Aufgabe 3

Beweis. Wir zeigen, dass (1) $\int_0^1 u^2(x,0)dx = \int_0^1 u_0^2(x)dx$ und dass (2) $\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2(x,t)dx \leq 0, \forall t \geq 0$, d.h. $\int_0^1 u^2(x,t)dx$ ist monoton fallend und wir erhalten

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \overset{(2)}{\leq} \int_0^1 u^2(x,0)dx \overset{(1)}{=} \int_0^1 u^2(x,0)dx, \quad \forall t > 0.$$

Um Behauptung (1) zu zeigen, verwenden wir $u(x,0) = u_0(x)$:

$$\int_0^1 u^2(x,0)dx = \int_0^1 u_0^2(x)dx.$$

Um Behauptung (2) zu zeigen, betrachten wir $\frac{d}{dt}E$ und verwenden im zweiten Schritt die Ketten- und Produktregel der Differentialrechnung, um die Ableitung zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2u(x,t)\underbrace{u_t(x,t)}_{=u_{xx}(x,t)}dx &= \int_0^1 u(x,t)u_{xx}(x,t)dx \\
&= \underbrace{[u_x(x,t)u(x,t)]_0^1}_{=0,\text{ für } u(x,0)=u(x,1)=0} - \int_0^1 u_x^2(x,t)dt \\
&= -\int_0^1 \underbrace{u_x^2(x,t)}_{\geq 0}dt \leq 0.
\end{aligned}$$

Da $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)dx$ und $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$, folgt auch dass $\int_0^1 u^2(x,t)dx$ monoton fallend ist. Damit ist Behauptung (2) gezeigt. □