Aufgabe 7

Bezeichne $U_{d_0,\epsilon}(a) := \{x \in X : d_0(x,a) < \epsilon\}$ die Umgebung bezüglich einer beliebigen Metrik $d_0 : X \times X \to \mathbb{R}$.

Lemmata:

(L1) Für alle $x, y \in X$ gilt
$$d(x,y) \geq d_f(x,y).$$

Beweis. Seien $x, y \in X$.
$$d(x,y) \geq d_f(x,y) \iff d(x,y) \geq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \iff d^2(x,y) \geq 0$$

Wegen $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ folgt die Behauptung. □

(L2) Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt
$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{y}{y+1} \iff x \leq y.$$

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $\frac{x}{x+1} \leq \frac{y}{y+1} \iff x(y+1) \leq y(x+1) \iff x \leq y$. □

(L3) Seien d_+, d_- Metriken in X mit $d_+(x,y) \geq d_-(x,y)$ für alle $x, y \in X$. Sei $p \in X$. Für alle $\epsilon > 0$ gilt
$$U_{d_+,\epsilon}(p) \subset U_{d_-,\epsilon}(p).$$

Beweis. Sei $x \in U_{d_+,\epsilon}(p)$. Es gilt $d_+(x,p) < \epsilon$. Nach Voraussetzung folgt $d_-(x,p) \leq d_+(x,p) < \epsilon$ und somit $x \in U_{d_-,\epsilon}(p)$. □

(i) **Behauptung:** Falls eine Menge offen bezüglich d ist, so auch bezüglich d_f

Gegeben: metrischer Raum (X,d), offene Menge $A \subset X$ bezüglich der Metrik d, beliebiges $a \in A$

Gesucht: ein $\epsilon > 0$, sodass $U_{d_f,\epsilon}(a) \subset A$

Beweis. A ist offen. Dann ist A eine Umgebung für jedes seiner Punkte bezüglich d. Für den Punkt a muss es demnach ein $\tilde{\epsilon} > 0$ mit $U_{d,\tilde{\epsilon}}(a) \subset A$ geben. Wähle $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{1+\tilde{\epsilon}}$. Es gilt für alle $x \in X$, dass
$$x \in U_{d_f,\epsilon}(a) \iff d_f(x,a) = \frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} < \epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{1+\tilde{\epsilon}} \underset{(L2)}{\iff} d(x,a) < \tilde{\epsilon} \iff x \in U_{d,\tilde{\epsilon}}.$$

Also $U_{d_f,\epsilon}(a) = U_{d,\epsilon}(a) \subset A$. □

Behauptung: Falls eine Menge offen bezüglich d_f ist, so auch bezüglich d

Gegeben: metrischer Raum (X,d), offene Menge $A \subset X$ bezüglich der Metrik d_f, beliebiges $a \in A$

Gesucht: ein $\epsilon > 0$, sodass $U_{d,\epsilon}(a) \subset A$

Beweis. A ist offen. Also gibt es ein $\tilde{\epsilon} > 0$ mit $U_{d_f,\tilde{\epsilon}}(a) \subset A$. Wegen (L1) ist $d \geq d_f$. Nach (L3) gilt $U_{d,\tilde{\epsilon}}(a) \subset U_{d_f,\tilde{\epsilon}}(a) \subset A$. Wähle also $\epsilon = \tilde{\epsilon}$. □

(ii) Sei $\Xi := \{A \subset X : A \text{ ist beschränkt bezüglich } d_f.\}$.

Gesucht: Ξ (Menge aller beschränkten Teilmengen in (X, d_f))

Beweis. Falls $X = \emptyset$, so ist $\Xi = \{\emptyset\}$, da $\emptyset$ beschränkt ist. Andernfalls, betrachte $X \neq \emptyset$. Nehme ein beliebiges $x \in X$. Für jedes $A \subset X$ gilt
$$\forall a \in A : d_f(x,a) = \frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} < 1.$$

Damit ist $\Xi = \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge von X). □

(iii) Betrachte $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ und die Teilmenge $M \subset X$ mit $M = X$. Aus (ii) wissen wir, dass M beschränkt in d_f ist (wegen $M \subset X$). In (X,d) ist die Teilmenge $M = X = \mathbb{R}$ offensichtlich nicht beschränkt (sollen wir das wirklich noch zeigen? hier eine Beweisskizze: für jede Schranke $S \in \mathbb{R}$ für ein $x \in X$, findet man einen Punkt $m = x + S + 1 \in M$, sodass $d(m,x) = S + 1 > S$).

