

# Skript Analysis

Vorlesungsausarbeitung von Christian Mehl

12. Oktober 2019

Diese Vorlesungsausarbeitung wurde in einigen Teilen von den Vorlesungsausarbeitungen Analysis I–II bzw. Analysis I–III von

- Dirk Ferus (TU Berlin),
- Günter Richter (U Bielefeld),
- Fredi Tröltzsch (TU Berlin),
- Harry Yserentant (TU Berlin),

beeinflusst sowie in anderen Teilen von den folgenden Büchern:

- Otto Forster: Analysis 1, 11. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- Otto Forster: Analysis 2, 10. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- Otto Forster: Analysis 3, 7. Auflage, Springer Spektrum, 2012.
- Martin Barner, Friedrich Flohr: Analysis I, 4. Auflage, De Gruyter, 2000.
- Martin Barner, Friedrich Flohr: Analysis II, 3. Auflage, De Gruyter, 1996.

Dieses Skript ist kein Lehrbuch, sondern ein ergänzendes Hilfsmittel zur Nachbereitung der Vorlesung und ersetzt nicht den Vorlesungsbesuch. Der Download dieses Skriptes ist nur für die eigene Nacharbeit der Vorlesung gestattet. Eine unerlaubte Vervielfältigung oder Verbreitung des gesamten Skriptes oder Teilen davon ist nicht gestattet. Dies gilt insbesondere für die Verbreitung in irgendeiner elektronischer Form.

Ich bedanke mich bei Anton Kolleck für das sorgfältige Korrekturlesen des Skripts und für viele hilfreiche Kommentare, die zur Verbesserung der Darstellung geführt haben. Weiter bedanke ich mich bei all den Studierenden (darunter insbesondere Tobias Paul und Oliver Hager), die mir zahlreiche Fehler in früheren Versionen des Skripts mitgeteilt haben, die in der vorliegenden Version korrigiert werden konnten. Trotzdem ist es jedoch nicht auszuschließen bzw. sogar höchstwahrscheinlich, dass dieses Skript immer noch viele Druck- und auch inhaltliche Fehler enthält. Sollten Sie solche finden bin ich für eine Benachrichtigung per Email dankbar ([mehl@math.tu-berlin.de](mailto:mehl@math.tu-berlin.de)).

Christian Mehl, 12. Oktober 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Analysis I</b>	<b>7</b>
<b>0</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>9</b>
0.1	Aussagenlogik . . . . .	9
0.2	Mengen . . . . .	14
0.3	Abbildungen . . . . .	20
0.4	Relationen . . . . .	26
<b>1</b>	<b>Axiomatik der reellen Zahlen</b>	<b>29</b>
1.1	Körperaxiome . . . . .	29
1.2	Anordnungsaxiome . . . . .	34
1.3	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion . . . . .	37
1.4	Das Vollständigkeitsaxiom . . . . .	46
<b>2</b>	<b>Zahlenfolgen</b>	<b>53</b>
2.1	Konvergenz von Zahlenfolgen . . . . .	55
2.2	Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen . . . . .	59
2.3	Cauchy-Folgen und Vollständigkeit . . . . .	64
2.4	Limes superior und Limes inferior . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Reihen</b>	<b>71</b>
3.1	Konvergenz von Reihen . . . . .	72
3.2	Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	76
3.3	Die Exponentialreihe . . . . .	86
3.4	$b$ -adische Brüche . . . . .	91
3.5	Abzählbarkeit . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>99</b>
4.1	Funktionen . . . . .	99
4.2	Stetige Funktionen . . . . .	101
4.3	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	104
4.4	Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen . . . . .	107
4.5	Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . .	113

<b>5</b>	<b>Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen</b>	<b>119</b>
5.1	Komplexe Zahlen . . . . .	119
5.2	Sinus und Cosinus . . . . .	126
5.3	Polarform komplexer Zahlen . . . . .	133
<b>6</b>	<b>Differentiation</b>	<b>137</b>
6.1	Differenzierbarkeit . . . . .	138
6.2	Differentiationsregeln . . . . .	145
6.3	Lokale Extrema und der Mittelwertsatz . . . . .	151
6.4	Höhere Ableitungen und Konvexität . . . . .	160
6.5	Die Taylor-Formel . . . . .	163
<b>7</b>	<b>Integration</b>	<b>169</b>
7.1	Treppenfunktionen . . . . .	170
7.2	Das Riemann-Integral . . . . .	173
7.3	Integrierbare Funktionen . . . . .	177
7.4	Integration und Differentiation . . . . .	179
7.5	Integrationsregeln . . . . .	183
7.6	Uneigentliche Integrale . . . . .	187
<b>8</b>	<b>Konvergenz von Funktionenfolgen</b>	<b>195</b>
8.1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz . . . . .	197
8.2	Potenzreihen . . . . .	203
8.3	Analytische Funktionen . . . . .	211
<b>II</b>	<b>Analysis II</b>	<b>215</b>
<b>1</b>	<b>Topologische Grundlagen</b>	<b>217</b>
1.1	Normen und Metriken . . . . .	218
1.2	Offen- und Abgeschlossenheit . . . . .	223
1.3	Konvergenz in metrischen Räumen . . . . .	231
1.4	Stetigkeit . . . . .	239
1.5	Kompaktheit . . . . .	243
1.6	Zusammenhang . . . . .	252
1.7	Normierte Räume und lineare Abbildungen . . . . .	256
<b>2</b>	<b>Mehrdimensionale Differentialrechnung</b>	<b>263</b>
2.1	Richtungsableitung und Differenzierbarkeit . . . . .	265
2.2	Partielle Differenzierbarkeit . . . . .	272
2.3	Rechenregeln der Differentiation . . . . .	277
2.4	Der Schrankensatz . . . . .	285
2.5	Höhere Ableitungen . . . . .	289
2.6	Satz von Taylor und lokale Extrema . . . . .	298

2.7	Differentialoperatoren der klassischen Vektoranalysis . . . . .	307
<b>3</b>	<b>Die großen Sätze und Anwendungen</b>	<b>313</b>
3.1	Der Umkehrsatz . . . . .	314
3.2	Implizite Funktionen . . . . .	321
3.3	Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	326
3.4	Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen . . . . .	335
<b>4</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>341</b>
4.1	Elementare Lösungsmethoden . . . . .	343
4.2	Der Satz von Picard-Lindelöf . . . . .	345
4.3	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	350
4.4	Lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten . . . . .	358
<b>5</b>	<b>Fourieranalysis</b>	<b>367</b>
5.1	Fourierpolynome . . . . .	368
5.2	Fourierreihen in Hilberträumen . . . . .	375
5.3	Regelfunktionen . . . . .	380
5.4	Punktweise Konvergenz von Fourierreihen . . . . .	383
5.5	Der Satz von Fejér . . . . .	387
<b>III</b>	<b>Analysis III</b>	<b>393</b>
<b>1</b>	<b>Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>399</b>
1.1	Ringe, $\sigma$ -Algebren, Inhalte und Maße . . . . .	399
1.2	Existenz von Maßen nach Carathéodory . . . . .	405
1.3	Eindeutigkeit von Maßen . . . . .	414
1.4	Messbare Funktionen . . . . .	418
1.5	Das Lebesgue-Integral . . . . .	423
1.6	Die großen Konvergenzsätze . . . . .	432
1.7	Produktmaße . . . . .	437
1.8	Die $L_p(\mu)$ -Räume . . . . .	446
<b>2</b>	<b>Der Transformationssatz</b>	<b>451</b>
2.1	Verzerrung Borelscher Mengen . . . . .	452
2.2	Der Transformationssatz . . . . .	463
2.3	Der verfeinerte Transformationssatz . . . . .	467
<b>3</b>	<b>Die großen Integralsätze I</b>	<b>471</b>
3.1	Die Gramsche Determinante . . . . .	472
3.2	Integration über Untermannigfaltigkeiten I . . . . .	477
3.3	Atlanten und Zerlegungen der Eins . . . . .	480
3.4	Integration über Untermannigfaltigkeiten II . . . . .	485

3.5	Kompakta mit glattem Rand . . . . .	488
3.6	Der Integralsatz von Gauß . . . . .	493
<b>4</b>	<b>Die großen Integralsätze II</b>	<b>503</b>
4.1	Das vektorielle Kurvenintegral . . . . .	505
4.2	Existenz von Stammfunktionen . . . . .	510
4.3	Alternierende Multilinearformen . . . . .	517
4.4	Differentialformen . . . . .	524
4.5	Rücktransport von Differentialformen . . . . .	534
4.6	Integration von Differentialformen . . . . .	538
4.7	Der Integralsatz von Stokes . . . . .	545
<b>5</b>	<b>Grundlagen der komplexen Analysis</b>	<b>551</b>
5.1	Holomorphe Funktionen . . . . .	551
5.2	Der Integralsatz von Cauchy und Anwendungen . . . . .	555

# Teil I

## Analysis I





# Kapitel 0

## Grundlagen

Bevor wir mit dem eigentlichen Thema *Analysis* anfangen, wollen wir einige Grundlagen bereitstellen. Diese werden üblicherweise im Kurs *Lineare Algebra* gelehrt, wir stellen sie hier aber der Vollständigkeit halber und zwecks zukünftiger Referenzen zusammen.

### 0.1 Aussagenlogik

Die gesamte Mathematik ist im Prinzip eine Sammlung von *Aussagen*, weshalb es genau dieser Begriff ist, den wir als erstes definieren wollen.

**Definition 0.1** *Eine Aussage ist ein Ausdruck, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ ( $w$ ) oder „falsch“ ( $f$ ) zugeordnet werden kann.*

Im Grunde ist schon diese „Definition“ an dieser Stelle ein bisschen problematisch, denn was genau ist ein „Ausdruck“, was sind „Wahrheitswerte“, was heißt „zuordnen“ usw. Wir wollen aber nicht tiefer in das mathematische Teilgebiet der *Logik* eindringen und begnügen uns mit unserem alltäglichen Verständnis der oben und weiter unten genannten, nicht näher definierten Begriffe.

Im Folgenden werden wir Großbuchstaben wie z.B.  $A$  als „Variablen“ oder „Platzhalter“ für Aussagen und Sätze verwenden.

**Beispiel 0.2** 1)  $A$ : Berlin ist eine Stadt. (Wahre Aussage.)

2)  $B$ :  $3 + 7 = 11$ . (Falsche Aussage.)

3)  $C$ : Hertha, Hertha! (Keine Aussage.)

4)  $D$ : Es gibt außerirdische Lebensformen. (Dies ist eine Aussage. Der Wahrheitswert dieser Aussage dürfte aber den meisten von uns noch unbekannt sein.)

5)  $E$ :  $x^2 + 2x + 1 = 0$ . (Ist dies eine Aussage?)

Der letzte Satz  $E$  in Beispiel 0.2 ist *keine* Aussage, da er eine *Variable*  $x$  enthält. Dadurch, dass nicht klar ist, wofür genau dieses  $x$  steht, ist noch kein Wahrheitswert festgelegt. Solche Ausdrücke, die mindestens eine Variable enthalten, nennen wir *Aussageformen*.

Weitere Beispiele für Aussageformen sind die folgenden Sätze:

- 1)  $A(x): x^2 - 1 = 0$ .
- 2)  $B(x, y): 5x > y$ .

Dabei gehen wir davon aus, dass im voraus festgelegt ist, für welche *Konstanten* die Variablen stehen können. In unserem Fall sollen dies die *reellen Zahlen* sein. Es gibt nun mehrere Wege, um aus Aussageformen Aussagen zu erhalten, nämlich:

- 1) Ersetzen der Variablen durch geeignete Konstanten (in unserem Fall also reelle Zahlen). Z.B. wird damit

$$A(5) : 5^2 - 1 = 0$$

zu einer falschen Aussage.

- 2) Voranstellen des *Allquantors*  $\forall$ . Damit erhalten wir aus einer Aussageform  $A(x)$  die Aussage

$$\forall x A(x)$$

die wir als „Für alle  $x$  gilt  $A(x)$ .“ lesen. Betrachten wir wieder die Aussageform  $A(x) : x^2 - 1 = 0$ , so wird

$$\forall x (x^2 - 1 = 0)$$

eine falsche Aussage, denn  $5^2 - 1 \neq 0$ . Die Klammern haben wir hier gesetzt, um die eindeutige Lesbarkeit der Aussage zu garantieren.

- 3) Voranstellen des *Existenzquantors*  $\exists$ . Dies macht aus einer Aussageform  $A(x)$ , die Aussage

$$\exists x A(x),$$

die mit „Es existiert ein  $x$  mit  $A(x)$ “ oder „Es gibt ein  $x$  mit  $A(x)$ “ übersetzt wird. Für unser Beispiel  $A(x) : x^2 - 1 = 0$  liefert uns das die wahre Aussage

$$\exists x (x^2 - 1 = 0),$$

denn z.B. gilt  $1^2 - 1 = 0$ .

In diesem Zusammenhang muss man beachten, dass bei Aussageformen mit mehreren Variablen die Reihenfolge der Quantoren eine wichtige Rolle spielt. Betrachten wir z.B. die Aussageform

$$B(x, y) : „x \text{ kann mit } y \text{ glücklich werden.}“$$

und lassen für die Variable  $x$  als „Konstanten“ Männer und für  $y$  Frauen zu, so erhalten wir mit

$\forall x \exists y B(x, y)$  „Zu jedem Mann  $x$  gibt es eine Frau  $y$ , mit der er glücklich werden kann.“

$\exists y \forall x B(x, y)$  „Es gibt eine Frau  $y$ , mit der alle Männer  $x$  glücklich werden können.“

zwei doch sehr unterschiedliche Aussagen. Welcher Wahrheitswert diesen Aussagen zugeordnet werden kann, lassen wir an dieser Stelle offen.

Mit Hilfe von *Junktoren* erhalten wir aus gegebenen Aussagen neue Aussagen, deren Wahrheitswert durch sogenannte *Wahrheitstafeln* festgelegt wird. Seien dazu  $A, B$  *Aussagevariablen*, also Variablen, die für Aussagen stehen.

1) *Negation*:  $\neg A$  („nicht  $A$ “)

$A$	$\neg A$
$w$	$f$
$f$	$w$

Die Aussage  $\neg(3 + 7 = 11)$  ist demnach wahr, da die Aussage  $3 + 7 = 11$  falsch ist. Etwas aufpassen müssen wir bei Aussagen, die Quantoren enthalten, hier gilt:

$$\neg(\forall x A(x)) = \exists x (\neg A(x)) \quad \text{und} \quad \neg(\exists x A(x)) = \forall x (\neg A(x))$$

(Das Gleichheitszeichen ist allerdings nicht ganz korrekt, denn auf beiden Seiten der Gleichung stehen unterschiedliche Aussagen. Diese sind jedoch *logisch äquivalent*, weshalb wir beide Aussagen im Folgenden als „gleich“ betrachten werden.) Ein Beispiel dafür liefert der Satz „Alle Schafe sind weiß.“, dessen Negation durch den Satz „Es gibt ein Schaf, das nicht weiß ist.“ gegeben ist. Ein anderes Beispiel liefert uns die falsche Aussage

$$\text{„Es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x^2 = -1.\text{“} \quad (\text{formal: } \exists x (x^2 = -1)),$$

die durch Negation zu einer wahren Aussage wird:

$$\text{„Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } x^2 \neq -1.\text{“} \quad (\text{formal: } \forall x (\neg(x^2 = -1)))$$

2) *Konjunktion*:  $A \wedge B$  („ $A$  und  $B$ “)

$A$	$B$	$A \wedge B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$

Die Aussage  $A \wedge B$  ist also dann und nur dann wahr, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  wahr sind.

3) *Adjunktion*:  $A \vee B$  („ $A$  oder  $B$ “)

In der Mathematik ist dabei das nicht ausschließende „oder“ gemeint.

$A$	$B$	$A \vee B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$f$

Die Aussage  $A \vee B$  ist also dann und nur dann falsch, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  falsch sind.

4) *Implikation*:  $A \Rightarrow B$  („aus  $A$  folgt  $B$ “, „wenn  $A$ , dann  $B$ “)

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$

Die Zeilen eins, zwei und vier der Wahrheitstafel sind vielleicht unmittelbar einsichtig. So zweifeln wir sicherlich nicht an der Wahrheit der Aussage

$$\text{„Wenn der 1.1.2222 ein Montag ist, ist der 2.1.2222 ein Dienstag.“}, \quad (0.1)$$

auch wenn wir auf den ersten Blick möglicherweise gar nicht wissen, ob dies ein Beispiel für die erste Zeile oder für die letzte Zeile der Tafel ist. Zeile 3 stößt allerdings bei Nichtmathematikern bisweilen auf Skepsis. Ein Beispiel für die Korrektheit der dritten Zeile liefert uns die Aussage

$$1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2, \quad (0.2)$$

deren Richtigkeit (also Wahrheit) wir an dieser Stelle einmal nachweisen wollen: Falls  $1 + 1 = 0$  gilt, so gilt auch  $0 = 1 + 1$ . Dann folgt aber  $1 + 1 = 0 = 1 + 1$  und daher  $2 = 2$ . Die Aussage  $1 + 1 = 0$  mag zwar falsch sein<sup>1</sup>, aber die Implikation (0.2) ist eine wahre Aussage.

An dieser Stelle haben wir die Möglichkeit, mit Hilfe von wahren Implikationen aus wahren Aussagen neue wahre Aussagen herzuleiten. Sind nämlich die Aussagen  $A$  und  $A \Rightarrow B$  beide wahr, so zeigt ein Blick in die obige Wahrheitstafel, dass dann die Aussage  $B$  ebenfalls wahr sein muss. Diese Folgerungsweise nennt man *Modus ponens*.

5) *Äquivalenz*:  $A \Leftrightarrow B$  („ $A$  genau dann, wenn  $B$ “, „ $A$  ist äquivalent zu  $B$ “)

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$w$

$A \Leftrightarrow B$  ist also genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  dieselben Wahrheitswerte besitzen. Damit erklärt sich auch der Name „Äquivalenz“, der soviel wie „Gleichwertigkeit“ bedeutet. Ein Beispiel für eine Äquivalenz ist durch die Aussage in (0.1) gegeben.

Wir formulieren nun unseren ersten „Satz“ über Aussagen. (Ein *Satz* ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als *wahr* nachgewiesen wird.)

---

<sup>1</sup>Ist sie das wirklich? Darauf kommen wir noch zurück!

**Satz 0.3** Seien  $A, B$  Aussagen. Dann sind folgende Aussagen immer wahr:

- 1)  $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ .
- 2)  $(A \wedge (\neg A)) \Rightarrow B$ .
- 3)  $\neg(A \wedge (\neg A))$ .
- 4)  $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$ .
- 5)  $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$ .
- 6)  $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$ .
- 7)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Wahrheitstafeln, indem wir uns davon überzeugen, dass die jeweilige Aussage für alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten von  $A$  und  $B$  immer wahr ist. Wir machen dies exemplarisch für die Aussage 7), der Beweis der übrigen Aussagen bleibt Ihnen überlassen:

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
$w$	$w$	$f$	$f$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$	$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$w$	$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$	$w$	$w$	$w$

Die beiden Aussagen  $A \Rightarrow B$  und  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$  haben also stets dieselben Wahrheitswerte, sind also äquivalent, womit die Aussage 7) wahr ist.  $\square$  (Das Ende eines mathematischen Beweises wird üblicherweise mit einem "Kästchen" markiert.)

Aussagen wie im Satz, die immer wahr sind, egal mit welchem Wahrheitswert die Aussagenvariablen  $A$  und  $B$  belegt sind, nennen wir auch *Tautologien*. Den Sachverhalt in 2) bezeichnet man auch als „ex falso quodlibet“ („aus Falschem Beliebiges“), der besagt, dass man aus einer falschen Aussage (wie  $A \wedge (\neg A)$ ) jede beliebige Aussage  $B$  folgern kann. Das heißt dann natürlich nicht, dass die Aussage  $B$  wahr ist, nur die *Folgerung* ist wahr. Dies ist ein feiner aber wichtiger Unterschied.

Aussage 4) verdeutlicht uns, dass die Konjunktion der Aussagen  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$  gleichwertig zur Äquivalenz von  $A$  und  $B$  ist. Dies erklärt auch das Symbol  $\Leftrightarrow$  für die Äquivalenz.

Die Aussagen 5) und 6) heißen *De Morgan'sche Regeln*. (Dies ist die aussagenlogische Variante dieser Regeln. Eine mengentheoretische lernen wir im nächsten Abschnitt kennen.)

Die Aussage 7) bezeichnet man als *Kontraposition*, die die Grundlage eines wichtigen Beweisprinzips ist. Ist  $A$  wahr und wollen wir zeigen, dass auch  $B$  wahr ist, so müssen wir uns nach dem Modus ponens von der Wahrheit der Aussage  $A \Rightarrow B$  überzeugen. Gleichwertig ist hier aber die Aussage  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ , es reicht also, die Wahrheit der letzteren Aussage nachzuweisen. Wir demonstrieren dieses Prinzip an einer Aussage über natürliche Zahlen.

**Beispiel 0.4** Wir beweisen die Aussage

„Für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $n^2$  gerade  $\Rightarrow n$  gerade.“

durch Kontraposition, indem wir die folgende Aussage beweisen:

„Für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $n$  ungerade  $\Rightarrow n^2$  ungerade.“

**Beweis:** Sei also  $n$  ungerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $k$  mit  $n = 2k + 1$ . Damit erhalten wir aber  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$  und dies ist eine ungerade Zahl.  $\square$

## 0.2 Mengen

Auch wenn wir im vorigen Abschnitt den Begriff der *Menge* in Beispielen bereits benutzt haben, werden wir ihn erst jetzt definieren.

**Definition 0.5 (Cantor, 1895)** *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

*Seien  $M, N$  zwei Mengen.*

- 1)  $m \in M$  bedeutet: „ $m$  ist ein Element von  $M$ “, d.h.  $m$  gehört zu der Menge  $M$ .
- 2)  $M = N$  bedeutet:  $\forall m(m \in M \Leftrightarrow m \in N)$ .
- 3)  $m \notin M$  bedeutet:  $\neg(m \in M)$ .

Definition 0.5 ist nicht ganz unproblematisch und das nicht nur deswegen, weil wir den Begriff der Menge auf andere nicht präzise definierte Begriffe wie „Zusammenfassung“, „Objekte“, „Anschauung“ etc. zurückgeführt haben. Wir werden am Ende dieses Abschnitts noch einmal darauf zurückkommen.

**Beispiel 0.6** 1)  $\{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$  ist eine Menge.

- 2)  $N = \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 2, 1, 3\}$  ist eine Menge. (Wegen unserer Definition der Gleichheit von Mengen kommt es weder auf die Reihenfolge, noch auf Mehrfachnennungen der Elemente an.)
- 3)  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  ist eine Menge, die Menge der *natürlichen Zahlen*.

Das Symbol „:=“ bedeutet dabei soviel wie „ist per Definition gleich“. (Analog gibt es das Symbol  $:\Leftrightarrow$  mit der Bedeutung „ist per Definition äquivalent zu“.) Außerdem sollte an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass sich die Mathematiker uneins darüber sind, ob 0 eine natürliche Zahl ist oder nicht. Für einen *Mengentheoretiker* ist 0 natürlich natürlich, für einen *Zahlentheoretiker* allerdings nicht. Die Ingenieure haben jedoch per DIN 5473 entschieden, dass Null natürlich ist und an dieser Stelle beugen wir uns den Ingenieuren (oder lieber den Mengentheoretikern)!

- 4) Es gibt oft mehrere Möglichkeiten, eine Menge zu beschreiben, z.B.:

$$\begin{aligned} U &:= \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ungerade}\} \\ &= \{n \mid \text{es gibt } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k + 1\} = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N} \, n = 2k + 1\}. \end{aligned}$$

Allgemein schreibt man  $M = \{x \mid A(x)\}$  für die „Menge aller  $x$ , für die die Aussage  $A(x)$  gilt“. Weitere, formal etwas nachlässigere, aber trotzdem übliche Schreibweisen für unsere Menge  $U$  der ungeraden natürlichen Zahlen sind:

$$U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

- 5)  $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  ist die Menge der *ganzen Zahlen*.  
 6)  $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\}$  ist die Menge der *rationalen Zahlen*.  
 7)  $\mathbb{R}$  ist die Menge der *reellen Zahlen*. Mit dieser Menge und insbesondere ihrer Charakterisierung beschäftigen wir uns ausführlich im nächsten Kapitel.

Wir kommen nun zu zwei weiteren wesentlichen Begriffen der Mengenlehre.

**Definition 0.7** Seien  $M, N$  Mengen.

- 1)  $M$  heißt Teilmenge von  $N$ , falls für alle  $x$  gilt:  $x \in M \Rightarrow x \in N$ .  
Schreibweise:  $M \subseteq N$
- 2) Eine Menge heißt leer, falls sie keine Elemente enthält.

**Beispiel 0.8** 1) Es gilt  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ .

- 2) Ist  $M$  eine Menge und  $x \in M$ , so ist  $\{x\}$  eine Teilmenge von  $M$ .

**Bemerkung 0.9** (Eine *Bemerkung* ist in der Mathematik ein Satz, den der/die Mathematiker/in für so offensichtlich hält, dass er/sie es nicht für nötig erachtet, seinen Beweis niederzuschreiben.)

Seien  $M, N$  Mengen. Dann gilt:

- 1)  $M \subseteq M$ . (Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.)
- 2)  $M = N \Leftrightarrow M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M$ .  
(Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn jeweils die eine eine Teilmenge der anderen ist.)
- 3) Ist  $\emptyset$  eine leere Menge, so gilt  $\emptyset \subseteq M$ , denn  $x \in \emptyset$  ist immer falsch und daher ist die Aussage „ $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ “ immer wahr.

(Wie wir in 3) gesehen haben ersetzen manche Mathematiker den fehlenden formalen Beweis einer Aussage in einer *Bemerkung* gerne durch eine kurze Begründung.)

**Satz 0.10** *Es gibt genau eine leere Menge.*

**Beweis:** Satz 0.10 ist ein klassisches Beispiel für einen *Existenz- und Eindeutigkeitssatz*. Im Beweis müssen wir daher auch zwei Aussagen nachweisen: die Existenz einer leeren Menge und die Eindeutigkeit der leeren Menge.

Existenz: Wir konstruieren eine leere Menge:  $\{x \mid x \neq x\}$ . Offensichtlich kann diese Menge kein Element enthalten.

Eindeutigkeit: Seien  $\emptyset$  und  $\emptyset'$  zwei leere Mengen. Dann gilt mit Teil 3) von Bemerkung 0.9:

$$\emptyset \subseteq \emptyset' \quad \text{und} \quad \emptyset' \subseteq \emptyset$$

Damit folgt mit Teil 2) von Bemerkung 0.9, dass  $\emptyset = \emptyset'$ .  $\square$

Im Folgenden werden wir die leere Menge mit  $\emptyset$  bezeichnen. Das Kreissymbol steht dabei für eine Menge. Diese ist durchgestrichen, da sie kein Element enthält. Da dieses Symbol an den griechischen Buchstaben  $\phi$  (phi) erinnert, wird die leere Menge auch manchmal so genannt. Eine andere übliche Schreibweise ist  $\{\}$ , d.h. man schreibt zwei Mengenklammern und lässt etwas Platz dazwischen, um anzudeuten, dass die Menge eben *leer* ist.

**Definition 0.11 (Verknüpfungen von Mengen)** *Seien  $M, N$  Mengen.*

- 1)  $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$  heißt Durchschnitt von  $M$  und  $N$ .
- 2)  $M$  und  $N$  heißen disjunkt, falls  $M \cap N = \emptyset$ .
- 3)  $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$  heißt Vereinigung von  $M$  und  $N$ .
- 4)  $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$  heißt Differenz von  $M$  und  $N$ .

**Beispiel 0.12** Seien  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{2, 3, 5\}$ . Dann gilt:

$$A \cap B = \{2, 3\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 5\} \quad \text{und} \quad A \setminus B = \{1\}.$$

Die Mengen  $A$  und  $B$  sind nicht disjunkt, wohl aber die Mengen  $A \cap B$  und  $A \setminus B$ .

**Satz 0.13 (Grundgesetze der Mengenalgebra)** *Seien  $A, B, C$  Mengen. Dann gelten:*

- 1) Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

- 2) Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$



3) Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

4) Absorptionsgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A, \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned}$$

5) De Morgan'sche Regeln:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

6) Transitivität der Inklusion:

$$A \subseteq B \text{ und } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

**Beweis:** Wir beweisen hier nur das Distributivgesetz  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Die übrigen Beweise dürfen Sie zur Übung selbst führen.

Für die Mengengleichheit müssen wir die zwei *Inklusionen*

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$

nachweisen. Nun gilt für alle  $x$ , dass:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \text{ und } x \in B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \text{ oder } x \in A \cap C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Die andere Inklusion beweist man analog.  $\square$

**Definition 0.14** Ist  $\mathcal{M}$  eine Menge von Mengen (d.h. die Elemente von  $\mathcal{M}$  sind Mengen), so heißt

- 1)  $\bigcap \mathcal{M} := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}$  großer Durchschnitt von  $\mathcal{M}$ .
- 2)  $\bigcup \mathcal{M} := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid x \in M \text{ für ein } M \in \mathcal{M}\}$  große Vereinigung von  $\mathcal{M}$ .

Für den Spezialfall  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$  schreiben wir auch

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{i=1}^n M_i = M_1 \cap \dots \cap M_n \quad \text{und} \quad \bigcup \mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^n M_i = M_1 \cup \dots \cup M_n$$

und für den Fall  $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in I\}$  für eine Menge  $I$  (die wir dann als Indexmenge bezeichnen) schreiben wir

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{i \in I} M_i \quad \text{und} \quad \bigcup \mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} M_i.$$

**Beispiel 0.15** Sei  $\mathcal{M} = \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , wobei  $M_n = \{-n, 0, n\}$ . Dann gilt:

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{0\} \quad \text{und} \quad \bigcup \mathcal{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{Z}.$$

**Definition 0.16** Seien  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und seien  $M, N, M_1, \dots, M_n$  Mengen.

- 1)  $\mathcal{P}(M) := \{T \mid T \subseteq M\}$  heißt Potenzmenge von  $M$ . (Dies ist die Menge aller Teilmengen von  $M$ .)
- 2)  $M \times N := \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}$  heißt kartesisches Produkt von  $M$  und  $N$ . Für  $(m, n), (m', n') \in M \times N$  gilt:

$$(m, n) = (m', n') \quad \Leftrightarrow \quad m = m' \text{ und } n = n'$$

- 3) Analog definieren wir

$$\prod_{i=1}^n M_i := M_1 \times \dots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i, i = 1, \dots, n\}$$

und  $(x_1, \dots, x_n) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) : \Leftrightarrow x_i = \tilde{x}_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Die Elemente dieser Menge bezeichnen wir als  $n$ -Tupel bzw. für  $n = 2, 3$  auch als Paare bzw. Tripel.

$$4) \quad M^n := \prod_{i=1}^n M := \underbrace{M \times \dots \times M}_{n \text{ mal}}.$$

**Beispiel 0.17** Seien  $M = \{1, 2\}$ ,  $N = \{a, b, c\}$ . Dann gilt:

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \quad M \times N = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Man beachte, dass  $(1, a) \neq \{1, a\}$ , denn im ersten Fall ist die Reihenfolge entscheidend, im zweiten Fall nicht.

Nachdem wir uns nun ein bisschen mit den Mengen angefreundet haben, kommen wir auf unsere Bemerkung zu Anfang des Abschnitts zurück, dass die Mengendefinition nach Cantor so ihre Tücken hat. Unbezweifelbar sind Mengen selbst wieder „Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens“ und daher können wir die folgende Menge definieren:

$$\mathcal{R} = \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \notin M\}.$$

$\mathcal{R}$  ist also die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. So weit, so gut, aber

bei der Frage, ob diese Menge  $\mathcal{R}$  sich selbst enthält, stoßen wir auf einen Widerspruch. Denn angenommen  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ . Dann gilt nach Definition von  $\mathcal{R}$  aber  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ . Also ist  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$  falsch und daher muss  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$  wahr sein. Dann ist  $\mathcal{R}$  aber eine Menge, die sich nicht selbst enthält, d.h. es gilt  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ . Damit haben wir gefolgert, dass sowohl die Aussage  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ , als auch die Aussage  $\neg(\mathcal{R} \in \mathcal{R})$  wahr ist. Mit Teil 2) von Satz 0.3 erhalten wir dann, dass jede beliebige Aussage wahr ist. Das ist sicher nicht im Sinn der Mathematik!

Die Existenz dieser Menge  $\mathcal{R}$  und der daraus resultierende Widerspruch, der nach seinem Entdecker auch die *Russell'sche Antinomie* genannt wird, hat die Mathematik am Anfang des letzten Jahrhunderts in eine tiefe Krise gestürzt. Einen Ausweg hat man durch die *Axiomatische Mengenlehre* gefunden. Diese basiert auf sogenannten *Axiomen*, d.h. Aussagen, die wir als wahr voraussetzen, ohne dass dies eines Beweises bedarf. Statt einer Definition des Begriffs "*Menge*", benutzen wir diese Axiome als Regeln, wie wir aus bekannten Mengen neue Mengen erzeugen können. Die Axiome bilden also das Fundament der Mathematik, aus dem wir alle (oder zumindest viele) weitere wahre Aussagen durch Folgerungen ableiten können.

Heute verwendet man üblicherweise das Axiomensystem von *Zermelo-Fraenkel*, das unter anderem die Existenz der leeren Menge als Axiom enthält und weitere Axiome, die aus vorhandenen Mengen die Bildung neuer Mengen erlauben. Sind z.B.  $M$  und  $N$  Mengen, so unter anderem auch

- $\{M, N\}$ ,
- $M \cup N, M \cap N, M \setminus N$ ,
- $\mathcal{P}(M)$  und
- $\{x \mid x \in M \text{ und } A(x)\}$ , wobei  $A(x)$  eine Aussageform ist.

Mittels dieser Axiome ist dann z.B. die Konstruktion der natürlichen Zahlen möglich. Wir definieren

$$0 := \emptyset, \quad 1 := \{0\} = \{\emptyset\}, \quad 2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad 3 := \{0, 1, 2\}, \quad \text{usw.}$$

(Wir werden im nächsten Kapitel allerdings einen anderen Weg der Einführung der natürlichen Zahlen beschreiten.) Gebilde wie  $\mathcal{R}$  dagegen lassen sich auf diese Weise nicht mehr als Mengen konstruieren. Stattdessen bezeichnet man sie als *Klassen*. Auch Mengen sind Klassen und eine Klasse ist eine *Menge*, wenn sie in einer anderen Klasse enthalten ist: Den Ausweg aus der Russell'schen Antinomie erhalten wir nun so. Angenommen  $\mathcal{R}$  ist eine Menge. Dann erhalten wir wie oben einen Widerspruch. Folglich ist  $\mathcal{R}$  keine Menge und daher ist die Aussage  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$  falsch, da  $\mathcal{R}$  eine Menge sein müsste, um in einer anderen Klasse enthalten zu sein.

Wir wollen hier allerdings nicht tiefer in die Mengentheorie eindringen, da uns dies zu sehr von unserem eigentlichen Thema, der *Analysis*, ablenken würde. Tatsächlich reicht für unsere Zwecke die *Naive Mengenlehre* aus, die auf der Mengendefinition nach Cantor beruht. Solange wir die Konstruktion von Gebilden wie  $\mathcal{R}$  vermeiden, stoßen wir dabei auch nicht auf Widersprüche.

### 0.3 Abbildungen

In diesem Abschnitt geht es um einen weiteren Begriff, der in der Mathematik ebenso fundamental ist, wie der Begriff der Menge, nämlich den der *Abbildung*.

**Definition 0.18** Seien  $X$  und  $Y$  Mengen.

- 1) Eine Abbildung (oder Funktion)  $f$  von  $X$  nach  $Y$  ist eine Vorschrift, die jedem  $x \in X$  genau ein Element  $f(x) \in Y$  zuordnet. Wir schreiben:

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x).$$

- 2)  $X$  heißt Definitionsbereich von  $f$  und  $Y$  Wertebereich von  $f$ .

- 3)  $f(x)$  heißt Bild von  $x$  unter  $f$ .

- 4)  $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$  heißt Graph von  $f$ .

Der durch den letzten Abschnitt verunsicherte Leser mag nun befürchten, dass wir auch mit dieser Definition Übles heraufbeschwören können, da wir unsere Definition erneut auf einen Begriff unserer Anschauung und unseres Denkens zurückgeführt haben, nämlich auf die *Zuordnungsvorschrift*. Tatsächlich war dies aber aus der Sicht der Mengenlehre gar nicht notwendig, denn aufbauend auf dem Mengenbegriff können wir den Begriff der Abbildung auf den der Menge zurückführen. Sind  $X, Y$  Mengen, so können wir eine Abbildung  $f$  von  $X$  nach  $Y$  als eine Teilmenge  $\Gamma_f \subseteq X \times Y$  mit folgender Eigenschaft definieren:

Zu jedem  $x \in X$  gibt es genau ein  $y \in Y$  mit  $(x, y) \in \Gamma_f$ .

Noch präziser definieren wir eine Abbildung  $f$  als ein *Tripel*  $(X, Y, \Gamma_f)$  von zwei Mengen  $X, Y$  und der Teilmenge  $\Gamma_f$ , da insbesondere die Angabe des Wertebereichs entscheidend ist, um manche Abbildungen voneinander unterscheiden zu können. Wir benutzen aber im Folgenden dennoch die etwas „unpräzise“ Definition 0.18, da sie für uns anschaulicher ist. Unsere Diskussion in diesem Absatz hat gezeigt, dass diese Definition unproblematisch ist.

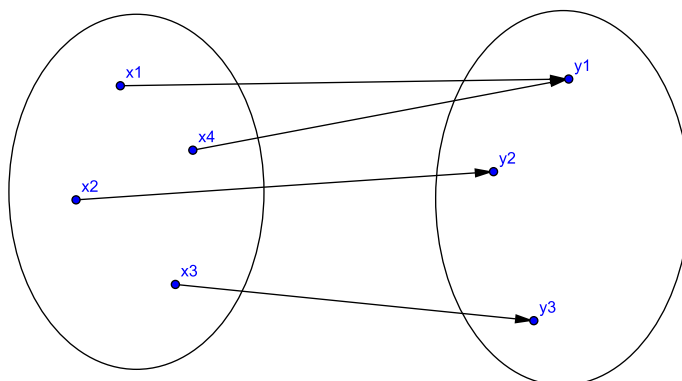
Aus der Sicht der Mengenlehre sind die Begriffe *Abbildung* und *Funktion* synonym. Manche Mathematiker/innen benutzen den Begriff *Funktion* aber ausschließlich für Abbildungen der Form  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (oder  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , wobei wir die Menge  $\mathbb{C}$  der *komplexen Zahlen* in einem späteren Kapitel kennenlernen werden) und unterscheiden damit zwischen beiden Begriffen. Will man Missverständnisse vermeiden, so benutzt man im allgemeinen Fall also besser den Begriff *Abbildung*.

**Beispiel 0.19** 1) Eine Abbildung  $f$  von  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  nach  $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$  ist definiert durch

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_3, \quad f(x_4) = y_1.$$

Der Graph von  $f$  ist die Menge  $\Gamma_f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_1)\}$ .

Wir können uns die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  wie folgt veranschaulichen:



- 2) Eine weitere Funktion ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ . Ihr Graph  $\Gamma_f$  ist die Normalparabel und eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- 3) Die *Signumfunktion*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Den Graphen können wir wiederum leicht als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  zeichnen.

- 4) Den Graphen der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

können wir dagegen nicht mehr zeichnen.

- 5) Ist  $X$  eine Menge und  $f : X \times X \rightarrow X$  eine Abbildung, so nennt man diese auch eine *zweistellige Verknüpfung* auf  $X$ . Statt  $f(x, y)$  schreiben wir dann auch  $xy$ . Ein konkretes Beispiel ist die Addition in den reellen Zahlen, also

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

In diesem Fall ist der Graph eine Teilmenge  $\Gamma_+ \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ .

- 6) Ist  $X$  eine beliebige Menge, so nennen wir die Abbildung

$$Id_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x$$

die *Identität* auf  $X$ .

**Bemerkung 0.20** Seien  $X, Y$  Mengen und  $f, g : X \rightarrow Y$  Abbildungen. Dann gilt:

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_f = \Gamma_g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in X$$

Unser nächstes Ziel ist die Definition der *Umkehrfunktion*. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe.

**Definition 0.21** Seien  $X, Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$ .

- 1)  $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$  heißt Bild von  $A$  unter  $f$ .
- 2)  $f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$  heißt Urbild von  $B$  unter  $f$ . Ist speziell  $B = \{y\}$  für ein  $y \in Y$ , so heißen die Elemente der Menge  $f^{-1}(\{y\})$  auch Urbilder von  $y$  unter  $f$ .
- 3) Die Abbildung  $f|_A : A \rightarrow Y$  mit  $(f|_A)(x) = f(x)$  für alle  $x \in A$  heißt die Einschränkung von  $f$  auf  $A$ .

**Beispiel 0.22** 1) Für die Abbildung aus Teil 1) von Beispiel 0.19 gilt

$$f(\{x_2, x_3\}) = \{y_2, y_3\} \quad \text{und} \quad f^{-1}(\{y_1, y_2\}) = \{x_1, x_2, x_4\}.$$

Speziell sind  $x_1$  und  $x_4$  die Urbilder von  $y_1$  unter  $f$ .

- 2) Für die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  und  $y \in \mathbb{R}$  gilt

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } y < 0, \\ \{0\} & \text{für } y = 0, \\ \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\} & \text{für } y > 0. \end{cases}$$

**Definition 0.23** Seien  $X, Y$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$

- 1) injektiv, falls jedes  $y \in Y$  höchstens ein Urbild hat.
- 2) surjektiv, falls jedes  $y \in Y$  mindestens ein Urbild hat.
- 3) bijektiv, falls jedes  $y \in Y$  genau ein Urbild hat.

Offenbar ist  $f$  genau dann bijektiv, wenn es injektiv und surjektiv ist.

**Beispiel 0.24** 1) Die Abbildung aus Teil 1) von Beispiel 0.19 ist surjektiv, da jedes Element aus  $Y$  ein Urbild hat, aber nicht injektiv, da  $y_1$  zwei Urbilder hat.

- 2) Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist bijektiv, denn für alle  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{x} = y \right\} = \left\{ \frac{1}{y} \right\}$$

**Definition 0.25** Seien  $X, Y, Z$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition oder Hintereinanderausführung von  $g$  und  $f$ .

**Beispiel 0.26** Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x + 3$  und  $g(x) = x^2$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2, \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3.\end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt  $g \circ f \neq f \circ g$ , d.h. die Komposition ist nicht *kommutativ*.

**Bemerkung 0.27** Seien  $W, X, Y, Z$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $h : Z \rightarrow W$  Abbildungen. Dann gilt:

- 1) Die Komposition ist *assoziativ*, d.h.  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ , denn für alle  $x \in X$  gilt

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

- 2)  $f \circ \text{Id}_X = f$ , denn für alle  $x \in X$  gilt

$$(f \circ \text{Id}_X)(x) = f(\text{Id}_X(x)) = f(x)$$

Analog folgt  $\text{Id}_Y \circ f = f$ .

Diese Vorbereitungen sollten uns dazu dienen, um die folgenden Charakterisierungen der Begriffe *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* herzuleiten.

