Aufgabe 13

(i) Zeige, dass $g(t) \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Einerseits ist g stetig für alle $t \neq |1|$, denn die Exponentialfunktion und die Nullfunktion sind stetige Funktionen. Wir müssen nur die Stetigkeit in $t = 1, t = -1$ überprüfen. Dazu schauen wir uns die Grenzwerte an und überprüfen, ob sie gegen die Funktionswerte konvergieren:

$$\lim_{t\nearrow 1} \exp(-\frac{1}{1-t^2}) = \lim_{t\nearrow 1} \frac{1}{\underbrace{\exp(\frac{1}{1-t^2})}_{\to\infty}} = 0 = \lim_{t\searrow 1} g(t) = g(1),$$

$$\lim_{t\searrow -1} \exp(-\frac{1}{1-t^2}) = \lim_{t\searrow -1} \frac{1}{\underbrace{\exp(\frac{1}{1-t^2})}_{\to\infty}} = 0 = \lim_{t\nearrow -1} g(t) = g(-1).$$

Nun schauen wir uns die Nullstellen von g an. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt, ist $g(t) \neq 0$ genau dann, wenn $t < |1|$. Der Träger lautet demnach

$$\operatorname{supp}(g) = [-1;1].$$

Der Träger ist beschränkt und abgeschlossen. Da wir uns im $\mathbb{R}$ befinden, ist der Träger von g nach Satz von Heine-Borel kompakt. Damit liegt $g(t)$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

Als nächstes zeigen wir, dass g glatt ist. Hierfür wird ein Hilfssatz bewiesen, der besagt, dass $\exp(\frac{p(x)}{q(x)})$ glatt ist für alle $x \notin J := \{t : q(t) = 0\}$, wobei p, q ganzrationale Funktionen in $\mathbb{R}$ sind. Wir machen einen kurzen Induktionsbeweis über n, um zu zeigen, dass $\frac{d^n}{dx^n}\exp(\frac{p(x)}{q(x)})$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \notin J$ existiert. Für $n = 1$ erhalten wir mit der Quotientenregel $\frac{d}{dx}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}) = \frac{p'q-pq'}{q^2}\exp(\frac{p(x)}{q(x)})$ für $x \notin J$. Insbesondere ist $\frac{p'q-pq'}{q^2}$ eine gebrochenrationale Funktion. Wir nehmen an, dass $\frac{d^n}{dx^n}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}) = \frac{r(x)}{q(x)^{2n}}\exp(\frac{p(x)}{q(x)})$ für eine ganzrationale Funktion $r(x)$ gilt. Wir führen jetzt den Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ aus:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}) &= \frac{d}{dx}\frac{r(x)}{q(x)^{2n}}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}) \\
&= \frac{r(x)}{q(x)^{2n}}\frac{p'q-pq'}{q^2}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}) + \frac{r'(x)q(x)^{2n} - r(x)2nq(x)^{2n-1}}{q(x)^{2n+1}}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}) \\
&= \frac{\overbrace{r(x)(p'q-pq') + r'(x)q(x)^{2n} - r(x)2nq(x)^{2n-1}q(x)^{2n+1}}^{:=\tilde{r}(x)}}{q(x)^{2n+1}}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}) \\
&= \frac{\tilde{r}(x)}{q(x)^{2n+1}}\exp(\frac{p(x)}{q(x)}). \quad \forall x \notin J.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{r}(x)$ eine ganzrationale Funktion, da der Raum der Polynome ein reeller Vektorraum ist (Summe und Produkt von Polynomen ergeben wieder Polynome). Damit ist $\exp(\frac{p(x)}{q(x)})$ glatt und $g(t)$ ist glatt für $t < |1|$. Für $t > |1|$ ist $\frac{d^n}{dt^n}g(t) = 0$.

Für $t = 1$ betrachten wir den Grenzwert $\lim_{t\to 1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \exp(-\frac{1}{1-t^2})$ und schauen, ob dieser gegen null konvergiert. Wir wissen aus dem vorhin bewiesenen Hilfssatz, dass

$$\frac{d^n}{dx^n} \exp(-\frac{1}{1-t^2}) = \frac{r(x)}{(1-t^2)^{2n}} \exp(-\frac{1}{1-t^2})$$

für ein Polynom $r(x)$. Nun gilt

$$\lim_{t\nearrow 1} \underbrace{\frac{r(x)}{(1-t^2)^{2n}}}_{\to\infty} \underbrace{\exp(-\frac{1}{1-t^2})}_{\to 0} = \lim_{t\nearrow 1} \frac{r(x)}{(1-t^2)^{2n} \exp\frac{1}{1-t^2}} = \lim_{t\nearrow 1} \frac{\overbrace{r(x)}^{\to c\in\mathbb{R}}}{\underbrace{\frac{\exp\frac{1}{1-t^2}}{\frac{1}{(1-t^2)^{2n}}}}_{\to\infty}} = 0,$$

wie man durch mehrmalige Anwendung von l'Hospital zeigt (intuitive Erklärung: die Exponentialfunktion wächst schneller gegen unendlich als ein Polynom). Ebenso für $t = -1$:

$$\lim_{t\searrow -1} \frac{d^n}{dx^n} \exp(-\frac{1}{1-t^2}) = \lim_{t\searrow -1} \frac{r(x)}{(1-t^2)^{2n}} \exp(-\frac{1}{1-t^2}) = 0.$$

Damit ist g überall unendlich oft differenzierbar.