Aufgabe 8

(i) Die Reihe $D(f,g)$ konvergiert für alle $f, g \in \mathcal{C}$. Denn wegen $\frac{x}{1+x} < 1$ für alle $x \geq 0$ und der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k = 2$ gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(f,g)}{2^n(1+D_n(f,g))} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \tag{1}$$

Symmetrie von D gilt auch, weil
$$D_n(f,g) = \sup|f(x)-g(x)| = \sup|g(x)-f(x)| = D_n(g,f).$$

$D(f,g) \geq 0$ für alle $f, g \in \mathcal{C}$, da $D_n(f,g) \geq 0$ (siehe Betrag). Falls $f = g$, so ist
$$D_n(f,g) = \sup|f(x)-g(x)| = 0 \implies D(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(f,g)}{2^n(1+D_n(f,g))} = 0.$$

Falls $D(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(f,g)}{2^n(1+D_n(f,g))} = 0$, so muss wegen $D_n(f,g) \geq 0$ gelten, dass $D_n(f,g) = \sup_{-n \leq x \leq n} |f(x)-g(x)| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also
$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) \implies f = g.$$

Überprüfe nun ob, $D(f,g) \leq D(f,h) + D(h,g)$. $D_n(f,g)$ ist eine Metrik (siehe Satz 11), denn f und g sind stetig auf einem beschränkten Intervall $[-n,n]$ und somit stellen f und g beschränkte Funktionen dar. Also gilt für alle $f, g, h \in \mathcal{C}$
$$D_n(f,g) \leq D_n(f,h) + D_n(h,g). \tag{2}$$

Aus der Monotonie von $\frac{x}{1+x}$ ergibt sich für alle $f, g, h \in \mathcal{C}$
$$\begin{aligned}
D(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{D_n(f,g)}{1+D_n(f,g)} &\underset{(2)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(f,h)+D_n(h,g)}{2^n(1+D_n(f,h)+D_n(h,g))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(f,h)}{2^n(1+D_n(f,h)+\underbrace{D_n(h,g)}_{\geq 0})} + \frac{D_n(h,g)}{2^n(1+\underbrace{D_n(f,h)}_{\geq 0}+D_n(h,g))} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(f,h)}{2^n(1+D_n(f,h))} + \frac{D_n(h,g)}{2^n(1+D_n(h,g))} \\
&= D(f,h) + D(h,g).
\end{aligned}$$

D ist eine Metrik.

(ii) Falls $\epsilon \geq 1$, so ist jede Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ auch in $B_\epsilon(0)$ enthalten wegen Gleichung (1) aus Aufgabe 8(i). Man kann $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\delta > 0$ beliebig wählen.

Falls $\epsilon < 1$, so definiere $\xi(x) := \frac{\epsilon - 2^{-x}}{1-2^{-x}}$. Damit $\xi(x) > 0$ ist, muss der Zähler größer als null sein. Das ist der Fall, wenn

$$\epsilon > 0.5^x \iff x > \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}}$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$, sodass $k > \max(0, \frac{\ln \epsilon}{\ln 0.5})$ und $\delta = \frac{\xi(k)}{1-\xi(k)}$. Insbesondere ist δ größer null, da das k so ausgewählt wurde, dass der Zähler von δ positiv ist. Der Nenner wird genau dann null oder negativ, wenn

$$1 - \xi(x) \leq 0 \iff 1 \leq \frac{\epsilon - 2^{-x}}{1-2^{-x}} \iff \epsilon \geq 1.$$

Wegen $k > \frac{\ln \epsilon}{\ln 0.5}$ und $\epsilon < 1$ gilt $\delta > 0$. Sei $\Gamma := \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : D_k(0, g) < \delta\}$. Wegen $\sum_{i=1}^{j} 0.5^i = \frac{1-0.5^{j+1}}{0.5} - 1$ gilt nun für jedes $f \in \Gamma$, dass

$$\begin{aligned}
D(0,f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{D_n(0,f)}{1+D_n(0,f)} &\leq \frac{\overbrace{D_k(0,f)}^{<\delta}}{\underbrace{1+D_k(0,f)}_{<1+\delta}} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} 2^{-n}}_{=\frac{1-0.5^{k+1}}{0.5}-1} + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}}_{=1-\frac{1-0.5^{k+1}}{0.5}+1} \\
&< \frac{\xi(k)(1-\xi(k))^{-1}}{1+\xi(k)(1-\xi(k))^{-1}}(1-2^{-k}) + 2^{-k} \\
&= \xi(k)(1-2^{-k}) + 2^{-k} \\
&= \frac{\epsilon - 2^{-k}}{1-2^{-k}}(1-2^{-k}) + 2^{-k} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Also $D(0,f) < \epsilon$ und $f \in B_\epsilon(0)$.

(iii) Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} \pi, & \text{falls } x \in [-k, k] \\ x + \pi - k, & \text{falls } x \in (k, \infty) \\ x + \pi + k & \text{falls } x \in (-\infty, -k) \end{cases}$$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \pi$. Die Funktion g ist stetig und auch f, da

$$\lim_{x \nearrow k} f_k(x) = \pi = \lim_{x \searrow k} x + \pi - k = \lim_{x \searrow k} f_k(x),$$
$$\lim_{x \searrow -k} f_k(x) = \pi = \lim_{x \nearrow -k} x + \pi + k = \lim_{x \nearrow -k} f_k(x).$$

Nun ist $f_k(x) - g(x) = 0$ für alle $x \in [-k, k]$. Also $D_n(f_k, g) = 0$ für $n = 1, ..., k$. Also ist $D^k(f_k, g) = 0$, obwohl $f \neq g$.