**Satz 0.28** Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt:

- 1) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i)  $f$  ist injektiv.
- ii) Es gibt eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{Id}_X$ .
- iii) Für alle  $x_1, x_2 \in X$  gilt:  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

- 2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i)  $f$  ist surjektiv.
- ii) Es gibt eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{Id}_Y$ .
- iii)  $f(X) = Y$ .

- 3) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i)  $f$  ist bijektiv.
- ii) Es gibt eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{Id}_X$  und  $f \circ g = \text{Id}_Y$ .

Gilt eine (und damit beide) der Eigenschaften, so ist die Funktion  $g$  aus ii) eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Eine Äquivalenz  $A \Leftrightarrow B$  beweisen wir nach Teil 4) von Satz 0.3, indem wir die Implikationen  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$  nachweisen. Bei mehreren Äquivalenzen  $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$  bietet sich der sogenannte *Ringschluss* an. Wir zeigen:  $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ . Machen Sie sich klar, dass dies genügt, um die gewünschten Äquivalenzen nachzuweisen.

- 1) „i)  $\Rightarrow$  ii)“: Nach Voraussetzung enthält  $f^{-1}(\{y\})$  für jedes Element  $y \in Y$  höchstens ein Element. Wir wählen nun ein  $x_0 \in X$  und definieren  $g : Y \rightarrow X$  durch

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) = \{x\}, \\ x_0 & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset. \end{cases}$$

Dann gilt für alle  $x \in X$ , dass  $g(f(x)) = x = \text{Id}_X(x)$ , da nach Definition des Urbilds  $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$  gilt und daher  $\{x\} = f^{-1}(\{f(x)\})$ . Damit folgt  $g \circ f = \text{Id}_X$ .

„ii)  $\Rightarrow$  iii)“: Seien  $x_1, x_2 \in X$  beliebig mit  $f(x_1) = f(x_2) =: y$ . Nach Voraussetzung gibt es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{Id}_X$ . Damit erhalten wir:

$$x_1 = \text{Id}_X(x_1) = g(f(x_1)) = g(y) = g(f(x_2)) = \text{Id}_X(x_2) = x_2.$$

„iii)  $\Rightarrow$  i)“: Sei  $y \in Y$  beliebig. Wir zeigen, dass  $f^{-1}(\{y\})$  höchstens ein Element enthält. Falls  $f^{-1}(\{y\})$  leer ist, ist das klar. Andernfalls sei  $x \in f^{-1}(\{y\})$ . Dann gilt  $\{x\} \subseteq f^{-1}(\{y\})$ . Wir zeigen

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$$

indem wir  $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \{x\}$  beweisen. Sei also  $\tilde{x} \in f^{-1}(\{y\})$ . Dann gilt:

$$f(\tilde{x}) = y = f(x)$$

Dann folgt aber mit iii), dass  $\tilde{x} = x$  und daher  $\tilde{x} \in \{x\}$ . Dies zeigt  $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \{x\}$ .

- 2) „i)  $\Rightarrow$  ii)“: Da  $f$  surjektiv ist, enthält  $f^{-1}(\{y\})$  für jedes  $y \in Y$  mindestens ein Element. Wähle nun zu jedem  $y \in Y$  ein  $x_y \in f^{-1}(\{y\})$  und definiere  $g : Y \rightarrow X$  durch  $g(y) = x_y$ . Dann gilt  $f \circ g = \text{Id}_Y$ , denn wir erhalten für alle  $y \in Y$ , dass

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y = \text{Id}_Y(y).$$

„ii)  $\Rightarrow$  iii)“: Nach Definition des Bildes gilt  $f(X) \subseteq Y$ . Wir zeigen  $Y \subseteq f(X)$ . Sei dazu  $y \in Y$ . Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion  $g : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{Id}_Y$ . Daher gilt

$$y = \text{Id}_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$$

und somit  $y \in f(X)$ . Dies beweist  $Y \subseteq f(X)$  und damit auch  $Y = f(X)$ .

„iii)  $\Rightarrow$  i)“: Sei  $y \in Y$  beliebig. Wir müssen zeigen, dass  $y$  mindestens ein Urbild unter  $f$  hat. Aus  $Y = f(X)$  folgt  $y \in f(X)$ , d.h. es gibt ein  $x \in X$  mit  $y = f(x)$ . Dann gilt aber  $x \in f^{-1}(\{y\})$ .

- 3) Die Äquivalenz von i) und ii) folgt sofort aus 1) und 2). Für die Eindeutigkeit sei auch  $h : Y \rightarrow X$  eine Abbildung mit  $h \circ f = \text{Id}_X$  und  $f \circ h = \text{Id}_Y$ . Zu zeigen ist  $h = g$  und dies folgt aus

$$h = h \circ \text{Id}_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \text{Id}_X \circ g = g. \quad \square$$



**Definition 0.29** Seien  $X, Y$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive Abbildung. Dann heißt die eindeutig bestimmte Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{Id}_X$  und  $f \circ g = \text{Id}_Y$  die Umkehrabbildung von  $f$ . Schreibweise:  $g = f^{-1}$ .

Leider gibt es an dieser Stelle eine gewisse Doppeldeutigkeit in der Notation, da wir auch das Urbild einer Menge  $B$  unter einer beliebigen (nicht notwendigerweise bijektiven) Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f^{-1}(B)$  bezeichnen. Der Unterschied wird aber aus dem Kontext klar: Ist  $f$  bijektiv und  $y \in Y$ , so ist  $f^{-1}(\{y\})$  das Urbild von  $y$  unter  $f$ , aber  $f^{-1}(y)$  ist das Bild von  $y$  unter der Umkehrabbildung  $f^{-1}$  von  $f$ . Ist weiter  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ , so gilt  $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$  und  $f^{-1}(y) = x$ .

**Bemerkung 0.30** Die Existenz einer Umkehrabbildung ist anschaulich genau dann gegeben, wenn jedes Element des Bildraums genau ein Urbild besitzt, weil wir dann eine eindeutige Abbildung konstruieren können, die die „Wirkung“ der ursprünglichen Abbildung rückgängig macht.

Ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  nicht surjektiv, so kann man sie leicht zu einer surjektiven Abbildung machen, indem man als Wertebereich das Bild  $f(X)$  betrachtet. (Strenggenommen handelt es sich bei den Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $f : X \rightarrow f(X)$  aber um zwei *verschiedene* Abbildungen, die wir allerdings mit demselben Buchstaben  $f$  bezeichnen. Die zweite dieser Abbildungen ist surjektiv, die erste nicht.) Analog kann man versuchen, eine Abbildung durch Einschränkung auf eine Teilmenge des Definitionsbereichs injektiv zu machen, falls sie dies noch nicht ist.

**Beispiel 0.31** Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  ist weder injektiv noch surjektiv, wie wir in Teil 2) von Beispiel 0.22 gesehen haben. Betrachten wir als Wertebereich nur noch das Bild von  $f$ , also  $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$ , so ist die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ ,  $x \mapsto x^2$  surjektiv, aber immer noch nicht injektiv.

Betrachten wir die Einschränkung von  $f$  auf das Intervall  $[0, \infty[$ , also  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  mit  $f(x) = x^2$ , dann ist  $f$  bijektiv und die Umkehrabbildung  $f^{-1} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  ist gegeben durch  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ .

In strenger Notation hätten wir die drei Abbildungen eigentlich unterscheiden müssen, also z.B. so:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2, \\ \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty[, & x &\mapsto x^2, \\ \hat{f} &:= \tilde{f}|_{[0, \infty[} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, & x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Für spätere Zwecke versammeln wir noch einige mengentheoretische Rechenregeln für Bild und Urbild, die sie zu Übungszwecken selbst beweisen dürfen.

**Bemerkung 0.32** Seien  $X, Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt:

- 1)  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ . Gleichheit gilt, falls  $f$  injektiv ist.
- 2)  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ . Gleichheit gilt, falls  $f$  surjektiv ist.

## 0.4 Relationen

Der letzte Grundlagenbegriff, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, ist der der *Relation*, der den Funktionenbegriff verallgemeinert.

**Definition 0.33** Seien  $X, Y$  Mengen.

- 1) Eine Teilmenge  $R \subseteq X \times Y$  heißt Relation zwischen  $X$  und  $Y$ . Ist speziell  $Y = X$ , so heißt  $R$  auch Relation auf  $X$ .
- 2) Sei  $(x, y) \in X \times Y$ . Dann bedeutet  $xRy$ , dass  $(x, y) \in R$ .

**Beispiel 0.34** Seien  $X, Y$  Mengen.

- 1)  $G := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$  ist eine Relation auf  $X$ , die *Gleichheitsrelation*. Statt  $xGx$  schreiben wir aber üblicherweise  $x = x$ .
- 2)  $\leq := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \text{ ist kleiner oder gleich } b\}$  ist eine Relation auf  $\mathbb{R}$ . Wir schreiben also  $a \leq b$  genau dann, wenn  $(a, b) \in \leq$  gilt, also wenn  $a$  kleiner oder gleich  $b$  ist.
- 3) Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann ist der Graph  $\Gamma_f \subseteq X \times Y$  eine Relation zwischen  $X$  und  $Y$ . Damit erhalten wir die Möglichkeit den Begriff der Funktion weiter zu präzisieren. Eine *Abbildung* oder *Funktion* ist eine Relation  $\Gamma_f \subseteq X \times Y$  mit folgenden Eigenschaften:
  - i)  $\Gamma_f$  ist *linkstotal*, d.h. zu jedem  $x \in X$  gibt es ein  $y \in Y$  mit  $(x, y) \in \Gamma_f$ .
  - ii)  $\Gamma_f$  ist *rechtseindeutig*, d.h. für alle  $x \in X$  und alle  $y_1, y_2 \in Y$  gilt:

$$(x, y_1), (x, y_2) \in \Gamma_f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

(Analog kann man nun noch die Begriffe *rechtstotal* und *linkseindeutig* definieren und erhält damit für Funktionen gerade die Begriffe *surjektiv* und *injektiv*.)

Weitere wichtige Beispiele für Relationen sind sogenannte *Äquivalenzrelationen*.

**Definition 0.35** Sei  $X$  eine Menge und  $R \subseteq X \times X$  eine Relation auf  $X$ . Dann heißt  $R$

- 1) reflexiv, falls für alle  $x \in X$  gilt, dass  $xRx$ ,
- 2) symmetrisch, falls für alle  $x, y \in X$  gilt:  $xRy \Rightarrow yRx$ ,
- 3) transitiv, falls für alle  $x, y, z \in X$  gilt:  $xRy$  und  $yRz \Rightarrow xRz$ ,
- 4) Äquivalenzrelation, falls  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

**Beispiel 0.36** 1)  $R := \{(a, b) \mid a \text{ ist im gleichen Fachsemester wie } b\}$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Studierenden des Wintersemesters  $J$  an der TU Berlin. (Für  $J$  setzen Sie bitte eine geeignete Jahreszahl ein.)

2) Für  $a, b \in \mathbb{Z}$  sei

$$a|b :\Leftrightarrow \text{ es gibt } d \in \mathbb{Z} \text{ mit } ad = b.$$

Dann ist  $|$  eine Relation auf  $\mathbb{Z}$ , die sogenannte *Teilbarkeitsrelation*, denn es gilt  $a|b$  genau dann, wenn  $a$  ein Teiler von  $b$  ist. Weiter gilt:

- i)  $|$  ist reflexiv, denn  $a|a$ , da  $a \cdot 1 = a$  für alle  $a \in \mathbb{Z}$ .
  - ii)  $|$  ist transitiv, denn seien  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  beliebig mit  $a|b$  und  $b|c$ . Dann gibt es  $d, e \in \mathbb{Z}$  mit  $b = da$  und  $c = be$ . Dann gilt aber auch  $c = (da)e = (de)a$  und daher  $a|c$ , da  $de \in \mathbb{Z}$ .
  - iii)  $|$  ist keine Äquivalenzrelation, denn  $|$  ist nicht symmetrisch. Es gilt z.B.  $2|4$  aber nicht  $4|2$ .
- 3)  $\leq$  ist auch keine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$ . Zwar ist  $\leq$  reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch. Stattdessen ist  $\leq$  *anti-symmetrisch*, d.h. für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$a \leq b \text{ und } b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Eine reflexive, anti-symmetrische, transitive Relation nennt man eine *Halbordnung*. Auch die Inklusion  $\subseteq$  auf einer Menge  $\mathcal{M}$  von Mengen ist eine Halbordnung.

4) Sei  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Dann ist

$$R_m := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid m|(b - a)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z}$ , die wir *Kongruenz modulo  $m$*  nennen. Dies weisen wir jetzt nach: Seien dazu  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  beliebig.

- i) Reflexivität:  $(a, a) \in R_m$ , da  $0 \cdot m = a - a$ .
- ii) Symmetrie: Gilt  $(a, b) \in R_m$ , so gibt es  $z \in \mathbb{Z}$  mit  $mz = b - a$ . Dann gilt aber auch  $m(-z) = a - b$  und daher  $(b, a) \in R_m$ .
- iii) Transitivität: Es gelte  $(a, b), (b, c) \in R_m$ . Dann gibt es  $d, e \in \mathbb{Z}$  mit  $md = b - a$  und  $me = c - b$ . Damit folgt  $(a, c) \in R_m$ , denn

$$c - a = c - b + b - a = me + md = m(d + e).$$

Das besondere an Äquivalenzrelationen ist, dass sich die Menge, auf der die Relation definiert ist, dadurch in *Äquivalenzklassen* einteilen lässt.

**Definition 0.37** Sei  $X$  eine Menge und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Für  $a \in X$  heißt

$$[a]_R := \{x \in X \mid (x, a) \in R\}$$

die Äquivalenzklasse von  $a$  bzgl.  $x$ . Jedes  $x \in [a]_R$  heißt Repräsentant von  $[a]_R$ .

**Bemerkung 0.38** Es gilt stets  $a \in [a]_R$ , denn  $(a, a) \in R$ . (Reflexivität von  $R$ )

Im Folgenden schreiben wir meist  $[a]$  statt  $[a]_R$ , wenn klar ist, von welcher Äquivalenzrelation  $R$  die Rede ist.

**Satz 0.39** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $X$  und seien  $a, b \in X$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $aRb$ .
- ii)  $[a] = [b]$ .
- iii)  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ .

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)” Wir zeigen zunächst  $[a] \subseteq [b]$ . Sei also  $x \in [a]$ , dann gilt  $xRa$ . Mit der Transitivität und i) folgt dann  $xRb$ , also  $x \in [b]$ . Analog (bzw. durch Vertauschen der Rollen von  $a$  und  $b$ ) zeigen wir  $[b] \subseteq [a]$ .

“ii)  $\Rightarrow$  iii)” Es gilt  $a \in [a] = [b]$ . Also gilt  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ .

“iii)  $\Rightarrow$  i)” Nach Voraussetzung existiert ein  $c \in [a] \cap [b]$ . Dann gilt  $cRa$  und  $cRb$ . Mit der Symmetrie und Transitivität folgt  $aRb$ .  $\square$

Satz 0.39 besagt, dass die Menge  $X$  in disjunkte Teilmengen aufgeteilt werden kann, nämlich die Äquivalenzklassen.

**Beispiel 0.40** Sei wieder  $R := \{(a, b) \mid a \text{ ist im gleichen Fachsemester wie } b\}$  die bereits betrachtete Äquivalenzrelation auf der Menge der Studierenden des Wintersemesters  $J$  an der TU Berlin. Dann gehört jede(r) Studierende zu genau einer Äquivalenzklasse. Diese Äquivalenzklasse lässt sich durch eine sogenannte *Invariante* charakterisieren, nämlich die Ordnungszahl des Fachsemesters.

**Definition 0.41** Sei  $X$  eine Menge und sei  $R \subseteq X \times X$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Dann heißt die Menge

$$X/R := \{[a]_R \mid a \in X\}$$

der Äquivalenzklassen auf  $X$  bzgl.  $R$  die Quotientenmenge (auch: Faktormenge) von  $X$  bzgl.  $R$ .

**Beispiel 0.42** Bei der Kongruenz modulo  $m$  gilt für  $x \in \mathbb{Z}$  und  $a, b \in [x]$ , dass  $a$  und  $b$  beim Teilen durch  $m$  denselben Rest  $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  lassen. Insbesondere gilt dann  $r \in [x] = [r]$ . Weiter gilt:

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [m-1] \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}/R_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}.$$

# Kapitel 1

## Axiomatik der reellen Zahlen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die *Menge der reellen Zahlen* einzuführen. Eine Methode ist, zunächst die natürlichen Zahlen zu definieren (z.B. so, wie wir das in Abschnitt 0.2 getan haben) und darauf aufbauend die ganzen, rationalen und schließlich auch reellen Zahlen zu konstruieren. Wir werden an dieser Stelle einen anderen Weg gehen, indem wir die Menge

$$\mathbb{R}$$

der reellen Zahlen als gegeben betrachten. Dann werden wir *Axiome* formulieren, welche die Eigenschaften der reellen Zahlen charakterisieren. Aufbauend auf diesen Axiomen werden wir die Theorie der *Analysis der reellen Zahlen* entwickeln.

### 1.1 Körperaxiome

Im ersten Abschnitt geht es um die Charakterisierung der Operationen *Addition* und *Multiplikation* in den reellen Zahlen.

**Axiom 1.1** *Auf  $\mathbb{R}$  existieren zwei Verknüpfungen*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto a + b, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

*genannt Addition bzw. Multiplikation, für die die nachfolgenden Axiome I), II), III) gelten.*

#### I) Axiome der Addition

A1) Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt das *Assoziativgesetz*:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A2) Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt das *Kommutativgesetz*:

$$a + b = b + a$$

A3) Es gibt ein *neutrales Element* der Addition, genannt 0 („Null“), d.h. es gibt  $0 \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$a + 0 = a$$

A4) Es gibt *additive Inverse*, d.h. zu jedem  $a \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ , so dass gilt:

$$a + \tilde{a} = 0$$

Bevor wir die weiteren Axiome II) und III) vorstellen, unterbrechen wir kurz, um ein paar Erläuterungen und einige wichtige Folgerungen aus den Axiomen einzufügen.

**Bemerkung 1.2** In der Formulierung des Axioms A4) waren wir strenggenommen etwas ungenau, da wir uns auf das Element 0 aus dem Axiom A3) bezogen haben. Wissen wir denn, ob es nur ein einziges neutrales Element gibt, also nur *ein* Element, welches die Eigenschaften in A3) besitzt? Und wenn dies nicht der Fall ist, wie können wir dann feststellen, welches von diesen Elementen das mit „0“ bezeichnete Element ist? Dieses Problem hätten wir umgehen können, wenn wir die Eindeutigkeit des Elements in unserem Axiom A3) gefordert hätten. Warum haben wir das aber nicht getan? In der Mathematik folgt man dem Grundsatz, so wenig wie möglich vorauszusetzen und soviel wie möglich zu folgern. Es wäre unnötig gewesen, die Eindeutigkeit des Elements „0“ zu fordern, weil wir sie stattdessen mit Hilfe unserer Axiome beweisen können.

**Satz 1.3** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

- 1) Das neutrale Element in A3) ist eindeutig bestimmt.
- 2) Das zu  $a$  additive Inverse in A4) ist eindeutig bestimmt. (Wir bezeichnen es im Folgenden mit  $-a$ .)
- 3) Das Element 0 ist sein eigenes additives Inverses, d.h. es gilt  $-0 = 0$ .
- 4) Die Gleichung  $a + x = b$  hat genau eine Lösung, nämlich  $x = (-a) + b$ .

**Beweis:**

- 1) Die Eindeutigkeit eines Elements mit einer gegebenen Eigenschaft zeigt man üblicherweise, indem man nachweist, dass zwei beliebige Elemente mit der gegebenen Eigenschaft identisch sind. Seien also 0 und  $\hat{0}$  zwei Elemente, die jeweils das Axiom A3) erfüllen, d.h. für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad a + \hat{0} = a.$$

Dann erhalten wir:

$$\hat{0} = \hat{0} + 0 = 0 + \hat{0} = 0,$$

wobei wir im ersten Schritt A3) für das Element 0, im zweiten Schritt A2) und im dritten Schritt A3) für  $\hat{0}$  benutzt haben. Beide Elemente stimmen also überein.

- 2) Seien  $\tilde{a}, \hat{a} \in \mathbb{R}$  additive Inverse von  $a$ , d.h. es gilt  $a + \tilde{a} = 0$  und  $a + \hat{a} = 0$ . Dann folgt:

$$\hat{a} = \hat{a} + 0 = \hat{a} + (a + \tilde{a}) = (\hat{a} + a) + \tilde{a} = (a + \hat{a}) + \tilde{a} = 0 + \tilde{a} = \tilde{a} + 0 = \tilde{a},$$

wobei wir nacheinander die Axiome A3), A4) für  $\tilde{a}$ , A1), A2), A4) für  $\hat{a}$ , A2) und A3) benutzt haben.

- 3) Es gilt  $-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$ , wobei wir nacheinander die Axiome A3), A2) und A4) benutzt haben.
- 4) In der Aussage in 4) stecken genau genommen gleich zwei Aussagen, nämlich eine über die Existenz der Lösung und eine weitere über deren Eindeutigkeit. Wir beweisen zunächst die Existenz, indem wir zeigen, dass  $(-a) + b$  eine Lösung ist. Es gilt:

$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b,$$

wobei wir nacheinander die Axiome A1), A4), A2) und A3) benutzt haben. Sei nun  $y \in \mathbb{R}$  ein weiteres Element mit der Eigenschaft  $a + y = b$ . Dann gilt:

$$(-a) + b = (-a) + (a + y) = ((-a) + a) + y = (a + (-a)) + y = 0 + y = y + 0 = y,$$

wobei wir nacheinander, die Definition von  $y$ , A1), A2), A4), A2) und A3) benutzt haben. Jede weitere Lösung  $y$  ist also identisch mit  $(-a) + b$ .  $\square$

## II) Axiome der Multiplikation

- M1) Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt das *Assoziativgesetz*:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- M2) Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt das *Kommutativgesetz*:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- M3) Es gibt ein *neutrales Element* der Multiplikation, genannt 1 („Eins“) mit  $1 \neq 0$ , d.h. es gibt  $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$a \cdot 1 = a$$

- M4) Alle von Null verschiedenen Elemente haben *multiplikative Inverse*, d.h. zu jedem  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt es ein  $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ , so dass gilt:

$$a \cdot \tilde{a} = 1$$

Fällt Ihnen etwas auf? Wenn wir die Axiome der Addition und Multiplikation miteinander vergleichen, stellen wir fest, dass diese doch sehr ähnlich aussehen. Insbesondere können wir nun analoge Aussagen zu denen in Satz 1.3 beweisen.

**Satz 1.4** Für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und alle  $b \in \mathbb{R}$  gilt:

- 1) Das neutrale Element in M3) ist eindeutig bestimmt.
- 2) Das zu  $a$  multiplikative Inverse in M4) ist eindeutig bestimmt. (Wir bezeichnen es im Folgenden mit  $a^{-1}$  oder mit  $\frac{1}{a}$ .)
- 3) Das Element 1 ist sein eigenes multiplikatives Inverses, d.h. es gilt  $1^{-1} = 1$ .
- 4) Die Gleichung  $a \cdot x = b$  hat genau eine Lösung, nämlich  $x = a^{-1} \cdot b$ .

**Beweis:** (fast komplett) analog zum Beweis von Satz 1.3. (Übung.)  $\square$

Den/Die Mathematiker/in ärgert es üblicherweise, wenn er/sie den (fast) gleichen Sachverhalt zweimal beweisen muss. Wir hätten an dieser Stelle auch einen Begriff definieren können, der Addition und Multiplikation verallgemeinert und uns erlaubt, Aussagen wie in Satz 1.10 in einer allgemeineren Form zu folgern. Diese Erkenntnisse hätten wir dann auf die Spezialfälle der Addition und Multiplikation anwenden können. Tatsächlich werden Sie genau so in der *Linearen Algebra* vorgehen und dort den Begriff der *Gruppe* einführen, der sogar noch allgemeiner ist als hier angedeutet und insbesondere auf das Kommutativgesetz verzichtet. Dieses haben wir allerdings im Beweis für die Eindeutigkeit des neutralen Elements benutzt. Daher muss man bei der Formulierung der Definition der Gruppe vorsichtiger sein, um hinterher die Eindeutigkeit des neutralen Elements auch ohne das Kommutativgesetz beweisen zu können. (Der Begriff der Gruppe dient nicht nur zur gemeinsamen Betrachtung der Addition und der Multiplikation in den reellen Zahlen, sondern wird Ihnen noch an vielen anderen Stellen in der Mathematik begegnen.)

Das nächste Axiom legt fest, wie die Addition und die Multiplikation miteinander wechselwirken.

### III) Axiom über die Veträglichkeit von Addition und Multiplikation:

D) Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt das *Distributivgesetz*:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

**Satz 1.5** Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:

- 1)  $a \cdot 0 = 0$ .
- 2)  $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ .
- 3)  $-(-a) = a$ .
- 4)  $a \cdot b = 0 \iff (a = 0 \text{ oder } b = 0)$ .
- 5)  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ .

**Beweis:** Übung.  $\square$



Man beachte insbesondere, dass das zweite Distributivgesetz (Teil 5 in Satz 1.5) nicht als Axiom gefordert werden muss, sondern aus den bereits existierenden Axiomen gefolgt werden kann. Dies geschieht sehr einfach mit Hilfe des Kommutativgesetzes M2) und des Distributivgesetzes D). Satz 1.5 ließe sich noch fortsetzen und wir könnten noch etliche weitere Eigenschaften formulieren und beweisen, wollen damit aber keine Zeit verschwenden. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich aus den bisherigen Axiomen alle uns bekannten Rechenregeln für Addition und Multiplikation herleiten lassen. Im Folgenden benutzen wir auch die üblichen Schreibweisen und definieren abkürzend

$$a - b := a + (-b), \quad \frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$$

(womit wir so ganz nebenbei die *Subtraktion* und *Division* eingeführt haben) und benutzen die bekannte Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“, indem wir verkürzt  $ab + cd$  an Stelle von  $(a \cdot b) + (c \cdot d)$  schreiben.

**Bemerkung 1.6** Die Axiome A), M) und D) gelten nicht nur in den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , sondern z.B. auch in den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ . Wir sind also mit unserem Vorhaben, die reellen Zahlen zu charakterisieren, noch nicht am Ziel angelangt. In der Linearen Algebra lernen Sie weitere Beispiele für Mengen kennen, die den Axiomen A), M) und D) genügen. Solche Mengen bezeichnet man als *Körper*.

Bisher kennen wir ganz offiziell erst zwei Elemente des Körpers der reellen Zahlen, nämlich die Elemente 0 und 1. Weitere Elemente lassen sich aber schnell definieren, so werden wir z.B. das Element  $2 := 1 + 1$  (vielleicht nicht ganz überraschend) mit „Zwei“ bezeichnen. Aber haben wir damit eigentlich ein neues Element gefunden?

**Aufgabe 1.7** Versuchen Sie mit Hilfe der Axiome A), M) und D) zu beweisen, dass weder  $2 = 1$  noch  $2 = 0$  gelten.

Wenn Sie die Aufgabe 1.7 korrekt bearbeitet haben, haben Sie festgestellt, dass in der Tat  $2 \neq 1$  gilt. Dagegen wird es Ihnen nicht gelungen sein, auch die Aussage  $2 = 0$  zu widerlegen. Der Grund dafür ist die Existenz eines Körpers, in dem gerade die Eigenschaft  $1 + 1 = 0$  gilt. Dieser nennt sich *Restklassenkörper modulo 2*, wird mit  $\mathbb{F}_2$  bezeichnet und besteht aus genau zwei Elementen:  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ . Addition und Multiplikation sind über die folgenden beiden Tafeln definiert:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Es gilt also  $1 + 0 = 1$ ,  $1 \cdot 1 = 1$  und eben auch  $1 + 1 = 0$ . Trotzdem genügt der Körper allen Axiomen A), M) und D). (Rechnen Sie es nach!) Das bedeutet aber, dass sich die Aussage  $1 + 1 \neq 0$  *nicht* aus diesen Axiomen folgern lässt. Wir benötigen also weitere Axiome, um die reellen Zahlen von so eigenartigen Objekten wie  $\mathbb{F}_2$  zu unterscheiden.

## 1.2 Anordnungsaxiome

**Axiom 1.8** *Es gibt eine Relation  $<$  auf  $\mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

O1) (Trichotomie). *Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  ist genau eine der folgenden drei Aussagen wahr:*

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a$$

O2) (Transitivität). *Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$a < b \text{ und } b < c \implies a < c$$

O3) (1. Monotoniegesetz). *Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$a < b \implies a + c < b + c$$

O4) (2. Monotoniegesetz). *Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$a < b \text{ und } 0 < c \implies ac < bc$$

Gilt  $a < b$ , so sagen wir  $a$  ist *kleiner* als  $b$  bzw.  $b$  ist *größer* als  $a$ . Ihnen ist natürlich auch die Relation “ $\leq$ ” (*kleiner oder gleich*) bekannt. Für diese benötigen wir allerdings kein neues Axiom, weil wir sie auf die Relationen “ $<$ ” und “ $=$ ” zurückführen können.

**Definition 1.9** *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ .*

- 1)  $a \leq b \quad :\iff \quad a < b \text{ oder } a = b.$
- 2)  $a > b \quad :\iff \quad b < a.$
- 3)  $a \geq b \quad :\iff \quad b \leq a.$
- 4)  $a$  heißt *positiv*, falls  $a > 0$  und *negativ*, falls  $a < 0$ .

Als nächstes stellen wir einige wichtige Eigenschaften unserer *Ordnungsrelation* “ $<$ ” zusammen. Diese sind uns zwar vertraut, wir benötigen aber dennoch einen Beweis, um sicherzustellen, dass sie sich allein aus unseren Axiomen herleiten lassen.

**Satz 1.10** *Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:*

- 1)  $a$  ist genau dann negativ, wenn  $-a$  positiv ist, d.h. es gilt:  $a < 0 \iff 0 < (-a).$
- 2) Aus  $a < b$  und  $c < 0$  folgt  $bc < ac.$
- 3) Aus  $a < b$  und  $c < d$  folgt  $a + c < b + d.$
- 4) Falls  $a \neq 0$ , so gilt  $0 < a^2$ , wobei  $a^2 := a \cdot a.$
- 5) Es gilt  $0 < 1$  und  $0 < 2$ , wobei  $2 := 1 + 1$ , also speziell  $2 \neq 0.$
- 6) Aus  $a < b$  folgt  $a < \frac{a+b}{2} < b.$  (Wir nennen  $\frac{a+b}{2}$  arithmetisches Mittel von  $a$  und  $b$ .)

**Beweis:**

- 1) „ $\Rightarrow$ “ Sei  $a < 0$ , dann folgt aus O3), dass

$$0 = a + (-a) < 0 + (-a) = -a,$$

also  $0 < -a$ .

- „ $\Leftarrow$ “ Sei nun  $0 < -a$ . Dann erhalten wir wiederum mit O3), dass

$$a = 0 + a < -a + a = 0,$$

also  $a < 0$ .

- 2) Wegen  $c < 0$  gilt nach 1), dass  $0 < -c$ . Damit erhalten wir aus  $a < b$  mittels O4), dass

$$-ac = a \cdot (-c) < b \cdot (-c) = -bc.$$

Addieren wir auf beiden Seiten  $ac + bc$ , so erhalten wir wegen O3), dass

$$-ac + ac + bc < -bc + ac + bc.$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit  $bc < ac$ .

- 3) Aus  $a < b$  folgt mit O3), dass  $a + c < b + c$ . Analog folgt aus  $c < d$  mit O3), dass  $b + c < b + d$ . Mit der Transitivität O2) folgt dann  $a + c < b + d$ .

- 4) Wegen der Trichotomie O1) gilt entweder  $0 < a$  oder  $a < 0$ , denn  $a = 0$  scheidet auf Grund der Voraussetzung aus. Wir unterscheiden daher zwei Fälle:

*Fall 1:*  $0 < a$ . Dann gilt wegen O4), dass  $0 = 0 \cdot a < a \cdot a = a^2$ .

*Fall 2:*  $a < 0$ . Hier folgt mit 2), dass  $0 = 0 \cdot a < a \cdot a = a^2$ .

In beiden Fällen erhalten wir also  $0 < a^2$ .

- 5) Es gilt  $0 \neq 1$ . Damit folgt aus 4), dass  $0 < 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ . Weiter folgt mit O3), dass  $1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 2$  und dann mit O2), dass  $0 < 2$ .

- 6) Dies ist eine Übung.  $\square$

Auch Satz 1.10 könnten wir noch um etliche Punkte erweitern. Insbesondere Punkt 5) könnten wir fortsetzen, indem wir zeigen, dass

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots,$$

wobei 3, 4, etc. in der offensichtlichen Weise definiert werden. Wir belassen es aber an dieser Stelle mit der Feststellung, dass „alle uns bekannten Rechenregeln für  $<$  gelten“. Weiter geht es mit der Einführung des *Absolutbetrags*.

**Definition 1.11** Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der Absolutbetrag (auch kurz Betrag) von  $a$ .

Die Definition des Betrags für  $a < 0$  wirkt auf den ersten Blick merkwürdig. Mit dem zweiten Blick stellen wir aber fest, dass alles seine Richtigkeit hat, denn z.B. gilt für  $a = -7$ , dass  $|a| = |-7| = -(-7) = 7$ .

**Bemerkung 1.12** Für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

- 1)  $|a| \geq 0$ .
- 2)  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

Die Aussagen in Bemerkung 1.12 sind offensichtlich. Durchaus beweisbedürftig sind allerdings die folgenden Eigenschaften des Betrages. Dabei werden wir uns die Arbeit aber ein bisschen teilen.

**Satz 1.13** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $|a| = 0 \iff a = 0$ .
- 2)  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .
- 3)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . (Dreiecksungleichung)

**Beweis:** 1) und 2) dürfen Sie zur Übung beweisen.

3) Aus  $-|a| \leq a \leq |a|$  und  $-|b| \leq b \leq |b|$  folgt mit Teil 3) von Satz 1.10, dass

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|. \quad (1.1)$$

Wir betrachten nun zwei Fälle:

a)  $a + b \geq 0$ . In diesem Fall folgt mit der rechten Ungleichung in (1.1), dass

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|.$$

b)  $a + b < 0$ . Hier erhalten wir analog aus der linken Ungleichung in (1.1), dass

$$|a + b| = -(a + b) \leq -(-(|a| + |b|)) = |a| + |b|. \quad \square$$

Woher der Name “Dreiecksungleichung” für die Eigenschaft in Teil 3) von Satz 1.13 kommt, erfahren wir in Kapitel 5.

Eine Menge, die den Körperaxiomen aus Abschnitt 1.1 und den Anordnungsaxiomen aus Abschnitt 1.2 genügt, nennen wir einen *angeordneten Körper*. Beispiele dafür sind  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  (was zeigt, dass wir die reellen Zahlen immer noch nicht genügend charakterisiert haben), ein Gegenbeispiel ist der Körper  $\mathbb{F}_2$ . Dies wissen wir, weil in diesem Körper  $1+1=0$  gilt, während aus den Körperaxiomen zusammen mit den Anordnungsaxiomen  $1+1 \neq 0$  folgt.

Bevor wir mit der Charakterisierung der reellen Zahlen durch Axiome fortfahren, wenden wir uns einer wichtigen Teilmenge der reellen Zahlen zu.

## 1.3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

In diesem Abschnitt widmen wir uns einer wichtigen Teilmenge der reellen Zahlen, den sogenannten *natürlichen Zahlen*. Da wir die reellen Zahlen als gegeben betrachtet haben, benötigen wir für die Einführung der natürlichen Zahlen keine weiteren Axiome, sondern können ihre Existenz aus den uns bisher bekannten Axiomen folgern. Ein naheliegender Versuch wäre nun, die natürlichen Zahlen so zu definieren, wie wir es bereits im vorangegangenen Abschnitt angedeutet haben. Die Zahlen 0, 1, 2 haben wir bereits definiert, weiter ginge es so:

$$3 := 2 + 1, \quad 4 := 3 + 1, \quad 5 := 4 + 1, \dots$$

Auf diese Art können wir jede beliebige natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  definieren, jedoch nicht die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen, da wir durch die angegebene Konstruktionsvorschrift niemals zu einem Ende kommen. Wir können zwar endlich viele Zahlen  $0, 1, \dots, n$  definieren, dies bleiben aber leider immer nur endlich viele Zahlen, egal, wie groß wir  $n$  wählen. Wir werden daher einen gänzlich anderen Weg gehen, um die Menge  $\mathbb{N}$  zu definieren. Dieser Weg führt über die sogenannten *induktiven Mengen*.

**Definition 1.14** Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$  heißt induktiv, falls gilt:

- 1)  $0 \in M$ .
- 2) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$ .

Wir erkennen hier die wesentliche Idee unserer oben angedeuteten “Konstruktionsvorschrift” wieder. Es gibt allerdings sehr viele Mengen, die induktiv sind. Eine davon stellen wir im folgenden Beispiel vor.

**Beispiel 1.15** Die Menge  $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  ist induktiv, denn offenbar gilt  $0 \in M$  und außerdem gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$x \in M \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 1 \geq 0 \Rightarrow x + 1 \in M$$

Die Menge der natürlichen Zahlen definieren wir nun mit Hilfe des folgenden Satzes:

**Satz 1.16** Sei  $I$  eine (Index-)Menge und seien  $M_i \subseteq \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , induktive Mengen. Dann ist auch

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

eine induktive Menge.

**Beweis:** Wir zeigen, dass die beiden Bedingungen aus der Definition der induktiven Menge erfüllt sind.

1) Da alle  $M_i$  induktiv sind, gilt für jedes  $i \in I$ , dass  $0 \in M_i$ . Daraus erhalten wir per Definition des Durchschnitts  $0 \in \bigcap_{i \in I} M_i$ .

2) Sei  $x \in \bigcap_{i \in I} M_i$ . Dann gilt  $x \in M_i$  für alle  $i \in I$ . Da alle  $M_i$  induktiv sind, gilt auch  $x + 1 \in M_i$  für alle  $i \in I$  und daher  $x + 1 \in \bigcap_{i \in I} M_i$ .  $\square$

**Definition 1.17** Sei  $\mathcal{M}$  die Menge aller induktiven Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Dann heißt

$$\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}$$

die Menge der natürlichen Zahlen. Ihre Elemente heißen natürliche Zahlen.

**Bemerkung 1.18** 1) Durch die Definition erhalten wir sofort: Ist  $M \subseteq \mathbb{R}$  eine induktive Menge, so gilt  $\mathbb{N} \subseteq M$ .

2)  $0 \in \mathbb{N}$  ist die *kleinste* natürliche Zahl (d.h.  $0 \leq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ), denn nach Beispiel 1.15 ist  $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  induktiv und daher gilt nach 1), dass  $\mathbb{N} \subseteq M$ . Also enthält  $\mathbb{N}$  keine negativen reellen Zahlen.

3) Es gibt keine *größte* natürliche Zahl (d.h. keine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ ), denn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt auch  $n + 1 \in \mathbb{N}$  und  $n < n + 1$ .

**Satz 1.19 (Induktionssatz)** Sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  induktiv. Dann gilt  $M = \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Da  $M$  induktiv ist, gilt nach Bemerkung 1.18, dass  $\mathbb{N} \subseteq M$ . Andererseits gilt nach Voraussetzung  $M \subseteq \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $M = \mathbb{N}$ .  $\square$

Als nächstes stellen wir ein paar wichtige Eigenschaften der neu definierten Menge  $\mathbb{N}$  zusammen.

**Satz 1.20** Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt:

- 1)  $m + n \in \mathbb{N}$  und  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ .
- 2)  $m - n \in \mathbb{N}$  falls  $m \geq n$ .
- 3) Es existiert kein  $p \in \mathbb{N}$  mit  $n < p < n + 1$ .
- 4) In jeder nichtleeren Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$  gibt es ein kleinstes Element (d.h. ein Element  $a \in M$  mit  $a \leq p$  für alle  $p \in M$ ).

**Beweis:** Übung. (Sie dürfen dazu schon das Prinzip der vollständigen Induktion verwenden, das wir in Satz 1.24 unabhängig von dem hier vorliegenden Satz beweisen werden.)  $\square$

Satz 1.20 wirkt auf den ersten Blick sonderbar und vielleicht sogar überflüssig. Diese Eigenschaften sind uns sehr vertraut und doch offensichtlich, oder nicht? Allerdings haben wir die natürlichen Zahlen auf eine sehr abstrakte Art und Weise über induktive Mengen definiert und daher wissen wir an dieser Stelle noch gar nicht, ob die natürlichen Zahlen überhaupt das sind, was wir uns bisher immer unter ihnen vorgestellt haben. Wir müssen daher an dieser Stelle nachweisen, dass die uns bekannten grundlegenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen tatsächlich erfüllt sind. Diese Nachweise sind alles andere als trivial und nicht ganz einfach, eignen sich aber hervorragend für Sie zum Üben des Umgangs mit abstrakten Begriffen.

**Bemerkung 1.21** Aus Satz 1.20 folgt  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  (Wie bereits in Abschnitt 0.2 erwähnt sind nicht alle Mathematiker dieser Meinung. In anderen Kursen sehen sie auch häufig die Notation  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  und  $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ .)

Als nächstes führen wir eine weitere hilfreiche Notation ein, die in der Mathematik sehr häufig benutzt wird, nämlich das *Summenzeichen* und das *Produktzeichen*.

**Definition 1.22** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n$  und zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq k \leq n$  sei ein  $a_k \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann definieren wir

$$1) \quad \sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n, \quad 2) \quad \prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Weiter definieren wir für den Fall  $m < n$ , dass

$$3) \quad \sum_{k=n}^m a_k := 0 \quad 4) \quad \prod_{k=n}^m a_k := 1.$$

**Beispiel 1.23** Wir erhalten

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

und

$$\prod_{k=3}^6 (k-2) = (3-2) \cdot (4-2) \cdot (5-2) \cdot (6-2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

sowie

$$\sum_{k=1}^0 k = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^0 k = 1.$$

Die letztere Notation ist etwas gewöhnungsbedürftig, aber sehr nützlich, da man sich so unnötige Fallunterscheidungen in der Notation ersparen kann. Vom folgenden Standpunkt aus betrachtet ist sie auch durchaus naheliegend: Wenn wir “über die leere Menge summieren” erhalten wir 0, das neutrale Element der Addition. Analog erhalten wir das neutrale Element der Multiplikation 1, wenn wir “das Produkt über die leere Menge bilden”.

Der Hauptgrund dafür, dass wir die natürlichen Zahlen über induktive Mengen definiert haben, ist der, dass wir auf diese Art und Weise ein wichtiges Beweisprinzip in der Mathematik quasi auf dem silbernen Tablett präsentiert bekommen, in dem Sinne, dass wir es sehr einfach beweisen können. Dieses Prinzip ist das der sogenannten *vollständigen Induktion*.

**Satz 1.24 (Beweisprinzip der vollständigen Induktion)** Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $A(n)$  gegeben. Falls gilt:

i) (Induktionsanfang)  $A(0)$  ist wahr,

ii) (Induktionsschritt)  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

dann ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine wahre Aussage.

