Kapitel 4

Lineare Differentialgleichungen

Definition 4.1
Sei $F\colon D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.
Die Differentialgleichung $y' = F(x, y)$ heißt *lineare Differentialgleichung* genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$, für die ein $y \in \mathbb{K}^n$ existiert mit $(x, y) \in D$, eine lineare Abbildung $L(x)\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ und ein $f(x) \in \mathbb{K}^n$ existiert, so dass

$$F(x, y) = L(x)y + f(x).$$

Eine solche lineare Differentialgleichung heißt *homogen*, falls $f(x) = 0$ für alle x, sonst heißt sie *inhomogen*.

Bemerkung. Eine lineare Abbildung $L(x)\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wird bezüglich der kanonischen Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ in eindeutiger Weise durch eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

dargestellt. Im folgenden betrachten wir daher solche linearen Differentialgleichungen von der Form

$$y' = M(x) \cdot y + f(x)$$

wobei $D = I \times \mathbb{K}^n$ mit I echtes offenes Intervall $\subseteq \mathbb{R}$, $M\colon I \to \mathbb{K}^n$ und $f\colon I \to \mathbb{K}^n$, mit M und f stetig.

Satz 4.1
Unter den obigen Vorraussetzungen hat das AWP $\{y' = M(x) \cdot y + f(x),\ y(x_0) = y_0\}$ mit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ genau eine globale Lösung auf I.

Beweis. Sei $F\colon I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ (x, y) \mapsto M(x) \cdot y + f(x)$.
Dann ist klar: F ist stetig. F ist sogar lokal Lipschitz-stetig in y, denn F ist stetig partiell nach y differenzierbar:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_{1i}(x) \cdot y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n m_{ni}(x) \cdot y_i \end{pmatrix} + f(x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} F(x, y) = \begin{pmatrix} m_{1i}(x) \\ \vdots \\ m_{ni}(x) \end{pmatrix}$$

und somit ist $\frac{\partial}{\partial y_i} F(x, y)$ stetig auf $I \times \mathbb{K}^n$ $\forall i = 1 \ldots n$.

Außerdem ist das Wachstum von F in y linear:

$$||M(x)\cdot y + f(x)||_2 \leq ||M(x)\cdot y||_2 + ||f(x)||_2 \leq \underbrace{||M(x)||_2}_{=:\alpha(x),\text{ stetig auf } I} \cdot ||y||_2 + \underbrace{||f(x)||_2}_{=:\beta(x)\text{ stetig auf } I}$$

Hier:

$$\left|\left|\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right|\right|_2 = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

$$||A||_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \text{ für } A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{und es gilt:}$$

$$||A\cdot y||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j)^2} \overset{\substack{\text{Cauchy-}\\\text{Schwarz}}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}^2)\cdot \sum_{j=1}^n y_j^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = ||A||_2 \cdot ||y||_2$$

Also folgt die Behauptung aus Satz 2.7. □

Analog folgt für die Differentialgleichung

Satz 4.2
Unter denselben Vorraussetzungen wie im vorigen Satz gilt:
Jede maximale Lösung der Differentialgleichung $y' = M(x)\cdot y + f(x)$ ist eine globale Lösung auf I.
Jede Lösung der Differentialgleichung ist verzweigungsfrei in folgendem Sinne:
Ist $z\colon \tilde{J} \to \mathbb{K}^n$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung, dann gilt:

* entweder: $y(x) = z(x) \forall x \in I \cap \tilde{J}$
* oder: $y(x) \neq z(x) \forall x \in I \cap \tilde{J}$

Definition 4.2

$$C^1(I,\mathbb{K}^n) := \{y\colon I \to \mathbb{K}^n |\ y \text{ stetig differenzierbar auf } I\}$$

Bemerkung.
* $C^1(I,\mathbb{K}^n)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum:
  - $C^1(I,\mathbb{K}^n) \neq \emptyset$, da $z \equiv 0 \in C^1(I,\mathbb{K}^n)$.
  - $z, y \in C^1(I,\mathbb{K}^n), \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda y \in C^1(I,\mathbb{K}^n),\ y+z \in C^1(I,\mathbb{K}^n)$
* Eine Teilmenge $U \subset C^1(I,\mathbb{K}^n)$ ist ein Untervektorraum von $C^1(I,\mathbb{K}^n)$,wenn gilt:
  - $z \equiv 0 \in U$
  - $\lambda \in \mathbb{K}, z, y \in U \Rightarrow \lambda y \in U,\ y+z \in U$
* Eine Teilmenge $M \subseteq C^1(I,\mathbb{K}^n)$ heißt affiner Teilraum von $C^1(I,\mathbb{K}^n)$, wenn es $y \in C^1(I,\mathbb{K}^n)$ und einen Untervektorraum $U \subset C^1(I,\mathbb{K}^n)$ gibt, so daß

$$M = y + U = \{y + u | u \in U\}$$

* Funktionen $y_1, \dots, y_m \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ heißen *linear abhängig* genau dann wenn $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ existiert, so dass $c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m = z \equiv 0$.

Satz 4.3
Sei $M\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig, I echtes offenes Intervall $\in \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller globalen Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = M(x) \cdot y$. Dann gilt:

1. $\mathcal{U}$ ist ein n-dimensionaler Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$.
2. Für Funktionen $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{U}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
   (a) $y_1, \dots, y_m$ sind linear abhängig in $C^1(I, \mathbb{K}^n)$
   (b) $\exists\, x^* \in I$, so dass die Vektoren $y_1(x^*), \dots, y_m(x^*)$ linear abhängig in $\mathbb{K}^n$ sind
   (c) $\forall x \in I$ gilt: $y_1(x), \dots, y_m(x)$ sind linear abhängig in $\mathbb{K}^n$.

Beweis. Klar ist, dass $\mathcal{U}$ ein Untervektorraum ist. Zeige nun zunächst 2.
$\Rightarrow$:

gilt für beliebige Funktionen und zwar sogar für alle x.

$\Leftarrow$:

Seien $y_1 \dots y_M \in \mathcal{U}$ und $x^* \in I$ mit $y_1(x^*) \dots y_m(x^*)$ linear abhängig in $\mathbb{K}^n$. Dann existiert $(c_1 \dots c_m) \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$ mit $c_1 y_1(x^*) + \ldots + c_m y_m(x^*) = 0$.

Sei $\omega\colon = c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m$. Dann ist $\omega \in \mathcal{U}$ und $\omega(x^*) = 0$. Mit anderen Worten: ω ist die eindeutige globale Lösung des AWP

$$\{\omega' = M(x) \cdot \omega, \quad \omega(x^*) = 0.\}$$

Aber dieses AWP besitzt als eindeutige globale Lösung die konstante Nullfunktion, also $\omega = 0$. Das heißt aber, das $y_1 \dots y_m$ linear abhängig sind.

