch eine *Familie von Mengen mit Indexmenge A*.
   $$\bigcup_A X_\alpha = \{x \,|\, \exists_{\alpha \in A}\, x \in X_\alpha\}.$$
9. $\mathcal{P}(X) := \{Y \,|\, Y \subset X\}$ heißt die *Potenzmenge* von X.
10. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
11. $x \in X \iff \{x\} \subset X \iff \{x\} \in \mathcal{P}(X)$.
12. $X \times Y := \{(x, y) \,|\, x \in X \wedge y \in Y\}$ heißt das *kartesische Produkt* der Mengen X und Y. Seine Elemente sind die *geordneten Paare* (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$.
    Analog definiert man das kartesische Produkt von mehr als zwei Mengen:
    $$X_1 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in X_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$
13. Mit $\#X$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente oder die *Mächtigkeit* von X. Zum Beispiel ist $\#\{1, \ldots, n\} = n$ oder $\#\mathbb{N} = \infty$.

$\square$

Eine *Abbildung*

$$f : X \to Y$$

von der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift, die *jedem* Element $x \in X$ *genau ein* Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben auch

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x),$$

weil das die Möglichkeit gibt, die Wirkung von f zu beschreiben, etwa

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Eine formalere Definition sieht so aus:

Seien X, Y Mengen. Eine *Abbildung von X nach Y* ist eine Teilmenge $\Gamma \subset X \times Y$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ gibt es ein und nur ein $y \in Y$, so dass

$$(x, y) \in \Gamma.$$

Dieses y bezeichnet man dann als $f_\Gamma(x)$ und erhält eine „Abbildungsvorschrift". Umgekehrt liefert jede „Abbildungsvorschrift" $f : X \to Y$ eine Teilmenge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \,|\, x \in X \wedge y = f(x) \in Y\} \subset X \times Y,$$

mit obiger Eigenschaft, den sogenannten *Graphen* von f.

Beispiel 30. (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$.

(ii) Für X, Y beliebig und $y \in Y$ hat man die *konstante Abbildung vom Wert y*:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto y.$$

(iii) Für X beliebig hat man die *identische Abbildung*

$$\mathrm{id}_X : X \to X, \quad x \mapsto x.$$

□

Definition 31. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Die Menge X heißt der *Definitionsbereich*, die Menge Y der *Zielbereich* oder *Wertebereich* von f.

(ii) Für $x \in X$ heißt $f(x)$ das *Bild* von x unter f, kurz das f-Bild oder, wenn f klar ist, einfach das Bild von x. Es heißt auch der *Wert* von f auf x oder an der Stelle x.

(iii) Die Menge

$$\big\{f(x) \;\big|\; x \in X\big\} \subset Y$$

heißt die *Wertemenge* von f.

(iv) Für $A \subset X$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

das *Bild* von A unter f.

(v) Für $B \subset Y$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \,|\, f(x) \in B\} \subset X$$

das *Urbild* von B unter f. (Es kann $= \emptyset$ sein.)

Zwei Abbildungen f und g heißen gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich X besitzen und für alle $x \in X$

$$f(x) = g(x)$$

gilt.

Definition 32 (Einschränkung). Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$. Dann bezeichnen wir mit

$$f|_A : A \to Y$$

die Abbildung, die jedem $x \in A$ den Wert $f(x) \in Y$ zuordnet. Also

$$f|_A : A \to Y, \quad x \mapsto f(x).$$

$f|_A$ heißt die *Einschränkung* (oder *Restriktion*) von f auf A. Ist $A \neq X$, so gelten f und $f|_A$ also als verschiedene Abbildungen, obwohl sie mit jedem $x \in A$ „dasselbe machen".

Definition 33 (Injektiv, surjektiv, bijektiv). Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) f heißt *injektiv*, wenn eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\forall_{x_1,x_2 \in X} \left(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)\right),$$
$$\forall_{x_1,x_2 \in X} \left(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\right),$$
$$\forall_{y \in Y} \, \#f^{-1}(\{y\}) \leq 1.$$

(ii) f heißt *surjektiv bezüglich* $B \subset Y$ oder *surjektiv auf* B, wenn

$$f(X) = B.$$

(iii) f heißt *bijektiv bezüglich* $B \subset Y$ oder *bijektiv auf* B, wenn es injektiv und surjektiv bezüglich B ist, d.h. wenn jedes $y \in B$ das Bild genau eines $x \in X$ ist.

Beispiel 34. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ ist

- nicht injektiv, weil z.B. $f(-3) = f(3)$ ist,
- nicht surjektiv bezüglich $\mathbb{R}$, weil z.B. $-13 \in \mathbb{R}$ kein Wert von f ist,
- surjektiv bezüglich $[0, +\infty[$.
- Weiter ist $f|_{[0,+\infty[}$ injektiv.

□

Definition 35 (Umkehrabbildung). Ist $f : X \to Y$ injektiv und setzt man $B := f(X)$, so ist f bijektiv bezüglich B. Zu jedem $y \in B$ gibt es also genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir bezeichnen dieses x mit $f^{-1}(y)$ und haben damit eine Abbildung

$$f^{-1} : B \to X$$

definiert, die die *Umkehrabbildung von* f heißt.

Die Umkehrabbildung existiert also nur für *injektive* Abbildungen $f : X \to Y$, und ihr Definitionsbereich ist $f(X)$.

Die definierende Gleichung für f^{-1} (bei *injektivem* f) ist also

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).} \tag{8}$$

Man hat dann für alle $x \in X$

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x.} \tag{9}$$

Beachten Sie: Das Symbol f^{-1} kommt in zwei verschiedenen Bedeutungen vor:

- Bei der Urbildmenge $f^{-1}(B)$. Dann ist das Argument eine *Teilmenge* von Y.
- Bei der Umkehrabbildung einer injektiven Abbildung f. Dann ist das Argument ein *Element* aus $f(X) \subset Y$.

Im zweiten Fall gilt für alle $y \in f(X)$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}.$$

Lemma 36. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt (natürlich!)*

$$f^{-1}(f(X)) = X.$$

Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1} : f(X) \to X$ injektiv und

$$(f^{-1})^{-1} = f : X \to f(X).$$

Beweis. Seien $y_1, y_2 \in f(X)$ und $f^{-1}(y_i) = x_i$ für $i = 1, 2$. Nach (8) ist dann $f(x_i) = y_i$. Daher gilt

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \implies x_1 = x_2 \implies y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2.$$

Daher ist f^{-1} injektiv. Weiter gilt nach (8)

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \iff x = f^{-1}(f(x)),$$

aber die rechte Seite ist wahr nach (9). □

Definition 37 (Komposition von Abbildungen). Seien

$$f : X \to U \text{ und } g : Y \to V$$

zwei Abbildungen. Dann ist die *Komposition von f mit g* die folgende Abbildung

$$g \circ f : f^{-1}(Y) \to V, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

Das ist nur interessant, wenn $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$ (sonst erhält man die *leere Abbildung*), und insbesondere im Fall $U = Y$. Dann ist nämlich $f^{-1}(Y) = X$.

Beispiel 38. Sei $f : X \to Y$ injektiv. Dann gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(X)}.$$

□

Lemma 39. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ zwei Abbildungen mit*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Dann ist f bijektiv bezüglich Y und g die Umkehrabbildung von f, also $g = f^{-1}$.

Beweis. Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2.$$

Also ist f injektiv. Ist $y \in Y$ und setzt man $x = g(y) \in X$, so ist

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

Also ist $f(X) = Y$ und f surjektiv bezüglich Y. Damit ist f bijektiv bezüglich Y. Aus der letzten Gleichung folgt zusammen mit der Definition der Umkehrabbildung sofort $g = f^{-1}$. □

Definition 40 (Abzählbare Mengen). Eine Menge X heißt *(höchstens) abzählbar*, wenn $X = \emptyset$ oder es eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{N} \to X$$

von $\mathbb{N}$ auf X gibt. Andernfalls heißt sie *überabzählbar*.

Beispiel 41. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Mit dem sogenannten Cantorschen Diagonalverfahren beweisen wir zunächst, dass die nicht-negativen rationalen Zahlen abzählbar sind. Dazu betrachten wir folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & \dots \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & \dots & \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & \dots & \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & \dots & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

und definieren eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, indem wir den Diagonalen in diesem Schema folgen: Wir setzen

$$\begin{aligned}
&f(0) := 0 \\
&f(1) := 1/1 \\
&f(2) := 1/2, \quad f(3) := 2/1 \\
&f(4) := 1/3, \quad f(5) := 2/2, \quad f(6) := 3/1 \\
&f(7) := 1/4, \quad f(8) := 2/3, \quad f(9) := 3/2, \quad f(10) = 4/1 \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

Das definiert offensichtlich eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf die nicht-negativen rationalen Zahlen. Ebenso beweist man, dass die Menge der nicht-positiven rationalen Zahlen abzählbar ist. Nun müsste man noch wissen, dass die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen abzählbar ist. Wir zeigen allgemeiner, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} X_i$$

abzählbarer Mengen X_i abzählbar ist, wenn auch die Indexmenge I abzählbar ist. Das geht ebenfalls mit dem Cantorschen Diagonalverfahren: Ist $g : \mathbb{N} \to I$ surjektiv und sind $f_k : \mathbb{N} \to X_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ surjektive Abbildungen, so erhält man eine surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} X_i$$

durch „Verfolgen“ der Diagonalen in dem Schema

$$\begin{array}{ccccc}
f_{g(0)}(0) & f_{g(0)}(1) & f_{g(0)}(2) & f_{g(0)}(3) & \dots \\
f_{g(1)}(0) & f_{g(1)}(1) & f_{g(1)}(2) & f_{g(1)}(3) & \dots \\
f_{g(2)}(0) & f_{g(2)}(1) & f_{g(2)}(2) & f_{g(2)}(3) & \dots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Ein ähnliches Verfahren liefert später auch einen Beweis dafür, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

$\square$

4 Elementares über Funktionen

Funktionen sind eigentlich nichts anderes als Abbildungen, aber wir verwenden diesen Namen vor allem dann, wenn der Zielbereich ein Zahlbereich ist. Wir werden es in diesem Semester vor allem mit Funktionen zu tun haben, deren Zielbereich $\mathbb{R}$ und deren Definitionsbereich I eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Solche Funktionen nennen wir *reelle Funktionen*. Daneben betrachten wir auch komplexe Funktionen, deren Werte in $\mathbb{C}$ liegen, und deren Definitionsbereich eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Wir geben nun eine Reihe konkreter Beispiele für einfache Funktionen und deren Eigenschaften.

4.1 Polynome

Definition 42. Ein *reelles Polynom* oder eine *reelle ganzrationale Funktion* ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich in der Form

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{10}$$

schreiben läßt, wobei die *Koeffizienten* a_k Zahlen aus $\mathbb{R}$ sind. Ersetzt man hier überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$, so erhält man ein *komplexes Polynom*. Für diese bezeichnet man die Variable gern mit z statt mit x.

Beispiel 43. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x-3)^7 + 12(x-3)^2 - 9$$

ist ein Polynom, wie man durch Ausmultiplizieren zeigt.

$\square$

Satz 44 (Identitätssatz für Polynome). *Seien*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

und

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{m} b_k z^k.$$

zwei Polynome mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$. Es gelte $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Dann folgt $m = n$ und

$$a_k = b_k \text{ für alle } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Die Differenz $h = f - g$ ist wieder ein Polynom

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\max(m,n)} c_k z^k,$$

wobei $c_k = a_k - b_k$, und nicht definierte Koeffizienten einfach $= 0$ gesetzt sind. Nach Voraussetzung ist $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es genügt also zu zeigen:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad c_0 = \ldots = c_n = 0. \tag{11}$$

Gibt es einen Koeffizienten $c_k \neq 0$, so gibt es einen höchsten Koeffizienten $\neq 0$ und wir können annehmen, dass $c_n \neq 0$.

Für $|z| \geq 1$ und $0 \leq k \leq n-1$ ist $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ und daher nach der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|c_k z^k\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |c_k|\right) |z|^{n-1} =: C|z|^{n-1}.$$

Nach Korollar 9 ist daher für $|z| \geq 1$

$$|h(z)| \geq |c_n||z|^n - C|z|^{n-1} = |z|^{n-1}(|c_n||z| - C). \tag{12}$$

Ist $c_n \neq 0$, so ist die rechte Seite für $|z| > \max(1, \frac{C}{|c_n|})$ positiv. Insbesondere ist also

$$|h(x)| \geq x^{n-1}(|c_n|x - C) > 0$$

für reelles $x > \max(1, \frac{C}{|c_n|})$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $c_n = 0$. Daraus folgt die Behauptung (11). $\square$

Bemerkung. Die Voraussetzung des Satzes läßt sich erheblich abschwächen. Für den Beweis genügt offenbar, dass $f(x) = g(x)$ für alle hinreichend großen $x \in \mathbb{R}$, d.h. die Existenz eines $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x > x_0$.

Aber es geht noch besser: Die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ von f sind bereits durch die Funktionswerte $f(z_0), \ldots, f(z_n)$ an $(n+1)$ paarweise verschiedenen reellen oder komplexen Stellen z_i eindeutig bestimmt, wie Sie in der Linearen Algebra lernen können: Die Bedingungen $f(z_i) = w_i$ bilden ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten, dessen Matrix die sogenannte Vandermondesche Matrix ist. Die ist regulär, und daher hat das System genau eine Lösung.

Definition 45. Ist

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

ein Polynom mit $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von f. (Analog für reelle Polynome). Wie wir gleich sehen werden, ist es praktisch, dem Nullpolynom $f = 0$ den Grad $-\infty$ zu verpassen. Dann ist also

$$\operatorname{Grad} f = 0 \iff f \text{ konstant} \neq 0.$$

Beachten Sie: Diese Definition macht nur Sinn, weil durch die Funktion f die Koeffizienten a_k und damit auch der größte Index n eines nicht verschwindenden Koeffizienten nach dem vorausgehenden Satz eindeutig bestimmt sind!

Man sieht leicht, dass für zwei Polynome $f \neq 0 \neq g$

$$\operatorname{Grad}(fg) = \operatorname{Grad} f + \operatorname{Grad} g,$$

und wenn man großzügig und suggestiv $-\infty = n + (-\infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ rechnet, gilt diese Formel sogar, wenn $f = 0$ oder $g = 0$.

Der Divisionsalgorithmus für Polynome ist Ihnen ja wohl aus der Schule bekannt:

Satz 46 (Polynomdivision mit Rest). *Seien f, g zwei reelle oder komplexe Polnome und* $\operatorname{Grad} g > 0$. *Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q, r mit*

$$f = qg + r \quad \textit{und} \quad \operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} g.$$

Sind f und g reell, so auch q und r.

Beweis. Zur Existenz: Die Menge

$$\left\{f - qg \;\middle|\; q \text{ reelles bzw. komplexes Polynom}\right\}$$

enthält (nach dem Wohlordnungsprinzip) ein Polynom r kleinsten Grades, so dass

$$f - qg = r$$

für ein geeignetes Polynom q.

Annahme: $\operatorname{Grad} r \geq \operatorname{Grad} g$, also etwa $r(z) = \sum_{k=0}^{n} r_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{m} g_k z^k$ mit $n \geq m$ und $r_n \neq 0 \neq g_m$. Dann wäre

$$\tilde{r}(z) := r(z) - \frac{r_n}{g_m} z^{n-m} g(z) \tag{13}$$

ein Polynom vom Grad kleiner als $\operatorname{Grad} r$ und

$$\tilde{r}(z) = f(z) - q(z)g(z) - \frac{r_n}{g_m} z^{n-m} g(z) = f(z) - \underbrace{\left(q(z) + \frac{r_n}{g_m} z^{n-m}\right)}_{=:\tilde{q}(z)} g(z)$$

im Widerspruch zur Wahl von r. Also ist

$$\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} g.$$

Zur Eindeutigkeit: Aus

$$r_1 + q_1 g = f = r_2 + q_2 g$$

mit r_1, r_2 von minimalem Grad folgt

$$r_1 - r_2 = (q_2 - q_1) g$$

und daraus

$$\operatorname{Grad} g > \operatorname{Grad}(r_1 - r_2) = \operatorname{Grad}(q_2 - q_1) + \operatorname{Grad} g,$$

was nur möglich ist, wenn $\operatorname{Grad}(r_1 - r_2) = -\infty = \operatorname{Grad}(q_2 - q_1)$, also $r_1 = r_2$ und $q_1 = q_2$. Also sind q und r eindeutig bestimmt. □

Korollar 47. *Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom $\neq 0$, und ist $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = (z - a) q(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Entsprechendes gilt für reelle Polynome und reelle Nullstellen.

Die vorstehenden Sätze und das Korollar galten gleichermaßen für reelle wie komplexe Polynome. Der folgende, hier nicht bewiesene sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra* gilt dagegen nur, wenn (ungeachtet der Koeffizienten) das Argument komplex ist:

Satz 48. *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Natürlich hat damit auch jedes nicht-konstante Polynom mit reellen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle, aber eben nicht unbedingt eine reelle, wie $x^2 + 1$ zeigt.

Aus dem Korollar zum Satz über die Division mit Rest folgt unmittelbar, dass jedes komplexe Polynom vom Grad n dann genau n Nullstellen hat, wenn man sie mit "Vielfachheiten" zählt. Insbesondere ist ein Polynom mit unendlich vielen Nullstellen das Nullpolynom. Genauer:

Jedes komplexe Polynom vom Grad $n > 0$ hat eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Darstellung

$$\boxed{f(z) = a_n(z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_r)^{k_r}} \tag{14}$$

mit $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, paarweise verschiedenen $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ und positiven natürlichen Zahlen $k_1, \dots, k_r$, für die

$$k_1 + \dots + k_r = n.$$

Man kann (10), aber ebenso auch (14), als eine *Normalform* des Polynoms f ansehen. Die letztere gilt allerdings nur bei Einbeziehung der komplexen Nullstellen für alle reellen oder komplexen Polynome und ist der eigentliche Grund, warum man bei der Untersuchung von Polynomen lieber komplex als reell arbeitet.

4.2 Rationale Funktionen

Definition 49 (Rationale Funktionen). Sind f und $g \neq 0$ zwei Polynome und ist $N(g)$ die Menge der Nullstellen von g, so heißt die auf dem Komplement von $N(g)$ definierte Funktion

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \backslash N(g) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

bzw.

$$\frac{f}{g} : \mathbb{C} \backslash N(g) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$$

eine *(gebrochen-)rationale Funktion*.

Nach dem Divisionsalgorithmus für Polynome ist jede rationale Funktion h darstellbar als

$$h = q + \frac{f}{g}$$

mit Polynomen f, g, q, wobei der Grad von g echt größer als der von f ist.

Auch für die rationalen Funktionen wollen wir Normalformen untersuchen. Dabei ist es wieder einfacher, *komplexe* rationale Funktionen, also die Quotienten zweier komplexer Polynome, zu betrachten. Dann ist eine mögliche Normalform

$$h(z) = A \frac{(z - w_1)^{l_1} \dots (z - w_s)^{l_s}}{(z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_r)^{k_r}}$$

mit $A \in \mathbb{C}$, positiven Exponenten $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und paarweise verschiedenen $z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s \in \mathbb{C}$.

Eine weitere Normalform rationaler Funktionen wird insbesondere in der Integrationstheorie nützlich sein. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad, so dass kein polynomialer Summand q auftritt.

Satz 50 (Partialbruchzerlegung). *Sei $\frac{f(z)}{g(z)}$ eine komplexe rationale Funktion für die* $0 \leq \operatorname{Grad} f < \operatorname{Grad} g$. *Sei*

$$g(z) = (z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_r)^{k_r}$$

mit paarweise verschiedenen $z_1, \dots, z_r$, die keine Nullstellen des Zählers sind (ausgekürzter Bruch), und positiven Exponenten $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$.
Dann gibt es eindeutig bestimmte $A_{ij} \in \mathbb{C}$ für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq k_i$, so dass

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z - z_i)^j} \tag{15}$$

für alle $z \notin \{z_1, \dots, z_r\}$.
Ist $\frac{f(z)}{g(z)}$ eine reelle *rationale Funktion, und sind alle Nullstellen $z_1, \dots, z_r$ von g* reell, *so sind auch die A_{ij} reell.*

Beweis. Vollständige Induktion über den Nennergrad $n := k_1 + \dots + k_r$.

$\underline{n = 1}$. Dann ist $\operatorname{Grad} f < 1$, also f konstant und

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_1)}{z - z_1}.$$

Die Darstellung ist eindeutig.

Induktionsschritt. Sei der Satz für Nennerpolynome vom Grad $< n$ bereits bewiesen. Wir schreiben $g(z) = q(z)(z - z_r)^{k_r}$, wobei dann $q(z_r) \neq 0$. Wir setzen

$$A := A_{rk_r} := \frac{f(z_r)}{q(z_r)}. \tag{16}$$

Dann ist

$$f(z) - \frac{A}{(z - z_r)^{k_r}} g(z) = f(z) - Aq(z)$$

ein Polynom mit z_r als Nullstelle, also von der Form $\tilde{f}(z)(z - z_r)$, und

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{(z - z_r)^{k_r}} = \frac{\tilde{f}(z)}{q(z)(z - z_r)^{k_r - 1}}$$

hat nach Induktionsvoraussetzung eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{(z - z_r)^{k_r}} = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z - z_i)^j} + \sum_{j=1}^{k_r - 1} \frac{A_{rj}}{(z - z_r)^j}.$$

Damit ist die Existenz der Partialbruchzerlegung bewiesen.

Es fehlt noch der Nachweis, dass der Koeffizient A_{rk_r} in (15) eindeutig bestimmt ist. Dann liefert der Induktionsbeweis auch die Eindeutigkeit im Satz. Aber aus (15) folgt

$$A_{rk_r} = (z - z_r)^{k_r} \left(\frac{f(z)}{g(z)} - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z - z_i)^j} - \sum_{j=1}^{k_r - 1} \frac{A_{rj}}{(z - z_r)^j} \right),$$

für alle $z \notin \{z_1, \ldots, z_r\}$ und damit die Eindeutigkeit.

Die Aussage über reelle Polynome mit reellen Nullstellen ist klar. □

“Zuhaltemethode”. Der Beweis des Satzes, konkret die Formel (16), gibt Informationen, wie man die A_{ij} finden kann: Ist $\frac{f(z)}{(z-z_1)^{k_1} \ldots (z-z_r)^{k_r}}$ ausgekürzt und der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, so erhält man die “Top-Koeffizienten” A_{ik_i}, indem man im Nenner den Term $(z - z_i)^{k_i}$ “zuhält” und $z = z_i$ einsetzt. Sind alle Nullstellen einfach, so ist man dann fertig. Andernfalls ermittelt man die anderen Koeffizienten durch Multiplikation von (15) mit dem Hauptnenner und Koeffizientenvergleich oder Einsetzen von Werten.

Beispiel 51. Bestimme A, B, C in der Partialbruchzerlegung

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{(z+1)^2}.$$

Mit der “Zuhaltemethode” findet man

$$A = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Aus

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1/4}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{1/2}{(z+1)^2}$$

folgt

$$z = \frac{1}{4}(z+1)^2 + B(z-1)(z+1) + \frac{1}{2}(z-1).$$

Für $z = 0$ ergibt sich

$$0 = \frac{1}{4} - B - \frac{1}{2}$$

oder $B = -\frac{1}{4}$.

□

4.3 Eine Buckelfunktion

Dieser Abschnitt verfolgt zwei Ziele: Einmal soll er Ihre Vorstellungskraft durch die Umsetzung analytischer (= formelmäßiger) Sachverhalte in anschauliche Eigenschaften des Graphen fördern. Zum andern werden die hier konstruierten „Buckelfunktionen“ in verschiedenen Bereichen der Analysis als wichtiges Hilfsmittel eingesetzt.

Seien $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\psi(x) = 0 \text{ für } x \leq 0,$$
$$\psi(x) > 0 \text{ für } x > 0,$$

etwa

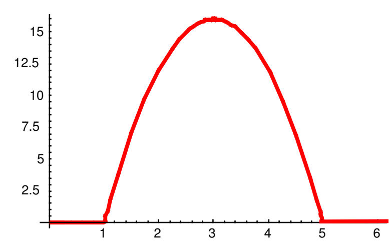
$$\psi(x) := x + |x| \quad \text{oder} \quad \psi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^n & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

und seien $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$.

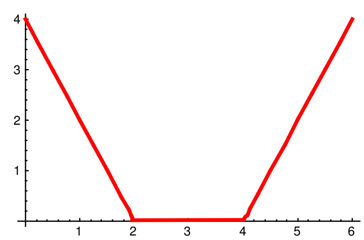
In den folgenden Abbildungen verwenden wir

$$\psi(x) = x + |x| \text{ und } a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_2 = 4,\ b_1 = 5.$$

1. Die Funktion
   $\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x)$
   verschwindet für $x \leq a_1$ oder $x \geq b_1$ und ist auf $]a_1, b_1[$ positiv.



2. Die Funktion
   $\psi(x - b_2) + \psi(a_2 - x)$
   verschwindet für $x \leq b_2$ und $x \geq a_2$ und ist außerhalb von $[a_2, b_2]$ positiv.

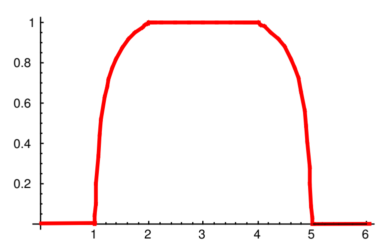


3. Die Funktion

$$\phi(x) := \frac{\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x)}{\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x) + \psi(x - b_2) + \psi(a_2 - x)}$$

   hat folgende Eigenschaften:

$$0 \leq \phi(x) \leq 1,$$
$$\phi|_{[a_2, b_2]} = 1,$$
$$\phi(x) > 0 \text{ für } x \in]a_1, b_1[,$$
$$\phi(x) = 0 \text{ für } x \notin]a_1, b_1[.$$



Beispiel 52 (Zerlegung der Eins). Sei $(]a_i, b_i[)_{i\in I}$ eine Familie von offenen Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$, d.h. die Intervallfamilie ist eine *offene Überdeckung von* $\mathbb{R}$.
2. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass
$$]x-\epsilon, x+\epsilon[\,\cap\,]a_i, b_i[\, \neq \emptyset \text{ nur für endlich viele } i \in I.$$
In diesem Fall nennt man die Überdeckung *lokal endlich.*

Dann gibt es nach dem ersten Schritt der obigen Überlegungen zu jedem $i \in I$ eine Funktion $\tilde{\phi}_i$ mit
$$\tilde{\phi}_i > 0 \text{ auf }]a_i, b_i[, \qquad \tilde{\phi}_i = 0 \text{ auf } \mathbb{R}\setminus]a_i, b_i[.$$
Weil die Überdeckung lokal endlich ist, kann man für $x \in \mathbb{R}$
$$\sigma(x) := \sum_{i\in I} \tilde{\phi}_i(x)$$
definieren, denn in der Summe rechts sind nur endlich viele Glieder $\neq 0$. Mindestens eines ist aber > 0, und daher ist die Funktion $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall positiv. Setzt man
$$\phi_i := \tilde{\phi}_i / \sigma,$$
so erhält man eine Familie von Funktionen mit
$$\phi_i > 0 \text{ auf }]a_i, b_i[, \qquad \phi_i = 0 \text{ auf } \mathbb{R}\setminus]a_i, b_i[,$$
und
$$\sum_{i\in I} \phi_i = 1.$$
Eine solche Familie nennt man eine *Zerlegung (oder auch Partition) der Eins* zu der gegebenen Überdeckung.

Man benutzt diese Überlegungen zum Beispiel zum Zweck der „Lokalisation“: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion und benutzt man zur Konstruktion der Buckelfunktion ebenfalls eine stetige Funktion, so ist
$$f = \sum_{i\in I} f\phi_i$$
eine Summe *stetiger* Funktionen, die jeweils außerhalb des Intervalls $]a_i, b_i[$ verschwinden, also in $]a_i, b_i[$ „lokalisiert“ sind.

□

4.4 Zwei wichtige Eigenschaften von Funktionen

Definition 53 (Monotonie). Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt

- *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ gilt

$$x < y \implies f(x) \leq f(y),$$

  (Zum Beispiel sind konstante Funktionen monoton wachsend.)

- *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ gilt

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

Entsprechend definiert man *(streng) monoton fallend*. Eine Funktion heißt *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Für komplexwertige Funktionen macht Monotonie keinen Sinn.

Beispiel 54. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend. Zum Beweis beachte, dass

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2) = (y - x)\left((y + \frac{x}{2})^2 + \frac{3}{4}x^2\right).$$

Für $x < y$ ist deshalb offensichtlich $x^3 < y^3$.

□

Definition 55 (Beschränktheit von Funktionen). Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

M heißt dann eine *obere Schranke* für f.

Entsprechend definiert man *nach unten beschränkt* und *untere Schranke*.

Eine Funktion heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben wie nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

Diese letzte Bedingung benutzt man, um Beschränktheit auch für komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ zu definieren.

Beispiel 56. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$ mit $n > 0$ ist nicht beschränkt. Das ist klar für $n = 1$. Und für $n > 1$ folgt aus $x > 1$, dass

$$x^n > x^{n-1} > \ldots > x$$

und damit die Behauptung.

□

Beispiel 57. Allgemeiner ist ein Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

vom Grad $n > 0$ nicht beschränkt. Das folgt aus der Gleichung (12) im Beweis des Identitätssatzes zusammen mit dem letzten Beispiel.

□

5 Zahlenfolgen und Konvergenz

5.1 Konvergenz und Vollständigkeit

Definition 58 (Folge). Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die reellen Zahlen:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$$

Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also die reelle Zahl x_n zugeordnet.

Notationen: (x_n) oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Oft schreibt man auch die ersten Werte der Folge:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Manchmal beginnt man die Numerierung der Folge mit 1 statt mit 0, gelegentlich auch mit einer anderen Zahl.

Reelle Folgen sind also reelle Funktionen, so dass zum Beispiel Begriffe wie „Monotonie“ oder „Beschränktheit“ für Folgen bereits definiert sind.

Beispiel 59.

$$(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \tag{17}$$

$$(x_n = 1)_{n\in\mathbb{N}}: \quad 1, 1, \dots \tag{18}$$

$$(\frac{1}{n})_{n>0}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \tag{19}$$

$$((-1)^{n+1}n^2)_{n\in\mathbb{N}}: \quad 0, 1, -4, 9, -25, ... \tag{20}$$

□

Häufig kommen sogenannte rekursive Folgen vor: Man gibt einen (oder mehrere) Anfangswerte und eine Vorschrift, wie sich die Folgenglieder aus den vorangehenden Gliedern „entwickeln“:

Beispiel 60. Seien $x_0, b > 0$ gegeben. Setze

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{b}{x_n}). \tag{21}$$

Für $b = 2$ und $x_0 = 1$ liefert das

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.5000000 \\ x_2 &= 1.4166667 \\ x_3 &= 1.4142157 \\ x_4 &= 1.4142136 \\ x_5 &= 1.4142136 \\ &\dots \end{aligned}$$

□

Beispiel 61. Die *Fibonacci-Folge* ist gegeben durch

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Das ergibt

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Diese Folge hat zu tun mit der Vermehrung von Kaninchen. Sie besitzt eine eigene Zeitschrift.

□

Beispiel 62. Eine weitere rekursiv definierte Folge ist „die“ Collatz-Folge: Man beginnt mit einer beliebigen *natürlichen* Zahl c_0 und definiert

$$c_{n+1} := \begin{cases} 3c_n + 1 & \text{falls } c_n \text{ ungerade und } \neq 1, \\ (c_n)/2 & \text{falls } c_n \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } c_n = 1. \end{cases}$$

Also etwa

$$9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 1, 1, \dots$$

Es gibt also unendlich viele Collatz-Folgen: eine zu jedem Anfangswert c_0. Und wenn eine Collatz-Folge den Wert 1 annimmt, sind alle weiteren Folgenglieder auch 1.

□

Die Differentialrechnung wurde im 17. Jahrhundert von Newton und Leibniz erfunden und Grenzwertbetrachtungen für die Flächenberechnung sind noch viel älter. Aber für die Konvergenz einer Folge gegen eine reelle Zahl gibt es erst seit Anfang des 19. Jahrhunderts eine präzise

Definition 63 (Konvergenz und Divergenz). Die Folge (x_n) heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Man schreibt dann $x_n \to a$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, auch kurz

$$\lim x_n = a.$$

Die Zahl a heißt *der Grenzwert* oder *Limes* der Folge. Man nennt die Folge (x_n) *konvergent*, wenn es ein a gibt, gegen das sie konvergiert. Andernfalls nennt man sie *divergent*.

Sprachlich kann man das so formulieren:

Jede – noch so kleine! – Toleranz ϵ für die Abweichung vom Grenzwert a wird nur von *endlich vielen* Folgegliedern (nämlich höchstens denen mit $n < N$) überschritten.

Lemma 64 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Aus*

$$\lim x_n = a \text{ und } \lim x_n = b$$

folgt $a = b$. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt, so dass der bestimmte Artikel gerechtfertigt ist.

Beweis. Andernfalls ist $\epsilon := \frac{|b-a|}{2} > 0$. Dann gilt

$$\exists_{N_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_1} |x_n - a| < \epsilon \text{ und } \exists_{N_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_2} |x_n - b| < \epsilon.$$

Für $N = \max\{N_1, N_2\}$ findet man also

$$|x_N - a| < \epsilon, \qquad |x_N - b| < \epsilon.$$

Dann ist aber nach der Dreiecksungleichung

$$|b-a| \leq |b-x_N| + |x_N - a| < 2\epsilon = |b-a|.$$

Widerspruch! $\square$

Beispiel 65 (DAS fundamentale Beispiel für Konvergenz). Die Folge $(\frac{1}{n})_{n>0}$ konvergiert gegen 0.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl N mit $N > \frac{1}{\epsilon}$. Wir wählen eine solche und erhalten für alle $n \geq N$ ebenfalls $n > \frac{1}{\epsilon}$ und daher

$$\left|\,\frac{1}{n} - 0\,\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

$\square$

<u>HALT! Der vorstehende Beweis enthält eine wesentliche Lücke.</u>

Er verwendt nämlich das Archimedische Prinzip: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ (im Beweis hieß es $1/\epsilon$) gibt es eine natürliche Zahl $N > x$.

Wir haben früher festgestellt, dass genau dieses sich aber nicht aus den bisherigen Axiomen für die reellen Zahlen beweisen läßt. Jedenfalls *haben* wir es nicht bewiesen.

Wir fordern nun ein weiteres Axiom für die reellen Zahlen, das

Vollständigkeitsaxiom:
(V) Jede monotone und beschränkte reelle Folge ist konvergent.

Beispiel 66. Die Folge $(\frac{1}{n})_{n>0}$ ist monoton fallend und beschränkt: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. Also ist sie nach dem Axiom konvergent: Da ist nichts mehr zu beweisen, außer dass der Grenzwert 0 ist. Das folgt wie oben aus dem Archimedischen Prinzip, das wir jetzt beweisen.

$\square$

Satz 67 (Archimedisches Prinzip). *Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$x < n.$$

Beweis. Die Folge $(n)_n$ ist monoton wachsend. Gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $n \leq x$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$, so wäre sie auch beschränkt, also (hier verwenden wir unser neues Axiom!) konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|n-a| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N$. Das gilt insbesondere für $n = N$ und $n = N+1$:

$$|N-a| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |(N+1)-a| < \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$1 = |(N+1)-N| = |N+1-a+a-N| \leq |(N+1)-a| + |N-a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Aber $1 < 1$ ist ein Widerspruch! $\square$

Beispiel 68. Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \text{ für } |x| < 1.$$

Falls $x = 0$, ist $x^n = 0$ für alle $n \geq 1$ und die Behauptung klar.

Sei also $x \neq 0$ und sei $\epsilon > 0$. Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\epsilon > |x^n - 0| = |x|^n \qquad \text{für alle } n \geq N. \tag{22}$$

Die letzte Ungleichung ist aber äquivalent zu

$$\frac{1}{\epsilon} < \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1+\alpha)^n \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

mit positivem $\alpha := \frac{1}{|x|} - 1$. (Hier benutzen wir $|x| < 1$.)

Nach der Bernoullischen Ungleichung (Beispiel 19) ist dann aber $(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha$. Wählt man also $N > \frac{1}{\epsilon\alpha}$, was nach dem Archimedischen Axiom ja möglich ist, so folgt für $n \geq N$

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \geq 1 + N\alpha > 1 + \frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon}$$

und damit (22).

□

Ende gut, alles gut! Für die Konvergenz einer Folge sind nach Definition nur die „hinteren Glieder“ verantwortlich, was am Anfang passiert ist egal. Das bedeutet zum Beispiel, dass eine beschränkte Folge auch dann konvergent ist, wenn sie erst vom 37. Glied an monoton wachsend ist. Davon machen wir gleich Gebrauch.

Wir zeigen, dass die Folge (21) konvergent ist gegen ein $a > 0$ mit

$$a^2 = b.$$

Also besitzt wirklich jede positive Zahl b eine (positive) Quadratwurzel $a = \sqrt{b}$, vergleiche Beispiel 6. Wir zeigen sogar einen allgemeineren Sachverhalt:

Satz 69 (Existenz von Wurzeln). *Seien b und $x_0 > 0$ und $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Dann konvergiert die mit x_0 beginnende rekursiv definierte Folge*

$$x_{n+1} := x_n \left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{b}{x_n^k} - 1\right)\right)$$

gegen die einzige positive Lösung der Gleichung

$$x^k = b.$$

Für den Grenzwert schreiben wir $\sqrt[k]{b}$ und nennen ihn die k-te Wurzel aus a. *Wir setzen $\sqrt{b} := \sqrt[2]{b}$.*

Bemerkung: Für $k = 2$ erhalten wir gerade die Folge (21). Wie man auf die merkwürdige Folge für beliebiges k gekommen ist, erklären wir im Beispiel 141.

Beweis. Zur Eindeutigkeit. Beachte, dass

$$y^k - x^k = (y - x)(y^{k-1} + y^{k-2}x + \ldots + yx^{k-2} + x^{k-1}).$$

Sind also $x, y > 0$ mit $x^k = y^k$, so folgt $x = y$.

Zur Existenz. Wir beweisen nun, dass die obige Folge konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$ ist und zeigen dann, dass $a^k = b$ gilt.

Zunächst ist für positives x_n jedenfalls $\frac{1}{k}(\frac{b}{x_n^k} - 1) > -\frac{1}{k} > -1$. Daher sind mit x_0 und b offensichtlich alle x_n positiv.

Weiter gilt

$$x_{n+1}^k = x_n^k(1 + \underbrace{\frac{1}{k}\left(\frac{b}{x_n^k} - 1\right)}_{>-1})^k \underset{Bernoulli}{\geq} x_n^k(1 + \frac{b}{x_n^k} - 1) = b.$$

Das bedeutet, dass alle $x_{n+1}^k \geq b$, d.h.

$$x_n^k \geq b \tag{23}$$

mit möglicher Ausnahme von x_0.

Daher ist $\frac{1}{k}(\frac{b}{x_n^k} - 1) \leq 0$, also

$$x_{n+1} \leq x_n \text{ für alle } n \geq 1.$$

Die Folge ist also jedenfalls vom zweiten Glied an monoton fallend und beschränkt (weil positiv). Nach dem Vollständigkeitsaxiom ist sie also konvergent: Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Um zu zeigen, dass

$$a^k = b,$$

benutzen wir die Rechenregeln für konvergente Folgen, die wir weiter unten zusammenstellen. Aus $x_n \to a$ folgt $x_n^k \to a^k$ und aus $x_n^k \geq b$ folgt dann $a^k \geq b > 0$. Also ist $a \neq 0$. Weil $x_n \geq 0$ für alle n ist $a = \lim x_n \geq 0$, also $a > 0$. Weil (x_{n+1}) dieselbe Folge ist wie (x_n) mit einer um eins verschobenen Numerierung, ist auch $x_{n+1} \to a$. Schließlich folgt aus der Rekursionsgleichung

$$a = a\left(1 + \frac{1}{k}(\frac{b}{a^k} - 1)\right)$$

und daraus

$$a^k = b.$$

□

Anmerkung: Irrationalität von Quadratwurzeln Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, aber keine Quadratzahl, d.h. es sei $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$. Dann ist $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, also *irrational*. Weil die Axiome der reellen Zahlen ohne das Vollständigkeitsaxiom auch für $\mathbb{Q}$ gelten, kann man daraus allein also nicht die Konvergenz der obigen „Quadratwurzelfolge“ beweisen.

Für die Irrationalität, insbesondere von $\sqrt{2}$, gibt es einen häufig angeführten Beweis mittels Primfaktorzerlegung. Der folgende Beweis, der wohl auf Dedekind zurückgeht, kommt ohne dieses zahlentheoretische Hilfsmittel aus:

Annahme: $\sqrt{n} = \frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, x minimal.

Dann gibt es ganzzahliges k mit

$$k - 1 < \frac{x}{y} < k.$$

Definiere
$$x' := \left(k - \frac{x}{y}\right)x, \qquad y' := \left(k - \frac{x}{y}\right)y.$$
Dann
$$\frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} = \sqrt{n}.$$
Aber
$$x' = kx - \frac{x^2}{y} = kx - \frac{ny^2}{y}$$
und $y' = ky - x$ sind beide ganzzahlig und > 0.Schließlich ist $k - \frac{x}{y} < 1$ und deshalb $x' < x$ im Widerspruch zur Wahl von x.

Beispiel 70. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$
Zum Beweis wählen wir eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2|x|$ und betrachten nur Werte $n > k$. Dann ist
$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1}\,\frac{|x|}{2} \cdots \frac{|x|}{k}\,\frac{|x|}{k+1} \cdots \frac{|x|}{n}.$$
Das Produkt der ersten k Faktoren hat einen festen Wert, das Produkt der letzten $n-k$ Faktoren ist $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, und das geht für $n \to \infty$ gegen 0.

□

Beispiel 71. Wir betrachten die Folge $\left(x_n = (1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n\geq 1}$. Für sie gilt
$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n}) \qquad (24) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < 3. \qquad (25)
\end{aligned}$$
Aus (24) ersieht man, dass die Folge monoton wachsend ist, und nach (25) ist sie beschränkt. Ihr Grenzwert ist die *Eulersche Zahl* e.

□

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist die Beschränktheit:

Lemma 72. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $\lim x_n = a$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit
$$\forall_{n\geq N}\, |x_n - a| < 1,$$
d.h.
$$\forall_{n\geq N}\, a - 1 < x_n < a + 1.$$
Dann gilt erst recht
$$\forall_{n\geq N}\, -|a| - 1 < x_n < |a| + 1.$$
Dann gilt zum Beispiel für alle $n \in \mathbb{N}$
$$-|x_0| - \ldots - |x_N| - |a| - 1 < x_n < |x_0| + \ldots + |x_N| + |a| + 1.$$

□

Die Folge $0, 1, 2, 3, \ldots$ ist also divergent. Aber auch beschränkte Folgen können divergent sein:

Beispiel 73. Die Folge $(-1)^n$ ist divergent. Wäre sie nämlich gegen a konvergent, so würde insbesondere für $\epsilon = 1$ ein N existieren, so dass $|x_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann wäre insbesondere $|x_N - a| < 1$ und $|x_{N+1} - a| < 1$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|x_N - x_{N+1}| = |(x_N - a) - (x_{N+1} - a)| \leq |x_N - a| + |x_{N+1} - a| < 1 + 1 = 2.$$

Aber das widerspricht $x_N - x_{N+1} = \pm(1 - (-1)) = \pm 2$. Daher gibt es zu $\epsilon = 1$ kein solches N, und die Folge ist nicht konvergent.