**Beweis:** Wir definieren die Menge

$$W := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Dann gilt per Definition  $W \subseteq \mathbb{N}$  und aus den Voraussetzungen 1) und 2) folgt, dass  $W$  eine induktive Menge ist. Folglich gilt nach dem Induktionssatz  $W = \mathbb{N}$ . Dies bedeutet aber nach Definition von  $W$  gerade, dass  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine wahre Aussage ist.  $\square$

Als Beispiel für einen Beweis mit vollständiger Induktion beweisen wir eine Formel für die Summe der ersten  $n+1$  natürlichen Zahlen und üben dabei gleichzeitig die Verwendung des Summenzeichens.

**Satz 1.25 (Gaußsche Summenformel)** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis wie angekündigt mit vollständiger Induktion. Unsere von  $n$  abhängige Aussage  $A(n)$  ist:

$$A(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) (Induktionsanfang): Die Aussage  $A(0) : \sum_{k=0}^0 k = \frac{0(0+1)}{2}$  ist wahr, denn beide Seiten der Gleichung liefern das Ergebnis 0.

2) (Induktionsschritt): Hier müssen wir zeigen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ . Angenommen, die Aussage  $A(n)$  gilt für ein beliebiges, aber fest gewähltes  $n \in \mathbb{N}$ , d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

für dieses spezielle  $n$ . (Dies nennen wir auch die *Induktionsvoraussetzung*.) Z.z. ist, dass auch die Aussage  $A(n+1)$  wahr ist, d.h. dass für unser spezielles  $n$  gilt, dass

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$



(Dies nennen wir auch die *Induktionsbehauptung* und den zugehörigen Beweis nennen wir *Induktionsschluss*.) Wir betrachten zunächst die linke Seite der Gleichung und spalten den letzten Summanden unserer Summe ab. Dann können wir für die übriggebliebene Summe unsere Induktionsvoraussetzung verwenden und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ . Da außerdem  $A(0)$  wahr ist, gilt nach Satz 1.24 die Aussage  $A(n)$  nun für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Da uns das Summen- und das Produktzeichen noch häufig begegnen werden, stellen wir noch einige Rechenregeln dafür zusammen. Auf einen Beweis verzichten wir an dieser Stelle. (Zur Übung sollten Sie diesen aber ausführen. Benutzen Sie dabei die Körperaxiome und vollständige Induktion.)

**Bemerkung 1.26** Seien  $a_i, b_{ij}, d_i \in \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  und  $n, m \in \mathbb{N}$ .

- 1) Für  $n \geq m$  gilt:  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i$  und  $\prod_{i=1}^n a_i = \left( \prod_{i=1}^m a_i \right) \cdot \left( \prod_{i=m+1}^n a_i \right)$
- 2) Es gilt das verallgemeinerte Kommutativgesetz, d.h. ist  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Permutation* (d.h. hier eine bijektive Abbildung, vgl. Definition 0.23), so gilt:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{\sigma(i)} \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)}$$

- 3) Speziell gilt  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} = \sum_{j=1}^m b_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^m b_{nj} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij}$ .

- 4) Für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt  $c \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n ca_j$ .

- 5) Mit Hilfe von zweimaliger Benutzung von 4) und dann von 3) erhalten wir:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m d_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot d_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_i d_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i d_j$$

Da jede natürliche Zahl nicht negativ ist, gilt natürlich  $-n \notin \mathbb{N}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 0$ . Diese additiven Inversen fassen wir nun mit den natürlichen Zahlen zu den *ganzen Zahlen* zusammen.

**Definition 1.27** Die Menge

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{ -n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

heißt Menge der ganzen Zahlen. Ihre Elemente heißen ganze Zahlen.

**Bemerkung 1.28** Offenbar gilt  $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ .

Als nächstes führen wir eine weitere Rechenoperation auf den reellen Zahlen ein: Das Potenzieren. Hierzu benötigen wir keine neuen Axiome, da wir den Begriff auf die Multiplikation zurückführen können - zumindest für ganzzahlige Potenzen. Mit beliebigen reellen Potenzen befassen wir uns erst zu einem späteren Zeitpunkt.

**Definition 1.29** Seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann definieren wir

- 1)  $x^0 := 1$ .
- 2)  $x^{n+1} := x \cdot x^n$ , falls  $x^n$  definiert ist.
- 3) Für  $x \neq 0$  definieren wir  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .

Definition 1.29 ist ein Beispiel für eine sogenannte *induktive Definition*. Machen Sie sich klar, dass das Induktionsprinzip garantiert, dass  $x^n$  durch 1) und 2) für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert ist. In Teil 3) waren wir allerdings etwas unpräzise. Wir haben zwar vorausgesetzt, dass  $x \neq 0$  gilt, aber dann bilden wir das multiplikative Inverse von  $x^n$ . Wissen wir denn bereits, dass auch  $x^n \neq 0$  gilt? Offiziell noch nicht! Damit ist an dieser Stelle nicht klar, ob  $x^{-n}$  auch *wohldefiniert* ist, d.h., dass  $x^{-n}$  nun für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  erklärt ist, in dem Sinn, dass der Ausdruck  $\frac{1}{x^n}$  in all diesen Fällen existiert.

**Bemerkung 1.30** 1)  $x^{-n}$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  wohldefiniert, denn aus  $x \neq 0$  folgt  $x^n \neq 0$ . (Übung. Dies beweisen Sie mit vollständiger Induktion.)

- 2) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $x^n = \prod_{i=1}^n x$ , denn es gilt

$$x^0 = 1 = \prod_{i=1}^0 x \quad \text{und} \quad x^{n+1} = x^n \cdot x = \left( \prod_{i=1}^n x \right) \cdot x = \prod_{i=1}^{n+1} x.$$

(Machen Sie sich klar, dass dies im Grunde ein Induktionsbeweis war - definitiv viel zu knapp für eine bearbeitete Hausaufgabe, aber akzeptabel in einer Vorlesung.)

- 3) Beachten Sie, dass per Definition  $0^0 = 1$  gilt. (Hier gibt es manchmal Zweifel, dass dies auch wirklich "stimmt". Per Definition stimmt es nun! Warum aber definiert man z.B. nicht  $0^0 = 0$ , da doch auch  $0^n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt? Tatsächlich hätten wir dies durchaus tun können. Die Definition  $0^0 = 1$  wird sich allerdings im Folgenden als viel nützlicher erweisen und darum machen wir es so!)

**Satz 1.31** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Dabei seien  $x, y \neq 0$ , falls  $n < 0$  oder  $m < 0$ . Dann gilt:

- 1)  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ .
- 2)  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ .
- 3)  $(xy)^n = x^n \cdot y^n$ .

**Beweis:** Übung.  $\square$

Für spätere Zwecke stellen wir hier noch ein paar weitere nützliche Definitionen und Sätze zusammen.

**Satz 1.32 (Geometrische Summenformel)** Sei  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Beweis:** per vollständiger Induktion. (Wir benutzen dabei im Folgenden die Abkürzungen “ $n = 0$ ” und “ $n \Rightarrow n + 1$ ” für *Induktionsanfang* und *Induktionsschritt*.)

“ $n = 0$ ”: Es gilt  $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1 - q}{1 - q} = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}$ .

“ $n \Rightarrow n + 1$ ”: Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{(1 - q)q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q},$$

wobei wir im zweiten Schritt die Induktionsvoraussetzung  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  für unser festes  $n$  benutzt haben.  $\square$

**Definition 1.33 (Fakultät, Binomialkoeffizient)** Seien  $k, n \in \mathbb{N}$ . Wir setzen:

- 1)  $n! := \prod_{j=1}^n j$
- 2)  $\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{n - j + 1}{j} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$
- 3)  $\binom{n}{-k} := 0$ , falls  $k \neq 0$

**Bemerkung 1.34** Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ .

- 1) Nach Definition des leeren Produkts gilt  $\binom{n}{0} = 1$ , speziell also  $\binom{0}{0} = 1$ .
- 2) Für  $0 \leq k \leq n$  erhalten wir die bekannte Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.2)$$

Unsere Definition des Binomialkoeffizienten ist allerdings etwas allgemeiner, denn so erhalten wir außerdem  $\binom{n}{k} = 0$  für  $k > n$ .

- 3) Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gilt  $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ . Für  $0 \leq m \leq n$  folgt dies aus (1.2) und andernfalls sind beide Binomialkoeffizienten gleich Null.

Unser nächstes Ziel ist es, den *Binomischen Lehrsatz* zu beweisen. Dafür benötigen wir ein Hilfsresultat. Einen solchen “Hilfssatz”, der in erster Linie im Beweis eines anderen Satzes angewendet wird, nennt man in der Mathematik ein *Lemma*.

**Lemma 1.35** Für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Beweis:** Für  $k \geq n$  und  $k \leq 0$  ist dies trivial. (Klar?) Sei also  $0 < k < n$ . Dann gilt mit Hilfe der Formel (1.2), dass

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k \cdot (n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad \square \end{aligned}$$

Tatsächlich ist die Formel in Lemma 1.35 nicht nur ein Resultat, das wir im nachfolgenden Beweis brauchen, sondern sie ist auch die Grundlage des *Pascalschen Dreiecks*, von dem wir in (1.3) einen Ausschnitt darstellen.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & & \binom{0}{0} \\ & & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & \end{array} \quad (1.3)$$

Auf der linken Seite in (1.3) sehen Sie das klassische Pascalsche Dreieck mit natürlichen Zahlen, auf der rechten Seite die entsprechende Version mit Binomialkoeffizienten. Mit Hilfe von Lemma 1.35 sehen wir, dass ein Eintrag des Dreiecks aus der Summe der beiden über ihn stehenden Einträge erhalten werden kann.

**Satz 1.36 (Binomischer Lehrsatz)** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (1.4)$$

**Beweis:** (Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion und mit Hilfe eines Tricks, der sogenannten *Indexverschiebung*: Man kann eine Summe auf verschiedene Arten schreiben, wenn man die Grenzen des *Laufindex* entsprechend anpasst. So erhalten wir z.B.:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = \sum_{k=1}^n a_{k-1}$$

Natürlich können wir den Index auch “in die andere Richtung” verschieben und auch um mehr als nur “Eins”. Beginnen wir aber nun mit dem eigentlichen Induktionsbeweis.)

$$“n = 0”: \text{ Es gilt: } (x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^{0-k} y^0.$$

“ $n \Rightarrow n + 1$ ”: Die Formel (1.4) sei wahr für ein beliebiges (aber im Folgenden festes)  $n \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen, dass sie dann auch für  $n + 1$  wahr ist. Es gilt

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n (x + y) = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der ersten Zeile die Induktionsvoraussetzung, in der vierten Zeile den Trick mit der Indexverschiebung und in der sechsten Zeile Formel (1.3) benutzt.  $\square$

**Beispiel 1.37** Für  $n = 2$  erhalten wir  $(x + y)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} x^{2-k} y^k = x^2 + 2xy + y^2$ . Dies ist die aus der Schule bekannte *erste binomische Formel*. Für  $n = 3$  gilt dagegen

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

## 1.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir führen zunächst eine weitere wichtige Teilmenge der reellen Zahlen ein.

**Definition 1.38** *Die Menge*

$$\mathbb{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0 \right\}$$

heißt Menge der rationalen Zahlen. Ihre Elemente heißen rationale Zahlen.

**Bemerkung 1.39** 1) Für die Menge der rationalen Zahlen gibt es auch andere Mengenschreibweisen, die von unserer Definition leicht abweichen, wie z.B.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Machen Sie sich klar, dass beide Schreibweisen dieselbe Menge liefern, so können wir z.B. ausnutzen, dass  $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$  gilt, um einzusehen, dass  $-\frac{1}{2}$  auch nach unserer Definition 1.38 eine rationale Zahl ist.

- 2) Für  $x, y \in \mathbb{Q}$  gilt  $x + y, x - y, x \cdot y \in \mathbb{Q}$  und im Fall  $y \neq 0$  auch  $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ . Insbesondere erfüllt auch  $\mathbb{Q}$  die Körper- und Anordnungsaxiome aus den Abschnitten 1.1 und 1.2.

Sind die rationalen Zahlen denn überhaupt von den reellen Zahlen verschieden? Diese Frage können wir an dieser Stelle leider noch nicht beantworten, denn beide Mengen erfüllen die Körper- und Anordnungsaxiome aus den Abschnitten 1.1. und 1.2. Daher benötigen wir jetzt ein weiteres Axiom, das eine Eigenschaft der reellen Zahlen charakterisiert, die die rationalen Zahlen nicht besitzen. Dieses Axiom werden wir *Vollständigkeitsaxiom* nennen, da der folgende Satz zeigt, dass die rationalen Zahlen gewisse “Lücken” aufweisen, in diesem Sinne also nicht *vollständig* sind.

**Satz 1.40** *Es gibt keine rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  mit der Eigenschaft  $x^2 = 2$ .*

**Beweis:** (Wir lernen eine neue Beweistechnik kennen, den *Beweis durch Widerspruch*. Wir nehmen an, dass das Gegenteil der zu beweisenden Aussage gilt und leiten dann daraus einen Widerspruch her. Da sich aus wahren Aussagen keine falschen Aussagen folgern lassen (vgl. Abschnitt 0.1), muss die Aussage, von der wir ausgegangen sind, falsch gewesen sein.)

Angenommen, es gibt ein  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$ . Dann existieren  $p, q \in \mathbb{Z}$  mit  $q > 0$ , so dass  $x = \frac{p}{q}$ . O.B.d.A.<sup>1</sup> können wir annehmen, dass  $p$  und  $q$  nicht beide gerade ist, denn andernfalls können wir solange kürzen, bis  $p$  ungerade oder  $q$  ungerade ist. Aus  $x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$

---

<sup>1</sup>Dies ist die Abkürzung für “ohne Beschränkung der Allgemeinheit” - eine Floskel um auszudrücken, dass die folgende Einschränkung auf einen Spezialfall erlaubt ist, da sich der allgemeine Fall auf diesen Spezialfall zurückführen lässt.

folgt  $p^2 = 2q^2$ . Demnach ist  $p^2$  und damit auch  $p$  eine gerade Zahl. Dann gibt es aber ein  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $p = 2m$ . Daraus erhalten wir wiederum

$$2q^2 = p^2 = 4m^2 \quad \text{bzw.} \quad q^2 = 2m^2.$$

Das bedeutet aber, dass  $q^2$  und damit auch  $q$  gerade ist und dies steht im Widerspruch dazu, dass  $p$  und  $q$  nicht beide gerade sind. Folglich war unsere Annahme falsch und es gibt keine rationale Zahl  $x$  mit  $x^2 = 2$ .  $\square$

Die Einführung eines Axioms, dass die Existenz einer Lösung der Gleichung  $x^2 = 2$  in den reellen Zahlen postuliert, wäre an dieser Stelle nur eine kurzfristige Lösung unseres Problems, da dann immer noch unerwünschte "Lücken" an anderen Stellen auftreten könnten. Daher werden wir einen ganz anderen Weg gehen.

**Definition 1.41** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

- 1)  $M$  heißt nach oben beschränkt, falls es  $s \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $x \leq s$  für alle  $x \in M$  gilt.
- 2) Die Zahl  $s \in \mathbb{R}$  aus 1) heißt dann obere Schranke von  $M$ .

**Beispiel 1.42** 1) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten die folgenden Teilmengen:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ ]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ ]a, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \end{aligned}$$

Eine weitere übliche Schreibweise benutzt runde Klammern anstelle der umgedrehten eckigen Klammern, also z.B.  $(a, b]$  statt  $]a, b]$ . In dieser Vorlesung werden wir allerdings stets die eckigen Klammern verwenden.

Alle oben angegebenen Intervalle sind nach oben beschränkt. Eine obere Schranke ist jeweils  $b$ , aber auch jede reelle Zahl  $c \geq b$  ist eine obere Schranke.

- 2) Es gibt noch weitere Intervalltypen. Seien dazu  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wir setzen:

$$\begin{aligned} ]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ ]-\infty, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\ [a, \infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ ]a, \infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \end{aligned}$$

Darüberhinaus benutzt man auch manchmal die Schreibweise  $] - \infty, \infty[ := \mathbb{R}$ . Die Mengen  $] - \infty, b]$  und  $] - \infty, b[$  sind nach oben beschränkt, die Mengen  $[a, \infty[$ ,  $]a, \infty[$  und  $\mathbb{R}$  jedoch nicht. Wir zeigen dies exemplarisch für die Menge  $[a, \infty[$ . Angenommen  $s \in \mathbb{R}$  ist eine obere Schranke von  $[a, \infty[$ . Dann gilt  $a \leq s$  und daher  $s \in [a, \infty[$ . Wegen  $s < s + 1$  gilt auch  $s + 1 \in [a, \infty[$ . Dann ist aber  $s$  keine obere Schranke von  $[a, \infty[$  im Widerspruch zur Annahme. Folglich ist  $[a, \infty[$  nicht nach oben beschränkt.

Intervalle werden im Laufe der Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen. Daher halten wir an dieser Stelle kurz fest:

**Definition 1.43** Eine Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{R}$  heißt *Intervall*, falls  $[a, b] \subseteq I$  für alle  $a, b \in I$  gilt.

Tatsächlich können Sie zeigen, dass jedes Intervall eine der Formen aus Teil 1) oder Teil 2) von Beispiel 1.42 hat. (Übung! Sie dürfen dazu schon das Axiom 1.48 benutzen.)

Wir nennen ein Intervall *abgeschlossen*, wenn es alle *Randpunkte* (d.h. hier Intervallgrenzen) enthält und *offen*, wenn es diese nicht enthält, wobei wir allerdings  $-\infty$  und  $\infty$  nicht als Randpunkte auffassen, da es sich hier nicht um reelle Zahlen handelt. Demnach sind  $] - \infty, b]$ ,  $[a, b]$  und  $[a, \infty[$  abgeschlossene Intervalle,  $] - \infty, b[$ ,  $]a, b[$  und  $]a, \infty[$  dagegen offene Intervalle. Die beiden übrig gebliebenen Typen  $]a, b]$  und  $[a, b[$  nennen wir *halboffene Intervalle*. In Kapitel 4 werden wir viele Sätze für Funktionen auf Intervallen der Form  $[a, b]$  beweisen, so dass wir diesen einen eigenen Namen geben: Wir nennen sie *kompakte Intervalle*.

Wie wir in Beispiel 1.42 gesehen haben, sind obere Schranken nicht eindeutig bestimmt. Diesen kleinen Schönheitsfehler werden wir mit Hilfe des nächsten Begriffs beheben.

**Definition 1.44** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $s_0 \in \mathbb{R}$  eine obere Schranke von  $M$ .

- 1)  $s_0$  heißt *Supremum* (oder kleinste obere Schranke) von  $M$ , falls für jede obere Schranke  $s \in \mathbb{R}$  von  $M$  gilt, dass  $s_0 \leq s$ . Schreibweise:  $s_0 = \sup M$ .
- 2) Ist  $s_0$  ein Supremum von  $M$  und gilt zusätzlich  $s_0 \in M$ , so heißt  $s_0$  *Maximum* von  $M$ . Schreibweise:  $s_0 = \max M$ .

**Bemerkung 1.45** Ist  $M \subseteq \mathbb{R}$  nach oben beschränkt, so hat  $M$  höchstens ein Supremum, denn sind  $s_0$  und  $\tilde{s}_0$  zwei Suprema von  $M$ , so gilt einerseits  $s_0 \leq \tilde{s}_0$ , da  $s_0$  Supremum und  $\tilde{s}_0$  eine obere Schranke ist. Andererseits gilt  $\tilde{s}_0 \leq s_0$ , da auch  $\tilde{s}_0$  ein Supremum und  $s_0$  eine obere Schranke ist. Damit folgt dann aber  $s_0 = \tilde{s}_0$ .

Analog zu den bisher eingeführten Begriffen benutzen wir im Folgenden für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  auch die Begriffe *nach unten beschränkt*, *untere Schranke*, *Infimum* (mit der Schreibweise  $\inf M$ ) und *Minimum* (mit der Schreibweise  $\min M$ ). Die exakte Definition bleibt an dieser Stelle zu Übungszwecken Ihnen überlassen.

**Definition 1.46** Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  heißt *beschränkt*, falls sie nach oben beschränkt und nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x \in M$  gilt:

$$s_1 \leq x \leq s_2$$

**Beispiel 1.47** 1) Die leere Menge  $\emptyset$  ist beschränkt. (Klar?)

- 2) Die Intervalle in Teil 1) von Beispiel 1.42 sind beschränkt, die in Teil 2) nicht.



- 3) Das folgende Beispiel soll uns verdeutlichen, warum der Begriff des Supremums wichtig ist und der Begriff des Maximums nicht ausreicht. Dazu betrachten wir die Menge:

$$M := ] - \infty, 1[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$$

Dann gilt  $\sup M = 1$ , denn 1 ist eine obere Schranke von  $M$  und für jede weitere obere Schranke  $s \in \mathbb{R}$  von  $M$  beweisen wir jetzt, dass  $1 \leq s$  gilt.

Diesen Beweis führen wir per *Kontraposition* (vgl. Abschnitt 0.1). Aus  $s < 1$  folgt mit Teil 6) von Satz 1.10, dass

$$s < \frac{s+1}{2} < 1$$

und wegen  $\frac{s+1}{2} \in M$  ist  $s$  dann keine obere Schranke von  $M$ . Wir haben also gezeigt, dass die Aussage

$$s < 1 \implies s \text{ ist keine obere Schranke von } M$$

wahr ist. Per Kontraposition ist dann auch die Aussage

$$s \text{ ist eine obere Schranke von } M \implies 1 \leq s$$

eine wahre Aussage. Es gilt also  $\sup M = 1$ . Beachten Sie an dieser Stelle, dass  $\sup M \notin M$  gilt. Die Menge  $M$  hat also kein Maximum. In der Tat gibt es kein größtes Element in  $M$ , denn ist  $x \in M$ , so folgt  $x < 1$  und mit Teil 6) von Satz 1.10 folgt  $x < \frac{x+1}{2} < 1$ , also  $\frac{x+1}{2} \in M$ . Zu jedem Element  $x$  in  $M$  finden wir also ein Element in  $M$ , das größer ist als  $x$ , nämlich  $\frac{x+1}{2}$ .

- 4) Auch die Menge  $\widetilde{M} := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$  ist nach oben beschränkt, denn z.B. ist  $s = \frac{3}{2}$  eine obere Schranke von  $M$ , denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x > \frac{3}{2} \implies x^2 > \frac{9}{4} > 2 \implies x \notin \widetilde{M}$$

Mit Kontraposition folgt daraus

$$x \in \widetilde{M} \implies x \leq \frac{3}{2}.$$

Hat die Menge  $\widetilde{M}$  aus Beispiel 1.47 auch ein Supremum? Tatsächlich sind wir an dieser Stelle der Vorlesung noch nicht dazu in der Lage, das zu beweisen. Es wird also Zeit für ein weiteres Axiom.

**Axiom 1.48 (Vollständigkeitsaxiom)** Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum.

**Beispiel 1.49** Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms können wir jetzt die Existenz einer Lösung der Gleichung  $x^2 = 2$  in den reellen Zahlen zeigen.<sup>2</sup> (Wir bringen den Nachweis hier nur der Vollständigkeit<sup>3</sup> halber, denn im Grunde ist er an dieser Stelle überflüssig, da wir im nächsten Kapitel eine viel elegantere Methode kennenlernen, um Wurzeln einzuführen.)

Nach dem Vollständigkeitsaxiom hat die Menge

$$\widetilde{M} := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

ein Supremum  $s := \sup \widetilde{M}$ . Wir zeigen, dass  $s^2 = 2$  gilt, indem wir zeigen, dass sowohl  $s^2 \geq 2$  als auch  $s^2 \leq 2$  gilt.

“ $s^2 \geq 2$ ”: Angenommen, es gilt  $s^2 < 2$ . Dann gilt weiter, dass  $s > 0$  und damit auch  $2s + 1 > 0$ , da  $\widetilde{M}$  positive Elemente enthält (z.B. 1). Daher ist

$$h := \frac{2 - s^2}{2s + 1}$$

wohldefiniert. Weiter gilt  $0 < h < 1$ , denn angenommen es gilt  $h \geq 1$ . Dann erhalten wir  $2 - s^2 \geq 2s + 1$  und damit  $2 \geq s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$ . Betrachten wir nun  $s + \frac{1}{2}$ , so folgt wegen  $s < s + \frac{1}{2} < s + 1$ , dass

$$s^2 < \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 < (s + 1)^2 \leq 2.$$

Dann wäre aber  $s + \frac{1}{2} \in \widetilde{M}$  im Widerspruch dazu, dass  $s$  eine obere Schranke von  $\widetilde{M}$  ist. Folglich gilt also  $h < 1$  und damit auch  $h^2 < h$ , da  $h$  nach Konstruktion positiv ist. Daraus folgt

$$(s + h)^2 = s^2 + 2sh + h^2 < s^2 + 2sh + h = s^2 + (2s + 1)h = s^2 + 2 - s^2 = 2,$$

d.h. es gilt  $s + h \in \widetilde{M}$  im Widerspruch dazu, dass  $s$  eine obere Schranke von  $\widetilde{M}$  ist. Somit ist  $s^2 < 2$  falsch und es gilt  $s^2 \geq 2$ .

“ $s^2 \leq 2$ ”: Dieser Beweis läuft ähnlich zum ersten Teil. (Übung.)

Die nächste Eigenschaft ist eine wichtige äquivalente Charakterisierung des Begriffs “Supremum”, den wir im Folgenden mehrfach verwenden werden.

**Satz 1.50** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  nichtleer und nach oben beschränkt und sei  $s \in \mathbb{R}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i)  $s = \sup M$ .

ii)  $s$  ist eine obere Schranke von  $M$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $x \in M$  mit  $s - \varepsilon < x$ .  
(In diesem Fall gilt sogar  $s - \varepsilon < x \leq s$ , da  $s$  eine obere Schranke von  $M$  ist.)

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)”: Es gelte  $s = \sup M$ . Dann ist  $s$  eine obere Schranke von  $M$ . Angenommen, ii) gilt nicht, d.h. es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $x \in M$  gilt, dass  $x \leq s - \varepsilon$ . Dies bedeutet aber gerade, dass  $s - \varepsilon$  eine weitere obere Schranke ist, und wegen  $s - \varepsilon < s$  steht dies im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von i). Folglich war unsere Annahme falsch und daher gilt ii).

---

<sup>2</sup>Das “Kleingedruckte” gehört nicht zum eigentlichen Vorlesungsstoff, sondern vertieft diesen z.B. in Form von weiterführenden Beispielen. Einiges davon werden Sie in der Großübung sehen.

<sup>3</sup>Wortspiel!

“*ii)  $\Rightarrow$  i)*”: Es gelte *ii)*, dann ist  $s$  insbesondere eine obere Schranke von  $M$  und wir müssen nur noch zeigen, dass  $s$  auch die kleinste obere Schranke von  $M$  ist. Sei also  $\tilde{s}$  eine weitere obere Schranke von  $M$ . Wir zeigen  $s \leq \tilde{s}$ . Angenommen  $\tilde{s} < s$ . Dann gilt  $\varepsilon := s - \tilde{s} > 0$  und  $\tilde{s} = s - \varepsilon$ . Nach Voraussetzung in *ii)* gibt es ein Element  $x \in M$  mit  $\tilde{s} = s - \varepsilon < x$  im Widerspruch dazu, dass  $\tilde{s}$  eine obere Schranke von  $M$  ist. Also folgt  $s \leq \tilde{s}$ . Da dies für beliebige obere Schranken von  $\tilde{s}$  gilt, folgt, dass  $s$  das Supremum von  $M$  ist.  $\square$

In Worten ausgedrückt verdeutlicht der Satz noch einmal die Interpretation des Supremums als “*kleinste obere Schranke*”: Jede Verkleinerung von einem Supremum  $s$  um  $\varepsilon > 0$  führt dazu, dass  $s - \varepsilon$  für die betrachtete Menge keine obere Schranke mehr ist.

**Korollar 1.51** *Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  eine nichtleere Teilmenge und sei  $s \in \mathbb{R}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*i)  $s = \inf M$ .*

*ii)  $s$  ist eine untere Schranke von  $M$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $x \in M$  mit  $s + \varepsilon > x$ .*

**Beweis:** Übung.  $\square$

Als Anwendung von Satz 1.50 zeigen wir die Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen. Auch wenn uns diese Aussage nicht gerade überraschend vorkommen mag, so ist der Beweis doch alles andere als trivial. Tatsächlich können wir diesen Satz nicht allein auf Grund der Körper- und Anordnungsaxiome beweisen, sondern benötigen an dieser Stelle unser Vollständigkeitsaxiom. (Wir wissen zwar schon, dass es keine größte natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}$  gibt, d.h. kein  $m$  für das  $n \leq m$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dieses Wissen allein schließt aber noch nicht die Existenz einer Zahl  $s \in \mathbb{R}$  mit  $n \leq s$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  aus!)

**Satz 1.52** *Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.*

**Beweis:** Angenommen,  $\mathbb{N}$  ist nach oben beschränkt. Dann hat  $\mathbb{N}$  nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Supremum  $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Da  $s$  eine obere Schranke von  $\mathbb{N}$  ist, gilt insbesondere

$$n \leq s \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Weiter existiert nach Satz 1.50 zu  $\varepsilon = 1$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $s - \varepsilon = s - 1 < n_0$ . Daraus folgt aber

$$s < n_0 + 1 \in \mathbb{N}$$

im Widerspruch zu (1.5). Demnach war unsere Annahme falsch und  $\mathbb{N}$  ist nicht nach oben beschränkt.  $\square$

**Satz 1.53 (Archimedisches Axiom)** *Zu je zwei reellen Zahlen  $a, b$  mit  $a > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so dass  $a \cdot n > b$ .*

**Beweis:** Angenommen, die Aussage des Satzes ist falsch, dann gilt  $a \cdot n \leq b$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $a > 0$  erhalten wir daraus

$$n \leq \frac{b}{a} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $\mathbb{N}$  aber nach oben beschränkt im Widerspruch zu Satz 1.52. Folglich ist die Aussage des Satzes wahr.  $\square$

Warum heißt Satz 1.53 *Archimedisches Axiom*? Ein Axiom ist doch eine Aussage, die als Grundgesetz vorangestellt wird und nicht bewiesen wird. Hier dagegen haben wir Satz 1.53 als Folgerung unserer bisherigen Axiome erhalten. Der Titel “Axiom” hat in diesem Fall historische Gründe. Wir werden am Ende von Kapitel 2 noch einmal auf dieses Thema zurückkommen.

Zu guter Letzt zeigen wir noch, dass auch jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen ein Infimum besitzt. Dafür brauchen wir allerdings kein neues Axiom, weil wir diesen Satz auf unser Vollständigkeitsaxiom zurückführen können.

**Satz 1.54** *Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  hat ein Infimum.*

**Beweis:** Wir geben an dieser Stelle nur eine Beweisidee an, die eigentliche Ausführung des Beweises sei Ihnen überlassen. Betrachten Sie dazu die Menge

$$\widetilde{M} = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$$

und zeigen Sie, dass  $-\sup \widetilde{M}$  das Infimum von  $M$  ist.  $\square$

# Kapitel 2

## Zahlenfolgen

Eins der wichtigsten Hilfsmittel in der Analysis sind *Zahlenfolgen* und der damit verbundene Begriff des *Grenzwerts* bzw. der *Konvergenz*. Tatsächlich werden wir die gesamte Theorie der Analysis auf diesen Grundkonzepten aufbauen. Zuerst werden wir dazu den Begriff der Zahlenfolge oder kurz *Folge* definieren.

**Definition 2.1** Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto a_n$ .

Neben  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  benutzen wir manchmal auch die abkürzende Schreibweise  $(a_n)$ , wenn klar ist, dass eine Folge gemeint ist. Außerdem schreiben wir manchmal ausführlicher

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Weiter erlauben wir auch manchmal Folgen, bei denen der Index nicht bei 0, sondern bei 1 oder allgemeiner bei  $k \in \mathbb{N}$  beginnt mit der Schreibweise

$$(a_n)_{n \geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots).$$

Diese Schreibweise lässt sich durch die Schreibweise  $(a_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$  auf unsere ursprüngliche Definition zurückführen.

**Beispiel 2.2** 1) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$  der Quadratzahlen erhalten wir durch die Bildungsvorschrift  $a_n = n^2$ .

2) Die Folge der Primzahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots)$  lässt sich nicht mehr so einfach durch eine Bildungsvorschrift angeben, ist aber dennoch eine Folge.

3) Die *iterative* Bildungsvorschrift  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$  und

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2$$

liefert die Folge der Fibonacci-Zahlen:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$$

- 4) Die durch die Vorschrift  $a_n = 1 + \frac{1}{10^n}$  gegebene Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, \dots)$$

weist eine Besonderheit auf, denn sie scheint den *Grenzwert* 1 zu besitzen. (Hier haben wir bereits die Ihnen aus der Schule vertraute Dezimalschreibweise benutzt, die wir eigentlich erst in Abschnitt 3.4 offiziell einführen.)

- 5) Auch die durch die Iterationsvorschrift  $a_0 = 2$  und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad \text{für } n \geq 1$$

gegebene Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  scheint einen Grenzwert zu haben. Die Berechnung der ersten Folgenglieder ergibt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\ a_2 &= \frac{17}{12} = 1.41\bar{6} \\ a_3 &= \frac{577}{408} = 1.414215686\ldots \quad (\text{Periodenlänge } 16) \\ a_4 &= \frac{665857}{470832} = 1.4142135623746899\ldots \end{aligned}$$

- 6) Zum Schluss betrachten wir noch die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Betrachten wir die ersten Folgenglieder, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2.25 \\ a_3 &= 2.37037037\ldots \\ a_4 &= 2.44140625 \\ a_5 &= 2.48832 \end{aligned}$$

Ob es hier einen Grenzwert gibt, ist alles andere als offensichtlich. Auch wenn wir noch etwas weiter schauen, wird es noch nicht ganz klar:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2.59374246\ldots \\ a_{100} &= 2.70481382\ldots \\ a_{1000} &= 2.71692393\ldots \end{aligned}$$

Vielleicht kennen Sie aber diese Folge und auch die Antwort auf die entscheidenden Fragen: Hat diese Folge einen Grenzwert? Wenn ja, wie sieht dieser Wert aus?

## 2.1 Konvergenz von Zahlenfolgen

Zunächst einmal müssen wir den Begriff des Grenzwerts präzise definieren. Dies ist gar nicht so einfach und für die Entwicklung dieses Begriffs hat die Mathematik etliche Jahrhunderte benötigt. Um hervorzuheben, wie präzise man bei der Definition des Grenzwerts  $a$  einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sein muss, schauen wir uns zuerst an, welche Umschreibungen dieses Begriffs *nicht* zum gewünschten Ziel führen.

- 1) “Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kommt dem Wert  $a$  immer näher.” Betrachten wir die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 1.5, 1.25, 1.125, 1.0625, 1.03125, \dots),$$

so kommt diese dem Wert  $a = 0$  immer näher. Der Grenzwert dieser Folge scheint aber eher der Wert  $\tilde{a} = 1$  zu sein.

- 2) “Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kommt dem Wert  $a$  beliebig nahe, erreicht ihn aber nie.” Ein Gegenbeispiel ist hier die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

mit  $a_n = 1$  für  $n \geq 4$ . Offenbar ist  $a = 1$  der Grenzwert und dieser wird auch erreicht.

- 3) “Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kommt dem Wert  $a$  beliebig nahe.” Mit dieser Formulierung haben wir das Gegenbeispiel aus 2) eliminiert, aber wenn wir die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0.1, 1, 0.01, 1, 0.001, 1, 0.0001, \dots)$$

betrachten, so kommt diese dem Wert  $a = 0$  beliebig nahe. Wir wollen diesen allerdings nicht als Grenzwert betrachten, da immer wieder Folgenglieder zurück auf den Wert 1 springen.

Im Folgenden vereinbaren wir, dass “ $c > 0$ ” eine Abkürzung ist für “ $c \in \mathbb{R}$  und  $c > 0$ ”.

**Definition 2.3** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen.

- 1)  $(a_n)$  heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N_\varepsilon$  gilt, dass  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

In diesem Fall heißt  $a$  der Grenzwert (auch Limes) der Folge  $(a_n)$ . Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

- 2)  $(a_n)$  heißt konvergent, falls ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $(a_n)$  konvergent gegen  $a$  ist. Andernfalls heißt  $(a_n)$  divergent.

- 3)  $(a_n)$  heißt Nullfolge, falls  $(a_n)$  gegen den Grenzwert  $a = 0$  konvergiert.

Um eine anschauliche Interpretation des Konvergenzbegriffs zu erhalten, führen wir einen weiteren Begriff ein.

**Definition 2.4** Seien  $\varepsilon > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .

**Bemerkung 2.5** Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergente Folge, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass  $a_n \in U_\varepsilon(a)$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$  gilt, d.h. in  $U_\varepsilon(a)$  liegen bis auf endlich viele Ausnahmen alle Folgenglieder  $a_n$ . Da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, können wir diese Erkenntnis mit der Abkürzung “fast alle” für “alle bis auf endlich viele” wie folgt zusammenfassen:

*“In jeder noch so kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung um  $a$  liegen fast alle Folgenglieder  $a_n$ .”*

**Beispiel 2.6** 1) Konstante Folgen sind konvergent, d.h. Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = a \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , denn offenbar gilt

$$|a_n - a| = 0 < \varepsilon$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $\varepsilon > 0$ . Wir können also  $N_\varepsilon = 0$  wählen.

2) Das klassische Beispiel für eine nicht konstante, konvergente Folge ist die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. (Dies ist der typische Beginn für den Konvergenzbeweis einer Folge.) Nach dem Archimedischem Axiom Satz 1.53 existiert eine natürliche Zahl  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass  $\varepsilon N_\varepsilon > 1$ . Daher gilt für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , dass

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt, dass 0 der Grenzwert der Folge  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  ist.  $\square$

Für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  können wir leicht ein explizites  $N_\varepsilon$  angeben, z.B. können wir für  $\varepsilon = 0.1$  die natürliche Zahl  $N_\varepsilon = 11$  wählen, da  $11 \cdot 0.1 = 1.1 > 1$  gilt.

3) Ein Standardbeispiel für eine nicht konvergente Folge ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = (-1)^n$ , also

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

Wir weisen die Divergenz dieser Folge nach. Angenommen, es gibt ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Dann gibt es speziell zu  $\varepsilon = 1 > 0$  ein  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq N_1$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N_1$  erhalten wir dann den Widerspruch

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2,$$

also  $2 < 2$ . Folglich ist  $(a_n)$  gegen kein  $a \in \mathbb{R}$  konvergent.



**Bemerkung 2.7** Aus jeder konvergenten Folge erhalten wir leicht eine Nullfolge. Wegen  $|a_n - a| = |(a_n - a) - 0|$  folgt nämlich unmittelbar aus Definition 2.3: *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn  $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.*

Bisher haben wir immer von *dem* Grenzwert einer Folge gesprochen. Wir haben aber noch gar nicht nachgewiesen, dass ein Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist. Dies holen wir jetzt nach.

**Satz 2.8** *Eine konvergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen hat genau einen Grenzwert.*

**Beweis:** Seien  $a, b$  Grenzwerte der Folge  $(a_n)$ . Angenommen, es gilt  $a \neq b$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$  natürliche Zahlen  $\hat{N}_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon && \text{für alle } n \geq \hat{N}_\varepsilon, \\ |a_n - b| &< \varepsilon && \text{für alle } n \geq \tilde{N}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Setze  $N_\varepsilon := \max\{\hat{N}_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon\}$ . Dann gilt für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , dass

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt  $a = b$ .  $\square$

Für die Untersuchung auf Konvergenz von weiteren Folgen leiten wir im Folgenden ein *notwendiges Kriterium* her. Sind  $A$  und  $B$  zwei Aussagen und gilt  $A \implies B$ , so sagen wir auch, dass  $B$  *notwendig* für  $A$  ist, bzw. dass  $A$  *hinreichend* für  $B$  ist. Will man zeigen, dass  $A$  nicht gilt, so reicht es zu überprüfen, dass  $B$  nicht gilt.

**Definition 2.9** *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt beschränkt, falls die Menge  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist.*

**Bemerkung 2.10** Offenbar sind für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die folgenden Aussagen äquivalent:

- i)  $(a_n)$  ist beschränkt.
- ii) Es gibt  $k, K \in \mathbb{R}$ , so dass  $k \leq a_n \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- iii) Es gibt  $M > 0$ , so dass  $|a_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**Satz 2.11** *Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt.*

**Beweis:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon := 1 > 0$  ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq N_1$  gilt. Damit erhalten wir

$$|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1$$

für alle  $n \geq N_1$ . Setzen wir daher

$$M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N_1-1}|, |a| + 1\},$$

so gilt  $|a_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und daher ist  $(a_n)$  beschränkt.  $\square$

**Beispiel 2.12** Nach unseren Vorbemerkungen liefert uns Satz 2.11 ein einfaches Kriterium, um zu entscheiden, dass eine Folge *nicht* konvergent ist.

- 1) Die Folge  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent, denn sie ist nicht beschränkt, da  $\mathbb{N}$  nach Satz 1.52 nicht beschränkt ist.
- 2) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten die Folge  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  und unterscheiden dabei drei Fälle:

*Fall 1:*  $|x| > 1$ . Sei  $M > 0$  beliebig und  $y := |x| - 1$ . Dann gilt  $y > 0$  und mit (1.4) erhalten wir für  $n \geq 1$ , dass

$$|x^n| = |x|^n = (1 + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} y^k \geq \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 1^{n-k} y^k = 1 + ny,$$

wobei wir für die Ungleichung ausgenutzt haben, dass alle Summanden der Summe nichtnegativ sind. Aus dem Archimedischen Axiom Satz 1.53 folgt die Existenz von  $N \in \mathbb{N}$  mit  $Ny > M - 1$ . Damit folgt

$$|x^N| \geq 1 + Ny > M.$$

Dies bedeutet aber, dass die Folge  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht beschränkt, also auch nicht konvergent ist.

*Fall 2:*  $|x| = 1$ . Falls  $x = 1$ , so ist  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstant und daher konvergent, und der Grenzwert ist 1. Im Fall  $x = -1$  erhalten wir die divergente Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus Teil 3) von Beispiel 2.6.

*Fall 3:*  $|x| < 1$ . Dann folgt  $\frac{1}{|x|} > 1$  und daher gilt  $\frac{1}{|x|} - 1 =: y > 0$ . Analog zu Fall 1 erhalten wir dann für  $n \geq 1$ , dass

$$\frac{1}{|x|^n} = \left( \frac{1}{|x|} \right)^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny > ny$$

und somit  $|x^n| = |x|^n < \frac{1}{ny}$ . Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir jetzt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ . Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(\frac{1}{n})$  eine Nullfolge ist, gibt es zu  $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon y$  ein  $N_{\tilde{\varepsilon}} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon y$$

für alle  $n \geq N_{\tilde{\varepsilon}}$  gilt. Damit erhalten wir

$$|x^n| < \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{y} \varepsilon y = \varepsilon$$

für alle  $n \geq N_{\tilde{\varepsilon}}$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.

## 2.2 Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen

Die Konvergenz von Folgen stets mit Hilfe der Definition zu überprüfen ist auf die Dauer recht unpraktisch. Wir wollen daher in diesem Abschnitt Kriterien zusammenstellen, mit denen wir die Konvergenz von Folgen auch anders nachweisen können. Als Zusatz erhalten wir dabei in einigen Fällen auch Aussagen (z.B. in Form von Rechenregeln) über die Grenzwerte konvergenter Folgen.

