Hausaufgabenblatt 1

Ereignisse und diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Abgabe am Montag, dem 27. April 2020

Aufgabe 1.1 (4 Punkte). In einem Stromkreis befinden sich vier nummerierte Bauteile, die jedes für sich innerhalb eines gewissen Zeitraums intakt bleiben oder ausfallen können. Im letzteren Fall ist der Stromfluss durch das betreffende Bauteil unterbrochen. Mit $A_i, i \in \{1,2,3,4\}$, bezeichnen wir das Ereignis, dass das i-te Bauteil intakt bleibt, und mit A das Ereignis, dass der Stromfluss nicht unterbrochen wird. Drücken Sie für jedes der folgenden Schaltbilder das Ereignis A mit Hilfe geeigneter Mengenoperationen durch die Ereignisse A_1, A_2, A_3 und A_4 aus.

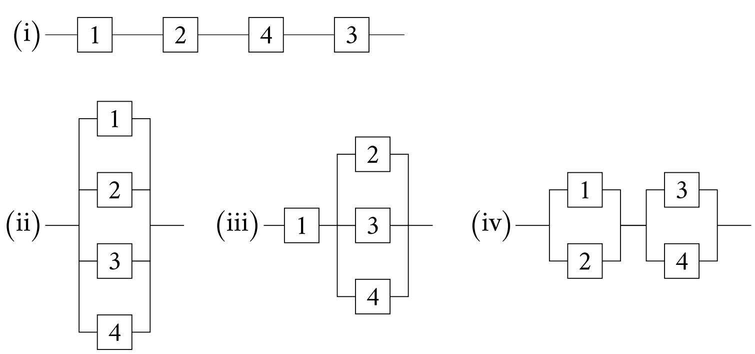

Abbildung 1: Schaltbilder zu den Stromkreisen

Aufgabe 1.2 (7 Punkte).

(i) Es sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{P}$ das von p induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß. Zeigen Sie die *Siebformel von Sylvester* (Vgl. Lem. 1.1.7): Für alle $n \in \mathbb{N}$ und Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right).$$

(ii) Folgern Sie nun mit Hilfe der eben bewiesenen Siebformel, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und allgemeine Mengen $B_1, \dots, B_n$ endlicher Kardinalität die Gleichheit

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} \left|B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_j}\right|$$

erfüllt ist. Hierbei bezeichnet $|\cdot|$ wie üblich die Kardinalität einer Menge.

(iii) Die Firma *NomNomFlakes* verkauft Müslipackungen, in denen stets genau eine von fünf möglichen Actionfiguren der letzten fünf Präsidenten $P_1, \dots, P_5$ der TU Berlin versteckt ist. Jede der Figuren kann – unabhängig von der gekauften Verpackung – mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ gefunden werden. Berechnen Sie mit Hilfe der Siebformel von Sylvester die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie bei einem Kauf von sechs Packungen Müsli die Figuren P_1, P_2 und P_3 erhalten.

Aufgabe 1.3 (5 Punkte). Es sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum sowie A und B beliebig gewählte Ereignisse. Zeigen Sie, dass das von p induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) *Monotonie*: Aus $A \subseteq B$ folgt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(ii) *σ-Subadditivität*: Für jede Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

(iii) *Stetigkeit von oben*: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Ereignissen und A ein weiteres Ereignis mit $A_n \downarrow A$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

Erinnerung: Wir schreiben $A_n \downarrow A$, falls $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gilt.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte). Klärchen und Karlchen treffen sich zum Spielen. Dabei verwenden die beiden zwei sechsseitige Würfel W_1 und W_2, von denen jede Seite jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit geworfen wird. Die Würfel sind wie folgt beschriftet:

$$W_1 = (6, 6, 2, 2, 2, 2) \quad W_2 = (5, 5, 5, 1, 1, 1).$$

Hierbei korrespondiert jeder Eintrag mit jeweils einer der sechs Seiten. Nun würfelt Klärchen einmal mit W_1 und Karlchen würfelt einmal mit W_2. Es gewinnt die Person mit der höheren Augenzahl.

(i) Zeigen Sie, dass Klärchen bessere Chancen auf den Sieg hat. Achten Sie darauf, in Ihrer Beweisführung einen geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum anzugeben.

(ii) Das pfiffige Karlchen erkennt, dass sein Würfel schlechtere Chancen auf den Sieg hat, und schlägt Klärchen folgendes vor:

> „Ich beschrifte nun einen weiteren sechsseitigen Würfel W_3, bei dem jede Seite mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Du darfst dir dann zuerst einen beliebigen der drei Würfel aussuchen und ich wähle mir einen der beiden anderen aus.“

Zeigen Sie, dass der Würfel W_3 so beschriftet werden kann, dass Karlchen in jedem Fall die besseren Gewinnchancen hat. Verwenden Sie auch hier wieder einen geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.