□

Bestimmte Divergenz. Die Folgen $((-1)^n)$ und (n^2) sind beide divergent, aber auf unterschiedliche Weise: Die erste kann sich nicht entscheiden, wohin, die zweite strebt unbeirrt gegen $+\infty$. Man sagt, die Folge (x_n) ist *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ oder auch *konvergent gegen* $+\infty$, wenn es zu jedem (noch so großen) $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\epsilon < x_n \text{ für alle } n \geq \mathbb{N}.$$

Man schreibt dann auch

$$\lim x_n = +\infty \text{ oder } x_n \to +\infty.$$

Entsprechend definiert man *bestimmt divergent gegen* $-\infty$ *(konvergent gegen* $-\infty$*)*.

Wir wollen aber bei folgender Konvention bleiben:

Eine reelle Folge (x_n) heißt konvergent (ohne Angabe eines Grenzwertes), wenn sie gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Andernfalls, heißt sie divergent – auch wenn sie gegen $\pm\infty$ konvergiert.

Beispiel 74 (Ein offenes Problem). Die Collatz-Folge ist konvergent gegen 1 für jedes x_0, für das man sie getestet hat: Sie landet irgendwann bei 1 und bleibt dann 1. Es ist bis heute unbekannt, ob sie wirklich für jedes c_0 konvergiert.

□

Für das Konvergenzverhalten einer Folge ist ihr „Anfang“ ganz ohne Bedeutung, siehe „Ende gut, alles gut“. Konvergenz spielt sich „ganz hinten“ ab. Darum können Konvergenztests mit dem Computer vielleicht Hinweise geben, sie sind aber alles andere als verläßlich.

Beispiel 75. Wir untersuchen die rekursive Folge

$$x_0 = 1, x_1 = (\frac{p-1}{p})^{2k}, \quad x_{n+1} = (2\sqrt[2k]{x_n} - \sqrt[2k]{x_{n-1}})^{2k}$$

für $k = 6, p = 100$ mit Mathematica.

```
In[1]:= k=6; p=100;
        a=1; myc=1;

        Print["0: ",1]
        Print["1: ",N[b=((p-1)/p)^(2 k)]]
        Do[z=(2 Abs[b]^(1/(2k))- Abs[a]^(1/(2k)))^(2k);
        a=b ;b=z; myc=myc+1; Print[myc,": ",N[z]],{101}]
```

Hier der Output:

0 :	1	60 :	0.0000167772	83 :	$5.82622\ 10^{-10}$
1 :	0.886385	61 :	0.0000123816	84 :	$2.81475\ 10^{-10}$
2 :	0.784717	62 :	$9.06574\ 10^{-6}$	85 :	$1.29746\ 10^{-10}$
3 :	0.693842	63 :	$6.58295\ 10^{-6}$	86 :	$5.66939\ 10^{-11}$
4 :	0.61271	64 :	$4.73838\ 10^{-6}$	87 :	$2.32981\ 10^{-11}$
5 :	0.54036	65 :	$3.37922\ 10^{-6}$	88 :	$8.9161\ 10^{-12}$
6 :	0.47592	66 :	$2.38642\ 10^{-6}$	89 :	$3.13843\ 10^{-12}$
7 :	0.418596	67 :	$1.66789\ 10^{-6}$	90 :	$1.\ 10^{-12}$
8 :	0.367666	68 :	$1.15292\ 10^{-6}$	91 :	$2.8243\ 10^{-13}$
9 :	0.322475	69 :	$7.87663\ 10^{-7}$	92 :	$6.87195\ 10^{-14}$
10 :	0.28243	70 :	$5.31441\ 10^{-7}$	93 :	$1.38413\ 10^{-14}$
11 :	0.24699	71 :	$3.53815\ 10^{-7}$	94 :	$2.17678\ 10^{-15}$
12 :	0.215671	72 :	$2.32218\ 10^{-7}$	95 :	$2.44141\ 10^{-16}$
13 :	0.188032	73 :	$1.50095\ 10^{-7}$	96 :	$1.67772\ 10^{-17}$
14 :	0.163675	74 :	$9.5429\ 10^{-8}$	97 :	$5.31441\ 10^{-19}$
15 :	0.142242	75 :	$5.96046\ 10^{-8}$	98 :	$4.096\ 10^{-21}$
16 :	0.12341	76 :	$3.65203\ 10^{-8}$	99 :	$1.\ 10^{-24}$
17 :	0.10689	77 :	$2.19146\ 10^{-8}$	100 :	0
	...		...		

Sieht konvergent aus, ist es aber nicht. Die nächsten beiden Glieder sind

$$\begin{array}{rr} 101: & 1.\ 10^{-24} \\ 102: & 4.096\ 10^{-21}. \end{array}$$

Tatsächlich kann man zeigen, dass

$$x_n := (\frac{p-n}{p})^{2k},$$

und diese Folge ist offensichtlich divergent.

$\square$

Trotzdem kann der Rechner nützliche Hinweise geben (z.B. auf ein bestimmtes Monotonieverhalten), denen man dann aber rigoros nachgehen muss: Der Rechner liefert Vermutungen, keine Beweise.

Schlussbemerkung: Sprache und Verständnis. Der Begriff der Konvergenz unendlicher Folgen ist nicht so einfach, und eine falsche sprachliche Formulierung erschwert sein Verständnis oder dokumentiert fehlende gedankliche Bewältigung. Hier einige (öfter anzutreffende) Beispiele falscher Behauptungen:

Die Folge (x_n) konvergiert gegen a, wenn

> ... sie a immer näher kommt. FALSCH: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) \neq 0$.
>
> ... sie a beliebig nah kommt. FALSCH: $\lim_{n\to\infty}((-1)^n+\frac{1}{n}) \neq 1$.
>
> ... sie a beliebig nah kommt, es aber nie erreicht. Erst recht FALSCH.

Der Grenzwert der Folge $(\frac{1}{n})$ *geht* nicht gegen 0, er *ist* 0. Grenzwerte sind bereits angekommen!

5.2 Rechenregeln für konvergente Folgen

Der Nachweis der Konvergenz einer Folge ist oft mühsam. Insbesondere deshalb ist es nützlich zu sehen, wie sich Folgen verhalten, die aus „einfacheren" konvergenten Folgen zusammengesetzt sind.

Satz 76. *Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten*

$$\lim x_n = a, \qquad \lim y_n = b.$$

Dann gilt:

(i) Die Folge $(x_n + y_n)$ ist konvergent und

$$\lim(x_n + y_n) = a + b.$$

(ii) Die Folge $(x_n y_n)$ ist konvergent und

$$\lim(x_n y_n) = ab.$$

Insbesondere gilt das für konstante Folgen $y_n = c \in \mathbb{R}$:

$$\lim(cx_n) = ca.$$

(iii) Ist $b \neq 0$ und $y_n \neq 0$ für alle n, so ist die Folge (x_n/y_n) konvergent und

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

(iv) Ist $\lim x_n = 0$ und (z_n) eine beschränkte Folge, so gilt

$$\lim x_n z_n = 0.$$

"Nullfolge mal beschränkte Folge ergibt eine Nullfolge."

Beweis. Zu (i) Selbst.

Zu (ii) Zunächst ist (y_n) nach dem Lemma beschränkt. Sei etwa

$$|y_n| < M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gleichzeitig

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ und } |y_n - b| < \epsilon.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq |x_n - a|\,|y_n| + |a|\,|y_n - b| < \epsilon(M + |a|).$$

Zu (iii) Sei $\epsilon > 0$ und dazu $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $n \geq N$

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |y_n - b| < \epsilon \quad \text{ und } \quad |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Dann ist

$$|y_n| = |b + y_n - b| \geq |b| - |y_n - b| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

und

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + a(b - y_n)|}{|y_n b|}$$
$$\leq \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|^2/2} \leq 2\frac{|b| + |a|}{|b|^2}\,\epsilon.$$

□

Bemerkung. Bei der Quotientenformel hatten wir vorausgesetzt, dass

$$y_n \neq 0 \text{ für alle } n, \tag{26}$$

weil sonst die Folge (x_n/y_n) gar nicht definiert ist. Weil aber $b = \lim y_n \neq 0$, ist $y_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n, d.h. für alle n von einem gewissen N an. Die Behauptung bleibt ohne die Voraussetzung (26) richtig, wenn man (x_n/y_n) als $(x_n/y_n)_{n\geq N}$ interpretiert.

Wir erinnern daran, dass für die Konvergenz der Anfang der Folge keine Rolle spielt.

Definition 77. Wir sagen, dass eine Eigenschaft für *fast alle* Folgenglieder gilt, wenn es nur endlich viele Ausnahmen gibt, d.h. wenn die Eigenschaft für alle n von einem gewissen N an richtig ist. Man sagt dann auch, die Eigenschaft sei richtig *für alle hinreichend großen* n.

Satz 78. *Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten*

$$\lim x_n = a, \qquad \lim y_n = b.$$

Es gelte für fast alle n:

$$x_n \leq y_n.$$

Dann folgt

$$a \leq b.$$

Beachten Sie: Wenn $x_n < y_n$ für alle n, so folgt nicht notwendig $a < b$. Finden Sie dafür ein Beispiel.

Beweis. Seien $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$x_n \leq y_n$$

und

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ und } |y_n - b| < \epsilon.$$

Die beiden letzten Ungleichungen bedeuten

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \text{ und } b - \epsilon < y_n < b + \epsilon.$$

Es folgt

$$a - \epsilon < x_n \leq y_n < b + \epsilon.$$

Also haben wir

$$a - \epsilon < b + \epsilon,$$

d.h. $a < b + 2\epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$. Daher ist $a \leq b$. □

Ein wichtiger Begriff ist der der Teilfolge:

Definition 79. Sei (x_n) eine Folge. Eine *Teilfolge* von (x_n) ist eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *natürlicher Zahlen* gibt, so dass

$$y_k = x_{n_k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Man sagt oft einfach: Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n). Die Teilfolge entsteht aus der Originalfolge durch Weglassen von Gliedern, so dass aber noch eine unendliche Folge verbleibt.

Beispiel 80. Die Folge $(1/2n)$ ist eine Teilfolge der Folge $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$.

□

Satz 81. *Ist* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$*, so gilt* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ *für jede Teilfolge* (x_{n_k}) *von* (x_n).

Beweis. Selbst. □

Beispiel 82 (Fibonacci-Quotienten). Die Fibonacci-Folge ist offenbar divergent (konvergent gegen $+\infty$). Wir betrachten die Folge der Quotienten $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots.$$

Ist diese Folge konvergent? Ja, aber der Beweis ist knifflig; zum Beispiel ist die Folge nicht monoton. Sieht man sich die von Rechner gelieferten ersten 20 Glieder an, so kann man aber vermuten, dass

$$x_0 \leq x_2 \leq x_4 \leq \ldots \leq 2 \tag{27}$$

$$x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq \ldots \geq 1. \tag{28}$$

Das beweisen wir: Dividiert man die Rekursion $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ durch a_n, so folgt

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}. \tag{29}$$

Also erfüllen die Fibonacciquotienten eine eigene Rekursionsformel. Aus dieser ergibt sich mit $x_0 = 1, x_1 = 2$ leicht

$$1 \leq x_n \leq 2 \quad \text{für alle } n.$$

Weiter ist

$$x_{n+2} - x_n = 1 + \frac{1}{x_{n+1}} - 1 - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - x_{n+1}}{x_{n-1}x_{n+1}}.$$

Aus $x_2 - x_0 = 0.5 > 0$ folgt also $x_3 - x_1 < 0$ usw. und damit (27), (28). Nach dem Vollständigkeitsaxiom sind die Teilfolgen (x_{2k}) und (x_{2k+1}) konvergent gegen Grenzwerte zwischen 1 und 2. Aber aus $x_n = 1 + 1/x_{n-1}$ folgt

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + 1/x_{n-2}} = 1 + \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-2}}$$

oder

$$(x_n - 1)(x_{n-2} + 1) = x_{n-2}.$$

Ist $a = \lim x_{2k}$, so folgt wie im Beweis von Satz 69

$$(a - 1)(a + 1) = a.$$

Auflösen der quadratischen Gleichung liefert (wegen $1 \leq a \leq 2$)

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

und dasselbe gilt für $\lim x_{2k+1}$. Schließen Sie daraus, dass $\lim x_n = a$ ist.

Übrigens ist a wunderbarer Weise gerade das Verhältnis beim Goldenen Schnitt (Ganze Strecke:Große Strecke=Große Strecke:Kleine Strecke). Wer hätte den Karnickeln das zugetraut!

□

Satz 83 (Existenz monotoner Teilfolgen). *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine reelle Folge. Das Problem beim Beweis ist es zu entscheiden, ob man nach einer monoton wachsenden oder nach einer monoton fallenden Teilfolge suchen soll. Dazu wollen wir für den Augenblick ein x_n *dominant* nennen, wenn es mindestens so groß ist, wie alle folgenden Glieder:

$$x_n \geq x_j \quad \text{für alle } j > n.$$

1. Fall: Es gibt unendlich viele dominante x_n. Dann lassen wir alle andern weg und bekommen eine (nicht notwendig streng) monoton fallende Folge.

2. Fall: Es gibt nur endlich viele dominante x_n. Dann lassen wir zunächst den Anfang der Folge bis zum letzten dominanten weg. Die verbleibende Folge enthält dann kein dominantes Glied mehr, d.h. zu jedem Glied gibt es ein größeres nachfolgendes. Also können wir eine (streng) monoton wachsende unendliche Teilfolge auswählen. □

5.3 Noch einmal Vollständigkeit

Wie entscheidet man, ob eine gegebene Folge konvergent ist, wenn man den Grenzwert nicht kennt? Monotonie und Beschränktheit ist ein hinreichendes, aber offensichtlich kein notwendiges Kriterium. Ein solches wollen wir jetzt angeben:

Definition 84 (Cauchyfolge). Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_n - x_m| < \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N.$$

Beispiel 85. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Ist nämlich (x_n) konvergent gegen a und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - a| < \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq N.$$

Dann ist aber

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N.$$

□

Beispiel 86. Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Cauchyfolge, also auch nicht konvergent.

□

In den reellen Zahlen(!) sind nun umgekehrt Cauchyfolgen immer konvergent.

Satz 87. *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchyfolge. Zunächst ist (x_n) beschränkt. Es gibt nämlich nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$

$$x_N - 1 < x_n < x_N + 1.$$

Also ist die Folge $(x_n)_{n>N}$ beschränkt, und die endlich vielen Glieder $x_0, \ldots, x_{N-1}$ ändern daran nichts.

Als nächstes wählen wir nach Satz 83 eine monotone Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (x_n) aus. Diese ist natürlich wieder beschränkt, also nach dem Vollständigkeitsaxiom konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. An dieser Stelle benutzen wir, dass wir es mit $\mathbb{R}$ zu tun haben!

Schließlich zeigen wir $\lim x_n = a$. Sei also $\epsilon > 0$. Dann gibt es $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon/2 \text{ für alle } k \geq K$$

und $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2 \text{ für alle } m, n \geq N.$$

Wähle ein $k \geq K$ mit $n_k \geq N$. Dann folgt

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Definition 88 (Häufungspunkt). Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt ein *Häufungspunkt* der reellen Folge (x_n), wenn diese eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel 89. Ist $\lim x_n = a$, so ist a ein Häufungspunkt, und zwar der einzige, vgl. Satz 81.

Die Folge $((-1)^n)$ hat die Häufungspunkte $+1$ und -1.

Die Folge (n^2) hat keinen Häufungspunkt.

$\square$

Satz 90 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte reelle Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sie enthält eine monotone Teilfolge. Die ist wieder beschränkt, also konvergent. $\square$

Definition 91 (Supremum und Infimum). Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(i) $S \in \mathbb{R}$ heißt eine *obere Schranke* für A, wenn

$$a \leq S \text{ für alle } a \in A.$$

(ii) $M \in \mathbb{R}$ heißt das *Supremum von* A, wenn M eine obere Schranke von A ist, und es keine kleinere obere Schranke von A gibt. Man schreibt

$$M = \sup A.$$

(iii) Entsprechend definiert man *untere Schranke* und das *Infimum* $\inf A$ *von* A.

(iv) Ist $\sup A \in A$, so nennt man $\sup A$ auch das *Maximum von* A, geschrieben $\max A$.

(v) Entsprechend definiert man das *Minimum von* A.

(vi) A heißt *nach oben (unten) beschränkt*, wenn es eine obere (untere) Schranke besitzt.

Ist $A = \emptyset$, so ist jede reelle Zahl eine obere und untere Schranke für A. Das führt zu der Konvention, dass man

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty$$

schreibt. Ist andrerseits A nach oben bzw. unten unbeschränkt, so schreibt man

$$\sup A = +\infty$$

bzw.

$$\inf A = -\infty.$$

Beispiel 92. Für $A := [0, 1[$ gilt:

- 5 ist eine obere Schranke von A.
- $\sup A = 1$.
- $\max A$ existiert nicht!
- $\inf A = \min A = 0$.

$\square$

Es ist nicht so klar, ob es unter allen oberen Schranken einer Menge wirklich eine *kleinste* gibt, ob also jede Menge $A \subset \mathbb{R}$ ein Supremum besitzt. Wenn man $\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{R}$ nimmt, hat die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$ zwar obere Schranken, unter denen gibt es in $\mathbb{Q}$ aber keine kleinste. In $\mathbb{R}$ ist das anders, aber man muss die Vollständigkeit bemühen. Das zeigt der folgende

Satz 93. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Dann gilt:*

(i) Es gibt in A eine monoton fallende Folge (a_n) und eine monoton wachsende Folge (b_n) mit

$$\lim a_n = \inf A, \quad \lim b_n = \sup A.$$

Dabei sind die Fälle $\sup A = +\infty$ und $\inf A = -\infty$ eingeschlossen. Insbesondere existieren $\inf A$ und $\sup A$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

(ii) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt, so existiert $\sup A \in \mathbb{R}$ bzw. $\inf A \in \mathbb{R}$.

Beweis. Zu (i). 1. Fall: A nicht nach oben beschränkt. Wir definieren die Folge (b_n) rekursiv. Weil 0 keine obere Schranke von A ist, gibt es ein $b_0 \in A$ mit $b_0 \geq 0$. Sind $b_0, \ldots, b_n$ bereits definiert, so ist $n + b_n$ keine obere Schranke für A, und deshalb gibt es ein $b_{n+1} \in A$ mit

$$b_{n+1} \geq n + b_n.$$

Die so konstruierte Folge (b_n) liegt in A, ist monoton wachsend und erfüllt

$$\lim b_n = +\infty = \sup A.$$

2. Fall: A nach oben beschränkt. Wir wählen eine obere Schranke S_0. Weil $A \neq \emptyset$, gibt es $b_0 \in A$, und wir wählen ein solches. Offenbar ist

$$b_0 \leq S_0.$$

Wir definieren nun rekursiv zwei Folgen (b_n) und (S_n) wie folgt: Wir bilden

$$x_n = \frac{b_n + S_n}{2}$$

und definieren

$$S_{n+1} := \begin{cases} x_n & \text{falls } x_n \text{ eine obere Schranke von } A \text{ ist} \\ S_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall setzen wir

$$b_{n+1} := b_n.$$

Im zweiten Fall gibt es ein $a \in A$ mit $x_n < a \leq S_n$, und wir wählen ein solches als b_{n+1}:

$$x_n < b_{n+1} \leq S_n.$$

Dann sind alle $b_n \in A$ und alle S_n obere Schranken von A. Nach Konstruktion ist (b_n) monoton wachsend und (S_n) monoton fallend. Wegen

$$b_n \leq S_0, \qquad b_0 \leq S_n$$

sind die Folgen beschränkt, also konvergent gegen ein b^* bzw. S^*. Weil aber

$$|S_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|S_n - b_n| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}|S_0 - b_0|,$$

ist
$$b^* = S^* =: M.$$
Wir behaupten $M = \sup A$. Wäre M keine obere Schranke von A, so gäbe es ein $a \in A$ mit $a > M$. Weil aber die oberen Schranken S_n gegen M konvergieren, gäbe es dann ein $S_n < a$. Widerspruch. Also ist M eine obere Schranke.

Wäre M nicht die kleinste obere Schranke, so gäbe es eine obere Schranke $S < M$. Weil die $b_n \in A$ gegen M konvergieren, gäbe es dann ein $b_n > S$. Widerspruch. Also ist M die kleinste obere Schranke.

Die Existenz der Folge (a_n) zeigt man ebenso.

Zu (ii). Klar. □

Satz 94 (Intervalle). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht leeres Intervall, d.h. für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ folgt aus $x_1 < x_2 < x_3$ und $x_1, x_3 \in I$, dass auch $x_2 \in I$. Seien*
$$a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$
Dann ist I eine der folgenden Mengen
$$[a,b],\ [a,b[,\ ]a,b],\ ]a,b[,$$
wobei die nicht definierten Fälle $[a,+\infty]$ etc. ausgenommen sind.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass a und b reelle Zahlen sind. Offenbar ist
$$I \subset [a,b].$$
Es genügt also zu zeigen, dass
$$]a,b[\subset I.$$
Nach Satz 93 gibt es aber in I eine monoton fallende Folge $a_n \in I$ mit $\lim a_n = a$ und eine monoton wachsende Folge $b_n \in I$ mit $\lim b_n = b$. Ist $a < x < b$, so gibt es also ein n mit
$$a_n < x < b_n,$$
und nach Voraussetzung ist $x \in I$. Also ist $]a,b[\subset I$.

$a = \inf I = -\infty$ und $b \in \mathbb{R}$, so ist zu zeigen, dass
$$]-\infty, b[\subset I \subset]-\infty, b].$$
In diesem Fall gibt es eine Folge a_n in I mit $\lim a_n = -\infty$. Dasselbe Argument wie oben zeigt dann $]-\infty, b[\subset I$.

Entsprechend schließt man für die verbleibenden Fälle $a \in \mathbb{R}, b = +\infty$ und $a = -\infty, b = +\infty$. □

Definition 95 (Limes superior und inferior). Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir setzen
$$s_n := \sup\{x_k \,|\, k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$
Dann gibt es zwei Fälle:

- Entweder ist $s_0 = +\infty$ und dann $s_n = +\infty$ für alle n, oder

- die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}$ und zwar, weil sich mit wachsendem n die „Konkurrenzmenge“ $\{k \geq n\}$ verkleinert, eine monoton fallende.

Den *Limes superior* der Folge (x_k) definieren wir im letzteren Fall durch

$$\limsup x_n := \lim s_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k \,|\, k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Im ersten Fall setzen wir

$$\limsup x_n := +\infty$$

Also existiert $\limsup x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ für jede reelle Folge (x_n).

Entsprechend definiert man

$$\liminf x_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k \,|\, k \geq n\}.$$

Satz 96. *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann gilt*

(i) Ist $\limsup x_k \in \mathbb{R}$, so ist dies der größte Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Analog für $\liminf$.

(ii) $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn

$$\liminf x_k = a = \limsup x_k.$$

Beweis. Zu (i). Sei $b := \limsup x_k$ und sei

$$s_n := \sup\left\{x_k \,\middle|\, k \geq n\right\}.$$

Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = b$. Wir setze $k_0 = 0$. Sind $k_0 < \ldots < k_m$ schon definiert, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$b - \frac{1}{m+1} < s_n < b + \frac{1}{m+1} \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir wählen ein solches n, welches außerdem $> k_m$ ist. In $\left\{x_k \,\middle|\, k \geq n\right\}$ gibt es eine Folge, die gegen s_n konvergiert. Daher gibt es einen Index $k_{m+1} \geq n > k_m$ mit

$$b - \frac{1}{m+1} < x_{k_m} < b + \frac{1}{m+1}.$$

Die so konstruierte Teilfolge $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert offenbar gegen b. Deshalb ist b ein Häufungspunkt der Folge. Gäbe es einen Häufungspunkt $\tilde{b} > b$, so gäbe es eine gegen $\tilde{b}$ konvergente Teilfolge $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$. Dann ist aber

$$\frac{b+\tilde{b}}{2} < x_{k_m}$$

für alle bis auf endlich viele m. Daher gilt für alle n

$$s_n = \sup\left\{x_k \,\middle|\, k \geq n\right\} \geq \frac{b+\tilde{b}}{2}$$

im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} s_n = b$. Also ist b der größte Häufungspunkt von (x_k).

Zu (ii). Es gilt

$$\inf\left\{x_k \,\middle|\, k \geq n\right\} \leq x_n \leq \sup\left\{x_k \,\middle|\, k \geq n\right\}.$$

Aus $\liminf x_k = a = \limsup x_k$ folgt also $\lim x_k = a$. Ist umgekehrt $\lim x_k = a$, so ist jede Teilfolge auch konvergent gegen a, d.h. a ist der einzige Häufngspunkt der Folge. Aus (i) folgt dann $\liminf x_k = a = \limsup x_k$. □

Lemma 97. *Seien (x_n) eine nicht-negative Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\lim x_n = a \implies \lim \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

Beweis. Aus den Anordnungsaxiomen folgt für nicht negative a, b

$$a < b \iff a^2 < b^2, \tag{30}$$

also $0 \leq a < b \implies \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

1. Fall: $a = 0$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq x_n < \epsilon^2$ für alle $n \geq N$. Dann ist $|\sqrt{x_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{x_n} < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt die Behauptung.

2. Fall: $a > 0$. Dann gilt

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Schlussbemerkung zur Axiomatik der reellen Zahlen. Man kann zeigen, dass die reellen Zahlen durch die Axiome

$$(A1) - (A3), (M1) - (M3), (D), (O1) - (O4) \text{ und } (V)$$

eindeutig bestimmt sind. Je zwei Mengen mit diesen Strukturen sind *isomorph*: Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen ihnen, die alle Strukturen erhält. Und man kann (auf der Basis einfacherer Axiome) ein Modell für die reellen Zahlen konstruieren.

Für das Vollständigkeitsaxiom finden Sie viele alternative äquivalente Formulierungen. Statt (V) kann man auch die Sätze 67 und 87 oder den Satz 93 (vgl. Barner-Flohr) oder die Sätze 67 und 90 als Axiome wählen.

5.4 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Komplexe Folgen (z_n), also Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad n \mapsto z_n$ spielen eine wichtige Rolle in der Analysis. Wir behandeln hier kurz die Konvergenz komplexer Folgen. Wir erinnern an die Konjugierte

$$\bar{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

und den Betrag

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Beachten Sie, dass wir jetzt die Existenz einer eindeutigen Quadratwurzel aus nicht-negativen reellen Zahlen zur Verfügung haben.

Satz 98 (Rechenregeln für die Konjugation). *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\
\overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1\, \bar{z}_2, \\
\overline{z_1 / z_2} &= \bar{z}_1 / \bar{z}_2, \\
\bar{\bar{z}} &= z, \\
z\bar{z} &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \\
\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), &\quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).
\end{aligned}$$

Beweis. Einfach. □

Satz 99 (Rechenregeln für den Betrag). *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{z\bar{z}}, \\
|z_1 z_2| &= |z_1||z_2|, \\
|z_1/z_2| &= |z_1|/|z_2|, \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \quad \textit{(Dreiecksungleichung)}
\end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichung können Sie direkt nachrechnen. Wir beweisen die Dreiecksungleichung. Wenn $z_1 + z_2 = 0$, brauchen wir nichts zu zeigen. Wir nehmen daher an, dass $z_1 + z_2 \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \operatorname{Re} \frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} = \operatorname{Re} \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \operatorname{Re} \frac{z_2}{z_1 + z_2} \\
&\leq \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|}.
\end{aligned}$$

Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit $|z_1 + z_2| > 0$ folgt die Behauptung. □

Wenn man die auf die komplexen Zahlen erweiterte Bedeutung des Absolutbetrags zugrunde legt, kann man die Konvegenz komplexer Folgen genauso wie im Reellen definieren:

Definition 100. Sei (z_n) eine komplexe Folge.

(i) (z_n) heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|z_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N,$$

d.h. wenn die (relle!) Folge $(|z_n - a|)$ gegen 0 konvergiert:

$$\lim |z_n - a| = 0.$$

(ii) (z_n) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|z_n - z_m| < \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N.$$

(iii) (z_n) heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|z_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Monotonie hingegen macht für komplexe Folgen keinen Sinn.

Satz 101. *Die komplexe Folge* (z_n) *ist konvergent gegen* $a \in \mathbb{C}$ *genau dann, wenn*

$$(\operatorname{Re} z_n) \textit{ konvergent gegen } \operatorname{Re} a$$

und

$$(\operatorname{Im} z_n) \textit{ konvergent gegen } \operatorname{Im} a.$$

(z_n) *ist eine Cauchyfolge genau dann, wenn* $(\operatorname{Re} z_n)$ *und* $(\operatorname{Im} z_n)$ *Cauchyfolgen sind.*

Damit ist die Konvergenz komplexer Folgen auf die reeller Folgen zurückgeführt.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| \leq |z - a| = \sqrt{(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a)^2} \\ |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a| \leq |z - a| = \sqrt{(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a)^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Aus $z_n \to a$, also $|z_n - a| \to 0$ folgt daher $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a| \to 0$, also

$$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} a.$$

Entsprechend schließt man für den Imaginärteil.

Umgekehrt folgt mit der rechten Gleichung von (31) aus $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} a$, dass

$$(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a)^2 \to 0.$$

Aus Lemma 97 folgt dann

$$|z_n - a| \to 0,$$

also $z_n \to a$. Die Aussage über Cauchyfolgen ergibt sich ähnlich aus (31). □

Damit zeigt man zum Beispiel:

- Für komplexe Folgen bleiben die Rechenregeln des Satzes 76 richtig.
- Konvergente komplexe Folgen sind beschränkt.
- In $\mathbb{C}$ ist jede Cauchyfolge konvergent.
- Jede beschränkte komplexe Folge besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

6 Stetigkeit

6.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 102 (Umgebung, offen, abgeschlossen). Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

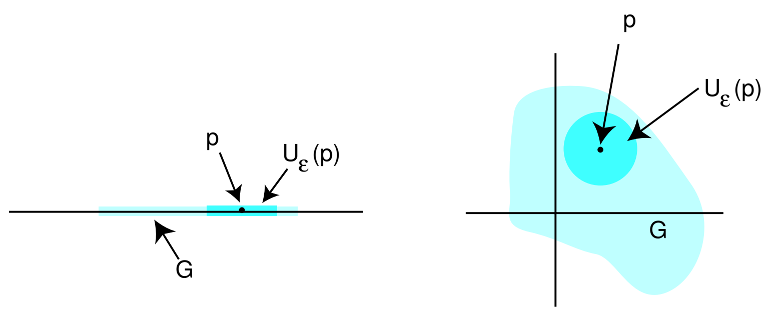
(i) Für $\epsilon > 0$ und $p \in \mathbb{K}$ sei

$$U_\epsilon(p) := \{q \in \mathbb{K} \,|\, |q - p| < \epsilon\}.$$

Wir nennen das die *ϵ-Umgebung von p*. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist

$$U_\epsilon(p) =]p - \epsilon, p + \epsilon[$$

ein offenes, um p symmetrisches Intervall. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $U_\epsilon(p)$ die sogenannte *offene Kreisscheibe* vom Radius ϵ um p.



(ii) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $p \in D$ eine ϵ-Umgebung von p gibt, die ganz in D liegt.

(iii) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{K} \backslash D$ offen ist.

(iv) Ein Punkt $p \in D \subset \mathbb{K}$ heißt ein *innerer Punkt von D*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $U_\epsilon(p) \subset D$.

(v) $p \in \mathbb{R}$ heißt ein *Randpunkt von $D \subset \mathbb{K}$*, wenn p weder innerer Punkt von D noch von $\mathbb{K} \backslash D$ ist.

Beispiel 103. Die offene Kreisscheibe

$$U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$$

um z_0 vom Radius $r > 0$ ist offen im Sinne dieser Definition.

Beweis. Sei $z_1 \in U_r(z_0)$, d.h.

$$|z_1 - z_0| < r.$$

Dann ist $\epsilon := r - |z_1 - z_0| > 0$ und für $z \in U_\epsilon(z_1)$ gilt

$$|z - z_0| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| < \epsilon + |z_1 - z_0| = r$$

Also ist $U_\epsilon(z_1) \subset U_r(z_0)$.

□

Beispiel 104. Ebenso zeigt man, dass offene Intervalle in $\mathbb{R}$ auch im Sinne dieser Definition offen sind.

□

Definition 105. Sei wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) Für $p \in \mathbb{K}$ und $\delta > 0$ sei

$$U_\delta^*(p) := U_\delta(p) \backslash \{p\}.$$

Man nennt das die *punktierte δ-Umgebung von p.*

(ii) Seien $D \subset \mathbb{K}$ und $p \in \mathbb{K}$. p heißt ein *Häufungspunkt von D*, wenn in jeder punktierten Umgebung von p Punkte von D liegen, d.h. wenn gilt:

$$\forall_{\delta > 0}\, U_\delta^*(p) \cap D \neq \emptyset.$$

Definition 106 (Grenzwert von Funktionen). Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $f : \mathbb{K} \supset D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Seien p ein Häufungspunkt von D und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen a ist *der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to p$*, wenn folgendes gilt:

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0}\ f(U_\delta^*(p) \cap D) \subset U_\epsilon(a). \tag{32}$$

Diese Bedingung kann man auch so schreiben:

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} \left(0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon\right).$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \to p} f(x) = a$$

oder

$$f(x) \to a \text{ für } x \to p.$$

Bemerkungen.

1. Der Punkt p muss nicht im Definitionbereich D von f liegen, aber weil er ein Häufungspunkt von D ist, kann x wirklich „in D gegen p gehen".
2. Die Bedingung (32) besagt, dass man die Abweichung des Funktionswertes $f(x)$ von a kontrollieren kann, indem man die Abweichung des Arguments von p kontrolliert.

Beispiel 107. Wir betrachten für $k \geq 1$ die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^k$. Wir behaupten

$$\lim_{z \to 1} z^k = 1.$$

Weil $D = \mathbb{C}$ ist, ist für alle $\delta > 0$

$$U_\delta^*(1) \cap D \neq \emptyset. \tag{33}$$

Weiter gilt für $|z| < 2$

$$|z^k - 1| = |z - 1||z^{k-1} + \ldots + 1| \leq |z - 1|\, k\, 2^{k-1}.$$

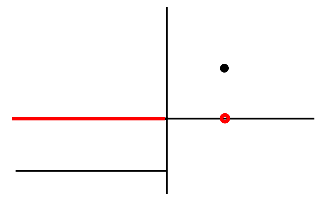
Sei nun $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{2^{k-1}k})$. Ist dann $|z - 1| < \delta$, so ist insbesondere $|z| < 2$. Aus der vorstehenden Abschätzung folgt deshalb für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$|z - 1| < \delta \implies |z^k - 1| < \delta\, k\, 2^{k-1} \leq \epsilon.$$

□

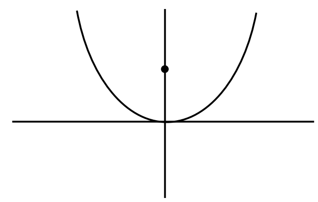
Beispiel 108. Betrachten Sie die beiden nachstehenden Funktionen sehr sorgfältig, um die Grenzwertdefinition genau zu verstehen:

$$f :]-\infty, 0[\, \cup \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := -1 \text{ für } x < 0, \quad f(1) := 1.$$



Hier liegt 0 nicht im Definitionsbereich, aber $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$. Anderseits ist 1 kein Häufungspunkt des Definitionsbereichs, so dass $\lim_{x\to 1} f(x)$ nicht erklärt ist.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := x^2 \text{ für } x \neq 0, \quad f(0) = 1.$$



Hier ist $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

□

Bei Funktionen einer reellen Variablen (und nur bei diesen) kommen öfter auch einseitige Grenzwerte vor:

Definition 109 (Einseitige Grenzwerte). Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $p, a \in \mathbb{R}$ und p ein „linksseitiger Häufungspunkt" von D, d.h . $D \cap]p-\delta, p[\neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$. Wir sagen a ist *der linksseitige Grenzwert von $f(x)$ für $x \to p$*, wenn folgendes gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$

$$p - \delta < x < p \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - a| < \epsilon.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) = a$$

oder

$$f(x) \to a \text{ für } x \nearrow p.$$

Auch die Notation

$$f(p-0) = a \text{ oder } f(p-) = a$$

ist gebräuchlich. Entsprechend definiert man den *rechtsseitigen Grenzwert* $\lim_{x\searrow p} f(x)$.

Beispiel 110. Für die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) =: \frac{x}{|x|}$$

gilt

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = -1, \quad \lim_{x\searrow 0} f(x) = 1$$

aber $\lim_{x\to 0} f(x)$ exisitiert nicht.

□

Lemma 111. *Seien $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in \mathbb{R}$ und für ein $\delta > 0$ sei*

$$]p - \delta, p + \delta[\subset D \cup \{p\}.$$

Dann gilt: Der Grenzwert $\lim_{x\to p} f(x)$ existiert genau dann, wenn in p der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren und beide gleich sind. In diesem Fall ist

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\nearrow p} f(x) = \lim_{x\searrow p} f(x).$$

Beweis. Selbst □

Das nächste Lemma bietet die Möglichkeit, den Grenzwertbegriff für Funktionen auf den für Folgen zurückzuführen.

Lemma 112. *Seien $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}$ und p ein Häufungspunkt von D.Dann ist $\lim_{x\to p} f(x) = a$ genau dann, wenn gilt:*
Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D\backslash\{p\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Entsprechende Aussage gelten auch für komplexe Funktionen oder für einseitige Grenzwerte reeller Funktionen.

Beweis. *Zu ($\Rightarrow$).* Es gelte $\lim_{x\to p} f(x) = a$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D\backslash\{p\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta^*(p) \cap D) \subset U_\epsilon(a)$. Weil $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_\delta^*(p)$ und daher $f(x_n) \in U_\epsilon(a)$ für alle $n \geq N$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Zu ($\Leftarrow$). Nun gelte umgekehrt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D\backslash\{p\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Annahme: Es gilt nicht $\lim_{x\to p} f(x) = a$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für kein $\delta > 0$ gilt $f(U_\delta^*(p) \cap D) \subset U_\epsilon(a)$. Dann gibt es zu $\delta = \frac{1}{n}$ also ein $x_n \in U_\delta^*(p) \cap D$, für das $f(x_n) \notin U_\epsilon(a)$. Die Folge $f(x_n)$ konvergiert also nicht gegen a, obwohl wegen $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ natürlich $\lim x_n = p$. Widerspruch! Also war die Annahme falsch und es gilt doch $\lim_{x\to p} f(x) = a$. □

Dieses Lemma gibt die Möglichkeit, die bestimmte Divergenz (Konvergenz gegen $\pm\infty$) von Folgen auf Funktionen zu übertragen.

Definition 113 (Unendliche Grenzwerte und Grenzwerte in Unendlich). Seien $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir definieren:

$$\lim_{x\to p} f(x) = a,$$

wenn es wenigstens eine Folge (x_n) in $D\backslash\{p\}$ gibt, für die $\lim x_n = p$ ist, und wenn für *jede* solche Folge

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

gilt. Für reelle p und a stimmt das nach dem Lemma mit der bisherigen Definition überein.

Im Komplexen machen „$+\infty$“ oder „$-\infty$“ keinen Sinn, aber es gibt eine sinnvolle Definition für $\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$ und für $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$. Welche?

Beispiel 114. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty,$$

denn es gibt Folgen (x_n) in $\mathbb{R}$, die gegen $+\infty$ gehen, und für jede solche Folge geht auch $y_n := x_n - 1$ gegen $+\infty$ und

$$x_n^k = (1 + y_n)^k \geq 1 + k y_n \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

$\square$

Satz 115 (Rechenregeln für Grenzwerte). *Seien $f, g : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. (Statt $\mathbb{R}$ auch überall $\mathbb{C}$.) Dann gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to p} (f+g)(x) &= \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x), \\ \lim_{x\to p} (fg)(x) &= \lim_{x\to p} f(x) \lim_{x\to p} g(x), \\ \lim_{x\to p} (cf)(x) &= c \lim_{x\to p} f(x), \end{aligned}$$

falls die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Weiter gilt

$$\lim_{x\to p} f(x) = a \neq 0 \implies \lim_{x\to p} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$$

und

$$\lim_{x\to p} |f(x)| = \infty \iff \lim_{x\to p} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Beweis. Selbst. $\square$

Definition 116 (Stetigkeit). Sei f eine reelle oder komplexe Funktion auf D.

f heißt *stetig in* $p \in D$, wenn gilt:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D} \left(|x-p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon \right).$$

f heißt *stetig (auf D)*, wenn es in allen $p \in D$ stetig ist.

Lemma 117. *Seien f eine reelle oder komplexe Funktion auf D und $p \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig in p.*

(ii) $\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0}\, f(U_\delta(p) \cap D) \subset U_\epsilon(f(p))$.

(iii) *Für jede Folge (x_n) in D gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

(iv)

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Beweis. Folgt aus den äquivalenten Formulierungen für Grenzwerte von Funktionen. $\square$

Beispiel 118. Konstante Abbildungen sind stetig. Die identische Abbildung

$$\mathrm{id} : D \to D, \quad x \mapsto x$$

ist stetig.

$\square$

Beispiel 119. Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto |z|$$

ist stetig. Dasselbe gilt für die reelle Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$.

Beweis. Wir zeigen die Stetigkeit in einem beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt nach dem Korollar 9, das genauso wie im reellen Fall auch im komplexen Fall aus der Dreiecksungleichung folgt,

$$|f(z) - f(z_0)| = ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|.$$

Ist also $\epsilon > 0$ gegeben und setzt man $\delta = \epsilon$, so folgt aus $|z - z_0| < \delta$, dass $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

$\square$

Beispiel 120 (Eine unstetige Funktion). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} +1 & \text{für } x \geq 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist in 0 nicht stetig. Für die Folge $(x_n = (-\frac{1}{2})^n)$ gilt $\lim x_n = 0$, aber $\lim f(x_n) = \lim(-1)^n$ existiert nicht und ist deshalb nicht $= f(0)$.

$\square$

Beispiel 121 (Noch eine unstetige Funktion). Für dieses Beispiel greifen wir vor auf die Sinusfunktion, die erst später „offiziell“ eingeführt wird. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

ist an der Stelle 0 unstetig. Die Folge $\left(x_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert nämlich gegen 0, aber $\left(f(x_k) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist divergent. Dieses Beispiel zeigt, dass Unstetigkeiten nicht unbedingt „Sprünge“ sein müssen. begincenter figur4cmunstetig endcenter

Das vorstehende Bild des Graphen wurde mit dem Plot-Befehl von Mathematica erzeugt. Das Programm wertet die Funktion an bestimmten Stellen aus, die es selbst wählt. Die Stellen liegen enger zusammen, wenn die Funktionswerte heftig schwanken, aber das Programm erwischt im allgemeinen natürlich nicht automatisch die Maximal- und Minimalstellen. Deshalb sehen die Spitzen des Graphen so „angenibbelt“ aus.

