Problem Sheet 01

Exercise 1.2

Zu zeigen: A ist positiv definit $\iff$ die lineare Abbildung $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ ist stark positiv.

Wir brauchen folgende Lemmata:

Lemma 0.1

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt. Für alle reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt, dass $\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^T x\rangle$.

Proof. Dies sieht man leicht, denn $\langle x, y\rangle = x^T y$. Also: $\langle Ax, x\rangle = (Ax)^T x = x^T A^T x = \langle x, A^T x\rangle$. $\square$

Lemma 0.2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Dann gibt es ein $\alpha > 0$, sodass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha||x||^2.$$

Proof. Da $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ist, gibt es eine orthogonale, reelle Matrix U und eine reelle Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, ..., n$, sodass $A = UDU^T$. Daher kann man f auch darstellen als $f(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle UDU^T x, x\rangle = \langle UDx, Ux\rangle$, wobei sich letztere Gleichheit aus Lemma 0.1 ergibt. Nun ist das Skalarprodukt invariant gegenüber orthogonale Abbildungen und daher $f(x) = \langle Dx, x\rangle$.

Sei $\lambda^- = \min \lambda_i$ und wähle $\alpha = \lambda^- > 0$. Dann ist $(D - \alpha I)$ eine positiv semidefinite Matrix, denn es besitzt nur Eigenwerte $\lambda_i - \lambda^- \geq 0$.

Wir erhalten schließlich:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) - \alpha||x||^2 = \langle Dx, x\rangle - \langle \alpha x, x\rangle = \langle (D - \alpha I)x, x\rangle \geq 0,$$

woraus dann folgt: $f(x) \geq \alpha||x||^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Lemma 0.3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Dann ist der symmetrische Teil von A positiv definit, d.h. $\langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x\rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Proof. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Nach Lemma 0.1 gilt, dass $\langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x\rangle = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle > 0$. $\square$

Eigentliche Beweis: $\implies$: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir zerlegen A in $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$. Also:

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle Ax, x\rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x\rangle + \langle \frac{1}{2}(A - A^T)x, x\rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x\rangle + \frac{1}{2}(\langle Ax, x\rangle - \langle x, Ax\rangle) \\ &= \langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x\rangle. \end{aligned}$$

Mit Lemma 0.3 ergibt sich, dass $\frac{1}{2}(A - A^T)$ positiv definit ist und mit Lemma 0.2 folgt, dass $f(x) \geq \alpha||x||^2$, was zu zeigen war.

$\impliedby$: Sei $f(x) \geq \alpha||x||^2$ für ein $\alpha > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $||x|| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $||x|| = 0 \iff x = 0$, ist $f(x) \geq \alpha||x||^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercise 1.3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Zu zeigen: $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ ist koerzitiv.

Proof. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $||x_n|| \to \infty$ für $n \to \infty$. Für beliebiges n erhalten wir

$$f(x_n) = \langle Ax_n, x_n\rangle + \langle b, x_n\rangle \geq \alpha ||x_n|| + \langle b, x_n\rangle.$$

Bilden wir den Grenzübergang, so ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha||x_n|| + \langle b, x_n\rangle) = \lim_{n\to\infty} \alpha||x_n|| = \infty.$$

□

Zu zeigen: $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ besitzt ein globales Minimum.

Wir beweisen das folgende Theorem.

Theorem 0.1

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzitive Funktion. Dann besitzt f ein globales Minimum.

Proof. Sei f koezitiv. Das heißt, es gibt ein $r > 0$, sodass für alle x mit $||x|| > r$ gilt:

$$f(x) \geq f(0).$$

Betrachte dann die kompakte Menge $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq r\}$. Wegen der Stetigkeit von f nimmt f auf $B_r(0)$ ein Minimum an, d.h. es gibt ein $x^* \in B_r(0)$ mit

$$\forall x \in B_r(0) : f(x^*) \leq f(x)$$

Insbesondere gilt auch $f(x) \geq f(0) \geq f(x^*)$ für alle x mit $||x|| > r$. Damit gibt es ein globales Minimum von f. □

Eigentliche Beweis: Nun ist f koerzitiv und stetig. Mit dem Theorem ergibt sich, dass f ein globales Minimum besitzt.

Exercise 1.4

Theorem 0.2

Sei X ein metrischer Raum. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wenn $epi(f)$ abgeschlossen ist, so ist f unterhalbstetig.

