Aufgabe 37

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit

$$\begin{aligned} \varphi(x) &> 0 \quad \text{für } -1 < z < 1, \\ \varphi(x) &= 0 \quad \text{für } z \leqslant -1 \text{ oder } z \geqslant 1. \end{aligned}$$

Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{x}\varphi(\frac{y}{x^2} - 2) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Teilaufgaben:

(i) *Zu zeigen:* f ist in $p = (\alpha, \beta)$ mit $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ beliebig oft differenzierbar.

Lösung: Wir zeigen nun, dass f beliebig oft in p differenzierbar ist. Da p nicht der Nullpunkt ist, hat die Funktion f die Form:

$$f(x,y) = \frac{1}{x}\varphi(\frac{y}{x^2} - 2).$$

Wir definieren nun zwei Hilfsfunktionen $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = \frac{1}{x} \quad \text{sowie} \quad h(x,y) = \frac{y}{x^2} - 2,$$

sodass f dargestellt werden kann als

$$f(x,y) = g(x,y) \cdot \varphi(h(x,y)).$$

Wir leiten f mithilfe der Produktregel ab

$$D_{(\alpha,\beta)}f = D_{(\alpha,\beta)}g \cdot (\phi \circ h) + g \cdot D_{(\alpha,\beta)}(\varphi \circ h).$$

Berechne:

- Es ist $\underline{\underline{D_{(\alpha,\beta)}g(x,y) = -\frac{x}{\alpha^2}}}$, wie man mithilfe der partiellen Ableitung herausbekommt:

$$\partial_1 g(\alpha,\beta) = -\frac{1}{\alpha^2} \quad \text{und} \quad \partial_2 g(\alpha,\beta) = 0.$$

  Damit sieht die Jacobimatrix so aus

$$J(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & 0 \end{pmatrix} \implies D_{(\alpha,\beta)}g(x,y) = J(\alpha,\beta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

  Da jede partielle Ableitung existiert und auch stetig ist in p, ist g differenzierbar und hat die eingangserwähnte Gestalt.

- Um den zweiten Summanden $\varphi \circ h$ abzuleiten, benutzen wir die Kettenregel:

$$D_{(\alpha,\beta)}(\varphi \circ h) = (D_{h(\alpha,\beta)}\varphi) \circ (D_{(\alpha,\beta)}h).$$

Mithilfe partieller Ableitungen bestimmen wir das Differential von h.

$$\partial_1 h(\alpha,\beta) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2\right) = -\frac{2\beta}{\alpha^3} \quad \text{und} \quad \partial_2 h(\alpha,\beta) = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2\right) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Es ergibt sich

$$\underline{\underline{D_{(\alpha,\beta)}h(x,y) = -\frac{2\beta}{\alpha^3}x + \frac{1}{\alpha^2}y}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{J_h(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -\frac{2\beta}{\alpha^3} & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix}}}.$$

Nun berechne $D_{h(\alpha,\beta)}\varphi$. Da φ *überall* differenzierbar ist, muss nur überprüft werden, ob $h(\alpha,\beta)$ reell ist. Das ist der Fall, da $\alpha \neq 0$. Also

$$J_\varphi(h(\alpha,\beta)) = \begin{pmatrix} \varphi'(h(\alpha,\beta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2) \end{pmatrix}$$

Wir fassen jetzt alles zusammen und wenden die Kettenregel an

$$\begin{aligned}
D_{(\alpha,\beta)}(\varphi \circ h)(x,y) &= (D_{h(\alpha,\beta)}\varphi) \circ (D_{(\alpha,\beta)}h)(x,y) \\
&= \begin{pmatrix} \varphi'(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2\beta}{\alpha^3} & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} (x,y)^T \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2\beta}{\alpha^3}\varphi'(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2) & \frac{1}{\alpha^2}\varphi'(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2) \end{pmatrix} (x,y)^T \\
&= -\frac{2\beta}{\alpha^3}\varphi'(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2)x + \frac{1}{\alpha^2}\varphi'(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2)y \\
&= \varphi'(\frac{\beta}{\alpha^2} - 2)\left(-\frac{2\beta}{\alpha^3}x + \frac{1}{\alpha^2}y\right) \\
&= \varphi'(h(\alpha,\beta)) \cdot D_{(\alpha,\beta)}h(x,y) \\
&= \underline{\underline{(\varphi' \circ h)(\alpha,\beta) \cdot D_{(\alpha,\beta)}h(x,y)}}.
\end{aligned}$$