$\square$

Lemma 122. *Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt in $x \in D$ mit $f(x) \neq 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass*

$$f(U_\delta(x) \cap D) \not\ni 0.$$

Das gilt auch für komplexe Funktionen.

Beweis. Nach Definition der Stetigkeit gibt es zu $\epsilon := |f(x)|$ ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\forall_y (y \in U_\delta(x) \cap D \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon).$$

Insbesondere also $f(y) \neq 0$. □

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich unmittelbar:

Satz 123 (Rechenregeln für stetige Funktionen). *Seien $f, g : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ stetig in $p \in D$. Dann sind auch $f \pm g$ und fg stetig in p. Ist $g(p) \neq 0$, so ist die auf $\{x \in D | g(x) \neq 0\}$ definierte Funktion f/g in p stetig.*
Ist $f : \mathbb{R} \supset D \to G \subset \mathbb{R}$ stetig in p und $g : \mathbb{R} \supset G \to \mathbb{R}$ stetig in $f(p)$, so ist die Komposition $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in p.
Entsprechendes gilt für komplexe Funktionen.

Beispiel 124. Weil die Funktion $x \mapsto x$ stetig ist, sind auch die Potenzen $x \mapsto x^k$ stetig. Weil konstante Funktionen stetig sind, sind dann auch Produkte $x \mapsto a_k x^k$ und Summen von solchen Funktionen stetig. Kurzum: Polynome sind stetig. Rationale Funktionen sind stetig auf ihrem natürlichen Definitionsbereich.

□

Lemma 125. *Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft: $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $p \in D$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f|_{D \cap U_\delta(p)}$ stetig ist.*
Entsprechendes gilt für komplexe Funktionen.

Beweis. Triviale Folge der Definition: Ist (x_n) eine Folge in D, die gegen p konvergiert, so liegen fast alle Folgenglieder in $U_\delta(p)$. Weil $f|_{U_\delta(p)}$ stetig ist, folgt $\lim f(x_n) = f(p)$. □

Dies Lemma wird häufig so benutzt:

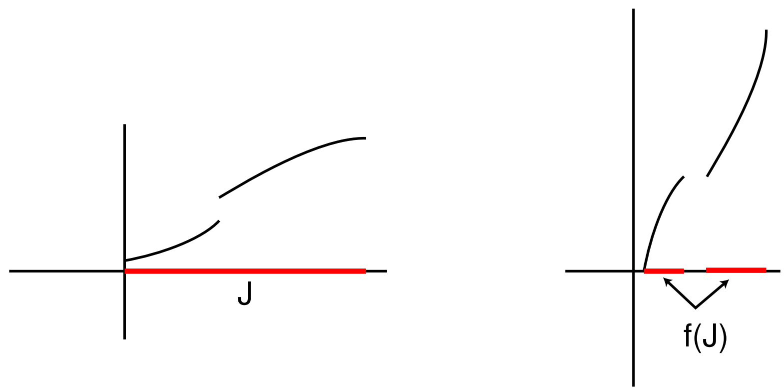
Korollar 126. *Seien $\mathbb{R} \supset G = \bigcup_{i \in I} U_i$ die Vereinigung von offenen Mengen U_i und f eine Funktion auf G. Ist $f|_{U_i}$ stetig für alle $i \in I$, so ist f stetig auf G.*

Beweis. Wir zeigen die Stetigkeit für $p \in G$. Nach Voraussetzung gibt es ein $i \in I$, so dass $p \in U_i$. Insbesondere gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subset U_i$. Aus dem Lemma folgt die Behauptung. □

Satz 127 (Stetigkeit von Umkehrfunktionen). *Sei $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (fallend) auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$$

ist streng monoton wachsend (fallend) und stetig.



Beweis. Wie nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist. Offenbar ist es dann injektiv und es gilt für $x_1, x_2 \in J$

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

Die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ ist also auch streng monoton steigend.

Wir zeigen die Stetigkeit von g in $y_0 = f(x_0) \in f(J)$. Sei also $\epsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$ mit

$$g\left(]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\cap f(J)\right) \subset]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[. \tag{34}$$

Wir zeigen zunächst

$$\exists_{\delta_1 > 0}\, g\left(]y_0 - \delta_1, y_0] \,\cap\, f(J)\right) \subset]x_0 - \epsilon, x_0]. \tag{35}$$

<u>1. Fall: Es gibt $x_1 \in]x_0 - \epsilon, x_0[\cap J$.</u> In diesem Fall wählen wir ein solches x_1 und setzen

$$y_1 := f(x_1), \quad \delta_1 := y_0 - y_1.$$

Dann ist $y_1 = y_0 - \delta_1$ und für

$$y = f(x) \in]y_1, y_0] \cap f(J)$$

gilt

$$x_1 = g(y_1) < g(y) \leq g(y_0) = x_0$$

Damit ist

$$g(]y_0 - \delta_1, y_0] \cap f(J)) \subset]x_0 - \epsilon, x_0].$$

<u>2. Fall: $]x_0 - \epsilon, x_0[\cap J = \emptyset$.</u> Weil J ein Intervall(!) ist, ist dann $x_0 = \inf J$ der linke Eckpunkt von J, und es gilt $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in J$. Setzen wir also $\delta_1 := 1$, so ist

$$]y_0 - \delta_1, y_0] \cap f(J) = \{y_0\}$$

und daher

$$g(]y_0 - \delta_1, y_0] \cap f(J)) = \{x_0\} \subset]x_0 - \epsilon, x_0].$$

Damit ist (35) gezeigt. Ebenso zeigt man:

$$\exists_{\delta_2 > 0}\, g\left([y_0, y_0 + \delta_2[\cap f(J)\right) \subset \; [x_0, x_0 + \epsilon[. \tag{36}$$

Aus (35) und (36) folgt (34) mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\square$

Beispiel 128. Aus den Rechenregeln für Ungleichungen folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$$[0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^k$$

streng monoton wachsend ist. Daher ist

$$[0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[k]{x}$$

ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Als Konsequenz ergibt sich für positive Folgen (x_n)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = 0,$$

vgl. Lemma 97.

□

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung stetiger Funktionen auf offenen Mengen, die fundamental für Verallgemeinerungen des Stetigkeitsbegriffs in der sogenannten *Topologie* ist.

Satz 129. *Sei $f : \mathbb{K} \supset G \to \mathbb{K}$ definiert auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ wieder für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht. Dann gilt:*
f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $U \subset \mathbb{K}$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen ist. Entsprechendes gilt auch für komplexe Funktionen.

Beweis. Sei zunächst f stetig. Sei $U \subset \mathbb{K}$ offen und sei $x \in f^{-1}(U)$, d.h. $f(x) =: y \in U$. Wir müssen zeigen, dass es dann ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ ist. Weil U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(y) \subset U$. Weil f in x stetig ist, gibt es dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$f(U_\delta(x) \cap G) \subset U_\epsilon(y) \subset U,$$

d.h.

$$U_\delta(x) \cap G \subset f^{-1}(U).$$

Weil G offen ist, kann man δ so klein wählen, dass überdies $U_\delta(x) \subset G$, also $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$.

Seien nun die Urbilder offener Menge offen. Sei $x \in G$. Wir wollen zeigen, dass f in x stetig ist. Sei dazu $\epsilon > 0$ gegeben. Dann ist $f^{-1}(U_\epsilon(f(x)))$ offen und enthält x. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x)))$, d.h. für alle y gilt

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

□

6.2 Drei bedeutende Sätze über stetige Funktionen

Wir beweisen in diesem Abschnitt

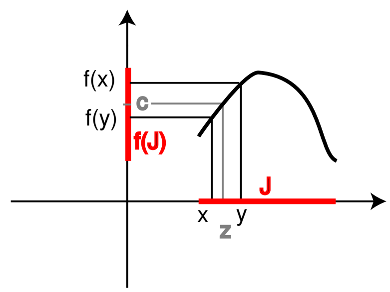
- den Zwischenwertsatz,
- den Satz vom Maximum und
- den Satz über gleichmäßige Stetigkeit.

Ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist eine Menge, die mit je zwei Punkten auch alle Punkte dazwischen enthält. Ist $x < z < y$, und gilt $x \in J$ und $y \in J$, so gilt auch $z \in J$. Vergleichen Sie Definition 10. Stetige Funktionen erhalten diese Eigenschaft:

Satz 130 (Zwischenwertsatz, B. Bolzano 1817). *Sei $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J. Dann ist die Bildmenge $f(J)$ ein Intervall. D.h. sind $f(x)$ und $f(y)$ zwei Funktionswerte von f, so sind auch alle reellen Zahlen dazwischen Funktionswerte von f. Daher der Name* Zwischenwertsatz.

Beweis. Seien also $x, y \in J$ und

$$f(x) < c < f(y).$$



Wir müssen ein $z \in J$ finden, für das $f(z) = c$.
Wir nehmen an, dass $x < y$, den Fall $x > y$ beweist man analog.
Wir setzen $x_0 := x, y_0 := y$ und bilden rekursiv definierte Folgen (x_n), (y_n) wie folgt:

Wir bilden den Mittelpunkt von x_n und y_n

$$z_n := \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Weil J ein Intervall ist(!), ist $z_n \in J$, und wir können $f(z_n)$ betrachten.

Ist $f(z_n) = c$, so setzen wir $z = z_n$ und sind fertig.

Ist $f(z_n) < c$, so setzen wir

$$x_{n+1} = z_n, \quad y_{n+1} = y_n.$$

Ist $f(z_n) > c$, so setzen wir

$$x_{n+1} = x_n, \quad y_{n+1} = z_n.$$

Wenn diese Konstruktion nicht abbricht, weil für ein $n \in \mathbb{N}$ schon $f(z_n) = c$ gilt, erhalten wir auf diese Weise zwei monotone Folgen

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0$$

mit

$$0 \leq y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \ldots \leq \frac{1}{2^{n+1}}(y_0 - x_0). \tag{37}$$

und

$$f(x_n) < c < f(y_n). \tag{38}$$

für alle n. Als monotone beschränkte Folgen sind (x_n) und (y_n) konvergent. Wegen (37) konvergieren sie gegen denselben Wert $z \in [x, y] \subset J$, und *weil f stetig ist*, folgt aus (38), dass $f(z) \leq c \leq f(z)$, also $f(z) = c$. $\square$

Korollar 131. *Ist $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und sind $x, y \in J$ mit*

$$f(x)f(y) < 0,$$

d.h. hat f an diesen Stellen verschiedenes Vorzeichen, so gibt es zwischen x und y eine Nullstelle von f.

Beweis. Sei etwa $x < y$. Der Zwischenwertsatz angewendet auf $f|_{[x,y]}$ sagt dann, dass $f([x, y])$ ein Intervall ist. Weil es positive und negative Zahlen enthält, enthält es dann auch die 0. $\square$

Korollar 132 (Monotonie und Injektivität). *Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ streng monoton.}$$

Beweis. "$\Leftarrow$". Trivial.

"$\Rightarrow$". Das beweisen wir indirekt: Wir nehmen an, dass f injektiv ist, aber weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend.

Wenn f nicht streng monoton fallend ist, gibt es $x_1, x_2 \in J$ mit

$$x_1 < x_2 \text{ und } f(x_1) \leq f(x_2).$$

Weil f injektiv ist, gilt dann auch rechts eine echte Ungleichung, also

$$x_1 < x_2 \text{ und } f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

Wenn f nicht streng monoton wachsend ist, gibt es ebenso $y_1, y_2 \in J$ mit

$$y_1 < y_2 \text{ und } f(y_1) - f(y_2) > 0.$$

Betrachte die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := f((1 - t)x_1 + ty_1) - f((1 - t)x_2 + ty_2).$$

Diese Funktion ist als Komposition stetiger Funktionen stetig auf dem Intervall $[0, 1]$. Weiter ist

$$g(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0, \quad g(1) = f(y_1) - f(y_2) > 0.$$

Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t \in]0, 1[$ mit $g(t) = 0$, also mit

$$f((1 - t)x_1 + ty_1) = f((1 - t)x_2 + ty_2).$$

Aber nach den Rechenregeln für Ungleichungen gilt

$$(1 - t)x_1 + ty_1 < (1 - t)x_2 + ty_2.$$

Das ist ein Widerspruch zur Injektivität von f. $\square$

Satz 133 (vom Maximum, K. Weierstraß 1861). *Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem nicht leeren kompakten (=abgeschlossenen und beschränkten) Intervall nimmt ihr Maximum und Minimum an. D.h. es gibt $x^*, y^* \in [a, b]$ mit*

$$f(x^*) \leq f(x) \leq f(y^*)$$

für alle $x \in [a, b]$. Insbesondere ist die Funktion f beschränkt.

Für komplexwertige Funktionen machen die Begriffe *Maximum* und *Minimum* keinen Sinn. Allerdings läßt sich der Satz erheblich erweitern, vgl. nächstes Semester.

Beweis. Sei $M := \sup f([a, b]) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann gibt es eine Folge (y_n) in $[a, b]$ mit

$$\lim f(y_n) = M.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß können wir o.E. annehmen, dass die Folge (y_n) konvergent ist gegen ein $y^* \in [a, b]$. Weil f stetig ist, folgt

$$f(y^*) = f(\lim y_n) = \lim f(y_n) = M.$$

Insbesondere ist $M < +\infty$. □

Für das dritte wichtige Resultat über stetige Funktionen brauchen wir noch einen neuen Begriff.

Wir erinnern an die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit: Die Funktion f war stetig auf D, wenn galt

$$\forall_{x \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in D} (|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon).$$

Stetigkeit bedeutete nämlich Stetigkeit in jedem Punkt x. Die „Qualität der Stetigkeit“ kann man als „schlecht“ bezeichnen, wenn man ein relativ zum vorgegebenen $\epsilon > 0$ sehr kleines δ benötigt, und als gut, wenn man mit einem relativ großen δ auskommt. Im allgemeinen wird die Qualität vom Punkt x abhängen. Der Begriff „gleichmäßige Stetigkeit“ impliziert, dass das im speziellen Fall eben nicht so ist, sondern dass man bei gegebenem $\epsilon > 0$ für alle $x \in D$ dasselbe $\delta > 0$ nehmen kann:

Definition 134 (Gleichmäßige Stetigkeit). Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Funktion $f : \mathbb{K} \supset D \to \mathbb{K}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D, wenn gilt:

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x, y \in D} (|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon).$$

Beachten Sie: f ist gleichmäßig stetig immer nur *auf einer bestimmten Menge.* „Gleichmäßig stetig in einem Punkt“ oder „an einer Stelle“ macht keinen Sinn.

Beispiel 135. Für $a > 0$ betrachten wir die Funktion

$$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann ist für $x, y > a$

$$|f(y) - f(x)| = \frac{|y - x|}{xy} \leq \frac{1}{a^2} |y - x|.$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle man $\delta = a^2 \epsilon$, und aus $|y - x| < \delta$ folgt $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Man sieht hier, dass der Wert a maßgeblich für die Wahl von δ ist. Je kleiner a ist, umso kleiner muss man (relativ zu ϵ) das δ wählen. Tatsächlich ist

$$]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Beweisen Sie das!

□

Satz 136 (Gleichmäßige Stetigkeit, E. Heine 1872). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.*

Beweis. Annahme: f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, zu dem kein einheitliches $\delta > 0$ existiert. Wir wählen ein solches $\epsilon > 0$. Dann sind auch die Zahlen $\frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ kein einheitliches δ, d.h. es gibt Folgen $(x_k), (y_k)$ in $[a, b]$ mit

$$|y_k - x_k| < \frac{1}{k}, \text{ aber } |f(y_k) - f(x_k)| \geq \epsilon.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $x^* = \lim_{i\to\infty} x_{k_i}$. Weil $a \leq x_k \leq b$ für alle k, ist auch $x^* \in [a, b]$. Weil

$$|y_{k_i} - x_{k_i}| < \frac{1}{k_i} \to 0,$$

ist auch $\lim_{i\to\infty} y_{k_i} = x^*$. Daher ist

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{k_i}) = f(x^*) = \lim_{i\to\infty} f(y_{k_i}).$$

Das widerspricht aber der Ungleichung

$$|f(y_{k_i}) - f(x_{k_i})| \geq \epsilon \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

□

Bemerkungen.

1. Der Definitionsbereich D muss bei den beiden letzten Sätzen nicht unbedingt ein Intervall und auch keine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein. In den Beweisen war nur folgende Eigenschaft wichtig:

   Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in D. Solche Teilmengen D von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ nennt man *kompakt*. Die Sätze gelten also für stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich D. Beim Satz über das Maximum müssen die Funktionswerte offenbar reell sein, beim Satz über die gleichmäßige Stetigkeit können sie auch komplex sein.

2. Während die Bedeutung von Zwischenwertsatz und Satz vom Maximum ziemlich einleuchtend ist, ist die des Satz von der Gleichmäßigen Konvergenz weniger naheliegend. Er kommt erst im Satz 172 und dann wieder in der Integrationstheorie (im Beispiel 198) "zum Einsatz".

7 Differentiation

7.1 Die Ableitung

Wir kommen nun zur Differentialrechnung, die für die moderne Naturwissenschaft von fundamentaler Bedeutung ist. Warum? Unsere Modelle von der Natur sind weitgehend deterministisch: Wir sind überzeugt, dass die zukünftigen Zustände eines Systems bestimmt sind, durch die *Änderungen*, die dieses System erfährt, und dass diese Änderungen durch (äußere und innere) Einwirkungen verursacht und gesteuert werden (Kausalität). Nach dem Newtonschen Gesetz bewirkt zum Beispiel die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft eine Änderung von dessen Geschwindigkeit.

Mit *Änderung* meinen wir ein momentanes Geschehen, die Änderung in jedem Augenblick, und die *Ableitung* einer zeitabhängigen Funktion beschreibt eben gerade dies. Deshalb formulieren wir die Naturgesetze meistens als Differentialgleichungen: von Schwingungsphänomenen bis zur Reibung von Zahnrädern, von der Wärmeleitung bis zur Strömungsmechanik, von der Beschreibung elektrischer Netzwerke bis zur Steuerung chemischer Prozesse bieten Differentialgleichungen die wichtigsten Modelle, so wichtige, dass in der mathematischen Physik das Wort „Modell“ oft synonym für „Differentialgleichung“ verwendet wird. Und die Differentialrechnung legt hier die Grundlagen.

Generalvoraussetzung. In diesem Abschnitt sei $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall mit mehr als einem Punkt oder auf einer nichtleeren offenen Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$. Als Wertebereich der Funktion nehmen wir meist die reellen Zahlen, die folgende Definition und viele Aussagen machen aber auch Sinn und bleiben richtig, wenn die Werte von f komplex sind. Dagegen soll das Argument einstweilen reell sein, die Differentialrechnung für Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist überraschenderweise eine ganz andere Theorie (Komplexe Analysis).

Definition 137. $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in J$ *differenzierbar*, wenn

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. $f'(x_0)$ heißt dann *die Ableitung* von f in x_0. Man nennt f differenzierbar auf J, wenn es in allen $x_0 \in J$ differenzierbar ist.

Zur Notation. Statt f' schreibt man auch $\frac{df}{dx}$. Das ist einerseits etwas inkonsequent, weil der Name der Variablen beliebig ist, so dass man nicht x auszeichnen sollte. Andrerseits ist es sehr bequem, zum Beispiel Potenzfunktionen einfach als x^n zu schreiben. Dafür erhält man dann, wie Sie aus der Schule wissen und wir gleich beweisen werden,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Wir werden zum Beispiel

$$\sin' = \cos$$

oder

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

nebeneinander verwenden.

Wenn das Argument von f die Zeit bezeichnet, schreibt man dafür gern t statt x, und bezeichnet die Ableitung mit einem Punkt statt mit einem Strich:

$$\dot{f} := \frac{df}{dt}\,.$$

Wie die Stetigkeit ist auch die Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft einer Funktion. Ob f in x_0 differenzierbar ist, hängt nur von den Werten von f in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 ab. Wie für stetige Funktionen gilt daher: Ist f auf einer offenen Menge J definiert, ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen mit $J = \bigcup U_i$ und ist $f|_{U_i}$ für jedes i differenzierbar, so ist $f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Vgl. Lemma 125 und das folgende Korollar.

Bemerkung. Es ist wichtig, verschiedene Umformulierungen der Differenzierbarkeits-Definition zur Verfügung zu haben.

1. Man kann $x - x_0$ als neue Variable einführen, die man zum Beispiel Δx oder h nennt, und x statt x_0 schreiben. Dann ist also f in x differenzierbar, wenn
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
in $\mathbb{R}$ existiert.

2. Für $h \neq 0$ kann man die Funktion
$$\alpha(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \tag{39}$$
definieren, und falls f in x differenzierbar ist, findet man
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0.$$
Gibt es umgekehrt $b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion α mit
$$f(x+h) = f(x) + bh + \alpha(h)h, \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0,$$
so folgt für $h \neq 0$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - b = \alpha(h) \to 0,$$
und f ist in x differenzierbar mit Ableitung b.

3. Verwendet man statt α die Funktion $R(x+h) = \alpha(h)h$, so findet man nach rückgängig gemachter Variablensubstitution:
f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es $b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $R : J \to \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$f(x) = f(x_0) + b(x - x_0) + R(x) \text{ und } \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$
In diesem Fall ist $f'(x_0) = b$.

Beispiel 138. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$. Dann ist f differenzierbar mit der Ableitung
$$f'(x) = nx^{n-1}.$$
Es ist nämlich
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}) = nx^{n-1}.\end{aligned}$$
□

Beispiel 139. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$. Dann ist f in 0 nicht differenzierbar, denn

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 \text{ für } h > 0 \\ -1 \text{ für } h < 0 \end{cases} .$$

Der Grenzwert für $h \to 0$ existiert nicht. Andrerseits war diese Funktion auch in 0 stetig.

□

Ein Beispiel für eine stetige Funktion, die *nirgends* differenzierbar ist, finden Sie in Barner-Flohr, § 8.1.

Hingegen gilt:

Satz 140. *Differenzierbare Funktionen sind stetig.*

Beweis.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad \text{für } x \to x_0.$$

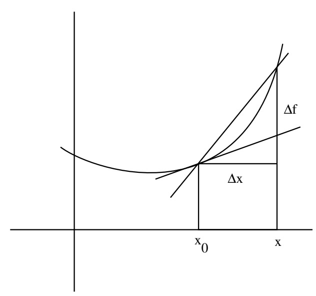
□

Geometrische Interpretation: Die Tangente.

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$. Der Grenzwert $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen an.

Die **Gleichung der Tangente** durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist also gegeben durch

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$



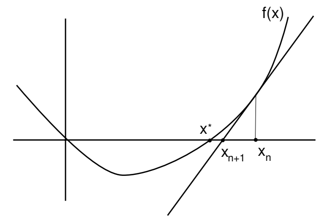
Differenzierbarkeit kann man auch auffassen als die Eigenschaft einer Funktion, eine Tangente an den Graphen zu besitzen. Vergleichen Sie insbesondere das obige (Gegen)beispiel der Funktion $|x|$.

Beispiel 141 (Newtonverfahren). Beim Newtonverfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f beginnt man mit einem Wert x_1 möglichst nah an einer vermuteten Nullstelle. Dann ermittelt man den Schnittpunkt x_2 der Tangente an den Graphen in diesem Punkt mit der x-Achse. Oft ist dies eine bessere Approximation für die Nullstelle. Iteration dieses Verfahrens liefert eine Folge, die unter gewissen, hier nicht diskutierten Voraussetzungen gegen eine Nullstelle x^* von f konvergiert. Die Formel für die Iteration erhält man durch Auflösen der Gleichung

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Es ergibt sich

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.}$$



Wählt man etwa $f(x) = x^k - b$, so findet man die bekannte Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - b}{kx_n^{k-1}} = x_n\left(1 + \frac{1}{k}(\frac{b}{x_n^k} - 1)\right),$$

vgl. Satz 69.

$\square$

Analytische Interpretation: Lineare Approximation. Die einfachsten Funktionen (nach den Konstanten) sind sicherlich die linearen Funktionen $a + bx$ mit konstanten a, b. Die Tangente ist der Graph einer solchen Funktion und die Umformulierung 3 der Differenzierbarkeitsdefinition liefert:

Eine Funktion ist an der Stelle x differenzierbar genau dann, wenn sie sich dort durch eine lineare Funktion approximieren läßt, so dass der Fehler schneller als linear verschwindet:

$$f(x+h) = f(x) + bh + R(h) \quad \text{ mit } \lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h} = 0.$$

Alternativ: Eine Funktion ist an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann, wenn sie sich dort durch eine lineare Funktion approximieren läßt, so dass der Fehler schneller als linear verschwindet:

$$f(x) = f(x_0) + b(x - x_0) + R(x) \quad \text{ mit } \lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Physikalische Interpretation: Die Geschwindigkeit. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit v, so legt er in der Zeit Δt die Strecke

$$\Delta s = v\Delta t$$

zurück. Umgekehrt kann man aus der Strecken- und Zeitdifferenz die Geschwindigkeit ermitteln:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Bewegt sich der Punkt mit variabler Geschwindigkeit, und hat er zur Zeit t die Strecke $s(t)$ zurückgelegt, so kann man annehmen, dass wenigstens im *kleinen* Zeitabschnitt von t bis $t + \Delta t$ die Geschwindigkeit $v(t)$ annähernd konstant ist, also

$$v(t) \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} := \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Durch Grenzübergang $\Delta t \to 0$ erhält man die *Momentangeschwindigkeit* $v(t)$ zur Zeit t:

$$v(t) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Satz 142 (Rechenregeln für die Ableitung). *Seien* $f, g : J \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x \in J$ *und sei* $c \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch die Funktionen $f + g, cf, fg : J \to \mathbb{R}$ *in* x *differenzierbar.*
Hat g *keine Nullstellen in* J *so ist auch* $f/g : J \to \mathbb{R}$ *in* x *differenzierbar.*
In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x),\\ (cf)'(x) &= cf'(x),\\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

Beweis. Nicht schwer. □

Beispiel 143. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abildung

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Dazu kann man die Quotientenregel benutzen:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

□

Satz 144 (Kettenregel). *Seien* $g : \mathbb{R} \supset I \to J$ *in* $x \in I$ *und* $f : J \to \mathbb{R}$ *in* $g(x)$ *differenzierbar. Dann ist* $f \circ g$ *in* x *differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Beweis. Wir setzen $y := g(x)$. Es sei

$$\begin{aligned}g(x + \Delta x) &= g(x) + g'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad &\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0\\ f(y + \Delta y) &= f(y) + f'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y, \qquad &\lim_{\Delta y \to 0} \beta(\Delta y) = 0.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f(g(x + \Delta x)) &= f(g(x) + \underbrace{g'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}_{=:\Delta y})\\ &= f(g(x)) + f'(y)\Delta y \quad + \beta(\Delta y)\Delta y\\ &= f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)\Delta x\\ &\quad + \underbrace{[f'(y)\alpha(\Delta x) + \beta(g'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x)(g'(x) + \alpha(\Delta x))]}_{=:\gamma(\Delta x)}\Delta x.\end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \gamma(\Delta x) = 0,$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 145 (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei $f : J \to I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar und umkehrbar mit der differenzierbaren Umkehrfunktion $g = f^{-1} : I \to J$. Aus

$$x = f(g(x))$$

folgt dann durch Differentiation und Anwendung der Kettenregel:

$$1 = f'(g(x))g'(x),$$

also

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

□

In diesem Beispiel folgt $f'(y) \neq 0$, weil $f'(y)g'(f(y)) = 1 \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass diese Bedingung umgekehrt auch hinreichend für die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion ist.

Satz 146 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall J streng monoton und stetig. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $f(J)$. Sei f differenzierbar in $x_0 \in J$ und*

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{40}$$

Beweis. Wir schreiben $g := f^{-1}$. Dann gilt für $y \neq y_0 \in f(J)$

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(x_0)}{g(y) - x_0}}. \tag{41}$$

Weil f in x_0 differenzierbar ist, ist die Funktion

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0. Weil g nach Satz 127 in y_0 stetig und $g(y_0) = x_0$ ist, folgt

$$\lim_{y \to y_0} \phi(g(y)) = \phi(x_0) = f'(x_0). \tag{42}$$

Weil $f'(x_0) \neq 0$, folgt aus (41) und (42) die Behauptung. □

Beispiel 147. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$ ist differenzierbar und umkehrbar, aber $f'(0) = 0$. Die Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist in 0 nicht differenzierbar. Das ist anschaulich klar, weil die Tangente an den Graphen Steigung $= \infty$ hat. Wie sieht ein exakter Beweis dafür aus? In allen $x \neq 0$ ist die dritte Wurzel nach dem Satz aber differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$(\sqrt[3]{})'(x^3) = \frac{1}{3x^2} = \frac{x}{3x^3}$$

und daher

$$(\sqrt[3]{})'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \left(= \frac{1}{3} x^{2/3} \right).$$

$\square$

Beispiel 148. Die Funktion $f : \mathbb{R} \supset J \to \;]0, \infty[$ sei differenzierbar mit $f' = f$. Dann ist $f' > 0$ und, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, f streng monoton wachsend. Es besitzt also eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$. Für diese gilt

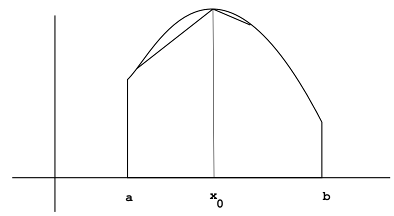
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}.$$

$\square$

7.2 Der Mittelwertsatz

Wir kommen nun zum wichtigsten Satz der Differentialrechnung, dem Mittelwertsatz. Zur Vorbereitung stellen wir fest:

Wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem <u>inneren</u> Punkt x_0 ihres Definitionsbereiches ihr Maximum annimmt, dann haben die Sekanten links davon eine Steigung ≥ 0 und die Sekanten rechts davon eine Steigung ≤ 0.



Ist f in x_0 differenzierbar, so ist die Ableitung $f'(x_0)$ als Grenzwert der Sekantensteigungen einerseits ≥ 0, andrerseits aber ≤ 0 und deshalb $= 0$.

Satz 149 (Notwendiges Extremwertkriterium). *Nimmt die Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ ihr Maximum (oder Minimum) in einem* inneren *Punkt x_0 des Intervalls J an, und ist sie dort differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.*

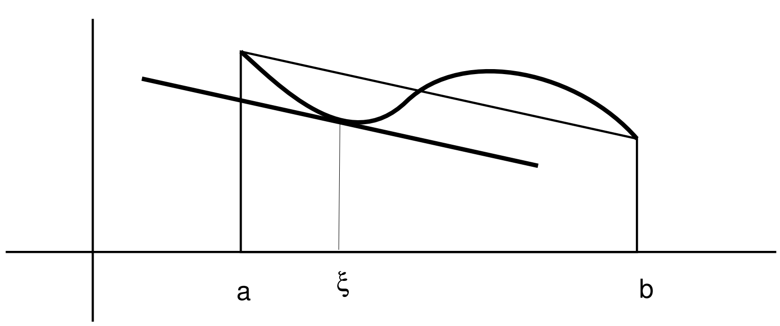
In Randpunkten muss das natürlich nicht so sein. Ist $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind die einzigen Stellen, die für Extremwerte von f *in Frage kommen* die Endpunkte a, b und die Punkte, wo die Ableitung $f'(x)$ verschwindet. Typischerweise sind das endlich viele Punkte, und man kann dann nachrechnen, wo f am größten bzw. kleinsten ist. Das ist dann wirklich das Maximum oder Minimum, weil f stetig auf einem kompakten Intervall ist.

Nun zum angekündigten

Satz 150 (Mittelwertsatz, Lagrange 1797). *Sei $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{43}$$

Anschaulich bedeutet das, dass es irgendwo eine Tangente gibt, die parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist:



Beweis. Die Sekante ist der Graph von

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Wenn man die Parallelen zur Sekante betrachtet, erkennt man, dass ξ ein guter Kandidat ist, wenn $(\xi, f(\xi))$ am weitesten von der Sekante entfernt ist. Der Abstand eines Punktes von der Sekante (versehen mit Vorzeichen) ist aber proportional zu seiner Höhe über der Sekante. Deshalb suchen wir nach einem Extremwert von $h(x) = f(x) - s(x)$ im Inneren $]a, b[$ des Intervalls. Für die entsprechende Stelle ξ ist dann

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

und wir sind fertig.

Weil h stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist, nimmt es sein Maximum und Minimum an. Sind beide gleich, so ist h konstant und $h'(\xi) = 0$ für alle ξ.

Andernfalls wird wegen $h(a) = h(b)$ wenigstens eines der beiden in einem inneren Punkt ξ angenommen, und wir sind auch fertig. □

Warum ist der Mittelwertsatz wichtig? Zunächst sagt der Mittelwertsatz nichts darüber aus, wo ξ eigentlich liegt. Vielleicht gibt es ja auch mehrere solche Stellen, vgl. Abbildung. Die wichtigen Anwendungen des Mittelwertsatzes „laufen andersherum“: Sie betreffen Situationen, wo man das Verhalten der Ableitung (überall!) sehr gut kennt, und daraus Schlüsse auf die Funktion zieht.

Der Mittelwertsatz ist die Brücke von Ableitungsinformationen zu Informationen über die Funktion selbst.

Satz 151 (Schrankensatz). *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar und sind $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in]a, b[$, so ist*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Beweis. Es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

und daraus folgt wegen $b - a > 0$ und $m \leq f'(\xi) \leq M$ die Behauptung. □

Wichtig ist, dass man den Mittelwertsatz natürlich auch auf jedes Teilintervall $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ anwenden kann, wie im Beweis des folgenden Satzes:

Satz 152 (Monotoniekriterium). *Sei $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und differenzierbar mit $f'(x) > 0$ in allen inneren Punkten x von J. Dann ist f streng monoton steigend (wachsend):*

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Hat man nur $f'(x) \geq 0$, so folgt die schwache Monotonie: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Entsprechendes gilt für $f' < 0$ bzw. $f' \leq 0$.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in J$ mit $x_1 < x_2$. Dann ist nach dem Mittelwertsatz für ein ξ zwischen x_1 und x_2

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0,$$

also $f(x_1) < f(x_2)$. Entsprechend für die anderen Fälle. □

Eine ganz wichtige Konsequenz des Mittelwertsatzes kombiniert die Monotonieaussagen: Funktionen, die gleichzeitig monoton wachsen und fallen, sind konstant.

Satz 153 (Konstanzkriterium). *Ist $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und differenzierbar mit $f' = 0$ im Inneren von J, so ist f konstant auf J.*

Beachten Sie: Aus der Definition der Ableitung folgt trivial, dass konstante Funktionen die Ableitung 0 haben. Hier wird aber die *Umkehrung* behauptet und aus dem Mittelwertsatz bewiesen. Es ist eben nicht so klar, dass alle Sekanten die Steigung null haben, wenn die *Grenzwerte* der Sekantensteigungen alle null sind. Wenn der Grenzwert einer Folge null ist, können die Folgenglieder ja durchaus positiv sein!

Haben zwei differenzierbare Funktionen auf einem Intervall dieselbe Ableitung, so unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante. Dies ist eine oft benutzte Umformulierung des Konstanzkriteriums.

7.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und Potenzen

Exponentialfunktion

Viele Wachstums- und Zerfallsprozesse folgen –wenigstens über gewisse Stadien hin– dem Gesetz, dass das Wachstum, also die zeitliche Änderung $f'(t)$ proportional zur vorhandenen Menge f ist:

$$f' = af \tag{44}$$

mit einer Konstanten a, deren Vorzeichen über Wachstum bzw. Abnahme entscheidet. Dieses Gesetz findet man von der Zinseszinsrechnung über den radioaktiven Zerfall, den Wärmeausgleich zwischen Medien verschiedener Temperatur, die Kinematik von Bremsvorgängen, chemische oder elektrostatische Sättigungsvorgänge etc. bis hin zur Populationsdynamik oder Modellen für die Ausbreitung von Seuchen.

Die Gleichung (44) ist eine sogenannte *Differentialgleichung* für eine gesuchte Funktion f, die in der Theorie der Differentialgleichungen auch gern mit y bezeichnet wird. Wir wollen den Spezialfall $a = 1$ betrachten, also die Gleichung

$$y' = y.$$

Ist y eine Lösung, so auch jedes Vielfache von y. Wir fordern deshalb zusätzlich eine Normierung, nämlich $y(0) = 1$.

Satz 154 (und Definition: Exponentialfunktion). *Es gibt genau eine differenzierbare Funktion* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$y' = y, \qquad y(0) = 1. \tag{45}$$

Diese Funktion heißt die Exponentialfunktion. *Sie wird mit* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oder auch mit* $x \mapsto e^x$ *bezeichnet.*

Beweis. 1. Existenz: Für $k \geq 1$ gilt $\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$. Setzt man nun $y_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, so ist also $y_n(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$ und $y_n' = y_{n-1}$. Man kann zeigen, dass

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)' = \lim_{n\to\infty} y_n' = \lim_{n\to\infty} y_{n-1} = \lim_{n\to\infty} y_n$$

gilt, genauer, dass $y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ eine differenzierbare Funktion mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Der Beweis ist ad hoc mühsam, und wir geben ihn später in einem natürlicheren Zusammenhang, vgl. Abschnitt 10.6. Einen anderen Beweis geben wir in Beispiel 217. Es ist aber logisch kein Problem, wenn wir im weiteren Gang der Vorlesung die Existenz einfach als gegeben hinnehmen: Wir werden die Exponentialfunktion bei der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung nur als Beispiel, nicht als konstituierendes Element benötigen und benutzen.

2. Einzigkeit: Dazu zeigen wir zunächst folgendes

Lemma 155. *Sind* $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zwei Funktionen, die* (45) *erfüllen, so gilt*

$$y_1(x)y_2(-x) = 1 \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Insbesondere hat keine der beiden Funktionen eine Nullstelle.

Das ist klar für $x = 0$. Außerdem gilt für die Funktion

$$g : x \mapsto y_1(x)y_2(-x),$$

dass

$$g'(x) = y_1'(x)y_2(-x) + y_1(x)y_2'(-x)(-1) = y_1(x)y_2(-x) - y_1(x)y_2(-x) = 0.$$

Also ist g konstant und das Lemma bewiesen.

Nun zum Beweis der Einzigkeit. Wenden wir das Lemma an auf $y_1 = y_2 = y$, so folgt $y(x) \neq 0$ für alle x und

$$y(-x) = \frac{1}{y(x)}. \tag{47}$$

Wenden wir nun das Lemma an auf zwei Lösungen y_1, y_2, so folgt

$$y_1(x) \underset{(46)}{=} \frac{1}{y_2(-x)} \underset{(47)}{=} y_2(x).$$

Also sind je zwei Lösungen von (45) gleich. □

Wir wollen nun die wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktion aus der definierenden Differentialgleichung herleiten.

Trivialerweise ist

$$\exp' = \exp,$$
$$\exp 0 = 1.$$

dem vorstehenden Beweis folgt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Und weil exp differenzierbar, also stetig auf $\mathbb{R}$ ist und keine Nullstellen hat, folgt aus $\exp 0 = 1 > 0$ und dem Zwischenwertsatz

$$\exp > 0.$$

Dann ist aber auch $\exp' = \exp > 0$, d.h.

$$\exp \text{ ist streng monoton wachsend.}$$

Aus dem Schrankensatz 151 folgt für $x > 0$

$$\exp(x) - \exp(0) \geq x \inf_{\xi > 0} \exp'(\xi) = x \exp(0) = x$$

und daraus

$$\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \exp x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\exp x} = 0.$$

Noch einmal bemühen wir den Zwischenwertsatz und erhalten

$$\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[.$$

Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist eine Bijektion.

Eine weitere sehr wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion formulieren wir als

Satz 156 (Additionstheorem der Exponentialfunktion). *Es gilt für alle* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

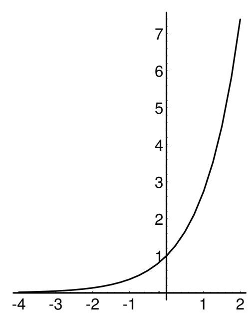
$$\exp(x_1 + x_2) = (\exp x_1)(\exp x_2).$$

Beweis. Geht nach dem nun schon langweilig werdenden Muster: Betrachte die Funktion

$$g(x) := \exp(x_1 + x)\exp(-x).$$

Rechne nach, dass $g'(x) = 0$, also $g(x) = g(0) = \exp x_1$. Mit $\exp(-x) = 1/\exp x$ folgt die Behauptung. $\square$

Graph. Damit haben wir wesentliche qualitative Charakteristika der Exponentialfunktion bewiesen. Wie man *quantiative* Informationen über $\exp x$ bekommt, erfahren Sie im Abschnitt über die Taylorapproximation 8.2. Mit den dort erarbeiteten Methoden kann man Funktionswerte von exp berechnen und findet für den Graphen folgendes Bild:



Logarithmus

Definition 157 (Logarithmus). Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist eine Bijektion. Die Umkehrfunktion heißt der *(natürliche) Logarithmus*

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

Statt ln finden Sie auch log.

Die Logarithmusfunktion ist wieder streng monoton und nach Satz 146 differenzierbar. Nach Beispiel 148 gilt

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgen weitere Eigenschaften des Logarithmus, zum Beispiel

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$$

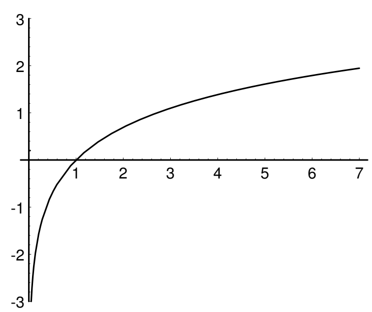
und die fundamentale Gleichung

Satz 158.

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Die letztere Gleichung (Reduktion der Multiplikation auf die Addition) hat den Logarithmen vor der Erfindung elektronischer Rechenmaschinen eine prominente Bedeutung bei allen schwierigeren praktischen Rechenaufgaben (z.B. in der Astronomie oder Navigation) verschafft.

Den Graphen der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.



Allgemeine Potenz

Definition 159 (Allgemeine Potenzen). Wir definieren a^x ("a hoch x") für reelles $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ durch

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Satz 160 (Rechenregeln für die allgemeine Potenz). *Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y \\ (ab)^x &= a^x b^x, \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, \\ a^0 &= 1. \end{aligned}$$

Beweis. Ergibt sich sofort aus den Regeln für exp und ln. □

Bemerkung. Aus dem Satz folgt durch vollständige Induktion für natürliches n:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Das heißt, die Definition von a^x stimmt für natürliches n mit der alten Definition überein.

