Aufgabe 16

(i) Zu zeigen: $[\cdot,\cdot]$ ist bilinear.

Beweis. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $R, S, T \in \mathrm{LDer}(\mathcal{C}^\infty(U))$.

$$\begin{aligned}[R+S,T] = (R+S)\circ T - T\circ(R+S) = (R+S)(T) - \underbrace{T(R+S)}_{=T(R)+T(S)}& \\ = R(T) + S(T) - T(R) - T(S)& \\ = R(T) - T(R) + S(T) - T(S)& \\ = [R,T] + [S,T].&\end{aligned}$$

Wir haben insbesondere die Linearität von T ausgenutzt. Für die Lineaarität in der zweiten Komponente ähnlich:

$$\begin{aligned}[R,S+T] = R\circ(S+T) - (S+T)\circ R = R(S+T) - (S+T)(R)& \\ = R(S) + R(T) - S(R) - T(R)& \\ = R(S) - S(R) + R(T) - T(R)& \\ = [R,S] + [R,T].&\end{aligned}$$

Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $R, S \in \mathrm{LDer}(\mathcal{C}^\infty(U))$.

$$\begin{aligned}[\lambda R, \mu S] = (\lambda R)(\mu S) + (\mu S)(\lambda R) = \mu(\lambda R)(S) + \lambda(\mu S)(R)& \\ = \mu\lambda R(S) + \lambda\mu S(R)& \\ = \lambda\mu[R,S].&\end{aligned}$$

Auch hier wird wieder die Linearität von R, S verwendet ($R(\lambda S) = \lambda R(S)$). □

Sei $L \in \mathrm{LDer}(\mathcal{C}^\infty(U))$. Zu zeigen: $[L,L] = 0$.

Beweis.

$$[L,L] = L\circ L - L\circ L = 0.$$

□

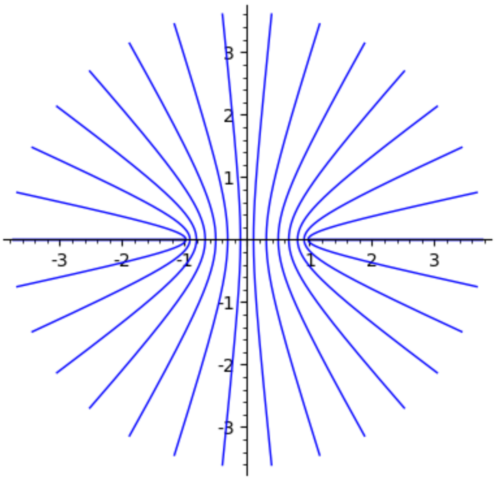
(ii) *Beweis.* Seien $R, S, T \in \mathrm{LDer}(\mathcal{C}^\infty(U))$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. An mehreren Stellen verwenden wir wieder die Linearität von R, S, T. Zum Beispiel: $R\circ(S+T) = R\circ S + R\circ T$.

$$\begin{aligned}&[[R,S],T] + [[S,T],R] + [[T,R],S] \\ &= [RS - SR, T] + [ST - TS, R] + [TR - RT, S] \\ &= (RS - SR)(T) - T(RS - SR) + (ST - TS)R - R(ST - TS) + (TR - RT)S - S(TR - RT) \\ &= RST - SRT - TRS + TSR + STR - TSR - RST + RTS + TRS - RTS - STR + SRT \\ &= RST - RST - SRT + SRT - TRS + TRS + TSR - TSR + STR - STR + RTS - RTS \\ &= 0.\end{aligned}$$

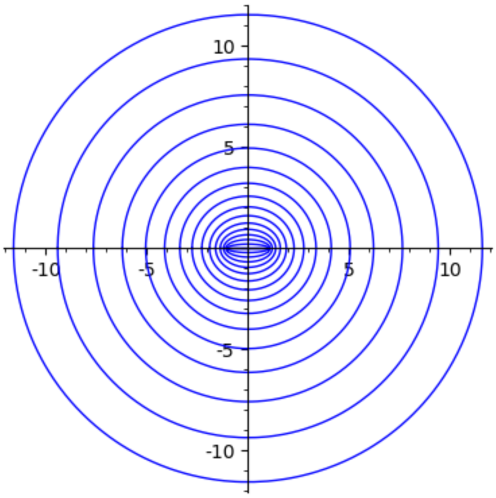
□

Aufgabe 18

(i) Für ein festes $v = \frac{\pi}{16}, \frac{2\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, ..., \pi$ ergibt sich mit $u \in [-2, 2]$:



Für ein festes $u = \frac{\pi}{16}, \frac{2\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, ..., \pi$ ergibt sich mit $v \in [-\pi, \pi]$:



Wir erhalten Hyperbeln und Ellipsen. Die Plots wurden mit SageMath erstellt und den entsprechenden Code findet man unter https://git.io/fpWyk.