Noch zu zeigen: $\dim \mathcal{U} = n$.

Seien $v_1 \dots v_n \in \mathcal{U}$ die globalen Lösungen des AWP $y' = M(x) \cdot y$, $y(x_0) = e_i$, wobei $x_0 \in I$ beliebig gewählt. Da $v_1(x_0) = e_1, \dots, v_n(x_0) = e_n$ linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$, gilt nach 2., dass $v_1 \dots v_n$ linear unabhängig in $C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

$\Rightarrow \dim \mathcal{U} \geq n$

Sei nun $z \in \mathcal{U}$ beliebiges Element, $z_0 := z(x_0),\ x_0 \in I$ (aus dem letzten Schritt). Dann gilt:

Es existiert $(c_1 \dots c_n) \in \mathbb{K}^n$, so dass

$$z_0 = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n = c_1 v_1(x_0) + \ldots + c_n v_n(x_0).$$

Außerdem ist z eindeutige globale Lösung des AWP $y' = M(x) \cdot y$, $y(x_0) = z_0$, andererseits ist aber auch die Funktion $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ eine globale Lösung dieses AWP.

Also folgt: $z = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$.

Das bedeutet aber, dass $v_1 \dots v_n$ eine Basis des Untervektorraums $\mathcal{U}$ ist, also $\dim \mathcal{U} = n$

$\square$

Definition 4.3 1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres, offenes Intervall, $M\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Ein *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung

$$y' = M(x) \cdot y \tag{4.1}$$

ist eine Menge von n linear unabhängigen globalen Lösungen von (4.1).

2. Eine *Fundamentalmatrix* von (4.1) ist eine matrixwertige Abbildung $\Phi\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft, dass die Spaltenvektoren von $\Phi(x)$ ein Fundamentalsystem von (4.1) bilden.

Beispiel. ∗ $n = 1$: $y' = m(x) \cdot y$ mit $m\colon I \to \mathbb{K}$ stetig, dann gilt: Die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung ist von der Form:

$$y(x) = C \cdot e^{F(x)} \quad , x \in I.$$

wobei $F(x) = \int m(x)\,dx,\ C \in \mathbb{R}$, d.h. die Funktion

$$\Phi\colon I \to \mathbb{K},\ x \mapsto \Phi(x) = e^{F(x)}$$

ist eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = m(x) \cdot y$ und $\{e^{F(x)}\}$ ist ein Fundamentalsystem.

∗ $n = 2$: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x > 0, y \in \mathbb{R}^2$

Man rechnet leicht nach, dass die Funktionen

$$v_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}$$

für $x > 0$ globale Lösungen der Differentialgleichung sind. Außerdem gilt:

$$v_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$, das heißt aber, dass $\{v_1(x), v_2(x)\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bildet und die Funktion

$$\Phi\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}^{2\times 2},\ x \mapsto \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix ist.

Bemerkung. ∗ Jede globale Lösung der Differentialgleichung $y' = M(x) \cdot y$ ist eine Linearkombination der Elemente eines Fundamentalsystems von $y' = M(x) \cdot y$.

∗ Für jede Fundamentalmatrix $\phi(x)$ von $y' = M(x) \cdot y,\ x \in I$ gilt: $\phi(x)$ ist invertierbar $\forall x \in I$.

∗ Jede Fundamentalmatrix $\phi\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ von $y' = M(x) \cdot y$ ist differenzierbar auf I. Die Spaltenvektoren von $\Phi(x)$: $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ sind globale Lösungen von $y' = M(x) \cdot y$ auf I. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1' & v_2' & \dots & v_n' \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c|c} M(x)v_1 & M(x)v_2 & \dots & M(x)v_n \end{array} \right) = M(x) \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array} \right) \\
&= M(x) \cdot \Phi(x)
\end{aligned}$$

$*$ Die eindeutige globale Lösung des AWP $\{y' = M(x) \cdot y,\ x \in \mathbb{R},\ y(x_0) = y_0\}$ ist:

$$y(x) = \Phi(x) \cdot (\Phi(x_0))^{-1} \cdot y_0,\ x \in I$$

wobei Φ eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung ist.
In der Tat: y ist differenzierbar und nach der letzten Bemerkung ist

$$\frac{\partial}{\partial x}y(x) = [\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)]\,(\Phi(x_0))^{-1} \cdot y_0 = M(x) \cdot \underbrace{\Phi(x) \cdot (\Phi(x_0))^{-1} \cdot y_0}_{=y(x)} \quad \forall x \in I$$

und

$$y(x_0) = \Phi(x_0) \cdot (\Phi(x_0))^{-1} \cdot y_0 = y_0$$

Beispiel. n=1: AWP: $\{y' = f(x) \cdot y,\ y(x_0) = y_0\}$
$\Phi(x) = \exp(F(x))$, wobei $F(x) = \int_\xi^x f(\xi)\,d\xi,\ \xi \in I$
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \Phi(x) \cdot (\Phi(x_0))^{-1} \cdot y_0 \\
&= \exp\left(\int_\xi^x f(s)\,ds\right) \cdot \exp\left(-\int_\xi^{x_0} f(s)\,ds\right) \cdot y_0 \\
&= \exp(\int_\xi^x f(s)\,ds - \int_\xi^{x_0} f(s)\,ds) \cdot y_0 \\
&= \exp\left(\int_{x_0}^x f(s)\,ds\right) \cdot y_0
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die inhomogene lineare Differentialgleichung:

$$y' = M(x) \cdot y + f(x) \tag{4.2}$$

Satz 4.4 (Struktur des Lösungsraums von (4.2))
Es gelte: $M\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ ist stetig, $I \subset \mathbb{R}$ nicht-leeres, offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{K}^n$ stetig.
Sei $\mathcal{A}$:= die Menge aller globalen Lösungen von (4.2).
$\mathcal{U}$:= die Menge aller globalen Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $(4.2)_h$: $y' = M(x) \cdot y$
Dann gilt:

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$

2. Ist $y_p \in \mathcal{A}$, dann gilt: $\mathcal{A} = y_p + \mathcal{U} = \{y_p + y_h | y_h \in \mathcal{U}\}$, d.h. $\mathcal{A}$ ist affiner Unterraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

3. Sind $y_p, \tilde{y}_p \in \mathcal{A}$, dann ist $y_p - \tilde{y}_p \in \mathcal{U}$.

Beweis. 1. folgt aus Satz 4.1 und Satz 4.2.

2. Sei $y \in \mathcal{A}$, dann gilt:

$$(y-y_p)'(x) = y'(x)-y_p'(x) = M(x)y(x)+f(x)-M(x)y_p(x)-f(x) = M(x)(y(x)-y_p(x))$$

also gilt: $y - y_p \in \mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{A} \subset y_p + \mathcal{U}$. Analog zeigt man $y_p + \mathcal{U} \subset \mathcal{A}$.