Weiter ergibt sich aus dem obigen Satz

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a.$$

Also ist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Definieren wir schließlich die Eulersche Zahl e durch

$$\boxed{e = \exp 1}$$

so folgt

$$e^x = \exp(x \ln \exp 1) = \exp x.$$

Als Komposition differenzierbarer Funktionen sind die Funktionen

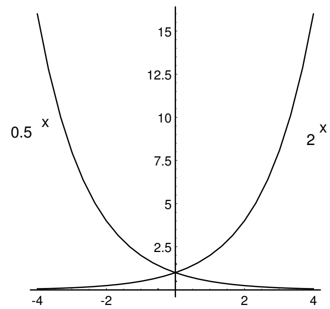
$$x \mapsto a^x$$

und

$$x \mapsto x^b$$

differenzierbare Funktionen auf ihrem Definitionsbereich. Nach der Kettenregel ist

$$(a^x)' = \ln a \exp(x \ln a) = (\ln a) a^x.$$



Die Graphen der Funktionen in diesem Abschnitt sind mit Mathematica erzeugt. Der Befehl für die vorstehende Figur lautet

```
Plot[{0.5^x,2^x}, {x,-4,4},AspectRatio->1/1]
```

7.4 Hyperbelfunktionen, Areafunktionen

Die *Hyperbelfunktionen* sind gegeben durch

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Sie heißen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus*. Für sie gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

denn

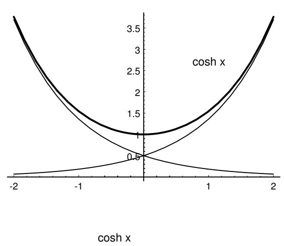
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) = 1.$$

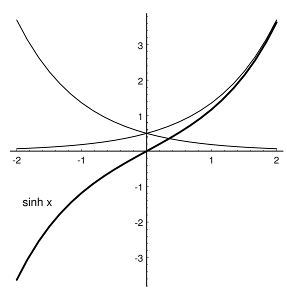
Das bedeutet aber, dass der Punkt $(\cosh x, \sinh x)$ auf der Einheitshyperbel

$$\left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 - y^2 = 1\right\} \tag{48}$$

liegt, daher der Name.

Hier sind die Graphen der beiden Funktionen mit den Graphen von $\frac{1}{2}e^{\pm x}$ zum Vergleich:





Auch für die Hyperbelfunktionen gibt es eine Menge Identitäten (wie Additionstheoreme u.a.), auf die wir hier aber nicht eingehen wollen.

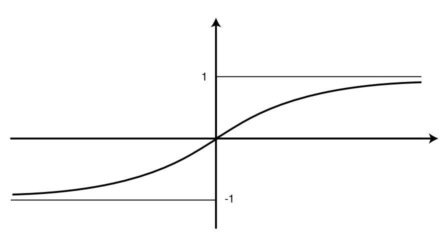
Offenbar sind diese Funktionen differenzierbar und es gilt

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh\,.$$

Man definiert die *hyperbolischen Cotangens- und Tangensfunktionen* durch

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Der *Tangens hyperbolicus* bildet die reelle Achse bijektiv auf das Intervall $]-1, +1[$ ab.



Für die Ableitung gilt

$$\tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2\,.$$

Beispiel 161. [Ein Beispiel aus der Mechanik] In diesem Beispiel greifen wir ein wenig vor: Auf höhere Ableitungen und auf die Theorie der Differentialgleichungen.

Frei hängende Seile oder Ketten (etwa Hochspannungsleitungen) haben eine ganz charakteristische Form.[2] Anhand der auftretenden Kräfte eines solchen statischen Systems leitet man in der Mechanik dafür die Differentialgleichung

$$y'' = c\sqrt{1 + (y')^2}$$

her. Weil $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ liefert $y(x) = \cosh x$ im Falle $c = 1$ eine Lösung, und mit etwas Probieren findet man $y(x) = \frac{1}{c}\cosh(cx)$ für den Fall von beliebigem $c > 0$. In der Theorie der Differentialgleichungen lernen Sie, dass die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zwei beliebige Parameter enthalten muss. Weil nur y' und y'' vorkommen, ist $y(x) + h$ für beliebiges h natürlich auch eine Lösung: die Form der Kette ist unabhängig davon, wie hoch man sie aufhängt. Und natürlich kann man sie nach rechts oder links verschieben, d.h. $y(x - x_0)$ ist auch eine Lösung. Die sogenannte *Kettenlinie* ist daher gegeben durch die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{c}\cosh\left(c(\,x - x_0)\right) + h.$$

□

Areafunktionen. Die Funktionen sinh und tanh sind injektiv und besitzen daher globale Umkehrfunktionen. Diese werden *Area sinus hyperbolicus* bzw. *Area tangens hyperbolicus* genannt und so bezeichnet:

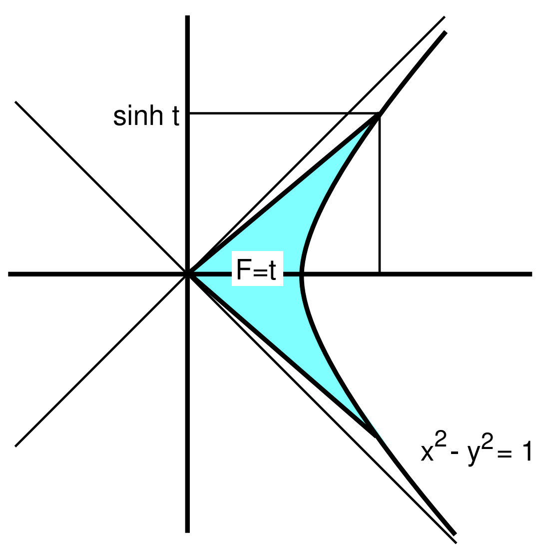
$$\sinh^{-1} = \text{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tanh^{-1} = \text{Artanh} :]-1, +1[\to \mathbb{R}.$$

Den Beweis des folgenden Lemmas kann der Leser leicht selbst machen:

Lemma 162. *Es gilt*

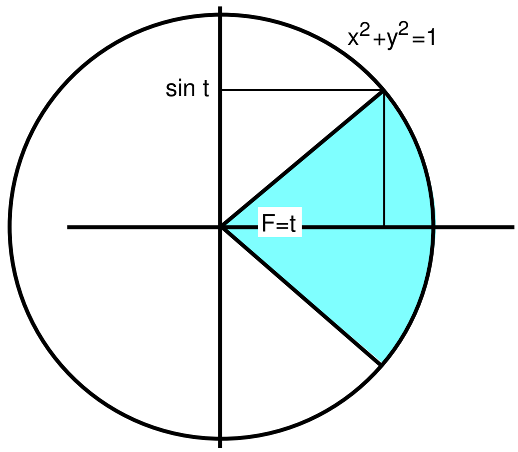
$$\text{Arsinh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \qquad \text{Artanh}\, x = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}.$$

Der Name *Area-Funktionen* rührt daher, dass man die Werte als Flächeninhalt an der Hyperbel interpretieren kann:



[2] Galilei hatte behauptet, die Form einer hängenden Kette sei eine Parabel. Christian Huygens hat das im zarten Alter von 16 Jahren widerlegt, aber erst Leibniz und Johann Bernoulli fanden die richtige Differentialgleichung und deren Lösung.

Es sei angemerkt, dass man eine ganz analoge Interpretation für die inversen trigonometrischen Funktionen geben kann:



7.5 Die Regel von Bernoulli - de L'Hospital

Lemma 163 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Es gelte $g'(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in]a, b[$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Wäre $g(a) = g(b)$, so gäbe es nach dem Mittelwertsatz dazwischen eine Nullstelle von g' im Widerspruch zur Voraussetzung. Definiere

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t).$$

Dann ist $h(a) = h(b)$, also $h'(\xi) = 0$ für ein $\xi \in]a, b[$, und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 164 (Johann Bernoulli, G. de L' Hospital). *Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,*

$$p \in J \cup \{\inf J, \sup J\},$$

und seien $f, g : J \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0 \tag{49}$$

oder

$$\lim_{x \to p} g(x) \in \{-\infty, \infty\}. \tag{50}$$

Weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle[3] $x \in J \setminus \{p\}$, und es existiere

$$\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}. \tag{51}$$

Dann existiert auch

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{52}$$

und hat den Wert A.

Falls $p \in \mathbb{R}$ und (49) gilt, kann man $f(p) := 0 =: g(p)$ setzen und erhält in p stetige Funktionen. Nach dem Lemma ist dann für ein ξ zwischen x und p

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Daraus folgt mit $x \to p$ der Satz in diesem Fall. Der folgende Beweis ist etwas komplizierter, schließt dafür aber alle Fälle ein.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $p = \inf J$. Der Fall $p = \sup J$ geht analog. Wenn aber p ein innerer Punkt von J ist, wendet man diese Fälle auf $J \cap]p, +\infty[$ und $J \cap] - \infty, p[$ an und benutzt Lemma 111 über Grenzwert und einseitige Grenzwerte.

Zwischen zwei Nullstellen von g in einem Intervall aus $J \setminus \{p\}$ läge nach dem Mittelwertsatz eine Nullstellle von g' im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es in jeder Komponente

[3] Weil es um den Grenzwert für $x \to p$ geht, genügt es stattdessen, wenn p kein Häufungspunkt von Nullstellen von g' ist.

von $J\setminus\{p\}$ höchstens eine Nullstelle von g in $J\backslash\{p\}$. Wir können daher nach eventueller Verkleinerung von J o.E. annehmen, dass

$$g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in J\backslash\{p\}. \tag{53}$$

Es genügt nun, folgendes zu zeigen:

$$\begin{aligned} &\forall_{a<A}\ \exists_{q\in J,\ p<q}\ \forall_{x\in]p,q[} \quad a \leq \frac{f(x)}{g(x)}, \\ &\forall_{b>A}\ \exists_{q\in J,\ p<q}\ \forall_{x\in]p,q[} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq b. \end{aligned}$$

(Falls z.B. $A = +\infty$, gibt es kein $b > A$ und wir brauchen nichts zu zeigen. Falls $A \in \mathbb{R}$ stellen Sie sich vor, es sei $a = A - \epsilon$ und $b = A + \epsilon$.)

Wir beweisen nur die zweite Behauptung, die erste geht genauso. Sei also $b > A$. Nach Voraussetzung gibt es $\tilde{q} \in J,\ p < \tilde{q}$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < b \quad \text{für alle } \xi \in]p, \tilde{q}[.$$

Nach dem Lemma 163 folgt daraus für alle $x, y \in]p, \tilde{q}[, x \neq y$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < b.$$

<u>1. Fall: $\lim f(y) = \lim g(y) = 0$ für $y \searrow p$.</u> Setzt man dann $q = \tilde{q}$, so gilt für alle $x \in]p, q[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\searrow p} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \leq b.$$

Beachte, dass $g(x) \neq 0$ nach (53).

<u>2. Fall: $\lim g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$.</u> Sei $p < y < \tilde{q}$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\tilde{\tilde{q}} \in]p, \tilde{q}[$, so dass für alle $x \in]p, \tilde{\tilde{q}}[$

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0.$$

Dann gilt für solche x

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} (1 - \frac{g(y)}{g(x)}) + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &< b(1 - \frac{g(y)}{g(x)}) + \frac{f(y)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Für $x \searrow p$ geht die rechte Seite gegen b. Also gibt es $q \in]p, \tilde{\tilde{q}}[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq b \quad \text{für alle } x \in]p, q[.$$

□

Beispiel 165. Gesucht ist $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$. Die Voraussetzungen sind erfüllt, insbesondere hat die Ableitung des Nenners keine Nullstellen. Der Grenzwert für den Quotienten der Ableitungen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

existiert, also gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$\square$

Beispiel 166. Wir wollen zeigen, dass für $a > 0$

$$\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{a}{k})^k = \exp(a).$$

Nun ist

$$(1 + \frac{a}{k})^k = \exp(k \ln(1 + \frac{a}{k})),$$

und weil exp stetig ist, müssen wir nur zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} k \ln(1 + \frac{a}{k}) = a.$$

Dazu ersetzen wir $\frac{1}{k}$ durch die kontinuierliche Variable x und betrachten

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(1 + xa)}{x}.$$

Nach der Regel von Bernoulli-de L'Hospital ist das

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{1+xa}\,a}{1} = a$$

und wir sind fertig.

$\square$

Beispiel 167. Was ist $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}$?

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} \exp(\frac{1}{k} \ln k) = \exp\left(\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}\right) \underset{\text{Beispiel 165}}{=} \exp 0 = 1.$$

$\square$

Beispiel 168. Für $f(x) = x^2, g(x) = 1 + x^4$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} = +\infty.$$

Was halten Sie davon?

$\square$

7.6 Die Stetigkeit der Ableitung

Es ist nicht so einfach, ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion zu finden, deren Ableitung unstetig ist. Hier ist eines, das allerdings auf die trigonometrischen Funktionen vorgreift.

Beispiel 169 (Eine Funktion mit unstetiger Ableitung). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar. Das ist klar für $x \neq 0$. Und in 0 findet man

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cos \frac{1}{h} = 0.$$

Die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist in 0 nicht stetig, vgl. Beispiel 121.

□

Der Grund, warum man keine wesentlich einfacheren Beispiele findet, ist der folgende

Satz 170 (Zwischenwertsatz für die Ableitung: Satz von Dini). *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall J. Dann ist $f'(J)$ ein Intervall.*

Die Sprungfunktion mit $g(0) = 0$ und $g(x) := \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ ist also zum Beispiel *nicht* die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis. Seien $a, b \in J$ mit $f'(a) < f'(b)$, und sei

$$f'(a) < \lambda < f'(b).$$

Wir müssen zeigen, dass es ein $\xi \in J$ mit $f'(\xi) = \lambda$ gibt. Sei $I = [a, b]$, falls $a < b$ und $I = [b, a]$ andernfalls. Wir konstruieren eine stetige Funktion $g : I \to I$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $g(a) = f'(a)$ und $g(b) = f'(b)$.

(ii) Für alle $t \in I \setminus \{a, b\}$ ist $g(t)$ ein Differenzenquotient:

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}$$

mit $\alpha(t), \beta(t) \in I$, $\alpha(t) \neq \beta(t)$.

Dann existiert nach dem *Zwischenwertsatz* ein $\tau \in I \setminus \{a, b\}$ mit

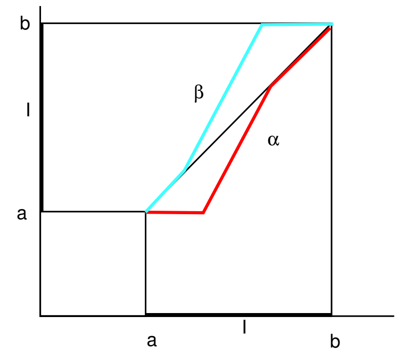
$$\lambda = g(\tau) = \frac{f(\beta(\tau)) - f(\alpha(\tau))}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)}.$$

Und nach dem *Mittelwertsatz* existiert ein ξ zwischen $\alpha(\tau)$ und $\beta(\tau)$ mit

$$\frac{f(\beta(\tau)) - f(\alpha(\tau))}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)} = f'(\xi).$$

Damit ist der Satz dann bewiesen. Es bleibt die Konstruktion von g.
Wir setzen

$$g(a) := f'(a), \quad g(b) := f'(b)$$



und für $t \in I \setminus \{a, b\}$

$$g(t) := \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)},$$

wobei $\alpha, \beta : I \to I$ stetige Funktionen mit den abgebildeten Graphen sein sollen. (In der Abbildung ist $a < b$. Ist $a > b$ so muss man a und b sowie α und β vertauschen.)

Offenbar ist g dann stetig im Inneren von I. Weil aber nach Konstruktion $\alpha(t) = a, \beta(t) = t$ für t nah bei a und $\alpha(t) = t, \beta(t) = b$ für t nah bei b ist, folgt

$$\lim_{t \searrow a} g(t) = \lim_{t \searrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a).$$

Ebenso folgt $\lim_{t \nearrow b} g(t) = f'(b)$. Daher ist g auch stetig in den Endpunkten. $\square$

Definition 171. Eine Funktion f heißt *stetig differenzierbar*, wenn sie differenzierbar und ihre Ableitung f' stetig ist.

Bemerkung. Die gelegentlich zitierte Voraussetzung

„Sei f differenzierbar und stetig!“

dokumentiert vor allem mangelnde Grundkenntnisse. Der Beweis des folgenden Satzes hingegen erfordert deren eine ganze Menge. Den Satz selbst kann man als eine Vertiefung des Konstanzkriteriums ansehen. Seine Verallgemeinerung auf höher-dimensionale Abbildungen, der sogenannte Satz von Sard, ist ein wichtiges Werkzeug in der Differentialtopologie.

Satz 172 (Mini-Sard). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei*

$$S := \{x \mid f'(x) = 0\}$$

die Menge der sogenannten kritischen Punkte *von f. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ und Intervalle J_i, $i = 1, \ldots k$, der Längen $|J_i|$, so dass gilt:*

$$f(S) \subset \bigcup_{i=1}^{k} J \text{ und } \sum_{i=1}^{k} |J_i| < \epsilon.$$

Man sagt: Die Menge $f(S)$ der kritischen Werte *ist eine Nullmenge.*

Beweis. Sei $L := b - a$ und sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 136 ist $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Also gibt es $\delta > 0$, so dass für alle x, y

$$|x - y| < \delta \implies |f'(x) - f'(y)| < \frac{\epsilon}{3L}.$$

Wähle eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

von $[a, b]$, so dass $x_{i+1} - x_i = \frac{L}{n} < \delta$ für alle i.

Ist $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ und $f'(x) = 0$, so gilt $|f'(y)| < \frac{\epsilon}{3L}$ für alle $y \in]x_i, x_{i+1}[$. Nach dem Schrankensatz gilt also für alle $y \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3L}|y - x| \leq \frac{\epsilon}{3L}\frac{L}{n} = \frac{\epsilon}{3n}$$

Nach dem Zwischenwertsatz ist $f([x_i, x_{i+1}])$ ein Intervall, und nach der vorstehenen Abschätzung ist seine Länge

$$|f([x_i, x_{i+1}])| \leq 2\frac{\epsilon}{3n}.$$

Seien nun $J_1, \ldots, J_k$ diejenigen der Intervalle $f([x_i, x_{i+1}])$, in denen f' eine Nullstelle hat. Dann ist

$$f(S) \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_i,$$

und weil $k \leq n$ und $|J_i| \leq \frac{2\epsilon}{3n}$, ist

$$\sum_{i=1}^{k} |J_i| \leq k\,\frac{2\epsilon}{3n} < \epsilon.$$

$\square$

8 Höhere Ableitungen

Wenn nichts anderes gesagt ist, bezeichne J wieder ein Intervall oder eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

8.1 Höhere Ableitungen

Definition 173.

(i) Die reell- oder komplexwertige Funktion f sei differenzierbar auf J. Dann ist die Ableitung f' wiederum eine Funktion auf J, die differenzierbar sein kann oder auch nicht. Ist sie differenzierbar, so bezeichnet man ihre Ableitung mit f'' und nennt sie die *2. Ableitung* von f. In diesem Fall sagt man f sei *zweimal differenzierbar*. Rekursiv definiert man auf diese Weise k-malige Differenzierbarkeit und die *k-te Ableitung* an der Stelle x
$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x)$$
für $k \in \mathbb{N}, k > 0$.

(ii) Ist f k-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ überdies stetig, so nennt man f *k-mal stetig differenzierbar*. Die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf J bezeichnet man mit
$$C^k(J)$$
oder auch mit $C^k(J, \mathbb{R})$ bzw. $C^k(J, \mathbb{C})$.

(iii) Die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf J bezeichnet man mit
$$C^\infty(J),$$
und nennt solche Funktionen auch C^∞-Funktionen.

Beispiel 174. Polynome oder rationale Funktionen sind C^∞-Funktionen.

□

Beispiel 175. Die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^3 = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$
ist zweimal stetig differenzierbar: $f \in C^2(\mathbb{R})$. Das ist klar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir untersuchen die Differenzierbarkeit im Punkt 0:
$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h^3 - 0}{h} = 0 = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h^3 - 0}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$
Also ist f in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$. Insgesamt gilt
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$
Insbesondere ist f' in 0 stetig, aber wir wollen zeigen, dass es dort sogar differenzierbar ist:
$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{3h^2 - 0}{h} = 0 = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-3h^2 - 0}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h}.$$

Also ist f in 0 zweimal differenzierbar und $f''(0) = 0$. Wir finden:

$$f''(x) = \begin{Bmatrix} 6x & \text{für } x \geq 0 \\ -6x & \text{für } x < 0 \end{Bmatrix} = 6|x|.$$

Insbesondere ist f'' stetig in 0. Mit $|x|$ ist auch $f''(x) = 6|x|$ in 0 nicht differenzierbar. Also ist f in 0 nicht dreimal differenzierbar.

□

Beispiel 176 (Wichtig). Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

Zeigen Sie das durch vollständige Induktion über k mit der Regel von Bernoulli-L'Hospital und folgern Sie daraus

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k} = 0. \tag{54}$$

Zeigen Sie ebenfalls durch vollständige Induktion, dass

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \qquad (x \neq 0) \tag{55}$$

mit einem Polynom p.

Aus (54) und (55) folgt, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist. Für $x \neq 0$ ist das klar, und es ist auch klar, dass alle Ableitungen in 0, falls sie existieren, den Wert 0 haben.

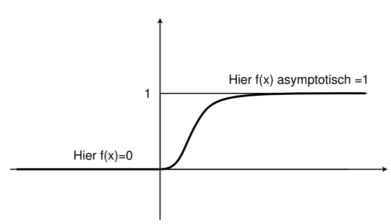
Die Existenz folgt wieder durch Induktion: Existiert $f^{(k)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ und ist

$$f^{(k)}(x) = p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \text{ für } x > 0,$$

so folgt

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} q(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Die Funktion f ist also auf der negativen Halbachse $= 0$, auf der positiven positiv und sie ist C^∞-differenzierbar. Wegen dieser Eigenschaften spielt sie in vielen Konstruktionen eine wichtige Rolle. Die aus ihr konstruierten Buckelfunktionen oder Zerlegungen der Eins sind ebenfalls C^∞, vgl. Abschnitt 4.3.

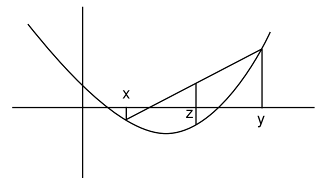


□

Definition 177. Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *konvex*, wenn für alle $x, y, z \in J$ mit $x < z < y$ gilt

$$f(z) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x). \tag{56}$$

Das bedeutet, dass die Kurve zwischen je zwei Punkten unterhalb der entsprechenden Sekanten liegt.



Satz 178 (Konvexitätskriterium). *Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt*

(i) f konvex $\iff$ f' monoton wachsend.

(ii) Ist f sogar zweimal differenzierbar, so gilt

$$f \text{ konvex} \iff f'' \geq 0.$$

Beweis. Die zweite Behauptung folgt mit dem Monotoniesatz unmittelbar aus der ersten.

$(i) \Rightarrow$. Für $x < z < y$ aus J folgt aus der Konvexität

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

und daher

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Aber wegen

$$f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) = f(y) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - y)$$

folgt aus (56) auch

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

und damit

$$f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Daher ist $f'(x) \leq f'(y)$, also ist f' monoton wachsend.

$(i) \Leftarrow$. Seien $x < z < y$ aus J. Dann gibt es $\xi \in]x, z[$ und $\eta \in]z, y[$ mit

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

also

$$(f(z) - f(x))(y - z) \leq (f(y) - f(z))(z - x).$$

Addition von $(f(z) - f(x))(z - x)$ liefert

$$(f(z) - f(x))(y - x) \leq (f(y) - f(x))(z - x),$$

und daraus folgt (56). □

Wir wollen noch eine andere Version der Konvexitätsbedingung (56) herleiten. Für reelle $x \neq y$ lassen sich die Punkte zwischen x und y schreiben in der Form $tx + (1-t)y$ mit $0 < t < 1$ oder, wenn man $p =: \frac{1}{t}$ und $q := \frac{1}{1-t}$ setzt, in der Form

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q}, \quad p, q > 1 \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die rechte Seite von (56) für die Punkte $x < \frac{x}{p} + \frac{y}{q} < y$ bzw. $y < \frac{x}{p} + \frac{y}{q} < x$ ist dann

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - x\right) &= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\left(\frac{y}{q} - (1-\frac{1}{p})x\right) \\ &= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\frac{y-x}{q} \\ &= f(x)\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{f(y)}{q} \\ &= \frac{f(x)}{p} + \frac{f(y)}{q}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

Satz 179. *Die Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall J ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in J$ und alle $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:*

$$f\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{f(x)}{p} + \frac{f(y)}{q}.$$

Die in der Vorüberlegung gemachte Voraussetzung $x \neq y$ kann man dabei offenbar streichen.

Beispiel 180 (Anwendung der Konvexität: Höldersche Ungleichung). Wir wenden den letzten Satz an auf die konvexe Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seien $a, b > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir setzen

$$x = \ln a^p, \quad z = \ln b^q,$$

und erhalten

$$ab = \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \leq \frac{\exp(\ln a^p)}{p} + \frac{\exp(\ln b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

also

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}} \tag{57}$$

Mit $p = q = 2$ und $a = \sqrt{A}, b = \sqrt{B}$ folgt die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

$$\sqrt{AB} \leq \frac{A+B}{2}. \tag{58}$$

Für eine weitere Folgerung aus (57) seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum |a_k| > 0, \sum |b_k| > 0. \tag{59}$$

Dann ist für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{|a_i|}{(\sum |a_k|^p)^{1/p}} \frac{|b_i|}{(\sum |b_k|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_i|^p}{\sum |a_k|^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_i|^q}{\sum |b_k|^q}$$

Durch Summation über i erhält man

$$\frac{\sum |a_k b_k|}{(\sum |a_k|^p)^{1/p} (\sum |b_k|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

oder

$$\boxed{\sum |a_k b_k| \leq \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q}}$$

Das ist die sogenannte *Höldersche Ungleichung*. Sie gilt offenbar auch ohne die Voraussetzung (59). Der Spezialfall $p = q = 2$ liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\boxed{|\sum a_k b_k| \leq \sqrt{\sum a_k^2} \sqrt{\sum b_k^2}.} \tag{60}$$

$\square$

8.2 Die Taylorapproximation

Vorbemerkung. Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

ein Polynom vom Grad n. Weil für $0 \leq j \leq k$

$$\frac{d^j}{dx^j}(x - x_0)^k = k(k-1)\dots(k-j+1)(x - x_0)^{k-j},$$

sind diese Ableitungen an der Stelle x_0 alle $= 0$, nur die k-te ist konstant $= k!$. Die höheren Ableitungen ($j > k$) verschwinden wieder alle. Daher folgt für alle $k \in \{0, \dots, n\}$

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

Man kann die Koeffizienten von f also aus den höheren Ableitungen von f berechnen und findet

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Ist nun f eine *beliebige* genügend oft differenzierbare Funktion, so liefert die rechte Seite ein Polynom, das an der Stelle x_0 bis zur Ordnung n dieselben Ableitungen hat wie f, das sich also vermutlich in der Nähe von x_0 gut an f „anschmiegt“.

Satz 181 (Taylorapproximation). *Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in J$ und $n \geq 1$. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann gilt:*

(i) Für die durch

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right) + R(x)$$

definierte Funktion $R : J \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Wir nennen

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das Taylorpolynom n-ten Grades von f an der Stelle x_0 *und R das* zugehörige Restglied.

(ii) Ist f sogar $(n+1)$-mal differenzierbar, so gibt es zu jedem $x \in J \backslash \{x_0\}$ ein ξ zwischen x_0 und x, so dass

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

(Lagrangesche Form des Restglieds.)

Beweis. *Zu (i).* Wir bezeichnen das Taylorpolynom n-ter Ordnung mit T:

$$T(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Dann gilt

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n}.$$

Wir zeigen mit der Regel von Bernoulli-de L'Hospital, dass $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ und damit die Behauptung (i).

Beachte zunächst, dass auf $J \setminus \{x_0\}$ die Ableitungen von $(x-x_0)^n$ bis zur n-ten stets $\neq 0$ sind und dass nach Konstruktion

$$T(x_0) = f(x_0),\, T'(x_0) = f'(x_0), \ldots, T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Wir finden

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim \frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = \lim \frac{f'(x)-T'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim \frac{f^{(n-1)}(x)-T^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \\
&= \lim \left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} - \frac{T^{(n-1)}(x)-T^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} \right) \\
&= \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(x_0) - T^{(n)}(x_0) \right) = 0.
\end{aligned}$$

(Der letzte Limes existiert, und deshalb nach Bernoulli-L'Hospital auch der davor etc.)

Beachte: Man hätte die obige Reduktion auch fortsetzen können bis $\lim \frac{f^{(n)}(x)-T^{(n)}(x)}{n!}$. Aber wir wissen nichts über $\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(x)$, weil $f^{(n)}$ nicht notwendig stetig ist.

Zu (ii). Wir betrachten die Funktion

$$h(t) = \frac{f(t)-T(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - R(x)\frac{(t-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Weil $T^{(n+1)} = 0$ ist, ist

$$h^{(n+1)}(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - R(x),$$

und es genügt zu zeigen, dass das zwischen x_0 und x eine Nullstelle ξ besitzt.

Trivialerweise ist $h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(n)}(x_0) = 0$. Außerdem ist

$$h(x) = (f(x) - T(x) - R(x))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Daher gibt es ξ_1 zwischen x_0 und x mit $h'(\xi_1) = 0$.
Daher gibt es ξ_2 zwischen x_0 und ξ_1 mit $h''(\xi_2) = 0$.
Und so weiter ...

Schließlich gibt es $\xi = \xi_{n+1}$ zwischen x_0 und x mit $h^{(n+1)}(\xi) = 0$. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 182. Wir betrachten den Satz von Taylor für die Exponentialabbildung in $x_0 = 0$. Weil $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$, ist das n-te Taylorpolynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

und das Restglied

$$R_n(x) = \exp(x) - T_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x,$$

Weil die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, ist

$$0 < R_n(x) < \exp(x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ falls } x > 0, \tag{61}$$

und

$$0 < (-1)^{n+1}R_n(x) < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ falls } x < 0. \tag{62}$$

Nach Beispiel 70 gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Will man das Restglied quantitativ abschätzen, so braucht man in der Formel (61) Werte von $\exp(x)$ für $x > 0$, die wir aber noch nicht haben. Immerhin liefert aber die Formel (62) eine solche Abschätzung bei negativem x, insbesondere

$$0 < -R_2(-1) < \frac{1}{3!}.$$

Mt $T_2(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ folgt daraus

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} < \exp(-1) < \frac{1}{2}$$

und für die Reziproken

$$2 < e = \exp(+1) < 3.$$

Für $x > 0$ erhalten wir $\exp(x) = e^x < 3^x$ und damit die Restgliedabschätzung

$$0 < \exp(x) - T_n(x) < 3^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Weil die rechte Seite für $n \to \infty$ sehr schnell gegen 0 geht, ist das eine gute Methode zur Berechnung der Funktionswerte von exp und damit auch zur Ermittlung des Graphen.

Für $x = 1$ folgt

$$0 < n!(e - T_n(1)) < \frac{3}{n+1},$$

und diese Ungleichung liefert einen ganz einfachen Beweis für die Irratonalität der Eulerzahl e. Wäre nämlich e rational, also $e = \frac{m}{n}$ mit positiven natürlichen Zahlen m, n, so wäre $n \geq 2$, weil e nicht ganzzahlig ist. Es folgte

$$0 < n!(e - T_n(1)) < \frac{3}{n+1} \leq 1.$$

Aber $n!\frac{m}{n}$ und $n!T_n(1)$ sind ganzzahlig! Das ist ein Widerspruch, und e deshalb irrational. Viel schwieriger ist der Beweis, dass e sogar transzendent, also nicht Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

$\square$

8.3 Lokale Extrema, Diskretisierung

Wir behandeln noch zwei Beispiele für die Anwendungen der Taylorapproximation.

Definition 183 (Lokale und globale Extremwerte). Seien $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $x_0 \in D$. Teile der folgenden Definition kennen Sie schon:

(i) f hat in x_0 ein *Maximum*, wenn

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in D.$$

Entsprechend definiert man *Minimum.*

(ii) f hat in x_0 ein *strenges (oder eigentliches) Maximum*, wenn

$$f(x) < f(x_0) \text{ für alle } x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man *strenges Minimum.*

(iii) f hat in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f|_{D \cap U_\epsilon(x_0)}$ in x_0 ein Maximum hat.

(iv) Analog definiert man die Begriffe *lokales Minimum, strenges lokales Maximum, strenges lokales Minimum.*

(v) f hat in x_0 ein *lokales Extremum*, wenn es dort ein lokales Maximum oder Minimum hat.

(vi) Im Kontrast zu lokalen Extrema bezeichnet man das Maximum bzw. Minimum von $f : D \to \mathbb{R}$ – wenn es denn angenommen wird – auch als das *globale* oder, etwas irreführend, als das *absolute* Maximum bzw. Minimum.

Satz 184 (Lokale Extremwerte). *Seien $f : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ eine k-mal differenzierbare Funktion und x_0 ein innerer Punkt von J. Es gelte:*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0,$$
$$f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

(i) Ist k ungerade, so hat f in x_0 kein *lokales Extremum.*

(ii) Ist k gerade, so hat f in x_0 ein strenges lokales Extremum, und zwar ein Maximum, falls $f^{(k)}(x_0) < 0$, und ein Minimum, falls $f^{(k)}(x_0) > 0$.

Beweis. Die Beweisidee ist einfach: In der Nähe von x_0 sieht f ungefähr so aus wie sein Taylorpolynom

$$f(x_0) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = f(x_0) + C(x - x_0)^k, \quad C \neq 0.$$

Bei ungeradem k wechselt das in x_0 das Vorzeichen, bei geradem k ist es eine nach oben oder unten geöffnete Parabel k-ter Ordnung mit Scheitel in $(x_0, f(x_0))$, je nach Vorzeichen von C also von der k-ten Ableitung. Das Problem ist das Wörtchen "ungefähr". Wir müssen zeigen, dass der Restterm die vorstehende Argumentation nicht kaputt macht.

Nach Voraussetzung und dem Satz über die Taylorapproximation gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R(x), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

Also können wir ein $\epsilon > 0$ so wählen, dass

$$U_\epsilon(x_0) \subset J$$

(hier wird benutzt, dass x_0 innerer Punkt von J ist) und

$$\left| \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} \right| < |\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)| \text{ für alle } x \in U^*_\epsilon(x_0),$$

das heißt

$$|R(x)| < |\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k| \text{ für alle } x \in U^*_\epsilon(x_0).$$

Dann ist in $U^*_\epsilon(x_0)$ das Vorzeichen von

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} \right) (x - x_0)^k$$

gleich dem von

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Wir können daher den Restterm "vergessen" und schließen, wie oben erklärt. □

Die zweite Anwendung der Taylorapproximation behandelt das folgende

Beispiel 185 (Diskretisierung). Aus der Taylorformel folgt, wenn h „klein“ ist,

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2,$$
$$f(x - h) \approx f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2.$$

Addition der beiden Gleichungen liefert

$$f''(x) \approx \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2}. \tag{63}$$

Und natürlich hat man

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ und } f'(x) \approx \frac{f(x - h) - f(x)}{-h}. \tag{64}$$

Viele physikalische Gesetze sind durch Differentialgleichungen gegeben, und viele dieser Differentialgleichungen lassen sich nicht explizit lösen. Ein wichtiges Hilfsmittel zur praktischen Lösung dieses Problems ist die *Diskretisierung* der Differentialgleichung. Die gesuchte Funktion $y(x)$ wird dabei durch eine diskrete Folge von Zahlen y_k ersetzt, die die Funktionswerte an den Stellen

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 1, 2, \ldots$$

approximieren sollen. Dabei ist h die sogenannte Diskretisierungskonstante, und man hofft, für sehr kleines h eine gute Approximation $y_k \approx y(x_k)$ zu bekommen.

Um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu diskretisieren, also in eine sogenannte *Differenzengleichung* für die y_k umzuschreiben, benutzt man die Approximationen (64) und (63). Konkret wird aus

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.5$$

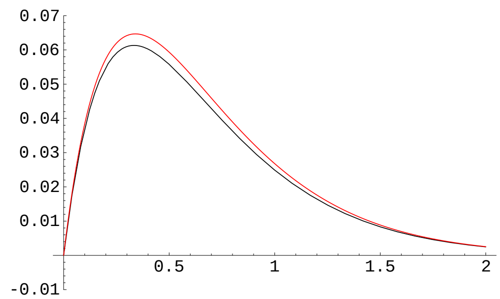
mit $x_0 = 0, x = x_k = kh$ nach Einsetzen

$$\frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2} + 6\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 9y_k = 0, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5h,$$

letzteres, weil $y'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_1}{h} = 0.5$. Nach Auflösen

$$y_{k+1} = \left(y_k(2 + 6h - 9h^2) - y_{k-1}\right) / (1 + 6h), \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5h.$$

Mathematica liefert für für $h = 0.01$ das folgende Bild für die Näherungslösung (rot) im Vergleich mit der – in diesem Fall leicht zu berechnenden – exakten Lösung $y(x) = 0.5\,x\,e^{-3x}$:



$\square$

8.4 Trigonometrische Funktionen

Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz ist Kraft=Masse × Beschleunigung. Bei einer an einer Feder aufgehängten Masse ist die Kraft (mit einem *negativen* Faktor) proportional zur Auslenkung $y(x)$ aus der Ruhelage, und man erhält die Schwingungsgleichung

$$-ky = my''.$$

Der Schwingungsvorgang ist erfahrungsgemäß eindeutig festgelegt, wenn man zu einer Anfangszeit, etwa $t = 0$, die Anfangsauslenkung $y(0)$ und den Anfangsimpuls $my'(0)$ kennt.

Wir haben also wieder eine Situation wie bei der Exponentialfunktion: eine (physikalisch motivierte) Differentialgleichung, deren Lösungen diesmal Schwingungsvorgänge beschreiben. Wir beschränken uns auf die Normierung $k = m = 1$ und zeigen

Satz 186 (und Definition: Sinus und Cosinus). *Es gibt genau eine zweimal differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1. \tag{65}$$

Diese Funktion heißt Sinus, *ihre Ableitung* Cosinus.
Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \cos &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung in (65) *heißt auch die Schwingungsgleichung.*

Beweis. 1. Existenz. Das verschieben wir wieder auf die Potenzreihen, vgl. Beispiel 284.

2. Eindeutigkeit. Dazu beweisen wir zunächst ein

Lemma 187. *Gegeben seien zwei Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$y_i'' + y_i = 0,$$

d.h. beide Funktionen erfüllen die Differentialgleichung (65)*, aber wir fordern die Anfangsbedingungen nur für y_1:*

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1.$$

Mit

$$y_2(0) =: a, \quad y_2'(0) =: b$$

gilt dann

$$y_2 = by_1 + ay_1' \tag{66}$$

Beweis des Lemmas. Wir definieren zwei Funktionen

$$\begin{aligned} g &:= y_1'y_2 - y_1y_2', \\ h &:= y_1y_2 + y_1'y_2'. \end{aligned}$$

Wir finden mit der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} g' &= y_1''y_2 + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1y_2'' = 0, \\ h' &= y_1'y_2 + y_1y_2' + y_1''y_2' + y_1'y_2'' = 0. \end{aligned}$$

Also sind g und h konstant. Auswerten an der Stelle 0 liefert, dass die Konstanten $g = a$ bzw. $h = b$ sind:

$$\begin{aligned} y_1' y_2 - y_1 y_2' &= a, \\ y_1 y_2 + y_1' y_2' &= b. \end{aligned} \tag{67}$$

Betrachten wir den Fall $y_2 = y_1$, so folgt aus der zweiten Gleichung

$$y_1(x)^2 + y_1'(x)^2 = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{68}$$

Multiplizieren wir die beiden Gleichungen von (67) mit y_1' bzw. y_1 und addieren sie, so folgt (66). □

Die Eindeutigkeit folgt nun sofort: Erfüllt auch y_2 die Anfangsbedingungen, so ist also $a = 0, b = 1$ und $y_2 = y_1$. □

Wie bei der Exponentialfunktion wollen wir nun die wesentlichen Eigenschaften der Lösung der Differentialgleichung, also der Sinusfunktion, und ihrer Ableitung herleiten.

Aus (68) folgt die „Kreisbeziehung“

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere liegen die Werte von Sinus und Cosinus im Intervall $[-1, +1]$.

Klar ist, dass der Sinus und damit der Cosinus beliebig oft differenzierbar sind. Man hat

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = \sin'' = -\sin.$$

Auch der Cosinus löst die Schwingungsgleichung, allerdings mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Wir wenden das Lemma noch auf zwei Funktionen y_2 an:

1. Die Funktion $y_2(x) = \sin(-x)$ löst die Schwingungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $a = 0, b = -1$. Das Lemma liefert

   $$\sin(-x) = -\sin x.$$

   Differentiation liefert daraus

   $$\cos(-x) = \cos x.$$

2. Anwendung auf $y_2 := \sin(x_1 + x)$ liefert das Additionstheorem

   $$\sin(x_1 + x) = \cos x_1 \sin x + \sin x_1 \cos x$$

   und durch Differentiation

   $$\cos(x_1 + x) = \cos x_1 \cos x - \sin x_1 \sin x.$$

Definition 188. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn

$$f(-t) = -f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Sie heißt gerade, wenn

$$f(-t) = -f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Der Sinus ist also eine ungerade, der Cosinus eine gerade Funktion. Beachten Sie, das Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im allgemeinen weder gerade noch ungerade sind.

Periodizität. Als nächstes wollen wir zeigen, dass Sinus und Cosinus 2π-periodische Funktionen sind. Um das überhaupt formulieren zu können, müssen wir zunächst die Zahl π definieren.

Satz 189 (und Definition: Die Zahl π). *Die Menge*

$$\left\{x \;\middle|\; x > 0 \text{ und } \cos x = 0\right\}$$

ist nicht leer und besitzt ein kleinstes Element ξ. Wir definieren $\pi := 2\xi$. Also haben wir

$$\frac{\pi}{2} \text{ ist die kleinste positive Nullstelle der Funktion } \cos.$$

Beweis. Wir setzen

$$N := \left\{x \;\middle|\; x > 0 \text{ und } \cos x = 0\right\}.$$

Zunächst zeigen wir, dass $N \neq \emptyset$. Wir benutzen dazu den Zwischenwertsatz für die differenzierbare und darum stetige Funktion cos. Wir wissen schon, dass $\cos 0 > 0$. Also brauchen wir noch eine Stelle, an der der Cosinus negativ ist. Dazu benutzen wir die Taylorapproximation. Die Ableitungen des Cosinus sind

$$\cos^{(0)} = 1,\ \cos' = -\sin,\ \cos^{(2)} = -\cos,\ \cos^{(3)} = \sin,\ \cos^{(4)} = \cos.$$

Nach dem Satz von Taylor ist also

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{\cos^{(4)}\xi}{4!}x^4$$

Weil $|\cos^{(4)}\xi| = |\cos\xi| \leq 1$ für alle ξ, ist

$$\cos 3 \leq 1 - \frac{3^2}{2} + \frac{3^4}{4!} = -0.125 < 0.$$

Damit ist $N \neq \emptyset$ und $0 \leq \xi := \inf N < 3$. Nach Satz 93 gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in N mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Weil der Cosinus stetig ist, ist $\cos\xi = \lim_{n\to\infty}\cos x_n = 0$. Und weil $\cos 0 = 1$, ist $\xi \neq 0$, also $\xi > 0$. $\square$

Nun zur Periodizität. Auf dem Intervall $]0, \frac{\pi}{2}[$ ist der Cosinus positiv, der Sinus also monoton wachsend und damit ebenfalls positiv. Es folgt

$$\sin\frac{\pi}{2} = +\sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{2}} = +1.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x,\\ \sin(x+\pi) &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x,\end{aligned}$$

und schließlich

$$\sin(x + 2\pi) = -\sin(x+\pi) = \sin x.$$

Durch Differenzieren finden wir $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Wir merken noch an: Aus $\sin|_{]0,\pi/2]} > 0$ folgt wegen $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x$, dass $\sin|_{]0,\pi[} > 0$.

