27.04.2012 - - - Tutor: Martin Friesen

Funktionalanalysis Sommersemester 2012, Prof. Dr. Yuri Kondratiev

Übungen Blatt 2

1. Sei $X = \mathbb{R}^\infty$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$. Führe eine Metrik auf X ein.

Beweis.
Im Folgenden geben wir eine kleine Auswahl an verschiedenen Metriken an. Seien dazu beliebige Folgen bezeichnet mit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$.

(a) Die diskrete Metrik ist gegeben durch $d(x,y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ 0 & , x \neq y \end{cases}$

(b) Sei $0 < a_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ sowie $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,K)$ eine beliebige Funktion für ein $K > 0$ mit den Eigenschaften

i. $f(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$
ii. $s \leq t \Longrightarrow f(s) \leq f(t)$
iii. $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$, für alle $s,t \in [0,\infty)$

Dann ist eine Metrik durch

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(|x_n - y_n|)$$

definiert. Wegen

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(|x_n - y_n|) \leq K \sum_{n=1}^{\infty} a_n = K\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell_1} < \infty$$

ist $d(x,y)$ wohldefiniert, nach Definition positiv und symmetrisch. Weiterhin gilt

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow a_n f(|x_n - y_n|) \Longleftrightarrow f(|x_n - y_n|) = 0 \Longleftrightarrow |x_n - y_n| = 0 \Longleftrightarrow x_n = y_n \Longleftrightarrow x = y$$

und für die Dreiecksungleichung rechnen wir nach

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(|x_n - y_n|) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n (f(|x_n - z_n|) + f(|z_n - y_n|)) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und injektiv. Dann definiert die Vorschrift

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n) - f(y_n)|$$

ebenfalls eine Metrik. Denn es gilt $d(x,y) = 0 \Longrightarrow f(x_n) = f(y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und wegen der Injektivität bereits $x_n = y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $x = y$. Die Umkehrung ist klar. Alle anderen Axiome wurden bereits in sehr ähnlicher Weise in den Präsenzübungen behandelt.

(d) Eine etwas andere Metrik bekommen wir mittels der Definition

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\min\ \{n\in\mathbb{N}:\ \ x_n \neq y_n\}} & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

Die Dreiecksungleichung lässt sich durch eine Fallunterscheidung direkt nachrechnen.

$\square$

2. Bezeichne $B(\mathbb{R})$ den Raum aller beschränkten Funktionen mit Norm

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Zeige, daß der Untervektorraum $C_b(\mathbb{R})$ der stetigen beschränkten Funktionen und der Untervektorraum $C_\infty(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, abgeschlossene Untervektorräume von $B(\mathbb{R})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ sind. Somit sind sie ebenfalls Banachräume.

Beweis.
Für alle beteiligten Räume stellen wir fest, dass dieses selbst wieder Untervektorräume von $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ sind. Zuerst zeigen wir, dass $B(\mathbb{R})$ mit der obigen Norm ein Banachraum ist. Die Normaxiome wurden bereits in den Präsenzübungen gezeigt und können dort nachgelesen werden. Für die Vollständigkeit sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\mathbb{R})$ eine Cauchy-Folge. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f_m(t)| = \|f_n - f_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty. \tag{1}$$

Damit ist die Folge reeller Zahlen $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ selbst wieder eine Cauchy-Folge und besitzt somit einen Grenzwert. Bezeichnen wir diesen mit $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ so erhalten wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, als punktweisen Grenzwert von f_n. Es bleibt $f \in B(\mathbb{R})$ und $\|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty$ zu zeigen. Wegen (1) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le \|f_n - f_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \ge N, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Gehen wir hier zum Grenzwert $m \to \infty$ über, so erhalten wir

$$|f_n(t) - f(t)| \le \varepsilon, \quad n \ge N, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

insbesondere also $\|f_n - f\| \le \varepsilon, \quad n \ge N$. Zusammen mit

$$|f(t)| \le |f_n(t) - f(t)| + |f_n(t)| \le \varepsilon + \|f_n\|$$

erhalten wir $f \in B(\mathbb{R})$ und $f_n \to f$ in der $\|\cdot\|$ Norm, also die Vollständigkeit. Zuerst betrachten wir $C_b(\mathbb{R})$ und dort eine konvergente Folge $f_n \in C_b(\mathbb{R})$ mit $f_n \to f \in B(\mathbb{R})$. Wir müssen zeigen, dass f stetig ist. Da Konvergenz bezüglich der $\|\cdot\|$ Norm äquivalent zu der gleichmässigen Konvergenz ist, folgt die Aussage aus den Vorlesungen zur Analysis 2. Sei nun $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$ mit $f_n \to f \in B(\mathbb{R})$ gegeben. Wir müssen $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ zeigen. Die Stetigkeit ergibt sich aus derselben Begründung wie für $C_b(\mathbb{R})$. Dass f im Unendlichen verschwindet, sehen wir wie folgt ein. Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ fest mit der Eigenschaft

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da auch $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$ gilt, gibt es nach Definition eine kompakte Menge $K_n \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$|f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\backslash K_n.$$

Damit haben wir

$$|f_n(t)| \le |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t)| \le \|f - f_n\| + |f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}\backslash K$$

und erhalten $f \in C_\infty(\mathbb{R})$. $\square$

Bemerkung 0.1.