3. analog.

□

Beispiel. Spezialfall $n = 1$: $y' = f(x)y + g(x),\ f, g$ stetig.
Dann ist $\mathcal{U} = \{c \cdot \exp(F(x)),\ x \in I | c \in \mathbb{K}\}$ mit $F(x) = \int_{x_0}^x f(s)\, ds,\ x_0 \in I$.
Eine partikuläre Lösung y_p ist dann gegeben durch die „Variation der Konstanten“:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_{x_0}^x g(s) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^s f(\sigma)\, d\sigma\right) ds \cdot \exp(F(x)) \\ &= \int_{x_0}^x g(s) \cdot (\Phi(s))^{-1}\, ds \cdot \Phi(x) \end{aligned}$$

wobei $\Phi(x) = \exp(F(x))$ Fundamentalmatrix von $y' = f(x) \cdot y$.
Also ist

$$\mathcal{A} = y_p(x) + \mathcal{U} = \int_{x_0}^x \Phi(x) \cdot (\Phi(s))^{-1} \cdot g(s)\, ds + \Phi(x) \cdot c \quad , x \in I, c \in \mathbb{K}$$

Dieses Resultat lässt sich auf den vektorwertigen Fall verallgemeinern.

Satz 4.5 (Variation der Konstanten für $n > 1$)
Vorraussetzungen wie in Satz 4.4.
Sei $\Phi(x)$ Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichung $y' = M(x) \cdot y$.
Dann ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
$y' = M(x) \cdot y + f(x)$ gegeben durch:

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \Phi(x) \cdot (\Phi(s))^{-1} \cdot f(s)\, ds \quad , x_0 \in I$$

Somit gilt:

$$\mathcal{A} = \{\int_{x_0}^x \Phi(x) \cdot (\Phi(s))^{-1} \cdot f(s)\, ds + \Phi(x) \cdot c \quad , x \in I | c \in \mathbb{K}^n\}$$

Beweis.

$$\mathcal{U} = \{\Phi(x) \cdot c = c_1 v_1(x) + \ldots + c_n v_n(x) | c = c_1 \ldots c_n \in \mathbb{K}^n\}$$

$c = (c_1 \ldots c_n) \in \mathbb{K}^n$, $v_1 \ldots v_n$ die Spalten von $\Phi(x)$ und y_p gegeben durch obige Formel $\in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} y_p(x) &= \Phi(x)(\Phi(x))^{-1} f(x) + \int_{x_0}^x M(x)\Phi(x)(\Phi(s))^{-1} f(s)\, ds \\ &= f(x) + M(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi(x)(\Phi(s))^{-1} f(s)\, ds \\ &= f(x) + M(x) \cdot y_p(x) \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die eindeutige globale Lösung des AWP $y' = M(x) \cdot y + f(x)$, $y(x_0) = y_0$ ist:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x)(\Phi(s))^{-1} f(s)\, ds + \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1} y_0 \quad , x \in I$$

Fundamentalsystem für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Betrachte

$$y' = My \qquad \text{mit } M \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Spezialfall: $n = 1 \quad y' = my \quad , m \in \mathbb{K}$ besitzt als Fundamentalsystem: e^{mx} und $\mathcal{U} = \{$ Menge aller Lösungen von $y' = my\} = \{C \cdot e^{mx} | C \in \mathbb{K}\}$.
Wir werden sehen, dass im Fall $n \geq 1$ eine matrixwertige Funktion $\Phi(x) = e^{Mx}$, die sogenannte „Matrixexponentialfunktion"definiert werden kann und dass e^{Mx} eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung darstellt und somit die Spalten von e^{Mx} ein Fundamentalsystem bilden.

Satz 4.6
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{K} \frac{A^k x^k}{k!} \right)_K \quad \text{konvergent für } K \to \infty \text{ in } \mathbb{K}^{n \times n}$$

Die somit wohldefinierte Funktion

$$e^{A\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n \times n},\ x \mapsto e^{Ax} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!}$$

ist sogar differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{Ax} = A \cdot e^{Ax} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Betrachte wieder die Differentialgleichung $y' = My$. Nach Satz 4.6 gilt:

$$y_i(x) := e^{Mx} e_i \quad , i = 1, \ldots, n \text{ mit } e_i \text{ Einheitsvektoren}$$

ist differenzierbar und $y_i'(x) = M \cdot e^{Mx} e_i = M y_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
D.h. y_i ist Lösung der Differentialgleichung. Außerdem gilt: $y_i(0) = e_i \quad , i = 1, \ldots, n$.
Also sind die $y_1, \ldots, y_n$ auch n linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung, bilden also ein Fundamentalsystem. Da nach Definition aber gerade $y_i = e^{Mx} e_i = i$-te Spalte von e^{Mx} ist, folgt daraus, dass die Funktion $x \mapsto e^{Mx}$ eine Fundamentalmatrix ist.

Beweis. Bezeichne die Komponenten der Matrizen $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j}$.
Es gilt für $m, n \in \mathbb{N}, m < n$:

$$\left|\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k x^k}{k!} \right|\right|_2 = \left|\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{A^k x^k}{k!} \right|\right|_2 \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|| A^k ||_2 \, | x^k |}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|| A||_2^k \, | x|^k}{k!}$$

Da $\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|| A||_2^k | x|^k}{k!}$ konvergent in $\mathbb{R}(= e^{|| A||_2 | x|})$, ist dies eine Cauchy-Folge im Raum der Matrizen und somit konvergent, denn $(\mathbb{K}^{n \times n}, || \cdot ||_2)$ ist vollständig.

Zu zeigen: e^{Ax} differenzierbar:
Da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!}$ konvergent, ist auch die i,j-te Komponentenfunktion konvergent in $\mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^k x^k}{k!}$.
Das heißt, der Radius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)} x^k}{k!}$ ist ∞ und somit ist die Potenzreihe differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)} x^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)} x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)} x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{Ax} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{11}^{(k+1)} x^k}{k!} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} \frac{x^k}{k!} = A \cdot e^{Ax}$$

$\square$

Problem: Wie berechnet man e^{Ax}? Nur in Ausnahmefällen kann e^{Ax} mit Hilfe der Reihendarstellung berechnet werden.

Beispiel.

* Triviales Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dann ist } e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{2x} & \\ & e^{3x} \end{bmatrix}$$

Dies gilt allgemein für Diagonalmatrizen.