**Satz 2.13** *Sei  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist die Folge  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge.*

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es wegen der Beschränktheit von  $(b_n)$  ein  $M \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter gibt es wegen der Konvergenz von  $(a_n)$  zu  $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{M} > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$  für alle  $n \geq N$ . (Wir verzichten von nun an auf die explizite Betonung der Abhängigkeit von  $\varepsilon$  in der Notation und schreiben einfach  $N$  statt  $N_{\tilde{\varepsilon}}$ .) Dann gilt

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .  $\square$

**Satz 2.14** *Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente reelle Zahlenfolgen mit den Grenzwerten  $a$  bzw.  $b$  und sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $(a_n + b_n)$ ,  $(ca_n)$  und  $(a_n b_n)$  konvergente Folgen und es gilt:*

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \cdot a$ ,
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a \cdot b$ .

**Beweis:** 1) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es zu  $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2}$  natürliche Zahlen  $\hat{N}, \tilde{N}$ , so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq \hat{N}, \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq \tilde{N}. \end{aligned}$$

Setze  $N = \max\{\hat{N}, \tilde{N}\}$ . Dann gilt für alle  $n \geq N$ , dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war, folgt, dass  $a + b$  der Grenzwert der Folge  $(a_n + b_n)$  ist.

2) Übung.

3) Da die Folge  $(a_n - a)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  wegen Satz 2.11 beschränkt ist, ist die Folge  $((a_n - a)b_n) = (a_n b_n - ab_n)$  nach Satz 2.13 ebenfalls eine Nullfolge. Damit erhalten wir mit 2) und 1) auch die Konvergenz der Folge  $(a_n b_n) = (a_n b_n - ab_n + ab_n)$ , sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n - ab_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (ab_n) = 0 + ab = ab. \quad \square$$

**Satz 2.15** Seien  $(a_n), (b_n)$  zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten  $a$  bzw.  $b$ . Ferner seien  $b \neq 0$  und  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch die Folge  $(\frac{a_n}{b_n})$  konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

**Beweis:** Es reicht zu zeigen, dass  $(\frac{1}{b_n})$  gegen  $\frac{1}{b}$  konvergiert, denn dann folgt die Behauptung mit Teil 3) von Satz 2.14 angewendet auf die Folge  $(a_n \cdot \frac{1}{b_n})$ . Nun gilt

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b} = (b - b_n) \frac{1}{b_n b}.$$

Da  $(b - b_n)$  eine Nullfolge ist, reicht es zu zeigen, dass die Folge  $\frac{1}{b_n b}$  beschränkt ist, denn dann ist nach Satz 2.13 auch  $(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b})$  eine Nullfolge. Da  $(b_n)$  gegen  $b$  konvergiert, gibt es zu  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$  für alle  $n \geq N$  gilt. Damit erhalten wir

$$|b_n| = |b_n| + \frac{|b|}{2} - \frac{|b|}{2} > |b_n| + |b - b_n| - \frac{|b|}{2} \geq |b_n + b - b_n| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{|b_n b|} \leq \frac{2}{|b|^2}$$

für alle  $n \geq N$  und damit ist  $(\frac{1}{b_n b})$  beschränkt. (Klar?) Folglich ist  $(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b})$  wie gewünscht eine Nullfolge und  $(\frac{1}{b_n})$  daher konvergent gegen  $\frac{1}{b}$ .  $\square$

Eine wichtige Beobachtung bei der Konvergenzbetrachtung von Folgen ist, das von Dirk Ferus als “*Ende gut, alles gut!*” zusammengefasste Prinzip. Bei einer konvergenten Folge kommt es nicht auf die ersten  $N$  Folgenglieder für ein  $N \in \mathbb{N}$  an, sondern nur auf den (immer noch aus *fast allen* Folgengliedern bestehenden) Rest der Folge. Insbesondere kann man die ersten  $N$  Folgenglieder beliebig abändern ohne etwas an der Konvergenz der Folge oder ihrem Grenzwert zu ändern. Das folgende Beispiel, sowie die nachfolgenden beiden Sätze beruhen unter anderem auf diesem Prinzip.

**Beispiel 2.16** Wir betrachten die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Unter Anwendung einiger der bisher entwickelten Kriterien erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3.$$

Dabei spielt keine Rolle, dass die Umformung des Bruchs nur für  $n > 0$  gestattet ist.

Die Beweise der drei folgenden Resultate bleiben Ihnen zu Übungszwecken überlassen.

**Satz 2.17** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente reelle Zahlenfolgen. Weiter gebe es  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \geq N$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Korollar 2.18** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente reelle Zahlenfolgen, sowie  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \leq b$  und  $a \leq b_n$  für alle  $n \geq N$ , wobei  $N \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq b \quad \text{und} \quad a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Bemerkung 2.19** Auch wenn alle Folgenglieder in Satz 2.17 oder Korollar 2.18 eine echte Ungleichung mit “<” oder “>” erfüllen, so erhält man für den Grenzwert nur die entsprechende Ungleichung mit “≤” oder “≥”. Z.B. gilt  $\frac{1}{n} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Satz 2.20 (Dreifolgensatz oder “Sandwichprinzip”)** Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$  und es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b$  für ein  $b \in \mathbb{R}$ . Falls ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

für alle  $n \geq N$  gilt, so ist  $(b_n)$  konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

**Beispiel 2.21** Wegen  $2^n > n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (Übung) folgt  $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $(\frac{1}{2^n})$  konvergent und mit dem Sandwichprinzip folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ .

**Definition 2.22** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt

- 1) monoton wachsend, falls  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) streng monoton wachsend, falls  $a_{n+1} > a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- 3) monoton fallend, falls  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4) streng monoton fallend, falls  $a_{n+1} < a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5) (streng) monoton, falls  $(a_n)$  (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

**Satz 2.23 (Monotoniekriterium für Folgen)** Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

**Beweis:** Sei  $(a_n)$  monoton und beschränkt. O.B.d.A. sei  $(a_n)$  monoton wachsend. (Der andere Fall folgt analog.) Dann ist insbesondere

$$M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nach oben beschränkt und nach dem Vollständigkeitsaxiom 1.48 existiert  $a := \sup M$ . Wir zeigen, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert: Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert nach Satz 1.50 ein  $x \in M$  bzw. ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $x = a_{N_\varepsilon}$  und  $a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a$ . Damit erhalten wir

$$a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon$  wegen der Monotonie der Folge. Dann folgt aber  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$  und daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , da  $\varepsilon > 0$  beliebig war.  $\square$

Als Anwendung zeigen wir die Existenz von Quadratwurzeln. Dazu benutzen wir Folgen analog zu der in Teil 5) von Beispiel 2.2.

**Satz 2.24** Seien  $c > 0$  und  $a_0 > 0$  beliebig, sowie  $(a_n)$  die durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge. Dann ist  $(a_n)$  konvergent und  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ist die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung  $x^2 = c$ . (Wir schreiben im Folgenden  $\sqrt{c} := a$ .)

**Beweis:** Falls  $(a_n)$  konvergent ist und der Grenzwert  $a$  positiv ist, so folgt mit Satz 2.14 und Satz 2.15, dass

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \frac{c}{a} \implies \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \frac{c}{a}.$$

Multiplikation beider Seiten mit  $2a$  liefert schließlich  $a^2 = c$ . Zur Eindeutigkeit als positive Lösung der Gleichung  $x^2 = c$  sei  $b > 0$  eine weitere Zahl mit  $b^2 = c$ . Dann gilt

$$0 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \implies a + b = 0 \text{ oder } a - b = 0.$$

Wegen  $a, b > 0$  folgt  $a = b$ , womit der Satz bewiesen ist.

Wir müssen aber noch den fehlende Nachweis der Konvergenz der Folge  $(a_n)$  nachliefern: Zunächst einmal zeigen Sie per Induktion (Übung), dass  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. (Damit folgt an dieser Stelle erst einmal, dass die Folge  $(a_n)$  auch *wohldefiniert* ist.) Weiter gilt:

i) Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist monoton fallend, denn für alle  $n \geq 1$  gilt

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right) = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2a_n}c = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - c) \geq 0,$$

da für alle  $n \geq 1$  gilt, dass

$$a_n^2 - c = \frac{1}{4} \left( a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}} \right)^2 - c = \frac{1}{4} (a_{n-1}^2 + 2c + \frac{c^2}{a_{n-1}^2} - 4c) = \frac{1}{4} \left( a_{n-1} - \frac{c}{a_{n-1}} \right)^2 \geq 0.$$

ii) Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist beschränkt, denn aus der Monotonie folgt für alle  $n \geq 1$ , dass

$$0 < a_n \leq a_1$$

Mit Satz 2.23 folgt aus i) und ii) die Konvergenz der Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  und damit auch die von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h. ihr Grenzwert  $a$  existiert.

Jetzt bleibt nur noch  $a > 0$  zu zeigen: Mit Hilfe von Satz 2.17 folgt sofort  $a \geq 0$ . Angenommen  $a = 0$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon := \min\{1, c\}$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Außerdem gilt  $\varepsilon^2 \leq \varepsilon$ , da  $\varepsilon \leq 1$ . Damit erhalten wir in Widerspruch zu 2) für alle  $n \geq N$ , dass

$$a_n^2 < \varepsilon^2 \leq \varepsilon \leq c. \quad \square$$

- Bemerkung 2.25** 1) Für alle  $b \in \mathbb{R}$  gilt:  $\sqrt{b^2} = |b|$ , z.B.  $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$ .
- 2) Analog zum Beweis von Satz 2.24 können wir die Existenz von  $k$ -ten Wurzeln  $\sqrt[k]{c}$  für  $c > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$  als positive Lösung der Gleichung  $x^k = c$  beweisen. Die zugehörige Folge  $(a_n)$  hat die Glieder

$$a_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)a_n + \frac{c}{a_n^{k-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

mit  $a_0 > 0$  beliebig.

- 3) Für spätere Zwecke beweisen wir noch schnell die *Monotonie der Wurzel*, d.h. für alle  $a, b > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$a < b \implies \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}.$$

Dies folgt sofort per Kontraposition aus  $\sqrt[k]{a} \geq \sqrt[k]{b} \Rightarrow a \geq b$ , was wir wiederum direkt mit unseren Anordnungsaxiomen zeigen können.

**Beispiel 2.26** Wir kommen an dieser Stelle noch einmal auf die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

aus Teil 6) in Beispiel 2.2 zurück und weisen nach, dass auch diese konvergent ist. Nach dem Binomischen Lehrsatz Satz 1.36 erhalten wir für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Ungleichung benutzt haben, dass  $1 - \frac{j}{n} \leq 1 - \frac{j}{n+1}$  für  $j = 1, \dots, k-1$  gilt, sowie in der letzten Ungleichung, dass ein neuer positiver Summand dazu kommt. Die Folge ist also monoton wachsend. Außerdem ist sie wegen

$$\begin{aligned} a_0 \leq a_n &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3 \end{aligned}$$

beschränkt, wobei wir die Ungleichung  $k! \geq 2^{k-1}$  für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , eine Indexverschiebung und die geometrische Summenformel aus Satz 1.32 verwendet haben. Die Folge  $(a_n)$  ist also konvergent. Wir haben an dieser Stelle noch nicht genug Wissen, um diesen Grenzwert exakt zu bestimmen, werden aber noch darauf zurückkommen.

## 2.3 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Statt unseres Vollständigkeitsaxioms Axiom 1.48 gibt es auch noch andere Möglichkeiten, die Vollständigkeit der reellen Zahlen zu charakterisieren. Eine dieser Alternativen basiert auf den sogenannten *Cauchy-Folgen*.

**Definition 2.27** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$  gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Diese Definition erinnert stark an die Definition der konvergenten Folge und daher stellt sich die Frage, ob wir damit überhaupt etwas “Neues” definiert haben bzw. wie dieser Begriff mit dem Begriff der konvergenten Folge zusammenhängt. Tatsächlich wird sich herausstellen, dass in den reellen Zahlen eine Folge genau dann konvergent ist, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Die eine Richtung der Äquivalenz ist dabei sehr einfach zu beweisen:

**Satz 2.28** Jede konvergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.

**Beweis:** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es zu  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt, dass  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Damit erhalten wir für alle  $n, m \geq N$ , dass

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt, dass  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist.  $\square$

Der Beweis der anderen Richtung, also dass jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  auch eine konvergente Folge ist, ist dagegen alles andere als einfach und benötigt unser Vollständigkeitsaxiom. Wir benötigen dazu aber erst einige neue Begriffe als Vorbereitung.

**Definition 2.29** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und sei  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge mit  $n_k \in \mathbb{N}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ .

**Beispiel 2.30** Seien die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegeben durch

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad n_k = 2k.$$

Dann ist  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend und daher ist  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right), \\ (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} &= \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\right). \end{aligned}$$

Anschaulich gesprochen erhalten wir eine Teilfolge einer gegebenen Folge also durch “Weglassen von einigen Folgengliedern”.



**Bemerkung 2.31** Teilfolgen einer konvergenten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind wieder konvergent und konvergieren insbesondere gegen den Grenzwert  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  der Folge. Ist nämlich  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  sowie  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt, so folgt auch

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N_\varepsilon,$$

da  $n_k \geq k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. (Klar? Wenn nicht: Übung!)

Beachten Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in Beispiel 2.30 nicht monoton ist, die Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  dagegen monoton fallend ist. Tatsächlich kann man durch “geschicktes Weglassen von Folgengliedern” immer eine Teilfolge konstruieren, die monoton wachsend oder monoton fallend ist.

**Lemma 2.32** *Jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat eine monotone Teilfolge.*

**Beweis:** Wir betrachten alle Folgenglieder  $a_n$  mit der Eigenschaft

$$a_n \geq a_m \quad \text{für alle } m > n, \quad (2.1)$$

(d.h. alle Folgenglieder, denen “kein echt größeres Folglied folgt”). Wir unterscheiden dann die folgenden zwei Fälle:

*Fall 1: Es gibt unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  mit der Eigenschaft (2.1).* Die Indizes  $n_k$  dieser Folgenglieder bilden eine streng monoton wachsende Folge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{N}$ . Dann ist  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und wegen  $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  (da die Eigenschaft (2.1) gilt) ist  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallend.

*Fall 2: Es gibt nur endlich viele Folgenglieder  $a_n$  mit der Eigenschaft (2.1).* Sei  $M$  das Maximum des zugehörigen Indizes (bzw.  $M := 0$ , falls es keine gibt). Setze  $n_0 := M + 1$ . Nach Konstruktion erfüllt  $a_{n_0}$  nicht die Bedingung (2.1), d.h. es gibt ein  $n_1 > n_0$  mit  $a_{n_0} < a_{n_1}$ . Wegen  $n_1 > n_0 > M$  erfüllt auch  $a_{n_1}$  nicht die Bedingung (2.1), d.h. es gibt  $n_2 > n_1$  mit  $a_{n_1} < a_{n_2}$ . Mit vollständiger Induktion können wir auf diese Weise eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konstruieren, so dass

$$a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$$

gilt, d.h. so dass die Teilfolge streng monoton wachsend ist.  $\square$

Beachten Sie, dass der Beweis dieses Lemmas nicht unser Vollständigkeitsaxiom voraussetzt. Im Gegensatz dazu benötigen wir im Beweis des nachfolgenden Satzes das Monotoniekriterium (Satz 2.23), das wir nur mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms beweisen konnten.

**Satz 2.33 (von Bolzano-Weierstraß)** *Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat eine konvergente Teilfolge.*

**Beweis:** Nach Lemma 2.32 hat  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monotone Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Mit  $(a_n)$  ist auch  $(a_{n_k})$  eine beschränkte Folge. Also ist  $(a_{n_k})$  monoton und beschränkt und daher nach dem Monotoniekriterium konvergent.  $\square$

**Definition 2.34** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge. Dann heißt  $a \in \mathbb{R}$  Häufungspunkt von  $(a_n)$ , falls  $(a_n)$  eine gegen  $a$  konvergente Teilfolge hat.

**Beispiel 2.35** Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$  mit  $a_n = (-1)^n$  hat die Häufungspunkte 1 und  $-1$ . Konvergente Teilfolgen sind jeweils

$$\begin{aligned}(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}} &= (1, 1, 1, 1, 1, \dots), \\ (a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}} &= (-1, -1, -1, -1, -1, \dots).\end{aligned}$$

**Lemma 2.36** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. Wenn  $(a_n)$  einen Häufungspunkt  $a \in \mathbb{R}$  hat, dann ist  $(a_n)$  konvergent gegen  $a$ .

**Beweis:** Ist  $a$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so existiert per Definition eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $k \geq \tilde{N}$ . Da außerdem  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist, existiert ein  $\hat{N} \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $n, m \geq \hat{N}$ . Setze nun  $N := \max\{\tilde{N}, \hat{N}\}$ . Dann gilt für alle  $n, k \geq N$ , dass

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, konvergiert  $(a_n)$  gegen  $a$ .  $\square$

**Satz 2.37 (Cauchy-Folgen-Kriterium)** In  $\mathbb{R}$  ist jede Cauchy-Folge konvergent.

**Beweis:** Sei  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge. Analog zum Beweis von Satz 2.11 zeigen wir, dass  $(a_n)$  beschränkt ist (Übung). Dann hat  $(a_n)$  nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß aber eine konvergente Teilfolge, also einen Häufungspunkt. Mit Lemma 2.36 folgt, dass  $(a_n)$  konvergent ist.  $\square$

Mit dem Cauchy-Folgen-Kriterium haben wir neben dem Monotoniekriterium ein weiteres Werkzeug zum Nachweis der Konvergenz von Folgen, für die wir keinen Grenzwert  $a$  "erraten" können. Außerdem können wir damit ein weiteres wichtiges Prinzip beweisen, das für uns an späterer Stelle noch einmal nützlich sein wird.

**Satz 2.38 (Intervallschachtelungsprinzip)** Seien  $I_n := [a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Intervalle mit  $a_n < b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $I_{n+1} \subseteq I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Falls  $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist, so gibt es genau ein  $a \in \mathbb{R}$  mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}.$$

Insbesondere sind die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(b_n - a_n)$  eine Nullfolge ist, gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$b_n - a_n = |b_n - a_n| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ . Mit  $I_m \subseteq I_n$  für alle  $m \geq n$  erhalten wir  $a_n \leq a_m \leq b_n$  und daher gilt für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq n \geq N$ , dass

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

Dies bedeutet aber, dass  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist. Ganz analog zeigt man, dass auch  $(b_n)$  eine Cauchy-Folge ist. Nach dem Cauchy-Folgen-Kriterium existieren also

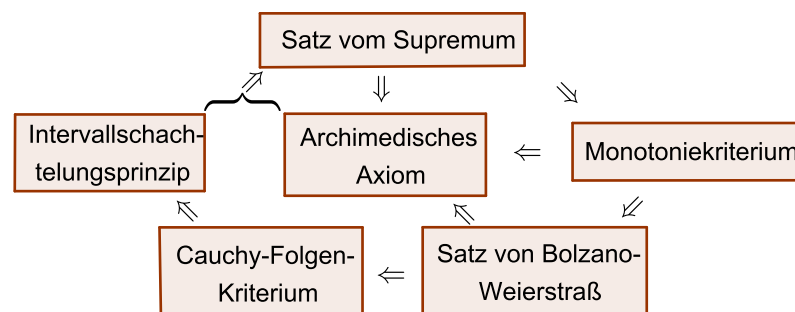
$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{und} \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Beide Grenzwerte stimmen überein, denn wir erhalten

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b - a$$

und daher  $a = b$ . Nun gilt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$ , denn aus  $a_n < b_n$  folgt mit Korollar 2.18, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  sowohl  $a \leq b_n$  als auch  $a_n \leq b$  gilt, woraus wir  $a_n \leq b = a \leq b_n$  bzw.  $a \in I_n$  erhalten. Dies zeigt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \supseteq \{a\}$ . Die andere Inklusion ist klar! (Klar?).  $\square$

Unser Vollständigkeitsaxiom 1.48 wird auch *Satz vom Supremum* genannt. Das folgende Schaubild verdeutlicht, welcher der Sätze aus diesem Abschnitt ebenfalls als *Vollständigkeitsaxiom* in Frage gekommen wäre und welcher der jeweiligen Sätze mit Hilfe welches anderen Satzes bewiesen werden kann.



Das *Archimedische Axiom* (Satz 1.53) lässt sich dabei ebenfalls mit dem Monotoniekriterium oder dem Satz von Bolzano-Weierstraß beweisen (Übung), jedoch nicht allein mit dem Cauchy-Folgen-Kriterium oder dem Intervallschachtelungsprinzip. Will man daher den Satz von Supremum mit Hilfe des Intervallschachtelungsprinzips beweisen, so benötigt man dabei auch das Archimedische Axiom (Übung). Einige Bücher benutzen das Cauchy-Folgen-Kriterium als Vollständigkeitsaxiom. Um die reellen Zahlen zu charakterisieren, wird dann als zusätzliches Axiom das Archimedische Axiom benötigt.

Eine Menge, die die Körperaxiome, Anordnungsaxiome, das Archimedische Axiom und (ein) Vollständigkeitsaxiom erfüllt, nennt man auch einen *vollständigen, archimedisch angeordneten Körper*. Man kann zeigen, dass jede solcher Mengen *isomorph* (vgl. Lineare Algebra) zu der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist.

## 2.4 Limes superior und Limes inferior

Ist eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergent, aber beschränkt, so wissen wir nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass  $(a_n)$  zumindest eine konvergente Teilfolge, also mindestens einen Häufungspunkt hat. Mit Hilfe von *Limes superior* und *Limes inferior* kann man nun spezielle Häufungspunkte von Folgen ermitteln, nämlich den größten bzw. kleinsten. Dazu betrachten wir die Mengen

$$A_k := \{a_n \mid n \geq k\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

die jeweils beschränkt sind, sowie die Folgen  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$g_k := \sup_{n \geq k} a_n := \sup A_k \quad \text{und} \quad h_k := \inf_{n \geq k} a_n := \inf A_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da  $A_{k+1} \subseteq A_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, folgt, dass die Folge  $(g_k)$  monoton fallend und  $(h_k)$  monoton wachsend ist. Außerdem sind beide Folgen offenbar beschränkt (klar?), also nach dem Monotoniekriterium konvergent.

**Definition 2.39** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge.

- 1)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{n \geq k} a_n \right)$  heißt Limes superior von  $(a_n)$ .
- 2)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \inf_{n \geq k} a_n \right)$  heißt Limes inferior von  $(a_n)$ .

**Beispiel 2.40** Wir betrachten die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit

$$a_n = (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Dann erhalten wir

$$\sup A_k = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k} & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 1 + \frac{1}{k+1} & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und daher  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Analog zeigen Sie, dass  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ .

**Bemerkung 2.41** Im Beweis des folgenden Satzes benutzen wir einen *Trick*: Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$b \leq a + \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0 \implies b \leq a$$

Wäre nämlich  $b > a$ , so wäre  $\delta := b - a > 0$  und für  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$  erhalten wir den Widerspruch

$$b \leq a + \frac{\delta}{2} < a + \delta = b.$$

Analog gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$b \geq a - \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0 \implies b \geq a$$

**Satz 2.42 (Charakterisierung des Limes superior)** Sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

genau dann, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Es gilt  $a_n < a + \varepsilon$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  (also für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ ).
- ii) Es gilt  $a_n > a - \varepsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Sei  $g_k := \sup_{n \geq k} a_n$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen nun die im Satz behauptete Äquivalenz:

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wegen  $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$a - \varepsilon < g_k < a + \varepsilon$$

für alle  $k \geq N$ . Wegen  $a_n \leq g_N$  für alle  $n \geq N$  folgt i). Außerdem ist  $(g_k)$  monoton fallend und daher gilt  $a \leq g_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Angenommen ii) würde nicht gelten. Dann gilt  $a_n > a - \varepsilon$  nur für endlich viele  $n \in \mathbb{N}$  und folglich existiert ein  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \leq a - \varepsilon$  für alle  $n \geq \tilde{N}$ . Damit folgt auch  $g_k \leq a - \varepsilon$  für alle  $k \geq \tilde{N}$ , denn  $a - \varepsilon$  ist eine obere Schranke und  $g_k$  ein Supremum. (Klar?) Mit Korollar 2.18 erhalten wir dann den Widerspruch  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \leq a - \varepsilon$ . Also gilt auch ii).

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann folgt mit ii) insbesondere, dass  $g_k > a - \varepsilon$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k \geq a - \varepsilon$  gilt. Mit Bemerkung 2.41 folgt daraus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k \geq a.$$

Andererseits gibt es wegen i) zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_n < a + \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ , woraus wir  $g_k \leq a + \varepsilon$  für alle  $k \geq N_\varepsilon$  erhalten. (Klar?) Dann gilt auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k \leq a + \varepsilon$  und mit Bemerkung 2.41 erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k \leq a.$$

Insgesamt folgt daraus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = a. \quad \square$$

**Korollar 2.43 (Charakterisierung des Limes inferior)** Sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

genau dann, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Es gilt  $a_n > a - \varepsilon$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- ii) Es gilt  $a_n < a + \varepsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

Aus den Charakterisierungen in Satz 2.42 und Korollar 2.43 erhalten wir nun leicht die beiden folgenden Korollare, deren Beweise zu Übungszwecken wieder einmal Ihnen überlassen werden.

**Korollar 2.44** *Sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge. Dann gilt:*

$$(a_n) \text{ ist konvergent} \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Korollar 2.45** *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Dann gilt:*

1) *Es existieren konvergente Teilfolgen  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{m_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  mit*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_{m_\ell}.$$

2)  *$a \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)$ . Dann gilt*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

*Speziell ist  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  der kleinste und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  der größte Häufungspunkt von  $(a_n)$ .*

Limes superior und Limes inferior spielen immer dann eine Rolle, wenn man von einer gegebenen Folge nicht unbedingt fordern möchte, dass sie konvergent ist. Tatsächlich lassen sich einige Aussagen über Folgen schon mit der schwächeren Voraussetzung, dass nur der Limes superior oder der Limes inferior existiert, beweisen. Wir werden im Verlauf dieser Veranstaltung noch einige Anwendungen dazu kennenlernen, so z.B. auch im folgenden Kapitel.

# Kapitel 3

## Reihen

Sehr bekannt ist das *Paradoxon von Achilles und der Schildkröte*: Achilles, eine Figur der griechischen Mythologie und bekannt für seine Schnelligkeit, tritt in einem Gedankenexperiment zum Wettlauf mit einer Schildkröte an. Da diese<sup>1</sup> zehnmal langsamer ist als Achilles, erhält sie zum Ausgleich einen Vorsprung von 100m. Die griechischen Philosophen argumentierten nun wie folgt, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen, geschweige denn überholen könne: Hat Achilles die 100m Vorsprung zurückgelegt, so hat sich die Schildkröte in dieser Zeit einen neuen Vorsprung von 10m erarbeitet. Auch diesen holt Achilles schnell wieder ein, doch in diesem Zeitraum ist die Schildkröte 1m weitergekommen. Jedes Mal, wenn Achilles einen gegebenen Vorsprung aufgeholt hat, hat sich die Schildkröte einen neuen, kleineren Vorsprung herausgekrochen. Dies wiederholt sich bis in die Unendlichkeit und folglich kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.

Die praktische Erfahrung lehrt uns allerdings, dass Achilles die Schildkröte sehr wohl einholen und sogar überholen kann. Wir können sogar versuchen auszurechnen, nach wieviel Metern Läufer und Kriecher gleichauf sind. Dies ist nach

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

Metern der Fall. Offensichtlich scheint  $111, \bar{1}$  das Ergebnis dieser “unendlichen Summe” zu sein, d.h. “unendlich viele Summanden” können zu einer “endlichen Summe” führen, eine Tatsache, die die alten Griechen als Paradoxon betrachteten.

Es gibt allerdings auch “unendliche Summen”, bei denen das Ergebnis (wenn es denn eines gibt) alles andere als offensichtlich ist. Betrachten Sie z.B. die “Summe”

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

so kommt als Ergebnis Null oder Eins in Frage, je nachdem, wie wir die Klammern setzen:

$$\underbrace{(1 - 1)}_{=0} + \underbrace{(1 - 1)}_{=0} + \underbrace{(1 - 1)}_{=0} + \dots = 0 \quad \text{bzw.} \quad 1 + \underbrace{(-1 + 1)}_{=0} + \underbrace{(-1 + 1)}_{=0} + \dots = 1$$

Glücklicherweise können wir solche “Summen mit unendlich vielen Summanden” auf Folgen und den dort definierten Begriff des Grenzwerts zurückführen.

---

<sup>1</sup>Es handelt sich hier offenbar um ein Exemplar der fiktiven Art der Rennschildkröten.

### 3.1 Konvergenz von Reihen

**Definition 3.1** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen.

- 1) Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$  heißt eine Reihe (auch unendliche Reihe). Schreibweise:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Das Element  $s_n$  heißt  $n$ -te Partialsumme der Reihe.

- 2) Die Reihe wie in 1) heißt konvergent, falls  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. In diesem Fall heißt  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  die Summe der Reihe.

Beachten Sie, dass das Symbol  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  für die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  steht, unabhängig davon, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Weiterhin verbinden wir mit der Schreibweise

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$$

für  $s \in \mathbb{R}$  zwei Aussagen, nämlich erstens, dass die Reihe konvergent ist, und zweitens, dass die Summe der Reihe  $s$  beträgt.

**Beispiel 3.2** 1) Gegeben sei die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ . Betrachten wir die ersten Glieder der zugehörigen Partialsummenfolge  $(s_n)$ , so erhalten wir

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.75, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1.875.$$

Diese Folge scheint gegen 2 zu konvergieren. Dass dies tatsächlich die Summe unserer Reihe ist, weisen wir im nächsten Punkt allgemeiner nach.

- 2) Sei  $q \in \mathbb{R}$ . Dann heißt die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  eine *geometrische Reihe*. Falls  $|q| < 1$ , dann ist die Reihe konvergent und es gilt die Formel

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Für den Beweis nutzen wir die geometrische Summenformel aus Satz 1.32, sowie die Tatsache, dass  $(q^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  für  $|q| < 1$  eine Nullfolge ist. Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Analog zeigt man, dass die geometrische Reihe für  $|q| > 1$  divergiert. Für die Spezialfälle  $q = \frac{1}{2}$  bzw.  $q = \frac{1}{10}$  erhalten wir damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Achilles hat die Schildkröte also nach  $110 + \frac{10}{9}$  Metern eingeholt.



3) Als nächstes betrachten wir ein Beispiel für eine sogenannte *Teleskop-Reihe*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$$

Benutzen wir die Umformung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

so erhalten wir für die  $n$ -te Partialsumme  $s_n$  der Reihe, dass

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Eine solche Summe nennt man eine *Teleskop-Summe*, da sie sich wie ein Teleskop “zusammenschieben” lässt, so dass nur noch der erste und der letzte Summand übrig bleiben. Da die Folge  $(s_n)$  offenbar den Grenzwert 1 hat, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \quad (3.1)$$

Aus den Rechenregeln für Folgen ergibt sich unmittelbar (oder als Übung) der folgende Satz.

**Satz 3.3** Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergente Reihen, sowie  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$  konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Wie auch bei den Folgen haben wir ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe, dass dann in erster Linie dazu dient, gewisse Reihen als divergent zu entlarven.

**Satz 3.4 (Notwendiges Kriterium)** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe. Dann ist  $(a_n)$  eine Nullfolge.

**Beweis:** Sei  $s_n$  die  $n$ -te Partialsumme der Reihe, sowie  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  die Summe der Reihe.

Dann gilt

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n$$

und daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$ .  $\square$

**Beispiel 3.5** 1) Für den Spezialfall  $q = -1$  wird die geometrische Reihe nach dem italienischen Mathematiker Guido Grandi auch *Grandi-Reihe* genannt. Diese hat also die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Wir haben eingangs schon diskutiert, dass 0 und auch 1 als Summe der Reihe in Frage kommen könnten. Grandi ordnete dieser Reihe den Wert  $\frac{1}{2}$  zu und begründete dies mit der Formel für die Summe der geometrischen Reihe aus Beispiel 3.2, da

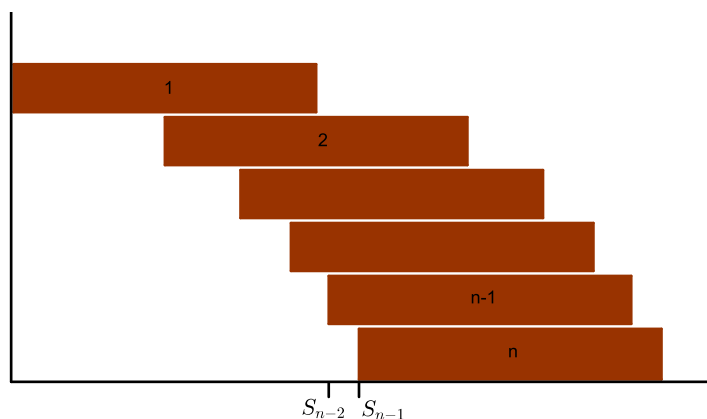
$$\frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

(Dieser Wert ist tatsächlich nicht ganz unsinnig. Es handelt sich in diesem Fall um das sogenannte *Cesàro-Summe* der Grandi-Reihe, worauf wir an dieser Stelle aber nicht näher eingehen, sondern auf Kapitel 5 von Analysis II verweisen.) Nach unserer Definition von Reihen ist die Grandi-Reihe allerdings divergent, denn  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist keine Nullfolge. Tatsächlich sehen wir wegen

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

auch direkt, dass die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen divergent ist.

2) Wir versuchen einen Ziegturm mit “maximalem Überhang” zu konstruieren.



Dazu nehmen wir an, dass jeder Ziegel die Länge 1 und Masse 1 hat. Wir nummerieren dann die Ziegel von oben nach unten von 1 bis  $n$ . Der Schwerpunkt des Turms, der aus den ersten  $n - 1$  Steinen besteht, habe die  $x$ -Koordinate  $S_{n-1}$ . Damit der Turm nicht umfällt, aber dennoch maximalen Überhang hat, müssen wir den Turm so auf dem  $n$ -ten Stein platzieren, dass die Kante dieses Steins genau auf der  $x$ -Koordinate  $S_{n-1}$  liegt. Die Formel für die  $x$ -Koordinate  $S$  des gemeinsamen Schwerpunkts von zwei Körpern  $a, b$  mit Massen  $m_a, m_b$  ist durch

$$S = \frac{m_a S_a + m_b S_b}{m_a + m_b}$$

gegeben. Da die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts des  $n$ -ten Steins durch  $S_{n-1} + \frac{1}{2}$  gegeben ist (wir nehmen eine gleichmäßige Massenverteilung an, so dass sich der Schwerpunkt eines einzelnen Steins genau in dessen Mitte befindet), erhalten wir für die  $x$ -Koordinate  $S_n$  des Schwerpunkts des Turms aus  $n$  Ziegeln, dass

$$S_n = \frac{(n-1)S_{n-1} + 1 \cdot (S_{n-1} + 1/2)}{n} = S_{n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir dann schnell die Formel

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

Die an dieser Stelle entscheidende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

heißt *harmonische Reihe*. Wir weisen nun nach, dass sie *divergent* ist. Dazu betrachten wir die  $n$ -te Partialsumme für  $n = 2^m$  mit  $m \in \mathbb{N}$ . Da

$$\sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^{\ell}} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2^{\ell-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell}}}_{2^{\ell-1} \text{ Summanden}} \geq 2^{\ell-1} \frac{1}{2^{\ell}} = \frac{1}{2}$$

für  $\ell = 1, \dots, m$  gilt, erhalten wir

$$s_{2^m} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^{\ell}} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}$$

für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$ . Daher ist die Folge der Partialsummen  $(s_n)$  unbeschränkt und die harmonische Reihe somit divergent. Aus diesem Beispiel lernen wir zweierlei. Einerseits sehen wir, dass wir zumindest theoretisch einen Turm mit beliebig großem Überhang konstruieren können. Andererseits sehen wir, dass die harmonische Reihe divergiert, obwohl die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  eine Nullfolge ist. Unser *notwendiges Kriterium* ist also nicht hinreichend.

**Definition 3.6** Wir sagen, eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert bestimmt gegen  $\infty$ , falls zu jedem  $M > 0$  ein  $N_M \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $a_n \geq M$  für alle  $n \geq N_M$  gilt. Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Analog definieren wir *bestimmte Divergenz gegen  $-\infty$*  und wir bezeichnen  $\infty$  und  $-\infty$  als *uneigentliche Grenzwerte*, da sie ja “fast” so etwas wie Grenzwerte sind, aber eigentlich auch nicht.

Die Partialsummenfolge der harmonischen Reihe ist ein Beispiel für eine Folge, die bestimmt gegen  $\infty$  divergiert und daher schreiben wir auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

## 3.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Natürlich lassen sich die bisherigen Konvergenzkriterien für Folgen auch auf Reihen anwenden. Für einen wichtigen Spezialfall wollen wir das entsprechende Kriterium einmal explizit in “Reihensprache” formulieren.

**Satz 3.7 (Cauchy-Kriterium)** *Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq m \geq N_\varepsilon$  gilt, dass*

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

**Beweis:** Bezeichnen wir wie üblich die  $n$ -te Partialsumme der Reihe mit  $s_n$ , so folgt die Aussage wegen

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| = |s_n - s_{m-1}|$$

für  $n \geq m \geq 1$  sofort aus Satz 2.28 und dem Cauchy-Folgen-Kriterium (Satz 2.37).  $\square$

Für einen wichtigen Spezialfall von Reihen erhalten wir ein sehr einfach zu überprüfen-des Konvergenzkriterium.

**Definition 3.8** *Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  heißt alternierend, falls  $b_n b_{n+1} < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.*

**Bemerkung 3.9** Eine Reihe ist offenbar genau dann alternierend, falls sie sich in der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

schreiben lässt, wobei  $a_n$  entweder für alle  $n \in \mathbb{N}$  positiv oder für alle  $n \in \mathbb{N}$  negativ ist. Dies erklärt auch den Namen *alternierende Reihe*, da die Koeffizienten  $(-1)^n a_n$  abwechselnd positiv und negativ sind.

Für den Beweis des folgenden Konvergenzkriteriums für alternierende Reihen benötigen wir das folgende Hilfsresultat:

**Lemma 3.10** *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen, so dass die Teilfolgen  $(a_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}}$  beide gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergieren. Dann konvergiert auch  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ .*

**Beweis:** Übung.  $\square$

**Satz 3.11 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)** *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

**Beweis:** Wir betrachten die Teilfolgen  $(s_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(s_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}}$  der Partialsummenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$ , dass

$$s_{2m+2} = s_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} \leq s_{2m} \quad \text{und} \quad s_{2m+3} = s_{2m+1} + a_{2m+2} - a_{2m+3} \geq s_{2m+1},$$

d.h.  $(s_{2m})$  ist monoton fallend und  $(s_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend. Da außerdem

$$s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1} \leq s_{2m}$$

gilt, folgt, dass beide Folgen sich gegenseitig beschränken. Nach dem Monotoniekriterium sind also beide Folgen konvergent und es gilt

$$s := \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} =: \tilde{s}.$$

Es gilt sogar  $s = \tilde{s}$ , da

$$s - \tilde{s} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} - \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_{2m+1} - s_{2m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (-a_{2m+1}) = 0.$$

Nach Lemma 3.10 konvergiert somit auch  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $s$ .  $\square$

**Beispiel 3.12** 1) Wir betrachten die *alternierende harmonische Reihe*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Da  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  eine monoton fallende Nullfolge ist, folgt die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe.

Beachten Sie an dieser Stelle, dass Satz 3.11 nur eine Aussage über die Konvergenz der Reihe liefert, nicht jedoch über deren Summe  $s$ . Wir erhalten jedoch sofort die Abschätzung

$$s_1 = \frac{1}{2} \leq s \leq 1 = s_0$$

aus der im Beweis von Satz 3.11 gefolgerten Monotonie der Partialsummenteilfolgen  $(s_{2m})$  und  $(s_{2m+1})$ . An dieser Stelle fehlen uns noch die Hilfsmittel, um die Summe der Reihe exakt zu bestimmen. Dies wird uns erst in Beispiel 6.55 gelingen.

- 2) Eine weitere nach dem Leibniz-Kriterium konvergente Reihe ist die ebenfalls nach Leibniz benannte Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

Auch die Summe  $s \in [\frac{2}{3}, 1]$  der Leibniz-Reihe können wir erst später bestimmen, nämlich in Beispiel 8.29.

Für endliche Summen gilt das Kommutativgesetz, das besagt, dass die Reihenfolge der Summanden beliebig verändert werden darf. Überraschenderweise ist das bei konvergenten Reihen nicht der Fall.

**Beispiel 3.13** Wir betrachten wieder die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

über deren Summe  $s$  wir wissen, dass  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$  gilt. Als 1. Umordnung der Reihe betrachten wir die Form

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{4m+2} - \frac{1}{4m+4} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}s, \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten so genau die Hälfte der Summe der ursprünglichen Reihe, obwohl beide Reihen aus exakt denselben Summanden bestehen. Eine 2. Umordnung der Reihe von der Form

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n + 2m - 1} \right) - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} - \frac{1}{2n+2} \right) + \dots \end{aligned}$$

ist sogar divergent, denn für  $n \geq 2$  erhalten wir jeweils

$$\underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1}}_{2^{n-1} \text{ Summanden}} - \frac{1}{2n+2} \geq \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2n+2} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

und damit ist die Partialsummenfolge unbeschränkt, also divergent.

Es gibt allerdings eine Zusatzvoraussetzung, die wir an eine konvergente Reihe stellen können, damit Umordnungen der Reihe deren Konvergenzverhalten und deren Summe nicht ändern.

**Definition 3.14** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, falls die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent ist.