(ii) Betrachte $\varphi(t) := g(\frac{t-x}{\alpha})$. Es gilt $\varphi(t) \neq 0 \iff |t| < x + \alpha$. Sei

$$\psi(t) := \begin{cases} g(\frac{\alpha}{2}\frac{1}{t-x}), & t \neq x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt: $\psi(t) = 0 \iff |t| < x + \frac{\alpha}{2}$, denn für $|t| < x + \frac{\alpha}{2}$ ist $\frac{\alpha}{2}\frac{1}{t-x} < \frac{\alpha}{2}\frac{1}{x+\frac{\alpha}{2}-x} = 1$. Betrachte die Funktion

$$F(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + \psi(t)}.$$

Für $|t_0| < x + \frac{\alpha}{2}$ ergibt sich

$$F(t_0) = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_0) + \underbrace{\psi(t_0)}_{=0}} = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_0)} = 1$$

und für $|t_0| \geq x + \alpha$ ergibt sich

$$F(t_0) = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_0) + \psi(t_0)} = \frac{0}{0 + \psi(t_0)} = 0.$$

Für $t_0 \in [x + \frac{\alpha}{2}, x + \alpha)$ ergibt sich wegen $\varphi(t_0), \psi(t_0) > 0$:

$$F(t_0) = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_0) + \psi(t_0)} > 0.$$

Wir haben eine Funktion, die außerhalb von $[x-\alpha, x+\alpha]$ gleich null ist und innerhalb von $[x-\frac{\alpha}{2}, x+\frac{\alpha}{2}]$ gleich Eins ist. F ist glatt, da F sich aus Funktionen g zusammensetzt und die Funktionen g glatt sind.

Aufgabe 14

1. Zeige, dass J ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist. Das heißt, J ist stetig differenzierbar und auch die Umkehrabbildung J^{-1} ist stetig differenzierbar. Um die Differenzierbarkeit von J zu beweisen, betrachten wir alle partiellen Ableitungen und zeige deren Stetigkeit (Satz 129, Analysis II, Ferus). Die Funktionalmatrix von J lautet

$$D_{(u,v)}J = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}.$$

   Alle partiellen Ableitungen von J sind konstante Abbildungen und somit stetig, denn konstante Abbildungen sind stetig. Damit ist J differenzierbar und die Funktionalmatrix $D_{(u,v)}J$ ist tatsächlich die Ableitung von J.

   Nun zeigen wir die Stetigkeit von $D_{(u,v)}J$. Dies lässt sich einfach zeigen: $D_{(u,v)}J$ existiert auf ganz $\mathbb{R}^2$. Damit ist es eine lineare Abbildung $D_{(u,v)}J : \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Nach Satz 98 aus dem Analysis II Skript von Ferus ist jede lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $\dim V < \infty$ stetig. Damit ist $D_{(u,v)}J$ stetig auf $\mathbb{R}^2$ und damit auch auf $(0,\infty)\times(0,1)$. J ist folglich einmal stetig differenzierbar.

   Als nächstes zeigen wir, dass J invertierbar ist, indem wir die inverse Matrix von $D_{(u,v)}J$ mit der Cramer'schen Regel berechnen und den Umkehrsatz (Satz 164, Analysis II, Ferus) anwenden.

$$(D_{(u,v)}J)^{-1} = \frac{1}{(1-v)u + uv} \begin{pmatrix} u & u \\ -v & 1-v \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u & u \\ -v & 1-v \end{pmatrix}$$

   Dabei existiert das Inverse von $D_{(u,v)}f$ nur für $u \neq 0$. Der Umkehrsatz besagt, dass J bei $u \neq 0$ lokal invertierbar ist (es existiert also J^{-1} für $u \neq 0$) und die Umkehrabbildung von J sogar stetig differenzierbar ist. Damit existiert auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ die Abbildung J^{-1} und diese ist dort auch stetig differenzierbar.

   Wir erhalten: J ist ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

2. Betrachte die Funktion $F : (0,\infty)^2 \to (0,\infty), (x,y) \mapsto x^{p-1}e^{-x}y^{q-1}e^{-y}$. F ist auf dem ganzen Definitionsbereich echt positiv, da $x, y > 0$ und $e^\alpha > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Zudem ist F stetig auf $(0,\infty)^2$, da F das Produkt zweier stetiger Funktionen ist: $F(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ mit $X(x) = x^{p-1}e^{-x}$ und $Y(y) = y^{q-1}e^{-y}$.

   Wir betrachten das Integral $\int_V F(x,y)d(x,y)$ mit $V := (0,\infty)^2$. Also

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}y^{q-1}e^{-y}dxdy = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}dy = \Gamma(p)\Gamma(q), \quad \forall p,q \in (0,\infty). \tag{1}$$

   Da F echt positiv und auch stetig auf V ist, können wir den Transformationssatz für stetige Funktionen (Korollar 1.2.10) auf das obige Integral anwenden mit Transformation $J : (0,\infty)\times(0,1) \to V$, wobei J eine $\mathcal{C}^1$-Funktion ist (wie gezeigt wurde). Sei $U := (0,\infty)\times(0,1)$.

Es gilt also

$$
\begin{aligned}
\int_V F(x,y)d(x,y) &= \int_U F(J(x,y))|\det D_{(x,y)}J|d(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty (x(1-y))^{p-1} e^{-x(1-y)} (xy)^{q-1} e^{-xy} |\det \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{pmatrix}| dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty x^{p+q-2} (1-y)^{p-1} e^{-x} y^{q-1} x \, dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1} (1-y)^{p-1} y^{q-1} dx dy \\
&= \int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1} dx \\
&= \left(\int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy \right) \Gamma(p+q), \quad \forall p,q \in (0,\infty). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir für $p,q > 0$:

$$
\int_V F(x,y)d(x,y) \overset{(1)}{=} \Gamma(p)\Gamma(q) \overset{(2)}{=} \left(\int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy \right) \Gamma(p+q) \iff \int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.
$$