DGL I, 6. Übungsblatt

Duc Nguyen (395220), Jan Walczak (371626)

Aufgabe 1

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \ t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Matrix A.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^3 + 2 - (-1-\lambda) - 2(-1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Durch Hinsehen finden wir den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und erhalten nach Polynomdivision die quadratische Gleichung

$$-\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0,$$

aus welcher die Eigenwerte $\lambda_{2,3} = -2$ folgen.
Im nächsten Schritt bestimmen wir die Haupträume der zugehörigen Eigenwerte.

$$\begin{aligned} \ker(A - 1\lambda) &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \\ &= span(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}) \\ \ker(A + 2\lambda)^2 &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \\ &= span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Nun nutzen wir einen Satz aus der Vorlesung zur Darstellung der Lösung u bei nicht diagonalisierbarem A.

$$u_j(t) = \sum_{\nu=0}^{\nu_j - 1} \frac{1}{\nu!} \left(-(t - t_0)\right)^{\nu} e^{-\lambda_j (t - t_0)} \left(A - \lambda_j I\right)^{\nu} z_j,$$

wobei ν_j die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ_j bezeichnet und $z_j \in \ker(A - \lambda_j)^{\nu_j}$. Damit erhalten wir die Lösungen

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix} \\ u_2(t) &= e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - te^{2t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \\ u_3(t) &= e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - te^{2t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit die allgemeine Lösung

$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i u_i(t)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten c_i. Diese erhalten wir mithilfe der Anfangsbedingung.

$$u(0) = c_1\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Lösen des LGS ergibt $c_1 = 0 = c_3$ und $c_2 = 1$. Somit wird das AWP durch

$$u(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - te^{2t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

gelöst.

Aufgabe 2

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir betrachten die DGL

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0,$$

wobei f eine stetige Funktion ist, die nicht schneller als exponentiell wächst, d.h. es gibt Konstanten $M > 0$, $t_0 > 0$ und $a > 0$, so dass

$$|f(t)| \le Me^{at}, \quad \text{für } t \ge t_0. \tag{1}$$

Zu zeigen: Keine Lösung u dieser DGL wächst schneller als exponentiell, d.h. es gibt Konstanten $K > 0$ und $b > 0$, so dass

$$|u(t)| \le Ke^{bt}, \quad \text{für } t \ge t_0.$$

Beweis. Sei u eine Lösung von $\dot{u}(t) + Au(t) = f(t)$. Für $-A$ gibt es ein $c > 0$, sodass $|-Ax| \le c|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da A konstant und somit beschränkt ist. Für die Lösung u gilt, dass $\dot{u}(t) = -Au(t) + f(t)$. Integration ergibt $u(t) = \int_{t_0}^{t} -Au(\tau) + f(\tau)d\tau$. Wir normieren und erhalten für alle $t \ge t_0$:

$$\begin{aligned} |u(t)| = |\int_{t_0}^{t} -Au(\tau) + f(\tau)d\tau| \le \int_{t_0}^{t} |-Au(\tau)| + |f(\tau)|d\tau &\stackrel{(1)}{\le} \int_{t_0}^{t} (|-Au(\tau)| + Me^{a\tau})d\tau \\ &= \frac{M}{a}e^{at} + \text{const} + c\int_{t_0}^{t} |u(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall besagt für $\alpha(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$:

$$w(t) \le \alpha(t) + \beta\int_{t_0}^{t} w(\tau)d\tau \implies w(t) \le \alpha(t) + \beta\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\exp(\beta(t-\tau))d\tau.$$

Da $\frac{M}{a}e^{at} + \text{const} > 0$ (sonst wähle M und a, sodass $\frac{M}{a}e^{at} > -\text{const}$) und $c > 0$ gilt, erhalten wir

$$|u(t)| \leq \frac{M}{a}e^{at} + \text{const} + c\int_{t_0}^{t}(\frac{M}{a}e^{a\tau} + \text{const})e^{c(t-\tau)}d\tau = \frac{M}{a}e^{at} + \text{const} + \frac{cM}{a(a-c)}(e^{at+ct-ct} - e^{at_0+ct-ct_0}) - \frac{c\cdot\text{const}}{c}(e^{ct-ct} + e^{c(t-t_0)}).$$