Spezielle Werte. Es gilt

$$0 = \cos(2\frac{\pi}{4}) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1.$$

also

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus den Additionstheoremen folgt

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x\\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x\\ &= \cos x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = \cos x(4\cos^2 x - 3).\end{aligned}$$

Einsetzen von $x = \frac{\pi}{6}$ liefert $4\cos^2\frac{\pi}{6} = 3$ oder

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

und daraus

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Mit $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ erhalten wir schließlich folgende spezielle Werte für die Funktionen Sinus und Cosinus:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos x$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
$\sin x$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$

Dabei ist $..° : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{180}\pi$ die *Winkelgradfunktion.*

Wir stellen die gefundenen Eigenschaften von Sinus und Cosinus noch einmal zusammen.

Satz 190 (Eigenschaften von Sinus und Cosinus). *Die Funktionen* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind* 2π*-periodisch, und es gilt für alle* $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{gathered}\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x\\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\\ \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x\\ \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x\\ \sin(x_1+x_2) = \sin x_1\,\cos x_2 + \cos x_1\,\sin x_2\\ \cos(x_1+x_2) = \cos x_1\,\cos x_2 - \sin x_1\,\sin x_2.\end{gathered}$$

Auf dem Intervall $]0,\pi[$ *ist der Sinus positiv, also* $\cos|_{[0,\pi]}$ *streng monoton fallend.*

Berechnung von Funktionswerten, Graphen. Die Werte der Sinus- und Cosinusfunktion lassen sich mit der Taylorformel berechnen. Weil die höheren Ableitungen in 0 periodisch die Werte $0, 1, 0, -1$ annehmen, findet man

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + R_{s,n}(x),\\ \cos x &= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{c,n}(x),\end{aligned}$$

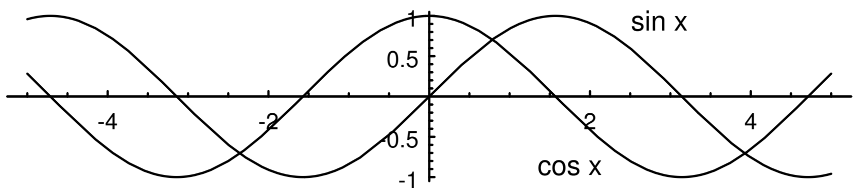
mit

$$|R_{s,n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad |R_{c,n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Natürlich könnte man auch $|R_{s,n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ und eine entsprechende Restgliedabschätzung für den Cosinus angeben. Beachten Sie aber, dass das Taylorpolynom vom Sinus bis $2n+1$ dasselbe ist wie bis $2n+2$, weil $\sin^{(2n+2)} 0 = 0$. Dann liefert aber für große n die angegebene Abschätzung bessere Werte.

Wie bei der Exponentialfunktion sieht man, dass man für festes x durch Wahl hinreichend großer n diese Fehler beliebig klein machen kann. Die Fehlerschranken lassen sich noch verbessern, und für die Berechnung für größeres $|x|$ kann man die Periodizität ausnutzen.

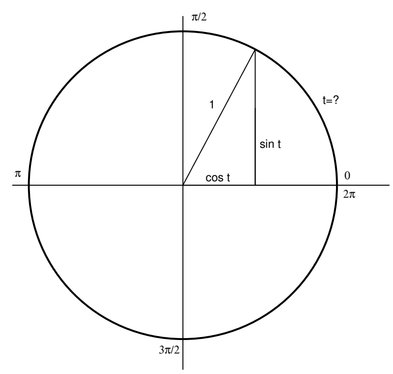
Man erhält folgende Graphen:



Wir bezeichnen mit

$$S^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$$

den sogenannten *Einheitskreis*, genauer die *Einheitskreislinie*. Nach (68) liegt jeder Punkt $(\cos t, \sin t)$ auf S^1, und der folgende Satz wird zeigen, dass sich umgekehrt jeder Punkt von S^1 in dieser Form schreiben lässt. Dabei ist t wegen der 2π-Periodizität der Funktionen naürlich nicht eindeutig bestimmt, aber in $[0, 2\pi[$ gibt es genau ein solches t.
Deshalb heißen cos und sin auch *Kreisfunktionen*. Die nebenstehende Abbildung erklärt, wie sie mit den Dreiecksverhältnissen zusammenhängen:
$x = \cos t$ und $y = \sin t$ sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Kreisradius 1 als Hypothenuse. Daher kommt der Name *trigonometrische* oder *Kreis*-Funktionen.



Allerdings bleibt es einstweilen offen, ob t wirklich die Länge des Winkelsegments auf dem Kreisbogen ist. Das stimmt, aber wir können es erst im Rahmen der Integralrechnung beweisen. Da man in der „klassischen" Trigonometrie, etwa in der nautischen Navigation, den Kreis in 360 gleiche Teile geteilt hat, erklärt sich dann auch die Herkunft der Winkelgradfunktion.

Satz 191 (Kreisparametrisierung). *Die Abbildung*

$$f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

bildet das Intervall $[0, 2\pi[$ *bijektiv auf* S^1 *ab.*

Beweis. Folgern Sie aus Satz 190: Sind $s, t \in [0, 2\pi[$ mit

$$t < s \text{ und } \cos t = \cos s,$$

so folgt

$$0 < t < \pi \text{ und } s = 2\pi - t. \tag{69}$$

Injektivität. Annahme: $0 \le t < s < 2\pi$ mit $\cos t = \cos s, \sin t = \sin s$. Dann folgt (69) und insbesondere

$$\sin t = \sin s = \sin(2\pi - t) = -\sin t.$$

Dann wäre $\sin t = 0$ im Widerspruch zu $0 < t < \pi$.

Surjektivität. Sei $(x, y) \in S^1$. Ist $x = \pm 1$, so folgt $y = 0$ und $(x, y) = (\cos 0, \sin 0)$ bzw. $(x, y) = (\cos \pi, \sin \pi)$. Ist andrerseits $x \in]-1, +1[$, also

$$\cos \pi < x < \cos 0,$$

so gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t \in]0, \pi[$ mit $\cos t = x$. Dann ist auch

$$s = 2\pi - t \in [0, 2\pi[\text{ und } \cos s = \cos t = x$$

und

$$\sin s = -\sin t.$$

Weil $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$, ist $y = \sin t$ oder $y = -\sin t = \sin s$ und

$$(x, y) = (\cos t, \sin t) \text{ oder } (x, y) = (\cos s, \sin s).$$

$\square$

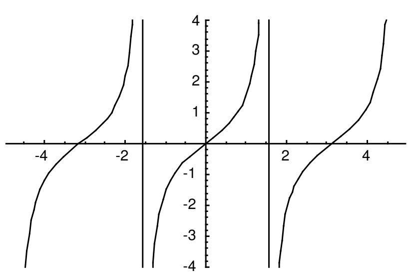
Zum Schluss definieren wir zwei weitere trigonometrische Funktionen:

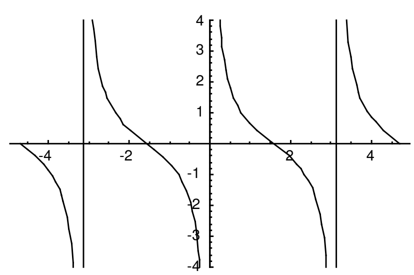
Tangens und Cotangens. Wir definieren

$$\begin{aligned} \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich differenzierbar und π-periodisch, weil Zähler und Nenner gerade ihr Vorzeichen wechseln, wenn man x durch $x + \pi$ ersetzt. Die Ableitung des Tangens berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} (\tan)'(x) = (\frac{\sin}{\cos})'(x) &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$





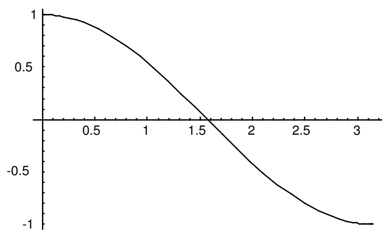
Aus den Rechenregeln für Sinus und Cosinus folgen zum Beispiel leicht die Formeln

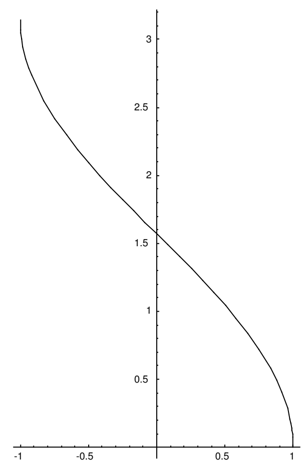
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8.5 Arcus-Funktionen

Keine der Funktionen $\cos x, \sin x, \tan x, \cot x$ ist injektiv, sie sind vielmehr „im Gegenteil“ alle periodisch. Aber wir können sie auf Teilintervalle einschränken, wo sie injektiv sind, und dann gibt es zu den so eingeschränkten Funktionen eine Umkehrfunktion. Diese Funktionen nennt man *Arcus-Funktionen* (=Bogenfunktionen), weil sie zu einem gegebenen Wert (z.B. $y = \cos x$) die zugehörige *Bogenlänge* x liefern.

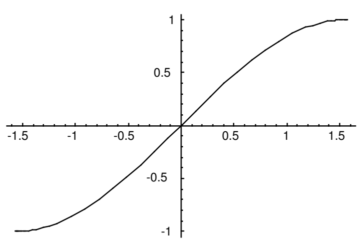
Konkreter: Auf dem Intervall $[0, \pi]$ ist der Cosinus streng monoton fallend und besitzt eine Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, *Arcus cosinus* genannt:

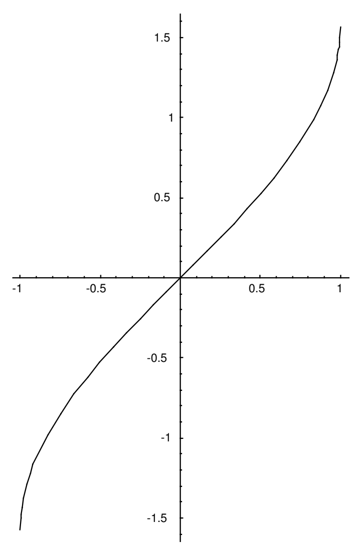




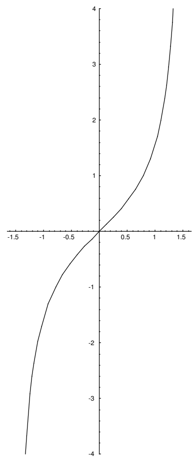
Die Auswahl des Intervalls $[0, \pi]$ ist willkürlich, man kann z.B. auch das Intervall $[\pi, 2\pi]$ oder allgemein $[k\pi, (k+1)\pi]$ nehmen und erhält Umkehrfunktionen, deren Werte jeweils in diesem Intervall liegen. Die anfangs definierte Funktion nennt man auch den *Hauptwert* des Arcuscosinus.

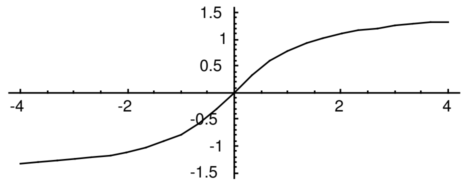
Entsprechend definiert man den *Hauptwert des Arcus sinus* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$





und des *Arcus tangens* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$.





Nach dem Satz 146 sind die Arcusfunktionen im Inneren ihres Definitionsbereiches differenzierbar und man erhält (nachrechnen)

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

8.6 Die Eulersche Formel

Seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$y' = ay, \quad y(0) = 1.$$

Definieren wir $\tilde{y}(x) := y(x/a)$, so folgt

$$\tilde{y}' = \tilde{y}, \quad \tilde{y}(0) = 1.$$

Nach Satz 154 ist also $\tilde{y} = \exp$ und damit

$$y(x) = e^{ax}.$$

Wir betrachten nun *komplexwertige* Funktionen und beweisen:

Satz 192 (und Definition). *Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit*

$$y' = iy, \quad y(0) = 1. \tag{70}$$

Diese Funktion bezeichnen wir mit $y : x \mapsto \exp(ix) = e^{ix}$.

Beachten Sie, dass $e^x = \exp x$ bisher nur für reelles Argument definiert war.

Beweis. 1. Eindeutigkeit. Wir nehmen an, dass y die Bedingungen des Satzes erfüllt. Wir zerlegen $y(x) \in \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil:

$$y(x) = u(x) + iv(x).$$

Dann sind $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Aus (70) folgt mit $y' = u' + iv'$ und $iy = -v + iu$, dass

$$u' = -v, \quad v' = u.$$

Diese sogenannten *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* werden Ihnen in der Funktionentheorie wieder begegnen. Aus ihnen sieht man, dass u und v sogar beliebig oft differenzierbar sind, und dass

$$v'' + v = u' - u' = 0, \quad v(0) = 0, v'(0) = u(0) = 1.$$

Aus Satz 186 folgt $v = \sin$ und $u = v' = \cos$. Wir haben also gefunden, dass $y = \cos + i \sin$ und damit eindeutig bestimmt ist.

2. Existenz. Nach dem ersten Teil des Beweises ist die einzige Chance, (70) zu erfüllen, die Funktion mit

$$y := \cos + i \sin.$$

Für die gilt aber $y(0) = 1$ und

$$y' = -\sin + i \cos = i(\cos + i \sin) = iy.$$

Also leistet sie wirklich das Gewünschte. $\square$

Die Bezeichnung $\exp(ix)$ oder e^{ix} scheint in Anlehnung an den reellen Fall sehr plausibel. Die resultierende Formel, die sogenannte *Eulerformel*

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \tag{71}$$

kommt dann allerdings überraschend! Zum Beispiel liefert sie für $x = \pi$ die Beziehung

$$\boxed{e^{i\pi} = -1.}$$

Immerhin wird die Notation mit der Exponentialfunktion auch durch andere Eigenschaften dieser Funktion gestützt: Aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus finden wir

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = e^{ix} e^{iy} \end{aligned}$$

Die Funktion e^{ix} bietet die Möglichkeit, Sinus und Cosinus gleichzeitig zu behandeln, und zwar auf eine sehr einfache Weise. Zum Beispiel kann man sich $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ leicht merken, und die Additionstheorem für Sinus und Cosinus durch Umkehrung der vorstehenden Rechnung daraus ableiten.

Allgemeiner definiert man die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

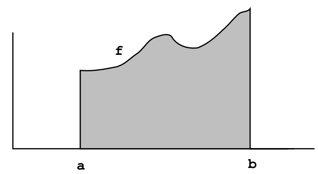
$$\exp(x + iy) := e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Den tieferen Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen werden wir später mittels der Reihendarstellungen aufklären, vgl. Abschnitt 10.9.

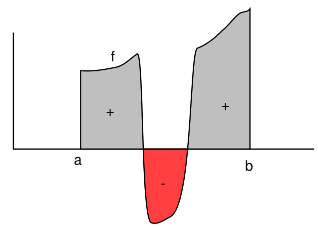
9 Integration

9.1 Das Regelintegral

Das Integral hat mit der Berechnung vom Flächeninhalt zu tun. Wir betrachten eine Funktion $f : [a, b\,] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall. Wir fragen, wie groß der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion ist:



Wenn die Funktion auch negative Werte annimmt, wollen wir Flächenbereiche unterhalb der Abszisse negativ rechnen:



Dabei muss f nicht unbedingt stetig sein.

Für den Fall einer sogenannten Treppenfunktion wie auf der Abbildung unten ist es ganz klar, wie groß der Flächeninhalt ist: Er ist einfach die Summe von positiv bzw. negativ gezählten Rechteckflächen.

Definition 193. Eine Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} :\; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

gibt, so dass

$$\phi|_{]x_{i-1},x_i[} \text{ konstant für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Offenbar sind Treppenfunktionen beschränkt.

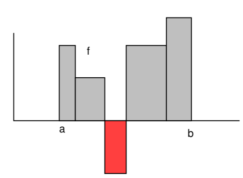
Es ist klar, dass eine solche Zerlegung $\mathcal{Z}$ nicht eindeutig ist, man kann zusätzliche Punkte einführen. Wir wollen für den Augenblick jede solche Zerlegung eine Treppenzerlegung von ϕ nennen.

Ist $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ ein beliebiger Zwischenpunkt, so ist die i-te Rechteckfläche

$$\phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

und der gesamte Flächeninhalt ist

$$F = \sum_{i=1}^{n} \phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Die Differenz $x_i - x_{i-1}$ bezeichnet man gern auch mit Δx_i. Den Wert F nennen wir *das (bestimmte) Integral* der Treppenfunktion ϕ über dem Intervall $[a, b\,]$:

$$\int_a^b \phi = \int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \phi(\xi_i)\Delta x_i.$$

Bemerkungen.

1. In der Definition des Integrals kommen nur die Funktionswerte $\phi(\xi_i)$ an Stellen

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

zwischen den Teilpunkten x_i vor; die Werte an den endlich vielen (potentiellen) Sprungstellen x_i selbst sind völlig ohne Bedeutung. Offensichtlich ist es egal, wie man die $\xi \in]x_{i-1}, x_i[$ wählt.

2. In die Definition geht nicht nur die Funktion ϕ, sondern auch eine Treppenzerlegung von ϕ ein. Wir müssen zeigen, dass die Definition unabhängig von der gewählten Treppenzerlegung ist. Das ist anschaulich ziemlich klar, ein exakter Beweis ist aber lästig, und wir beschränken uns auf eine Skizze:

   (a) Das Integral ändert sich nicht, wenn man der Zerlegung einen weiteren Punkt hinzufügt.

   (b) Das Integral ändert sich nicht, wenn man der Zerlegung endlich viele weitere Punkte hinzufügt.

   (c) Hat man *zwei* Treppenzerlegungen derselben Funktion, so gibt es eine gemeinsame Verfeinerung, d.h. Zerlegung, die aus jeder der beiden durch Hinzufügung von endlich vielen Punkten hervorgeht.

   Daraus ergibt sich dann die Unabhängigkeit von der Zerlegung.

Die Argumentation beim Unabhängigkeitsnachweis braucht man auch beim Beweis für das folgende

Lemma 194 (Rechenregeln). *Die Menge $\mathcal{T}([a,b])$ der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ist bezüglich wertweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum und*

$$\int_a^b : \mathcal{T}([a,b]) \to \mathbb{R}$$

ist linear. D.h. Summen und skalare Vielfache von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ sind wieder Treppenfunktionen, und es gilt

$$\int_a^b (\phi + \psi) = \int_a^b \phi + \int_a^b \psi,$$
$$\int_a^b (c\phi) = c \int_a^b \phi \quad \textit{für } c \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt für $\phi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$

$$\phi \leq \psi \implies \int_a^b \phi \leq \int_a^b \psi.$$

Wegen $-|\phi| \leq \phi \leq |\phi|$ folgt daraus

$$|\int_a^b \phi| \leq \int_a^b |\phi|.$$

Schließlich gilt für $a < b < c$

$$\int_a^c \phi = \int_a^b \phi + \int_b^c \phi.$$

Wie bestimmt man nun den Flächeninhalt bei „beliebigen“ Funktionen? Wir betrachten nur solche, die sich durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximieren lassen. (Den dabei auftretenden Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* von Funktionenfolgen werden wir im nächsten Semester ausführlicher untersuchen, hier können wir auf eine systematische Behandlung verzichten.)

Definition 195 (Regelfunktion). (i) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall heißt eine *Regelfunktion*, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, die nirgends mehr als ϵ von f abweicht, für die also

$$|f(x) - \phi(x)| \le \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b]$$

oder, anders gesagt,

$$\sup_{a \le x \le b} |f(x) - \phi(x)| \le \epsilon.$$

Insbesondere sind Regelfunktionen wie Treppenfunktionen beschränkt.

(ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann gibt es eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{a \le x \le b} |f(x) - \phi_k(x)| = 0.$$

Die Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gleichmäßig gegen f. Jede solche Folge nennen wir *eine approximierende Folge* von Treppenfunktionen für f.

Wir wollen nun das Integral von Regelfunktionen definieren als Grenzwert der Integrale einer approximierenden Folge von Treppenfunktionen. Dazu beweisen wir:

Lemma 196 (und Definition). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und (ϕ_k) eine approximierende Folge von Treppenfunktionen dazu. Dann ist die Integralfolge*

$$\left(\int_a^b \phi_k(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

konvergent, und der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten approximierenden Folge. Wir bezeichnen ihn mit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

und nennen ihn das (Regel-)Integral von f über $[a, b]$.

Beweis. Sei

$$\epsilon_k := \sup_{a \le x \le b} |f(x) - \phi_k(x)|.$$

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$

$$|\phi_k(x) - \phi_l(x)| \le |\phi_k(x) - f(x)| + |f(x) - \phi_l(x)| \le \epsilon_k + \epsilon_l$$

und daher

$$\left| \int_a^b \phi_k - \int_a^b \phi_l \right| = \left| \int_a^b (\phi_k - \phi_l) \right| \le \int_a^b |\phi_k - \phi_l| \le (\epsilon_k + \epsilon_l)(b - a).$$

Nach Voraussetzung ist aber $\lim_{k \to \infty} \epsilon_k = 0$. Daher gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \ge N$

$$\left| \int_a^b \phi_k - \int_a^b \phi_l \right| \le (\epsilon_k + \epsilon_l)(b - a) \le \epsilon.$$

Die Integralfolge ist also eine Cauchyfolge und daher konvergent.

Hat man zwei approximierende Folgen (ϕ_k) und $(\psi)_k$, so ist auch die Folge (ρ_k) mit

$$\rho_{2k} := \phi_k, \quad \rho_{2k+1} := \psi_k$$

eine approximierende Folge von Treppenfunktionen. Weil nach dem bereits Bewiesenen $(\int_a^b \rho_k)$ konvergent ist, konvergieren auch die Teilfolgen $(\int_a^b \phi_k)$ und $(\int_a^b \psi_k)$ gegen denselben Grenzwert. Das beweist die Unabhängigkeit. $\square$

Das Integral, das wir hier eingeführt haben, das sogenannte *Regelintegral*, ist einfacher (und etwas spezieller) als das gebräuchlichere *Riemannsche Integral*. Es genügt aber für alle praktischen Belange. Und für die wichtigen theoretischen Belange braucht man das kompliziertere Lebesgueintegral. Alle diese Integralbegriffe unterscheiden sich nur durch die Klasse der bei ihnen integrierbaren Funktionen, und auf dem Durchschnitt dieser Klassen stimmen die Integrale überein.

Die Definition des Integrals durch die Approximation mit stückweise konstanten Funktionen ist nicht nur eine mathematische Methode, sie entspricht vielmehr genau der Vorstellung, die man bei der Modellbildung in vielen Anwendungen hat. Oft ist das Problem dabei genuin eindimensional und die geometrische Interpretation des Integral als Fläche ganz abwegig.

Beispiel 197 (Von der Summe zum Integral). Bewegt sich ein Punkt entlang einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit v, so legt er zwischen den Zeitpunkten t_a und t_e die Strecke

$$s = v \cdot (t_e - t_a)$$

zurück. Ist die Geschwindigkeit $v = v(t)$ variabel, so ist die zurückgelegte Strecke annähernd

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i) \cdot \Delta t.$$

Dabei ist

$$t_a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_e, \qquad t_i - t_{i-1} = \frac{t_e - t_a}{n} = \Delta t.$$

Den exakten Wert erhält man, indem man mit immer größerem n zum Integral übergeht:

$$s = \int_{t_a}^{t_e} v(t)dt.$$

Dabei haben wir allerdings vorausgesetzt, dass v eine Regelfunktion ist, die durch die Treppenfunktionen mit den Werten $v(t_i)$ für $n \to \infty$ approximiert werden. Das untersuchen wir später genauer.

$\square$

Beispiel 198. Wir berechnen für $a < b$

$$\int_a^b \exp.$$

Für $j, k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ und $0 \leq j \leq k$ definieren wir

$$x_{kj} := a + \frac{j}{k}(b - a)$$

und

$$\phi_k(x) := \begin{cases} \exp(x_{kj}) & \text{für } x_{kj} \leq x < x_{k\,j+1}, j < k, \\ \exp(b) & \text{für } x = b, \end{cases}$$

Weil die stetige Funktion exp auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|x - y| \leq \frac{b-a}{k} \implies |\exp(x) - \exp(y)| < \epsilon.$$

Also gilt dann für alle $l \geq k$

$$|\exp - \phi_l| < \epsilon.$$

Die ϕ_k bilden also eine Folge von Treppenfunktionen, die exp auf $[a, b]$ approximiert. Daher ist

$$\int_a^b \exp(x)dx = \lim \int_a^b \phi_k(x)dx.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\int_a^b \phi_k(x)dx &= \sum_{j=0}^{k-1} \exp(x_{kj})\frac{b-a}{k} = \frac{b-a}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \exp(a + \frac{j}{k}(b-a)) \\
&= \frac{b-a}{k}\exp(a)\sum_{j=0}^{k-1}\left(\exp(\frac{b-a}{k})\right)^j = \frac{b-a}{k}\exp(a)\,\frac{1-\left(\exp(\frac{b-a}{k})\right)^k}{1-\exp(\frac{b-a}{k})} \\
&= \exp(a)\frac{\frac{b-a}{k}}{\exp(\frac{b-a}{k})-1}(\exp(b-a)-1) \\
&\to \exp(a)(\exp(b-a)-1) = \exp(b) - \exp(a).
\end{aligned}$$

□

Die Definition des Regelintegrals führt zu der Frage, wie man denn eine Folge von approximierenden Treppenfunktionen bekommt. Im vorstehenden Beispiel wurde eine solche auf einfache Weise konstruiert. Die dabei benutzte Idee läßt sich verallgemeinern, wie wir jetzt ausführen.

Definition 199 (Riemannnsche Summen). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ versteht man üblicherweise wie oben eine endliche Menge $\{x_0, \ldots, x_n\}$ mit

$$a = x_0 < \ldots < x_n = b. \tag{72}$$

Wir wollen für den Moment darunter aber eine endliche Menge $\{x_0, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ verstehen, die außer den x_i mit der Eigenschaft (72) noch Zwischenpunkte ξ_i mit

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

enthält. Dann nennen wir

$$\delta(\mathcal{Z}) := \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(x_i - x_{i-1})$$

die *Maschenweite* der Zerlegung und

$$S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

die *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$. Sie ist offenbar das Integral einer Treppenfunktion.

Wir geben nun ein Verfahren zur Berechnung von Regelintegralen an:

Satz 200 (Regelfunktionen und Riemannsche Summen). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist*

$$\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

eine Zerlegung mit Maschenweite $\delta(\mathcal{Z}) < \delta$, so ist

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(f, \mathcal{Z}) \right| < \epsilon.$$

Die Riemannschen Summen einer Zerlegungsfolge mit gegen 0 konvergierender Maschenweite konvergieren also gegen das Regelintegral.

Bemerkung. Ist f stetig, so approximieren die mittels der Zerlegung konstruierten Treppenfunktionen

$$\phi_{\mathcal{Z}}(x) := \begin{cases} f(\xi_i) & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i[, \\ f(b) & \text{für } x = b \end{cases}$$

f gleichmäßig, wenn $\delta(\mathcal{Z}) \to 0$. Für eine allgemeine Regelfunktion f muss das nicht so sein, wie man an der Funktion mit $f(x) := 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$ sieht, wenn man immer $\xi_n = b = 1$ wählt. Trotzdem konvergieren die Riemannschen Summen gegen das Regelintegral.

Beweis von Satz 200. Sei $\tilde{\phi} : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit Zerlegung

$$a = \tilde{x}_0 < \ldots < \tilde{x}_m = b,$$

so dass

$$|f(x) - \tilde{\phi}(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)} \text{ für alle } x \in [a, b] \tag{73}$$

und sei $\tilde{\phi}|_{]x_{i-1}, x_i[} = c_i$.

Sei nun $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung wie im Satz mit Maschenweite $< \delta$, wobei wir über δ noch verfügen werden. Wir setzen

$$\phi(x) := f(\xi_i) \text{ für } x_{i-1} \leq x < x_i, \quad \phi(b) = f(b)$$

und

$$\hat{\phi}(x) := \tilde{\phi}(\xi_i) \text{ für } x_{i-1} \leq x < x_i, \quad \hat{\phi}(b) = f(b).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - S(f, \mathcal{Z}) \right| &= \left| \int_a^b f - \int_a^b \phi \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f - \int_a^b \tilde{\phi} \right| + \left| \int_a^b \tilde{\phi} - \int_a^b \hat{\phi} \right| + \left| \int_a^b \hat{\phi} - \int_a^b \phi \right| \\ &\underset{(73)}{\leq} \frac{\epsilon}{3} + \left| \int_a^b \tilde{\phi} - \int_a^b \hat{\phi} \right| + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned} \tag{74}$$

Zur Abschätzung des verbleibenden Terms $\left| \int_a^b (\tilde{\phi} - \hat{\phi}) \right|$ nehmen wir an, dass

$$\delta < \max_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}). \tag{75}$$

Dann gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $j \in \{0, \ldots, m\}$, so dass

$$[x_{i-1}, x_i] \subset]\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j[\tag{76}$$

oder

$$[x_{i-1}, x_i] \subset]\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j] \cup [\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}[. \tag{77}$$

wobei wir $]\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0] := \emptyset =: [\tilde{x}_m, \tilde{x}_{m+1}[$ setzen.

Im Fall (76) gilt für alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\hat{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\xi_i) = c_j = \tilde{\phi}(x)$$

und

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\tilde{\phi} - \hat{\phi}) = 0. \tag{78}$$

Im Fall (77) gilt (mit $c_0 := c_1, c_{m+1} := c_m$) für $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\tilde{\phi}(x) \in \{c_j, \tilde{\phi}(x_j), c_{j+1}\}$$

und ebenso

$$\hat{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\xi_i) \in \{c_j, \tilde{\phi}(x_j), c_{j+1}\}.$$

Also ist dann

$$|\tilde{\phi}(x) - \hat{\phi}(x)| \leq 2(|\tilde{\phi}(x_j)| + |c_j| + |c_{j+1}|) =: \sigma_j.$$

Wir erhalten $|\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\tilde{\phi} - \hat{\phi})| \leq \sigma_j \delta$ und mit (78) folgt

$$\left| \int_a^b (\tilde{\phi} - \hat{\phi}) \right| \leq \left(\sum_{j=0}^m \sigma_j \right) \delta. \tag{79}$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass (75) gilt und die rechte Seite von (79) kleiner als $\frac{\epsilon}{3}$ wird, so folgt aus (74) die Behauptung. $\square$

Lemma 201 (Rechenregeln). *Die Menge $\mathcal{R}([a, b])$ der Regelfunktionen auf $[a, b]$ ist bezüglich wertweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum und*

$$\int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) \to \mathbb{R}$$

ist linear. D.h. Summen und skalare Vielfache von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sind wieder Treppenfunktionen, und es gilt

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$
$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f \quad \textit{für } c \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt für $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$

$$f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g. \qquad \textit{(Monotonie)}$$

Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$, so auch $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ und

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|.$$

Schließlich gilt für $a < b < c$

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \qquad \textit{(Intervall-Additivität)}$$

Beweis. Wir zeigen nur die Monotonie des Integrals. Die anderen Eigenschaften folgen fast trivial aus den entsprechenden Aussagen im Lemma 194.

Seien (ϕ_k) und (ψ_k) Folgen von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit

$$|f - \phi_k| < \frac{1}{k}, \quad |g - \psi_k| < \frac{1}{k}.$$

Dann folgt

$$\phi_k < f + \frac{1}{k} \leq g + \frac{1}{k} < \psi_k + \frac{2}{k},$$

und mit der Linearität und Monotonie für Treppenfunktionen

$$\int_a^b \phi_k \leq \int_a^b \psi_k + \int_a^b \frac{2}{k} = \int_a^b \psi_k + \frac{2(b-a)}{k}.$$

Für $k \to \infty$ konvergieren die linke Seite gegen $\int_a^b f$, die rechte gegen $\int_a^b g$. □

Eine einfache Folgerung ist das

Korollar 202 (Integralschranken). *Seien $f : [a, b\,] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und*

$$m \leq f(x) \leq M$$

für alle $x \in [a, b\,]$. Dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Beweis. Man betrachtet die Treppenfunktion mit $g(x) := m$ für alle x und erhält aus $g \leq f$ die linke Ungleichung:

$$m(b-a) = \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Die andere folgt ebenso. □

Korollar 203 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Ist $m := \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ und $M := \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, so gilt nach dem vorstehenden Korollar

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz 130 gibt es daher ein ξ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

□

9.2 Regelfunktionen

In diesem Abschnitt sehen wir uns genauer an, welche Funktionen Regelfunktionen sind, und welche nicht. Zunächst halten wir noch einmal fest, dass nach unserer Definition Regelfunktionen

- stets *beschränkt* und
- stets auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definiert

sind.

Definition 204. Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ nennt man die Funktion

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion von* M.

Beispiel 205. Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$ ist keine Regelfunktion, weil jede Treppenfunktion von ihr irgendwo einen Abstand $\geq \frac{1}{2}$ hat.

□

Das folgende Beispiel zeigt, dass man das Integral von Treppenfunktionen nicht einfach auf Grenzwerte von Treppenfunktionen erweitern kann. Die *gleichmäßige* Approximation, die Forderung also, dass es bei beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion ϕ gibt, die *nirgends* mehr als ϵ von f abweicht, ist sehr wesentlich.

Beispiel 206.

Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt:

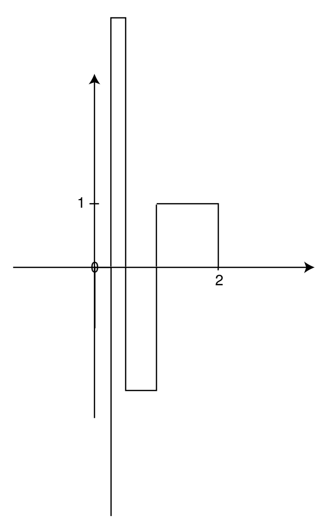
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ (-2)^j & \text{für } \frac{1}{2^j} < x \leq \frac{1}{2^{j-1}}, \end{cases}$$

also

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} (-2)^j \chi_{]\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}}]}.$$

Beachten Sie, dass f nicht beschränkt, also keine Regelfunktion ist. Sei

$$\phi_k = \sum_{j=0}^{k} (-2)^j \chi_{]\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}}]}.$$



Dann gilt

$$\int_0^2 \phi_k(x)dx = \sum_{j=0}^{k} (-2)^j \left(\frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^j}\right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j = \frac{(-1)^k + 1}{2}.$$

Deshalb existiert $\lim_{k\to\infty} \int_0^2 \phi_k(x)dx$ nicht. Beschränkt man sich hingegen auf die Teilfolgen mit geradem oder ungeradem Index, so existieren die Grenzwerte und sind 1 bzw. 0.

Das ist keine gute Basis für die Definition eines Integrals $\int_a^b f(x)dx$.

□

Satz 207 (Charakterisierung von Regelfunktionen). *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn gilt:*

(i) Für alle $x \in [a, b[$ existiert $\lim_{t \searrow x} f(t) \in \mathbb{R}$ und

(ii) für alle $x \in]a, b]$ existiert $\lim_{t \nearrow x} f(t) \in \mathbb{R}$.

Grob gesprochen sind Regelfunktionen also gerade die Funktionen, die an jeder Stelle einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Limes besitzen.

Beweis. *Zu („$\Longrightarrow$“).* Wir zeigen nur (i), der Beweis für (ii) geht genauso. Seien $x \in [a, b[$ und (t_n) und (s_n) Folgen in $]x, b[$ mit

$$\lim t_n = x = \lim s_n.$$

Es genügt zu zeigen, dass dann $(f(t_n))$ und $(f(s_n))$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. Nach Lemma 112 existiert dann $\lim_{t \searrow x} f(t)$.

Sei also $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine Treppenfunktion ϕ mit Treppenzerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b,$$

so dass

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x.$$

Sei nun

$$x_{i-1} \leq x < x_i$$

und sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n > N$

$$x < t_n < x_i \text{ und } x < s_n < x_i.$$

Dann gilt für $m, n \geq N$, dass $t_m, s_n \in]x_{i-1}, x_i[$, also $\phi(t_m) = \phi(s_n)$ und

$$|f(t_m) - f(s_n)| \leq |f(t_m) - \phi(t_m)| + |f(s_n) - \underbrace{\phi(t_m)}_{=\phi(s_n)}| < 2\epsilon.$$

Wählt man zunächst $(t_n) = (s_n)$, so folgt, dass $(f(t_n))$ eine Cauchyfolge, also konvergent ist. Dasselbe gilt dann für $(f(s_n))$, und die Grenzwerte unterscheiden sich um weniger als ein beliebiges $\epsilon > 0$, sind also gleich.

Zu („$\Longleftarrow$“). Wir beweisen das indirekt. Sei $\epsilon > 0$. Wir nehmen an, dass es keine Treppenfunktion ϕ gibt, für die

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Wir wollen das zum Widerspruch führen. Wir halbieren das Intervall $[a, b]$ und finden, dass es auf (mindestens) einer der beiden Hälften, wir nennen sie $[a_1, b_1]$, keine Treppenfunktion ϕ gibt, für die

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a_1, b_1].$$

Durch Fortsetzen dieses Verfahrens erhalten wir eine Intervallfolge

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots,$$

so dass für keine Treppenfunktion ϕ und kein n

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a_n, b_n].$$

Weil $a_m \in [a_n, b_n]$ für $m > n$, ist $|a_n - a_m| \leq \frac{b-a}{2^n}$ und (a_n) deshalb eine Cauchyfolge. Diese ist konvergent gegen ein $x \in [a, b]$. Offenbar gilt auch $b_n \to x$. Wir wollen annehmen, dass

$$x \in]a, b[.$$

Die Fälle $x = a$ oder $x = b$ gehen analog.

Wir setzen

$$f_-(x) := \lim_{t \nearrow x} f(t), \quad f_+(x) := \lim_{t \searrow x} f(t).$$

Dann gibt es $\delta > 0$, so dass

$$]x - \delta, x + \delta[\subset [a, b],$$

und

$$\begin{aligned} |f(t) - f_-(x)| &< \epsilon \text{ für alle } t \in]x - \delta, x[, \\ |f(t) - f_+(x)| &< \epsilon \text{ für alle } t \in]x, x + \delta[. \end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$[a_n, b_n] \subset]x - \delta, x + \delta[.$$

Definiere eine Treppenfunktion $\phi : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(t) := \begin{cases} f_-(x) & \text{falls } t \in [a_n, b_n] \cap] - \infty, x[, \\ f(x) & \text{falls } t = x \in [a_n, b_n], \\ f_+(x) & \text{falls } t \in [a_n, b_n] \cap]x, +\infty[. \end{cases}$$

Dann gilt auf $[a_n, b_n]$

$$|f(t) - \phi(t)| < \epsilon.$$

Widerspruch! □

Beispiel 208. Stetige Funktionen sind Regelfunktionen.

□

Beispiel 209. Monotone Funktionen sind Regelfunktionen. Sei nämlich $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, etwa monoton wachsend, und sei $x \in]a, b]$. Dann ist die für hinreichend große k definierte Folge $\left(g(x - \frac{1}{k})\right)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch $g(a)$ bzw. $g(b)$ beschränkt. Sie ist also konvergent gegen einen Wert L. Seien $\epsilon > 0$ und (t_n) eine Folge in $[a, x[$ mit $t_n \nearrow x$. Dann gibt es ein k mit

$$L - \epsilon < g(x - \frac{1}{k}) \leq L$$

und dazu ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x - \frac{1}{k} < t_n < x$ für alle $n \geq N$.

Für alle $n \geq N$ ist dann

$$L - \epsilon < g(x - \frac{1}{k}) \leq g(t_n).$$

Andrerseits gibt es zu jedem n ein $m \in \mathbb{N}$ mit $t_n < x - \frac{1}{m}$, also

$$g(t_n) \leq g(x - \frac{1}{m}) \leq L.$$

Das zeigt $\lim_{n \to \infty} g(t_n) = L$. Daraus folgt $\lim_{t \nearrow x} g(t) = L$.

Ebenso zeigt man für $x \in [a, b[$ die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes. Aus Satz 207 folgt dann, dass g eine Regelfunktion ist.

□

Definition 210 (Stückweise Stetigkeit und Monotonie). Wir nennen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig* bzw. *stückweise monoton*, wenn gilt: Es gibt eine Zerlegung

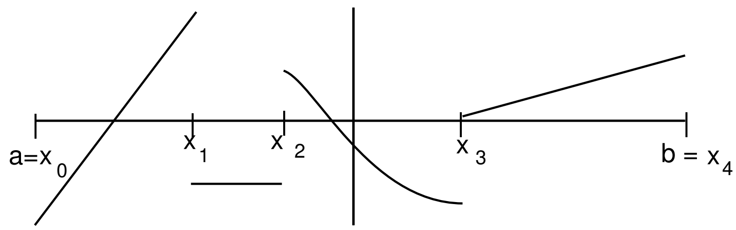
$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b,$$

und stetige bzw. monotone Funktionen

$$f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$f|_{]x_{i-1}, x_i[} = f_i|_{]x_{i-1}, x_i[},$$



Bemerkung. Die Definition ist subtil: Wenn man verlangt, dass $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ für alle i stetig ist, dann ist f auf ganz $[a, b]$ stetig. Verlangt man nur, dass $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ für alle i stetig ist, so treten auch unbeschränkte Funktionen wie $\tan : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ (mit beliebigem Wert in $\pi/2$) auf. Beides ist nicht in unserem Sinne.

Satz 211 (Bequemes Integrierbarkeitskriterium). *Stückweise stetige und stückweise monotone beschränkte Funktionen sind Regelfunktionen.*

Beweis. Das folgt aus den Beispielen 208 und 209, denn unmittelbar aus der Definition der Regelfunktion ergibt sich:

- Ist $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ für jedes der endlich vielen Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ eine Regelfunktion, so ist f eine Regelfunktion.
- Sind $f, f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf dem offenen Intervall $]x_{i-1}, x_i[$ übereinstimmen, und ist $f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so ist auch die Funktion $f : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

$\square$

Die meisten beschränkten Funktionen, die man über ein kompaktes Intervall integrieren „möchte“, fallen unter diesen Satz.

9.3 Numerische Integration

Wir werfen in diesem Abschnitt einen kurzen Blick auf numerische Integrationsverfahren. Im Prinzip ist die Approximation durch Treppenfunktionen ein brauchbares numerisches Verfahren, das im Grenzwert ja sogar gegen den genauen Wert konvergiert. Aber dafür muss man natürlich (unenendlich) viele Treppenfunktionen berechnen und summieren. Für die schnelle näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale verwendet man die Approximation durch andere, „genauere“ Funktionen, die sich aber auch noch gut beherrschen lassen:

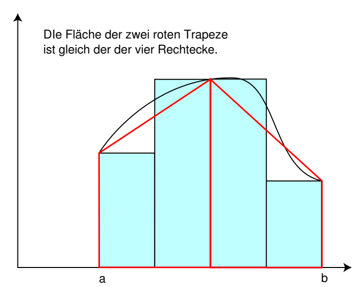
Trapezregel. Eine erste Näherung für $\int_a^b f(x)dx$ ist

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a).$$

Der Ausdruck rechts ist gerade der Flächeninhalt des Trapezes, welches entsteht, wenn wir den Graphen der Funktion durch die Sekante zwischen den Endpunkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ersetzen.