* Allgemeiner:
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebige diagonalisierbare Matrix,d.h. es existiert eine Basis aus Eigenvektoren $s_1 \dots s_n$ des $\mathbb{K}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Bezüglich dieser Basis ist A dann diagonal, also für

$$S = \left(\ s_1 \mid s_2 \mid \dots \mid s_n\ \right) \quad S^{-1}AS = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Somit folgt dann

$$S^{-1} e^{Ax} S = \dots = e^{S^{-1}ASx} = e^{Dx} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Oder schöner (ohne Invertierung):

$$e^{Ax} S = S e^{Dx} = \left(\ e^{\lambda_1} s_1 \ \middle|\ e^{\lambda_2} s_2 \ \middle|\ \dots\ \right)$$

Bemerkung. Natürlich ist $e^{Ax}S$ auch eine Fundamentalmatrix von $y' = Ay$, denn es ist bis auf Basiswechsel die gleiche Matrix: Für $y_i = e^{Ax} S e_i$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} y_i(x) = A e^{Ax} S e_i = A y_i(x) \quad \forall x \text{ und } y_i(0) = s_i,\ i = 1, \dots, n$$

Beispiel (Anwendungsbeispiel). Löse

$$y' = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} y \quad , y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die eindeutige globale Lösung dieses AWP ist gegeben durch

$$y(x) = \Phi(x)(\Phi(0))^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \Phi(x) \text{ Fundamentalmatrix.}$$

Da $Spur = 2$ und $det = 0$ ist $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Also ist die Matrix diagonalisierbar, denn sie hat n verschiedene Eigenwerte.
Eigenvektoren:$s_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Eine Fundamentalmatrix ist also:

$$e^{Ax} S = \left(\ e^{0x} s_1 \mid e^{2x} s_2 \ \right) = \begin{pmatrix} -4 & -2e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Speziell ist die Lösung des AWP:

$$\begin{aligned} y(x) &= \begin{bmatrix} -4 & -2e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & -2e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{bmatrix} \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -2e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -12 + 10e^{2x} \\ 3 - 5e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 5e^{2x} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} e^{2x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Konstruktion eines Fundamentalsystems bzw. einer Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay | A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Sei $p_A(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ das (über $\mathbb{C}$) in Linearfaktoren zerfallende charakteristische Polynom von A, $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A, $r_1 \ldots r_k$ deren algebraische Vielfachheiten.

∗ Falls

$$\underbrace{d_i}_{\substack{\text{geometrische} \\ \text{Vielfachheit}}} = \dim \underbrace{(Ker(A - \lambda_i I_n))}_{\substack{= Eig(\lambda_i, A) \\ \text{Eigenraum von A} \\ \text{zum Eigenwert } \lambda_i}} = r_i$$

Dann gilt:

$$\mathbb{K}^n = \oplus_{i=1}^{k} Eig(\lambda_i, A)$$

und es existiert somit eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren der

Matrix A: $s_1, \dots, s_n$. Sei dann $S = (s_1|s_2|\dots|s_n)$, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & e^{\lambda_1 x} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & e^{\lambda_k x} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{\lambda_k x} \end{pmatrix}$$

$$= e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 x & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 x & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k x & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k x \end{pmatrix}}$$

$$= e^{(S^{-1}AS)x} = S^{-1}e^{Ax}S$$

Das bedeutet aber, dass

$$e^{Ax}S = S\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & e^{\lambda_1 x} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & e^{\lambda_k x} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{\lambda_k x} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} e^{\lambda_1 x}s_1 & e^{\lambda_1 x}s_2 & \dots & e^{\lambda_1 x}s_{r_1} & e^{\lambda_2 x}s_{r_1+1} & \dots & e^{\lambda_2 x}s_{r_1+r_2} & \dots \end{array} \right)$$

eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay$ ist. Mit anderen Worten: Die Menge der Funktionen

$$e^{\lambda_1 x}s_1, \dots, e^{\lambda_1 x}s_{r_1}, \dots, e^{\lambda_k x}s_{r_1+\dots+r_{k-1}}, \dots, e^{\lambda_k x}s_n$$

bildet ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = Ay$.

* Im Allgemeinen Fall (wenn also $d_i \leq r_i$ für mindestens ein i) gilt stets:

  Für jedes $i \in 1, \dots, k$ existiert ein $l_i \in \mathbb{N}$, so dass

$$\{0\} = \underbrace{Ker((A-\lambda_i I_n)^0)}_{=Ker(I_n)} \subsetneqq \underbrace{Ker(A-\lambda_i I_n)}_{=Eig(\lambda_i,A)} \subsetneqq \underbrace{Ker((A-\lambda_i I_n)^2}_{} \subsetneqq \dots$$

$$\subsetneqq Ker((A-\lambda_i I_n)^{l_i-1}) \subsetneqq \underbrace{Ker((A-\lambda_i I_n)^{l_i})}_{\substack{\text{Hauptraum von } A \\ \text{zum Eigenwert } \lambda_i \\ =:H(\lambda_i,A)}} = Ker((A-\lambda_i I_n)^{l_i+1}) = \dots$$

Es gilt:$\mathbb{K}^n = \oplus_{i=1}^k H(\lambda_i, A)$

und es existiert eine Basis bestehend aus *Hauptvektoren* von A (d.h. Vektoren aus den Haupträumen) $s_1, \dots, s_n$, so dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} * & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & * & & & \\ & & & \boxed{J_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

wobei $S = (s_1|\dots|s_n)$, die $*$ auf der Diagonalen die Eigenwerte von A, für die $r_i = d_i$, $J_1 \dots J_m$ Jordanblöcke.

$S^{-1}AS$ ist also in *Jordan-Normalform*.

Die Exponentialfunktion einer Jordan-Normalform lässt sich leicht berechnen:

$$e^{\begin{pmatrix} * & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & * & & & \\ & & & \boxed{J_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix} x} = \begin{pmatrix} e^{*x} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{*x} & & & \\ & & & \boxed{e^{J_1}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{e^{J_m}} \end{pmatrix}$$

wobei

$$e^{J_i x} = e^{\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{p} x} = e^{\lambda_i x}(a_{jk}) \text{ mit } a_{jk} = \frac{x^{k-j}}{(k-j)!}(k \geq j)$$

und es folgt:

$$e^{Ax}S = Se^{S^{-1}ASx} = S \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{*x} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{*x} & & & \\ \hline & & & e^{J_1 x} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{J_m x} \end{array}\right)$$

$$= \left(e^{*x}s_1 \;\middle|\; \dots \;\middle|\; e^{*x}s_k \;\middle|\; e^{\lambda_1 x}s_{k+1} \;\middle|\; e^{\lambda_1 x}(xs_{k+1} + s_{k+2}) \;\middle|\; \dots \right.$$

$$\left. \dots \;\middle|\; e^{\lambda_1 x}(\tfrac{x^{p-1}}{(p-1)!}s_{k+1} + \dots + xs_{k+p-1} + s_{k+p}) \;\middle|\; \dots \right)$$

ist Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Berechnung einer solchen Basis aus Hauptvektoren

