Aufgabe 34

Sei $A_0 \in L(E,F)$ sowie $x_0 \in E$. Überprüfe ev auf Differenzierbarkeit in (A_0, x_0). Sie ist differenzierbar, falls es eine lineare Funktion $D_{(A_0,x_0)}\text{ev} : L(E,F) \times E \to F$ gibt mit

$$\text{ev}(A_0 + H, x_0 + h) = \text{ev}(A_0, x_0) + D_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H,h) + R(H,h)$$

für $H \in L(E,F), h \in E$, sodass

$$\lim_{(H,h)\to(0,0)} \frac{||R(H,h)||_F}{||(H,h)||} = 0.$$

Berechne 1. Ableitung: Nun sind $H, A_0 \in L(E,F)$ lineare Funktionen und es gilt

$$\begin{aligned} \text{ev}(A_0 + H, x_0 + h) &= (A_0 + H)(x_0 + h) \\ &= A_0(x_0 + h) + H(x_0 + h) \\ &= \underbrace{A_0(x_0)}_{=\text{ev}(A_0,x_0)} + A_0(h) + H(x_0) + \underbrace{H(h)}_{=R(H,h)}. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\boxed{D_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H,h) = A_0(h) + H(x_0).} \tag{1}$$

Beweis der Linearität: Diese Funktion ist wirklich linear, denn für alle $(H,h),(H',h') \in L(E,F) \times E$ gilt:

$$\begin{aligned} D_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H + H', h + h') &= A_0(h + h') + (H + H')(x_0) \\ &= A_0(h) + H(x_0) + A_0(h') + H'(x_0) \\ &= D_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H,h) + D_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H',h'). \end{aligned}$$

Resttermabschätzung: Überprüfe, ob $R(H,h)$ schneller als linear gegen 0 läuft.

$$\lim_{(H,h)\to(0,0)} \frac{||R(H,h)||_F}{||(H,h)||} = \lim_{(H,h)\to(0,0)} \frac{||H(h)||_F}{||(H,h)||}.$$

Nun ist $||(H,h)||= \max\{||H||, ||h||_E\}$, wobei $||H||= \sup_{v\neq 0} \frac{||H(v)||_F}{||v||_E}$.

- 1.Fall: $||(H,h)||= ||h||_E$. Das bedeutet $||H||\leq ||h||_E$. Also

$$\sup_{v\neq 0} \frac{||H(v)||_F}{||v||_E} \leq ||h||_E. \tag{2}$$

  Wir erhalten

$$0 \leq \frac{||R(H,h)||_F}{||(H,h)||} = \frac{||H(h)||_F}{||h||_E} \overset{(2)}{\leq} ||h||_E.$$

  Wegen $||h||_E \to 0$ für $h \to 0$ ergibt sich nach dem Sandwichlemma für $(H,h) \to (0,0)$:

$$\frac{||R(H,h)||_F}{||(H,h)||} \to 0.$$

- 2.Fall: $||(H,h)||= ||H||= \sup_{v\neq 0} \frac{||H(v)||_F}{||v||_E} > ||h||_E$. Also

$$0 \leq \frac{||R(H,h)||_F}{||(H,h)||} = \frac{||H(h)||_F}{||H||} = \underbrace{\frac{||H(h)||_F}{||h||_E} \cdot \sup_{v\neq 0}\left(\frac{||H(v)||_F}{||v||_E}\right)^{-1}}_{\leq 1} \cdot ||h||_E \leq ||h||_E.$$

  Wegen $||h||_E \to 0$ für $h \to 0$ ergibt sich nach dem Sandwichlemma für $(H,h) \to (0,0)$:

$$\frac{||R(H,h)||_F}{||(H,h)||} \to 0.$$

Stetigkeit der 1. Ableitung: Die Ableitung ist stetig, denn nach Voraussetzung sind $A_0, H \in L(E,F)$ stetig und die Addition stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Berechne 2. Ableitung: Seien $A_0, H_1, H_2 \in L(E,F)$ und $x_0, h_1, h_2 \in E$. Berechne die zweite Ableitung in (A_0, x_0), d.h. $D^2_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H_2,h_2)(H_1,h_1)$. Betrachte (1) und definiere für ein festes $(Y,y) \in L(E,F) \times E$:

$$\varphi_{(Y,y)}(A_0,x_0) := A_0(y) + Y(x_0).$$

Dann ist

$$D^2_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H_2,h_2)(H_1,h_1) = D_{(A_0,x_0)}\varphi_{(H_2,h_2)}(H_1,h_1).$$

Wir müssen also nur $\varphi_{(H_2,h_2)}$ ableiten in (A_0,x_0). Es ist

$$\begin{aligned} \varphi_{(H_2,h_2)}(A_0 + H_1, x_0 + h_1) &= (A_0 + H_1)(h_2) + H_2(x_0 + h_1) \\ &= \underbrace{A_0(h_2) + H_2(x_0)}_{=\varphi_{(H_2,h_2)}(A_0,x_0)} + H_1(h_2) + H_2(h_1). \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet

$$\boxed{D^2_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H_2,h_2)(H_1,h_1) = H_1(h_2) + H_2(h_1) \quad \text{mit } R = 0.}$$

Linearität und Stetigkeit der 2. Ableitung: Sie ist linear und stetig, denn $H_1, H_2 \in L(E,F)$ und somit auch $H_1 + H_2 \in L(E,F)$.