**Satz 3.15** Eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent.

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gibt es nach dem Cauchy-Kriterium ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\sum_{k=m}^n |a_k| = \left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq m \geq N_\varepsilon$  gilt. Dann folgt aber mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq m \geq N_\varepsilon$  und wir erhalten aus dem Cauchy-Kriterium auch die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .  $\square$

**Bemerkung 3.16** Der Begriff der *absoluten Konvergenz* ist stärker als der der Konvergenz, denn die Umkehrung von Satz 3.15 gilt nicht: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

**Satz 3.17 (Umordnungssatz)** Sei  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv und sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$  und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

**Beweis:** Sei  $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  die Summe der Reihe, sowie  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da die Reihe konvergent und absolut konvergent ist, gibt es per Definition der Konvergenz bzw. nach dem Cauchy-Kriterium ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass einerseits

$$\left| s - \sum_{k=0}^n a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $n \geq N$  und andererseits auch

$$\sum_{k=m}^n |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $n \geq m \geq N$  gilt. (Klar?) Wähle  $N_\varepsilon := \max \{ \sigma^{-1}(0), \dots, \sigma^{-1}(N) \}$ . Dann gilt

$$\{0, 1, \dots, N\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(N_\varepsilon)\},$$

denn aus  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  folgt  $\ell := \sigma^{-1}(k) \leq N_\varepsilon$  und daraus erhalten wir wiederum, dass  $k = \sigma(\ell) \in \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(N_\varepsilon)\}$ . Daher erhalten wir für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , dass

$$\left| s - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| \leq \left| s - \sum_{k=0}^N a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (3.2)$$

denn setzen wir  $M := \max\{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}$ , so enthält die Summe  $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$  nur Summanden aus der Menge  $\{a_0, \dots, a_M\}$ , wobei nach Konstruktion alle Summanden  $a_0, a_1, \dots, a_N$  auch tatsächlich vorkommen. Daher enthält die Differenz

$$\sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$$

nur noch Summanden aus der Menge  $\{-a_{N+1}, \dots, -a_M\}$  und wir erhalten die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{k=N+1}^M |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt aus (3.2), dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$  gegen  $s$  konvergiert.  $\square$

**Bemerkung 3.18** Wie wir bereits gesehen haben, gilt der Umordnungssatz nicht für Reihen, die nur konvergent, aber nicht absolut konvergent sind. (Solche Reihen nennt man auch *bedingt konvergent*.) Tatsächlich kann man in diesem Fall durch Umordnung jeden beliebigen Wert als Summe der Reihe erhalten, denn es gilt der folgende Satz:

**Riemannscher Umordnungssatz:** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine bedingt konvergente Reihe (d.h. konvergent, aber nicht absolut konvergent.) Dann gibt es zu jedem  $s \in \mathbb{R}$  eine Bijektion  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s.$$

**Beweis:** Für den Beweis betrachten wir

$$\begin{aligned} a_k^+ &:= \frac{a_k + |a_k|}{2} = \begin{cases} a_k & \text{falls } a_k > 0, \\ 0 & \text{falls } a_k \leq 0, \end{cases} \\ a_k^- &:= \frac{a_k - |a_k|}{2} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_k \geq 0, \\ a_k & \text{falls } a_k < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt offenbar  $a_k = a_k^+ + a_k^-$  und  $|a_k| = a_k^+ - a_k^-$ . Dann müssen die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$  beide divergieren (und damit insbesondere bestimmt gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$  divergieren), denn aus der Konvergenz einer der beiden Reihen folgt dann aus der Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und Satz 3.3 auch die Konvergenz der anderen Reihe und damit wiederum die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Insbesondere gibt es also unendlich viele Indizes  $n$  mit  $a_n > 0$  und unendlich viele Indizes  $m$  mit  $a_m < 0$ .

Betrachte nun die Teilfolgen  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die nur aus den positiven bzw. negativen Folgengliedern bestehen. Diese Teilfolgen erhalten wir aus den Folgen  $(a_n^+)$  und  $(a_n^-)$  jeweils durch Weglassen aller Folgenglieder, die gleich Null sind. Wir konstruieren nun eine Umordnung der Reihe, deren Summe  $s$  ergibt. Dazu wählen wir  $n_0$  als die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k > s.$$



Dann gilt wegen der Minimalität von  $n_0$ , dass

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n_0} p_k \right| \leq p_{n_0}.$$

Im nächsten Schritt wählen wir  $n_1$  als die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} q_k < s.$$

Dann erhalten wir die Abschätzung

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n_0} p_k - \sum_{k=0}^{n_1} q_k \right| \leq |q_{n_1}|$$

Im nächsten Schritt wählen wir  $n_2$  als die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} q_k + \sum_{k=n_0+1}^{n_2} p_k = \sum_{k=0}^{n_2} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} q_k < s$$

und dann setzen wir dieses Verfahren in der offensichtlichen Weise fort. Dann gilt  $n_0 < n_2 < \dots$  und  $n_1 < n_3 < \dots$  und wir erhalten nach jedem Schritt eine Partialsumme, deren Abstand von  $s$  sich durch  $p_{n_{2m}}$  oder  $|q_{n_{2m+1}}|$  abschätzen lässt. Da  $(p_n)$  und  $(q_n)$  als Teilfolgen von  $(a_n)$  insbesondere Nullfolgen sind, folgt die Konvergenz der so ungeordneten Reihe gegen  $s$ .  $\square$

Mit derselben Beweisstrategie lässt sich zeigen, dass zu einer bedingt konvergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  Umordnungen existieren, so dass die umgeordnete Reihe bestimmt gegen  $\infty$  bzw. bestimmt gegen  $-\infty$  divergiert.

**Satz 3.19 (Majorantenkriterium)** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen, sowie  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|a_n| \leq b_n$$

für alle  $n \geq N$  gilt. Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent ist, so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k.$$

(Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  nennen wir dann konvergente Majorante von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .)

**Beweis:** Wir beweisen den Satz mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es wegen der Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ein  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq m \geq \tilde{N}$  gilt. Setze nun  $N_\varepsilon = \max\{N, \tilde{N}\}$ . Dann gilt für alle  $n \geq m \geq N_\varepsilon$ , dass

$$\sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n b_k = \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| < \varepsilon,$$

und mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums erhalten wir die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Der Zusatz folgt mit Hilfe von Satz 2.17 daraus, dass für alle  $n \geq N$  gilt, dass

$$\sum_{k=N}^n a_k \leq \sum_{k=N}^n |a_k| \leq \sum_{k=N}^n b_k. \quad \square$$

**Beispiel 3.20** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

ist konvergent, denn für alle  $k \geq 1$  gilt, dass

$$\frac{1}{k^2} = \frac{2}{2k \cdot k} = \frac{2}{k(k+k)} \leq \frac{2}{k(k+1)}$$

und damit ist die Reihe  $2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  (siehe Teil 3) von Beispiel 3.2) eine konvergente Majorante. Weiter erhalten wir für die Summe unserer Reihe die Abschätzung

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 2.$$

Auch für diese Reihe ist das Bestimmen der exakten Summe  $s$  noch zu schwierig für uns. Dies wird uns erst in Beispiel 5.49 in Analysis II gelingen.

**Bemerkung 3.21** Mit Kontraposition erhalten wir aus dem Majorantenkriterium: Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  divergent und gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \geq N$ , so ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  nennen wir dann *divergente Minorante* von  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

**Bemerkung 3.22** Für die nächsten zwei Kriterien erinnern wir uns an Limes superior und Limes inferior einer Folge  $(a_n)$ . Wenn wir die Vorbemerkung vor Definition 2.39 noch einmal genau analysieren, stellen wir fest, dass für den Fall das unsere Folge  $(a_n)$  nur nach oben beschränkt ist, die Folge  $(\sup\{a_n \mid n \geq k\})_{k \in \mathbb{N}}$  wohldefiniert ist und, da monoton fallend, entweder konvergent ist oder bestimmt gegen  $-\infty$  divergiert. Schreiben wir im letzteren Fall

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

und setzen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \infty$$

falls die Folge nicht nach oben beschränkt ist, so können wir den *Limes superior* jetzt für jede Folge  $(a_n)$  definieren. Analog verfahren wir für den *Limes inferior*, indem wir auch hier  $\pm\infty$  als sogenannte *uneigentliche Grenzwerte* erlauben.

**Satz 3.23 (Wurzelkriterium)** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $a := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

- 1) Falls  $a < 1$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.
- 2) Falls  $a > 1$  oder  $a = \infty$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent.

**Beweis:**

- 1) Falls  $a < 1$  gilt, so gibt es ein  $q \in \mathbb{R}$  mit  $a < q < 1$ . (Z.B. können wir  $q = \frac{a+1}{2}$  wählen.) Dann gibt es zu  $\varepsilon := q - a > 0$  nach Satz 2.42 ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} < a + \varepsilon = q$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon$ . Daraus folgt  $|a_n| < q^n$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$  und wegen  $q = |q| < 1$  ist die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  eine konvergente Majorante von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

- 2) Gilt andererseits  $a > 1$ , so gibt es nach Satz 2.42 zu  $\varepsilon = a - 1 > 0$  unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} > a - \varepsilon = 1$ , woraus wir  $|a_n| > 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  erhalten. Dann ist  $(a_n)$  aber keine Nullfolge und daher ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent. Der Fall  $a = \infty$  folgt analog.  $\square$

**Bemerkung 3.24** Für den Fall  $a = 1$  liefert der Satz keine Aussage. Tatsächlich kann die untersuchte Reihe in diesem Fall divergent oder konvergent sein. Betrachten wir z.B. die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

dann wissen wir bereits, dass die erste Reihe divergent und die zweite konvergent ist. Andererseits gilt wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  (Übung), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

**Satz 3.25 (Quotientenkriterium)** Sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Gilt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.
- 2) Gilt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent.

**Beweis:**

- 1) Wir beweisen die Konvergenzaussage des Quotientenkriteriums mit dem Wurzelkriterium. Dazu zeigen wir, dass für alle Folgen  $(a_n)$  gilt, dass

$$a := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: b,$$

vorausgesetzt, dass  $b \in \mathbb{R}$  (d.h. dass der entsprechende Limes superior existiert). Gilt dann  $b < 1$ , so gilt auch  $a < 1$  und die absolute Konvergenz der Reihe folgt aus dem Wurzelkriterium.

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $q := b + \varepsilon$ . Dann gibt es nach Satz 2.42 ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

für alle  $n \geq N$ . (Nach Satz 2.42 gilt hier sogar die echte Ungleichung, uns reicht aber an dieser Stelle die schwächere Aussage.) Damit erhalten wir für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq m \geq N$ , dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \leq q^{n-m+1} = \frac{q^{n+1}}{q^m}.$$

Daraus folgt für alle  $n \geq m \geq N$ , dass

$$\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \leq \sqrt[n+1]{\frac{|a_m|}{q^m}} \cdot q.$$

Wählen wir nun  $m \geq N$  fest, so gilt unter Ausnutzung von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$  für festes  $x > 0$  (Übung), dass

$$a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_m|}{q^m}} \cdot q = q = b + \varepsilon.$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $a \leq b$  (vgl. Bemerkung 2.41).

- 2) Aus  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$  folgt  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daher gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n+1}| \geq |a_n|$  für alle  $n \geq N$ , speziell  $|a_n| \geq |a_N| > 0$  für alle  $n \geq N$ . Dann ist  $(a_n)$  keine Nullfolge und die Reihe daher divergent.  $\square$

**Bemerkung 3.26** 1) Ähnlich wie beim Wurzelkriterium gibt es auch hier Fälle, in denen das Kriterium keine Aussage liefert, nämlich immer dann, wenn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Die beiden Reihen aus Bemerkung 3.24 liefern hierzu Beispiele, denn für beide Reihen gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ .

- 2) Im Fall  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  haben wir die Möglichkeit zu überprüfen, ob  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Der Beweis des Quotientenkriteriums zeigt, dass bereits aus dieser Bedingung die Divergenz folgt.
- 3) Das Wurzelkriterium ist als Konvergenzkriterium stärker als das Quotientenkriterium, denn aus dem Beweis des Quotientenkriteriums folgt, dass das Wurzelkriterium immer die Konvergenz einer Reihe liefert, wenn es das Quotientenkriterium tut. Umgekehrt gibt es Reihen, für die das Quotientenkriterium keine Entscheidung liefert, das Wurzelkriterium aber schon, siehe dazu das nachfolgende Beispiel.

**Beispiel 3.27** 1) Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  die Reihe mit

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \quad \text{und} \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann erhalten wir

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{2^{2n}}{2^{2n-1}} = 2 \quad \text{und} \quad \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{8}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit folgt

$$\frac{1}{8} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2$$

und das Quotientenkriterium gibt uns keine Auskunft über Konvergenz oder Divergenz der Reihe. Andererseits gilt

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{\frac{4}{2^{2n+1}}} = \frac{\sqrt[2n+1]{4}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

woraus wir mithilfe von Lemma 3.10 erhalten, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ . Mit dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

- 2) Das Quotientenkriterium hat aber auch einige Vorteile, denn die Berechnung des entsprechenden Grenzwerts bzw. Limes superior ist oft einfacher als beim Wurzelkriterium. Betrachten wir z.B. die sogenannte *Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

so ist diese für alle  $x \in \mathbb{R}$  absolut konvergent, denn wegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

folgt dies aus dem Quotientenkriterium. Beim Wurzelkriterium wären wir auf den schwierigeren Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}}$  gestoßen. (Übung: Zeigen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ .)

### 3.3 Die Exponentialreihe

Die Reihe aus Teil 2) von Beispiel 3.27 aus dem vorigen Abschnitt ist so wichtig, dass wir ihr einen eigenen Abschnitt widmen. Dabei schauen wir uns zunächst ein Anwendungsproblem an, nämlich die Beschreibung von natürlichen Wachstumsprozessen wie z.B. bei Bakterien in einer Petrischale, die mit einer Nährlösung gefüllt ist. Wir definieren dazu die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(t) := \text{Masse der Bakterien zur Zeit } t$$

(Dabei müssen wir natürlich einen geeigneten Zeitpunkt als “Nullpunkt” festsetzen.) Da sich die Bakterien in der Nährlösung wohlfühlen, beginnen sie sich zu vermehren. Der Zuwachs ist dabei für hinreichend kleine Zeitintervalle  $\Delta t$  nahezu proportional zur Masse der Bakterien, solange die Petrischale nicht zu klein ist. Wir erhalten also

$$f(t + \Delta t) - f(t) \approx c \cdot f(t) \cdot \Delta t.$$

Wir betrachten den Spezialfall  $c = 1$  und betrachten den Grenzwert

$$f'(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f(t).$$

(Hierbei haben wir unserem Wissen etwas vorausgegriffen und schon die Definition des Grenzwerts von Funktionen und der Ableitung benutzt - beides Begriffe, die wir in erst in späteren Kapiteln entwickeln werden.) Die Funktion  $f$ , die das Bakterienwachstum beschreibt hat also die Eigenschaft  $f' = f$ , d.h. sie stimmt mit ihrer Ableitung überein. Aus der Schule wissen Sie vielleicht, dass die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(t) = e^t$  diese Eigenschaften hat. Da wir aber noch keine Exponentialfunktionen definiert haben und uns insbesondere Potenzen an diesem Punkt der Vorlesung nur für ganze Zahlen bekannt sind, versuchen wir diese Funktion auf eine andere Art zu beschreiben. Dazu wählen wir als Ansatz eine Polynomfunktion der Form

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Unter Ausnutzung von bekannten Ableitungsregeln (auch diese werden wir später noch herleiten) erhalten wir

$$f'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + na_n t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

und daher

$$f(t) - f'(t) = a_0 - a_1 + (a_1 - 2a_2)t + (a_2 - 3a_3)t^2 + \cdots + (a_{n-1} - na_n)t^{n-1} + a_n t^n.$$

Für kleine  $|t| < 1$  und hinreichend große  $n \in \mathbb{N}$  wird der Term  $a_n t^n$  vernachlässigbar klein. Also wäre auch  $|f(t) - f'(t)|$  klein, falls  $a_{k-1} = ka_k$  für alle  $k = 1, \dots, n$  gilt. Daraus erhalten wir mit vollständiger Induktion

$$a_k = \frac{1}{k!} a_0.$$

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t) = a_0 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

dürfte also (zumindest für kleine  $|t|$ ) eine gute Approximation an eine Funktion mit der Eigenschaft  $f' = f$  sein. Da zu erwarten ist, dass diese Approximation umso besser wird, je größer wir  $n$  wählen, bietet es sich an, den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  zu betrachten.

**Definition 3.28 (Exponentialreihe)** 1) Für  $x \in \mathbb{R}$  sei

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Die dadurch definierte Abbildung  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \exp(x)$  heißt Exponentialfunktion.

2)  $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  heißt Eulersche Zahl.

**Bemerkung 3.29** Durch die Darstellung als Reihe können wir Näherungswerte für die Eulersche Zahl  $e$  berechnen, indem wir eine Partialsumme der Reihe berechnen. Um entscheiden zu können, wie gut unsere Approximation ist, benötigen wir eine Abschätzung für den *Restterm*

$$R_n(x) := \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left( 1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left( 1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|x|}{n+2} \right)^k, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei die zweite Abschätzung nach dem Majorantenkriterium erlaubt ist, wenn wir wissen dass die zuletzt aufgeführte geometrische Reihe auch konvergent ist. Dies können wir aber zum Glück erzwingen, denn falls wir  $n$  so groß wählen, dass  $\frac{|x|}{n+2} \leq \frac{1}{2}$  bzw.  $n \geq 2(|x| - 1)$  gilt, so können wir die geometrische Reihe in (3.3) mit Hilfe des Majorantenkriteriums durch 2 abschätzen (da  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$ ) und erhalten daher

$$|R_n(x)| \leq \frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } n \geq 2(|x| - 1). \quad (3.4)$$

Für  $x = 1$  und  $n = 10$  erhalten wir z.B.  $|R_{10}(1)| \leq \frac{2}{11!} \leq 5.02 \cdot 10^{-8}$  und damit die Näherung

$$e = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} + R_{10}(1) = 2.7182818011 \cdots \pm 5.02 \cdot 10^{-8}.$$

Damit haben wir die Eulersche Zahl  $e$  bereits die sieben Stellen hinter dem Komma korrekt bestimmt, wobei wir die in Anwendungswissenschaften verbreitete Notation  $c = a \pm b$  für  $c \in [a - b, a + b]$ , sowie auch schon die Darstellung reeller Zahlen als *Dezimalbruch* benutzt haben. Letzteres werden wir im nächsten Abschnitt einführen.

Unser Ziel ist im Folgenden zu zeigen, dass  $\exp(k) = e^k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt. Damit das Potenzgesetz  $e^{k+m} = e^k \cdot e^m$  für alle  $k, m \in \mathbb{Z}$  erfüllt ist, sollte die notwendige Bedingung  $\exp(k + m) = \exp(k) \exp(m)$  gelten. Wir wollen sogar noch allgemeiner zeigen, dass

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt. In Satz 3.3 fehlt aber leider ein Resultat für das Produkt von zwei Reihen. Dies liefern wir jetzt nach und betrachten dazu die  $n$ -ten Partialsummen von zwei Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell}$ . Dann gilt

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \cdot \left( \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k b_{\ell}.$$

Wenn wir also versuchen, das Produkt  $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell})$  als eine Reihe darzustellen, erwarten wir, dass wir über alle Produkte der Form  $a_k b_{\ell}$ ,  $k, \ell \in \mathbb{N}$  summieren müssen. Diese können wir uns als “unendliches Feld” vorstellen:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ a_3 b_0 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Es gibt nun sehr viele Möglichkeiten, die zugehörige Reihe aufzuschreiben, die sich jeweils in der Reihenfolge, in der wir die Elemente  $a_k b_{\ell}$  aufsummieren unterscheiden. Zwei nahe-  
liegende Möglichkeiten sind die Anordnung in verschachtelten Quadraten (linkes Schema in (3.5)) oder längs Diagonalen (rechtes Schema in (3.5)):

$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{l} q_0 \\ q_1 \rightarrow \uparrow \\ q_2 \rightarrow \uparrow \\ q_3 \rightarrow \uparrow \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 \\ \hline a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ \hline a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ \hline a_3 b_0 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddots \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \begin{array}{l} d_0 \nearrow \\ d_1 \nearrow \\ d_2 \nearrow \\ d_3 \nearrow \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 \\ \hline a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ \hline a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ \hline a_3 b_0 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddots \end{array} \end{array} \quad (3.5)$$



Die zugehörigen Reihen haben die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k \quad \text{mit} \quad q_k := a_k b_0 + \cdots + a_k b_k + \cdots + a_0 b_k, \quad (3.6)$$

$$\text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} d_k \quad \text{mit} \quad d_k := a_k b_0 + \cdots + a_0 b_k = \sum_{\ell=0}^k a_{k-\ell} b_{\ell}. \quad (3.7)$$

Da beide Reihen offenbar Umordnungen voneinander sind, liefern sie bei absoluter Konvergenz dasselbe Ergebnis. In diesem Fall ist die zweite Variante vorzuziehen, weil sich so Produkte von Reihen der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  leichter handhaben lassen. Für deren  $n$ -te Partialsummen mit  $n \geq 2m$  erhalten wir dann nämlich:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^n b_k x^k \right) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \cdots, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten von  $x^k$  für  $k = 0, \dots, n$  jeweils die Form  $a_k b_0 + \cdots + a_0 b_k$  haben. Die Reihe in (3.7) verdient daher einen eigenen Namen, der sich auf ihren Erfinder bezieht.

**Definition 3.30** Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  zwei Reihen. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \quad \text{mit} \quad d_k = \sum_{\ell=0}^k a_{k-\ell} b_{\ell} \quad (3.8)$$

das Cauchy-Produkt der Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

**Satz 3.31** Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert auch das Cauchy-Produkt der Reihen und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\ell=0}^k a_{k-\ell} b_{\ell} \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

**Beweis:** Wir betrachten zuerst die Reihe aus (3.6). Deren  $n$ -te Partialsumme enthält genau alle Summanden aus dem entsprechenden Quadrat im linken Schema in (3.5), d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^n q_k = \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \left( \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} \right) \quad \text{und auch} \quad \sum_{k=0}^n |q_k| \leq \left( \sum_{k=0}^n |a_k| \right) \left( \sum_{\ell=0}^n |b_{\ell}| \right).$$

Damit folgt aus unseren Grenzwertsätzen für das Produkt von Folgen aus der absoluten Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  auch die absolute Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ , und für die Summe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q_k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} \right).$$

Da das Cauchy-Produkt der Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  eine Umordnung der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$  ist, folgt aus deren absoluter Konvergenz die Behauptung mit Hilfe des Umordnungssatzes.  $\square$

Als Anwendung von Satz 3.31 erhalten wir die sogenannte *Funktionalgleichung* für die Exponentialfunktion.

**Satz 3.32 (Funktionalgleichung für exp)** Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$ .

**Beweis:** Mit Hilfe von Satz 3.31 und des Binomischen Lehrsatzes erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(x) \exp(y) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{(k-\ell)!} x^{k-\ell} \cdot \frac{1}{\ell!} y^{\ell} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} y^{\ell} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k \\ &= \exp(x+y). \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar 3.33** Seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt

- 1)  $\exp(0) = 1$ .
- 2)  $\exp(x) \neq 0$  und  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .
- 3)  $\exp(x) > 0$ .
- 4)  $\exp(m) = e^m$ .

**Beweis:** 1) Aus der Definition der Exponentialfunktion erhalten wir unmittelbar

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1,$$

da  $0^0 = 1$ ,  $0! = 1$  und  $0^k = 0$  für  $k \geq 1$ .

2) Es gilt  $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$ . Daraus folgt unmittelbar  $\exp(x) \neq 0$  und

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

3) Für  $x = 0$  folgt die Behauptung bereits aus 1). Für  $x > 0$  gilt

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 > 0.$$

Für  $x < 0$  folgt die Behauptung aus 2).

4) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  zeigen wir die Aussage mit vollständiger Induktion. Für  $n = 0$  gilt  $\exp(0) = 1 = e^0$ . Ist die Behauptung bereits für ein  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen, so folgt

$$\exp(n+1) = \exp(n) \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1},$$

also gilt die Aussage für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $m = -n$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  folgt die Behauptung dann aus

$$\exp(m) = \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n} = e^m. \quad \square$$

### 3.4 $b$ -adische Brüche

In diesem Abschnitt betrachten wir endlich die Darstellung von reellen Zahlen als *Dezimalbrüche* bzw. noch allgemeiner als  *$b$ -adische Brüche* zu einer Basis  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ .

**Definition 3.34** Sei  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Ein  $b$ -adischer Bruch ist eine Reihe der Form

$$c \sum_{k=-n}^{\infty} a_k b^{-k} := c \left( a_{-n} b^n + \cdots + a_{-1} b + \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^{-k} \right),$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  für  $k \in \mathbb{N} \cup \{-n, \dots, -1\}$  und  $c \in \{1, -1\}$ . Schreibweise:

$$\pm(a_{-n} \dots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 a_3 \dots)_b$$

Die Zahl  $b$  heißt Basis des Bruchs, die Elemente von  $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$  heißen Ziffern.

Für den Fall  $b = 10$  sprechen wir auch von einem *Dezimalbruch* und lassen die Klammer mit der Basiszahl als Index einfach weg. (Wer spitzfindig ist, hätte hier vielleicht lieber  $b = 9 + 1$  gesagt, weil sonst schon die Schreibweise als Dezimalbruch benutzt worden wäre, bevor sie überhaupt definiert wurde.)

**Beispiel 3.35** 1) Es gilt  $\frac{25}{2} = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}$  und daher

$$\frac{25}{2} = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

mit  $a_{-1} = 1$ ,  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 5$  und  $a_k = 0$  für  $k \geq 2$ . Damit erhalten wir die Schreibweise  $\frac{25}{2} = (12.5000\dots)_{10}$  bzw. kurz  $\frac{25}{2} = 12.5$ .

2) Analog erhalten wir:

$$\frac{10}{9} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 10^{-k} = 1.111111\dots$$

Solche Dezimalbrüche bezeichnen wir als *periodisch* und schreiben diese in der Form  $1.\overline{1}$ , wobei der Überstrich die sich ständig wiederholende Zifferngruppe nach dem Punkt (bzw. Komma) beschreibt. Da uns diese Schreibweise vertraut ist, verzichten wir an dieser Stelle auf eine exakte Definition.

**Lemma 3.36** Sei  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \geq 2$ . Dann ist jeder  $b$ -adische Bruch absolut konvergent.

**Beweis:** Sei  $c \sum_{k=-n}^{\infty} a_k b^{-k}$  der gegebene  $b$ -adische Bruch. O.B.d.A. sei  $c = 1$ , der Fall  $c = -1$  folgt analog. Wegen  $0 \leq a_k < b$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$|a_k b^{-k}| = a_k b^{-k} < b \cdot b^{-k} = b^{-k+1} = \frac{1}{b^{k-1}}.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$  und damit auch von  $\sum_{k=-n}^{\infty} a_k b^{-k}$ .  $\square$

Für den Beweis des folgenden Satzes benutzen wir eine neue Notation: Zu  $x \in \mathbb{R}$  sei

$$\lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Dies ist offenbar die ganzzahlige Zahl, die wir aus  $x$  durch “Abrunden” erhalten und es gilt  $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ . Die Klammern  $\lfloor \cdot \rfloor$  bezeichnet man als *Gauß-Klammern*.

**Satz 3.37** Sei  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ . Dann lässt sich jedes  $x \in \mathbb{R}$  als  $b$ -adischer Bruch darstellen.

**Beweis:** Sei o.B.d.A.  $x \geq 0$ , der Fall  $x < 0$  wird analog bewiesen. Da  $(b^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine unbeschränkte Folge ist, gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $x < b^{m+1}$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  minimal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt insbesondere  $0 \leq x < b^{n+1}$ . Wir konstruieren nun mit vollständiger Induktion eine Folge  $(a_k)_{k \geq -n}$ , so dass für alle  $\ell \in \mathbb{N} \cup \{-1, -2, \dots, -n\}$  gilt, dass

$$x = \sum_{k=-n}^{\ell} a_k b^{-k} + r_{\ell}, \quad \text{wobei } 0 \leq r_{\ell} < b^{-\ell}. \quad (3.9)$$

Nach dem Sandwich-Prinzip (Satz 2.20) folgt  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} r_{\ell} = 0$ , woraus wir  $x = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k b^{-k}$  erhalten. Wir zeigen also (3.9):

“ $\ell = -n$ ”: (Der Induktionsanfang beginnt bei der möglicherweise negativen Zahl  $-n$ . Dies ist aber kein Problem, denn durch eine geeignete Indexverschiebung können wir dies stets auf einen klassischen Induktionsbeweis mit Beginn bei “0” zurückführen.) Wegen  $0 \leq x < b^{n+1}$  gilt  $0 \leq x b^{-n} < b$ . Setze  $a_{-n} := \lfloor x b^{-n} \rfloor$  und  $\delta_{-n} := x b^{-n} - a_{-n}$ . Dann gilt  $a_{-n} \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ ,  $\delta_{-n} \in [0, 1[$  und

$$x b^{-n} = a_{-n} + \delta_{-n}.$$

Damit erhalten wir

$$x = a_{-n} b^n + \delta_{-n} b^n = a_{-n} b^n + r_{-n},$$

wobei  $r_{-n} := \delta_{-n} b^n < b^n$  und  $r_{-n} \geq 0$ .

“ $\ell \Rightarrow \ell + 1$ ”: Die Folgenglieder  $a_{-n}, \dots, a_{\ell}$  seien bereits für ein  $\ell \geq -n$  konstruiert und es gelte die Induktionsvoraussetzung

$$x = \sum_{k=-n}^{\ell} a_k b^{-k} + r_{\ell}, \quad \text{wobei } 0 \leq r_{\ell} < b^{-\ell}.$$

Dann gilt insbesondere  $0 \leq r_{\ell} b^{\ell+1} < b$  und analog zum Induktionsanfang erhalten wir mit  $a_{\ell+1} := \lfloor r_{\ell} b^{\ell+1} \rfloor \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  und  $\delta_{\ell+1} := r_{\ell} b^{\ell+1} - a_{\ell+1} \in [0, 1[$ , dass

$$r_{\ell} b^{\ell+1} = a_{\ell+1} + \delta_{\ell+1}.$$

Daraus folgt schließlich

$$x = \sum_{k=-n}^{\ell} a_k b^{-k} + r_{\ell} = \sum_{k=-n}^{\ell} a_k b^{-k} + a_{\ell+1} b^{-(\ell+1)} + \delta_{\ell+1} b^{-(\ell+1)} = \sum_{k=-n}^{\ell+1} a_k b^{-k} + r_{\ell+1},$$

wobei  $r_{\ell+1} := \delta_{\ell+1} b^{-(\ell+1)}$  und  $0 \leq r_{\ell+1} < b^{-(\ell+1)}$ .  $\square$

**Beispiel 3.38** Wir entwickeln  $(0.1)_{10}$  in einen 2-adischen Bruch bzw. *dyadischen Bruch*. Aus dem Beweis des Satzes folgt  $a_{\ell+1} = \lfloor r_{\ell} b^{\ell+1} \rfloor = \lfloor \delta_{\ell} b^{-\ell} b^{\ell+1} \rfloor = \lfloor \delta_{\ell} b \rfloor$ . Daher erhalten wir wegen  $0 \leq 0.1 < 2^0$  mit  $a_0 = 0$  und  $\delta_0 = 0.1$ :

$$\begin{aligned} 0.1 \cdot 2 &= 0.2 \implies a_1 = \lfloor 0.2 \rfloor = 0 \quad \text{und} \quad \delta_1 = 0.2, \\ 0.2 \cdot 2 &= 0.4 \implies a_2 = \lfloor 0.4 \rfloor = 0 \quad \text{und} \quad \delta_2 = 0.4, \\ 0.4 \cdot 2 &= 0.8 \implies a_3 = \lfloor 0.8 \rfloor = 0 \quad \text{und} \quad \delta_3 = 0.8, \\ 0.8 \cdot 2 &= 1.6 \implies a_4 = \lfloor 1.6 \rfloor = 1 \quad \text{und} \quad \delta_4 = 0.6, \\ 0.6 \cdot 2 &= 1.2 \implies a_5 = \lfloor 1.2 \rfloor = 1 \quad \text{und} \quad \delta_5 = 0.2, \\ 0.2 \cdot 2 &= 0.4 \implies a_6 = \lfloor 0.4 \rfloor = 0 \quad \text{und} \quad \delta_6 = 0.4 \end{aligned}$$

Ab hier wiederholt sich das Schema. Wir erhalten also einen periodischen dyadischen Bruch:

$$(0.1)_{10} = (0.\overline{00011})_2 = (0.0001100110011 \dots)_2.$$

Offenbar können  $b$ -adische Brüche bzgl. manchen Basen periodisch und bzgl. anderen Basen abbrechend sein.

**Bemerkung 3.39** Die Darstellung als  $b$ -adischer Bruch ist i.A. nicht eindeutig, denn z.B. gilt für Dezimalbrüche

$$0.\bar{9} = 0.999 \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} - 1 \right) = 9 \cdot \left( \frac{10}{9} - 1 \right) = 1 = 1.000 \dots$$

Man kann aber zeigen, dass die Darstellung eindeutig ist, wenn man fordert, dass  $a_{-n} \neq 0$  falls  $n \geq 1$  und dass unendlich viele Ziffern  $a_k$  von  $b-1$  (also bei Dezimalbrüchen von 9) verschieden sein müssen.

Dies zeigt man so: Sei  $x \in \mathbb{R}$  und seien

$$x = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k b^{-k} = \sum_{k=-m}^{\infty} \tilde{a}_k b^{-k} \quad (3.10)$$

zwei Darstellungen von  $x$  als  $b$ -adischer Bruch mit  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $a_k, \tilde{a}_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  für  $k \geq -n$ . O.B.d.A. sei  $n \geq m$  und  $a_{-n} \neq 0$  falls  $n > 0$ . (Andernfalls lasse Summanden mit  $a_k = 0$ ,  $k < 0$  weg und vertausche ggf. die Rollen von  $n$  und  $m$ .) Weiter können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $n = m$ , ansonsten fügen wir Summanden der Form  $\tilde{a}_k b^{-k}$  mit  $\tilde{a}_k = 0$  für  $k = -(m+1), \dots, -n$  zur zweiten Darstellung hinzu. Angenommen es gibt ein  $k \in \mathbb{N} \cup \{-1, \dots, -n\}$  mit  $a_k \neq \tilde{a}_k$ . Dann sei  $\ell$  minimal mit dieser Eigenschaft, d.h. es gilt  $a_k = \tilde{a}_k$  für  $k < \ell$  (falls es solche  $k$  gibt) und  $a_{\ell} \neq \tilde{a}_{\ell}$ . O.B.d.A. sei  $a_{\ell} > \tilde{a}_{\ell}$ . Dann erhalten wir aus (3.10), dass

$$(a_{\ell} - \tilde{a}_{\ell})b^{-\ell} = \sum_{k=\ell+1}^{\infty} (\tilde{a}_k - a_k)b^{-k}.$$

Wegen  $a_k, \tilde{a}_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  gilt insbesondere  $-(b-1) \leq \tilde{a}_k - a_k \leq b-1$  für alle  $k$  und damit erhalten wir (mit Hilfe einer Indexverschiebung)

$$1 \leq a_{\ell} - \tilde{a}_{\ell} \leq \sum_{k=\ell+1}^{\infty} (\tilde{a}_k - a_k)b^{-k+\ell} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (b-1)b^{-k-1} = \frac{b-1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} = \frac{b-1}{b} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = 1.$$

Die Ungleichungen sind also jeweils Gleichungen und dies ist nur möglich, wenn  $\tilde{a}_k - a_k = b-1$  für alle  $k \geq \ell+1$  gilt. Wegen  $a_k, \tilde{a}_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  folgt dann aber  $\tilde{a}_k = b-1$  und  $a_k = 0$  für alle  $k \geq \ell+1$ , d.h. in einer der beiden Darstellungen gilt  $a_k = b-1$  für fast alle  $k$ .

## 3.5 Abzählbarkeit

Mit Hilfe der Darstellung reeller Zahlen als  $b$ -adische Brüche können wir eine interessante Fragestellung beantworten: *Gibt es “mehr” rationale Zahlen als natürliche Zahlen? Und gibt es “mehr” reelle Zahlen als rationale Zahlen?* Die naheliegende Antwort auf die erste (und auch die zweite) Frage scheint “ja” zu sein, denn schließlich ist jede natürliche Zahl eine rationale Zahl, aber es gibt rationale Zahlen, die keine natürlichen Zahlen sind. Andererseits haben alle betrachteten Mengen “unendlich viele” Elemente und man könnte sich auch auf den Standpunkt stellen, dass “unendlich gleich unendlich” ist, also alle Mengen “gleich viele” Elemente enthalten. Wir müssen daher die Begriffe “mehr” und “genauso viele” erst einmal präzisieren.

**Definition 3.40** Seien  $X, Y$  zwei Mengen.

- 1)  $X$  heißt endlich, falls  $X$  nur endlich viele Elemente enthält, andernfalls heißt  $X$  unendlich.
- 2)  $X$  und  $Y$  heißen gleichmächtig, falls es eine Bijektion  $X \rightarrow Y$  gibt.
- 3)  $X$  heißt abzählbar, falls es eine Surjektion  $\mathbb{N} \rightarrow X$  gibt.
- 4)  $X$  heißt abzählbar unendlich, falls  $X$  abzählbar und unendlich ist.
- 5)  $X$  heißt überabzählbar, falls  $X$  nicht abzählbar ist.

**Bemerkung 3.41** 1) Sei  $\mathcal{M}$  eine Menge von Mengen (z.B. die Menge  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  aller Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ). Dann ist Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{M}$ . (Übung.)

- 2) Man kann leicht zeigen, dass zwei endliche Mengen genau dann gleichmächtig sind, wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen haben. (Dies ist üblicherweise eine Übung in der *Linearen Algebra*). Daher können wir in diesem Fall die *Mächtigkeit* der Menge  $M$  als die Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  der Elemente der Menge definieren, Schreibweise:  $|M| = n$ . Z.B. gilt

$$|\emptyset| = 0, \quad |\{1, 3, 5, e, \sqrt{2}\}| = 5, \quad |\{-1, 0, 17\}| = 3.$$

- 3) Genau wie bei der Definition reeller Zahlenfolgen können wir Abbildungen  $\mathbb{N} \rightarrow X$  als *Folgen in  $X$*  definieren. In dieser Sprechweise ist eine Menge  $X$  genau dann abzählbar, wenn es eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt, so dass

$$X = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dies erklärt auch den Namen *Abzählbarkeit*. Die Elemente der Mengen lassen sich sozusagen “durchnummerieren” (wobei an dieser Stelle nicht ausgeschlossen ist, dass ein Element mehrere Nummern erhält).

- 4) Endliche Mengen sind abzählbar. (Klar?)

- 5) Man kann zeigen, dass für eine abzählbar unendliche Menge gilt, dass es nicht nur eine Surjektion  $\mathbb{N} \rightarrow X$ , sondern sogar eine Bijektion  $\mathbb{N} \rightarrow X$  gibt. (Übung.) Damit ist jede abzählbare Menge entweder endlich oder gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen.

Die große Frage, die sich nun stellt ist die, ob es überhaupt überabzählbare Mengen gibt. Wir beginnen unsere Suche nach ihnen bei speziellen Teilmengen der reellen Zahlen.

**Beispiel 3.42**  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$  sind abzählbar. Für  $\mathbb{N}$  ist dies offensichtlich und für  $\mathbb{Z}$  betrachten wir die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_{2k} = k$  und  $a_{2k+1} = -(k+1)$ . Dann gilt

$$(a_n) = (0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots)$$

und daher  $\mathbb{Z} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Insbesondere sind also  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$  gleichmächtig.

Unser nächstes Ziel ist die Untersuchung der *Mächtigkeit* der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ . Dazu hilft uns der folgende Satz.

**Satz 3.43** *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar, d.h. sind  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  abzählbare Mengen, dann ist auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  abzählbar.*

**Beweis:** Wir konstruieren mit dem 1. Cantorschen Diagonalargument (das im Grunde auch schon in der Konstruktion des Cauchy-Produkts von Reihen versteckt war) eine Folge, die die Elemente von  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  abzählt. Dazu sei  $(a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge, die die Elemente von  $A_n$  abzählt. Wir betrachten nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 : & a_{0,0} & \rightarrow & a_{0,1} & \rightarrow & a_{0,2} & \rightarrow & a_{0,3} & \rightarrow & a_{0,4} & \rightarrow & a_{0,5} & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
 A_1 : & a_{1,0} & & a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} & & \dots & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & \nearrow & & & & & & & \\
 A_2 : & a_{2,0} & & a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & & \dots & & & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & \\
 A_3 : & a_{3,0} & & a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & & \dots & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & & & & \\
 A_4 : & a_{4,0} & & a_{4,1} & & a_{4,2} & & a_{4,3} & & \dots & & & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & 
 \end{array}$$

Durch die Pfeile wird der Beginn einer Vorschrift angedeutet, die eine Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$(b_n) = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,0}, a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots) \quad \text{und} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

liefert. Dies zeigt die behauptete Abzählbarkeit.  $\square$

Der Satz beinhaltet auch den Fall einer Vereinigung von endlich vielen abzählbaren Mengen  $A_0, A_1, \dots, A_m$ , indem wir in Satz 3.43 einfach  $A_n = A_0$  für  $n > m$  wählen.

**Korollar 3.44**  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.

**Beweis:** Da  $\mathbb{Z}$  abzählbar ist, ist auch  $A_n = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  für festes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  abzählbar. Dann ist

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$$

nach Satz 3.43 ebenfalls abzählbar.  $\square$

An dieser Stelle ist vielleicht die Vermutung naheliegend, dass alle Mengen abzählbar sind. Doch jetzt kommt die große Überraschung:

**Satz 3.45**  $]0, 1[$  ist überabzählbar.

**Beweis:** Der Beweis beruht auf dem sogenannten 2. Cantorschen Diagonalargument. Angenommen  $]0, 1[$  ist abzählbar. Dann gibt es eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ , so dass

$$]0, 1[ = \{a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Das wir die Folge mit dem Index 1 beginnen lassen hat praktische Gründe und ändert nichts an dem Begriff der Abzählbarkeit, weil wir natürlich auch die Folge  $(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  betrachten könnten, also durch eine Indexverschiebung die gewünschte Surjektion  $\mathbb{N} \rightarrow ]0, 1[$  erhalten. Da die Elemente der Menge  $]0, 1[$  eine Dezimalbruchdarstellung haben, existieren Folgen  $(a_{n,m})_{m \geq 1}$ , so dass

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.\underline{a_{1,1}}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\dots \\ a_2 &= 0.a_{2,1}\underline{a_{2,2}}a_{2,3}a_{2,4}\dots \\ a_3 &= 0.a_{3,1}a_{3,2}\underline{a_{3,3}}a_{3,4}\dots \\ a_4 &= 0.a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}\underline{a_{4,4}}\dots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Hierbei verlangen wir wie üblich für alle Zahlen, dass unendlich viele Ziffern von 9 verschieden sind, damit wir jeweils eine eindeutige Darstellung als Dezimalbruch haben. Wir konstruieren nun eine Zahl  $b \in ]0, 1[$  mit Hilfe der Elemente auf der “Diagonalen” in unserem “Schema” durch

$$b = 0.b_1b_2b_3b_4\dots, \quad \text{wobei } b_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{n,n} \neq 0, \\ 1 & \text{falls } a_{n,n} = 0. \end{cases}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung als Dezimalbruch folgt  $b \neq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , da  $b$  und  $a_n$  in der  $n$ -ten Stelle hinter dem Punkt verschieden sind. Dies erzeugt einen Widerspruch und folglich ist  $]0, 1[$  überabzählbar.  $\square$



**Korollar 3.46**  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sind überabzählbar.

**Beweis:** Falls  $\mathbb{R}$  abzählbar wäre, dann gäbe es eine surjektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Durch die Definition

$$\tilde{f}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{falls } f(n) \in ]0, 1[ , \\ 0.5 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten wir eine Surjektion  $\tilde{f} : \mathbb{N} \rightarrow ]0, 1[$ .

Aus der Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$  folgt die von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , denn sonst wäre  $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$  als Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen ebenfalls abzählbar.  $\square$

Die Elemente von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nennen wir *irrationale Zahlen*. Wir haben also gezeigt, dass es “bedeutend mehr” irrationale Zahlen gibt als rationale. Welche Zahlen sind denn nun dafür “verantwortlich”? Man könnte auf die Idee kommen, dass es an den “Wurzeln” liegt, denn diese sind schließlich häufig irrational (wobei wir dies nur für  $\sqrt{2}$  auch bewiesen haben). Überraschenderweise sind diese aber nicht die “Schuldigen”.

**Definition 3.47** Die Menge

$$\mathbb{A} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{Es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, a_n \neq 0 \text{ mit } \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \right\}$$

heißt Menge der algebraischen Zahlen. Ihre Elemente heißen algebraische Zahlen und die Elemente von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$  heißen transzendente Zahlen.