Betrachte den Eigenwert λ_i mit $d_i > r_i$. Dann wähle eine Basis von $Eig(\lambda_i, A)$. Diese Basis kann dann zu einer Basis von $Ker((A-\lambda_i I)^2)$ ergänzt werden. Man führt dies sukzessive fort, bis man zu einer Basis des Hauptraums $H(\lambda_i, A)$ gelangt.
Bezeichnen wir den durch die im i-ten Schritt hinzugefügten Vektoren aufgespannten Vektorraum mit U_i. Es gilt dann:

$$Ker(((A - l_i I)^{j+1}) = Ker((A - \lambda_i I)^j) \oplus U_j$$

und

$$\dim U_j \geq \dim U_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, l_i - 1$$

Achtung: U_j ist nicht eindeutig bestimmt (wohl aber $\dim(U_j)$).
Im 2. Schritt durchlaufen wir das Schema nun rückwärts und ersetzen, wo nötig, geeignete Vektoren aus den U_j. Wir starten mit den Basisvektoren des $U_{l_i} : s_0 \ldots s_p$.
Diesen fügen wir die Vektoren

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda_i I)s_0, \ldots, (A - \lambda_i I)^{l_{i-1}} s_0 \\
&(A - \lambda_i I)s_0, \ldots, (A - \lambda_i I)^{l_{i-1}} s_1 \\
&\vdots \\
&(A - \lambda_i I)s_0, \ldots, (A - \lambda_i I)^{l_{i-1}} s_p
\end{aligned}$$

hinzu. Eine solche Kette von Vektoren

$$s_k, (A - \lambda_i I)s_k, \ldots, (A - \lambda_i I)^{l_{i-1}} s_k, \quad k = 0 \ldots p$$

heisst *Jordankette* oder *Hauptvektorkette* aus Hauptvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ_i. Die Länge der Kette ist l_i.
Es gilt nun, dass

$$\left\{\begin{array}{ll}
(A - \lambda_i I)s_0 & =: s_{0,1} \\
(A - \lambda_i I)s_1 & =: s_{1,1} \\
\vdots & \\
(A - \lambda_i I)s_p & =: s_{p,1}
\end{array}\right\} \in Ker((A - \lambda_i I)^{l_i - 1}) \setminus Ker((A - \lambda_i I)^{l_i - 2})$$

linear unabhängig sind. Wir ergänzen nun $s_{o,1} \ldots s_{p,1}$ zu einer neuen Basis von $Ker((A - \lambda_i I)^{l_i-1})$. Dazu verwenden wir die bereits gewählte Basis von $Ker((A - \lambda_i I)^{l_i-2})$ und ergänzen durch eine geeignete Auswahl der Basisvektoren des U_{l_i-1} aus dem 1. Schritt, etwa durch die Vektoren $s_{p+1} \ldots s_q$.
Damit können wir wieder $Ker((A - \lambda_i I)^{l_i-1})$ darstellen als:

$$Ker(((A - l_i I)^{l_i-1}) = Ker((A - \lambda_i I)^{l_i-2}) \oplus U_{l_i-1},$$

wobei $U_{l_i-1} =< s_{0,1}, s_{1,1}, \ldots, s_{p,1}, s_{p+1}, \ldots, s_q >$.
Insbesondere gilt dann auch:

$$\begin{aligned}
H(\lambda_i, A) &= Ker((A - \lambda_i I)^{l_i-1} \oplus U_{l_i} \\
&= Ker((A - \lambda_i I)^{l_i-2} \oplus U_{l_i-1} \oplus U_{l_i}.
\end{aligned}$$

Bilde nun die entsprechenden Jordanketten der Länge $l_i - 2$ aus den Vektoren $s_{p+1} \dots s_q$:

$$\begin{array}{ll} s_{p+1}, (A-\lambda_i I)s_{p+1}, & \dots, (A-\lambda_i I)^{l_i-2}s_{p+1} \\ \vdots, \vdots, & \vdots, \vdots \\ s_q, (A-\lambda_i I)s_q, & \dots, (A-\lambda_i I)^{l_i-2}s_q \end{array}$$

Es gilt nun, dass

$$\left\{\begin{array}{ll} (A-\lambda_i I)s_{0,1} & =: s_{0,2} \\ (A-\lambda_i I)s_{1,1} & =: s_{1,2} \\ \vdots & \\ (A-\lambda_i I)s_{p,1} & =: s_{p,2} \\ (A-\lambda_i I)s_{p+1} & =: s_{p+1,1} \\ \vdots (A-\lambda_i I)s_q & =: s_{q,1} \end{array}\right\} \in Ker((A-\lambda_i I)^{l_i-2}) \setminus Ker((A-\lambda_i I)^{l_i-3})$$

linear unabhängig sind. Wir ergänzen nun $s_{o,2} \dots s_{p,2}, s_{p+1,1} \dots s_{q,1}$ zu einer neuen Basis von $Ker((A-\lambda_i I)^{l_i-2})$. Dazu verwenden wir wieder die bereits gewählte Basis von $Ker((A-\lambda_i I)^{l_i-3})$ und ergänzen durch eine geeignete Auswahl der Basisvektoren des U_{l_i-2} aus dem 1. Schritt, etwa durch die Vektoren $s_{q+1} \dots s_r$.
Damit können wir wieder $Ker((A-\lambda_i I)^{l_i-2})$ darstellen als:

$$Ker(((A-l_i I)^{l_i-2}) = Ker((A-\lambda_i I)^{l_i-3}) \oplus U_{l_i-2},$$

wobei $U_{l_i-2} =< s_{0,2}, s_{1,2}, \dots, s_{p,2}, s_{p+1,1}, \dots, s_{q,1} >$.
Insbesondere gilt dann:

$$H(\lambda_i, A) = Ker((A-\lambda_i I)^{l_i-3}) \oplus U_{l_i-2} \oplus U_{l_i-1} \oplus U_{l_i}.$$

Man fährt so fort,bis man zu einer Basis von $H(\lambda_i, A)$ aus Hauptvektorenketten gelangt.
Für jeden Eigenwert fügen wir die so gefundenen Hauptvektorenketten zu einer Basis des $\mathbb{K}^n$ zusammen, wobei die Vektoren aus den einzelnen Jordanketten in jeweils **umgekehrter** Reihenfolge notiert werden.

