TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 10.-14.12.2018

8. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(Lebesgue-Messbarkeit, σ-Algebren)

Themen der großen Übung am 03.12.

Sei Ω eine Menge und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann betrachten wir die Mengen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Wir werden sehen

(i) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_n\}$,
$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in fast allen } A_n\}$.

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cap (\limsup_{n\to\infty} B_n)$, und im Allgemeinen gilt hier nicht Gleichheit.

Wir berechnen dann $\limsup_{n\to\infty} A_n$ für $A_n := \begin{cases} (-\frac{1}{n}, 1], & n \text{ ungerade}, \\ (-1, \frac{1}{n}], & n \text{ gerade}. \end{cases}$

Wir untersuchen $\mathbb{Q}^2 \cap E$ und $E \setminus \mathbb{Q}^2$ auf Lebesgue-Messbarkeit und berechnen ggf. ihr Lebesgue-Maß.

Für Lebesgue-messbare Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ zeigen wir

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Tutoriumsvorschläge

22. Aufgabe ⋆

Sei $A \in \mathcal{F}_E$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge des Einheitsquadrats $E = [0,1]^2$ mit $\lambda_E(A) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch jede Teilmenge $B \subseteq A$ Lebesgue-messbar ist mit $\lambda_E(B) = 0$. Folgern Sie, dass das Lebesgue Maß λ auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{F})$ vollständig ist, d.h. dass jede Teilmenge $M \subseteq N$ einer Lebesgue-messbaren Menge $N \in \mathcal{F}$ mit $\lambda(N) = 0$ Lebesgue-messbar ist mit $\lambda(M) = 0$.

Hinweis: In Aufgabe 27 (i) werden Sie zeigen, dass jede Menge N mit $\lambda_E^*(N) = 0$ Lebesgue-messbar ist.

23. Aufgabe

Wie viele Elemente muss eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ haben, damit die von ihr erzeugte σ-Algebra mit $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ übereinstimmt?

24. Aufgabe ⋆

Wir betrachten die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$, welche von den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erzeugt wird. Die Elemente von $\mathcal{B}$ nennt man auch Borelmengen.

(i) Zeigen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$ eine Borelmenge ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Erzeuger der Borel-σ-Algebra sind

$$I_o := \{(a,b) \colon -\infty \le a < b \le \infty\} \qquad \text{und} \qquad I_a := \{(-\infty, t] \colon t \in \mathbb{Q}\}.$$

Hausaufgaben

27. Aufgabe (5 Punkte)

Eine Menge $N \subseteq E = [0,1]^2$ mit $\lambda_E^*(N) = 0$ heißt (Lebesgue-)Nullmenge. Zeigen Sie Folgendes.

(i) Jede Nullmenge ist Lebesgue-messbar.

(ii) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

(iii) Überabzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind im Allgemeinen keine Nullmengen.

(iv) Jede abzählbare Teilmenge von E ist eine Nullmenge.

(v) Die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten aus E ist eine Nullmenge.

Äußeres Maß auf $\mathbb{R}^2$: In Aufgabe 28 verwenden wir das äußere Maß $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to [0,\infty]$, welches definiert ist durch

$$\lambda^*(A) := \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \lambda^*_{i,j}(A \cap E_{i,j}) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \lambda^*_{i,j}(A \cap E^0_{i,j}),$$

wobei wir an $E_{i,j} = [i, i+1] \times [j, j+1]$ und $E^0_{i,j} = [i, i+1) \times [j, j+1)$ erinnern. Machen Sie sich klar, dass auch das Analogon von (2.1.5) aus dem Skript gilt, d.h. dass gilt:

$$\lambda^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(R_n)\colon R_n \in \mathcal{R}\ \forall n \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\Big\}.$$

Hierbei definieren wir $\inf\{\infty\} = \infty$; außerdem benutzen wir die Regel $\infty + \infty = \infty$.

28. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes auf dem $\mathbb{R}^2$: Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein $x \in \mathbb{R}^2$ sei $A + x := \{a + x\colon a \in A\}$ die Verschiebung von A um x.

(i) Zeigen Sie, dass für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und jedes $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\lambda^*(A) = \lambda^*(A + x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass für jede Lebesgue-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und jedes $x \in \mathbb{R}^2$ die Menge $A + x$ ebenfalls Lebesgue-messbar ist und dass gilt $\lambda(A) = \lambda(A + x)$.

29. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $\Omega, \widetilde{\Omega}$ beliebige Mengen und sei $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $\widetilde{\mathcal{F}}$ eine σ-Algebra über $\widetilde{\Omega}$, so ist $f^{-1}(\widetilde{\mathcal{F}}) := \{f^{-1}(A)\colon A \in \widetilde{\mathcal{F}}\}$ eine σ-Algebra über Ω.

(ii) Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω, so ist $f(\mathcal{F}) := \{f(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra über $\widetilde{\Omega}$.

30. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede σ-Algebra entweder endlich viele oder bereits überabzählbar viele Elemente enthalten muss. Sei dazu $\mathcal{F} = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *abzählbare* σ-Algebra auf einer Menge X.

(i) Sei $x \in X$ und $M_x := \bigcap_{F\in\mathcal{F}\colon x\in F} F$. Zeigen Sie, dass $M_x \in \mathcal{F}$ gilt und dass für $x, y \in X$ gelten muss $M_x \cap M_y = \emptyset$ oder $M_x = M_y$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ endlich viele Elemente enthält oder andernfalls nicht abzählbar ist.

Gesamtpunktzahl: 20