**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 04.02.-08.02.2019

# 14. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(Produkt-$\sigma$-Algebren, Satz von Tonelli, Satz von Fubini)

---

## Themen der großen Übung am 28.01.

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum und $f, g\colon \Omega \to [0, \infty)$ messbare Funktionen. Wir werden folgende Konsequenzen aus dem Satz von Tonelli beweisen:

(i) Ist $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige monoton wachsende Abbildung, welche auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar ist und $\varphi(0) = 0$ erfüllt. Dann ist

$$\int \varphi \circ f \, \mathrm{d}\mu = \int_{(0,\infty)} \varphi'(t)\mu(f \geq t)\, \lambda(\mathrm{d}t). \tag{1}$$

Insbesondere erhalten wir für $\varphi(t) = t^p$ die Formel

$$\int f^p \, \mathrm{d}\mu = \int pt^{p-1}\mu(f \geq t)\, \lambda(\mathrm{d}t). \tag{2}$$

(ii) Erfüllen die Funktionen $f$ und $g$ die Bedingung $\mu(f > t) \leq \mu(g > t), \forall t \geq 0$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Dann betrachten wir Produkt-$\sigma$-Algebren auf (unendlichen) Folgenräumen. Für einen Messraum $(E, \mathcal{E})$ betrachten wir $E^{\mathbb{N}}$ mit der $\sigma$-Algebra $E^{\otimes \mathbb{N}}$. Als Beispiele werden wir die Messräume

- $(E := \{K, Z\}, \mathcal{P}(E))$,
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (wie üblich ist $\mathcal{B}$ die Borel-$\sigma$-Algebra)

betrachten und verschiedene Mengen als Elemente der Produkt-$\sigma$-Algebra identifizieren.

## Tutoriumsvorschläge

### 46. Aufgabe $\star$

Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i \in I$, Messräume und $\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i$ ein Messraum bezüglich der Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathcal{F} := \bigotimes_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to \Omega$, $x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$, von einem Messraum $(X, \mathcal{F}_X)$ genau dann $\mathcal{F}_X$-$\mathcal{F}$-messbar ist, wenn jede ihrer Komponenten $f_i\colon X \to \Omega_i$, $i \in I$, bereits $\mathcal{F}_X$- $\mathcal{F}_i$-messbar ist.

### 47. Aufgabe

Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i \in I$, Messräume mit $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{E}_i)$ für ein Mengensystem $\mathcal{E}_i$. Zeigen Sie, dass die von den $\mathcal{F}_i$ erzeugte Produkt-$\sigma$-Algebra auf $\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i$ mit der durch das Mengensystem

$$\mathcal{E} := \left\{ \prod_{i\in I} E_i \,\middle|\, E_i \neq \Omega_i \text{ für höchstens abzählbar viele } i \in I, E_i \in \mathcal{E}_i \text{ falls } E_i \neq \Omega_i \right\}$$

erzeugten $\sigma$-Algebra auf $\Omega$ übereinstimmt.

### 48. Aufgabe $\star$

Es sei $\Delta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 1, x, y, z \geq 0\}$. Bestimmen Sie mit dem Satz von Fubini der Wert von $\lambda(\Delta)$.

### 49. Aufgabe

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale.

(i) $\int_{[0,1]^2} x\mathrm{e}^{-xy} \,\mathrm{d}\lambda(x, y)$,

(ii) $\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} \sin(x + y) \,\mathrm{d}\lambda(x, y)$,

(iii) $\int f \,\mathrm{d}\lambda$ wobei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert ist als

$$f(x, y) := \begin{cases} x + y, & \text{falls } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Hausaufgaben

**Zur Erinnerung**: Das 14. Übungsblatt geht als letztes regulär in das Hausaufgabenkriterium (zweite Hälfte) ein. Das folgende 15. Blatt kann als Bonusblatt auf beide Hälften der Kriterien angerechnet werden.

### 52. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das $d$-fache Produkt der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ gleich der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}_d$ auf dem $\mathbb{R}^d$ ist.

### 53. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Nullfolgen und die der reellen konvergenten Folgen beide in der Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{N}}$ liegen.

## 54. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Es seien $\lambda$ das Lebesgue-Maß auf $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ und $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ eine Folge mit $1 = \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_{[0,1]} g_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$ und $\operatorname{supp} g_n \subseteq I_n := [\delta_{n+1}, \delta_n]$. Die Funktion $F\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y), \qquad x, y \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass $f$ sinnvoll definiert ist (d.h. nur endliche Werte annimmt) und Borel-messbar ist. Beweisen Sie dann, dass gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}y)\lambda(\mathrm{d}x) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}x)\lambda(\mathrm{d}y).$$

(ii) Es sei $\mu$ das Zählmaß auf $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ und $\Delta := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x = y\}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_\Delta(x,y)\,\mu(\mathrm{d}y)\lambda(\mathrm{d}x) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_\Delta(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}x).$$

## 55. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum und $f\colon \Omega \to [0,\infty)$ messbar. Man zeige, dass die folgenden Mengen abzählbar sind.

$$\begin{aligned} A &= \{t \in [0,\infty) \mid \mu(f = t) \neq 0\}, \\ B &= \{t \in [0,\infty) \mid \mu(f \geq g) \neq \mu(f > t)\}. \end{aligned}$$

Folgern Sie, dass wir in den Gleichheiten (1) und (2) $\mu(f \geq t)$ durch $\mu(f > t)$ ersetzen dürfen.

**Hinweis:** Betrachten Sie zuerst den Fall $\mu(\Omega) < \infty$.

Gesamtpunktzahl: 20