Beispiel.

$$A \in \mathbb{K}^{5\times 5} \quad , A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$p_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)^3$$

also besitzt A die zwei Eigenwerte
$\lambda_1 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $r_1 = 2$
$\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit $r_1 = 3$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$:

$$(A-2I)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

hat die Lösungen:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ 2 linear unabhängige Eigenvektoren}$$

$\Rightarrow d_1 = \dim(Ker(A-2I)) = r_1 = 2$
$\Rightarrow H(2,A) = Eig(2,A) = \langle s_1, s_2 \rangle$. Wähle nun als erste Basisvektoren: s_1, s_2.
Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$:
Rang $(A-1I) = 3$ und

$$Ker(A-1I) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle =: \langle v_1, v_2 \rangle$$

also

$$d_2 = \dim(Eig(1,A)) = 2 \lneqq 3 = r_2$$

Es gilt dann

$$dim(Ker(A-1I)^2) = 3 \text{ und } Ker(A-1I)^2 = H(1,A)$$

Ergänze nun $\{v_1, v_2\}$ durch einen Vektor v_3 zu einer Basis von $H(1,A)$. Suche dazu v_3 so, dass $(A-1I)^2 v_3 = 0$ und $\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$

$$(A-1I)^2 x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \quad , v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung hiervon ist z.B. $(4, -6, 4, 1, 1)^T$. Setze also $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ausgehend von v_3 konstruieren wir nun eine Hauptvektorenkette (der Länge 2):

$$(A-\lambda_2 I)v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} =: s_3$$

$\Rightarrow s_3 \in Eig(1, A)$ und v_3, s_3 ist Hauptvektorenkette. Mit der Bezeichnung $s_4 := v_3$ ist also die zu unserer gesuchten Basis hinzuzufügende Jordankette in umgekehrter Notation (angefangen mit dem Eigenvektor): s_3, s_4. Wir müssen noch s_3 zu einer Basis des Eigenraums ergänzen. Es gilt:

$$: s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + 7 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

Wenn $s_5 := v_1$, dann gilt: $Eig(1, A) = \{s_3, s_5\}$.
Wähle also als Basis des $\mathbb{R}^5$:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, s_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & & & \\ & \boxed{2} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \text{wobei } S = \left(\begin{array}{c|c|c} s_1 & \dots & s_5 \end{array} \right)$$

Hier ergibt die Jordankette der Länge 2 den Jordanblock $\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}$.
Daher folgt, dass

$$e^{Ax}S = S \cdot e^{S^{-1}ASx} = S \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & & & & \\ & e^{2x} & & & \\ & & e^x & x \cdot e^x & \\ & & & e^x & \\ & & & & e^x \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} e^{2x}s_1 & e^{2x}s_2 & e^x s_3 & e^x(xs_3 + s_4) & e^x s_5 \end{array} \right)$$

eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay$ ist, d.h. die Funktionen $e^{2x}s_1, e^{2x}s_2, e^x s_3, e^x(xs_3+s_4), e^x s_5$ bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$y' = Ay$.

Betrachte nun das AWP : $\{y' = Ay \quad , y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Es gilt: die eindeutige Lösung dieses AWPs ist eine Linearkombination der Funktionen $e^{2x}s_1, \dots, e^x s_5$. D.h. es existieren $c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = c_1 e^{2x} s_1 + \dots + c_5 e^x s_5 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Anfangsbedingung

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_5 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_5 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$y(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ -e^x \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$$

ist Lösung des Anfangswertproblems.

Bemerkung:

1) Wenn die Matrix A reell ist, d.h. $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, dann gilt: $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ ist Eigenwert von A, und $v \in \mathbb{C}^N$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \Leftrightarrow \overline{v}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

   Beweis:

   $$Av = \lambda v \Leftrightarrow A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$

   $\square$

   Wenn nun

   $$(v_1, \ldots, v_k, z_1, \ldots, z_l, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_l)$$

   mit $v_1, \ldots, v_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, z_1, \ldots, z_l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ ein (komplexes) Fundamentalsystem (d.h. $k + 2l = N$) der Differentialgleichung $y' = Ay$, dann ist

   $$(v_1, \ldots, v_k, \mathrm{Re}(z_1), \ldots, \mathrm{Re}(z_l), \mathrm{Im}(z_1), \ldots, \mathrm{Im}(z_l))$$

   ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = Ay$.

   Beweis:
   siehe Übung. $\square$

   Also wenn etwa

   $$z_j = e^{(\lambda+i\mu)x} s_j$$

   (oder allgemein $z_j = e^{(\lambda+i\mu)x}\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}s_1 + \cdots + xs_{p-1} + s_p\right)$), dann ist

   $$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_j) &= e^{\lambda x}\left(\cos(\mu x)\,\mathrm{Re}(s_j) - \sin(\mu x)\,\mathrm{Im}(s_j)\right)\\ \mathrm{Im}(z_j) &= e^{\lambda x}\left(\cos(\mu x)\,\mathrm{Im}(s_j) + \sin(\mu x)\,\mathrm{Re}(s_j)\right)\end{aligned}$$

2) Man sieht jetzt schon, dass die Spektralstruktur der Matrix A das qualitative (asymptotische) Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$ bestimmt.
   Eigenwerte mit negativem Realteil $\lambda < 0$ führen zu Lösungen

   $$e^{\lambda x}\left(\cos(\mu x)\,\mathrm{Re}(s_j) - \sin(\mu x)\,\mathrm{Im}(s_j)\right), \text{ etc.}$$

   die für $x \to +\infty$ gegen Null konvergieren.

   Eigenwerte mit positivem Realteil $\lambda > 0$ führen zu Lösungen mit unbeschränktem Wachstum.

   Rein imaginäre Eigenwerte führen zu rein periodischen Lösungen.

Lineare skalare Differentialgleichungen der Ordnung n

Wir betrachten Differentialgleichungen vom Typ

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{4.3}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig.

Wir haben bereits gesehen, dass (4.3) äquivalent ist zum folgenden System von Differentialgleichungen der Ordnung 1 (Satz 1.3):
mit $y_1 = y, y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' &=& y_2 \\ y_2' &=& y_3 \\ &\vdots& \\ y_{n-1}' &=& y_n \\ y_n' &=& -a_{n-1}(x)y_n - a_{n-2}(x)y_{n-1} - \cdots - a_1(x)y_2 - a_0(x)y_1 + f(x) \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Die Differentialgleichung (4.4) ist eine lineare Differentialgleichung; in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Aus der Äquivalenz von (4.3) und (4.5) und den bekannten Resultaten für das System (4.5) folgt:

1) Jede maximale Lösung von (4.3) ist eine globale Lösung.

2) Für alle $\xi \in I, \eta \in \mathbb{K}^n$ besitzt das Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(\xi) = \eta_1, y'(\xi) = \eta_2, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n \end{array} \right. \tag{4.6}$$

genau eine globale Lösung $y : I \to \mathbb{K}.$, da (4.6) äquivalent zum Anfangswertproblem für (4.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} (\xi) = \eta \end{array} \right.$$

Satz 4.7
Sei $\mathcal{U}$ die Menge der globalen Lösungen von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{4.7}$$

und $\mathcal{A}_f$ die Menge der globalen Lösungen von (4.3).
Dann gilt:

1) $\mathcal{U}$ ist ein n-dimensionaler Untervektorraum von $C^n(I;\mathbb{K})$.