**Beispiel 3.48** Es gilt  $\sqrt{2} \in \mathbb{A}$ , denn  $2 - 1 \cdot \sqrt{2}^2 = 0$ . Analog folgt, dass alle  $k$ -ten Wurzeln  $\sqrt[k]{q}$  mit  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $q \geq 0$  algebraische Zahlen sind.

**Satz 3.49**  $\mathbb{A}$  ist abzählbar und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$  ist überabzählbar.

**Beweis:** Übung.  $\square$

**Bemerkung 3.50** 1) Aus der Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$  folgt, dass die “überwältigende Mehrheit” der reellen Zahlen transzendente Zahlen sind. Interessanterweise sind uns nur “relativ wenige” davon explizit bekannt. Persönlich vorgestellt wurde uns bisher nur die Eulersche Zahl  $e$ . Der Nachweis, dass es sich dabei tatsächlich um eine transzendente Zahl handelt ist nicht einfach und wurde erstmals 1873 von dem berühmten Mathematiker Charles Hermite geführt, nach dem auch die *Hermiteischen Matrizen* benannt sind, die Sie in der *Linearen Algebra* kennenlernen werden. Weitere Beispiele für transzendente Zahlen (die wir allerdings erst nach und nach im Laufe dieser Vorlesung definieren werden) sind z.B.

$$\pi, 2^{\sqrt{2}}, \sin(1), \ln(2), e^{\pi},$$

und “ähnlich aufgebaute” Zahlen. Weitere interessante Beispiele sind die Zahlen

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.11000100000000000000000010\dots \quad \text{und} \quad 0.12345678910111213\dots$$

Von anderen Zahlen, wie z.B.

$$\pi e, e^{\pi^2}, \pi^e, \pi^\pi, e^e$$

ist beim Schreiben dieses Skripts (falls nicht kurz vorher eine denkwürdige, noch nicht publizierte Entdeckung stattgefunden hat) noch unbekannt gewesen, ob es sich um transzendente, algebraisch irrationale oder sogar rationale Zahlen handelt. Diese Tatsache sollte klar machen, dass Transzendenzbeweise i.A. überaus schwierig durchzuführen sind.

- 2) Die Mengen  $]0, 1[$  und  $\mathbb{R}$  sind nicht nur beide überabzählbar, sondern sie sind sogar gleichmächtig. Eine Bijektion erhalten wir durch die Abbildung

$$]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}.$$

(Um nachzuweisen, dass dies tatsächlich eine Bijektion ist, benötigen wir allerdings das Wissen, das wir erst am Ende von Kapitel 4 besitzen werden.) Damit stellt sich die folgende Frage: *Ist jede überabzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$  gleichmächtig zu  $\mathbb{R}$ ?* (Die Bejahung dieser Frage ist als die sogenannte *Kontinuumshypothese* bekannt.) Der berühmte Mathematiker David Hilbert stellte diese Frage im Jahr 1900 auf dem *Internationalen Mathematikerkongress* in Paris, währenddessen er eine Liste von 23 offenen Problemen vorstellte, von denen immer noch nicht alle gelöst werden konnten. Diese erste Frage konnte aber im Jahr 1963 schließlich beantwortet werden, auch wenn uns die Antwort möglicherweise nicht gefallen mag: Die Kontinuumshypothese ist *unentscheidbar*, d.h. man kann sie in dem der Mathematik zu Grunde liegenden Axiomensystem (dies ist die sogenannte *Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel*) weder beweisen, noch widerlegen. Man könnte sie höchstens als weiteres Axiom zu den bereits bestehenden hinzunehmen... (Man könnte aber auch ebenso gut ihre Negation zu einem Axiom machen.)

# Kapitel 4

## Funktionen und Stetigkeit

Die Untersuchung der Eigenschaften von *Funktionen* ist einer der Hauptgegenstände der Analysis, weshalb wir uns in den folgenden Kapiteln ausführlich damit beschäftigen wollen. In diesem Kapitel konzentrieren wir uns dabei zunächst auf den Begriff der *Stetigkeit*.

### 4.1 Funktionen

**Definition 4.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine reelle Funktion (kurz Funktion) auf  $D$  ist eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wie schon in Kapitel 0 angedeutet, ist die Verwendung des Begriffs *Funktion* in der Mathematik nicht ganz einheitlich. Während in der Mengenlehre die Begriffe *Abbildung* und *Funktion* synonym sind, wird in anderen Disziplinen zwischen beiden Begriffen unterschieden. Auch in dieser Veranstaltung verwenden wir den Begriff der Funktion zunächst nur wie in Definition 4.1 festgelegt. Außerdem erinnern wir daran, dass die Menge  $D$  in Definition 4.1 der *Definitionsbereich* von  $f$  genannt wird und dass der *Graph* von  $f$  durch die Menge  $\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$  gegeben ist.

**Beispiel 4.2** 1) Die *Identität*  $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$  ist eine Funktion.

2) Der Absolutbetrag  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$  ist eine Funktion. Eine Skizze seines Graphen finden Sie in Abbildung 4.1

3) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aus Abschnitt 3.3 ist natürlich ebenfalls eine Funktion.

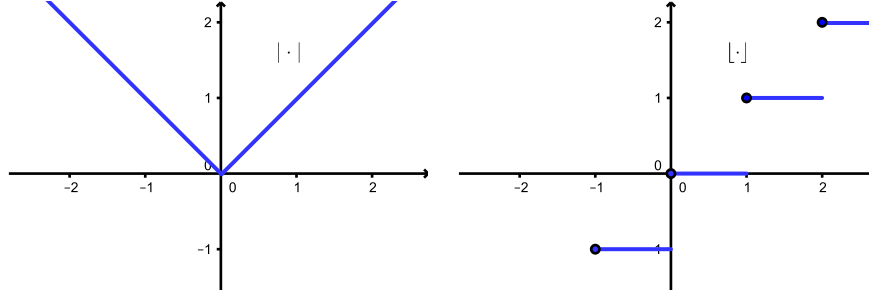
4) Wir setzen  $\sqrt[k]{0} := 0$ . Dann ist die  $k$ -te *Wurzelfunktion*  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[k]{x}$  unser erstes Beispiel für eine Funktion, die nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.

5) Die *Abrundungs-Funktion*  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$  ist gegeben durch

$$\lfloor x \rfloor := \max \{k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ mit } k \leq x\},$$

Den Graphen dieser Funktion finden Sie ebenfalls in Abbildung 4.1 skizziert.

Abbildung 4.1: Funktionsgraphen des Absolutbetrags (links) und der Abrundungsfunktion (rechts)



Im Folgenden definieren wir einige Operationen, mit denen wir aus bereits bekannten Funktionen neue Funktionen gewinnen können.

**Definition 4.3** Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ , und  $c \in \mathbb{R}$ .

- 1) Die Funktionen  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $cf$  auf  $D$  sind durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad (cf)(x) := c \cdot f(x)$$

für alle  $x \in D$  definiert.

- 2) Die Funktion  $\frac{f}{g} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $\tilde{D} := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$  ist definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{für alle } x \in \tilde{D}.$$

**Beispiel 4.4** 1) Eine Polynomfunktion  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Form

$$p = \sum_{k=0}^n a_k (Id_{\mathbb{R}})^k, \quad \text{d.h. } x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Ein konkretes Beispiel ist gegeben durch

$$p_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto p_0(x) = 3 + 4x - \sqrt{2} \cdot x^2.$$

- 2) Sind  $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Polynomfunktionen, dann ist

$$\frac{p}{q} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $D := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$  eine rationale Funktion. Z.B. ist  $f$  mit

$$f(x) = \frac{3 + 4x}{1 - x^2}$$

eine Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 4.2 Stetige Funktionen

Für den Begriff der *Stetigkeit* einer Funktion wird bisweilen gerne die Umschreibung “eine Funktion, deren Graph man ohne mit dem Stift abzusetzen zeichnen kann” verwendet. Dies ist zwar sehr anschaulich, aber leider **FALSCH**! Was die eigentliche Bedeutung des Begriffs besser trifft ist der Ausspruch “Eine Funktion ist stetig, wenn hinreichend kleine Änderungen des Arguments nur kleine Änderungen im Funktionswert hervorrufen.” Dies ist allerdings mathematisch auch noch zu unpräzise, weshalb wir zunächst eine andere Definition wählen.

**Definition 4.5** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1)  $f$  heißt stetig in  $a \in D$ , wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

- 2)  $f$  heißt stetig, falls  $f$  in allen  $a \in D$  stetig ist.

**Bemerkung 4.6** Die Bedingung für *Stetigkeit* lässt sich auch kurz als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

für alle konvergenten Folgen  $(x_n)$  in  $D$  mit umformulieren und daher wie folgt interpretieren:

“Man kann Grenzwertbildung und Funktionsauswertung miteinander vertauschen.”

**Beispiel 4.7** 1)  $Id_{\mathbb{R}}$  ist stetig, denn für alle  $a \in D$  und alle Folgen  $(x_n)$  in  $D$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} Id_{\mathbb{R}}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = Id_{\mathbb{R}}(a)$$

- 2) Der Absolutbetrag  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, denn sei  $a \in D$  und  $(x_n)$  eine Folge in  $D$ , die gegen  $a$  konvergiert. Dann gilt

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| \quad (\text{Übung}),$$

woraus wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$  erhalten.

- 3) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

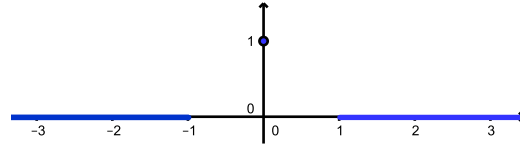
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in  $a = 0$ , denn wählen wir die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ , so gilt zwar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \neq 1 = f(0).$$

4) Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = ]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[$  und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$



ist stetig und insbesondere stetig in  $a = 0$ , denn sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n| < 1$  für alle  $n \geq N_1$ . Da  $(x_n)$  aber eine Folge in  $D$  ist, folgt daraus  $x_n = 0$  für alle  $n \geq N_1$ . Dann gilt aber auch  $f(x_n) = 1$  für alle  $n \geq N_1$  und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 = f(0).$$

Der Unterschied zur Funktion in 3) liegt darin, dass der Punkt  $a = 0$  hier “*isoliert*” ist, und daher jede gegen 0 konvergente Folge von einem bestimmten Index an konstant sein muss. Speziell ist diese Funktion ein Beispiel für eine stetige Funktion, deren Graph “man nicht ohne abzusetzen mit dem Stift zeichnen kann”.

**Satz 4.8** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  stetig in  $a \in D$ , sowie  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $cf$  stetig in  $a$ . Gilt zusätzlich  $g(a) \neq 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  stetig in  $a$ .

**Beweis:** Dies folgt sofort aus unseren Grenzwertsätzen Satz 2.14 und 2.15.  $\square$

**Beispiel 4.9** Aus dem Satz folgt sofort die Stetigkeit von allen Polynomfunktionen und allen rationalen Funktionen. Insbesondere ist die rationale Funktion

$$\text{inv} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } x \mapsto \frac{1}{x}$$

stetig. Überlegen Sie, wie der Graph dieser Funktion aussieht und machen Sie sich klar, dass wir damit ein zweites (und vielleicht überzeugenderes) Beispiel einer stetigen Funktion gefunden haben, deren Graph sich “nicht ohne abzusetzen mit dem Stift zeichnen lässt”.

Für den nächsten Satz erinnern wir an die Definition der Komposition von Funktionen (Definition 0.25), sowie daran, dass wir das *Bild* einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  nach Definition 0.21 mit  $f(D)$  bezeichnen. Im Gegensatz dazu werden Sie das Bild einer linearen Abbildung in der Linearen Algebra typischerweise mit  $\text{Bild}(f)$  bezeichnen.

**Satz 4.10** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen mit  $f(D) \subseteq \tilde{D}$ . Ist  $f$  stetig in  $a$  und ist  $g$  stetig in  $f(a)$ , dann ist die Komposition  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .

**Beweis:** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Dann gilt

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g\left(f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)\right) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)),$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Stetigkeit von  $g$  in  $f(a)$  und in der vorletzten Gleichheit die Stetigkeit von  $f$  in  $a$  ausgenutzt haben. Da  $(x_n)$  beliebig war, folgt die Stetigkeit von  $g \circ f$  in  $a$ .  $\square$

Kurz lassen sich die wesentliche Aussagen von Satz 4.8 und Satz 4.10 wie folgt zusammenfassen: *Summen, Produkte, skalare Vielfache, Quotienten und Kompositionen stetiger Funktionen sind wieder stetig.*

**Beispiel 4.11** Ist die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann auch die Funktion  $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |f(x)|$ , da sie Komposition der stetigen Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist.

**Satz 4.12** Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

**Beweis:** Wir führen den Beweis in zwei Schritten aus.

- 1) Die Exponentialfunktion ist stetig in  $a = 0$ .

Wir erinnern uns daran, dass wir in Abschnitt 3.3 eine Formel für das Restglied der Exponentialfunktion gefunden hatten. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$|R_n(x)| = \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } |x| \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

Speziell gilt also für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \leq 1$ , dass

$$|\exp(x) - 1| = |R_0(x)| \leq 2|x|.$$

Sei nun  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Dann gilt insbesondere  $|x_n| \leq 1$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und daher ebenso

$$0 \leq |\exp(x_n) - 1| \leq 2|x_n|$$

für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit dem Dreifolgensatz Satz 2.20 erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = 1 = \exp(0)$$

und daher die Stetigkeit von  $\exp$  in  $a = 0$ .

- 2) Die Exponentialfunktion ist stetig in  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Sei  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $a$ . Dann ist  $(x_n - a)$  eine Nullfolge. Weiter erhalten wir mit Hilfe der Funktionalgleichung (Satz 3.32) und Teil 2) von Korollar 3.33, dass

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - a + a) = \exp(x_n - a) \exp(a),$$

und daraus folgt wegen der in 1) gezeigten Stetigkeit von  $\exp$  in 0, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \exp(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a). \quad \square$$

### 4.3 Grenzwerte von Funktionen

Die Stetigkeit von Funktionen lässt sich auch auf andere Weisen ausdrücken, als mit Hilfe von Folgen. Ein Weg führt über Grenzwerte von Funktionen. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des Häufungspunktes einer Menge.

**Definition 4.13** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  eine Menge und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann heißt  $a$  Häufungspunkt von  $A$ , falls in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  unendlich viele  $x \in A$  liegen.

**Beispiel 4.14** 1)  $a, b$  sind Häufungspunkte von  $]a, b[$ . Ebenso natürlich jedes  $c \in ]a, b[$ .

2) Allgemeiner gilt: Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, das aus mindestens zwei Punkten besteht. Dann ist jedes  $c \in I$  ein Häufungspunkt von  $I$ .

3) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $a$  kein Häufungspunkt von  $\{a\} = [a, a]$ .

Den Begriff des Häufungspunktes hatten wir auch schon für Folgen definiert. Tatsächlich gibt es einen Zusammenhang zwischen beiden Begriffen.

**Bemerkung 4.15** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge und  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Ist  $a \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt der Menge  $A$ , dann ist  $a$  auch ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ . (Klar?)

**Beispiel 4.16** 1) Sei  $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ . Dann ist  $a = 0$  ein Häufungspunkt von  $A$  und insbesondere auch ein Häufungspunkt der Folge  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ .

2) Die Umkehrung in Bemerkung 4.15 gilt nicht! Betrachten wir die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = (-1)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ , so sind 1 und  $-1$  zwar Häufungspunkte der Folge  $(a_n)$ , es sind aber keine Häufungspunkte der Menge  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ .

Der Sinn für die Definition von Häufungspunkten von Mengen liegt darin, dass gewisse gegen diese Punkte konvergente Folgen existieren.

**Satz 4.17** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  eine Menge und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $a$  ist ein Häufungspunkt von  $A$ .
- 2) Es gibt eine Folge  $(a_n)$  in  $A \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert.

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)”: Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Dann gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  unendlich viele  $x \in A$  in  $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ , also insbesondere ein  $a_n \in A \setminus \{a\}$  mit  $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ . Offenbar gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . (Wir haben  $a_0$  nicht definiert! Macht aber auch nichts!)

“2)  $\Rightarrow$  1)”: Dies zeigen wir mit Kontraposition: Sei  $a$  kein Häufungspunkt von  $A$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass nur endlich viele Elemente aus  $A$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen. Sei nun  $d := \min \{|x - a| \mid x \in (A \setminus \{a\}) \cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \}$ , d.h.  $d$  ist der Abstand von  $a$  zu dem Element aus  $A \setminus \{a\}$ , das am dichtesten an  $a$  liegt. Dann gilt  $d > 0$  und  $(A \setminus \{a\}) \cap ]a - d, a + d[ = \emptyset$ . Dann kann es aber keine Folge in  $A \setminus \{a\}$  geben, die den Grenzwert  $a$  hat!  $\square$



**Beispiel 4.18** Jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathbb{Q}$ :

- 1) Falls  $a \in \mathbb{Q}$ , so ist  $(a + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\mathbb{Q} \setminus \{a\}$ , die gegen  $a$  konvergiert.
- 2) Ist dagegen  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so können wir  $a$  als Dezimalbruch  $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k 10^{-k}$  darstellen.  
Dann ist

$$\left( \sum_{k=-m}^n a_k 10^{-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Folge in  $\mathbb{Q} \setminus \{a\} = \mathbb{Q}$ , die gegen  $a$  konvergiert.

**Definition 4.19** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $a \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann heißt  $c \in \mathbb{R}$  der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $a$ , falls für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{a\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

In diesem Fall benutzen wir die Schreibweise  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ .

Leider ist auch die Definition des Grenzwerts einer Funktion in der Mathematik nicht mehr einheitlich. Die hier vorgestellte Version ist die sogenannte “gepunktete” Version des Grenzwerts (da die Folgen aus  $D \setminus \{a\}$  sein müssen) und geht auf den Berliner Mathematiker Karl Weierstraß zurück. Um zu garantieren, dass es überhaupt gegen  $a$  konvergente Folgen in  $D \setminus \{a\}$  gibt, ist die Voraussetzung, dass  $a$  ein Häufungspunkt von  $D$  ist notwendig. Abweichend davon gibt es auch die Definition des Grenzwerts, die Folgen  $(x_n)$  in ganz  $D$  erlaubt und daher auf die Häufungspunkt-Voraussetzung verzichten kann. Aus diesem Grund sind beide Begriffe nicht äquivalent. Wir übernehmen hier die Definition nach Weierstraß, da sie sich in Kapitel 6 als vorteilhaft erweisen wird.

**Beispiel 4.20** 1) Für die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 4.7 existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Allerdings ist dieser Grenzwert verschieden vom Funktionswert  $f(0) = 1$  an der Stelle Null.

- 2) Für die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = ]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[$  und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

ist der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht definiert.

Aus den Definitionen der Stetigkeit und des Grenzwerts einer Funktion folgt sofort der folgende Satz.

**Satz 4.21** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $a \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig in  $a$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**Bemerkung 4.22** Definition 4.19 lässt sich verallgemeinern: Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann definieren wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c,$$

falls für jede bestimmt gegen  $\infty$  divergente Folge  $(x_n)$  in  $D$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

Weiter können wir auch uneigentliche Grenzwerte erlauben und somit in unserer Definition  $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  zulassen. Analog definieren wir dann auch noch den (ggf. uneigentlichen) Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Beispiel 4.23** 1) Für die Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

2) Sei  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0$  eine Polynomfunktion mit  $a_{k-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$  und  $k \geq 1$ . Dann gilt (Übung):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} \infty & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ -\infty & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Bemerkung 4.24** Die Definition des Grenzwerts lässt sich auch abschwächen. Für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ , so dass  $a$  ein Häufungspunkt von  $D \cap ]a, \infty[$  ist, definieren wir den *rechtsseitigen Grenzwert*

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = c,$$

falls für jede gegen  $a$  konvergente Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n > a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

Analog definieren wir den *linksseitigen Grenzwert*

$$\lim_{x \nearrow a} f(x).$$

Dann kann man zeigen, dass für einen Punkt  $a \in D$ , der sowohl Häufungspunkt von  $D \cap ]a, \infty[$  als auch von  $D \cap ]-\infty, a[$  ist, folgende Aussagen äquivalent sind (Übung):

- i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert.
- ii)  $\lim_{x \searrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \nearrow a} f(x)$  existieren und es gilt  $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$ .

## 4.4 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die auf einem *kompakten Intervall*  $[a, b]$  stetig sind. Wir treffen dabei die Generalvereinbarung, dass diese Intervalle aus mehr als einem Punkt bestehen, d.h. es gilt  $a < b$ . Unter dieser Voraussetzung lassen sich interessante Eigenschaften stetiger Funktionen beweisen. Das erste Resultat sichert die Existenz von *Nullstellen*.

**Lemma 4.25 (Nullstellensatz von Bolzano)** *Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und es gelte  $f(a) < 0 < f(b)$  oder  $f(a) > 0 > f(b)$ . Dann hat  $f$  eine Nullstelle in  $]a, b[$ , d.h. es gibt  $x \in ]a, b[$  mit  $f(x) = 0$ .*

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $f(a) < 0 < f(b)$ , betrachte sonst  $-f$  statt  $f$ . Wir beweisen den Satz mit der *Intervallhalbierungsmethode*. Dazu konstruieren wir per Induktion Intervalle  $I_n = [a_n, b_n]$ , so dass  $I_{n+1} \subseteq I_n$ , sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \quad \text{und} \quad f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n) \quad (4.1)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

“ $n = 0$ ”: Setze  $a_0 := a$  und  $b_0 := b$ . Dann gilt  $b_0 - a_0 = \frac{1}{2^0}(b - a)$  und  $f(a_0) < 0 < f(b_0)$ .

“ $n \Rightarrow n + 1$ ”: Seien  $a_n, b_n$  bereits konstruiert, so dass (4.1) erfüllt ist. Setze

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n, & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{falls } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0, \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} = b_n & \text{falls } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

Dann gilt  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$  und  $f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1})$ . Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.38) existiert wegen  $I_{n+1} \subseteq I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  ein  $x \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

gilt und die beiden Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  der Intervallränder gegen  $x$  konvergieren. Da außerdem  $f$  stetig ist, erhalten wir damit

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = f(x),$$

d.h.  $f(x) = 0$ . Wegen  $f(a), f(b) \neq 0$  und  $x \in I_0$  folgt  $x \in ]a, b[$ .  $\square$

**Beispiel 4.26** 1) Wir zeigen: Jede Polynomfunktion  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle. Es reicht dabei, den Fall

$$p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

zu betrachten, wobei  $k$  ungerade ist. Nach Beispiel 4.23 gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty.$$

Daher gibt es  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $p(a) < 0 < p(b)$ . Da  $p$  stetig ist, ist auch die Einschränkung  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und mit Lemma 4.25 folgt die Existenz einer Nullstelle von  $p$  in  $]a, b[$ .

- 2) Die Voraussetzung, dass  $f$  in Lemma 4.25 auf einem kompakten Intervall definiert ist, kann i.A. nicht verzichtet werden. Betrachten wir z.B. die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann ist  $f$  als rationale Funktion stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und außerdem gilt

$$-1 = f(-1) < 0 < f(1) = 1.$$

Trotzdem hat  $f$  keine Nullstelle in  $] -1, 1[$ . Der Nullstellensatz von Bolzano ist hier nicht anwendbar, da  $f$  nicht auf ganz  $[-1, 1]$  definiert ist.

Der Grund dafür, dass wir den Nullstellensatz von Bolzano zu einem Lemma “degradiert” haben, liegt darin, dass er ein Spezialfall des folgenden Satzes ist.

**Satz 4.27 (Zwischenwertsatz)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es gelte  $f(a) < c < f(b)$  oder  $f(a) > c > f(b)$ . Dann gibt es ein  $x \in ]a, b[$  mit  $f(x) = c$ .

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $f(a) < c < f(b)$ , der andere Fall folgt analog. Wir definieren die Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $g(x) = f(x) - c$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dann ist  $g$  stetig und es gilt

$$g(a) = f(a) - c < 0 < f(b) - c = g(b).$$

Mit dem Nullstellensatz von Bolzano (Lemma 4.25) folgt die Existenz einer Nullstelle  $x \in ]a, b[$  von  $g$ , d.h.  $0 = g(x) = f(x) - c$ . Dann gilt insbesondere  $f(x) = c$ .  $\square$

Als nächstes wenden wir uns Extrema von Funktionen zu, wobei es zunächst um sogenannte *globale Extrema* geht. (Mit *lokalen Extrema* beschäftigen wir uns erst in Kapitel 6.) Dazu erweitern wir im Folgenden den Begriff *Supremum* einer nichtleeren Menge  $M$  so, dass  $\sup M := \infty$ , falls  $M$  nicht nach oben beschränkt ist.

**Definition 4.28** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1)  $\sup f := \sup_{x \in D} f(x) := \sup f(D) = \sup \{f(x) \mid x \in D\}$  heißt das Supremum von  $f$ .
- 2) Das Supremum  $\sup f$  heißt Maximum von  $f$  (oder auch genauer globales Maximum von  $f$ ), falls  $\sup f \in f(D)$ . Schreibweise:  $\max f$  oder  $\max_{x \in D} f(x)$ .

Analog definieren wir die Begriffe Infimum und Minimum von  $f$  mit den Schreibweisen:  $\inf f = \inf_{x \in D} f(x)$  bzw.  $\min f = \min_{x \in D} f(x)$ .

Die Begriffe Supremum und Maximum von  $f$  decken sich also mit den Begriffen Supremum und Maximum für die Menge  $f(D)$ , also dem Bild von  $f$ . Insbesondere ist das Supremum  $\sup f$  also genau dann das Maximum von  $f$ , wenn es ein  $x_0 \in D$  gibt mit  $\sup f = f(x_0)$ , d.h. wenn es als Funktionswert angenommen wird.

**Beispiel 4.29** Betrachten wir wieder die Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ , so gilt

$$\sup f = \infty \quad \text{und} \quad \inf f = 0.$$

$f$  hat aber weder Maximum noch Minimum, denn  $f(D)$  ist nach oben unbeschränkt und Null wird als Funktionswert nicht angenommen. Die Situation ändert sich allerdings erheblich, wenn wir die Funktion auf ein kompaktes Intervall wie z.B.  $[1, 2]$  einschränken. Für die Funktion  $\tilde{f} : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$  gilt nun:

$$\sup \tilde{f} = \max \tilde{f} = 1 \quad \text{und} \quad \inf \tilde{f} = \min \tilde{f} = \frac{1}{2}.$$

Die Beobachtung des vorangegangenen Beispiels werden wir im Folgenden verallgemeinern. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 4.30** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  eine nichtleere Menge. Dann existieren Folgen  $(x_n)$  und  $(y_n)$  in  $M$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage nur für das Supremum, der Beweis für das Infimum ist analog. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1:  $M$  ist nicht nach oben beschränkt. In diesem Fall gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in M$  mit  $x_n \geq n$ . Die dadurch gegebene Folge  $(x_n)$  divergiert bestimmt gegen  $\infty = \sup M$ .

Fall 2:  $M$  ist nach oben beschränkt. In diesem Fall gilt  $s := \sup M \in \mathbb{R}$  und nach Satz 1.50 gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ein  $x_n \in M$  mit

$$s - \frac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Für die dadurch gegebene Folge  $(x_n)$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s = \sup M$ .  $\square$

**Satz 4.31 (Satz vom Maximum und Minimum)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann hat  $f$  ein Maximum und ein Minimum, d.h. es gibt  $\hat{x}, \check{x} \in [a, b]$ , so dass

$$f(\hat{x}) = \max_{x \in D} f(x) = \sup f \quad \text{und} \quad f(\check{x}) = \min_{x \in D} f(x) = \inf f.$$

**Beweis:** Wir zeigen nur die Existenz des Maximums, die Existenz des Minimums folgt analog (Übung). Nach Lemma 4.30 gibt es eine Folge  $(y_n)$  in  $f([a, b])$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup f \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Wegen  $y_n \in f([a, b])$ , gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in [a, b]$  mit  $y_n = f(x_n)$ . Betrachten wir nun die Folge  $(x_n)$ , so muss diese im Gegensatz zu  $(y_n)$  nicht konvergent sein (und sie divergiert bestimmt<sup>1</sup> nicht bestimmt gegen  $\infty$ ). Allerdings ist sie als Folge in  $[a, b]$  beschränkt und daher hat sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ . Sei  $\hat{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Dann gilt  $\hat{x} \in [a, b]$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  folgt

$$f(\hat{x}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \sup f.$$

Hieraus folgt insbesondere  $\sup f \in \mathbb{R}$  und  $\sup f = \max f$ .  $\square$

<sup>1</sup>Wortspiel

**Korollar 4.32** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein (ggf. unendliches) Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es zu jedem  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\inf f < c < \sup f$  ein  $x \in I$  mit  $f(x) = c$ . (Hierbei verwenden wir die Konvention  $-\infty < a < \infty$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ .)

Insbesondere ist  $f(I)$  ein Intervall. Ist speziell  $I$  ein kompaktes Intervall, d.h. es gibt  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  mit  $I = [a, b]$ , dann ist auch  $f(I) = [\min f, \max f]$  ein kompaktes Intervall.

**Beweis:** Dies folgt aus dem Satz vom Maximum und Minimum zusammen mit dem Zwischenwertsatz (Übung).  $\square$

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen erfüllen sogar eine noch stärkere Bedingung als die der Stetigkeit. Um diese zu definieren, benötigen wir eine alternative Charakterisierung der Stetigkeit, die unsere am Beginn von Abschnitt 4.2 benutzte Umschreibung “Eine Funktion ist stetig, wenn hinreichend kleine Änderungen des Arguments nur kleine Änderungen im Funktionswert hervorrufen.” präzisiert.

**Satz 4.33** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) (**Folgenstetigkeit.**)  $f$  ist stetig in  $a$ , d.h. für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

ii) ( $\varepsilon/\delta$ -**Kriterium.**) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in D$  gilt:

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)”: Diese Richtung beweisen wir mit Kontraposition, d.h. wir zeigen “ $\neg ii) \Rightarrow \neg i)$ ”. Falls ii) nicht gilt, so gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass zu jedem  $\delta > 0$  ein  $x_\delta \in D$  existiert, so dass

$$|x_\delta - a| < \delta, \quad \text{aber} \quad |f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Wähle nun zu jedem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $\delta_n = \frac{1}{n}$  so ein  $x_{\delta_n} =: x_n$ . Dann gilt für die dadurch gegebene Folge  $(x_n)$  in  $D$ , dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , aber

$$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Folglich konvergiert  $(f(x_n))$  nicht gegen  $f(a)$  und damit ist  $f$  nicht stetig in  $a$ .

“ii)  $\Rightarrow$  i)”: Sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Z.z.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Sei also  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert wegen ii) ein  $\delta > 0$  mit

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

für alle  $x \in D$ . Da  $(x_n)$  gegen  $a$  konvergiert, gilt natürlich  $|x_n - a| < \delta$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt aber auch  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .  $\square$

Als direkte Anwendung des Satzes erhalten wir eine weitere wichtige Eigenschaft von stetigen Funktionen.

**Korollar 4.34** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in D$  und sei  $f(a) > 0$  (oder  $f(a) < 0$ ). Dann gibt es  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in D$  mit  $|x - a| < \delta$  auch  $f(x) > 0$  (bzw.  $f(x) < 0$ ) gilt.

**Beweis:** Zu  $\varepsilon := f(a) > 0$  gibt es nach dem  $\varepsilon/\delta$ -Kriterium der Stetigkeit ein  $\delta > 0$  mit

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

für alle  $x \in D$ . Dann gilt aber  $f(x) > 0$  für alle  $x \in D$  mit  $|x - a| < \delta$ .  $\square$

Kehren wir nun aber wieder zu unserem eigentlichen Anliegen zurück. Wir wollten den Begriff der Stetigkeit noch etwas verschärfen. Mit Hilfe des  $\varepsilon/\delta$ -Kriteriums ist dies nun in der folgenden Art und Weise möglich.

**Definition 4.35** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1)  $f$  heißt gleichmäßig stetig, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x, \tilde{x} \in D$  gilt:

$$|x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$$

- 2)  $f$  heißt Lipschitz-stetig, falls es ein  $L > 0$  gibt, so dass für alle  $x, \tilde{x} \in D$  gilt:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq L \cdot |x - \tilde{x}|$$

**Bemerkung 4.36** 1) Um den Unterschied zwischen Stetigkeit (auf ganz  $D$ ) und gleichmäßiger Stetigkeit besser zu verstehen, formulieren wir beide Eigenschaften einmal in logisch-formaler Schreibweise mit Quantoren:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\iff \forall \tilde{x} \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon \\ f \text{ glm. stetig} &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tilde{x} \in D \forall x \in D : |x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon \end{aligned}$$

Beide Definitionen unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Quantoren. Dies hat allerdings weitreichende Folgen, denn bei der Stetigkeit kann das erwähnte  $\delta$  sowohl von  $\tilde{x}$  als auch von  $\varepsilon$  abhängen. Bei der gleichmäßigen Stetigkeit dagegen hängt  $\delta$  nur von  $\varepsilon$  ab und kann für alle  $\tilde{x} \in D$  identisch gewählt werden. Dies erklärt den Namen *gleichmäßige Stetigkeit*.

- 2) Wir erhalten die folgenden Implikationen für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ :

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \implies f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig}$$

Die zweite Implikation folgt dabei insbesondere aus den Beobachtungen unter 2) und für die erste Implikation stellen wir fest, dass wir in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$  wählen können, wenn die Funktion Lipschitz-stetig ist. Auch hier hängt  $\delta$  also nur von  $\varepsilon$  ab und zwar in einer ganz besonderen Art und Weise.

- 3) Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit sind *globale Eigenschaften*, die sich an den ganzen Definitionsbereich  $D$  wenden. Im Gegensatz dazu ist Stetigkeit eine *lokale Eigenschaft*, da sie über die Stetigkeit in allen  $a \in D$  definiert ist.

**Beispiel 4.37** Nicht jede stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig. Betrachten wir die stetige Funktion  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  und  $\varepsilon = 1$ , so gibt es zu jedem  $\delta > 0$  zwei Punkte  $x, \tilde{x} \in ]0, 1]$  mit

$$|x - \tilde{x}| < \delta, \quad \text{aber} \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{x}} \right| \geq 1.$$

Für  $\delta > 1$  ist das klar (klar?), und für  $\delta \leq 1$  wähle  $x = \delta$  und  $\tilde{x} = \frac{\delta}{2}$ . Dann gilt

$$|x - \tilde{x}| = \left| \delta - \frac{\delta}{2} \right| = \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \text{aber} \quad \left| \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta} \right| = \frac{1}{\delta} \geq 1.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass es auch Funktionen gibt, die gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig sind.

**Satz 4.38 (von Heine)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.

**Beweis:** Angenommen,  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass zu jedem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $\delta_n = \frac{1}{n}$  zwei Punkte  $x_n, \tilde{x}_n \in [a, b]$  existieren, so dass

$$|x_n - \tilde{x}_n| < \delta_n = \frac{1}{n}, \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$ . Wegen  $|x_n - \tilde{x}_n| < \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  folgt dann aber auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_{n_k} = x$ . Unter Benutzung der Stetigkeit von  $f$  erhalten wir daraus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})) = f(x) - f(x) = 0$$

im Widerspruch zu  $|f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})| \geq \varepsilon$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Also war die Annahme falsch und  $f$  ist gleichmäßig stetig.  $\square$

Das Konzept der Lipschitz-Stetigkeit spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, wir werden darauf in der Analysis II zurückkommen. Funktionen, die Lipschitzstetig mit einer Lipschitz-Konstante  $L < 1$  sind bezeichnet man als *Kontraktionen*. Auch mit diesen werden wir uns in der Analysis II noch ausführlicher beschäftigen. Die gleichmäßige Stetigkeit dagegen benötigen wir schon in Kapitel 7, wenn wir uns mit der Integration beschäftigen.

**Bemerkung 4.39** Eine weitere schöne Anwendung zum Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ist das folgende Resultat, dessen Beweis Ihnen zu Übungszwecken überlassen bleibt:

Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i)  $f$  ist gleichmäßig stetig.

ii) Es gibt eine stetige Funktion  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\tilde{f}|_{]a, b[} = f,$$

d.h.  $\tilde{f}(x) = f(x)$  für alle  $x \in ]a, b[$ . (Wir sagen dann,  $f$  ist stetig auf  $[a, b]$  fortsetzbar.)



## 4.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion und basierend darauf allgemeine Exponentialfunktionen definieren. Wichtigstes Hilfsmittel ist dabei der *Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion*, für den wir einen neuen Begriff benötigen.

**Definition 4.40** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ , eine Funktion. Dann heißt  $f$

- 1) streng monoton wachsend, falls für alle  $x, \tilde{x} \in D$  gilt:  $x < \tilde{x} \implies f(x) < f(\tilde{x})$ ;
- 2) monoton wachsend, falls für alle  $x, \tilde{x} \in D$  gilt:  $x \leq \tilde{x} \implies f(x) \leq f(\tilde{x})$ .
- 3) (streng) monoton fallend, falls  $-f$  (streng) monoton wachsend ist;

**Satz 4.41 (über die Stetigkeit der Umkehrfunktion)** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein (nicht notwendigerweise endliches) Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend). Dann gilt:

- 1)  $f(I)$  ist ein Intervall und  $f : I \rightarrow f(I)$  ist bijektiv.
- 2) Die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  ist stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $f$  streng monoton wachsend. (Andernfalls betrachte  $-f$ .)

1) Nach Korollar 4.32 ist  $f(I)$  ein Intervall. Außerdem ist  $f$  injektiv, denn aus  $x \neq \tilde{x}$  folgt wegen der strengen Monotonie auch  $f(x) \neq f(\tilde{x})$ . Folglich ist  $f : I \rightarrow f(I)$  bijektiv.

2) Wir zeigen zunächst die *strenge Monotonie* der Umkehrfunktion: Seien  $y, \tilde{y} \in f(I)$ . Da  $f$  (streng) monoton wachsend ist, gilt:

$$f^{-1}(y) \geq f^{-1}(\tilde{y}) \implies y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(\tilde{y})) = \tilde{y}.$$

Durch Kontraposition erhalten wir daraus:  $y < \tilde{y} \implies f^{-1}(y) < f^{-1}(\tilde{y})$ .

*Stetigkeit:* Sei  $y \in f(I)$  beliebig und sei  $(y_n)$  eine beliebige Folge in  $f(I)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Zu zeigen ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y).$$

Angenommen dies gilt nicht. Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Sei  $\mathcal{N}$  die Menge dieser  $n \in \mathbb{N}$  und seien

$$\mathcal{N}^+ := \{n \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y) \geq \varepsilon\} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}^- := \{n \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y) \leq -\varepsilon\}.$$

Dann gilt  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$  und da  $\mathcal{N}$  unendlich ist, gilt dies auch für mindestens eine der beiden Mengen  $\mathcal{N}^+$  und  $\mathcal{N}^-$ . O.B.d.A. sei  $\mathcal{N}^+$  unendlich. (Der andere Fall folgt analog.) Dann gilt für alle  $n \in \mathcal{N}^+$ , dass  $f^{-1}(y_n) \geq f^{-1}(y) + \varepsilon > f^{-1}(y)$ , woraus insbesondere  $f^{-1}(y) + \varepsilon \in I$  folgt. (Klar?) Wegen der Monotonie von  $f$  erhalten wir damit

$$y_n = f(f^{-1}(y_n)) \geq f(f^{-1}(y) + \varepsilon) > f(f^{-1}(y)) = y$$

für alle  $n \in \mathcal{N}^+$  und daher

$$|y_n - y| \geq \tilde{\varepsilon}$$

für  $\tilde{\varepsilon} := f(f^{-1}(y) + \varepsilon) - y > 0$  und unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Dies steht im Widerspruch dazu, dass  $(y_n)$  gegen  $y$  konvergiert. Somit ist  $f^{-1}$  stetig in  $y$  und da  $y \in f(I)$  beliebig war, folgt die Stetigkeit von  $f^{-1}$ .  $\square$

**Beispiel 4.42** Wir weisen die *Stetigkeit der Wurzelfunktionen* nach: Sei  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  und betrachte die Funktion  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ . Dann ist  $f$  stetig und streng monoton wachsend. Wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  folgt  $f([0, \infty[) = [0, \infty[$ . Nach Satz 4.41 existiert die Funktion

$$f^{-1} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$$

und ist streng monoton wachsend und stetig. Offenbar gilt  $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$  für alle  $x \in [0, \infty[$ . (Die  $k$ -te Wurzelfunktion  $f^{-1}$  ist insbesondere ein Beispiel für eine gleichmäßig stetige Funktion, die nicht Lipschitz-stetig ist (Übung).)

Kommen wir aber nun zu unserem eigentlichen Ziel:

**Satz 4.43** Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und streng monoton wachsend und es gilt  $\exp(\mathbb{R}) = ]0, \infty[$ . Insbesondere existiert  $\exp^{-1} : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  und ist streng monoton wachsend und stetig.

**Beweis:** Wir wissen schon aus Satz 4.12, dass die Exponentialfunktion stetig ist. Weiter beobachten wir, dass für  $x > 0$  gilt, dass

$$\exp(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1 + x > 1. \quad (4.2)$$

Damit können wir zeigen, dass  $\exp$  streng monoton wachsend ist, denn seien  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$  mit  $x > \tilde{x}$ . Dann gilt  $x - \tilde{x} > 0$  und daher

$$\exp(x) = \exp(x - \tilde{x} + \tilde{x}) = \exp(x - \tilde{x}) \exp(\tilde{x}) > \exp(\tilde{x}).$$

Weiter gilt  $\exp(\mathbb{R}) = ]0, \infty[$ , denn nach Korollar 4.32 ist  $\exp(\mathbb{R})$  ein Intervall und wegen (4.2) gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \exp(-y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(y)} = 0.$$

Da außerdem  $\exp(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, folgt die Behauptung. Die Aussagen über die Umkehrfunktion folgen damit aus dem Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion.  $\square$

**Definition 4.44** Die Umkehrfunktion  $\ln := \exp^{-1} : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  der Exponentialfunktion heißt natürlicher Logarithmus.

Statt  $\exp(x)$  und  $\ln(y)$  schreiben wir auch manchmal kurz  $\exp x$  bzw.  $\ln y$ . Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion können wir jetzt leicht Eigenschaften des natürlichen Logarithmus herleiten.

**Satz 4.45** Seien  $x, y \in ]0, \infty[$ . Dann gilt:

- 1)  $\ln(1) = 0$  und  $\ln(e) = 1$ .
- 2)  $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ .
- 3)  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ .
- 4) Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gilt  $\ln(x^m) = m \cdot \ln x$ .

**Beweis:** 1) ist klar. Für 2) beobachten wir, dass

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln x) \exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y)$$

gilt. Da  $\exp$  injektiv ist, folgt  $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ .

3) folgt mit 2) aus  $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot \frac{1}{x}) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$ .

4) zeigen Sie leicht mit Induktion und 2) und 3).  $\square$

Bisher hatten wir Potenzen von reellen Zahlen nur für ganzzahlige Exponenten definiert. Wollen wir nun auch  $a^x$  für  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  definieren und sollen die uns vertrauten Potenzgesetze (vgl. Satz 1.31) und Teil 4) von Satz 4.45 auch in diesem Fall gelten, so erwarten wir, dass  $a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \cdot \ln a)$  gilt. Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 4.46** Sei  $a > 0$ . Dann heißt die Funktion  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \exp(x \cdot \ln a)$  Exponentialfunktion zur Basis  $a$ .