Proof. Sei $epi(f)$ abgeschlossen, sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $y < f(x)$, sodass $(x, y) \notin epi(f)$. Weil $epi(f)$ abgeschlossen ist, gibt es eine Umgebung $\epsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, sodass

$$(B_\epsilon(x) \times B_\delta(y)) \cap epi(f) = \emptyset.$$

Das bedeutet insbesondere auch

$$B_\epsilon(x) \times (-\infty, y - \delta) \cap epi(f) = \emptyset.$$

Also gilt: $f(z) \geq y - \delta$ für alle $z \in U_\epsilon(x)$. Jetzt kann man ein $\tilde{\delta} > 0$ so wählen, dass $f(x) - \tilde{\delta} = y - \delta$ gilt (denn $y < f(x)$). Damit erhalten wir $f(z) \geq f(x) - \tilde{\delta}$ für alle $z \in U_\epsilon(x)$. f ist damit unterhalbstetig auf ganz X, denn x war beliebig. □

Theorem 0.3: theorem

Eine unterhalbstetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ (X ist ein metrischer Raum) nimmt auf einem Kompaktum ein globales Minimum an.

Proof. Aus der Analysis Vorlesung wissen wir, dass für eine unterhalbstetige Funktion f gilt:

$$\forall x \in X : \liminf_{y\to x} f(y) \geq f(x).$$

Sei $m = \inf_{x\in X} f(x)$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f(x_n) \to m$. Wir wissen, dass X kompakt ist. Also gibt es nach Satz von Bolzano Weierstraß eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die wir mit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Natürlich gilt $f(y_n) \to m$ und bezeichne $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Es gilt

$$f(y) \leq \liminf_{n\to\infty} f(y_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(y_n) = m.$$

Nach Definition ist $m \geq f(y)$. Also $f(y) = m$. f besitzt ein globales Minimum. $\square$

zu zeigen: Ist f koerzitiv und $epi(f)$ abgeschlossen, so besitzt f mindestens ein globales Minimum.

Proof. f ist koerzitiv. Daher gibt es ein $r > 0$, sodass $f(0) < f(x)$ für alle $||x|| > r$. Dann sei $K = \{x : ||x|| \leq r\}$. Die Menge K ist kompakt. Wir verwenden das gerade bewiesene Theorem 0.3 und erhalten ein globales Minimum x^- auf K. Da aber $f(x) > f(0) \geq f(x^-)$ für alle $||x|| > r$, ist x^- ein globales Minimum auf ganz $\mathbb{R}^d$. $\square$

Exercise 1.5

Betrachte den reellen Folgenraum $\ell^2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ mit Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ für $x, y \in \ell^2$ und $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. ℓ^2 ist auch vollständig und somit ein Hilbertraum.

Sei $T : \ell^2 \to \ell^2, x \mapsto (\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der Operator T ist linear, beschränkt und positiv definit, was im folgenden gezeigt wird.

- **Linear**: Seien $x, y \in \ell^2$. Dann ist

  $$T(x+y) = (\frac{1}{n}(x_n+y_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n}x_n+\frac{1}{n}y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(\frac{1}{n}y_n)_{n\in\mathbb{N}} = Tx+Ty.$$

  Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \ell^2$. Dann ist $T\lambda x = (\frac{\lambda}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda Tx$.

- **Beschränktheit**: Wir wollen zeigen, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, sodass

  $$\forall x \in \ell^2 : ||Tx|| \leq \alpha||x||.$$

  Es ist $||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \langle x_n, x_n\rangle = ||x||^2$. Wir können also $\alpha = 1$ wählen.

- **Positiv definit**: Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist $\langle Tx, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n} > 0$.

- Der Operator bildet von ℓ^2 nach ℓ^2. Sei $x \in \ell^2$ und sei $y = Tx$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}|x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

Sei nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $x^{(n)} \in \ell^2$ definiert mit

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\langle Tx^{(n)}, x^{(n)}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(x_k^{(n)}\right)^2 = \frac{1}{n}$$

Es kann kein $\alpha > 0$ geben mit $\langle Tx, x\rangle \geq \alpha||x||^2$, da $\langle Tx^{(n)}, x^{(n)}\rangle \to 0$ für $n \to 0$ und $||x^{(n)}|| = 1$.