(a) *Gleichmässige Konvergenz einer Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ war definiert durch:* $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall n \ge N, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hier ist es wichtig, dass N unabhängig von t ist. Bei punktweiser Konvergenz darf N von t abhängen. Eine dazu äquivalente Aussage ist $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Denn ist die erste Definition erfüllt, so können wir (da N nicht von t abhängt) problemlos das Supremum über t bilden und erhalten die zweite Definition. Aus der zweiten Definition folgt wegen $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|$ die erste Definition.

(b) *Der Beweis, dass gleichmässige Grenzwerte stetiger Funktionen stetig sind ist nochmal in den Präsenzübungen zu finden.*

(c) *Es gilt nach Definition*

$$C_\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt mit } |f(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R} \backslash K\}.$$

In dieser Definition können wir uns auf Intervalle $K = [-a, a]$ einschränken.

3. Bezeichne mit $C_1[0,2]$ den Raum aller stetigen Funktionen mit Norm

$$\|f\| = \int_0^2 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Zeige, daß $C_1[0,2]$ nicht vollständig ist.

Beweis.
Hier müssen wir eine Cauchy-Folge angeben, welche keinen Grenzwert in $C_1[0,2]$ besitzt. Eine solche ist beispielsweise gegeben durch

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n & , 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & , 1 \leq t \leq 2 \end{cases}.$$

Die Cauchy Eigenschaft rechnen wir nach

$$\|f_n - f_m\| = \int_0^1 |t^n - t^m| \mathrm{d}t + \int_1^2 |1 - 1| \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \mathrm{d}t + \int_0^1 t^m \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Angenommen diese Folge ist konvergent, es gibt also einen Grenzwert $f \in C_1[0,2]$ mit $\|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty$. Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t &\leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \mathrm{d}t + \int_0^1 |f_n(t)| \mathrm{d}t \\ &\leq \|f_n - f\| + \int_0^1 t^n \mathrm{d}t \\ &= \|f_n - f\| + \frac{1}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

und somit $\int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t = 0$. Da f stetig sein soll muss bereits $f(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ gelten. Genauso behandeln wir

$$\int_1^2 |f(t) - 1| \mathrm{d}t = \int_1^2 |f(t) - f_n(t)| \mathrm{d}t \leq \|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty$$

und erhalten $f(t) = 1$ für alle $t \in [1,2]$. Also einen Wiederspruch zur Stetigkeit und $0 = f(1) = 1$. $\square$

Bemerkung 0.2.

1. *Es reicht NICHT aus, bei obiger Folge einfach den punktweisen Grenzwert zu nehmen. Denn die Vollständigkeit ist bezüglich der Konvergenz in der Norm definiert und punktweise Konvergenz ist keine Normkonvergenz. Diese wird vielmehr durch eine Familie von Halbnormen erzeugt (siehe z.B. lokalkonvexe Topologieen D. Werner, Funktionalanalysis). Weiterhin werden bei Vollständigkeit Elemente* $f \in C_1[0,2]$ *berücksichtigt. Ist der Kandidat für einen Grenzwert nicht stetig, also kein Element in* $C_1[0,2]$, *so braucht er nicht weiter berücksichtigt zu werden.*

2. *Wir haben oben die folgende Aussage benutzt. Ist* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und gilt* $\int\limits_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 0$ *so folgt bereits* $f(t) = 0$ *für alle* $t \in [a,b]$. *Wäre dieses falsch, gäbe es also ein* $t_0 \in [a,b]$ *mit* $f(t_0) > 0$, *so muss es wegen der Stetigkeit ein Intervall* $I \subset [a,b]$ *mit* $t_0 \in I$ *mit der Breite* $\delta > 0$ *geben so dass gilt*

$$|f(t)| \geq \frac{|f(t_0)|}{2} > 0, \quad \forall t \in I.$$

Damit erhalten wir einen Wiederspruch aus

$$0 = \int\limits_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \geq \int\limits_I |f(t)|\mathrm{d}t \geq \frac{|f(t_0)|}{2}\delta > 0.$$