Berechne 3. Ableitung: Definiere $\psi_{(Y,y)(Z,z)}(A,x) := D^2_{(A,x)}\text{ev}(Y,y)(Z,z)$ mit festem $Y, Z \in L(E,F)$, $y, z \in E$ und beliebigem $(A,x) \in L(E,F) \times E$. Für die dritte Ableitung ergibt sich also

$$D^3_{(A_0,x_0)}\text{ev}(H_3,h_3)(H_2,h_2)(H_1,h_1) = D_{(A_0,x_0)}\psi_{(H_3,h_3)(H_2,h_2)}(H_1,h_1).$$

Nun ist

$$\psi_{(H_3,h_3)(H_2,h_2)}(A_0,x_0) = H_1(h_2) + H_2(h_1) = \psi_{(H_3,h_3)(H_2,h_2)}(A_0 + H_1, x_0 + h_1).$$

Daher ist die dritte Ableitung gleich 0 mit Restterm 0.

$$D^3_{(A_0,x_0)}\mathrm{ev}(H_3,h_3)(H_2,h_2)(H_1,h_1)=0, \quad \text{mit } R(H_1,h_1)=0.$$

4. und höhere Ableitungen: Um $D^k\mathrm{ev}$ mit $k>3$ zu berechnen, muss $D^{k-1}\mathrm{ev}$ abgeleitet werden. Für $k=4$ ergibt sich, dass $D^4\mathrm{ev}=0$ wegen $D^3\mathrm{ev}=0$. Dann ist für $k\rightsquigarrow k+1$ auch $D^{k+1}\mathrm{ev}=0$ wegen $D^k\mathrm{ev}=0$. Also sind alle höheren Ableitungen der Stufe 4 oder höher gleich 0.

Aufgabe 35

Sei $f(x,y)=\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$ falls $(x,y)\neq(0,0)$. Ansonsten ist $f(0,0)=0$.

(i) Berechne die partiellen Ableitungen von f für $(x,y)\neq(0,0)$. Verwende hierfür die Quotientenregel für $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}&=\frac{3x^4y-y^3x^2+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{4x^2y^3+x^4y-y^5}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Sowie

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}&=\frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{-4x^3y^2-xy^4+x^5}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Beide partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x,y),\partial_2 f(x,y)$ sind auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ stetig nach Korollar 75. Berechne die partielle Ableitung im Punkt $(0,0)$.

$$\partial_1 f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})-f(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3\cdot0-t\cdot0^3}{t^2}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t^3}=0,$$
$$\partial_2 f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})-f(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{0^3\cdot t-0\cdot t^3}{t^2}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t^3}=0.$$

Untersuche die Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Nullpunkt. Sei $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n,y_n)\to(0,0)$, wobei $(x_n,y_n)\neq(0,0)$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty}\partial_1 f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x_n^2y_n^3+x_n^4y_n-y_n^5}{(x_n^2+y_n^2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4x_n^2y_n^3+x_n^4y_n-y_n^5}{x_n^4+2x_n^2y_n^2+y_n^4}$$

Da $x_n\to0$ und $y_n\to0$ für $n\to0$ (wegen komponentenweiser Konvergenz), können wir beide Folgen x_n und y_n durch eine Nullfolge c_n ersetzen, wobei $c_n\to0$ für $n\to0$.

$$\lim_{n\to\infty}\partial_1 f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4c_n^2c_n^3+c_n^4c_n-c_n^5}{c_n^4+2c_n^2c_n^2+c_n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4c_n^5+c_n^5-c_n^5}{4c_n^4}=\lim_{n\to\infty}c_n=0=\partial_1 f(0,0).$$

Analog mit $\partial_2 f$:

$$\lim_{n\to\infty}\partial_2 f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{-4c_n^2c_n^3-c_n^4c_n+c_n^5}{c_n^4+2c_n^2c_n^2+c_n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4c_n^5-c_n^5+c_n^5}{4c_n^4}=\lim_{n\to\infty}-c_n=0=\partial_2 f(0,0).$$

Demnach sind beide partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Nach Satz 129 ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Die Ableitung Df ist sogar stetig, da die partiellen Ableitungen stetig sind und die (einzige) Zeile der Jacobimatrix gerade dem Gradienten von f entspricht (wegen der Differenzierbarkeit, siehe Beispiel 127).