**Satz 4.47** Seien  $a > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt:

- 1)  $\exp_a$  ist stetig.
- 2)  $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$ .
- 3)  $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$ .
- 4)  $\exp_a(m) = a^m$ .

**Beweis:** 1) folgt daraus, dass  $\exp_a$  eine Komposition stetiger Funktionen ist. 2) folgt mit

$$\begin{aligned} \exp_a(x + y) &= \exp((x + y) \cdot \ln a) = \exp(x \cdot \ln a + y \cdot \ln a) \\ &= \exp(x \ln a) \exp(y \ln a) = \exp_a(x) \exp_a(y). \end{aligned}$$

3) und 4) erhalten wir analog zu Korollar 3.33 aus 2) und mit vollständiger Induktion unter Ausnutzung der Tatsache, dass  $\exp_a(1) = \exp(1 \cdot \ln a) = a$  gilt.  $\square$

**Definition 4.48 (Allgemeine Potenz)** Für  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  setze  $a^x := \exp(x \cdot \ln a)$ .

Anders ausgedrückt gilt also  $a^x = \exp_a(x)$ . Über die Eigenschaften dieser Exponentialfunktionen erhalten wir daraus die folgenden Potenzgesetze.

**Satz 4.49** Seien  $a, b > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Dann gilt:

- 1)  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ .
- 2)  $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ .
- 3)  $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ .
- 4)  $\ln(a^x) = x \ln a$ .
- 5)  $(a^x)^y = a^{xy}$ .
- 6)  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ .

**Beweis:** 1) folgt sofort aus Satz 4.47 und 2) und 3) per Definition 4.48 und mit Satz 4.45.

4) folgt aus  $\ln(a^x) = \ln(\exp(x \cdot \ln a)) = x \ln a$ .

5) Unter Ausnutzung von 4) gilt

$$(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln(a^x)) = \exp((xy) \cdot \ln a) = a^{xy}.$$

6) Unter Ausnutzung von 5) erhalten wir

$$a^p = a^{\frac{p}{q}q} = (a^{\frac{p}{q}})^q.$$

Nach der Definition der  $q$ -ten Wurzel folgt daraus  $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ .  $\square$

**Bemerkung 4.50** Beachten Sie, dass allgemeine Potenzen *ausschließlich* für positive Basen definiert sind. Selbst wenn ein nicht ganzzahliger Exponent für eine negative Basis scheinbar Sinn macht, lassen sich in diesem Fall die Potenzgesetze nicht mehr anwenden. Um dies zu illustrieren, betrachten wir das Beispiel  $(-2)^3 = -8$ . Man könnte nun auf die Idee kommen, für diesen Fall  $(-8)^{\frac{1}{3}} := -2$  zu definieren. Benutzen wir dann aber unsere Potenzgesetze, so führt dies zu Widersprüchen, denn dann erhalten wir

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2. \quad \nexists \nexists \nexists$$

Daher ist der Ausdruck  $a^x$  mit  $a < 0$  nur für  $x \in \mathbb{Z}$  definiert! Aus dem gleichen Grund sind auch *Wurzeln* nur für nichtnegative reelle Zahlen definiert. Zwar ist die Umkehrfunktion der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, sie ist allerdings nicht durch die dritte Wurfelfunktion  $\sqrt[3]{\cdot}$  gegeben (diese ist nur auf dem Intervall  $[0, \infty[$  definiert), sondern durch die Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{falls } x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Das folgende interessante Lemma zeigt, dass eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bereits durch ihre Funktionswerte auf den rationalen Zahlen eindeutig bestimmt ist. Dies hilft uns zu zeigen, dass jede Funktion, die eine Funktionalgleichung der Form  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  erfüllt, schon eine Exponentialfunktion sein muss.

**Lemma 4.51** *Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen mit  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$ . Dann sind  $f$  und  $g$  identisch, d.h.  $f = g$ .*

**Beweis:** Zu zeigen ist  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Sei also  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann ist  $x$  nach Beispiel 4.18 ein Häufungspunkt von  $\mathbb{Q}$ , d.h. es gibt eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{Q}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  folgt dann

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(x)$$

und somit, da  $x$  beliebig war,  $f = g$ .  $\square$

**Satz 4.52** *Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ .

ii)  $f = 0$  oder für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x) = a^x$ , wobei  $a := f(1) > 0$ .

**Beweis:** Die Implikation “ii)  $\Rightarrow$  i)” folgt sofort aus Satz 4.47 bzw. ist trivial.

“i)  $\Rightarrow$  ii)”: Setze  $a := f(1)$ . Dann gilt wegen i), dass

$$a = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0,$$

d.h.  $a$  ist nichtnegativ. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1:  $a = 0$ . In diesem Fall erhalten wir für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$f(x) = f(1+x-1) = f(1) \cdot f(x-1) = 0, \quad \text{also } f = 0.$$

Fall 2:  $a > 0$ . Wie bei den Exponentialfunktionen  $\exp$  bzw.  $\exp_a$  zeigen wir per vollständiger Induktion, dass  $f(m) = a^m$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gilt. Daraus erhalten wir für alle  $p \in \mathbb{Z}$  und alle  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  unter  $q$ -maliger Anwendung von i), dass

$$a^p = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}}_{q \text{ mal}}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)^q,$$

woraus wir  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$  erhalten, da  $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{q}\right)^2 \geq 0$  gilt. Damit folgt

$$f(x) = a^x = \exp_a(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{Q}$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  und  $\exp_a$  folgt dann aus Lemma 4.51, dass  $f(x) = \exp_a(x) = a^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.  $\square$

An dieser Stelle mag man sich fragen, ob die Voraussetzung der Stetigkeit von  $f$  in Satz 4.52 notwendig ist. Dies ist in der Tat der Fall, d.h. es gibt (nicht stetige) Funktionen, die die Gleichung  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  erfüllen und keine Exponentialfunktionen sind. Für den Beweis der Existenz solcher Funktionen benötigt man aber als mengentheoretisches Hilfsmittel das sogenannte *Auswahlaxiom*, weshalb wir an dieser Stelle von der Konstruktion einer solchen Funktion absehen.

Zum Abschluss betrachten wir noch einige wichtige Grenzwerte.

**Satz 4.53** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\alpha > 0$ . Dann gilt:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$ .
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ .
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ .

Insbesondere lassen sich Potenzfunktionen  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow x^\alpha$  mit  $\alpha > 0$  durch die Definition  $f(0) = 0^\alpha := 0$  stetig auf  $[0, \infty[$  fortsetzen.

**Beweis:** 3) folgt aus der Tatsache, dass  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion bijektiv und streng monoton wachsend ist. Die restlichen Aussagen sind eine Übung.  $\square$

**Bemerkung 4.54** Analog zum Beweis von Satz 4.43 kann man zeigen, dass auch die Exponentialfunktion zur Basis  $a > 0$  streng monoton wachsend ist und  $\exp_a(\mathbb{R}) = ]0, \infty[$  erfüllt, so dass auch hier eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion  $\log_a := \exp_a^{-1} : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt, die wir *Logarithmus zur Basis a* nennen. Da aber für  $x \in \mathbb{R}$  aus  $y := \exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln a)$  wegen  $\log_a(y) = x$  und  $\ln(y) = x \cdot \ln a$  die Formel

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} \quad \text{für alle } y \in ]0, \infty[$$

folgt, ist der Logarithmus zur Basis  $a$  nur ein skalar Vielfaches des natürlichen Logarithmus, so dass wir im Folgenden ohne ihn auskommen werden.

# Kapitel 5

## Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

In der *Linearen Algebra* haben Sie die *komplexen Zahlen* als Beispiel für einen Körper kennengelernt. In diesem Kapitel gehen wir kurz auf die Analysis der komplexen Zahlen ein (sehr viel ausführlicher geschieht dies in der Vorlesung *Funktionentheorie* oder *Komplexe Analysis*) und nutzen diese für die Definition trigonometrischer Funktionen zu denen insbesondere die Funktionen *Sinus* und *Cosinus* gehören.

### 5.1 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen wird üblicherweise in der Veranstaltung *Lineare Algebra* definiert, wo auch bewiesen (oder als Übungsaufgabe gestellt) wird, dass es sich dabei um einen Körper handelt. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir hier die Definition der komplexen Zahlen, wie sie im Abschnitt 1.5 meines Skripts *Lineare Algebra* zu finden ist, und schließen dann einige weitergehende Untersuchungen an.

Die Menge  $\mathbb{C}$  der *komplexen Zahlen* wurde ins Leben gerufen, um das Defizit der reellen Zahlen auszugleichen, dass sich nur nichtnegative Zahlen  $y \in \mathbb{R}$  als Quadrat einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$  darstellen lassen. Speziell gibt es keine reelle Zahl  $x$  mit der Eigenschaft  $x^2 = -1$ , wie wir schon in Satz 1.10 festgestellt haben. Daher definieren wir uns einfach eine solche Zahl, nennen Sie *imaginäre Einheit*, weil sie nur in unserer „Vorstellung“ existiert, und bezeichnen sie mit  $i$ . Es gilt also  $i^2 = -1$ . Komplexe Zahlen sind dann Zahlen der Form  $a + bi$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wir vereinbaren, dass für komplexe Zahlen dieselben Rechenregeln gelten sollen, wie für reelle Zahlen. Damit erhalten wir für zwei komplexe Zahlen  $a + bi$  und  $c + di$ :

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= ac - bd + (ad + bc)i,\end{aligned}$$

wobei wir  $i^2 = -1$  ausgenutzt haben. Mit diesem Wissen im Hinterkopf können wir nun die komplexen Zahlen formal und präzise auf die folgende Art und Weise definieren.

**Definition 5.1** 1)  $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  heißt Menge der komplexen Zahlen.

2) Die Addition  $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auf den komplexen Zahlen ist definiert durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{für alle } (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}.$$

3) Die Multiplikation  $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auf den komplexen Zahlen ist definiert durch

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad \text{für alle } (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}.$$

**Bemerkung 5.2** 1) Wie Sie leicht nachrechnen, ist  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ein Körper. Das neutrale Element bzgl. der Addition ist  $(0, 0)$  und das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist  $(1, 0)$ . Die additiven und multiplikativen Inversen erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} -(x, y) &= (-x, -y), \\ (x, y)^{-1} &= \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right), \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \end{aligned}$$

denn

$$(x, y) \cdot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy - yx}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

2) Man zeigt leicht, dass die Teilmenge  $\mathcal{R} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$  ein Teilkörper der komplexen Zahlen ist und dass die Abbildung

$$\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}, \quad x \mapsto (x, 0)$$

ein *Körperisomorphismus* ist (d.h.  $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$  ist eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft  $\iota(x + y) = \iota(x) + \iota(y)$  und  $\iota(xy) = \iota(x)\iota(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ). Daher können wir die beiden Mengen  $\mathbb{R}$  und  $\mathcal{R}$  miteinander identifizieren und schreiben in Zukunft  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  und kurz  $x$  für  $(x, 0)$ .

In Anlehnung an unsere Beobachtungen, die uns zur Definition der komplexen Zahlen geführt haben, definieren wir nun die spezielle komplexe Zahl  $i$ .

**Definition 5.3** Die Zahl  $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$  heißt imaginäre Einheit.

**Bemerkung 5.4**

1) Es gilt  $i^2 = -1$ , denn  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$ .

2) Betrachten wir nun ein Element  $(a, b) \in \mathbb{C}$ , so gilt:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Aus diesem Grund schreiben wir in Zukunft nur noch  $a + bi$  (oder auch  $a + ib$ ) für eine komplexe Zahl  $(a, b) \in \mathbb{C}$ .



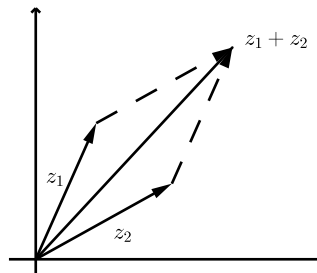
Aufbauend auf der soeben hergeleiteten Darstellung der komplexen Zahlen erhalten wir die folgenden Begriffe, die wesentlich für die weiteren Untersuchungen sind.

**Definition 5.5** Sei  $z = a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- 1)  $\operatorname{Re}(z) := a$  heißt Realteil von  $z$ .
- 2)  $\operatorname{Im}(z) := b$  heißt Imaginärteil von  $z$ .
- 3)  $\bar{z} := a - bi$  heißt die zu  $z$  komplex konjugierte Zahl.
- 4)  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$  heißt Betrag von  $z$ .

**Bemerkung 5.6** Seien  $z = a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $z' \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

- 1)  $z = z' \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ und } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$ .
- 2)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , denn
 
$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a \quad \text{und} \quad z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi.$$
- 3)  $\bar{\bar{z}} = z$ ,  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$  und  $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$ .
- 4)  $0 \leq |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ , denn
 
$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$
- 5) Für den Spezialfall  $b = 0$  erhalten wir  $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ . Somit ist  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fortsetzung der Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf die komplexen Zahlen.
- 6)  $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| = |\bar{z}|$ .
- 7) Die Darstellung komplexer Zahlen als Elemente des  $\mathbb{R}^2$  (diesen nennt man dann die *Gaußsche Zahlenebene*) ermöglicht eine anschauliche geometrische Interpretation der Addition komplexer Zahlen. Sind  $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$  mit  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$  und stellen wir diese im  $\mathbb{R}^2$  als Vektoren dar, so erhalten wir  $z_1 + z_2$  geometrisch als die Diagonale des von  $z_1$  und  $z_2$  aufgespannten Parallelogramms:



Es gibt auch eine anschauliche geometrische Interpretation für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen, doch für diese benötigen wir weitere Vorbereitungen und kommen daher erst im Abschnitt 5.3 darauf zurück.

**Satz 5.7** Seien  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

- 1)  $|z| = 0 \iff z = 0$ .
- 2)  $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ .
- 3)  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ . (Dreiecksungleichung)

**Beweis:** 1) ist trivial.

- 2) Unter Ausnutzung von Teil 4) von Bemerkung 5.6 gilt

$$|z \cdot z'|^2 = (zz')(\overline{zz'}) = z\bar{z} \cdot z'\bar{z}' = |z|^2 \cdot |z'|^2.$$

Daraus erhalten wir  $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ , da beide Ausdrücke reell und positiv sind und eine Gleichung der Form  $x^2 = y$  mit  $y \geq 0$  in  $\mathbb{R}$  nur eine einzige nichtnegative Lösung hat.

- 3) Mit einer analogen Vorgehensweise wie in 2) erhalten wir

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{z}'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z| \cdot |z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Gleichheit Teil 2) von Bemerkung 5.6 ausgenutzt haben, sowie die Tatsache, dass  $z'\bar{z} = \overline{z\bar{z}'}$ .  $\square$

Mit der geometrischen Interpretation der Addition in den komplexen Zahlen aus Teil 7) von Bemerkung 5.6 erklärt sich nun auch der Name *Dreiecksungleichung* für die Ungleichung in Teil 3) von Satz 5.7. Betrachten wir die obere Hälfte des in Bemerkung 5.6 dargestellten Parallelogramms, so entsprechen  $|z|$  und  $|z'|$  gerade den Längen von zwei Seiten eines Dreiecks, während  $|z + z'|$  die Länge der dritten Seite dieses Dreiecks entspricht. Die Dreiecksungleichung lässt sich dann so interpretieren, dass in einem Dreieck die Summe der Längen von zwei Seiten immer größer oder gleich der Länge der dritten Seite ist.

Weiter beobachten wir, dass die Eigenschaften der Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  genau mit den Eigenschaften der Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aus Satz 1.13 übereinstimmen. Da wir die Konvergenz von Folgen in Definition 2.3 mit Hilfe des Betrags eingeführt haben, können wir diese Definition nun analog auf komplexe Zahlen übertragen.

**Definition 5.8** Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  heißt konvergent gegen  $z \in \mathbb{C}$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq N_\varepsilon$  gilt, dass

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt  $z$  der Grenzwert der Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .

Beachten Sie, dass die Forderung “ $\varepsilon > 0$ ” in Definition 5.8 nach unserer Konvention in Abschnitt 2.1 eine Abkürzung für die Forderung “ $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ ” ist. In den komplexen Zahlen macht das Symbol  $<$  keinen Sinn, da es keine Relation auf  $\mathbb{C}$  gibt, die die Anordnungsaxiome aus Abschnitt 1.2 erfüllt. (Überlegen Sie einmal, warum dies nicht möglich sein kann.)

Der nächste Satz erlaubt es uns, mit Hilfe der in Kapitel 2 entwickelten Konvergenzkriterien für reelle Zahlenfolgen auch komplexe Folgen auf Konvergenz zu untersuchen.

**Satz 5.9** *Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $(z_n)$  genau dann konvergent, wenn die beiden reellen Zahlenfolgen  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren. Ist dies der Fall, so gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n). \quad (5.1)$$

**Beweis:** Wir benutzen die Abkürzungen  $a_n := \operatorname{Re}(z_n)$  und  $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$ . Damit gilt dann  $z_n = a_n + ib_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Seien  $(z_n)$  konvergent,  $z := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon$ . Damit erhalten wir nach Teil 6) von Bemerkung 5.6, dass

$$|a_n - a| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| = |\operatorname{Im}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon$  gilt. Daraus erhalten wir die Konvergenz von  $(a_n)$  und  $(b_n)$  und insbesondere auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , d.h. es gilt auch (5.1).

“ $\Leftarrow$ ”: Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergent mit den Grenzwerten  $a$  bzw.  $b$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon$  gilt. Setze  $z := a + bi$ . Dann gilt

$$|z_n - z| = |a_n + b_n i - (a + bi)| \leq |a_n - a| + |i| \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , da  $|i| = 1$ . Folglich gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .  $\square$

**Bemerkung 5.10** Als Anwendung von Satz 5.9 erhalten wir, dass unsere Grenzwertsätze 2.14 und 2.15, also die Sätze über Summen, Produkte und Quotienten von konvergenten Folgen, auch in  $\mathbb{C}$  gültig sind. Ferner gilt für alle Folgen  $(z_n)$  in  $\mathbb{C}$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{z_n} = \overline{z}.$$

Auch der Begriff der Cauchy-Folge lässt sich wortwörtlich von den reellen auf die komplexen Zahlen übertragen. Als Anwendung können wir dann leicht zeigen, dass die komplexen Zahlen ebenso wie die reellen Zahlen im folgenden Sinn *vollständig* sind.

**Definition 5.11** *Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass*

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_\varepsilon.$$

**Satz 5.12 (Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$ )** *In  $\mathbb{C}$  ist jede Cauchy-Folge konvergent.*

**Beweis:** Analog zum Beweis von Satz 5.9 weisen wir nach, dass die Folgen  $(\operatorname{Re}(z_n))$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))$  Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  sind. Dann folgt der Satz aus der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und Satz 5.9. Die Details bleiben zu Übungszwecken Ihnen überlassen.  $\square$

Auch Reihen lassen sich nun wieder über Folgen von Partialsummen definieren:

**Definition 5.13** *Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen.*

- 1) *Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $s_n := \sum_{k=0}^n z_k$  heißt eine komplexe Reihe. Schreibweise:  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ .*
- 2) *Die Reihe in 1) heißt absolut konvergent, falls die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$  in  $\mathbb{R}$  konvergent ist.*

**Bemerkung 5.14** Genauso wie für reelle Reihen können wir nun Konvergenzkriterien für komplexe Reihen beweisen. Die Beweise sind komplett analog zu denen in Kapitel 3. Insgesamt erhalten wir so das *Cauchy-Kriterium*, das *notwendige Kriterium*, das *Majorantenkriterium* (für die Stelle “ $|a_n| \leq b_n$ ” benötigen wir natürlich eine reelle Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , aber die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  darf komplex sein), das *Quotientenkriterium*, den *Umordnungssatz* und den Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produkts (Satz 3.31). Ebenso folgt aus der absoluten Konvergenz einer Reihe auch deren Konvergenz. Nicht gültig ist allerdings das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*, denn für die Formulierung dieses Kriteriums würden wir eine Anordnung auf  $\mathbb{C}$  benötigen.

Auch der Begriff der Stetigkeit lässt sich nun leicht auf komplexe Funktionen verallgemeinern.

**Definition 5.15** *Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung.*

- 1)  *$f$  heißt eine komplexe Funktion.*
- 2)  *$f$  heißt stetig in  $z \in D$ , falls für jede Folge  $(z_n)$  in  $D$  gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z)$$

- 3)  *$f$  heißt stetig, falls  $f$  in allen  $z \in D$  stetig ist.*

Auch alle Resultate für stetige Funktionen aus Kapitel 4 lassen sich einfach auf die komplexen Zahlen verallgemeinern, sofern sie nicht (direkt oder versteckt) auf den Anordnungsaxiomen beruhen. Weiter erhalten wir aus Satz 5.9 unmittelbar (bzw. als Übung) das folgende Resultat:

**Satz 5.16** *Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion und  $z_0 = a + bi \in D$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig in  $z_0$ , wenn die Funktionen  $\operatorname{Re}(f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto \operatorname{Re}(f(z))$  und  $\operatorname{Im}(f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto \operatorname{Im}(f(z))$  stetig in  $a$  bzw. stetig in  $b$  sind.*

Unsere bisherigen Vorbereitungen dienten in erster Linie dazu, die *Exponentialfunktion*  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf die komplexen Zahlen fortzusetzen. Dazu definieren wir schnell noch induktiv für  $z \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $z^0 := 1$  und  $z^{n+1} := z \cdot z^n$ .

**Satz 5.17** *Sei  $z \in \mathbb{C}$  beliebig. Dann ist die Reihe*

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

*absolut konvergent und für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2(|z| - 1)$  gilt die Abschätzung*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq 2 \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Beweis:** Die Reihe ist absolut konvergent, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

ist konvergent nach Beispiel 3.27. (Beachten Sie, dass  $|z| \in \mathbb{R}$  gilt.) Der Rest des Beweis verläuft komplett analog zum reellen Fall.  $\square$

**Definition 5.18** *Die Funktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \exp(z)$  heißt komplexe Exponentialfunktion.*

Zum Abschluss dieses Abschnitts stellen wir noch einige Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion zusammen.

**Satz 5.19** *Seien  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Dann gilt*

- 1)  $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$ ,
- 2)  $\exp(z) \neq 0$  und  $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ ,
- 3)  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ ,
- 4)  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.

**Beweis:** Die Beweise von 1), 2) und 4) verlaufen komplett analog zum reellen Fall. (Dabei geht in 1) insbesondere der Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produkts ein.) Wir zeigen nun 3). Unter Ausnutzung von Bemerkung 5.10 gilt:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!} = \exp(\bar{z}) \quad \square$$

In Analogie zur Schreibweise der Exponentialfunktionen zur Basis  $a$  definieren wir noch

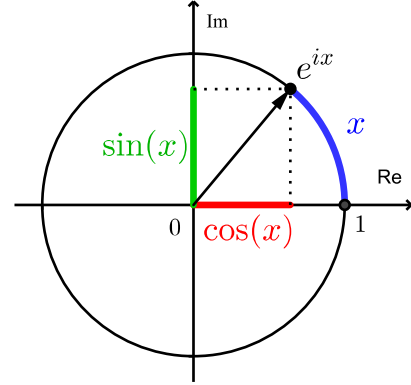
$$e^z := \exp(z) \quad \text{bzw. allgemeiner} \quad a^z := \exp(z \cdot \ln a) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ und } a > 0.$$

## 5.2 Sinus und Cosinus

Die im vorigen Abschnitt eingeführte Exponentialfunktion ermöglicht uns nun eine vielleicht auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinende, sich aber im Folgenden als praktische erweisende Art für die Einführung der Funktionen *Sinus* und *Cosinus*. Dazu stellen wir fest, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}$  aus den Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion folgt, dass

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1,$$

woraus wir  $|e^{ix}| = 1$  erhalten. Folglich liegt  $e^{ix}$  in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Einheitskreis und wir (bzw. Sie) werden später nachweisen, dass  $x$  dabei genau der Länge des Kreisbogens vom Punkt  $1 = 1 + 0i$  zum Punkt  $e^{ix}$  entspricht. Da die klassische Einführung von Sinus und Cosinus gerade mit Hilfe des Einheitskreises geschieht, bietet sich an dieser Stelle die folgende Definition an.



**Definition 5.20** Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$\cos(x) := \operatorname{Re}(e^{ix}) \quad \text{und} \quad \sin(x) := \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

Die dadurch gegebenen Funktionen  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  und  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin(x)$  heißen Cosinusfunktion bzw. Sinusfunktion.

Wie auch schon bei der Exponential- und bei der Logarithmusfunktion lassen wir manchmal die Klammer um das Argument weg und schreiben  $\cos x$  und  $\sin x$  für  $\cos(x)$  bzw.  $\sin(x)$ . Weiterhin nutzen wir die weitverbreitete Schreibweise  $\cos^2 x$  und  $\sin^2 x$  für  $(\cos x)^2$  bzw.  $(\sin x)^2$ .

**Bemerkung 5.21** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann erhalten wir aus den Eigenschaften von Real- und Imaginärteil sofort:

- 1)  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  (*Eulersche Formel*)
- 2)  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  und  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
- 3)  $\cos(-x) = \cos x$ , denn  $\operatorname{Re}(e^{-ix}) = \operatorname{Re}(\overline{e^{ix}}) = \operatorname{Re}(e^{ix})$
- 4)  $\sin(-x) = -\sin x$ , denn  $\operatorname{Im}(e^{-ix}) = \operatorname{Im}(\overline{e^{ix}}) = -\operatorname{Im}(e^{ix})$
- 5)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , denn  $1 = |e^{ix}|^2 = \operatorname{Re}(e^{ix})^2 + \operatorname{Im}(e^{ix})^2$

**Satz 5.22** Die Funktionen  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig.

**Beweis:** Dies folgt sofort aus Satz 5.16 und der Stetigkeit der komplexen Exponentialfunktion.  $\square$

Da sich die Funktionswerte der komplexen Exponentialfunktion durch eine Reihe darstellen lassen, ist vielleicht nicht ganz überraschend, dass dies auch für die Sinus- und die Cosinusfunktion möglich ist. Dadurch erhalten wir insbesondere die Möglichkeit deren Funktionswerte näherungsweise zu berechnen.

**Satz 5.23** *Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann sind die folgenden Reihen absolut konvergent und es gilt:*

$$1) \quad \cos x = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots \quad (\text{Cosinusreihe})$$

$$2) \quad \sin x = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots \quad (\text{Sinusreihe})$$

**Beweis:** Die absolute Konvergenz der Reihen erhalten wir mit dem Majorantenkriterium: Offenbar gilt mit  $a_{2\ell} := (-1)^{\ell} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!}$  und  $a_{2\ell+1} := 0$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ , dass

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

und wegen  $|a_k| \leq \frac{|x|^k}{k!}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist die Exponentialreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \exp(|x|)$  eine konvergente Majorante für die Cosinusreihe. Analoge Betrachtungen liefern die absolute Konvergenz der Sinusreihe. Für die weitere Untersuchung halten wir zunächst fest, dass für die Potenzen von  $i$  gilt, dass

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir daraus

$$i^k := \begin{cases} 1 & \text{für } k = 4m, \\ i & \text{für } k = 4m + 1, \\ -1 & \text{für } k = 4m + 2, \\ -i & \text{für } k = 4m + 3, \end{cases}$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Insbesondere gilt also  $i^{2\ell} = (-1)^{\ell}$  und  $i^{2\ell+1} = (-1)^{\ell}i$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ . Damit erhalten wir schließlich unter Anwendung der Umordnungssatzes

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}.$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten liefert die behaupteten Identitäten.  $\square$

Als nächstes interessieren wir uns für die Nullstellen der Sinus- und der Cosinusfunktion. Dazu benötigen wir allerdings einige Vorbereitungen.

**Lemma 5.24** Sei  $x \in [0, 2]$ . Dann ist die Folge  $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n \geq 1}$  monoton fallend.

**Beweis:** Wegen  $x \in [0, 2]$  gilt  $x \leq n + 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$ . Damit erhalten wir

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{x^n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!}$$

für alle  $n \geq 1$ .  $\square$

**Korollar 5.25** Sei  $x \in [0, 2]$ . Dann gilt:

- 1)  $1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$
- 2)  $x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$

**Beweis:** Dies folgt sofort aus dem Lemma und der Tatsache, dass die Sinus- und Cosinusreihen alternierende Reihen sind.  $\square$

**Lemma 5.26** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Falls  $f$  eine Nullstelle in  $[a, b]$  hat, so hat  $f$  auch eine kleinste Nullstelle in  $[a, b]$ , d.h. es existiert

$$\min \{x \in [a, b] \mid f(x) = 0\}.$$

**Beweis:** Setze  $M := \{x \in [a, b] \mid f(x) = 0\}$ . Dann existiert  $\tilde{x} := \inf M \in \mathbb{R}$ , denn  $M$  ist nicht leer, da  $f$  nach Voraussetzung eine Nullstelle in  $[a, b]$  hat und offenbar ist  $M$  nach unten beschränkt. Nach Lemma 4.30 existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $M$  mit  $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Mit Korollar 2.18 folgt  $\tilde{x} \in [a, b]$ . Weiter gilt

$$f(\tilde{x}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

da  $f$  stetig ist und es folgt  $\tilde{x} \in M$ . Damit ist  $\tilde{x}$  das Minimum von  $M$ .  $\square$

**Satz 5.27** Die Cosinus-Funktion  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat eine kleinste positive Nullstelle  $x_0$  in  $]0, 2[$ . Ferner gilt  $\cos x > 0$  für alle  $x \in [0, x_0[$ .

**Beweis:** Aus der Reihenentwicklung des Cosinus folgt  $\cos(0) = 1 > 0$  und mit Korollar 5.25 folgt

$$\cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Mit dem Zwischenwertsatz (bzw. dem Nullstellensatz von Bolzano) folgt dann die Existenz einer Nullstelle im Intervall  $]0, 2[ \subseteq [0, 2]$ . Nach Lemma 5.26 folgt dann auch die Existenz einer kleinsten Nullstelle  $x_0$  des Cosinus in  $[0, 2]$  bzw. in  $]0, 2[$ , da  $\cos(0), \cos(2) \neq 0$ . Weiter gilt  $\cos x > 0$  in  $[0, x_0[$ , denn andernfalls gäbe es nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle in  $]0, x_0[$  im Widerspruch zur Minimalität von  $x_0$ .  $\square$



**Definition 5.28** Sei  $x_0 \in ]0, 2[$  die kleinste positive Nullstelle der Cosinusfunktion  $\cos$ . Dann heißt die Konstante  $\pi := 2x_0$  die Kreiszahl Pi.

**Korollar 5.29** Es gilt  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  und  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

**Beweis:** Nach Konstruktion gilt  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Aus  $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$  (Bemerkung 5.21) folgt  $|\sin \frac{\pi}{2}| = 1$ . Für  $x \in [0, 2]$  gilt nach Korollar 5.25, dass

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \geq 0,$$

da  $x^2 \leq 4 < 6 = 3!$ . Wegen  $\frac{\pi}{2} \in [0, 2]$  folgt daher  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .  $\square$

**Korollar 5.30** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $e^{ik\frac{\pi}{2}} = i^k$ .

**Beweis:** Unter Ausnutzung von Bemerkung 5.21 gilt:

$$e^{ik\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^k = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^k = i^k \quad \square$$

Es gibt noch etliche weitere Folgerungen aus Satz 5.27 und seinen Korollaren, die wir in der folgenden Bemerkung zusammenfassen.

**Bemerkung 5.31** 1) Im Gegensatz zur reellen Exponentialfunktion ist die Funktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nicht injektiv, denn z.B. gilt

$$e^0 = 1 \quad \text{und} \quad e^{2\pi i} = i^4 = 1.$$

Daher ist es auch nicht so einfach, den natürlichen Logarithmus auf die komplexen Zahlen zu erweitern. Wir müssen hier zunächst den Definitionsbereich der Exponentialfunktion so weit einschränken, dass sie injektiv wird, und es gibt verschiedene Möglichkeiten dies zu tun. Daher überlassen wir die Definition des Logarithmus im Komplexen der Vorlesung *Funktionentheorie* bzw. *Komplexe Analysis*.

2) Für den Spezialfall  $k = 2$  erhalten wir aus Korollar 5.30 die *Eulersche Identität*  $e^{i\pi} = -1$ , die sich auch so schreiben lässt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

In dieser besonders ästhetischen Form sind die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik in sehr einfacher Weise in einer Gleichung vereint: 0 als neutrales Element der Addition, 1 als neutrales Element der Multiplikation, die Eulersche Zahl  $e$ , die imaginäre Einheit  $i$  und die Kreiszahl  $\pi$ .

- 3) *Achtung*: Bei blinder Anwendung der Potenzgesetze erhalten wir einen Widerspruch:

$$1 = 1^{\frac{1}{2}} = (e^{2\pi i})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \cdot 2\pi i} = e^{\pi i} = -1 \quad \nexists \nexists \nexists$$

Was ist hier schiefgelaufen? Das Problem sind die Potenzen von komplexen Zahlen, sowie die Potenzgesetze. Tatsächlich haben wir  $z^n$  für  $z \in \mathbb{C}$  mit guten Grund bisher nur für  $n \in \mathbb{N}$  definiert. Wir können die Definition für  $z \neq 0$  zwar schnell durch

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

auf ganzzahlige Exponenten verallgemeinern, doch schon bei rationalen Exponenten kommt es zu Problemen, wie die obige Rechnung zeigt. Aus dem gleichen Grund vermeiden wir auch die Definition der Wurzel für komplexe Zahlen und überlassen beides der Veranstaltung *Komplexe Analysis*.

Im Beweis von Korollar 5.30 haben wir das Potenzgesetz  $(e^z)^k = e^{kz}$  allerdings benutzt ohne zu rechtfertigen, ob dies unproblematisch ist. Dies holen wir nun nach: Aus der Gleichung  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$  für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  lässt sich schnell per Induktion beweisen, dass  $(e^z)^k = e^{kz}$  für alle  $z$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt. (Dieses Potenzgesetz bleibt wegen  $e^{-z} = \frac{1}{e^z} = (e^z)^{-1}$  sogar für  $k \in \mathbb{Z}$  gültig.)

- 4) Durch Betrachten der Real- und Imaginärteile der Gleichung  $e^{ik\frac{\pi}{2}} = i^k$  für verschiedene Werte von  $k$  können wir die folgende Wertetafel für Sinus und Cosinus zusammenstellen:

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

- 5) Aus der vorgenannten Wertetabelle, der Identität  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und dem Zwischenwertsatz erhalten wir:

$$\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1] \quad \text{und} \quad \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

- 6) Durch die Reihendarstellung von Sinus und Cosinus haben wir die Möglichkeit, deren Funktionswerte mit beliebiger Genauigkeit näherungsweise zu bestimmen. Dadurch und mit der im Beweis vom Nullstellensatz von Bolzano (Lemma 4.25) vorgestellten Intervallhalbierungsmethode könnten wir daher die Nullstelle des Cosinus in  $[0, 2]$  beliebig genau bestimmen und erhielten:

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279 \dots$$

Ferdinand von Lindemann bewies 1882, dass  $\pi$  eine transzendente Zahl ist und zeigte damit, dass die Lösung des Jahrhunderte alten Problems der *Quadratur des Kreises* nicht möglich ist: Es ist unmöglich nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus einem Kreis ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren. Um dies zu verstehen benötigt man allerdings tiefere Kenntnisse der Körpertheorie, wie sie in der Vorlesung *Algebra* vermittelt werden.

**Satz 5.32 (Additionstheoreme)** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- 2)  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

**Beweis:** (An dieser Stelle zählt sich unsere Definition der Winkelfunktionen über die komplexe Exponentialfunktion aus. Ein Beweis mit geometrischen Methoden ist zwar auch möglich, aber erheblich komplizierter.) Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + i \sin(x + y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten liefert die beiden gewünschten Gleichungen.  $\square$

**Korollar 5.33** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  und  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  (d.h.  $\sin$  und  $\cos$  sind  $2\pi$ -periodisch)
- 2)  $\sin(x + \pi) = -\sin x$  und  $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- 3)  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  und  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

**Beweis:** Dies folgt leicht aus den Additionstheoremen zusammen mit der Wertetabelle aus Teil 4) von Bemerkung 5.31 und den Eigenschaften  $\cos(-x) = \cos x$  und  $\sin(-x) = -\sin x$  aus Bemerkung 5.21.  $\square$

**Korollar 5.34** Es gilt:

- 1)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- 2)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- 3)  $\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = 1\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**Beweis:** 1) Die Inklusion “ $\supseteq$ ” folgt direkt aus  $\sin 0 = 0 = \sin(\pi)$  und  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$ , die sich per Induktion schnell aus der in Korollar 5.33 festgestellten Periodizität ergibt.

Für die Inklusion “ $\subseteq$ ” bemerken wir, dass aus  $\cos(x) = \cos(-x)$  und Satz 5.27 folgt, dass  $\cos x > 0$  für alle  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  gilt. Wegen  $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$  folgt dann  $\sin x > 0$  für  $0 < x < \pi$  und wegen  $\sin(x + \pi) = -\sin x$  auch  $\sin x < 0$  für  $\pi < x < 2\pi$ . Dies bedeutet aber, dass 0 und  $\pi$  die einzigen Nullstellen der Sinusfunktion im Intervall  $[0, 2\pi[$  sind. Die Behauptung folgt dann aus der  $2\pi$ -Periodizität des Sinus.

2) folgt analog bzw. mit  $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

3) Es gilt  $1 = e^{ix} = \cos x + i \sin x$  genau dann, wenn  $\cos x = 1$  und  $\sin x = 0$ . Wegen  $\cos(0) = 1$  und  $\cos(\pi) = -1$  und der Periodizität des Cosinus folgt aus 1), dass  $e^{ix} = 1$  genau dann gilt, wenn  $x = 2k\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Bemerkung 5.35** Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich die Funktionewerte von Sinus und Cosinus an ausgewählten Stellen exakt berechnen. Z.B. gilt

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \left( 1 - \cos^2 \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1,$$

woraus wir  $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$  und daher (da  $\cos x > 0$  für  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) schließlich

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

erhalten. Einige Funktionswerte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst und lassen sich mit der “ $\frac{\sqrt{k}}{2}$ -Regel” leicht merken:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Auch für noch ausgefalleneren Argumente lassen sich exakte Werte angeben, so z.B. erhält man nach einigen zuerst von Gauß durchgeführten Berechnungen (siehe Eric W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 1999), dass

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{\pi}{17} \right) &= \frac{1}{8} \sqrt{2} \sqrt{17 - \sqrt{17} - \sqrt{2} \left( \sqrt{34 + 6\sqrt{17} + \sqrt{2}(\sqrt{17} - 1)} \sqrt{17 - \sqrt{17} - 8\sqrt{2}\sqrt{17 + \sqrt{17} + \sqrt{17 - \sqrt{17}}}} \right)} \\ &= 0.1837495178... \end{aligned}$$

Eine Anwendung dieser Rechnung ist der Beweis, dass die Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks allein mit Zirkel und Lineal möglich ist - auch zum Verständnis hierfür benötigt man tiefere Kenntnisse aus der Vorlesung *Algebra*.

Zu den klassischen Winkelfunktionen gehört natürlich auch der Tangens:

**Definition 5.36** 1) Die Funktion  $\tan : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$  mit  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  heißt Tangensfunktion.

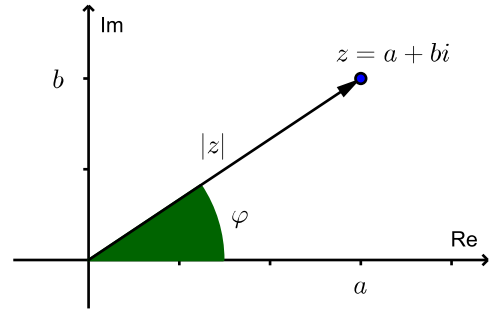
2) Die Funktion  $\cot : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$  mit  $\tilde{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  heißt Cotangensfunktion.

**Bemerkung 5.37** Durch Grenzwertbetrachtungen erhalten wir  $\tan(D) = \mathbb{R} = \cot(\tilde{D})$ .

Wegen ihrer Periodizität sind Sinus und Cosinus nicht injektiv. Durch eine entsprechende Einschränkung ihres Definitionsbereichs lassen sie sich allerdings injektiv machen, so dass in diesem Fall auch Umkehrfunktionen von Sinus und Cosinus existieren. Auf diese kommen wir allerdings erst im nächsten Kapitel zu sprechen.

## 5.3 Polarform komplexer Zahlen

Wie wir in Abschnitt 5.1 gesehen haben, können wir komplexe Zahlen als Punkte der Gaußschen Zahlenebene visualisieren. Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl entsprechen dann gerade den *kartesischen Koordinaten*. Statt durch diese kann man einen Punkt in der Ebene jedoch auch durch *Polarkoordinaten* beschreiben. Mit Ausnahme des Nullpunkts ist die Position jedes Punkts eindeutig durch den Abstand vom Ursprung und dem Winkel, den der Ortsvektor mit einer festgelegten Richtung, z.B. der „*positiven x-Richtung*“, bildet, bestimmt. (Für den Nullpunkt ist kein eindeutiger Winkel definiert.) Erinnern wir uns für einen kurzen Moment an die geometrische Herleitung von Sinus und Cosinus, so gilt:



$$a = |z| \cos \varphi \quad \text{und} \quad b = |z| \sin \varphi,$$

woraus wir  $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}$  erhalten. Da wir die Analysis aber allein auf den Axiomen aus Kapitel 1 aufbauen wollen, stehen uns solche geometrische Überlegungen nur zu Motivationszwecken, nicht aber als Beweismethode zur Verfügung. Daher gehen wir wie folgt vor:

**Satz 5.38 (Polarform)** *Zu jeder komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen  $r \in ]0, \infty[$  und  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ , so dass*

$$z = r \cdot e^{i\varphi}.$$

*Insbesondere gilt  $r = |z|$ .*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sei also  $z = r \cdot e^{i\varphi} = s \cdot e^{i\psi}$  mit  $r, s \in ]0, \infty[$  und  $\varphi, \psi \in ]-\pi, \pi]$ . Wegen  $|e^{ix}| = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  folgt

$$r = |r| \cdot |e^{i\varphi}| = |re^{i\varphi}| = |se^{i\psi}| = |s| \cdot |e^{i\psi}| = s.$$

Daraus erhalten wir  $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$  und damit wiederum  $e^{i(\varphi-\psi)} = 1$ , woraus mit Korollar 5.34 folgt, dass  $\varphi - \psi \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Wegen  $\varphi, \psi \in ]-\pi, \pi]$  folgt daher  $\varphi = \psi$ .