(ii) Wir benutzen das Injektivitätskriterium aus Analysis II. Dazu berechnen wir $D_{(u,v)}\Phi$:

$$D_{(u,v)}\Phi = \begin{pmatrix} \sinh(u)\cos(v) & -\cosh(u)\sin(v) \\ \cosh(u)\sin(v) & \sinh(u)\cos(v) \end{pmatrix}$$

Wir suchen den maximalen Bereich $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sodass $(x,y)D_{(u,v)}\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$.

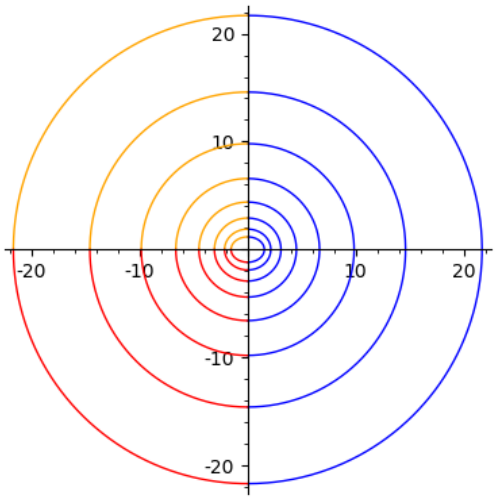
$$\begin{aligned}(x,y)\begin{pmatrix}\sinh(u)\cos(v) & -\cosh(u)\sin(v) \\ \cosh(u)\sin(v) & \sinh(u)\cos(v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x,y)\begin{pmatrix} x(\sinh(u)\cos(v)) - y(\cosh(u)\sin(v)) \\ x(\cosh(u)\sin(v)) + y(\sinh(u)\cos(v))\end{pmatrix} \\ &= x^2(\sinh(u)\cos(v)) + y^2(\sinh(u)\cos(v)) \\ &= \underbrace{(x^2+y^2)}_{>0}(\sinh(u)\cos(v)).\end{aligned}$$

Der Term $\sinh(u)\cos(v) = 0$, falls $u = 0$ oder $v = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nun ist $\sinh(u) > 0$ für alle $u > 0$ bzw. $\sinh(u) < 0$ für alle $u < 0$. Damit $\sinh(u)\cos(v) > 0$ gilt, muss $\cos(v) > 0$ für $u > 0$ sein oder $\cos(v) < 0$ für $u < 0$. Für $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos(v) > 0$. Das heißt, ein Intervall für das Φ injektiv ist, wäre

$$(u,v) \in (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Ebenso ist Φ auf $(0,\infty) \times (\frac{\pi}{2}, \pi)$ sowie $(0,\infty) \times (-\pi, \frac{\pi}{2})$ injektiv, da $D_{(u,v)}\Phi < 0$ nach Injektivitätskriterium (Aussage gilt ebenso für negativ definite Matrizen). Die Bilder dieser drei Intervalle sind disjunkt wie man anhand der Skizzen sieht (wir dürfen ja Skizzen verwenden). Das heißt, Φ ist maximal injektiv auf $(0,\infty) \times (-\pi, \pi)$.



Blau: $(-0.5\pi, 0.5\pi)$, Orange: $(0.5\pi, \pi)$, Rot: $(-\pi, -0.5\pi)$.

Es gilt $\Phi((0,\infty) \times (-\pi, \pi)) = \mathbb{R}^2$.

Nach dem Umkehrsatz ist Φ dort auf $(0,\infty) \times (-\pi, \pi)$ invertierbar, denn $D_{(u,v)}\Phi$ ist invertierbar und stetig. Die Determinante beträgt

$$(\sinh(u)\cos(v))^2 + (\sin(v)\cosh(u))^2.$$

Sie ist gleich 0 nur für $\sinh(u)\cos(v) = 0$ und somit nur für $u = 0$ oder $v = 0.5\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ und wenn $\sin(v)\cosh(u) = 0$ und somit nur für $v = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Also ist $\det D_{(u,v)}\Phi \neq 0$ für $u \neq 0$. Da Φ auf $(0,\infty) \times (-\pi, \pi)$ injektiv ist, gilt nach dem Umkehrsatz, dass die Inverse von Φ stetig differenzierbar ist.

(iii) Wir benutzen die Formel (1.4.3) im Skript von König. Dazu sei

$$G = (D_{(u,v)}\Phi)^T D_{(u,v)}\Phi = \begin{pmatrix} \sinh(u)\cos(v) & \cosh(u)\sin(v) \\ -\cosh(u)\sin(v) & \sinh(u)\cos(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh(u)\cos(v) & -\cosh(u)\sin(v) \\ \cosh(u)\sin(v) & \sinh(u)\cos(v) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v)\sinh^2(u) & 0 \\ 0 & \cosh^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v)\sinh^2(u) \end{pmatrix}$$
$$= \cosh^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v)\sinh^2(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$G^{-1} = \frac{1}{\cosh^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v)\sinh^2(u)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist $\Gamma \coloneqq \sqrt{\det G} = \cosh^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v)\sinh^2(u)$. Also ist

$$\Delta^\Phi = \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\Gamma}\Gamma\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\Gamma}\Gamma\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial v^2} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) = \frac{1}{\Gamma}\Delta.$$