Diese Regel kann man auch mehrfach anwenden, indem man $[a, b]$ in n gleiche Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ unterteilt, für jedes Teilintervall die Trapezregel anwendet und summiert. Man erhält

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right).$$



Simpsonregel. Statt den Graphen von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch eine Gerade, nämlich die Sekante zu ersetzen, kann man ihn auch ersetzen durch einen Parabelbogen durch die Graphenpunkte zu a, $\frac{a+b}{2}$ und b. Die entstehende Fläche, die die gesuchte vermutlich besser approximiert als das Trapez, läßt sich explizit berechnen. Wie, geht aus dem nächsten Abschnitt hervor. Es folgt

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f(\frac{a+b}{2})\right).$$

Auch diese Regel kann man mehrfach anwenden. Man unterteilt $[a, b]$ in eine gerade Anzahl $2n$ von Teilintervallen gleicher Länge $h = \frac{b-a}{2n}$ und wendet auf jedes ungerade Teilintervall und das folgende gerade die Simpsonregel an. Man erhält

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih)\right).$$

Für subtilere Verfahren der numerischen Integration, z.B. für das **Romberg-Verfahren**, schauen Sie in bessere Formelsammlungen.

Mathematische Software wie Mathematica, Maple oder Derive haben Programme zur symbolischen Integration wie zur numerischen Integration. Die letzteren beruhen auf solchen Verfahren. Mathematica liefert zum Beispiel

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.47725.$$

9.4 Das unbestimmte Integral

Wir kommen nun zum Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation, der für die explizite Berechnung von vielen Integralen überaus nützlich ist.

Wir betrachten dazu eine Regelfunktion $f : [a, b\,] \to \mathbb{R}$ und für eine variable obere Grenze $x \in [a, b\,]$ das Integral

$$F(x) := \int_a^x f = \int_a^b f(t)dt. \tag{80}$$

In Abhängigkeit von x definiert das also eine neue Funktion $F : [a, b\,] \to \mathbb{R}$, die man auch *das unbestimmte Integral* oder die *Integralfunktion* von f nennt. Wir versuchen F zu differenzieren:

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Rechnung gilt zunächst nur, wenn $h > 0$. Offenbar ist es hilfreich, auch Integrale $\int_a^b f(x)dx$ zuzulassen, bei denen nicht $a < b$ ist.

Definition 212. Seien $b < a$ und $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann definieren wir

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Mit dieser Definition bleibt die vorstehende Rechnung auch mit $h < 0$ richtig. Sie bleibt auch richtig, wenn $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall oder einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert ist und $a, x, x + h \in I$ beliebig sind.

Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir im weiteren aber an, dass $h > 0$ ist.

Wenn wir voraussetzen, dass f *stetig* ist, so gibt es nach dem Mittelwertsatz für Integrale Korollar 203 ein $\xi \in]x, x + h[$ mit

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi).$$

Über ξ wissen wir zwar nichts Genaueres, aber für $h \to 0$ geht es jedenfalls gegen x. Daher ist für *stetiges* f das unbestimmte Integral F differenzierbar und hat f als Ableitung:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Definition 213 (Stammfunktion). Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Intervall oder eine offene Teilmenge und $f, F : J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann heißt F eine *Stammfunktion* von f, wenn $F : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

Jede stetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall hat also eine Stammfunktion, nämlich

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Das bedeutet aber nicht, dass Sie immer eine Stammfunktion „explizit“ hinschreiben können. Und es gibt Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen:

Beispiel 214. Die sogenannte Heaviside-Funktion $f = Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $Y(x) := 0$ für $x < 0$ und $Y(x) := 1$ für $x \geq 0$ hat keine Stammfunktion. Sonst müsste sie nach dem Satz 170 von Dini nämlich den Zwischenwertsatz erfüllen, was sie offenbar nicht tut.

$\square$

Den folgenden Satz haben wir damit im wesentlichen schon bewiesen:

Satz 215 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und sei $a \in J$. Dann gilt*

(i) Die Funktion $F : J \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von f. D.h. F ist differenzierbar und

$$F'(x) = f(x).$$

Insbesondere besitzt jede stetige Funktion auf einem Intervall eine Stammfunktion.

(ii) Die Funktion $G : J \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + const. = \int_a^x f(t)dt + G(a).$$

Insbesondere ist dann also für $a, b \in J$

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) =: G(x)|_a^b.$$

(Beachten Sie, dass das auch für $b \leq a$ gilt.)

Beweis. *Zu (i).* Bereits bewiesen.

Zu (ii). Ist G eine Stammfunktion, so ist

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0,$$

also nach dem Konstanzkriterium $G = F + const.$

Umgekehrt ist $F + c$ für jede Konstante c natürlich eine Stammfunktion. $\square$

Der Satz hat phantastische Konsequenzen: Nehmen Sie an, Sie sollen $\int_0^\pi \sin x dx$ berechnen. Dann müssen Sie den Sinus immer feiner durch Treppenfunktionen approximieren, die Integrale der Treppenfunktionen ausrechnen und für diese den Grenzwert bei „beliebig guter Approximation“ berechnen.

Oder Sie erinnern sich daran, dass $\cos' x = -\sin x$, also $G(x) = -\cos x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sin x$ ist. Daher ist nach dem Hauptsatz

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Keine Unterteilungen, keine Riemannsche Summen, keine Grenzwerte! Und es funktioniert für alle stetigen Funktionen, für die wir Stammfunktionen kennen!

Bemerkung zur Notation. Aus den nun ersichtlichen Gründen schreibt man oft

$$G(x) = \int f(x)dx + const.,$$

wenn G eine Stammfunktion von f ist. Es ist hilfreich, dabei immer eine Integrationskonstante zu notieren. Sonst erhält man z.B. $-\cos x = \int \sin x dx = 23 - \cos x$, weil $G(x) = -\cos x$ aber genauso gut auch $H(x) = 23 - \cos x$ Stammfunktionen von $\sin x$ sind.

Beispiele.

$$\int_a^b e^x dx = e^x|_a^b = e^b - e^a, \qquad \int_1^5 \frac{dx}{x} = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5,$$

$$\int_a^b \sin x\, dx = -\cos x|_a^b = \cos a - \cos b, \qquad \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan b - \arctan 0 = \arctan b,$$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + const. \text{ für } \alpha \neq -1, \qquad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x|_a^b,$$

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + const.$$

Mathematische Software mit der Fähigkeit zum symbolischen Rechnen bietet auch die Möglichkeit, unbestimmte Integrale zu berechnen. Hier ein paar Zeilen Mathematica

In[1]:=$\int x^2 \sin^2 x dx$
Out[1]=$\frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x \cos(2x) - \frac{1}{8}(x^2-1)\sin(2x)$

In[2]:=$\int \sin(x^2)\, dx$
Out[2]=$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ FresnelS($\sqrt{\frac{2}{\pi}}x$)

Während das erste Ergebnis sofort verständlich ist, bedarf das zweite einer Erklärung: Die Funktion $\sin(x^2)$ besitzt keine Stammfunktion, die sich mit „elementaren“ Funktionen ausdrücken läßt. Das Ergebnis ist vielmehr ein sogenanntes *Fresnelintegral*, eine Funktion, die *definiert* ist durch die Gleichung

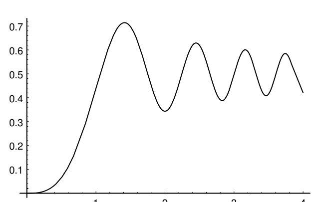
$$\text{FresnelS}(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi t^2}{2}) dt.$$

Das zweite Ergebnis ist also mehr oder weniger nur eine Umformung mittels der Substitutionsregel, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.

Das Fresnelintegral spielt eine Rolle in der geometrischen Optik. Die Werte bekommt man wie die Werte des Sinus (für die man eigentlich auch den Grenzwert einer Potenzreihe berechnen muss) zum Beispiel vom Rechner geliefert:

N[FresnelS[1.5],7]
0.697505

Plot[FresnelS[x],{x,0,4}]



Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Sinusfunktion und dem Fresnelintegral ist, dass viele Eigenschaften des Sinus einfacher zu beschreiben sind, zum Beispiel die Lage der lokalen

Maxima. Auch hat man eine Fülle von Identitäten, die den Sinus mit anderen Funktionen verbinden.

Beispiel 216. Die Funktion $\frac{1}{x}$ besitzt auf $]0,+\infty[$ die Stammfunktion $\ln x$. Und auf dem Intervall $]-\infty,0[$ ist offenbar $\ln(-x)$ eine Stammfunktion, denn die Ableitung ist nach der Kettenregel $\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$. Also ist $\ln|x|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

□

Beispiel 217 (Ein Existenzbeweis für die Exponentialfunktion). Die Funktion $\frac{1}{x}$ besitzt auf $]0,+\infty[$ die Stammfunktion

$$x \quad\mapsto\quad \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Wir definieren

$$\lambda(x):=\int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Weil λ differenzierbar, insbesondere also stetig ist, ist $\lambda(]0,+\infty[)$ ein Intervall. Aus

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{2^{k+1}}(2^{k+1}-2^k)=\frac{1}{2},$$

folgt

$$\lambda(2^{k+1})=\lambda(2^k)+\frac{1}{2}$$

und daraus $\lim_{x\to\infty}\lambda(x)=+\infty$. Ebenso schließt man aus

$$\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \frac{dt}{t} \geq 2^k\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\frac{1}{2},$$

dass $\lim_{x\searrow 0}\lambda(x)=-\infty$ und damit $\lambda(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.
Die Umkehrfunktion $f:=\lambda^{-1}:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ ist differenzierbar und es gilt

$$f'(x)=\frac{1}{\lambda'(f(x))}=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=f(x).$$

Schließlich ist $\lambda(1)=0$ und deshalb $f(0)=1$. Also erfüllt die Umkehrfunktion f von λ die definierenden Gleichungen für exp, vgl. Satz 154.

□

Bemerkungen. 1. Die Untersuchungen in diesem Abschnitt betreffen die Integration *stetiger* Funktionen. Auch unstetige Funktionen *können* Stammfunktionen besitzen, aber es ist nicht klar, dass man die dann zur Berechnung des Integrals benutzen kann!

2. Wie beim Beispiel des Fresnelintegrals angedeutet, lassen sich die Stammfunktionen auch relativ einfacher Funktionen (zum Beispiel e^{-x^2}, $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, $\frac{\sin x}{x}$ und andere) nicht mit den aus der Schule bekannten *elementaren Funktionen* ausdrücken. Eine präzise Formulierung dieses Sachverhaltes und ein Beweis dafür stammen von Joseph Liouville1834/35. Wir sollten dieses Ergebnis positiv sehen: Die Integralrechnung liefert uns Wege zur Gewinnung völlig neuer Funktionen.

9.5 Integrationsregeln

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht die Berechnung von Integralen **stetiger** Funktionen mittels Stammfunktionen auf sehr elegante Weise, *wenn* man eine Stammfunktion kennt. Und weil wir früher eine Menge Funktionen differenziert haben, kennen wir für eine Menge von Funktionen auch die Stammfunktionen. Aber leider für viele Funktionen auch nicht: Was ist $\int e^{x^2} dx$ oder $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$?

Wir wollen im folgenden einige Regeln kennen lernen, die uns helfen können, Integrale komplizierterer Funktionen auf einfachere zurückzuführen. So wie einem die Rechenregeln der Differentialrechnung, insbesondere die Produktregel und die Kettenregel geholfen haben, kompliziertere Funktionen zu differenzieren, ohne jedesmal wieder Grenzwerte von Differenzenquotienten auszurechnen.

Allerdings ist die Situation bei der Integration nicht so angenehm, wie bei der Differentiation, weil es eben für die Integration von Produkten und geschachtelten Funktionen keine oder keine einfachen Formeln gibt. Wenn man eine Stammfunktion von e^x und eine von x^2 kennt, kann man leider keine von e^{x^2} hinschreiben, vgl. die Bemerkung am Ende des letzten Abschnitts..

Die hier zu besprechenden Integrationsregeln kommen von der Kettenregel und Produktregel der Differentialrechnung, sie sind aber keine „Integral-Ketten-“ oder „-Produktregel“.

Substitutionsregel. Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar. Die Funktion F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt nach der Kettenregel

$$f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = F'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)).$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt deshalb

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

Andrerseits ist wieder nach dem Hauptsatz $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$. Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 218 (Substitutionsregel). *Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx. \tag{81}$$

Die Anwendung geschieht oft so: Gesucht ist das Integral $\int_a^b f(x)dx$, wobei einem für f keine Stammfunktion einfällt. Dann versucht man, eine Funktion $\varphi : [\alpha, \beta\,] \to [a, b\,]$ mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$ (oder $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$) zu finden, so dass man für die (oft nur scheinbar schwierigere) Funktion $f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$ eine Stammfunktion raten kann.

Beispiel 219. Gesucht ist $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$. Wir wählen $\varphi = \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos 2t+1)dt = \frac{1}{2}\left.(\frac{1}{2}\sin 2t + t)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(0+\pi) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ wirklich $\sqrt{1-\sin^2 t} = +\cos t$, weil der Cosinus dort nicht-negativ ist.

Geometrisch haben wir die halbe Fläche des Einheitkreises berechnet.

Für $r > 0$ erhält man mit $\varphi(t) = r\sin t$ ebenso

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\pi r^2$$

und findet πr^2 für die Kreisfläche.

□

Man setzt also für x eine Funktion $\varphi(t)$ ein. Daher der Name „Substitutionsregel". Dabei muss man die Grenzen des Integrals natürlich auf t umrechnen. Die Kunst ist es, „die richtige" Funktion φ zu finden. Aber natürlich gibt es nicht immer eine solche Funktion, die einem wirklich weiterhilft.

Wenn man voraussetzt, dass $\phi(\alpha) = a$ und $\phi(\beta) = b$ ist, und wenn man $\varphi(t) = x(t)$ und $\dot\varphi = \frac{dx}{dt}$ schreibt, sieht die Substitutionsregel so aus:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Abgesehen von den Grenzen sieht das so aus, als hätte man einfach mit $\frac{dt}{dt}$ „erweitert", und so kann man sich die Regel auch merken. Es steckt eben die Kettenregel dahinter, die man ja auch vereinfacht schreiben kann als $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\,\frac{dx}{dt}$.

Häufig sieht die Anwendung der Substitutionsregel in der Praxis etwas anders aus. Wir erläutern das im nächsten Beispiel:

Beispiel 220. Gesucht ist $\int_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3}$. Wir versuchen, den komplizierten Term $(5x+2)^3$ im Nenner durch t^3 zu ersetzen, wobei t dann natürlich von $5\cdot 0+2 = 2$ bis $5+2 = 7$ läuft:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3} = \int_{t=2}^{7}\frac{dx}{t^3}.$$

Der Ausdruck rechts ist etwas konfus, weil er x und t enthält. Die Integralgrenzen beziehen sich auf t, darum haben wir das an der unteren Grenze vermerkt.

Durch Differenzieren von $t = 5x+2$ erhält man

$$\frac{dt}{dx} = 5,\ \text{also}\ dx = \frac{dt}{5}, \tag{82}$$

und daher

$$\int_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3} = \int_2^7 \frac{1}{t^3}\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int_2^7\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{5}\left.\frac{-1}{2t^2}\right|_2^7 = \frac{1}{10}(\frac{1}{4}-\frac{1}{49}). \tag{83}$$

Warum darf man so rechnen? Insbesondere die Gleichung (82) scheint fragwürdig. Aber mit der richtigen Interpretation ist die Sache vollkommen in Ordnung: Die Substitution

$$t = 5x + 3$$

bedeutet, dass wir nicht φ, sondern erst einmal φ^{-1} definieren

$$t = \varphi^{-1}(x) = 5x + 3.$$

Wichtig ist, dass dies eine *invertierbare* Funktion ist, so dass es φ wirklich gibt. Nach der Substitutionsregel muss man dann noch dx ersetzen durch $\frac{d\varphi}{dt}\,dt$. Aber nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist

$$\dot{\varphi}' = \frac{1}{(\varphi^{-1})'}$$

an den entsprechenden Stellen. Wenn wir also $\dot{\varphi} = \frac{dx}{dt}$ und $(\varphi^{-1})' = \frac{dt}{dx}$ schreiben, erhalten wir (82), (83).

□

Wenn man in einem Integranden einen x-Term, den man loswerden will, durch t ersetzt verbleibt dx, das man wie oben ersetzt: Dazu benutzt man die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, braucht also nur $\frac{dt}{dx}$. Aber oft verbleiben noch weitere x-Terme. Um auch diese durch t auszudrücken, muss man im allgemeinen $\psi(x) = t$ *doch* noch explizit nach x auflösen. Manchmal aber hat man Glück, und x kürzt sich „von selbst" heraus.

Beispiel 221.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \underset{[t=\cos x]}{=} \int_{t=1}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sin x}{t}\,dx$$

Beachten Sie die Grenzen. Nun ist

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x,$$

und daher

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_{t=1}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sin x}{t}\,\frac{-1}{\sin x}\,dt = -\int_{t=1}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t}\,dt = +\ln t|_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{\ln 2}{2}.$$

□

Man kann aber auch Pech haben:

Beispiel 222.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \underset{[x^2=t]}{=} \int_0^1 e^t \frac{1}{2x}\,dt = \int_0^1 e^t \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

Damit hat man leider nichts gewonnen, und in der Tat ist dieses Integral mit elementaren Funktionen nicht zu lösen.

□

Beispiel 223. Wir berechnen $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ nicht direkt, sondern mit der Substitution $\sin x = t$, also $\frac{dt}{dx} = \cos x = \sqrt{1-t^2}$:

$$\int_0^\pi \sin x dx \underset{[\sin x = t]}{=} \int_0^0 t\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0,$$

weil die obere und untere Integrationsgrenze gleich sind. Wo steckt der Fehler?

□

Man kann die Substitutionsregel auch zur Berechnung unbestimmter Integrale (= Stammfunktionen) benutzen. Sucht man eine Stammfunktion für $f(x)$ und findet eine, nämlich $G(t)$, für $f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$, und ist $G(t) = F(\varphi(t))$, so ist F eine Stammfunktion von f. Man kann also substituieren, das unbestimmte Integral berechnen und muss dann anschließend die Transformation $x \to t$ wieder rückgängig machen, d.h. t wieder durch x ausdrücken. (Dabei sollte φ eine eineindeutige Funktion sein.)

Beispiel 224. Zur Berechnung von $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ substituieren wir $x = \sin t$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\ &= \int \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)dt = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2t + t) + const. \\ &= \frac{1}{2}(\sin t\cos t + t) + const. = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + const.\end{aligned}$$

Die Rechnung scheint ein wenig „großzügig“. Ist wirklich $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$? Oder ist es $= -\cos t$? Wenn wir davon ausgehen, dass $-1 \leq x \leq 1$, weil sonst der Integrand nicht reell ist, können wir für den Sinus das Definitionsintervall $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ nehmen. Dort ist der Cosinus dann positiv und der Arcussinus ist auch definiert. Zur Probe (und zur Übung) kann man natürlich die rechte Seite differenzieren.

□

Partielle Integration. Seien $u, v : [a, b\,] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Aus der Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann

$$(uv)|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Das schreiben wir in der Form

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.}$$

und nennen es die Regel der **partiellen Integration** (= Integration nach Teilen). Natürlich hat man wieder eine entsprechende Formel für die unbestimmten Integrale

$$\boxed{\int u'(x)v(x)dx = uv - \int u(x)v'(x)dx + const.}$$

Beispiel 225. Wir wollen $\int_a^b xe^x dx$ berechnen. Wir versuchen den Ansatz

$$u' = x, v = e^x.$$

Dann ist $u = \frac{1}{2}x^2, v' = e^x$ und die partielle Integration liefert

$$\int_a^b xe^x dx = (\frac{1}{2}x^2e^x)|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}x^2e^x dx.$$

Das hat nichts gebracht! Wir versuchen nun

$$u' = e^x, v = x.$$

Dann bekommen wir $u = e^x, v' = 1$ und

$$\int_a^b xe^x dx = (xe^x)|_a^b - \int_a^b e^x = ((x-1)e^x)|_a^b$$

$\square$

Beispiel 226. Mit einem hübschen Trick kann man das Integral von $\ln x$ berechnen: Wir setzen $u' = 1, v = \ln x$ und erhalten mit $u = x, v' = \frac{1}{x}$:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x(\ln x - 1) + const.$$

$\square$

9.6 Ergänzungen zur Integration

Die geschickte Anwendung der Integrationsregeln zum „Knacken“ von Integralen ist eine Kunst, es gibt dafür keine Rezepte. Mittlerweile sind aber die Computerprogramme kaum noch zu schlagen, siehe nachstehendes Beispiel. Wenn man erfolglos ist, kann das verschiedene Gründe haben: Möglicherweise findet man nicht den richtigen Trick, möglicherweise ist aber das Integral auch nicht durch eine elementare Funktion lösbar, sondern definiert eine neue Funktion, wie wir es oben beim Fresnelintegral gesehen haben. Andere Beipiele sind die elliptischen Integrale. Auf $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ hat man

$$\int\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx=\int\cos x dx=\sin x+const.$$

Das ist einfach. Aber für $k^2\neq 1$ liefert

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$$

ein sogenanntes elliptische Integral, das eben nicht durch die elementaren Funktionen zu beschreiben ist.

Beispiel 227 (Integrale mit dem Rechner). Hier sind die meisten der obigen Beispiele noch einmal vom symbolischen Integrationsprogramm gelöst:

$$\text{In}[1] := \text{Integrate}[\frac{\text{Tan}[x]}{(1+\text{Cos}[x]^2)},x]$$
$$\text{Out}[2] = -\text{Log}[\text{Cos}[x]]+\frac{1}{2}\text{Log}[3+\text{Cos}[2x]]$$

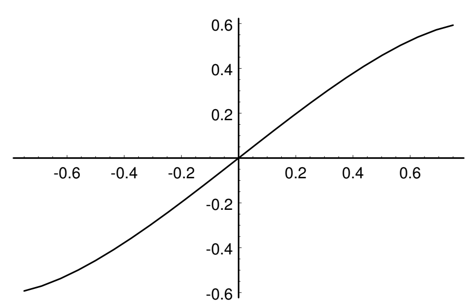
$$\text{In}[3] := \text{Integrate}[\frac{1}{(5x-2)^3},x]$$
$$\text{Out}[4] = -\frac{1}{(10(-2+5x)^2}$$
$$\text{In}[5] := \text{Integrate}[\text{Cos}[x]^2,x,0,\pi/2]$$
$$\text{Out}[6] = \frac{\pi}{4}$$

$$In[7] := \text{Integrate}[\sqrt{1-x^2},x]$$
$$\text{Out}[8] = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}+\frac{\text{ArcSin}[x]}{2}$$

$$\text{In}[9] = \text{Integrate}[x\text{Exp}[x],x]$$
$$\text{Out}[10] = \text{E}^x(-1+x)$$

$$\text{In}[11] = \text{Integrate}[\text{Log}[x],x]$$
$$\text{Out}[12] = -x+x\text{Log}[x]$$

$$\text{In}[13] = \text{Integrate}[\sqrt{1-k^2\text{Sin}[x]^2},x]$$
$$\text{Out}[14] = \text{E}(x|k^2)$$
$$\text{In}[15] := \text{Plot}[\text{EllipticE}[x,2],\{x,\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}];$$



□

9.6.1 Elliptische Integrale

Wir gehen in diesem Abschnitt kurz auf die schon angesprochenen elliptischen Integrale ein.

Beispiel 228 (Elliptisches Integral und Ellipse). Die Abbildung

$$(x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

beschreibt eine Kurve in der Ebene. Zum Beispiel liefert $x(t) = a \sin t, y(t) = b \cos t$ mit $a > b > 0$ eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Die Länge der Kurve ist approximativ

$$\begin{aligned}
&\sum \left| \begin{pmatrix} x(t_{i+1}) \\ y(t_{i+1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} \right| = \sum \left| \begin{pmatrix} x(t_i + \Delta t_i) \\ y(t_i + \Delta t_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} \right| \\
&= \sum \sqrt{(x(t_i + \Delta t_i) - x(t_i))^2 + (y(t_i + \Delta t_i) - y(t_i))^2} \\
&= \sum \sqrt{\frac{(x(t_i + \Delta t_i) - x(t_i))^2}{(\Delta t_i)^2} + \frac{(y(t_i + \Delta t_i) - y(t_i))^2}{(\Delta t_i)^2}} \, \Delta t_i \\
&\to \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt,
\end{aligned}$$

wenn man voraussetzt, dass x und y stetig differenzierbar sind. Unter dieser Vorausetzung ist also

$$\boxed{L := \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$$

eine vernünftige *Definition* für die Länge der Kurve. Für die Ellipse ergibt sich ein Integral von der im obigen Beispiel aufgetretenen Form:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} \, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} \, dt.$$

$\square$

Definition 229. Für $0 \leq k \leq 1$ definieren wir

- das vollständige elliptische Integral 1. Art als
$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$
- das vollständige elliptische Integral 2. Art als
$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt.$$

Für reelles ϕ definieren wir weiter

- das unvollständige elliptische Integral 1. Art als
$$F(k; \phi) := \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$
- das unvollständige elliptische Integral 2. Art als
$$E(k; \phi) := \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt.$$

Der Umfang der Ellipse mit Halbachsen $a > b > 0$ ist also gegeben durch

$$L = 4aE(k), \quad k := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}.$$

k heißt die *Exzentrizität* der Ellipse.

Das elliptische Integral $K(k)$ ist schwieriger geometrisch zu interpretieren, physikalisch ist

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K(\sin\frac{\alpha}{2})$$

die Schwingungsdauer eines Pendels mit Amplitude α.

$K(k)$ ist sehr gut numerisch zu berechnen und hilfreich bei der numerischen Berechnung von $E(k)$. Darauf gehen wir jetzt noch ein, weil die Rechnung noch mehrmals die Substitutionsregel demonstriert und das Ergebnis so überraschend und hübsch ist.

Für $a, b > 0$ definieren wir

$$F(a,b) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}.$$

Mit der Substitution $t = \frac{\pi}{2} - \tau$ zeigt man

$$F(a,b) = F(b,a) \tag{84}$$

und mit der Substitution $t = \pi - \tau$, dass

$$F(a,b) := \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}},$$

also

$$F(a,b) := \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}. \tag{85}$$

Weiter folgt sofort

$$K(k) = F(1, \sqrt{1-k^2}), \tag{86}$$

so dass ein Berechnungsverfahren für F auch eines für K liefert.

Wir möchten in der Formel für F die Substitution

$$\tan t = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\tan u$$

machen. Auf $[0, \frac{\pi}{2}[$ ist der Tangens streng monoton, also injektiv, und wenn wir uns an $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ erinnern, finden wir

$$\frac{1}{\cos^2 t}\frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{1}{\cos^2 u} \qquad \text{oder} \qquad dt = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{\cos^2 t}{\cos^2 u} du.$$

Weil der Tangens in $\frac{\pi}{2}$ nicht definiert ist, wählen wir $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ und definieren $\psi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ durch

$$\tan\phi = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\tan\psi.$$

Dann liefert die Substitutionsregel:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} &= \int_0^{\phi} \frac{dt}{a\cos t\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2 t}}\\
&= \int_0^{\psi} \frac{\cos^2 t\, du}{\sqrt{ab}\cos t\cos^2 u\sqrt{1+\frac{b}{a}\tan^2 u}}\\
&= \int_0^{\psi} \frac{\cos t\, du}{\sqrt{ab}\cos^2 u\sqrt{1+\frac{b}{a}\tan^2 u}}\\
&= \int_0^{\psi} \frac{du}{\sqrt{ab}\cos^2 u\sqrt{1+\frac{b}{a}\tan^2 u}\,\sqrt{1+\frac{a}{b}\tan^2 u}}\\
&= \int_0^{\psi} \frac{du}{\sqrt{a\cos^2 u + b\sin^2 u}\,\sqrt{b\cos^2 u + a\sin^2 u}}.
\end{aligned}
$$

Nun sind die Tangens-Terme wieder verschwunden, und wir können den Limes für $\phi \to \frac{\pi}{2}$ bilden. Weil das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion differenzierbar, insbesondere also stetig ist, und weil

$$\lim_{\phi\to\pi/2}\psi = \lim_{\phi\to\pi/2}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan\phi\right) = \frac{\pi}{2}$$

ist, folgt

$$
\begin{aligned}
F(a,b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{(b\cos^2 u + a\sin^2 u)(a\cos^2 u + b\sin^2 u)}}\\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{ab(\cos^4 u + \sin^4 u) + (a^2+b^2)\cos^2 u\sin^2 u}}\\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{ab(\cos^2 u - \sin^2 u)^2 + (a+b)^2\cos^2 u\sin^2 u}}\\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{ab\cos^2 2u + (\frac{a+b}{2})^2\sin^2 2u}} \underset{2u=t}{=} \int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{ab\cos^2 t + (\frac{a+b}{2})^2\sin^2 t}}\\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{\sqrt{ab}^2\cos^2 t + (\frac{a+b}{2})^2\sin^2 t}} \underset{(85)}{=} F\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) \underset{(84)}{=} F\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).
\end{aligned}
$$

Also haben wir

Lemma 230.

$$F(a,b) = F\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

$F(a,b)$ ändert sich nicht, wenn man a und b durch das arithmetische bzw. geometrische Mittel von a und b ersetzt.

Nun gilt, vgl. (58),

$$b < \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} < a.$$

Definieren wir also rekursive Folgen $a_0 := a, b_0 := b$

$$b_{k+1} := \sqrt{a_k b_k}, \quad a_{k+1} := \frac{a_k + b_k}{2},$$

so ist

$$b \le b_k \le b_{k+1} \le a_{k+1} \le a_k \le a$$

und

$$0 \le a_{k+1} - b_{k+1} \le a_{k+1} - b_k = \frac{a_k - b_k}{2}.$$

Also existieren $A := \lim a_k$ und $B := \lim b_k$ und es gilt

$$\sqrt{AB} = \frac{A+B}{2}.$$

Daraus folgt unmittelbar $A = B$. Diesen Wert nennt man das *arithmetisch-geometrische Mittel* $AGM(a,b)$ von a und b.

Schließlich gilt

$$\lim_{k\to\infty} F(a_k, b_k) \underset{(*)}{=} F(A,B) = F(A,A) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{A^2\cos^2 t + A^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{A} = \frac{\pi}{2A}$$

Den Beweis für die Limes-Aussage (*) (d.h. den Beweis für die Stetigkeit von F) unterschlagen wir; er ist nicht schwer, wenn man Methoden der Analysis II zur Verfügung hat. Also finden wir

$$F(a,b) = \frac{\pi}{2AGM(a,b)}.$$

Die AGM-Folgen konvergieren außerordentlich schnell und liefern wegen der Monotonie auch Fehlerschranken. Für $a = 6$ und $b = 2$ erhält man

k	b_k	a_k
0	2	6
1	3.4641016151	4.0
2	3.7224194364	3.7320508076
3	3.7272320109	3.7272351220
4	3.7272335665	3.7272335665

Aus $F(1, \sqrt{1-k^2}) = K(k)$ ergibt sich

$$K(k) = \frac{\pi}{2AGM(1, \sqrt{1-k^2})}.$$

Das vollständige elliptische Integral 2. Art erhält man mit der Formel

$$E(k) = \frac{K(k)}{2}\left(2 - k^2 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^j (b_k^2 - a_k^2)\right),$$

wobei $a_0 = 1$ und $b_0 = \sqrt{1-k^2}$.

Zu dieser Formel und einer Fülle weiterer Informationen zu den elliptischen Integralen vgl. *Spanier/Oldham: An Atlas of Functions.*

9.6.2 Integration komplexwertiger Funktionen

Für komplex*wertige* Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ einer reellen Variablen definiert man das Integral durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil: Ist $f = u + iv$ mit $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$, so sei

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass u und v Regelfunktionen sind, und dann nennen wir f eine (komplexwertige) Regelfunktion.

Substitutionsregel und partielle Integration, die elementaren Integrationsregeln, die keine Monotonie-Aussagen benutzen, der Begriff der Stammfunktion sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung übertragen sich "wörtlich" auf diese Situation.

Die Integralabschätzung in Korollar 202 und der daraus folgende Mittelwertsatz der Integralrechnung gelten nicht für komplexwertiges f. Dagegen bleibt die Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

richtig, folgt aber nicht mehr einfach aus der Monotonie $f \leq |f|$. Beweisen kann man sie mit einem hübschen Trick:

Falls $I := \int_a^b f(x)dx = 0$, ist die Behauptung klar. Wir nehmen daher an, dass $I \neq 0$. Dann gilt

$$1 = \operatorname{Re}\frac{\int_a^b f(x)dx}{I} = \operatorname{Re}\int_a^b \frac{f(x)}{I}dx = \int_a^b \operatorname{Re}\frac{f(x)}{I}dx \leq \int_a^b \left|\frac{f(x)}{I}\right| dx = \frac{1}{|I|}\int_a^b |f(x)|dx.$$

Durch Multiplikation mit $|I|$ folgt die Behauptung. Die Ungleichung im Beweis benutzt die Monotonie des Integrals für *reellwertige* Funktionen.

Beispiel 231. Wir berechnen

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-i)^2} = \left.\frac{-1}{x-i}\right|_0^1 = \frac{-1}{1-i} - \frac{-1}{0-i} = -\frac{1}{1+i} = -\frac{1}{2}(1-i).$$

Dabei haben wir benutzt, dass auch für komplexes a und für $k \in \mathbb{Z}$ die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx}(x+a)^k = k(x+a)^{k-1}$$

gilt. Beweisen Sie das!

□

Vorsicht bei der Integration von $1/(x-z)$ mit komplexem $z = \alpha + i\beta$ mit $\beta \neq 0$. Die Funktion $\ln|x-z|$ ist *keine* Stammfunktion. Ihre Ableitung ist, wie sie selbst, nämlich reellwertig, also sicher nicht gleich $1/(x-z)$. Wir untersuchen das genauer:

Beispiel 232. Sei $z = \alpha + i\beta$ mit reellen α, β und $\beta \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-z} &= \int \frac{dx}{(x-\alpha) - i\beta} = \int \frac{x-\alpha+i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + i\int \frac{1/\beta}{(\frac{x-\alpha}{\beta})^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + i\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + const. \\
&= \ln|x-z| + i\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + const.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 233. Es gilt nach der Regel über die partielle Integration

$$\int xe^{i\omega x} = x\frac{1}{i\omega}e^{i\omega x} - \int \frac{1}{i\omega}e^{i\omega x} = -x\frac{i}{\omega}e^{i\omega x} + \frac{1}{\omega^2}e^{i\omega x} + const.$$

Nun benutzen wir die Eulersche Formel $e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$ zur Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}\int x\cos\omega x dx + i\int x\sin\omega x dx &= -x\frac{i}{\omega}(\cos\omega x + i\sin\omega x) + \frac{1}{\omega^2}(\cos\omega x + i\sin\omega x) + const.\\ &= +\frac{x}{\omega}\sin\omega x + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega x + i\left(-\frac{x}{\omega}\cos\omega x + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega x\right) + const.\end{aligned}$$

Beide Ansätze zusammen liefern

$$\begin{aligned}\int x\cos\omega x dx &= \frac{1}{\omega}\left(x\sin\omega x + \frac{1}{\omega}\cos\omega x\right) + const.\\ \int x\sin\omega x dx &= \frac{1}{\omega}\left(-x\cos\omega x + \frac{1}{\omega}\sin\omega x\right) + const.\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 234. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Weil die komplexe Exponentialfunktion die Periode $2\pi i$ hat, ist $e^{i(m+n)x}|_0^{2\pi} = 0$. Daher gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } m - n = 0,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \tag{87}$$

Definiert man für Regelfunktionen $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\bar{g}(x)dx,$$

so sind die Funktionen e^{inx} bezüglich dieses *Skalarprodukts* also *orthonormal*.

Benutzt man die Eulerschen Formeln, so erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}dx &= \int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx dx + \int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx dx\\ &\quad + i\left(\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx dx - \int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx dx\right).\end{aligned}$$

Mittels (87) folgen daraus sehr leicht die sogenannten Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen, die in der Theorie der Fourieranalyse wichtig sind:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx dx = 0 \quad &\text{für alle } m, n \in \mathbb{N},\\ \int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx dx = \int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx dx = 0 \quad &\text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n,\\ \int_0^{2\pi}\cos^2 mx dx = \int_0^{2\pi}\sin^2 mx dx = \pi \quad &\text{für } m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

$\square$

9.6.3 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen lassen elementar integrieren, wenn im Integrationsintervall keine Nullstellen des Nenners liegen[4].

Zunächst kann man jede solche Funktion schreiben als ein Polynom (das kann jeder elementar integrieren) plus eine rationale Funktion mit Zählergrad<Nennergrad, und die kann man erst einmal in Partialbrüche zerlegen. Also muss man nur noch überlegen, wie man die "Partialbruchteile" integriert. Dafür kennen wir aber Stammfunktionen:

- Für $k > 1$ und $z \in \mathbb{C}$ ist
$$\int \frac{dx}{(x-z)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-z)^{k-1}} + const.$$
- Für $a \in \mathbb{R}$ ist
$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + const.$$
- Für $z = \alpha + i\beta$ mit $\beta \neq 0$ ist
$$\int \frac{dx}{x-z} = \ln|x-z| + i \arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + const. \tag{88}$$
vergleiche Beispiel 232.

Wenn die rationale Funktion reell ist, führt die Methode der Partialbruchzerlegung möglicherweise durchs Komplexe, aber natürlich ist das Endergebnis wieder reell. Dafür ein

Beispiel 235. Sei
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$
mit reellen p und q und mit $\operatorname{Grad} p < \operatorname{Grad} q = 2$. Der Nenner habe eine nicht-reelle Nullstelle $z = \alpha + i\beta$. Dann ist also auch $\bar{z} = \alpha - i\beta$ eine Nullstelle, und o.E. $q(x) = (x-z)(x-\bar{z})$. Wir erhalten für die Partialbruchzerlegung
$$f(x) = \frac{A}{x-z} + \frac{B}{x-\bar{z}}.$$
Die Zuhaltemethode liefert
$$A = p(\bar{z}) \underset{p \text{ reell!}}{=} \overline{p(z)} = \bar{B}.$$
Wir benutzen nun (88), und beachten, dass $\ln|x-z| = \ln|x-\bar{z}|$ und arctan eine ungerade Funktion ist. Wir finden
$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= (A+\bar{A})\ln|x-z| + i(A-\bar{A})\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + const.\\ &= 2\operatorname{Re}(A)\ln|x-z| - 2\operatorname{Im}(A)\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + const.\end{aligned}$$

□

Nicht immer ist es günstig, die Partialbruchzerlegung vollständig durchzuführen, wie das folgende Beispiel zeigt:

[4] Das wollen wir im folgenden immer voraussetzen: Die angegebenen Stammfunktionen sind nur auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners definiert.

Beispiel 236. Es gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x-2)^2+5}\,dx &= \int \frac{A(x-2)}{(x-2)^2+5}\,dx + \int \frac{B+2A}{(x-2)^2+5}\,dx\\ &= \frac{A}{2}\ln|(x-2)^2+5| + \frac{B+2A}{5}\int \frac{1}{(\frac{x-2}{\sqrt{5}})^2+1}\,dx\\ &= \frac{A}{2}\ln|(x-2)^2+5| + \frac{B+2A}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x-2}{\sqrt{5}} + const.\end{aligned}$$

□

Beispiel 237. Gesucht $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}$. Die Partialbruchzerlegung ist von der Form

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Die Zuhaltemethode liefert

$$A = 1, \quad C = 2.$$

Mit $x = 0$ folgt dann

$$0 = \frac{1}{-1} + \frac{B}{-2} + \frac{2}{2^2},$$

also

$$B = -1.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2} &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right)dx\\ &= \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{2}{x-2} + const.\end{aligned}$$

□

9.7 Uneigentliche Integrale

Wir haben die Integration bisher nur über kompakte Intervalle $[a,b]$ definiert. Auch haben integrierbare Funktionen nach unserer Definition die Eigenschaft, sich durch Treppenfunktionen, d.h. durch Funktionen mit nur endlich vielen Werten, approximieren zu lassen. Sie sind deshalb notwendigerweise selbst immer beschränkt. In diesem Abschnitt wollen wir Integrale für den Fall definieren, dass der Integrationsbereich oder die Funktion unbeschränkt ist.

Definition 238. Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes Intervall $[a,b]$ integrierbar ist. Dann definieren wir das uneigentliche Integral

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,}$$

falls der Grenzwert exisitiert.

Beispiel 239.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan x|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

□

Beispiel 240.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b,$$

und das existiert nicht.

□

Beispiel 241. Für $\alpha \neq 1$ ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b = \frac{-1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty} b^{-\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1,\\ \text{nicht existent} & \text{für} \alpha < 1.\end{cases}$$

□

Offenbar ist es nützlich, ein Kriterium für die Existenz von $\lim_{x\to\infty} F(x)$ zu haben. Das folgende Kriterium ist eine Variante des Cauchy-Kriteriums für Folgen.

Lemma 242. *Für eine Funktion $F : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{b\to\infty} F(b)$ genau dann, wenn gilt:*

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $b^* > a$, so dass

$$|F(x) - F(y)| < \epsilon \textit{ für alle } x, y \geq b^*.$$

Beweis. Zeigen Sie selbst, dass die Bedingung notwendig ist.

Sie ist auch hinreichend: Seien $\epsilon > 0$ und b^* dazu wie im Kriterium gewählt. Ist (b_n) eine Folge in $[a,\infty[$ mit $\lim b_n = \infty$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \geq b^*$ für alle $n \geq N$. Dann ist für $m, n \geq N$ aber $|F(b_m) - F(b_n)| < \epsilon$, d.h. $(F(x_n))$ ist eine Cauchyfolge und damit konvergent gegen einen Wert A. Ist (c_m) eine weitere gegen ∞ konvergente Folge, so gibt es ein M mit $c_m > b^*$ für alle $m \geq M$ und damit

$$|F(c_m) - A| \leq |F(c_m) - F(b^*)| + |F(b^*) - A| < 2\epsilon.$$

Also konvergiert auch $F(c_m)$ gegen A. Daraus folgt die Existenz von $\lim_{b\to\infty} F(b)$. □

Beispiel 243. Weil e^{-x^2} keine elementare Stammfunktion besitzt, kann man die Existenz von

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \tag{89}$$

nicht wie bei den vorstehenden Beispielen nachweisen. Aber für $F(b) := \int_0^b e^{-x^2} dx$ und $1 < a < b$ gilt

$$|F(b) - F(a)| = \int_a^b e^{-x^2} dx \leq \int_a^b e^{-x} dx = e^{-a} - e^{-b} \leq e^{-a}.$$

Wegen $\lim_{a\to\infty} e^{-a} = 0$ folgt daraus mit dem Lemma die Existenz des uneigentlichen Integrals. Seinen Wert können wir mit unseren bisherigen Methoden nicht berechnen. Der Computer liefert $\sqrt{\pi}/2$, und das werden wir in der Analysis II bestätigen.