2) Sind $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{U}$, dann gilt:
$y_1, \ldots, y_m$ sind linear unabhängig in $C^n(I;\mathbb{K})$
$\Leftrightarrow \left(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \ldots \left(y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)}\right)$ sind linear unabhängig in $C^1(I;\mathbb{K})$
$\Leftrightarrow \exists\, x^* \in I$ so, dass: $\left(y_1(x^*), y_1'(x^*), \ldots, y_1^{(n-1)}(x^*)\right), \ldots \left(y_m(x^*), y_m'(x^*), \ldots, y_m^{(n-1)}(x^*)\right)$ sind linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$.
$\Leftrightarrow \forall\, x \in I : \left(y_1(x), y_1'(x), \ldots, y_1^{(n-1)}(x)\right), \ldots \left(y_m(x), y_m'(x), \ldots, y_m^{(n-1)}(x)\right)$ sind linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$.

   Bezeichnen wir als *Fundamentalsystem* der homogenen Gleichung (4.7) eine Menge von n globalen, linear unabhängigen Lösungen von (4.7), dann gilt:

3) Ist $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem von (4.7), dann ist

$$\mathcal{U} = \{c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \,|\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

4) $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$, und ist $y_p \in \mathcal{A}_f$, dann gilt: $\mathcal{A}_f = y_p + \mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{A}_f$ ist ein affiner Unterraum con $C^n(I;\mathbb{K})$.

5) Sind $y_1, y_2 \in \mathcal{A}_f$, dann gilt: $y_1 - y_2 \in \mathcal{U}$.

Beweis:
Äquivalenz von (4.3) und (4.5) und bekannte Ergebnisse für (4.5). □

Bemerkung:
Seien $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$ = Menge der globalen Lösungen von (4.7), $\mathcal{U}_2$ = Menge der globalen Lösungen von

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Sei dann

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{U}_2 &\to \mathcal{U}_1 \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} &\mapsto y_1 \end{aligned}$$

Es ist klar, dass ψ ein Vektorraumisomorphismus ist, und die Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} \psi^{-1}: \mathcal{U}_1 &\rightarrow \mathcal{U}_2 \\ y_1 &\mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Also folgt: ist

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \end{bmatrix}, \ldots, y^{(n)} = \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung (4.8), dann ist $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von (4.7).

Sei nun $\Phi(x) = \left[y^{(1)} \mid \ldots \mid y^{(n)}\right]$ eine Fundamentalmatrix von (4.8). Dann folgt mit der Methode der Variation der Konstanten bekannterweise, dass

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x)\Phi(s)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{bmatrix} ds, \quad x \in I$$

(mit $x_0 \in I$ beliebig) eine partikuläre Lösung von (4.5) ist.

Weiter gilt:

$$y(x) = \Phi(x) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + y_p(x), \quad x \in I, \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ist die allgemeine Lösung von (4.5).

Entsprechend folgt, dass

$$y(x) = c_1 y_1^{(1)} + \cdots + c_n y_1^{(n)} + 1.\text{ Komponente der Funktion } y_p$$

die allgemeine Lösung von (4.3) ist.

<u>Problem:</u> die explizite Berechnung eines Fundamentalsystems.
Diese ist aber möglich im Falle von konstanten Koeffizienten in (4.3).

Betrachten wir jetzt nur noch diesen Fall, d.h. die Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \tag{4.9}$$

mit $a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den reellen Fall).

Wie vorher ist

(4.9)

$$\Leftrightarrow \quad y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}}_{=:A} y, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Wir wissen: zur Konstruktion eines Fundamentalsystems von (4.10) müssen zunächst die Eigenwerte von A bestimmt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= (-1)^n \cdot \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\right) \end{aligned}$$

ist das charakteristische Polynom der Matrix A. Das Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

wird das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung (4.9) genannt. Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind trivialerweise die Nullstellen von $p_A(\lambda)$. Über $\mathbb{C}$ zerfällt $p(\lambda)$ in Linearfaktoren, d.h. es existieren

$$\begin{aligned} &\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{R}, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{N} \\ &\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}, \mu_{r+1}, \dots, \mu_{r+k} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

mit

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{\mu_j} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\lambda - (a_j + i\beta_j))^{\mu_{r+j}} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\lambda - (a_j - i\beta_j))^{\mu_{r+j}}$$

Wir haben gesehen, dass ein reeller Eigenwert λ_j mit algebraischer Vielfachheit μ_j zu μ_j linear unabhängigen Lösungen von (4.10) führt, die von folgender Form sind:

$$\left.\begin{array}{ll} e^{\lambda_j x} v_1, & \dots, \quad e^{\lambda_j x} v_l \\ e^{\lambda_j x} (x v_1 + v_{1,1}) & \\ e^{\lambda_j x} \left(x^2 v_1 + x v_{1,1} + v_{1,2}\right) & \\ \vdots & \\ e^{\lambda_j x} \left(x^{\mu_j - 1} v_1 + x^{\mu_j - 2} v_{1,1} + \dots\right) & \end{array}\right\} \mu_j \text{ Stufen}$$

wobei $v_1, \dots, v_l$ linear unabhängige Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_j sind, und die Hauptvektorkette zu v_1 ist: $v_1, v_{1,1}, v_{1,2}, \dots$.

Da wir schon wissen, dass die 1. Komponenten dieser vektorwertigen Funktionen μ_j linear unabhängige Lösungen von (4.9) ergeben, folgt:

$$\dim(\mathrm{Eig}(A, \lambda_j)) = 1$$

und es gibt genau eine Kette von μ_j Hauptvektoren.

In der 1. Komponente der zugehörigen Lösungen erhalten wir die Funktionen:

$$\underbrace{c_1}_{\in\mathbb{C}} e^{\lambda_j x}, \underbrace{c_2}_{\in\mathbb{C}} x e^{\lambda_j x} + \underbrace{c_{2,1}}_{\in\mathbb{C}} e^{\lambda_j x}, \dots, \underbrace{c_{\mu_j}}_{\in\mathbb{C}} x^{\mu_j - 1} e^{\lambda_j x} + \underbrace{c_{\mu_j,1}}_{\in\mathbb{C}} x^{\mu_j - 2} e^{\lambda_j x} + \dots + \underbrace{c_{\mu_j,\mu_j - 1}}_{\in\mathbb{C}} e^{\lambda_j x}$$

d.h. wir erhalten μ_j linear unabhängige Lösungen von (4.9)

$$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, x^2 e^{\lambda_j x}, \ldots, x^{\mu_j - 1} e^{\lambda_j x}$$

Analog zeigt man, dass eine komplexe Nullstelle $\alpha_j + i\beta_j$ der Vielfachheit μ_j zu den $2\mu_j$ reellen linear unabhängigen Lösungen von (4.9) von folgender Form führt:

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), & e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x) \\ xe^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), & xe^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x) \\ \vdots & \\ x^{\mu_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), & x^{\mu_j - 1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x) \end{array}$$

Beispiel:

1) Gesucht ist ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y' = 0$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda$$

Nullstellen von p: $p(\lambda) = \lambda \left(\lambda^3 + 1\right)$;
klar: $0, -1$ sind Nullstellen.

