Exercise 1

(i) Wir bestimmen das zugehörige ODE zu Φ^t und da dynamische Systeme auch über ODE definiert werden können, definiert Φ^t ein dynamisches System. Dazu bestimmen wir das Vektorfeld von Φ^t. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{(2x_1, 2x_2\cos(t) + (1-x_1^2-x_2^2)\sin(t))}{1+x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t) - 2x_2\sin(t)}.$$

Insbesondere gilt für die erste Komponente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t)-2x_2\sin(t)} &= \frac{-2x_1(-(1-x_1^2-x_2^2)\sin(t)-2x_2\cos(t))}{(1+x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t)-2x_2\sin(t))^2}\bigg|_{t=0}\\ &= \frac{-2x_1\cdot(-2x_2)}{4} = x_1x_2.\end{aligned}$$

Ebenso für die zweite Komponente

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{2x_2\cos(t)+(1-x_1^2-x_2^2)\sin(t)}{1+x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t)-2x_2\sin(t)}\\ &= -\frac{(2x_2\cos(t)+(1-x_1^2-x_2^2)\sin(t))(-\sin(t)(1-x_1^2-x_2^2)-2x_2\cos(t))}{(1+x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t)-2x_2\sin(t))^2}\\ &+ \frac{(-2x_2\sin(t)+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t))(1+x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t)-2x_2\sin(t))}{(1+x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\cos(t)-2x_2\sin(t))^2}\bigg|_{t=0}\\ &= \frac{-2x_2(-2x_2)+(1-x_1^2-x_2^2)2}{4} = \frac{4x_2^2+2-2x_1^2-2x_2^2}{4} = \frac{-x_1^2+1+x_2^2}{2}\end{aligned}$$

Wir erhalten das ODE für $\Phi^t(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2-x_1^2+1}{2}\\ x(0) &= (x_0, y_0)\end{aligned}$$

Das heißt, $\Phi^t(x_0, y_0)$ löst das oben genannte ODE und ist somit ein Flow des dynamischen Systems.

Für Ψ^t ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(x_1+t, \frac{x_1x_2}{x_1+t}) = (1, -\frac{x_1x_2}{(t+x_1)^2})\bigg|_{t=0} = (1, -\frac{x_2}{x_1}).$$

Wir erhalten ein ODE für $\Psi^t(x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_2}{x_1} \\ x(0) &= (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ψ^t ist ein Flow des ODE und definiert ein dynamisches System.

(ii) Die Vektorfelder wurden in (i) berechnet und lauten für Φ^t, Ψ^t

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \frac{x_2^2 - x_1^2 + 1}{2} \end{pmatrix}$$

sowie

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}.$$

(iii) Sie kommutieren, falls $\mathcal{L}_g f - \mathcal{L}_f g = 0$.

$$\mathcal{L}_g f = (\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}) \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_2 \\ -x_1 - \frac{x_2}{x_1} x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f g = (x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^2 - x_1^2 + 1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 x_2 \frac{1}{x_1^2} + \frac{x_2^2 - x_1^2 + 1}{2}(-\frac{1}{x_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_2^2}{x_1} - \frac{x_2^2 - x_1^2 + 1}{2x_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_2^2 + x_1^2 - 1}{2x_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_2^2 + x_1^2 - 1}{2x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sie kommutieren nicht.

Exercise 2

Berechne für $i = 1$:

$$\Phi^t(x_1, x_2)_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{L}_g)^k (x_1) = (1 + t(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}))x_1 = x_1 + t(1 - 0) = x_1 + t.$$

Wir können bei $k = 1$ aufhören, da $(\mathcal{L}_g)^i$ für $i > 1$ gleich 0 ist, denn

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})x_1 = (\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})1 = 0.$$

Für $i = 2$ ergibt sich

$$\Phi^t(x_1, x_2)_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\mathcal{L}_g)^k(x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})^k(x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(-1)^k \frac{k! x_2}{x_1^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k \frac{x_2}{x_1^k}.$$