□

Beispiel 244 (Elektronenkonzentration und Fermi-Integral). Bei der Berechnung der Elektronenkonzentration in einem Leitungsband tritt das Integral

$$\int_{W_L}^\infty \frac{\sqrt{W - W_L}}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} dW$$

auf. Dabei sind die Energieniveaus W_L und W_F ebenso konstant, wie k (=Boltzmannkonstante) und T (=Temperatur). Das uneigentliche Integral existiert. Es ist nämlich für $b > W_L$

$$\int_{W_L}^b \frac{\sqrt{W - W_L}}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} dW = \sqrt{kT} \int_{W_L}^b \frac{\sqrt{\frac{W - W_L}{kT}}}{1 + e^{\frac{W - W_L}{kT} + \frac{W_L - W_F}{kT}}} dW$$

Wir substituieren $\eta = \frac{W - W_L}{kT}$ und setzen zur Abkürzung $s = \frac{W_L - W_F}{kT}$. Wir erhalten

$$\int_{W_L}^b \frac{\sqrt{W - W_L}}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} dW = \sqrt{kT} \int_0^{\frac{b - W_L}{kT}} \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} kT \, d\eta = (kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{b - W_L}{kT}} \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} d\eta.$$

Beachten Sie, dass nach der Substitution statt der vier Parameter k, T, W_L, W_F nur noch einer, nämlich s, wesentlich im Integral auftritt. Wir müssen zeigen, dass

$$F_{\frac{1}{2}}(s) := \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} d\eta$$

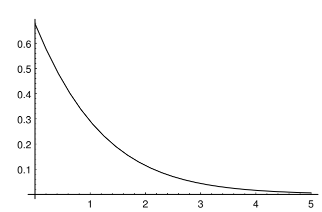
existiert. Für $\eta > 1$ ist aber

$$\frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} \leq e^{-s} \eta e^{-\eta}.$$

Deshalb ist für $1 < a < b$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} d\eta \leq \int_a^b \eta e^{-\eta} e^{-s} d\eta = -e^{-s} \; (1 + \eta) e^{-\eta}\Big|_a^b \leq e^{-s}(1 + a)e^{-a} \to 0 \text{ für } a \to \infty.$$

Aus dem Lemma 242 folgt die Existenz des Integrals. Die Funktion $F_{\frac{1}{2}}$ heißt *Fermiintegral*. Mathematica liefert nach numerischer Integration den nebenstehenden Plot des Graphen.



□

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ definiert man analog zum obigen, und man setzt

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx,}$$

falls die beiden rechten Integrale existieren. Das ist eine stärkere Forderung als die Bedingung, dass $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx$ existiert, wie man z.B. an $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ sieht.

Wir kommen nun zur **Integration unbeschränkter Funktionen.**

Definition 245. Sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $c \in]a, b]$ das Integral $\int_c^b f(x)dx$ existiert. Dann definieren wir das uneigentliche Integral

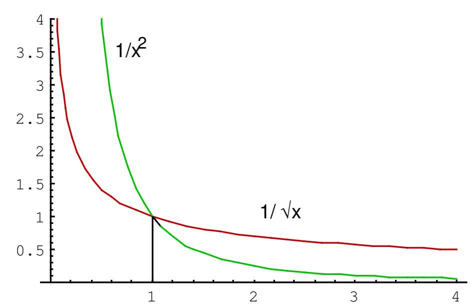
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)dx}$$

falls der Grenzwert existiert. Weil $\lim_{c\to 0} \ln c = -\infty$, existiert zum Beispiel $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ nicht, vgl. die Rechnung im analogen Beispiel oben.

Beispiel 246. Sei $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\searrow 0} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{a\searrow 0} a^{-1+\alpha} = \begin{cases} \text{nicht existent}, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

Für die Integrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ und $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ ist also $\alpha = 1$ der kritische Parameterwert: für $\alpha = 1$ existieren die uneigentlichen Integrale beide nicht. Ist die Funktion aber $< \frac{1}{x}$, so existieren sie. Das ist in $]0, 1]$ für $\alpha < 1$ und in $[1, \infty[$ für $\alpha > 1$ der Fall.



$\square$

10 Unendliche Reihen

10.1 Konvergenz von Reihen, geometrische Reihe

Definition 247. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine (reelle oder komplexe) Folge.

(i) Durch

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

definieren wir eine neue Folge (s_n), die wir mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnen. Folgen dieser Form heißen *unendliche Reihen*.

(ii) Man nennt s_n auch die *n-te Partialsumme* der unendlichen Reihe.

(iii) Die unendliche Reihe heißt *konvergent gegen* a, wenn die Folge (s_n) konvergent gegen a ist. In diesem Fall schreiben wir auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ statt a und nennen diesen Grenzwert *die Summe* der unendlichen Reihe.

Bemerkungen.

1. Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat also zwei Bedeutungen: Es bezeichnet eine Folge (die *Partialsummenfolge*) und ggf. deren Grenzwert.

2. Man schreibt
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \ldots.$$

3. Statt $\mathbb{N}$ betrachtet man auch andere Summationsbereiche. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ ist die Folge
$$\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right)_{n\geq m}$$

4. Ist der Summationsbereich klar oder irrelevant, so schreibt man auch einfach
$$\sum a_k$$
ohne Angabe der Summationsgrenzen.

Beispiel 248 (Die geometrische Reihe). Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $a_k = x^k$. Die zugehörige Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

heißt die **geometrische Reihe**. Sie ist die wichtigste Reihe überhaupt. Die Partialsummen sind gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1, & \text{falls } x = 1, \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x = 1$ ist das klar. Für $x \neq 1$ kann man es durch vollständige Induktion beweisen. Oder man bemerkt, dass

$$(1-x)s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n - (x + x^2 + \ldots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Die unendliche Reihe ist für $x = 1$ also bestimmt divergent (konvergent gegen $+\infty$), für $x = -1$ ist sie divergent.

Für $|x| > 1$ ist (x^{n+1}) und daher auch die Partialsummenfolge $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ divergent.

Die geometrische Reihe ist also für alle x mit $|x| \geq 1$ divergent.

Andrerseits ist $\lim x^n = 0$ für $|x| < 1$, und deshalb erhalten wir

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1.}$$

□

Beispiel 249. Die Dezimaldarstellung $x = n_m \ldots n_0, n_{-1}n_{-2}n_{-3}\ldots$ mit den Ziffern $n_k \in \{0, \ldots, 9\}$ ist definiert als

$$\sum_{k=-m}^{\infty} n_{-k}10^{-k} = n_m 10^m + \ldots + n_0 10^0 + n_{-1}10^{-1} + \ldots.$$

Später werden wir leicht einsehen, dass diese Reihe für jede Ziffernfolgen (n_k) konvergent ist, also eine reelle Zahl darstellt. Direkt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich aber jetzt schon

$$0{,}999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot (\frac{1}{10})^k = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

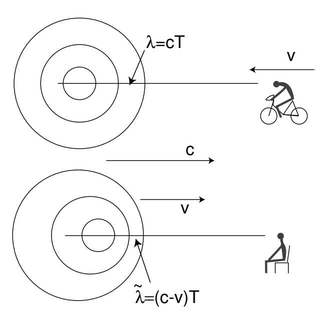
□

Eine wichtige Anwendung konvergenter Reihen ist die Approximation des Grenzwertes durch einen einfacher überschaubaren Teil der Reihe, wie Sie es von der Taylorapproximation schon kennen.

Beispiel 250 (Dopplereffekt). Eine ruhende Quelle sendet Wellen mit der Frequenz ν und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c aus. Die Wellenlänge ist dann $\lambda = c/\nu$.

Bewegt sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit $v << c$ auf die ruhende Quelle zu, so erhöht sich die empfangene Frequenz auf

$$\hat{\nu} = \frac{c+v}{\lambda} = \nu(1 + \frac{v}{c}).$$



Bewegt sich andrereits die Quelle mit der Geschwindigkeit v auf den Empfänger zu, so verkürzt sich die Wellenlänge auf $\tilde{\lambda} = (c-v)/\nu = c/\tilde{\nu}$, die empfangene Frequenz ist

$$\tilde{\nu} = \nu \frac{1}{1 - v/c} = \nu(1 + \frac{v}{c} + (\frac{v}{c})^2 + \ldots) \approx \nu(1 + \frac{v}{c} + (\frac{v}{c})^2).$$

In diesem Fall ist die Frequenz also höher als bei bewegtem Empfänger.

□

Satz 251 (Rechenregeln für konvergente unendliche Reihen). *Sind* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$ *konvergente unendliche Reihen, so konvergiert* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$ *gegen* $A+B$*:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Ist weiter $c \in \mathbb{R}$ *so folgt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Regeln für konvergente Folgen, weil unendliche Reihen ja Folgen *sind*. □

Mit Produkten unendlicher Reihen ist es komplizierter. Man muss jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe malnehmen, was bei unendlich vielen Gliedern Probleme macht. Eine einleuchtende Anordnung der Produkte gibt die sogenannte Produktformel von Cauchy:

$$(\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \text{ wobei } c_k := a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0. \tag{90}$$

Diese Formel gilt allerdings nur unter zusätzlichen Voraussetzungen, wir kommen darauf zurück.

Bemerkung: Der Reihenrest. Als m-ten Reihenrest der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnen wir die Reihe $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$. Die Partialsummen dieser Reihe sind

$$r_{m,n} := \sum_{k=m+1}^{n} a_k = s_n - s_m.$$

Also ist die Reihe genau dann konvergent gegen s, wenn alle Reihenreste konvergent sind, $r_m := \lim_{n\to\infty} r_{m,n} = s - s_m$, und die r_m gegen 0 konvergieren.

10.2 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen I

Wie prüft man, ob eine Reihe konvergiert? Notwendig und hinreichend ist, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge ist. Weil

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad 0 < m \leq n$$

bedeutet das:

Satz 252 (Cauchy-Kriterium). *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$N \leq m \leq n \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon.$$

Wählt man $m = n$ so ergibt sich als einfaches *notwendiges* Kriterium:

Satz 253 (Notwendiges Kriterium). *Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge*

$$\sum a_k \text{ konvergent} \Longrightarrow \lim a_k = 0.$$

Aber eine Reihe, deren Glieder gegen 0 gehen, muss nicht konvergent sein.

> Zitat: *Vom Nutzen, den die Mathematik einem Bel Esprit bringen kann: Größte und Kleinste. Dieses Capitel in der Rechnung des Unendlichen ist überhaupt sehr lehrreich für viele Leute, die es verstehen könnten, aber nicht verstehen. Denn ich wüsste nicht, ob es einen Stand in der Welt geben kann, worin es unnütz sey zu wissen, dass bey immer zunehmenden Bemühungen zu einem Endzweck zu gelangen, der Endzweck zuweilen gänzlich verfehlt wird. (G. Chr. Lichtenberg)*

Ein Beispiel ist das sehr berühmte „Gegenstück" zur geometrischen Reihe:

Beispiel 254 (Die harmonische Reihe). Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

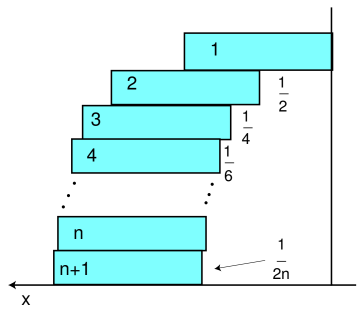
ist divergent. Das kann man so einsehen: Für $n \geq 2^k$ ist

$$s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{>\frac{1}{2}} > 1 + \frac{k}{2}.$$

Daraus folgt $s_n \to \infty$, die Reihe ist divergent.

□

Die Divergenz der harmonischen Reihe hat folgende „praktische Anwendung“:



Wir bauen einen Turm aus Ziegelsteinen der Länge 1 „von oben nach unten“, indem wir den bereits gebauten Turm so auf den nächsten Stein setzen, dass sein Schwerpunkt gerade über der Kante des neuen untersten Steins liegt, der Turm also gerade eben nicht umkippt. Ist S_{n-1} die x-Koordinate des Schwerpunktes der ersten $n-1$ Steine, so liegt der Schwerpunkt des n-ten Steins also bei $S_{n-1} + \frac{1}{2}$, und der Schwerpunkt des erweiterten Turms bei

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}((n-1)S_{n-1} + (S_{n-1} + \frac{1}{2})) \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe kann man also den Überhang beliebig groß machen. Zum Beispiel ist $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k} = 1.04$, mit fünf Steinen kann man einen Überhang von mehr als einem Stein und mit 32 Steinen einen von mehr als zwei Steinen realisieren.

Wir wollen nun **hinreichende Kriterien** für die Konvergenz einer unendlichen Reihe geben.

Zunächst vergleichen wir zwei reelle Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$. Von der zweiten Reihe sei schon bekannt, dass sie konvergiert, und wir wollen annehmen, dass

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \text{für alle } k \tag{91}$$

gilt. Weil die Summanden ≥ 0 sind, sind die Folgen der Partialsummen monoton wachsend und

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k =: M.$$

Die Partialsummenfolge der Reihe $\sum a_k$ ist also monoton und beschränkt, und daher nach dem Vollständigkeitsaxiom konvergent.

Wir wollen dieses Kriterium noch verallgemeinern: Hat man statt (91) die allgemeinere Bedingung

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{für alle } k,$$

so ergibt sich die Konvergenz der Reihe $\sum |a_k|$.

Definition 255 (Absolute Konvergenz). Eine (reelle oder komplexe) Reihe $\sum a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert.

Zunächst scheint das unmotiviert. Wir interessieren uns doch für die Reihe $\sum a_k$ und nicht für die Reihe $\sum |a_k|$. Aber es gilt der

Satz 256. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

1. Beweis (für reelle oder komplexe Reihen). Wir zeigen die Konvergenz von $\sum a_k$ mit dem Cauchy-Kriterium Satz 252. Sei also $\epsilon > 0$. Weil $\sum |a_k|$ konvergent ist, gibt es nach diesem Kriterium ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$N \leq m \leq n \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| < \epsilon.$$

Dann gilt nach der Dreiecksungleichung aber

$$N \leq m \leq n \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon,$$

und damit wiederum nach dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz von $\sum a_k$. □

2. Beweis (nur für reelle Reihen). Sei wieder $\sum |a_k|$ konvergent. Dann ist nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch $\sum 2|a_k|$ konvergent. Weil

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|,$$

ist deshalb nach dem obigen Argument auch die Reihe $\sum(a_k + |a_k|)$ konvergent. Dann ist wieder nach den Rechenregeln für konvergente Reihen auch

$$\sum a_k = \sum(a_k + |a_k|) - \sum |a_k|$$

konvergent. □

Bemerkung. Reihen, die zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, nennt man *bedingt konvergent*. Wir werden später sehen, dass absolut konvergente Reihen angenehmere Eigenschaften haben, als bedingt konvergente. Daher ist es sinnvoll bei den Konvergenzkriterien, die absolute Konvergenz liefern, dies auch zu vermerken.

Wir erinnern an folgenden Sprachgebrauch:

Eine Eigenschaft der Glieder einer Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt *für fast alle k*, wenn sie *für alle bis auf endlich viele Ausnahmen* gilt, d.h. wenn es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Eigenschaft auf alle x_k mit $k \geq K$ zutrifft.

Satz 257 (Vergleichskriterium=Majorantenkriterium). *Gegeben seien eine reelle oder komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und eine konvergente reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Es gelte*

$$|a_k| \leq b_k \textit{ für fast alle } k.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, also konvergent.

Beweis. Sei $|a_k| \leq b_k$ für alle $k > n$. Die Partialsummenfolge der Reihe $\sum |a_k|$ ist monoton wachsend und beschränkt durch

$$|a_0| + \ldots + |a_n| + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

also konvergent. □

Beispiel 258. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist konvergent nach dem Vergleichskriterium. Es ist nämlich für $k > 1$

$$\left| \frac{1}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} =: b_k.$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} b_k$ kann man aber leicht einsehen, weil man ihre Partialsummen explizit bestimmen kann:

$$\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}) = (\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n} \to 1.$$

Das konvergiert gegen 1, also ist die Reihe $\sum b_k$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium ist daher auch $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergent. Schwieriger ist, den Grenzwert der Reihe zu bestimmen. Er ist $\sum \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$.

□

Der Nachteil beim Vergleichskriterium ist, dass man schon eine konvergente Majorante $\sum b_k$ haben muss. Die folgenden Kriterien benutzen (oberflächlich betrachtet) nur die zu untersuchende Reihe und sind deshalb meistens die erste Wahl, wenn man eine Reihe auf Konvergenz untersuchen will.

Satz 259 (Wurzelkriterium). *Gegeben sei die (komplexe oder reelle) Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. *Dann gilt:*

(i) Gibt es ein $\boxed{q<1}$, *so dass für fast alle* $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(ii) Ist für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Beweis. *Zu (i).* Man hat $|a_k| \leq q^k$ für fast alle Folgenglieder. Vergleich mit der konvergenten Reihe $\sum q^k$ liefert die Behauptung. (Hier braucht man $q < 1$!)

Zu (ii). Hier ist $|a_k| \geq 1$ für unendlich viele k . Also konvergieren die Glieder nicht gegen Null, und die Reihe ist divergent. □

Bemerkungen.

1. Für die Anwendung des Wurzel- und des folgenden Quotientenkriteriums ist es hilfreich, sich folgendes klar zu machen:

   Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim x_n < 1 &\implies \limsup x_n < 1 \\ \limsup x_n < 1 &\iff \exists_{q<1}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\, x_n \leq q, \\ \lim x_n > 1 &\implies \limsup x_n > 1 \\ \limsup x_n > 1 &\iff \forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n\geq N}\, x_n > 1. \end{aligned}$$

   Das Wurzelkriterium liefert also zum Beispiel Konvergenz, wenn

$$\lim \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad \text{oder} \quad \limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

   und Divergenz, wenn

$$\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

2. Das $q < 1$ im Wurzelkriterium beschränkt die $\sqrt[k]{|a_k|}$ weg von Eins. Es reicht nicht, wenn $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ für alle k.

Beispiel 260. Für $n_k \in \{0, \ldots, 9\}$ ist die Dezimaldarstellung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{10^k}$$

nach dem Wurzelkriterium eine konvergente Reihe. Es ist nämlich für $k \geq 2$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{n_k}{10^k}} = \frac{\sqrt[k]{n_k}}{10} \leq \frac{\sqrt[k]{9}}{10} \leq \frac{3}{10} < 1.$$

□

Beispiel 261. Sei $0 < x < 1$ und sei

$$a_k := \begin{cases} x^{k-1} & \text{für ungerades } k, \\ x^{k+1} & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

Dann ist

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} x \frac{1}{\sqrt[k]{x}} & \text{für ungerades } k, \\ x \sqrt[k]{x} & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

Weil (vgl. Übungen)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x} = 1,$$

folgt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = x < 1.$$

Also ist die Reihe $\sum a_k$ nach dem Wurzelkriterium konvergent.

□

Satz 262 (Quotientenkriterium). *Gegeben sei die (komplexe oder reelle) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Für fast alle k sei $a_k \neq 0$. Dann gilt:*

(i) Gibt es ein $\boxed{q < 1}$, so dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(ii) Ist für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. *Zu (i).* Sei

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q < 1 \text{ für alle } k \geq K.$$

Daraus folgt für $k \geq K$:

$$|a_k| \leq q|a_{k-1}| \leq q^2|a_{k-2}| \leq \ldots \leq q^{k-K}|a_K| = \frac{|a_K|}{q^K}\, q^k =: b_k.$$

Weil $|q| < 1$ (HIER wird das benutzt!) ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{|a_K|}{q^K} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konvergent. Aus dem Vergleichssatz folgt die absolute Konvergenz von $\sum a_k$.

Bemerkung. Stattdessen kann man auch so schließen:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \underbrace{\sqrt[k]{\frac{|a_K|}{q^K}}}_{\to 1} \to q < 1 \text{ für } k \to \infty.$$

Also ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

Zu (ii). Aus

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \text{ für alle } k \geq K$$

folgt $|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq |a_K| > 0$ für $k \geq K$. Darum konvergieren die a_k sicher nicht gegen null, die Reihe ist divergent. □

Bemerkungen.

1. Wie im Beweis deutlich wird, ist das Wurzelkriterium für Konvergenz stärker als das Quotientenkriterium. Letzteres ist in der Regel angenehmer anzuwenden. Aber wenn es keine Auskunft gibt, macht es Sinn, auch das Wurzelkriterium zu versuchen. Vgl. auch das Beispiel 265.

2. Die Bemerkungen über die Anwendungen des Wurzeklkriteriums gelten analog für das Quotientenkriterium.

Beispiel 263. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ist konvergent nach dem Quotientenkriterium: Es ist nämlich

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{1/(k+1)!}{1/k!}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1.$$

□

Beispiel 264. Für die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist der Limes des Quotienten aufeinander folgender Glieder beide Male $= 1$. Das Quotientenkriterium macht in diesen Fällen keine Aussage. Aber wie wir gesehen haben, ist die erste Reihe divergent, die zweite nach dem Vergleichskriterium konvergent.

□

Beispiel 265. Für die Reihe aus Beispiel 261 finden wir

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} x^3 < 1 & \text{für ungerades } k, \\ x^{-1} > 1 & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

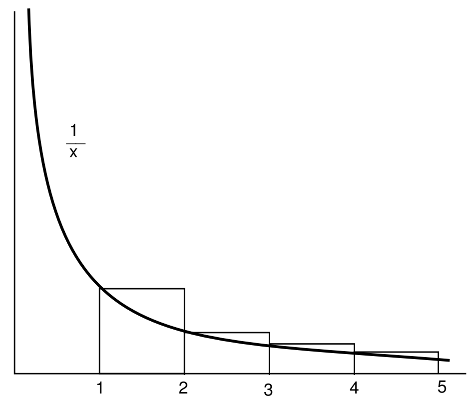
Daher hilft das Quotientenkriterium nicht weiter, aber das Wurzelkriterium liefert Konvergenz.

□

Wenn Sie die nebenstehende Figur studieren, liefert die „Divergenz“ des Integrals aus Beispiel 240 Ihnen einen neuen Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Vergleiche Beispiel 254.
Diese Überlegung kann man ausbauen zu einem Satz, der eine Beziehung zwischen uneigentlichen Integralen und unendlichen Reihen herstellt:



Satz 266 (Reihen-Integral-Kriterium). *Sei $f\colon [m,\infty[\to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [m,\infty[$, die über jedes Intervall $[m,b]$ integrierbar ist. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_m^\infty f(x)\,dx$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{i=m}^\infty f(i)$ konvergiert.*

Beweis. Aus $f(i) \geq f(x) \geq f(i+1)$ für $i \leq x \leq i+1$ folgt $f(i) \geq \int_i^{i+1} f(x)\,dx \geq f(i+1)$. Durch Summation folgt

$$\sum_{i=m+1}^{n+1} f(i) \leq \int_m^n f(x)dx \leq \sum_{i=m}^{n} f(i).$$

Man beachte, dass das Integral wegen der Monotonie von f existiert.

Weil $f \geq 0$, sind die Partialsummen $s_n = \sum_{k=m}^n f(k)$ und die Funktion $b \mapsto \int_m^b f(x)dx$ monoton wachsend. Existiert das Integral, so folgt

$$s_{n+1} - f(m) \leq \int_m^n f(x)dx \leq \int_m^\infty f(x)dx.$$

Also ist die Folge $(s_n)_{n\geq m}$ auch beschränkt und daher konvergent.

Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so folgt für $m \leq b \leq n$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\int_m^b f(x)dx \leq \int_m^n f(x)dx \leq s_n \leq \sum_{k=m}^\infty f(k).$$

Daher ist $J := \sup \int_m^b f(x)dx < \infty$. Ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein $B \geq m$ mit

$$J - \epsilon < \int_m^B f(x)dx \leq J.$$

Wegen der Monotonie des Integrals gilt die entsprechende Ungleichung dann auch für alle $b \geq B$. Daher exisitiert $\lim_{b\to\infty} \int_m^b f(x)dx$. □

Beispiel 267. Sei $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ \text{nicht existent}, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Aus Beispiel 240 wissen wir, dass das uneigentliche Integral für $\alpha = 1$ ebenfalls nicht existiert. Durch Anwendung des Satzes 266 auf $f(x) = 1/x^\alpha$ erhält man:

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty 1/n^\alpha$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

□

10.3 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen II

Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

ist konvergent, aber das können wir gewiß nicht mit den bisherigen Verfahren beweisen, denn die Reihe ist nicht absolut konvergent, weil eben die harmonische Reihe divergiert.

Die Tatsache der Konvergenz kann man dennoch relativ leicht einsehen.

- Durch das wechselnde Vorzeichen wird abwechselnd die Partialsumme erhöht oder erniedrigt.
- Weil $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ werden die absoluten Differenzen monoton immer kleiner. Die geraden Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_2 &= 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \\ s_4 &= 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) \\ &\dots \end{aligned}$$

  sind daher eine monoton fallende, die ungeraden

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\ s_3 &= 1 - \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \\ s_5 &= 1 - \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) \\ &\dots \end{aligned}$$

  eine monoton wachsende Folge. Natürlich sind sie beschränkt:

$$s_1 \leq s_{2k-1} \leq s_{2k} \leq s_0.$$

  Also sind die Folgen (s_{2k}) und (s_{2k+1}) konvergent.

- Weil $\lim \frac{1}{n} = 0$, geht die Differenz zweier aufeinander folgender Partialsummen gegen Null: „Obere“ und „untere“ Partialsummenfolgen konvergieren daher gegen denselben Wert und deshalb konvergiert auch (s_n) gegen diesen Wert, vgl. den Beweis von Satz 93.

Der Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe ist $\ln 2$, wie wir später zeigen werden.

Diese vorstehende Argumentation läßt sich unmittelbar zu einem Beweis für folgendes Konvergenzkriterium erweitern.

Satz 268 (Leibniz-Kriterium). *Für die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ *gelte*

(i) Die Folge (a_k) *ist monoton fallend:*

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0,$$

(ii) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dann ist die Reihe konvergent. Ihre Summe liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ *ist*

$$s_{2m-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq s_{2m}$$

und

$$s_{2m+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq s_{2m}.$$

Beispiel 269. Wir setzen für $k \geq 1$

$$a_k := \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^k \frac{1}{k}.$$

Dann sind die $a_k \geq 0$ und konvergieren gegen 0, aber die Folge ist nicht monoton. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

ist nicht konvergent, denn sonst wäre auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^k a_k - (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(-1)^k \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

konvergent. Ist sie aber nicht.

□

An der alternierenden harmonischen Reihe kann man noch ein wichtiges Phänomen deutlich machen: Bei unendlichen Reihen ist die Reihenfolge der Glieder im allgemeinen nicht mehr gleichgültig, es gilt **kein „Kommutativgesetz“**. Das liegt daran, dass eine Umordnung von (unendlich vielen) Gliedern die Partialsummenfolge völlig verändert. Bei der alternierenden harmonischen Reihe sind nämlich die Reihen der positiven bzw. negativen Glieder

$$\begin{gathered} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots \end{gathered}$$

beide divergent. (Die zweite ist einfach die halbe harmonischen Reihe und deshalb divergent; die Glieder und darum die Partialsummen der ersten Reihe sind aber offensichtlich größer als die der zweiten, weshalb auch die erste Reihe divergent ist.) Darum kann man von der alternierenden Reihe zunächst so viele positive Glieder (der Reihe nach) addieren, bis man z.B. über 27 ist. Dann addiert man das erste negative Glieder und ist wieder unter 27. Dann addiert man weiter positive Glieder, bis man wieder über 27 ist und dann das zweite negative Glied.Auf diese Weise erwischt man schließlich alle Glieder der Reihe und hat sie so umgeordnet, dass die neue Reihe nun gegen 27 konvergiert. Es ist offensichtlich, dass man auf diese Weise statt 27 auch jeden anderen Grenzwert einschließlich bestimmter Divergenz gegen $+\infty$ oder $-\infty$ durch geeignete Umordnung erzielen kann.

Diese Zauberei funktionierte, weil man Glieder verschiedenen Vorzeichens hat, die für sich genommen divergente Reihen bilden. Wenn nicht nur die Reihe $\sum a_k$, sondern auch die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert, kann das wohl nicht mehr passieren. Das ist unser nächstes Thema.

10.4 Die Segnungen absoluter Konvergenz

Absolut konvergente Reihen haben Eigenschaften, die bei bedingt konvergenten (eventuell) fehlen, und die sie den endlichen Summen näherbringen: Man kann sie beliebig umordnen ohne das Konvergenzverhalten zu verändern, und man kann sie auf die naheliegende Weise miteinander multiplizieren. Das wollen wir in diesem Abschnitt zeigen.

Definition 270. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ heißt *eine Umordnung* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn es eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad k \mapsto n_k$ gibt, so dass für alle k gilt $a'_k = a_{\sigma(k)}$.

Satz 271 (Umordnungssatz). *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$* absolut *konvergent, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ ebenfalls absolut konvergent und beide Reihen haben dieselbe Summe:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k.$$

Beweis. 1. Es genügt zu zeigen, dass die umgeordnete Reihe ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert wie das Original ist. Wendet man den Satz dann auf $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ an, so folgt auch die absolute Konvergenz.

2. Wir bezeichnen die Partialsummen mit s_n bzw. s'_n und setzen $S := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Es genügt zu zeigen:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N} \, |s_n - s'_n| < \epsilon. \tag{92}$$

Ohne Einschränkung ist nämlich für $n \geq N$ auch $|s_n - S| < \epsilon$ und daher

$$|s'_n - S| \leq |s'_n - s_n| + |s_n - S| < 2\epsilon.$$

Also konvergiert $\sum a'_k$ gegen S.

3. Zum Beweis von (92). Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad k \mapsto n_k$ eine bijektive Abbildung, $a'_k := a_{\sigma(k)}$ und sei $\epsilon > 0$.

Wir betrachten ein $N_1 \in \mathbb{N}$ und dazu ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\{\sigma(0), \ldots, \sigma(N)\} \supset \{0, \ldots, N_1\}.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$

$$s'_n - s_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{N_1} a_k - \sum_{k=N_1+1}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k)>N_1}}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=N_1+1}^{n} a_k.$$

Es folgt

$$|s'_n - s_n| \leq \sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k)>N_1}}^{n} |a_{\sigma(k)}| + \sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k| \leq 2 \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k|.$$

Weil $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist, können wir ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{93}$$

Zu diesem N_1 wählen wir N wie oben und erhalten (92). □

Wir zeigen die Umkehrung des Umordnungssatzes:

Satz 272. *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so lässt sie sich so umordnen, dass sie konvergent gegen einen beliebig vorgegebenen Wert aus $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ist.*

Beweis. Seien $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folgen der positiven bzw. der Absolutbeträge der negativen Reihenglieder in ihrer natürlichen Reihenfolge. Beide sind unendlich, sonst wäre die Reihe absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} P_k = \lim_{k\to\infty} Q_k = 0.$$

Wenn wir zeigen können, dass $\sum_{k=0}^{\infty} P_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k$ beide divergent sind, folgt die Behauptung mit demselben Trick, mit dem wir im vorangegangenen Abschnitt die alternierende harmonische Reihe umgeordnet hatten.

Wir setzen

$$p_k := \frac{|a_k| + a_k}{2}, \quad q_k := \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

Also ist $p_k = a_k$, falls $a_k > 0$ und $p_k = 0$, wenn $a_k < 0$. Daher habe die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ und $\sum_k P_k$ bis auf Wiederholungen dieselbe Partialsummenfolge. Gleiches gilt für $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ und $\sum_k Q_k$. Also müssen wir zeigen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ beide divergent sind. Wäre eine konvergent, so wegen

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (p_k - q_k) = \sum_{k=0}^{n} p_k - \sum_{k=0}^{n} q_k$$

auch die andere. Dann wäre aber auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} (p_k + q_k) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergent im Widerspruch zur Voraussetzung. Also sind beide divergent. □

Satz 273 (Cauchyprodukt). *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ konvergente Reihen und eine der beiden absolut konvergent. Setze*

$$c_m := \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ konvergent, und für die Summen gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m. \tag{94}$$

Bemerkung. Wir zeigen später, dass (94) auch gilt, wenn alle *drei* Reihen konvergent sind, vgl. Korollar 288.

Beweis. Wir bezeichnen die Summen der beiden gegebenen Reihen mit A bzw. B und setzen

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n := \sum_{l=0}^{n} b_l, \quad C_n := \sum_{m=0}^{n} c_m.$$

Wir nehmen an, dass $\sum a_n$ absolut konvergiert und setzen

$$\beta_n := B_n - B.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) \\
&= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 \\
&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0) \\
&= A_nB + \underbrace{a_0\beta_n + \ldots + a_n\beta_0}_{\gamma_n}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen $\gamma_n \to 0$. Dann ist $\lim C_n = \lim A_nB = AB$. Sei

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Sei $\epsilon > 0$. Weil $\beta_k \to 0$, können wir $N_1 \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$|\beta_k| < \frac{\epsilon}{2\alpha + 1} \quad \text{für alle } k \geq N_1.$$

Für diese $n \geq N_1$ ist dann

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\leq |\beta_0a_n + \ldots \beta_{N_1}a_{n-N_1}| + |\beta_{N_1+1}a_{n-N_1-1}| + \ldots + |\beta_na_0| \\
&\leq |\beta_0a_n + \ldots \beta_{N_1}a_{n-N_1}| + \frac{\epsilon}{2\alpha + 1} \sum_{k=0}^{n-N_1-1} |a_k|. \\
&< |\beta_0a_n| + \ldots + |\beta_{N_1}a_{n-N_1}| + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Weil $a_k \to 0$, können wir ein N_2 so wählen, dass für alle $k \geq N := N_1 + N_2$

$$|a_k| < \frac{\epsilon}{2(|\beta_0| + \ldots + |\beta_{N_1}|) + 1}.$$

Dann ist für alle $n \geq N$

$$|\gamma_n| < \epsilon.$$

$\square$

Beispiel 274. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ ist nach dem Leibnizkriterium konvergent. Das Cauchyprodukt dieser Reihe mit sich selbst hat die Glieder c_m mit

$$|c_m| = \left|\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k(-1)^{m-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{m-k+1}}\right| = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{m-k+1}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{m+1}\sqrt{m+1}} = 1.$$

Also ist $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ nicht konvergent.

$\square$

Wie Sie sich an der Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$ klarmachen können, gilt für unendliche Reihen auch kein "verallgemeinertes Assoziativgesetz": Durch Setzen von geeigneten Klammern wird die vorstehende Reihe konvergent, weil man nur noch eine Teilfolge der Partialsummenfolge betrachtet. Man kann zeigen, aber wir verzichten darauf, dass man absolut konvergente Reihen auch beliebig klammern darf, ohne die Konvergenz und den Limes zu ändern.

10.5 Potenzreihen

Die wichtigsten Funktionen erhält man durch eine Verallgemeinerung der Polynome auf unendliche Summen:

Definition 275. Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Wir wollen diese Reihen gleich im Komplexen betrachten und nehmen deshalb an, dass die Koeffizienten a_k und der Entwicklungspunkt z_0 komplexe Zahlen sind. Weiter ist z eine komplexe Variable.

Auf der Menge $D \subset \mathbb{C}$ aller z, für die die Reihe konvergiert, liefert $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ also eine Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}.$$

Wir untersuchen nun die Frage, für welche Werte von z die Reihe konvergiert. Es ist einleuchtend, dass sie konvergiert, wenn $|z-z_0|$ „klein" ist, und divergiert, wenn diese Zahl „groß" ist. Dabei hängt die Bedeutung von „klein" und „groß" vermutlich von den a_k ab.

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe konvergent, wenn

$$|z-z_0| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k} < 1,$$

und divergent, wenn

$$|z-z_0| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k} > 1.$$

Definition 276 (Konvergenzradius). Zur Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ heißt

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

der *Konvergenzradius*. Er ist $+\infty$, wenn der Limes superior $= 0$ ist und 0, wenn der Limes superior $= +\infty$ ist.

Damit ergibt sich der

Satz 277 (Konvergenz von Potenzreihen). *Sei $R \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:*

$$|z-z_0| < R \implies \text{die Reihe } \sum a_k(z-z_0)^k \text{ ist absolut konvergent,}$$
$$|z-z_0| > R \implies \text{die Reihe } \sum a_k(z-z_0)^k \text{ ist divergent.}$$

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| < R\}$ ist ein „offener" Kreis vom Radius R um den Mittelpunkt z_0, der sogenannte Konvergenzkreis *der Reihe.*

Bemerkungen.

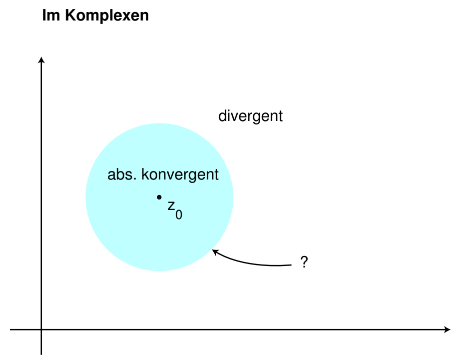
1. Ein *offener* Kreis ist eine Kreisfläche ohne die begrenzende Kreislinie. Will man die letztere dazurechnen, so spricht man von einem *abgeschlossenen* Kreis.

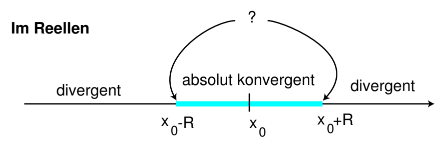
2. Über die Konvergenz für z-Werte auf dem Rand des Konvergenzkreises ($|z-z_0| = R$) gibt der Satz keine Auskunft.

3. Ist die Reihe reell, also alle a_k sowie z und z_0 reell, so ist der „Konvergenzkreis" ein symmetrisches Intervall

$$z_0 - R < z < z_0 + R$$

um z_0.





4. Für $R = \infty$ konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw. $z \in \mathbb{R}$.

5. Ein Wort zur Sprache: Sagen Sie nicht, die Reihe sei *innerhalb des Konvergenzradius konvergent*. Der Konvergenzradius ist eine Zahl, z.B. 7. Was soll es bedeuten, dass die Reihe innerhalb von 7 konvergiert?

Beispiel 278. Die geometrische Reihe $\sum z^k$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{1}} = 1.$$

Es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

□

Beispiel 279. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$ hat ebenfalls Konvergenzradius 1, wie man bequem mit dem Quotientenkriterium sieht. Noch einfacher: Wie wir wissen, ist sie

- für $z = 1$ divergent (harmonische Reihe),
- für $z = -1$ konvergent (alternierende harmonische Reihe).

Also muss der Konvergenzradius 1 sein.

□

Beispiel 280. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} z^{2k} \tag{95}$$

ist komplizierter: Der Konvergenzradius *nicht* etwa gegeben durch

$$1/R = \limsup \sqrt[k]{\frac{5^k}{k+1}}.$$

Es ist nämlich

$$a_k = \begin{cases} \frac{5^{k/2}}{\frac{k}{2}+1}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Weil die geraden Terme positiv sind, ist also

$$1/R = \limsup \sqrt[2k]{\frac{5^k}{k+1}} = \frac{\sqrt{5}}{\lim \sqrt[2k]{k+1}} = \sqrt{5}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\lim \sqrt[2k]{k+1} = 1$. Warum gilt das?

Eine andere Möglichkeit, den Konvergenzradius dieser Reihe zu bestimmen, ist die direkte Anwendung des Quotientenkriteriums:

$$\left| \frac{\frac{5^{k+1} z^{2k+2}}{k+2}}{\frac{5^k z^{2k}}{k+1}} \right| = 5|z|^2 \frac{k+1}{k+2} \to 5|z|^2.$$

Also konvergiert die Reihe für alle z mit $|z^2| < \frac{1}{5}$; sie divergiert für alle mit $|z|^2 > \frac{1}{5}$. Der Konvergenzradius ist also $\sqrt{\frac{1}{5}}$.

□

Beispiel 281. Auch für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

findet man den Konvergenzbereich am einfachsten mit dem Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{k! z}{(k+1)!} \right| = \left| \frac{z}{k+1} \right| \to 0.$$

Also ist die Reihe für alle z absolut konvergent.

□

Für Partialsummen von Reihen gilt natürlich die Dreiecksungleichung. Deshalb gilt für absolut konvergente Reihen

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Insbesondere gilt deshalb für z im Inneren des Konvergenzkreises einer Potenzreihe

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, |z - z_0|^k.$$

Davon werden wir im folgenden wiederholt Gebrauch machen.

10.6 Differentiation von Potenzreihen

Wir betrachten im folgenden wieder reelle Potenzreihen, weil wir Funktionen mit komplexem Argument noch nicht differenzieren können.

Satz 282 (Differentiation von Potenzreihen). *Die Funktion f sei durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R gegeben:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < R.$$

Dann gilt

(i) f ist auf $\{x \mid |x - x_0| < R\}$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k. \tag{96}$$

(ii) Die Potenzreihe (96) *hat ebenfalls den Konvergenzradius R.*

Kurz: *Potenzreihen darf man gliedweise differenzieren. Der Konvergenzradius ändert sich dabei nicht.*

Beweis. Zu (ii). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe

$$(x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^k$$

konvergiert. Wegen $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ ist der Konvergenzradius der letzteren Reihe

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[k]{k|a_k|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

Zu (i). Sei nun $|p - x_0| < R$. Wir wollen zeigen:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x aus dem Konvergenzintervall mit $0 < |x - p| < \delta$

$$\underbrace{\left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (p - x_0)^{k-1} \right|}_{=:(*)} < \epsilon. \tag{97}$$

Das beweist dann die Differenzierbarkeit in p.

Zunächst ist nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(p)}{x - p} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (p - x_0)^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \frac{(x - x_0)^k - (p - x_0)^k}{x - p} - k a_k (p - x_0)^{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k a_k (\xi_k - x_0)^{k-1} - k a_k (p - x_0)^{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \left((\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1} \right)
\end{aligned}$$

für ξ_k zwischen x und p.

Sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen ein r mit $|p - x_0| < r < R$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}$ konvergent, und daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dann ist für x mit $|x - x_0| < r$

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \sum_{k=0}^{N} k|a_k| \left|(\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1}\right| \\
&\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} k\,|a_k|\, \underbrace{|\xi_k - x_0|}_{<r}{}^{k-1} \quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} k\,|a_k|\, \underbrace{|p - x_0|}_{<r}{}^{k-1} \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} k a_k \left|(\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1}\right| + \frac{2}{3}\,\epsilon
\end{aligned}$$

In der ersten Summe stehen nur endlich viele Terme. Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass $]p - \delta, p + \delta[\subset]x_0 - r, x_0 + r[$ und für alle $x \in]p - \delta, p + \delta[$ (also $\xi_k \in]p - \delta, p + \delta[$) gilt

$$\sum_{k=0}^{N} k a_k \left|(\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1}\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Daraus folgt (97). □

Wir kommen nun dazu, die noch ausstehenden Existenzbeweise für exp und sin zu führen, vgl Satz 154 und Satz 186.