(ii) Aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir, dass

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{4x^2y^3+x^4y-y^5}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-4x^3y^2-xy^4+x^5}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix},\qquad \text{falls } x\neq0\wedge y\neq0.$$

Sonst ist $f'(0,0)=0$. Berechne nun mithilfe der Quotientenregel für $(x,y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}\partial_2\partial_1 f(x,y)&=\partial_2\frac{4x^2y^3+x^4y-y^5}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{(12x^2y^2+x^4-5y^4)(x^2+y^2)^2-4y(x^2+y^2)(4x^2y^3+x^4y-y^5)}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{(12x^2y^2+x^4-5y^4)(x^2+y^2)^2-(4x^2y+4y^3)(4x^2y^3+x^4y-y^5)}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{(12x^2y^2+x^4-5y^4)(x^2+y^2)^2-(16x^4y^4+4x^6y^2-4x^2y^6+16x^2y^6+4x^4y^4-4y^8)}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{(12x^2y^2+x^4-5y^4)(x^2+y^2)^2-16x^4y^4-4x^6y^2+4x^2y^6-16x^2y^6-4x^4y^4+4y^8}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{(12x^2y^2+x^4-5y^4)(x^2+y^2)^2-20x^4y^4-4x^6y^2-12x^2y^6+4y^8}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{(12x^2y^2+x^4-5y^4)(x^4+2x^2y^2+y^4)-20x^4y^4-4x^6y^2-12x^2y^6+4y^8}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{10x^6y^2-10x^2y^6+x^8-y^8}{(x^2+y^2)^4}\end{aligned}$$

Außerdem für $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_2 f(x,y)&=\partial_2\frac{-4x^3y^2-xy^4+x^5}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{(-12x^2y^2-y^4+5x^4)(x^2+y^2)^2-(-4x^3y^2-xy^4+x^5)(x^2+y^2)4x}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{5x^8-2x^6y^2-20x^4y^4-14x^2y^6-y^8-4x(-4x^3y^2-xy^4+x^5)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{5x^8-2x^6y^2-20x^4y^4-14x^2y^6-y^8-(-16x^4y^2-4x^2y^4+4x^6)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{x^8+10x^6y^2-10x^2y^6-y^8}{(x^2+y^2)^4}.\end{aligned}$$

Wir sehen: $\partial_1\partial_2 f(x,y) = \partial_2\partial_1 f(x,y)$ falls $(x,y) \neq (0,0)$. Beide höhere Ableitungen sind dort auch stetig wegen Korollar 75. Zeige nun die Existenz von $\partial_2\partial_1 f(0,0)$.

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t) - \partial_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-t^5}{t^4}}{t} = -1.$$

Ebenso ergibt sich

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0) - \partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5}{t^4}}{t} = 1.$$

Damit existieren $\partial_1\partial_2 f$ und $\partial_2\partial_1 f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$. Wir sehen, $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$. Das ist kein Widerspruch zu Schwarz, denn wir wissen noch gar nicht, ob f zweimal differenzierbar ist. Dazu muss noch gezeigt werden, dass die partiellen Ableitungen der Ordnung 2 in $(0,0)$ stetig sind. Wie sich zeigt, ist dies nicht der Fall und der Satz von Schwarz ist nicht anwendbar.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1\partial_2 f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 + 10x^6y^2 - 10x^2y^6 - y^8}{(x^2+y^2)^4}.$$

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann folgt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1\partial_2 f(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{c^8 + 10c^6c^2 - 10c^2c^6 - c^8}{(c^2+c^2)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^8 + 10c^8 - 10c^8 - c^8}{16c^8} = 0 \neq 1.$$

So ist $\partial_1\partial_2 f(x,y)$ nicht stetig in $(0,0)$.

Aufgabe 36

(i) *Zu zeigen:* μ ist stetig genau dann, wenn μ in 0 stetig ist.

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei μ stetig, so ist μ auch in 0 stetig.

$\Longrightarrow$: Für die andere Richtung, sei μ stetig in 0. Sei $\mathbf{E} := E_1 \times ... \times E_k$ und $\mathbf{p} := (p_1, ..., p_k) \in \mathbf{E}$. Wir wollen zeigen, dass μ in $\mathbf{p}$ stetig ist. Die Beweiskette sieht folgendermaßen aus:

$$\mu \text{ ist stetig in } 0 \implies \mu \text{ ist beschränkt} \implies \mu \text{ ist stetig in p.}$$

Zeige zuerst, dass μ beschränkt ist. Das heißt, es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, sodass $||\mu(\mathbf{x})||_F \leq C$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Es gilt:

$$\mu \text{ stetig in } 0 \implies \exists\delta > 0 : \mu(U_\delta(0) \cap \mathbf{E}) \subset U_1(0)$$

Sei $\mathbf{y} := (y_1, ..., y_k) \in U_\delta(0) \cap \mathbf{E}$. Dann gilt für dieses $\mathbf{y}$:

$$||y_i||_i < \delta \quad \forall i \in \{1, ..., k\}$$

□