Wir müssen nur zeigen, dass $(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})^k(x_2) = (-1)^k \frac{k! x_2}{x_1^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweis per Induktion: $k = 0$ ergibt

$$\mathrm{id}(x_2) = x_2 = (-1)^0 x_2.$$

Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung. $k \rightsquigarrow k + 1$:

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})^{k+1}(x_2) = (\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})(-1)^k \frac{k! x_2}{x_1^k} &= (-1)^k(-k\frac{k! x_2}{x_1^{k+1}} - \frac{x_2}{x_1}\frac{k!}{x_1^k}) \\
&= (-1)^{k+1}(\frac{k k! x_2}{x_1^{k+1}} + \frac{x_2 k!}{x_1^{k+1}}) \\
&= (-1)^{k+1}(\frac{x_2 k!(k+1)}{x_1^{k+1}}) \\
&= (-1)^{k+1}(\frac{x_2 (k+1)!}{x_1^{k+1}})
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für beliebige $k \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Exercise 3

(i) ODE 1:

$$\begin{aligned}
x'' &= -\alpha^2 x \\
x(0) &= a, x'(0) = b, \quad a, b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

ODE 2:

$$\begin{aligned}
x'' &= \alpha^2 x \\
x(0) &= a, x'(0) = b, \quad a, b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Umgewandelt in ein ODE erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= -\alpha^2 x_1 \\
x_1(0) &= a, x_2(0) = b
\end{aligned}$$

und

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = \alpha^2 x_1$$
$$x_1(0) = a, x_2(0) = b$$

(ii) Calculate the integral of motion

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{-\alpha^2 x_1} \iff -\alpha^2 x_1 dx_1 = x_2 dx_2 \iff -\alpha^2 \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Define $F(x_1, x_2) := -\frac{1}{2}(\alpha^2 x_1^2 + x_2^2)$. Check that this is actually an integral of motion:

$$\mathcal{L}_f F(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha^2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})(\alpha^2 x_1^2 + x_2^2) = -0.5(2x_2\alpha^2 x_1 - \alpha^2 x_1 2x_2) = 0.$$

Indeed, it is an integral of motion.

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{\alpha^2 x_1} \iff \alpha^2 x_1 dx_1 = x_2 dx_2 \iff \alpha^2 \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Define $J(x_1, x_2) := \frac{1}{2}(\alpha^2 x_1^2 - x_2^2)$. Check that this is actually an integral of motion:

$$\mathcal{L}_f J(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha^2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})(\alpha^2 x_1^2 - x_2^2) = -0.5(2x_2\alpha^2 x_1 - \alpha^2 x_1 2x_2) = 0.$$

(iii) Fixed points are the points whose x_2 coordinate are zero since $\frac{dx_1}{dt} = x_2$. So it must hold $x_2 = 0$. For F, the fixed points are

$$F(x_1, 0) = -0.5\alpha^2 x_1^2 = C \iff \alpha^2 x_1^2 = -2C \iff x_1 = \pm\frac{\sqrt{-2C}}{\alpha}, \quad C \leqslant 0.$$

We have two fixed points if C is not positive, otherwise no fixed points.

$$J(x_1, 0) = 0.5(\alpha^2 x_1^2) = C \iff \alpha x_1 = \pm\sqrt{2C} \iff x_1 = \pm\frac{\sqrt{2C}}{\alpha}, \quad C \geqslant 0.$$

We have two fixed points if C is not negative, otherwise no fixed points.

(iv) For F, every orbit is periodic. For J, no periodic orbit exists except for the fixed points.

(v) For F, each point converges to a fixed point. If the fixed point has positive x_1 coordinate, then for small variations $p < x_1$, the point p converges to the fixed point x_1. If the fixed point has negative x_1 coordinate, then for small variations $p > x_1$, the point p converges to the fixed point x_1.

For J, points $p = (x_1, \dot{x}_1)$ with $x_1 \cdot \dot{x}_1 \leqslant 0$ converge to a fixed point.