Wieder zurück zum Differential von f.

$$\begin{aligned}
D_{(\alpha,\beta)}f(x,y) &= (D_{(\alpha,\beta)}g \cdot (\phi \circ h) + g \cdot D_{(\alpha,\beta)}(\varphi \circ h))(x,y) \\
&= D_{(\alpha,\beta)}g(x)\varphi(h(x)) + g(x)(\varphi'(h(\alpha,\beta))D_{(\alpha,\beta)}h(x,y) =: \psi_{(x,y)}(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$D^2_{(\alpha,\beta)}f(a,b)(x,y) = D_{(\alpha,\beta)}\psi_{(a,b)}(x,y), \quad a,b \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

Aufgabe 38

Berechne das Taylor-Swift Polynom dritter Ordnung von $f(x,y) := e^x \sin(y)$ im Entwicklungspunkt (p_x, p_y). Dieses Polynom hat die Form:

$$\begin{aligned}T_3(x,y) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} D_p^k f \underbrace{((x-p_x, y-p_y), ..., (x-p_x, y-p_y))}_{\text{k-mal}} \\ &= f(p_x,p_y) + D_{(p_x,p_y)} f(x-p_x, y-p_y) + \frac{1}{2} D^2_{(p_x,p_y)} f((x-p_x),(x-p_x)) \\ &\quad + \frac{1}{6} D^3_{(p_x,p_y)} f((x-p_x),(x-p_x),(x-p_x)).\end{aligned}$$

Wir entwicklen eine Formel dieses Taylor-Swift Polynoms dritten Grades mithilfe der partiellen Ableitungen. Wir setzen voraus, dass f dreimal differenzierbar ist.

Behauptung: Es gilt für zweidimensionale reelle Vektoren $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und Entwicklungspunkt $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{aligned}T_3(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} D_{\mathbf{p}}^k f \underbrace{(\mathbf{x}-\mathbf{p}, ..., \mathbf{x}-\mathbf{p})}_{\text{k-mal}} \\ &= f(x_0,y_0) + \partial_1 f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0) \cdot (y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\partial_1\partial_1 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \partial_2\partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\Big) \\ &\quad + \frac{1}{6}\Big(\partial_1\partial_1\partial_1 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^3 + 3\partial_1\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2(y-y_0) + 3\partial_1\partial_2\partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)^2 \\ &\qquad + \partial_2\partial_2\partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^3\Big)\end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen nun die oben erwähnte Formel.

- Berechne $D_{\mathbf{p}} f$ mithilfe der Jacobimatrix. Diese Matrix lautet dann

$$J_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0,y_0) & \partial_2 f(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

  Für das Differential ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}D_{(x_0,y_0)} f(x,y) &= f'(x_0,y_0)\cdot(x,y) \\ &= J_f(x_0,y_0)\cdot(x,y)^T \\ &= \partial_1 f(x_0,y_0)\cdot x + \partial_2 f(x_0,y_0)\cdot y.\end{aligned}$$

  Damit ist

$$D_{(x_0,y_0)} f(x-x_0, y-y_0) = \partial_1 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

- Berechne $D^2_{\mathbf{p}} f$. Definiere eine Hilfsfunktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_{(x,y)}(x_0,y_0) = \partial_1 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0), \text{ wobei } x,y \in \mathbb{R} \text{ \underline{fest} sind.}$$

Jetzt ist $D^2_{(x_0,y_0)}f((x-x_0, y-y_0),(x,y)) = D_{(x_0,y_0)}\varphi_{(x,y)}(x,y)$. Wir müssen jetzt also nur $\varphi_{(x,y)}$ in (x_0,y_0) ableiten. Dazu bilden wir die Jacobimatrix.

$$J_{\varphi_{(x,y)}}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} w \end{pmatrix}.$$

□