Wir erhalten

$$|u(t)| \leq \frac{M}{a}e^{at} + \frac{cM}{a(a-c)}(e^{at} - \text{const}\cdot e^{ct}) - \text{const}\cdot(e^{ct}+1) \leq \frac{M(a-c)+cM}{a(a-c)}e^{at} = \frac{M}{a-c}e^{at}.$$

Dies zeigt die Behauptung für alle $t \geq t_0$. □

Aufgabe 3

Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

in $X = \mathcal{C}([a,b])$ mit $(Av)(x) := \int_0^1 (\xi - x)v(\xi)d\xi$ für $v \in X$.
Zu zeigen: Der zugehörige Lösungsoperator ist gegeben durch

$$S(t) = \exp(-tA) = id - \sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A + 12\left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)A^2. \tag{3}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $S(t)$ die Anfangsbedingung erfüllt:

$$S(0)u_0 = (id + 0 + 0)u_0 = id\ u_0 = u_0. \tag{4}$$

Nun zeigen wir, dass $S(t)$ auch die DGL löst. Dazu berechnen wir als erstes die Ableitung des Lösungsoperators

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\sqrt{12}\frac{1}{\sqrt{12}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A + 12\frac{1}{\sqrt{12}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A^2 && (5)\\ &= \sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A^2 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A && (6)\end{aligned}$$

Diese können wir in die DGL einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} S'(t)u_0 + AS(t)u_0 &= \left(\sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A^2 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A\right)u_0 && (7)\\ &\quad + A\left(id - \sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A + 12\left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)A^2\right)u_0 && (8)\\ &= \sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A^2u_0 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)Au_0 + Au_0 && (9)\\ &\quad - \sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A^2u_0 + 12A^3u_0 - 12\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A^3u_0 && (10)\\ &= \left(12 - 12\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)A^3u_0 + \left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)Au_0 && (11)\\ &= 12\left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)A^3u_0 + \left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)Au_0 && (12)\end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass

$$12A^3u_0 = -Au_0 \tag{13}$$

gilt. Dann folgt mit obiger Rechnung direkt

$$S'(t)u_0 + AS(t)u_0 = 0. \tag{14}$$

Aufgabe 4

Wir betrachten zu gegebenem $(t_0, u_0) \in [0,T] \times X$ die lineare Aufgabe

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in [0,T] \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{15}$$

mit $X = l^1$ und einer unendlichen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,\infty}$.

(i) Welche Bedingung muss an A gestellt werden, damit A wieder in l^1 abbildet und mithin die Aufgabe lösbar ist? Dazu betrachten wir für ein beliebiges $x \in l^1$

$$\begin{aligned} ||Ax||_{l^1} &= ||\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}x_i, \ldots\right)||_{l^1} && (16)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}x_i| && (17)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|\ |x_i| && (18)\\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|\ |x_i| && (19)\\ &\leq ||A||_{\infty}||x||_{l^1}. && (20) \end{aligned}$$

Da die Norm von x bereits endlich ist, muss auch die Norm von A endlich sein. Somit müssen wir fordern, dass A beschränkt ist.
Ein Beispiel für eine solche Matrix A ist eine Matrix, die Folgen aus l^1 als Zeileneinträge hat.

(ii) Es gelte $\sup_{i=1,\ldots,\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$. Ist das AWP im Raum

$$X = l^{\infty} := \{v = (v_i)_{i=1,\ldots,\infty} |\ \sup_{i=1,\ldots,\infty} |v_i| \leq \infty\} \tag{21}$$

lösbar?
Prüfen zunächst, ob A unter der gegebenen Voraussetzung wieder nach l^{∞} abbildet. Sei dazu $x \in l^{\infty}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||Ax||_{l^{\infty}} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}x_i| && (22)\\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|\ |x_i| && (23)\\ &\overset{x\in l^{\infty}}{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|\ ||x||_{l^{\infty}} < \infty. && (24) \end{aligned}$$

Zudem ist A wie in (i) beschränkt. Da $t_0 \in [0,T]$ und $u_0 \in l^{\infty}$, ist nach Vorlesung das AWP lösbar.

(iii)