Polynomdivision liefert:

$$\left(\lambda^3 + 1\right) : (\lambda + 1) = \left(\lambda^2 - \lambda + 1\right) \Leftrightarrow \left(\lambda^3 + 1\right) = (\lambda + 1) \cdot \left(\lambda^2 - \lambda + 1\right)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 &= -1 + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-3}{4}} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Also: Nullstellen $0, -1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (allesamt mit Vielfachheit 1).

Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} v_1 &:= e^{0 \cdot x} = 1 \\ v_2 &:= e^{-x} \\ v_3 &:= e^{\frac{1}{2}x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ v_4 &:= e^{\frac{1}{2}x} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{aligned}$$

Damit folgt, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y' = 0$$

von der Form

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, ist.

2) Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y^{(4)} + y' = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Nach 1) gilt, dass die eindeutige globale Lösung y dieses Anfangswertproblems von der folgenden Form ist:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Bestimmung dieser Koeffizienten:
Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
1 &= y(0) = c_1 v_1(0) + c_2 v_2(0) + c_3 v_3(0) + c_4 v_4(0) \\
0 &= y'(0) = c_1 v_1'(0) + c_2 v_2'(0) + c_3 v_3'(0) + c_4 v_4'(0) \\
1 &= y''(0) = c_1 v_1''(0) + c_2 v_2''(0) + c_3 v_3''(0) + c_4 v_4''(0) \\
0 &= y'''(0) = c_1 v_1'''(0) + c_2 v_2'''(0) + c_3 v_3'''(0) + c_4 v_4'''(0)
\end{aligned}$$

d.h. in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(0) & v_2(0) & v_3(0) & v_4(0) \\ v_1'(0) & v_2'(0) & v_3'(0) & v_4'(0) \\ v_1''(0) & v_2''(0) & v_3''(0) & v_4''(0) \\ v_1'''(0) & v_2'''(0) & v_3'''(0) & v_4'''(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Fundamentalsystem bilden, also ist die Matrix invertierbar; somit existiert eine eindeutige Lösung $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$.
Ausrechnen ergibt: $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = -\frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Was, wenn: $y^{(4)} + y = \tan(x)$?

$$y_p(x) = \int_0^x \Phi(x) \cdot \Phi(s)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tan(s) \end{bmatrix} ds$$

Die Berechnung einer partikulären Lösung der nicht-homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x) \tag{4.11}$$

mit der Methode der Variation der Konstanten über die Formel:

$$\int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi(s)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{bmatrix} ds,$$

wobei

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) & \dots & v_n(x) \\ v_1'(x) & \vdots & & v_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(x) & v_2^{(n-1)}(x) & \dots & v_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},$$

$\{v_1, \ldots, v_n(x)\}$ Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung zu (4.11), ist oft sehr mühselig. Für gewisse rechte Seiten $f(x)$ kann man eine partikuläre Lösung auf einfacherem Wege bestimmen.

Man nennt die Funktion f *elementar Ansatzfähige Funktion* wenn f folgende Gestalt hat:

$$f(x) = p(x)e^{\mu x}\cos(\omega x) + q(x)e^{\mu x}\sin(\omega x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit

* Polynomen p, q beliebiger Ordnung (insbesondere dürfen p und/oder q konstant und sogar $\equiv 0$ sein).

* $\mu \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}$.

In diesem Falle bestitzt die nicht homogene Differentialgleichung (4.11) immer eine partikuläre Lösung der Form

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^\nu \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m\right) e^{\mu x}\cos(\omega x) \\ &\quad + x^\nu \left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m\right) e^{\mu x}\sin(\omega x) \end{aligned}$$

wobei $m = \max\{\deg(p), \deg(q)\}, A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$ und
$\nu = 0$ falls $\mu + i\omega$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung (4.11),
$\nu = k$ falls $\mu + i\omega$ k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung (4.11)

Die Koeffizienten $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m$ berechnet man, indem man die Funktion y_p in die Differentialgleichung (4.11) einsetzt und die Koeffizienten vergleicht.

Beispiel:
Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u'' - 3u' + 2u = e^x \sin(x)$$

1. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung
Die rechte Seite $e^x \sin(x)$ ist elementar Ansatzfähig (mit $\mu = \omega = 1, q = 1, p \equiv 0$: $e^x \sin(x) = p(x)e^{\mu x}\cos(\omega x) + q(x)e^{\mu x}\sin(\omega x)$). Also existiert eine partikuläre Lösung der Gestalt

$$y_p(x) = x^\nu A_0 e^x \cos(x) + x^\nu B_0 e^x \sin(x)$$

Zur Bestimmung von ν betrachten wir das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Die Nullstellen sind demnach 2 und 1.
Also ist $\mu + i\omega = 1 + i$ keine Nullstelle von p, und somit ist $\nu = 0$, d.h. y_p hat die Gestalt:

$$y_p(x) = A_0 e^x \cos(x) + B_0 e^x \sin(x)$$

Berechne nun:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A_0 e^x (\cos(x) - \sin(x)) + B_0 e^x (\sin(x) + \cos(x)) \\ y_p''(x) &= A_0 e^x (-2\sin(x)) + B_0 e^x 2\cos(x) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' + 2y_p &= (-2A_0 + 3A_0 - 3B_0 + 2B_0)\, e^x \sin(x) \\ &\quad + (2B_0 - 3A_0 - 3B_0 + 2A_0)\, e^x \cos(x) \\ &\stackrel{!}{=} e^x \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} -B_0 - A_0 = 0 \\ A_0 - B_0 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow A_0 = -B_0, A_0 = \frac{1}{2} \text{ und somit } B_0 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung
Da $2, 1$ die einfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$, ist $\{e^{2x}, e^x\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung, und somit ist

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Da die allgemeine Lösung der nicht-homogenen Gleichung von der Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ist, folgt:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^x \left(\cos(x) - \sin(x)\right).$$

Bemerkung:

Falls die rechte Seite f selbst nicht elementar ansatzfähig, aber $f = \sum_{k=1}^{m} f_k$ ist, und jedes f_k ist elementar ansatzfähig, dann berechnet man zunächst eine partikuläre Lösung y_p^k für jede rechte Seite f_k. Dann ist $y_p = \sum_{k=1}^{m} y_p^k$ natürlich wegen der Linearität der Differentialgleichung eine partikuläre Lösung zur rechten Seite f.