Beispiel 283 (Exponentialreihe). Wir haben im Abschnitt über die Exponentialfunktion gesehen: Wenn es eine Lösung $y = \exp$ des Anfangswertproblems

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

gibt, muss nach dem Satz von Taylor gelten

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Das ist aber einer Potenzreihe mit $R = \infty$. Die Reihe definiert also eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$, für deren Ableitung gilt:

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Damit ist die Existenz der Exponentialfunktion bewiesen.

□

Beispiel 284. Ebenso zeigt man, dass die Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbar Funktion y mit

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1$$

definiert. Das liefert den Existenzbeweis für die Sinusfunktion. Man findet für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}.}$$

□

Bemerkung. Viele Funktionen sind durch Potenzreihen, aber auch durch andere unendliche Reihen von Funktionen gegeben, zum Beispiel periodische Funktionen durch die sogenannten *Fourierreihen.* Eine naheliegende Frage ist dann diese:

Gegeben Funktionen $f_k : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall J, so dass

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

für alle $x \in J$ definiert (die Reihe also konvergent) ist. Unter welchen Voraussetzungen übertragen sich Eigenschaften wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit der f_k dann auf die Funktion f?

Dieses Thema gehört zum üblichen Standardrepertoire der Analysis I, aber wir vertagen es aus Zeitgründen in die Analysis II, wo man es in einem allgemeineren Rahmen behandeln kann.

10.7 Abelscher Grenzwertsatz

Reelle Potenzreihen definieren im inneren ihres Konvergenzintervalles differenzierbare und deshalb stetige Funktionen. Gelegentlich liegt auch in einem oder beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls noch Konvergenz vor. Wie steht es dort dann mit der Stetigkeit? Weil die Randpunkte offenbar besonders ausgezeichnet sind, ist diese Frage von einigem Interesse, vergleichen Sie die Beispiele unten.

Satz 285 (Abelscher Grenzwertsatz). *Die reelle Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *sei auf dem Intervall* $J \subset \mathbb{R}$ *konvergent. Dann ist die durch*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

definierte Funktion stetig auf J.

Bemerkungen. 1. Sei R der Konvergenzradius der Reihe. Auf $\{x \mid |x-x_0| < R\}$ ist f dann sogar differenzierbar, also erst recht stetig. Der Satz ist also nur interessant für die Randpunkte (=Grenzwerte) des offenen Konvergenzintervalls.

2. Auch komplexe Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzkreises "komplex differenzierbar" (was auch immer das bedeuten mag) und deshalb stetig. Der Abelsche Grenzwertsatz läßt sich aber *nicht* auf den komplexen Fall verallgemeinern, vgl. Beispiel 302.

Beweis. Wir beschränken uns beim Beweis auf den Fall $x_0 = 0, R = 1$ und nehmen an, dass die Reihe auch noch für $x = 1$ konvergiert. Der allgemeine Fall folgt daraus leicht: Betrachte die Reihe $\sum a_k(\pm R)^k x^k$.

Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad s := f(1) = \lim s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Dann ist $s_{-1} = 0$. Wir beschränken uns auf $0 < x < 1$ und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1})x^k = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k\right) + s_n x^n.$$

Die Folge (s_n) ist konvergent, also beschränkt, und aus $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ folgt deshalb $\lim_{n\to\infty} s_n x^n = 0$. Damit ergibt sich

$$f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k, \qquad |x| < 1.$$

Andrerseits folgt aus $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, dass

$$s = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s x^k.$$

Sei $\epsilon > 0$. Wir wollen zeigen, dass es dazu ein $\delta \in]0,1[$ gibt, so dass

$$1-\delta < x < 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - s| < \epsilon. \tag{98}$$

Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$, über das wir später verfügen wollen, und erhalten für $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - s| &= \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(s_k - s)x^k\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{\infty}|s_k - s|\,x^k \\ &\leq (1-x)\sum_{k=0}^{N}|s_k - s|\,x^k + (1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty}|s_k - s|\,x^k. \end{aligned}$$

Durch Wahl von N können wir erreichen, dass in der zweiten Summe alle $|s_k - s| < \epsilon/2$, so dass der ganze zweite Summand $< (1-x)\frac{\epsilon}{2}\frac{1}{1-x} = \frac{\epsilon}{2}$ ist.

Der erste Summand geht für $x \nearrow 1$ gegen 0, es gibt also ein δ mit (98). □

Die beiden folgenden Beispiele liefern insbesondere interessante Reihen-Grenzwerte.

Beispiel 286 (Logarithmische Reihe). Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} \tag{99}$$

hat den Konvergenzradius 1 (Beweis?) und definiert deshalb eine differenzierbare Funktion $f :]-1,+1[\to \mathbb{R}$. Für ihre Ableitung gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}x^k = \frac{1}{1-x} = -\frac{d}{dx}\ln(1-x) = \frac{d}{dx}\ln\frac{1}{1-x}.$$

Also ist nach dem Konstanzkriterium

$$\ln\frac{1}{1-x} - \sum_{0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = c.$$

Einsetzen von $x = 0$ zeigt, dass die Konstante $c = 0$ ist. Man erhält die sogenannte Logarithmusreihe

$$\boxed{\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1.}$$

Die Potenzreihe rechts ist auch für $x = -1$ noch konvergent. Nach dem Satz von Abel 285 ist der Grenzwert $= \lim_{x \searrow -1}\ln\frac{1}{1-x} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. Wir benutzen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \pm = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

und erhalten den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots.}$$

□

Beispiel 287 (Leibnizreihe). Für $|x| < 1$ liefert die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k.$$

Damit erhält man wie oben aus

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

die arctan-Reihe

$$\boxed{\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1,}$$

und für $x = 1$ aus dem Abelschen Grenzwertsatz 285 die Leibnizsche Reihe

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \ldots.}$$

□

Korollar 288 (Cauchyprodukt). *Gegeben seien die drei* konvergenten *reellen Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

mit

$$c_m := \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Bemerkung: Vergleichen Sie das mit Satz 273.

Beweis. Die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

haben offenbar Konvergenzradien ≥ 1. Für $|x| < 1$ sind sie absolut konvergent, und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist das Cauchyprodukt der beiden anderen! Deshalb gilt nach Satz 273 für $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Nach dem Satz von Abel sind die durch die Reihen definierten Funktionen in $x = 1$ linksseitig stetig, und daraus folgt die Behauptung. □

10.8 Die Taylorreihe

Ist $f : J \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, also eine sogenannte C^∞-Funktion, so bildet die Folge der Taylorpolynome $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in $x_0 \in J$ eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

die sogenannte *Taylorreihe von f in x_0*. Es ist aber nicht klar, ob diese Reihe für $x \neq x_0$ überhaupt konvergiert oder sogar gegen $f(x)$ konvergiert. Anders gesagt: Es ist unklar ob die Restglieder

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

für $n \to \infty$ (nicht für $x \to x_0$) konvergieren oder sogar gegen 0 konvergieren. *Wenn* das so ist, erhält man also eine Darstellung von f als eine Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Für viele Funktionen ist das wenigstens lokal der Fall, und solche Funktionen nennt man auch *reell-analytisch.*

Beispiel 289. Konvergente Potenzreihen sind gleichzeitig die Taylorreihe der durch sie dargestellten Funktionen im Entwicklungspunkt. Das ist klar, weil man Potenzreihen wie Polynome gliedweise differenzieren darf. Also folgt wie für Polynome $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Damit sind die Reihen für sin, cos oder exp die Taylorreihen dieser Funktionen in 0.

$\square$

Aber im allgemeinen ist die Situation komplizierter.

Beispiel 290. Das Beispiel 287 zeigt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } -1 \leq x \leq 1,$$

aber für $|x| > 1$ ist zwar der arctan wunderbar definiert, die Potenzreihe hingegen divergent.

$\square$

Beispiel 291. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und alle Ableitungen in 0 sind 0. Das folgt mit der Kettenregel aus Beispiel 176. Also ist die Taylorreihe =0 und damit konvergent. Aber sie konvergiert nur für $x = 0$ gegen $f(x)$.

$\square$

Ein Satz von Emil Borel besagt, dass es zu jeder Potenzreihe $\sum a_k x^k$ (auch solchen mit Konvergenzradius $R = 0$) eine C^∞-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, deren Taylorreihe im Entwicklungspunkt 0 gerade die vorgegebene Reihe ist.

Satz 292 (E. Borel). *Jede Folge reeller Zahlen ist die Folge der Taylorkoeffizienten einer geeigneten C^∞-Funktion im Entwicklungspunkt 0.*

Vorweg formulieren wir die durch vollständige Induktion leicht zu beweisende

Höhere Produktregel. Für $n > 0$ und n-mal differenzierbare Funktionen gilt

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Beweis zum Satz von Borel. Wir wollen nun zu einer gegebenen Folge reller Zahlen (a_n) eine C^∞-Funktion f auf $\mathbb{R}$ konstruieren, für die

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

gilt. Als Ansatz wählen wir eine Modifikation der Taylorreihe:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(q_n x) x^n. \tag{100}$$

Dabei sei ϕ eine $C^\infty(\mathbb{R})$-Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \phi &\geq 0, \\ \phi(x) = 1 \quad &\text{für } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \phi(x) = 0 \iff &x \leq -1 \text{ oder } 1 \leq x. \end{aligned}$$

Eine solche Funktion konstruiert man wie im Abschnitt 4.3 unter Benutzung der C^∞-Funktion aus 176.

Weiter sei (q_n) eine Folge reeller Zahlen > 1, über deren Wahl wir später verfügen wollen. Zunächst gilt für $r < n$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^r}{dx^r}\, a_n\, \phi(q_n x) x^n \right| &\leq \left| a_n \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \phi^{(r-k)}(q_n x) q_n^{r-k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \right| \\ &\leq n!\, |a_n| \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left| \phi^{(r-k)}(q_n x) \right| \frac{|q_n x|^{n-k}}{q_n^{n-r}} \frac{1}{(n-k)!} \\ &\leq \frac{n!\, |a_n|}{q_n} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left| \phi^{(r-k)}(q_n x) \right| |q_n x|^{n-k}. \end{aligned}$$

Für $|q_n x| \geq 1$ ist $\phi^{(r-k)}(q_n x) = 0$, und damit verschwindet auch die Summe rechts. Andernfalls, d.h. für $|q_n x| < 1$, ist mit

$$A_n := \max\{|\phi^{(k)}(x)|\,;\, x \in \mathbb{R}, k \leq n\}$$

$$\left| \frac{d^r}{dx^r}\, a_n\, \phi(q_n x) x^n \right| \leq \frac{n!\, |a_n|}{q_n} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left| \phi^{(r-k)}(q_n x) \right| \leq \frac{n!\, |a_n|}{q_n} 2^n A_n.$$

Bei vorgegebener Folge (a_n) wählen wir nun

$$q_n := 1 + n^2\, 2^n n! |a_n| A_n.$$

Dann folgt für alle $n > r$

$$\left| \frac{d^r}{dx^r}\, a_n\, \phi(q_n x) x^n \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Das liefert für jedes $r \in \mathbb{N}$ eine konstante konvergente Majoranten (ab Glied $r+1$) für

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^r}{dx^r} \left(a_n \phi(q_n x) x^n \right).$$

Aus dem Satz 305 folgt durch vollständige Induktion, dass (100) beliebig oft (gliedweise) differenzierbar ist. Weil $\phi(q_n x) = 1$ auf einer kleinen Umgebung von 0, ergibt sich weiter

$$\frac{d^r a_n \phi(q_n x) x^n}{dx^r}(0) = \begin{cases} n! a_n & \text{für } r = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher ist

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n.$$

$\square$

Beispiel 293 (Bernoullizahlen). Mit der Regel von Bernoulli-de L'Hospital zeigt man leicht, dass

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion darstellt. In Wahrheit ist diese Funktion sogar beliebig oft differenzierbar und wird für $|x| < 2\pi$ durch ihre Taylorreihe dargestellt.[5] Die Ableitungen

$$f^{(k)}(0) =: B_k$$

heißen die *Bernoullizahlen*.

Schreibt man $x = (e^x - 1) f(x)$, so folgt aus dem Cauchyproduktsatz

$$x = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} x^l \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{k!(m-k)!} \right) x^m.$$

Aus der Eindeutigkeit der Taylorkoeffizienten folgt

$$0 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k \text{ für } m \geq 2,$$

und das liefert eine Rekursionsformel zur Berechnung der B_k aus $B_0 = f(0) = 1$.

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30}, \ldots, B_{12} = -\frac{691}{2730}, \ldots$$

„Heute treten die Bernoulli-Zahlen an vielen Stellen in der Zahlentheorie, aber auch in anderen Gebieten, zum Beispiel der algebraischen Topologie, in Erscheinung, und man hat den Eindruck, dass sie mit ganz besonders tiefliegenden und zentralen Fragestellungen zusammenhängen“ (W. Scharlau/ H. Opolka: Von Fermat bis Minkowski, Springer 1980). In dem angegebenen Buch finden Sie sehr gut verständlich auch Herleitungen für eher „einfache“ Eigenschaften der Bernoullizahlen:

$$\sum_{k=0}^{N-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_j N^{n+1-j}, \qquad \text{(J. Bernoulli 1713)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}| \qquad \text{(Euler 1736).}$$

$\square$

[5] Das ist mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln vermutlich nur sehr mühsam zu beweisen, in der komplexen Funktionentheorie ergeben sich diese Behauptungen aber ohne jede Rechnung ganz von selbst.

10.9 Die komplexe Exponentialfunktion

Vergleichen Sie hierzu den Abschnitt 8.6.

Die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist offenbar (?) für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und definiert deshalb eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

deren Einschränkung auf die reelle Achse $\mathbb{R}$ die "alte" Exponentialfunktion ist, vgl. Beispiel 283.

Für rein-imaginäres iy erhält man

$$\exp(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(iy)^{2m}}{(2m)!} + \frac{(iy)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right).$$

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, warum die letzte Gleichung gilt, sie ist nicht ganz trivial! Weil auch die Reihen nur über die geraden bzw. nur über die ungeraden k-Werte konvergent sind, ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y.\end{aligned}$$

Für $y = \pi$ liefert das insbesondere die berühmte Eulersche Identität $e^{i\pi} = -1$.

Mit dem Satz über das Cauchyprodukt ergibt sich für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} z^k w^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} = \exp(z+w).\end{aligned}$$

Das ist also ein neuer Beweis für das Additiontheorem der Exponentialfunktion, und einer im Komplexen dazu. Insbesondere hat man also für reelle x, y

$$\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

11 Ein Ausblick auf die Fourierreihen

Für eine moderne Theorie der Fourierreihen braucht man eine solide (Lebesguesche) Integrationstheorie. Die kommt in diesem Analysiszyklus aber erst im dritten Semester. Andrerseits ist die Fouriertheorie so wichtig in vielen Anwendungen und bietet so hübsche Aspekte, dass ich Ihnen davon gern noch etwas zeigen möchte. Die schwierigen Beweise lasse ich für die Analysis III, und auch sonst bin ich etwas großzügig: Zum Beispiel werden gegen Ende des Abschnittes Fourierreihen gliedweise differenziert, was gerade bei Fourierreihen im allgemeinen nicht erlaubt ist ...

Die Taylorapproximation liefert zu einer gegebenen Funktion f lokal ein approximierendes Polynom, sagen wir $T_{f,n}$. Wie wählt man dieses Polynom? Die Formel für die Taylorkoeffizienten $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ war gerade so gemacht, dass $T_{f,n} = f$, falls f selbst schon ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Wenn man periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untersuchen will, kann man versuchen, diese durch einfache periodische Funktionen wie Sinus und Cosinus zu approximieren. Genauer wollen wir eine Funktion f mit der Periode $T > 0$, also mit

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

approximieren durch eine Linearkombination der (ebenfalls T-periodischen!) Funktionen $\cos(k\frac{2\pi}{T}t)$ und $\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$. Der Quotient $\omega = \frac{2\pi}{T}$ heißt die zu T gehörige *Kreisfrequenz*. Wir nennen eine Funktion der Form

$$F(t) := \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \tag{101}$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ein *trigonometrisches Polynom vom Grad n.*

Gibt es (wie bei der Taylorapproximation) ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten a_k, b_k, so dass $F(t)$ sich reproduziert, wenn es bereits ein trigonometrisches Polynom ist?

Dazu erinnern wir an die früher hergeleiteten sogenannten Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen:

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \sin nt dt = 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt = 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mt dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 mt dt = \pi \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel ergibt sich daraus für $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\int_0^{T} \cos m\omega t \sin n\omega t dt = 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N},$$

$$\int_0^{T} \cos m\omega t \cos n\omega t dt = \int_0^{T} \sin m\omega t \sin n\omega t dt = 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n,$$

$$\int_0^{T} \cos^2 m\omega t dt = \int_0^{T} \sin^2 m\omega t dt = T/2 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Wir multiplizieren nun (101) mit $\sin(l\omega t)$, wobei $l \in \mathbb{N}$, und integrieren über $[0, T]$. Nach den Orthogonalitätsrelationen fallen in der Summe fast alle Terme weg, und es bleibt

$$\int_0^{T} F(t) \sin(l\omega t) dt = \frac{T}{2} b_l$$

für $l > 0$, also

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(k\omega t)dt, \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Ebenso finden wir

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(k\omega t)dt, \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \tag{102}$$

Der Koeffizient b_0 interessiert nicht, weil $\sin(0\omega t) = 0$.

Der Koeffizienten a_0 ist hat wegen $\int_0^T \cos^2(0\omega t)dt = T$ eine Sonderrolle. Damit (102) auch für $k = 0$ gilt, ändert man die Notation ab und schreibt trigonometrische Polynome als

$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)) \tag{103}$$

Ist nun $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so nennen wir

$$\boxed{a_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt, \qquad b_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt}$$

die *Fourierkoeffizienten* und

$$\boxed{F_{f,n}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t))} \tag{104}$$

das *n-Fourierpolynom von f*.

Damit haben wir ein Verfahren gefunden, welches

1. Jeder Regelfunktion $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ eine Folge von trigonometrischen Polynomen $(F_{f,n})_{N\in\mathbb{N}}$ zuordnet, so dass
2. $$F_{f,n} = f,$$
   falls f ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ ist.
3. Diese Folge bezeichnet man als die *Fourierreihe*
   $$\boxed{F_f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t))} \tag{105}$$
   von f.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, die auf $[0, T]$ eine Regelfunktion ist, so definiert man die Fourierreihe von f als die Fourierreihe von $f|_{[0,T]}$.

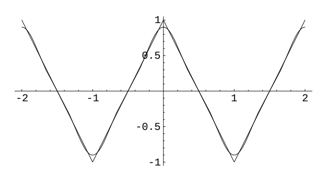
Bevor wir Beispiele rechnen, stellen wir fest:

- Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion und $f|_{[0,T]}$ eine Regelfunktion, so ist $f|_{[a,a+T]}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, und es gilt
  $$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

- Eine Regelfunktion $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to \mathbb{R}$ mit $f(-t) = f(t)$ für alle t heißt *gerade*. Für solche gilt
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt.$$
- Eine Regelfunktion $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to \mathbb{R}$ mit $f(-t) = -f(t)$ für alle t heißt *ungerade*. Für solche gilt
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0.$$
- Für gerade Funktionen verschwinden die Fourierkoeffizienten b_k und es gilt
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)dt.$$
- Für ungerade Funktionen verschwinden die Fourierkoeffizienten a_k und es gilt
$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)dt.$$

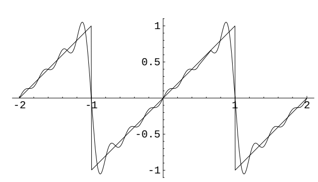
Beispiel 294. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit $f(t) = 1 - 2|t|$ für $t \in [-1, 1]$. Dann ist f gerade, und die Fourierkoeffizienten sind $b_k = 0$ und
$$a_k = \frac{4}{2}\int_0^1 (1-2t)\cos(k\pi t)dt = \frac{4 - 4\cos(k\pi)}{k^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{8}{k^2\pi^2} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$
Daraus folgt
$$F_{f,2n+1}(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)\pi t)$$

Die nebenstehende Figur zeigt f und $F_{f,3}$, also den Fall $n = 1$.



□

Beispiel 295. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit $f(t) = t$ für $t \in [-1, 1[$. Dann ist f ungerade, und ähnlich wie im vorangehenden Beispiel findet man
$$F_{f,n+1}(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\sin((k+1)\pi t)}{k+1}$$
Die Figur zeigt f und $F_{f,8}$.



□

Wann konvergiert die Fourierreihe $F_f(t)$ gegen die Funktion $f(t)$?

In der Analysis 3 werden wir beweisen:

Satz 296. *Die Funktion f sei T-periodisch und auf $[0,T]$ stückweise monoton. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t+)$ bzw. $f(t-)$ der rechts- bzw. linksseitige Grenzwert von f an der Stelle t. Dann gilt*

$$F_f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

In den Punkten t, in denen f stetig ist, konvergiert die Fourierreihe also gegen $f(t)$, an Sprungstellen gegen das arithmetische Mittel von rechtsseitigem und linksseitigem Limes.

Vorsicht: Die Fourierreihe einer stetigen Funktion f muss nicht gegen $f(t)$ konvergieren. Die stückweise Monotonie ist eine zusätzliche Voraussetzung.

Aus Beispiel 294 folgt mit dem Satz für alle $t \in [-1,+1]$

$$1 - 2|t| = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)\pi t)$$

Insbesondere ergibt sich für $t = 0$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - + \ldots.}$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

folgt

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

und

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Wenn auch die Fourierreihen wie für periodische Funktionen gemacht erscheinen, braucht man für die Definition nur eine Regelfunktion auf $[0,T]$ und kann diese dann unter der sehr schwachen stückweisen Monotonievoraussetzung durch eine Fourierreihe darstellen. Das liefert eine "analytische" Darstellung auch für ganz "willkürliche" Funktionen. Diese Erkenntnis hat die Mathematiker zu Fouriers Zeiten sehr fasziniert und wesentlich zur Entstehung des modernen Funktionsbegriffes beigetragen.

Tatsächlich kann man verschiedene Fourier-Darstellungen für $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ finden: Man kann f nämlich durch $f(t) = f(-t)$ oder $f(t) = -f(-t)$ auf $[-T,+T]$ erweitern und dann die Fourierreihe (einer $2T$-periodischen geraden oder ungeraden Funktion) bilden: Man erhält Darstellungen nur mit cos-Termen oder nur mit sin-Termen. Das spielt eine Rolle in einer wichtigen Anwendung der Fourierreihen, nämlich auf sogenannte Anfangswertprobleme für partielle Differentialgleichungen.

Wir geben ein einfaches

Beispiel 297. Wir betrachten eine schwingende Saite der Länge 1. Die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t sei $u(x,t)$.

Mögliche Lösungen der Schwingungsgleichungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sind Funktionen

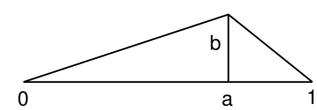
$$u(x,t) = \sum_k (\alpha_k \cos(k\pi t) + \beta_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x).$$

Beachten Sie, dass $u(0,t) = u(1,t) = 0$ zu jeder Zeit t.

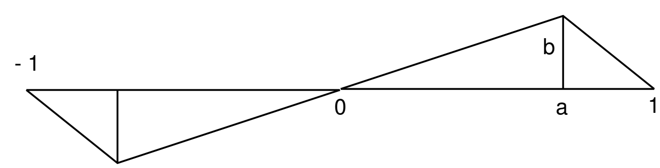
Die Anfangsgestalt der Saite

$$u(x,0) = \sum_k \alpha_k \sin(k\pi x)$$

bestimmt die Koeffizienten α_k. Ist etwa $u(x,0)$ von der Gestalt



so setzt man diese Funktion zu einer 2-periodischen ungeraden Funktion fort:

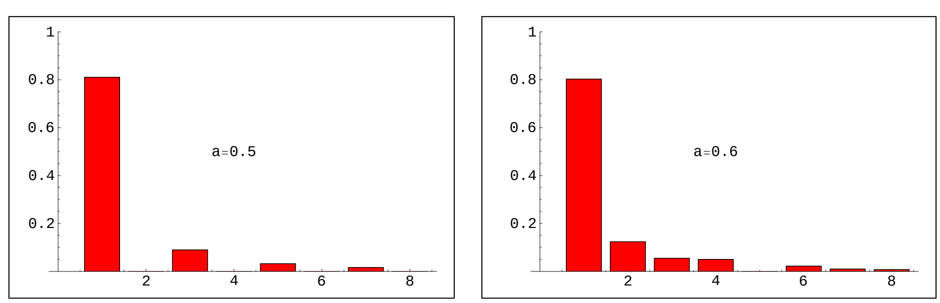


Deren Fourierkoeffizienten sind dann gerade die α_k. Befindet sich die Saite zur Zeit $t = 0$ in Ruhe, so sind die $\beta_k = 0$ und

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(k\pi t) \sin(k\pi x).$$

Die α_k geben die Amplituden der Obertöne, und durch Wahl von a und b kann man darauf Einfluss nehmen, und so die Tonqualität beeinflussen.

Hier sind die Beträge der Fourierkoeffizienten für $b = 1$ und zwei Werte von a:



□

Anhang 1: Darstellung reeller Zahlen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass jede reelle Zahl sich als unendlicher Dezimalbruch darstellen läßt, und dass diese Darstellung eindeutig ist, wenn man 9-periodische Dezimalbrüche ausschließt. Dabei ist die Wahl der Zahl 10 vom mathematischen Standpunkt aus willkürlich, jede natürliche Zahl ≥ 2 leistet denselben Dienst. Zum Beispiel sind binäre oder Hexadezimaldarstellungen durchaus gebräuchlich. Deshalb wählen wir allgemein im folgenden eine Basiszahl

$$b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Eine *b-adische Darstellung* einer nicht-negativen rellen Zahl x ist dann gegeben durch eine Zahlenfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

(ii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_k = 0$ für alle $k > n$.

(iii) Es gilt

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b^k := \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} b^{-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k b^k.$$

Es ist unmittelbar klar, dass $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ genau dann eine b-adische Darstellung von x ist, wenn $(a_{k+m})_{k \in \mathbb{Z}}$ eine solche von $b^{-m}x$ ist. Deshalb beschränken wir uns in folgenden auf Zahlen

$$x \in [0, 1[.$$

In der Darstellung kommen dann keine positiven Potenzen von b mehr vor, und um übersichtlichere Formeln zu bekommen schreiben wir a_{-k} statt a_k, d.h. wir suchen Darstellungen der Form

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k}.$$

Satz 298 (b-adische Darstellung). *Zu jeder reellen Zahl $x \in [0, 1[$ gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} a_k b^{-k} < b^{-n}.$$

Dann gilt also

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k}.$$

Man schreibt dann auch x mit den (b-adischen) Ziffern a_k in der Form

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \dots_b$$

mit einem unteren Index b.

Beweis. Zur Existenz. Sei

$$a_0 := 0, \quad x_0 := x.$$

Dann ist
$$0 \leq bx_0 < b.$$
Setzen wir also
$$a_1 := \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq bx_0\} \qquad \text{und} \qquad x_1 := bx_0 - a_1,$$
so ist
$$a_1 \in \{0, \ldots, b-1\} \qquad \text{und} \qquad 0 \leq x_1 < 1.$$
Allgemein definieren wir rekursiv
$$a_{k+1} := \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq bx_k\} \qquad \text{und} \qquad x_{k+1} := bx_k - a_{k+1}$$
und erhalten für alle k
$$a_{k+1} \in \{0, \ldots, b-1\} \qquad \text{und} \qquad 0 \leq x_{k+1} < 1.$$
Damit ist offenbar (i) erfüllt. Und aus
$$0 \leq x_n = bx_{n-1} - a_n < 1$$
folgt mit
$$bx_{n-1} - a_n = b(bx_n - a_{n-1}) - a_n = \ldots = b^n x_0 - b^{n-1}a_1 - \ldots - ba_{n-1} - a_n$$
nach Division durch b^n, dass
$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} a_k b^{-k} < b^{-n}.$$
Also gilt (ii).

Zur Eindeutigkeit. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ eine b-adische Darstellungen für x und sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt
$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} a_k b^{-k} < b^{-n},$$
also
$$0 \leq \underbrace{b^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b^{n-k}}_{=:y} - a_n < 1.$$
Dabei ist y eine reelle Zahl mit
$$y - 1 < a_n \leq y.$$
Im halboffenen Intervall $]y-1, y]$ liegt aber nur *eine* ganze Zahl, und daher ist a_n eindeutig bestimmt. Das gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

Beispiel 299. Wir betrachten den Fall $b = 10$. Mit dem vorstehenden Satz haben wir jeder reellen Zahl $x \in [0, 1[$ eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten a_k zwischen 0 und 9 zugeordnet, so dass
$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} = 0.a_1 a_2 \ldots \tag{106}$$
gilt, und diese Reihe war unter der im Satz gemachten Bedingung (ii) eindeutig bestimmt. Natürlich ist jede Reihe der Form (106) mit Koeffizienten $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ konvergent und liefert eine reelle Zahl x. Liefert der Satz für dieses x die originale Reihe zurück? Anders

gefragt: Ist die Abbildung, die jedem x seine Dezimaldarstellung zuordnet surjektiv auf die Reihen mit Koeffizienten zwischen 0 und 9? Das ist nicht so: Es gilt

$$\sum_{k=2}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 0.09999\ldots = 0.10000\ldots.$$

Das beschreibt aber auch den einzig möglichen Problemfall: Wenn man 9-Perioden (oder im allgemeinen $(b-1)$-Perioden) ausschließt, entspricht jedem $x \in [0,1[$ genau ein unendlicher Dezimalbruch $0.a_1\ldots$ und umgekehrt. Das beweisen wir im folgenden

$\square$

Lemma 300. *Gegeben seien zwei Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(\tilde{a}_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit*

$$a_k, \tilde{a}_k \in \{0,\ldots,b-1\},$$

so dass

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{a}_k b^{-k} =: x.$$

Dann gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit

$$a_1 = \tilde{a}_1, \ldots, a_{n-1} = \tilde{a}_{n-1}, \text{ und } a_n > \tilde{a}_n$$

genau dann, wenn

$$\tilde{a}_n = a_n - 1 \quad \text{und } \tilde{a}_k = b-1, a_k = 0 \quad \text{für alle } k > n.$$

In diesem Fall gilt

$$x - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k = b^{-n}. \tag{107}$$

Deshalb ist nach der Bedingung (ii) des Satzes die b-adische Darstellung von x nicht gegeben durch die Folge $(\tilde{a}_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, sondern notwendig dann durch die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Die Folgen mit $(b-1)$-Periode kommen nicht als b-adische Darstellungen vor.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{a}_k b^{-k} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - \tilde{a}_k) b^{-k}}_{=0} + \underbrace{(a_n - \tilde{a}_n) b^{-n}}_{\geq b^{-n}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - \tilde{a}_k) b^{-k} \\
&\geq b^{-n} + (-(b-1)) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b^{-k} = b^{-n} + (-(b-1)) \frac{b^{-(n+1)}}{1-b^{-1}} = b^{-n} - b^{-n} = 0
\end{aligned}$$

mit Gleichheit nur für den Fall

$$\begin{gathered}
a_n = \tilde{a}_n + 1, \\
a_k - \tilde{a}_k = -(b-1) \quad \text{für alle } k \geq n+1.
\end{gathered}$$

Das beweist den ersten Teil des Satzes. In diesem Fall ist also

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k b^{-k} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k b^{-k} + b^{-n},$$

und daraus folgt (107). $\square$

Anhang 2: Subtileres über die Stetigkeit

Beispiel 301. Definiere $f :]\,0,1\,[\to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden natürlichen Zahlen } p, q \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f genau in $]\,0,1\,[\cap \mathbb{Q}$ unstetig.

Beweis. Jede rationale Zahl ist Limes irrationaler Zahlen. Daher ist die Funktion in den rationalen Zahlen unstetig. Andrerseits gibt es zu $q \in \mathbb{N}$ höchstens q rationale Zahlen der Form $\frac{p}{q}$ in $]\,0,1\,[$. Ist daher $(\frac{p_i}{q_i})$ eine Folge, die gegen eine Irrationalzahl x konvergiert, so ist $\lim \frac{1}{q_i} = 0$ und damit f in x stetig.

Setzt man $f(0) = 1$ und erweitert f auf $\mathbb{R}$ periodisch mit Periode 1, so ist die erweiterte Funktion genau in den rationalen Punkten unstetig.

□

Im Gegensatz dazu gilt:

Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau in den rationalen Zahlen stetig ist.

Beweis. a) Die Menge A der Stetigkeitspunkte ist ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen (G_δ-Menge).

Um $x \in A$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall $I_n(x)$ mit

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } y \in I_n(x).$$

Die Menge

$$G_n = \bigcup_{x \in A} I_n(x)$$

ist offen und

$$A = \bigcap G_n.$$

Offenbar ist nämlich $A \subset \bigcap G_n$. Aber für $y \in \bigcap G_n$ gibt es zu jedem n ein $x_n \in A$, so dass $y \in I_n(x_n)$. Dann ist aber

$$|f(x_n) - f(z)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } z \in I_n(x_n),$$

und deshalb

$$|f(z) - f(y)| < \frac{2}{n} \text{ für alle } z \in I_n(x_n).$$

Daher ist $y \in A$.

b) Aus dem Baireschen Kategoriensatz folgt, dass $\mathbb{Q}$ keine G_δ-Menge ist. (Vgl. z.B. Hewitt-Stromberg S. 68.) □

Beispiel 302 (U. Brehm). Dieses Beispiel zeigt, dass der Abelsche Grenzwertsatz 285 nicht für komplexe Potenzreihen gilt.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mu(n) := \frac{3+(-1)^n}{2} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$. Dann ist die komplexe Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{\mu(n)}$$

in $z = 1$ konvergent, aber dort nicht stetig.

Beweis. Wir zeigen die Existenz einer Folge (r_m) mit $0 < r_m < 1$ und $\lim r_m = 1$, so dass

$$\lim \left| f(r_m e^{\frac{i\pi}{2m+1}}) \right| = \infty.$$

Nach Konstruktion ist $\mu(n) \equiv n \bmod(2)$ und für $n \geq m$ ist $(2m+1)|\mu(n)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} r_m^{\mu(n)} e^{i\pi \frac{\mu(n)}{2m+1}} \right| &\geq \left| \sum_{n=m}^{\infty} \ldots \right| - \left| \sum_{n=1}^{m-1} \ldots \right| \\
&= \left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} r_m^{\mu(n)} \underbrace{(-1)^{\frac{\mu(n)}{2m+1}}}_{=(-1)^n} \right| - \left| \sum_{n=1}^{m-1} \ldots \right| \\
&\geq \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \right) - (m-1)
\end{aligned}$$

Also bleibt zu zeigen, dass man r_m so wählen kann, dass z.B.

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \geq 2m-1 \quad \text{und } \lim r_m = 1.$$

wegen der Divergenz der harmonischen Reihe gibt es aber $N_m > m$ mit

$$\sum_{n=m}^{N_m} \frac{1}{n} \geq 2m,$$

und aus Stetigkeitsgründen findet man $r_m \in]1 - \frac{1}{m}, 1[$ mit

$$\sum_{n=m}^{N_m} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \geq 2m-1.$$

Es folgt

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \geq 2m-1.$$

□

Anhang 3: Nullstellen von C^∞-Funktionen

Ist $f \in C^{k+1}(J)$ auf einem offenen Intervall J um 0 und ist $f(0) = f'(0) = \ldots = f^k(0) = 0$, so gilt nach dem Satz von Taylor für $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{f^{k+1}(0)}{(k+1)!}x^{k+1} + R(x) = \left(\frac{f^{k+1}(0)}{(k+1)!} + \frac{R(x)}{x^{k+1}}\right)x^{k+1} = h(x)x^{k+1}.$$

Der Satz von Taylor sagt weiter, das

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{k+1}} = 0.$$

Setzen wir $h(0) := \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$, so ist h in 0 also stetig.

Damit haben wir eine Information über das Verhalten einer C^{k+1}-Funktion in der Nähe einer k-fachen Nullstelle. Ist f sogar ein Polynom, so wissen wir aus dem Satz über die Polynomdivision, dass $h(x)$ wieder ein Polynom ist.

Unter den eingangs gemachten Voraussetzungen für f gibt uns der Satz von Taylor aber über die Regularität von h in 0 außer der Stetigkeit keine weiteren Informationen. Wenn f noch öfter differenzierbar ist, so kann man vermuten, dass auch h in 0 differenzierbar ist. Für C^∞-Funktionen ist das richtig, wie der folgende Satz zeigt, aber der Beweis ist nicht so simpel.

Satz 303 (Lemma von Bohnenblust). *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion auf einem offenen Intervall J um 0 und seien*

$$f(0) = f'(0) = \ldots f^{(k)}(0) = 0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine C^∞-Funktion $h : J \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^{k+1}h(x).$$

Für diese gilt

$$h(0) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}.$$

Für den Beweis benötigen wir folgendes

Lemma 304. *Seien $a < 0 < b$ und $g \in C^1([a, b])$. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$: Die Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$\phi(x) := \int_0^1 t^m g(xt)dt$$

ist differenzierbar und

$$\phi'(x) := \int_0^1 t^{m+1} g'(xt)dt.$$

Ist $g \in C^\infty([a, b])$, so folgt also auch $\phi \in C^\infty([a, b])$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x} - \int_0^1 t^{m+1} g'(xt)dt &= \int_0^1 \left(t^m \frac{g((x+\Delta x)t) - g(xt)}{\Delta x} - t^{m+1} g'(xt) \right) dt \\ &= \int_0^1 t^m \left(\frac{g((x+\Delta x)t) - g(xt)}{\Delta x} - t g'(xt) \right) dt.\end{aligned}$$

Für festes $t \in [0,1]$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi = \xi_{x,t}$ zwischen x und $x + \Delta x$, so dass

$$\frac{g((x+\Delta x)t) - g(xt)}{\Delta x} = t g'(\xi t).$$

Nach Voraussetzung ist g' stetig, also gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Zu dem gewählten $\epsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass für alle $\xi, x \in [a,b]$ gilt

$$|\xi - x| < \delta \implies |g'(\xi) - g'(x)| < \epsilon.$$

Dann gilt aber auch für jedes $t \in [0,1]$

$$|\xi - x| < \delta \implies |t^{m+1}(g'(\xi t) - g'(xt))| < \epsilon$$

Für $0 < |\Delta x| < \delta$ ist daher

$$\left| \frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x} - \int_0^1 t^{m+1} g'(xt)dt \right| \leq \epsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beweis zum Lemma von Bohnenblust. Durch vollständige Induktion über k

$\underline{k = 0.}$ Sei also $f(0) = 0$. Definiere

$$h(x) := \int_0^1 f'(xt)dt.$$

Nach dem Lemma ist $h \in C^\infty([a,b])$. Weiter gilt

$$xh(x) = \int_0^1 x f'(xt)dt = \int_0^1 \frac{df(xt)}{dt} dt = f(xt)|_{t=0}^1 = f(x).$$

$\underline{k \to (k+1).}$ Sei der Satz für k bewiesen und sei

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k+1)}(0) = 0.$$

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$f(x) = x^{k+1} \tilde{h}(x)$$

mit einer C^∞-Funktion $\tilde{h}$, für die

$$\tilde{h}(0) = \frac{1}{(k+1)!} f^{k+1}(0) = 0.$$

Also gibt es eine C^∞-Funktion h mit

$$\tilde{h}(x) = xh(x).$$

Dann ist $f(x) = x^{k+2} h(x)$, und aus der wiederholt angewendeten Produktregel folgt

$$\frac{1}{(k+2)!} f^{(k+2)}(0) = h(0).$$

□

Anhang 4: Differentiation von Reihen

Hier geben wir eine Verallgemeinerung des Satzes über die Differentiation von Potenzreihen an:

Satz 305 (Differenzierbarkeit von Reihen). *Auf dem offenen Intervall J seien differenzierbare Funktionen $f_k : J \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \tag{108}$$

für alle $x \in J$ konvergent ist. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ die dadurch gegebene Summenfunktion.
Die Reihe $\sum f_k'(x)$ besitze eine von x unabhängige konvergente Majorante: Es gebe eine konvergente Reihe $\sum c_k$ reeller Zahlen mit

$$|f_k'| \leq c_k$$

für fast alle k. Dann ist f differenzierbar und es gilt

$$f' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'.$$

Die Reihe (108) *darf man also gliedweise differenzieren.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k < \epsilon, \tag{109}$$

und wir wählen ein solches. Nach dem Vergleichskriterium ist die Reihe $\sum f_k'(x)$ für jedes x konvergent.

Seien nun $x \in J$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $]x-h, x+h[\subset J$. Nach den Rechenregeln für konvergente Reihen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum f_k'(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f_k'(x) \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k'(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f_k'(x) \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k'(\xi_k) - \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k'(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f_k'(x) \right) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k'(\xi_k) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k'(x) \right| \\
&< \sum_{k=0}^{N} \left| \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f_k'(x) \right| + 2\epsilon
\end{aligned}$$

Weil die f_k differenzierbar sind, gibt es zu jedem $k \in \{1, \ldots, N\}$ ein $\delta_k > 0$, so dass für $|h| < \delta_k$

$$\left| \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f_k'(x) \right| < \frac{\epsilon}{N}.$$

Ist daher $|h| < \delta = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$, so folgt

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum f_k'(x) \right| < 3\epsilon.$$

□

Anhang 5: Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion

Schon Riemann und Weierstraß haben nach Funktionen gesucht, die zwar stetig, aber nirgends differenzierbar sind. Weierstraß hat wohl die erste solche Funktion gefunden. Hier geben wir ein einfacheres Beispiel an, dass von T. Takagi (1903) stammt.

Sei $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit $K(x+1) = K(x)$ und

$$K(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{für} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und sei f die (ebenfalls 1-periodische) Funktion mit

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K(2^k x)}{2^k}. \tag{110}$$

Nach dem Weierstraß-Kriterium aus Beispiel **??** ist f stetig. Wir wollen nun zeigen, dass es nirgends differenzierbar ist. Der Beweis stammt von de Rham (1957). Wir betrachten $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $i \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\alpha_n := \frac{1}{2^n} \leq x_0 \leq \beta_n := \frac{i+1}{2^n}.$$

Weil $K(x) = K(0) = 0$ für ganzzahliges x, erhalten wir

$$f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K(2^k \frac{i}{2^n})}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(2^k \frac{i}{2^n})}{2^k}, \quad f(\beta_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(2^k \frac{i+1}{2^n})}{2^k}$$

Daher ist

$$r_n := \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \frac{f_n(\beta_n) - f_n(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Aber die Funktion

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(2^k x)}{2^k}$$

ist ein Polygonzug und r_n dessen Steigung auf dem Intervall $]\alpha_n, \beta_n[$. Nach Konstruktion ist $]\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}[\subset]\alpha_n, \beta_n[$ und $r_{n+1} = r_n \pm 1$, so dass die Folge (r_n) divergiert. Aber mit $\lambda_n := \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$ gilt

$$r_n = \lambda_n \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x_0) - f(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n},$$

wobei der erste Summand verschwindet, wenn $x_0 = \alpha_n$ (was dann übrigens $x_0 = \alpha_m$ für alle $m > n$ nach sich zieht). Wäre f in x_0 differenzierbar, so wäre (r_n) konvergent gegen gegen die Ableitung an dieser Stelle. Widerspruch!