Zum Beweis der Existenz setzen wir zunächst  $r := |z|$ . Wegen  $z \neq 0$  folgt  $r > 0$  und es gilt

$$z = r \cdot \frac{z}{r}, \quad \text{wobei} \quad \left| \frac{z}{r} \right| = 1.$$

Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  der Real- bzw. Imaginärteil von  $z$ , d.h.  $z = a + bi$ , so gilt  $\frac{z}{r} = \frac{a}{r} + \frac{b}{r}i$ , woraus wir

$$\left| \frac{a}{r} \right| = \left| \operatorname{Re} \left( \frac{z}{r} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{r} \right| = 1 \quad \text{bzw.} \quad -1 \leq \frac{a}{r} \leq 1$$

erhalten. Wegen der Stetigkeit des Cosinus und wegen  $\cos 0 = 1 \geq \frac{a}{r} \geq -1 = \cos \pi$  gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein  $\alpha \in [0, \pi]$  mit  $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ . Damit folgt weiter, dass

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{a^2}{r^2} = \frac{b^2}{r^2},$$

da ja  $\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = 1$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

*Fall 1):*  $\sin \alpha = \frac{b}{r}$ . In diesem Fall setzen wir  $\varphi := \alpha$ . Dann gilt

$$\frac{z}{r} = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad \text{mit } \varphi \in [0, \pi].$$

*Fall 2):*  $\sin \alpha = -\frac{b}{r} \neq 0$ . (Der Fall  $\sin \alpha = 0$  ist schon durch Fall 1) abgedeckt. Insbesondere gilt hier also  $\alpha \in ]0, \pi[$ .) Setze  $\varphi := -\alpha \in ]-\pi, 0[$ . Dann gilt

$$\frac{z}{r} = \cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

wobei wir Bemerkung 5.21 ausgenutzt haben.

In beiden Fällen 1) und 2) erhalten wir  $z = re^{i\varphi}$ .  $\square$

Man nennt die Darstellung  $z = re^{i\varphi}$  mit  $r \in ]0, \infty[$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$  die *Polarform* der komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Wegen  $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2k\pi)}$  für  $k \in \mathbb{Z}$  ist diese, wie wir in Satz 5.38 gesehen haben, nur dann eindeutig bestimmt, wenn der Bereich von  $\varphi$  entsprechend eingeschränkt wird. Man nennt

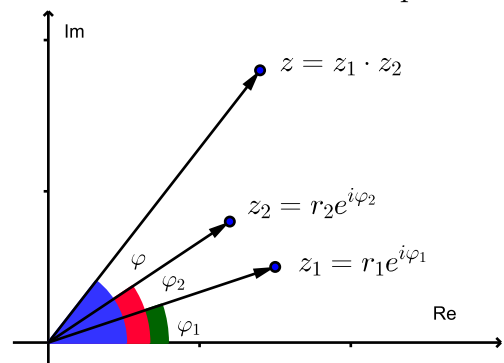
$$\arg(z) := \{\varphi \mid z = |z| \cdot e^{i\varphi}\}$$

das *Argument* von  $z$  und spricht vom *Hauptwert* des Arguments, falls  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ . Allerdings ist auch hier die Literatur mal wieder nicht ganz einheitlich und bisweilen wird auch der Bereich  $[0, 2\pi[$  für den Hauptwert angegeben. Wie dem auch sei, für viele Anwendung kommt es gar nicht auf den eigentlichen Hauptwert, sondern nur auf die Darstellung der komplexen Zahlen in der Polarform  $re^{i\varphi}$  mit einem  $\varphi \in \mathbb{R}$  an.

**Bemerkung 5.39** Mit Hilfe der Polarform erhalten wir eine anschauliche Interpretation der Multiplikation zweier komplexer Zahlen. Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$  und  $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ , wobei  $r_1, r_2 \in ]0, \infty[$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \in ]-\pi, \pi[$  gilt nämlich

$$z := z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

d.h. den Betrag  $r$  des Produkts  $z$  erhalten wir durch Multiplikation der Beträge von  $z_1$  und  $z_2$ , während wir den neuen Winkel  $\varphi$  durch Addition der beiden Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  erhalten. (An dieser Stelle ist es nützlich, im Fall  $\varphi_1 + \varphi_2 \notin ]-\pi, \pi]$  nicht auf den Hauptwert des Arguments zu bestehen.)



Neben der anschaulichen Interpretation der Multiplikation in den komplexen Zahlen hat Satz 5.38 noch andere wichtige Folgerungen.

**Korollar 5.40** Die Gleichung  $z^n = 1$  hat in den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  genau  $n$  paarweise verschiedene Lösungen. Diese sind gegeben durch

$$z_k = e^{i(2\pi \frac{k}{n})},$$

wobei  $k = 0, \dots, n-1$ .

**Beweis:** Wir überprüfen zunächst, dass  $z_0, \dots, z_{n-1}$  Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$  sind. Es gilt:

$$z_k^n = \left( e^{i(2\pi \frac{k}{n})} \right)^n = e^{i(2\pi k)} = 1$$

Dann zeigen wir, dass auch jede andere Lösung diese Form hat. Sei also  $z \in \mathbb{C}$ , so dass  $z^n = 1$ . Da offenbar  $z \neq 0$ , gibt es nach Satz 5.38 ein  $r \in ]0, \infty[$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$  (wir verzichten hier auf die Einschränkung  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ ) mit

$$z = re^{i\varphi}.$$

Wegen  $1 = |z^n| = |z|^n$  folgt  $r = |z| = 1$  und daher

$$1 = z^n = (e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n}.$$

Mit Korollar 5.34 folgt

$$\varphi \cdot n \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

bzw.

$$e^{i\varphi} \in \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

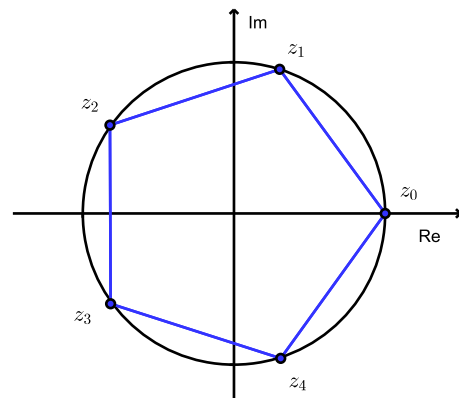
und wegen der  $2\pi$ -Periodizität der Funktion  $x \mapsto e^{ix}$  folgt, dass diese Menge aus genau  $n$  Elementen besteht, zu denen dann die Lösungen  $z_0, \dots, z_{n-1}$  gehören.  $\square$

#### Bemerkung 5.41

Die  $n$  Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$  nennt man die  $n$ -ten Einheitswurzeln. In der Gaußschen Zahlenebene bilden sie die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -ecks, wie in der Skizze für den Fall  $n = 5$  dargestellt. Dort gilt:

$$z_k = e^{i(2\pi \frac{k}{5})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Natürlich ist auch  $z_0 = 1$  immer eine reelle Lösung der Gleichung  $z^n = 1$ . Eine Ecke des  $n$ -ecks befindet sich also immer an der Stelle  $(1, 0)$ .

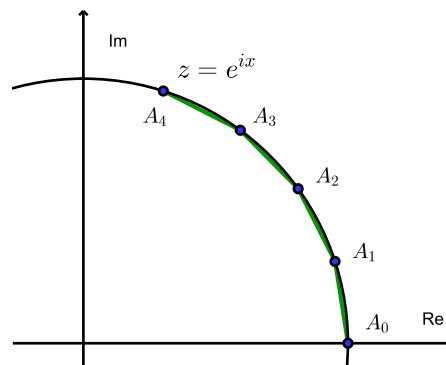


**Bemerkung 5.42** Zum Abschluss bringen wir noch (die Idee für) den versprochenen Nachweis, dass das “ $x$ ” in  $e^{ix}$  gerade der Länge des Bogenabschnitts auf dem Einheitskreis von 1 nach  $e^{ix}$  entspricht, wenn  $x \in [0, 2\pi[$ . Dazu definieren wir die Punkte

$$A_k = e^{ik\frac{x}{n}}, \quad k = 0, \dots, n$$

auf dem Einheitskreis. Weiter sei  $\ell_n$  die Länge des *Polygonzugs* durch die Punkte  $A_0, \dots, A_n$ . Dann gilt

$$\ell_n = \sum_{k=1}^n |A_k - A_{k-1}|$$



und die Bogenlänge des Kreisabschnitts auf dem Einheitskreis von 1 bis  $e^{ix}$  ist dann definiert durch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$ . Die Behauptung folgt nun, in dem Sie zeigen (Übung!), dass

$$\ell_n = 2n \left| \sin \frac{x}{2n} \right| \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{x}{2n} = x.$$

Ein wichtiger Punkt wäre an dieser Stelle noch hinzuzufügen: Die komplexen Zahlen haben nicht nur die Eigenschaft, dass die Gleichung  $z^2 = -1$  nun eine Lösung hat, nämlich gerade die imaginäre Einheit  $i$  (sowie auch  $-i$ ), sondern erstaunlicherweise hat nun jetzt sogar nicht konstante Polynom mindestens eine Nullstelle.

**Satz 5.43 (Fundamentalsatz der Algebra)** Sei  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Polynomfunktion der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ , so dass  $a_n \neq 0$  und  $n \geq 1$ . Dann hat  $p$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , d.h. es gibt  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $p(z_0) = 0$ .

Obwohl der Satz den Namen *Fundamentalsatz der Algebra* trägt, lässt er sich nicht ausschließlich mit Mitteln aus den Vorlesungen *Lineare Algebra* oder *Algebra* beweisen, denn zumindest das Resultat, dass ein reellen Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat, wird benötigt (vgl. Teil 1) von Beispiel 4.26), und für den Nachweis wurde der Nullstellensatz von Bolzano benutzt - ein Resultat aus der Analysis. Am Ende der Vorlesung *Analysis III* werden wir allerdings so viel Wissen zusammengehäuft haben, dass wir den *Fundamentalsatz der Algebra* als ein einfaches Korollar erhalten. Wir vertagen den Beweis daher noch etwas.

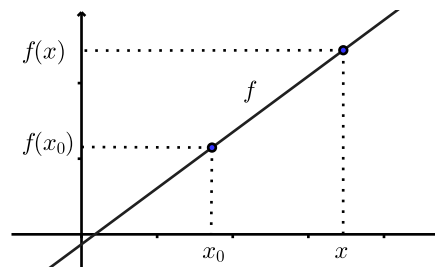


# Kapitel 6

## Differentiation

Eines der wichtigsten Konzepte in der Analysis ist das der *Differenzierbarkeit* einer Funktion bzw. die Definition der *Ableitung* einer Funktion. In vielen physikalischen Anwendungen spielt sie eine wichtige Rolle, wenn es bei der Bestimmung von Änderungsraten gilt. Mathematisch-geometrisch betrachtet handelt es sich dabei einfach um das Problem, die Steigung einer Funktion an einer Stelle zu bestimmen.

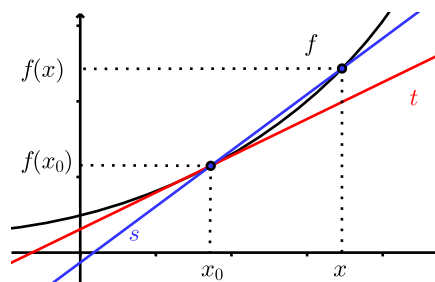
Für den Fall, dass es sich bei der gegebenen Funktion um eine *Gerade*, also eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Form  $x \mapsto mx + b$  mit  $m, b \in \mathbb{R}$  handelt (genauer gesagt ist nicht die Funktion, sondern der Graph der Funktion eine Gerade), so können wir den Parameter  $m$  als ein Maß für die Steigung der Funktion interpretieren. Diesen können wir auch leicht bestimmen, wenn die Funktion nicht explizit in der Form  $f(x) = mx + b$  gegeben ist, indem wir den *Differenzenquotienten*



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{mx + b - (mx_0 + b)}{x - x_0} = m$$

zu zwei gegebenen Stellen  $x_0, x \in \mathbb{R}$  auswerten. Aus der Schule ist Ihnen diese Vorgehensweise vielleicht noch unter der Merkregel “*Steigung = Vertikalunterschied geteilt durch Horizontalunterschied*” bekannt.

Eine analoge Vorgehensweise im Fall einer allgemeineren Funktion liefert dagegen nur die durchschnittliche Steigung der Funktion im Intervall zwischen  $x_0$  und  $x$  und kann als die Steigung der *Sekante*  $s$  interpretiert werden, die den Graphen von  $f$  in den Punkten  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x, f(x))$  schneidet. Die entscheidende Idee für das Bestimmen der Momentansteigung in der Stelle  $x_0$  ist nun, den Grenzfalle für  $x \rightarrow x_0$  zu betrachten. Die Sekante geht dann in eine an der Stelle  $x_0$  anliegende Tangente über, deren Steigung wir dann als die *Steigung der Funktion  $f$  in  $x_0$*  interpretieren können.



## 6.1 Differenzierbarkeit

Da wir die Differenzierbarkeit einer Funktion mithilfe eines Grenzwerts darstellen wollen, müssen wir sicherstellen, dass der betrachtete Punkt ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs unserer Funktion ist.

**Definition 6.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1)  $f$  heißt differenzierbar in  $x_0 \in D$ , falls  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  ist und falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt  $f'(x_0)$  die Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

- 2)  $f$  heißt differenzierbar, falls  $f$  in allen  $x_0 \in D$  differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f'(x)$  die Ableitung von  $f$ .

Eine andere häufig verwendete Schreibweise des Differenzenquotienten benutzt die Abkürzung  $\Delta x := x - x_0$ . Dann können wir insbesondere statt  $x_0$  einfach wieder  $x$  schreiben und erhalten die Form

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (6.1)$$

Da das Symbol  $\Delta$  auch in anderen Situationen gerne für Differenzen benutzt wird, können wir den Zähler analog als  $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$  umschreiben und erhalten somit für den *Differentialquotienten*, d.h. den Grenzwert des Differenzenquotienten, die Formel

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} =: \frac{df}{dx}(x).$$

Die zuletzt definierte Schreibweise geht auf die von Newton und Leibniz am Ende des 17. Jahrhunderts begründete *Infinitesimalrechnung* zurück, mit der man die Differentiation eingeführt hatte, bevor der Begriff des Grenzwerts zur Verfügung stand. Damals stellte man sich auf den Standpunkt, dass  $df(x)$  und  $d(x)$  *infinitesimale* (d.h. “unendlich kleine”) Größen sind - im Gegensatz zu den Differenzen  $\Delta f(x)$  und  $\Delta x$ , die zwar sehr klein sein können, aber immer noch eine “endliche Größe” haben. Auch heute ist die Schreibweise  $\frac{d}{dx}f$  oder  $\frac{df}{dx}$  für die Ableitung  $f'$  von  $f$  immer noch sehr gebräuchlich.

**Beispiel 6.2** 1) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konstant, d.h. es gilt  $f(x) = c$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und ein  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  differenzierbar und es gilt  $f' = 0$ , denn für ein beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Auch aus der Anschauung wird klar, dass eine konstante Funktion in jeder Stelle  $x_0$  die Steigung  $f'(x_0) = 0$  hat.

- 2) Die Identität  $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar und es gilt  $(Id_{\mathbb{R}})' = 1$  (wobei wir hier mit “1” die konstante Funktion  $1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$  meinen), denn für ein beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  erhalten wir

$$Id'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Id(x) - Id(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

- 3) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar. Dies weisen wir mit der alternativen Schreibweise des Differenzenquotienten nach, wobei wir der Einfachheit halber statt  $\Delta x$  in (6.1) einfach nur  $h$  schreiben. Wie schon im Beweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion unterscheiden wir zwei Fälle.

*Fall i):*  $\exp$  ist differenzierbar in  $x = 0$ : Es gilt

$$\exp'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

Zur Berechnung dieses Grenzwerts nutzen wir die Reihendarstellung der Exponentialfunktion. Wegen  $\exp(h) = 1 + h + R_1(h)$  mit  $R_1(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$  erhalten wir mittels der Restgliedabschätzung (3.4) aus Bemerkung 3.29, dass

$$\left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| = \frac{|\exp(h) - 1 - h|}{|h|} = \frac{|R_1(h)|}{|h|} \leq \frac{2|h|^2}{2|h|} = |h|$$

für  $1 \geq 2(|h| - 1)$  also für  $|h| \leq \frac{3}{2}$ . Daraus erhalten wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \exp'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 = \exp(0).$$

*Fall ii):*  $\exp$  ist differenzierbar in allen  $x \in \mathbb{R}$ : Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

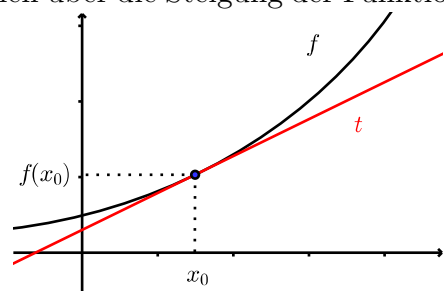
und mit Ausnutzung von Fall i) folgt  $\exp'(x) = \exp(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Die Exponentialfunktion ist also identisch mit ihrer Ableitung.

Die Ableitung  $f'(x_0)$  liefert uns nicht nur Informationen über die Steigung der Funktion in einer Stelle  $x_0$ , sondern wir erhalten so auch eine Funktionsvorschrift für die eingangs erwähnte *Tangente* an den Graphen von  $f$  in der Stelle  $x_0$ . Diese ist durch die Vorschrift

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

gegeben und lässt sich im folgenden Sinn als *beste*

*lineare*<sup>1</sup> *Approximation* an die Funktion  $f$  in der Stelle  $x_0$  interpretieren:



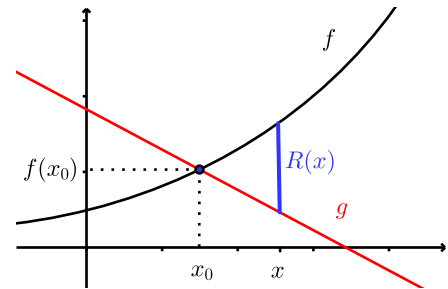
<sup>1</sup>“Linear” ist hier im Sinn von “affin linear” zu verstehen, d.h. während in der Linearen Algebra eine *lineare Funktion*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Eigenschaft hat, dass ihr Graph einer Gerade durch den Nullpunkt entspricht, erlauben wir hier Funktionen, deren Graph eine beliebige Gerade ist.

Betrachten wir den Fehler, den man bei der Approximation der Funktion  $f$  durch ihre Tangente  $t$  in der Stelle  $x_0$  macht, d.h. untersuchen wir die *Fehler-* oder *Restfunktion*

$$R : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto R(x) := f(x) - t(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

so wird dieser Fehler “beliebig klein”, wenn “ $x$  nahe bei  $x_0$ ” ist, d.h. es gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ . Wie Sie der nebenstehenden Skizze entnehmen können, würde diese Bedingung aber auch von einer “schlechten linearen Approximation” erfüllt. Viel interessanter ist es daher, den *relativen Fehler*

$$\frac{R(x)}{x - x_0}$$



als Maß für die Güte einer linearen Approximation zu betrachten und eine Approximation durch eine lineare Funktion als “gut” anzusehen, wenn dieser relative Approximationsfehler für  $x \rightarrow x_0$  gegen Null geht. Der folgende Satz besagt nun, dass eine Funktion genau dann in einer Stelle gut linear approximiert werden kann, wenn sie dort differenzierbar ist.

**Satz 6.3 (Differenzierbarkeit und lineare Approximation)** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$ , und sei  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i)  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$ .

ii) Es gibt ein  $m \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \in D$  gilt:

$$f(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

Ist eine der beiden Bedingungen (und damit auch die andere) erfüllt, so ist der Parameter  $m$  in ii) eindeutig bestimmt und es gilt  $m = f'(x_0)$ .

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)”: Sei  $f$  differenzierbar in  $x_0$ . Dann setzen wir

$$m := f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und erhalten damit für  $R(x) := f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)$ , dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \right) = m - m = 0.$$

“ii)  $\Rightarrow$  i)”: Seien  $m$  und  $R$  wie in ii). Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + R(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + \frac{R(x)}{x - x_0}.$$

Daraus erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = m.$$

Somit ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$  und es gilt  $f'(x_0) = m$ .  $\square$

**Bemerkung 6.4** Die Tatsache, dass differenzierbare Funktionen in jeder Stelle eine eindeutig bestimmte beste lineare Approximation besitzen wird in der angewandten Mathematik häufig ausgenutzt, um Näherungslösungen für ein gegebenes Problem zu berechnen. Dabei wird das gegebene Problem durch ein “lineares” Problem approximiert, für das üblicherweise eine ausführliche Theorie existiert, die die Berechnung von Lösungen ermöglicht. Dieses *Prinzip der Linearisierung* wollen wir einmal an dem Problem des Findens von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  illustrieren. Dazu wählen wir eine Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  nahe der gesuchten Nullstelle und nutzen aus, dass wir  $f$  in der Nähe von  $x_0$  gut durch die Tangente  $t_0$  an  $f$  in  $x_0$  approximieren können: Für  $x$  nahe  $x_0$  gilt

$$f(x) \approx t_0(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Die Nullstelle  $x_1$  der Tangente  $t_0$  lässt sich sehr einfach bestimmen. Auflösen der Gleichung  $t_0(x_1) = 0$  nach  $x_1$  liefert

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

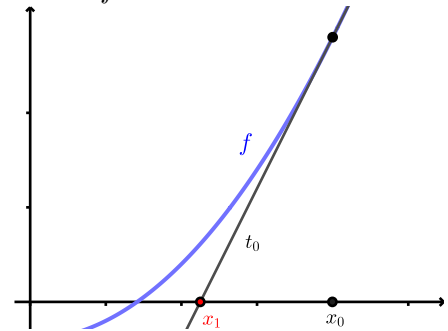
unter der Voraussetzung, dass  $f'(x_0) \neq 0$  gilt. Die so gefundene Nullstelle von  $t_0$  ist natürlich nur eine ggf. grobe Näherung für die gesuchte Nullstelle von  $f$ , doch in vielen Fällen eine deutlich bessere, als die ursprüngliche Näherung, wie sie z.B. in der obestehenden Skizze erkennen können. Iteration dieser Vorgehensweise liefert das sogenannte *Newton-Verfahren*: Nach Wahl eines Startwerts  $x_0$  bilden wir die Iterationsfolge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (6.2)$$

die natürlich nur dann wohldefiniert ist, wenn  $f'(x_n) \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. In der Veranstaltung *Numerik I* wird gezeigt, dass diese Folge unter milden Voraussetzungen gegen eine Nullstelle der Funktion  $f$  konvergiert.

**Beispiel 6.5** Wir wenden das in Bemerkung 6.4 entwickelte Newton-Verfahren auf die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2 - 2$  an, um deren Nullstelle  $x^* = \sqrt{2}$  zu berechnen. Dazu greifen wir schon einmal auf Beispiel 6.12 vor und nutzen aus, dass dort gezeigt wird, dass  $f$  differenzierbar mit der Ableitung  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2x$  ist. Nach Wahl eines Startwerts  $x_0 > 0$  erhalten wir gemäß (6.2) die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$



Diese Vorschrift entspricht genau der Vorschrift für die “Wurzelfolge” aus Satz 2.24 (für den Spezialfall  $c = 2$ ), für die wir damals bewiesen hatten, dass diese für jeden Startwert  $x_0 > 0$  gegen  $\sqrt{c} = \sqrt{2}$  konvergiert. Und nicht nur das! Das Newton-Verfahren liefert üblicherweise viel schneller gute Näherungswerte als die uns aus dem Beweis von Lemma 4.25 bekannte Intervallhalbierungsmethode, wie Sie sich anhand der folgenden Tabelle überzeugen können, in der die ersten paar Folgenglieder der “Wurzelfolge” ( $x_n$ ) und der beiden Intervallgrenzenfolgen ( $a_n$ ), ( $b_n$ ) aus der Intervallhalbierungsmethode aufgelistet sind. Wie Sie deutlich sehen können, stimmen die Näherungswerte der “Wurzelfolge” bereits ab dem vierten Folgenglied in den ersten acht Stellen mit dem exakten Wert von  $\sqrt{2}$  überein, während die beiden ebenfalls gegen  $\sqrt{2}$  konvergierenden Folgen der Intervallgrenzen ( $a_n$ ), ( $b_n$ ) aus dem Intervallhalbierungsverfahren auch nach dem zehnten Schritt erst auf drei bzw. zwei Stellen mit  $\sqrt{2}$  übereinstimmen.

	Newton-Verfahren	Intervallhalbierung	
$n$	$x_n$	$a_n$	$b_n$
0	2.00000000	0.00000000	2.00000000
1	1.50000000	1.00000000	2.00000000
2	1.41666667	1.00000000	1.50000000
3	1.41421569	1.25000000	1.50000000
4	1.41421356	1.37500000	1.50000000
5	1.41421356	1.37500000	1.43750000
6	1.41421356	1.40625000	1.43750000
7	1.41421356	1.40625000	1.42187500
8	1.41421356	1.41406250	1.42187500
9	1.41421356	1.41406250	1.41796875
10	1.41421356	1.41406250	1.41601563

Tabelle 6.1: Die ersten Folgenglieder verschiedener Iterationsfolgen zur Berechnung von  $\sqrt{2}$  als Nullstelle von  $f : x \mapsto x^2 - 2$ .

Da wir uns in Kapitel 4 ausgiebig mit der Stetigkeit von Funktionen beschäftigt haben, stellt sich die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit gibt. Der folgende Satz liefert die Antwort.

**Satz 6.6** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in D$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

**Beweis:** Sei  $f$  differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt nach Satz 6.3 für die Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ , dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$ . Wegen

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

erhalten wir daraus unmittelbar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , d.h.  $f$  ist stetig in  $x_0$ .  $\square$

**Bemerkung 6.7** Die Umkehrung von Satz 6.6 gilt nicht! Ein Standard-Gegenbeispiel ist die Betragsfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow |x|$ , von der wir aus Abschnitt 4.2 wissen, dass sie auf ganz  $\mathbb{R}$  und damit speziell in  $x_0 = 0$  stetig ist. Sie ist aber dort nicht differenzierbar, denn wegen

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \quad (6.3)$$

erhalten wir, dass

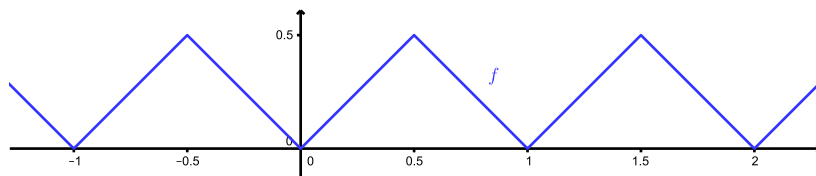
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

gilt, d.h. der Grenzwert des Differenzenquotienten (6.3) für  $x \rightarrow 0$  existiert nicht. Machen sie sich klar, dass die Betragsfunktion dagegen in jedem  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar ist, und dass für die ihre Ableitung in  $x$  gilt:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

**Bemerkung 6.8** Lange Zeit ging man davon aus, dass stetige Funktionen “in der Regel” auch differenzierbar seien, d.h. dass es höchstens eine endliche Menge von isolierten Punkten geben könne, in denen die Funktion nicht differenzierbar ist, so wie dies z.B. bei der Betragsfunktion der Fall ist, die die Differenzierbarkeit nur an der Stelle  $x_0 = 0$  verletzt. Erst 1872 präsentierte Weierstraß der Öffentlichkeit zum ersten Mal eine Funktion, die auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, aber in keinem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar ist. (Andere Mathematiker hatten zwar schon vorher solche Funktionen konstruiert, ihre Ergebnisse wurden aber nicht veröffentlicht und waren der mathematischen Gemeinschaft daher nicht bekannt.) Wir geben an dieser Stelle als Beispiel eine Funktion an, die 1903 von Takagi vorgeschlagen wurde. Dazu betrachten wir die stetige und periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x+1) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$



Sei nun weiter  $n \in \mathbb{N}$  und  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$g_n(x) := f(4^n x) \cdot 4^{-n}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  absolut konvergent, denn mit dem Majorantenkriterium folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)| = \sum_{k=0}^{\infty} |f(4^k x) \cdot 4^{-k}| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Daher ist die *Takagi-Funktion*

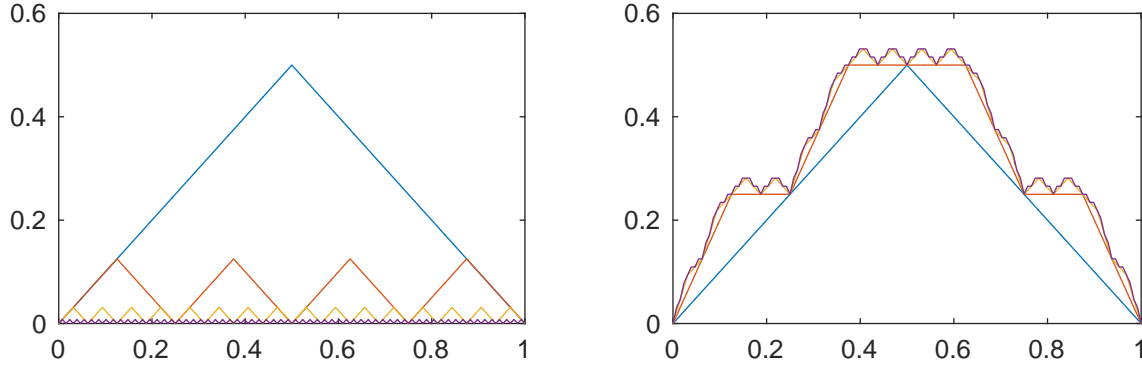
$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(4^k x) \cdot 4^{-k}$$

wohldefiniert und nach den Sätzen 8.12 und 8.6 aus Kapitel 8 auch stetig. (Dies ist alles andere als trivial! Zwar ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion

$$t_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

als Summe stetiger Funktionen stetig und für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $t(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x)$ , aber daraus folgt noch nicht die Stetigkeit von  $t$ , vgl. dazu die Ausführungen in Kapitel 8.)

Damit Sie sich eine Vorstellung von der Takagi-Funktion machen können, sind im folgenden Diagramm auf der linken Seite die Graphen der Funktionen  $g_0, g_1, g_2, g_3$  eingeschränkt auf das Intervall  $[0, 1]$  abgebildet, sowie auf der rechten Seite entsprechend die “Partialsommen”  $t_0, t_1, t_2, t_3$  der Takagi-Funktion.



Beachten Sie, dass die Funktion  $g_k$  periodisch mit Periode  $4^{-k}$  ist, d.h. es gilt  $g_k(x + 4^{-k}) = g_k(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Außerdem ist  $g_k$  auf jedem der Intervalle

$$I_k^{(\ell)} := [\tfrac{1}{2} \cdot 4^{-k} \cdot \ell, \tfrac{1}{2} \cdot 4^{-k} \cdot (\ell + 1)]$$

mit  $\ell \in \mathbb{Z}$  linear und zwar entweder mit der Steigung  $+1$  oder  $-1$ . Jedes dieser Intervalle hat die Länge  $\frac{1}{2} \cdot 4^{-k}$  und für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt

$$I_k^{(4\ell)}, I_k^{(4\ell+1)}, I_k^{(4\ell+2)}, I_k^{(4\ell+3)} \subseteq I_{k-1}^{(\ell)}.$$

(Veranschaulichen Sie sich dies noch einmal anhand der oben skizzierten Funktionsgraphen.) Wir zeigen nun:

**Satz 6.9** Die Takagi-Funktion  $t$  ist in keinem  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar.

**Beweis:** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  (mindestens) ein  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $x_0 \in I_n^{(\ell)}$ . Da jedes der Intervalle  $I_n^{(\ell)}$  die Länge  $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n}$  hat, gilt dann auch

$$x_0 + \tfrac{1}{4}4^{-n} \in I_n^{(\ell)} \quad \text{oder} \quad x_0 - \tfrac{1}{4}4^{-n} \in I_n^{(\ell)}.$$

Wähle  $h_n \in \{\frac{1}{4}4^{-n}, -\frac{1}{4}4^{-n}\}$ , so dass  $x_0, x_0 + h_n \in I_n^{(\ell)}$ . Nun ist  $g_n$  linear auf  $I_n^{(\ell)}$  mit der Steigung  $+1$  oder  $-1$ . Da außerdem  $I_n^{(\ell)}$  für jedes  $k \leq n$  in einem Intervall der Form  $I_k^{(\ell_k)}$  mit  $\ell_k \in \mathbb{Z}$  enthalten ist, ist auch jede Funktion  $g_k$  mit  $k \leq n$  linear auf  $I_n^{(\ell)}$  mit der Steigung  $+1$  oder  $-1$ . Daher gilt

$$\frac{g_k(x_0 + h_n) - g_k(x_0)}{h_n} \in \{+1, -1\} \quad \text{für alle } k \leq n. \quad (6.4)$$

Für  $k \geq n+1$  ist  $\frac{1}{4}4^{-n}$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $4^{-k}$ , d.h. auch  $h_n$  ist ein ganzzahliges Vielfaches von  $4^{-k}$ . Wegen der Periodizität  $g_k(x + 4^{-k}) = g_k(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  von  $g_k$  folgt damit  $g_k(x_0 + h_n) = g_k(x_0)$  für alle  $k \geq n+1$ . Damit erhalten wir aus (6.4), dass

$$d_n := \frac{t(x_0 + h_n) - t(x_0)}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(x_0 + h_n) - g_k(x_0)}{h_n} = \sum_{k=0}^n \frac{g_k(x_0 + h_n) - g_k(x_0)}{h_n} \in \mathbb{Z}$$

und insbesondere ist  $d_n$  gerade für ungerades  $n$ , aber ungerade für gerades  $n$ . Damit divergiert die Folge  $(d_n)$  und der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(x_0+h) - t(x_0)}{h}$  ist daher nicht existent. Also ist  $t$  nicht differenzierbar in  $x_0$ .  $\square$



## 6.2 Differentiationsregeln

In diesem Abschnitt leiten wir die (Ihnen vermutlich noch aus der Schule vertrauten) gängigsten Ableitungsregeln her und wenden diese dann auf uns bereits bekannte Funktionen an.

**Satz 6.10** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x \in D$ , sowie  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g$ ,  $cf$  und  $f \cdot g$  differenzierbar in  $x$  und es gilt:

$$1) \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (cf)'(x) = c \cdot f'(x) \quad (\text{Linearität})$$

$$2) \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{Produktregel})$$

**Beweis:** Wir erinnern an dieser Stelle an die Definition des Grenzwerts einer Funktion, siehe Definition 4.19. Wenn wir also  $f'(x) = \alpha$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  zeigen wollen, so können wir dies tun, indem wir nachweisen, dass für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \alpha.$$

Sei also  $(x_n)$  eine beliebige Folge in  $D \setminus \{x\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Dann gilt

$$\frac{(f(x_n) + g(x_n)) - (f(x) + g(x))}{x_n - x} = \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} + \frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x},$$

woraus wir die erste Gleichheit in 1) durch den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  erhalten. Ganz analog zeigen wir die zweite Gleichheit. Für 2) beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x) \cdot g(x)}{x_n - x} &= \frac{f(x_n)g(x_n) - f(x)g(x_n) + f(x)g(x_n) - f(x)g(x)}{x_n - x} \\ &= \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} g(x_n) + \frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x} f(x) \end{aligned}$$

gilt. Da  $g$  nach Satz 6.6 stetig in  $x$  ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$  und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x) \cdot g(x)}{x_n - x} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \quad \square$$

**Bemerkung 6.11** Die Bezeichnung *Linearität der Differentiation* der in Satz 6.10 festgestellten Eigenschaft 1) bezieht sich auf die Tatsache, dass die Menge  $\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$  der differenzierbaren Funktionen  $D \rightarrow \mathbb{R}$  ein Unterraum des Vektorraums  $\text{Abb}(D, \mathbb{R})$  der Funktionen  $D \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Das “*Differenzieren*”

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{D}(D, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Abb}(D, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f'$$

ist dann wegen Teil 1) von Satz 6.10 eine lineare Abbildung im Sinne der Linearen Algebra.

**Beispiel 6.12** 1) Die Funktion  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  differenzierbar und hat die Ableitung  $f'_n : x \mapsto nx^{n-1}$ . Dies zeigen wir per Induktion. Der Fall  $n = 1$  ist bereits bekannt ( $f_1 = Id_{\mathbb{R}}$ ) und für den Induktionsschritt benutzen wir die Produktregel: Da  $f_{n+1}$  die Funktion  $x \mapsto x^{n+1} = x \cdot x^n$  ist, erhalten wir für alle  $x \in \mathbb{R}$  aus der Differenzierbarkeit von  $f_n : x \mapsto x^n$ , dass

$$f'_{n+1}(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Für den Spezialfall  $n = 2$  erhalten wir insbesondere

$$f_2 : x \mapsto x^2 \quad \text{und} \quad f'_2 : x \mapsto 2x.$$

2) Mit 1) folgt sofort, dass alle Polynomfunktionen  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind. Hat  $p$  die Form  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . (Man beachte, dass der Summand in  $p$  für  $k = 0$  konstant ist und seine Ableitung daher die Nullfunktion ist. Aus diesem Grund beginnt die Summe bei der Ableitung  $p'$  erst bei  $k = 1$ .) Für den in Beispiel 6.5 auftretenden Spezialfall  $p : x \mapsto x^2 - 2$  erhalten wir dann wie dort bereits verwendet  $p' : x \mapsto 2x$ .

**Satz 6.13 (Kettenregel)** Seien  $D, \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x \in D$ , sowie  $f(D) \subseteq \tilde{D}$  und  $g : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $f(x)$ . Dann ist  $g \circ f$  differenzierbar in  $x$  und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

**Beweis:** Sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge in  $D \setminus \{x\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Falls  $f(x_n) \neq f(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, so folgt

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x))}{x_n - x} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(x))}{f(x_n) - f(x)} \cdot \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}. \quad (6.5)$$

Daraus erhalten wir für den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  dann  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ , denn  $f$  ist differenzierbar in  $x$  und  $g$  ist differenzierbar in  $f(x)$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $x$  (vgl. Satz 6.6) ist  $(f(x_n))$  eine Folge in  $\tilde{D}$ , die gegen  $f(x)$  konvergiert. Da wir aber nicht ausschließen können, dass  $f(x_n) = f(x)$  für manche  $n \in \mathbb{N}$  gilt (z.B. könnte  $f$  konstant sein), betrachten wir etwas allgemeiner die Funktion  $g^* : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g^*(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)} & \text{falls } y \neq f(x), \\ g'(f(x)) & \text{falls } y = f(x). \end{cases}$$

Da  $g$  in  $f(x)$  differenzierbar ist, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^*(f(x_n)) = g'(f(x))$ . Weiter gilt für alle  $x \in D$ , dass

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x))}{x_n - x} = g^*(f(x_n)) \cdot \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x},$$

denn für  $f(x_n) \neq f(x)$  ist dies gerade (6.5) und für  $f(x_n) = f(x)$  sind beide Seiten der Gleichung Null. Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x))}{x_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( g^*(f(x_n)) \cdot \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \quad \square$$

**Beispiel 6.14** 1) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^{\lambda x}$  ist für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \lambda e^{\lambda x}$ , denn  $f = \exp \circ (\lambda \cdot Id_{\mathbb{R}})$  und daher folgt

$$f'(x) = \exp'((\lambda \cdot Id_{\mathbb{R}})(x)) \cdot (\lambda \cdot Id_{\mathbb{R}})'(x) = \exp(\lambda x) \cdot \lambda = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- 2) Als Spezialfall von 1) erhalten wir die Ableitungen der Exponentialfunktionen. Ist  $a > 0$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto a^x$ , so erhalten wir  $f'(x) = (\ln a) \cdot a^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dies zeigen wir noch einmal ausführlich in der anderen Schreibweise für die Differentiation:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln a}) = (\ln a) \cdot e^{x \cdot \ln a} = (\ln a) \cdot a^x.$$

- 3) Alles was bisher in den Abschnitten 6.1 und 6.2 gesagt wurde, lässt sich problemlos auf komplexe Funktionen der Form  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  oder  $D = \mathbb{C}$  übertragen. (Wir schränken uns dabei an dieser Stelle auf Definitionsbereiche ein, die entweder reell oder gleich der gesamten Menge der komplexen Zahlen sind. Wir kommen am Ende der Analysis III noch mal im Detail auf die Differenzierbarkeit komplexer Funktionen zurück und betrachten dann auch den allgemeineren Fall  $D \subseteq \mathbb{C}$ .) Damit erhalten wir als weiteren Spezialfall von 1), dass die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto e^{ix}$  die Ableitung  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto ie^{ix}$  hat. Dieses Erkenntnis hat eine wichtige Anwendung, denn per Definition der Cosinus- und Sinusfunktion gilt

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei wir für die zweite Identität jeweils Teil 2) von Bemerkung 5.6 ausgenutzt haben. Dadurch folgt aber unter Ausnutzung von Satz 6.10 die Differenzierbarkeit der Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  und wir erhalten für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = \frac{-e^{ix} + e^{-ix}}{2i} = -\sin x, \\ \sin'(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x. \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.15** Falls Ihnen der soeben erfolgte Nachweis der Differenzierbarkeit der Sinus- und Cosinusfunktionen nicht ganz geheuer war, sei zu Ihrer Beruhigung gezeigt, wie wir diese Ableitungen auch direkt erhalten können: Dazu sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig und  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann erhalten wir unter Ausnutzung der Additionstheoreme (Satz 5.32) die Formel  $\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cos \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_1-x_2}{2}$  (Übung) und damit, dass

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin(\frac{h}{2})}{h} = \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}.$$

Wenn Sie gezeigt haben, dass  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  gilt (Übung, vgl. auch Bemerkung 5.42), erhalten wir daraus

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x),$$

da der Cosinus in  $x$  stetig ist. Die Ableitung des Cosinus erhalten wir dann wegen  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$  (siehe Korollar 5.33) mit der Kettenregel als

$$\cos'(x) = \sin'(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x.$$

**Lemma 6.16** Die Funktion  $\text{inv} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist differenzierbar und hat die Ableitung  $\text{inv}' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ .

**Beweis:** Sei  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  beliebig. Dann gilt für alle  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0, -x\}$ , dass

$$\frac{\text{inv}(x+h) - \text{inv}(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{h \cdot x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}.$$

Damit erhalten wir

$$\text{inv}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{inv}(x+h) - \text{inv}(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}. \quad \square$$

**Korollar 6.17 (Quotientenregel)** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x \in D$  und  $0 \notin g(D)$ . Dann ist auch  $\frac{f}{g}$  differenzierbar in  $x$  und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

**Beweis:** Es gilt  $\frac{f}{g} = f \cdot (\text{inv} \circ g)$ . Daher erhalten wir mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel, sowie Lemma 6.16, dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= f'(x) \text{inv}(g(x)) + f(x) \cdot \text{inv}'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 6.18** 1) Rationale Funktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und ihre Ableitungen sind wieder rationale Funktionen.

2) Die Funktion  $\tan$  ist differenzierbar und für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\cos(x) \neq 0$  gilt

$$\tan'(x) = \left( \frac{\sin}{\cos} \right)'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Eine alternative Darstellung der Ableitung des Tangens ist durch

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\cos(x) \neq 0$  gegeben.

**Satz 6.19 (über die Ableitung der Umkehrfunktion)** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton (d.h. streng monoton wachsend oder streng monoton fallend). Ist  $f$  differenzierbar in  $x$  und gilt  $f'(x) \neq 0$ , so ist  $f^{-1}$  differenzierbar in  $y := f(x)$  und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Beweis:** Sei  $(y_n)$  eine beliebige Folge in  $f(I) \setminus \{y\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Setze  $x_n := f^{-1}(y_n)$ . Da  $f^{-1}$  nach Satz 4.41 stetig ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y) = x,$$

sowie  $x_n \in I \setminus \{x\}$ , da  $f^{-1}$  injektiv ist. Damit folgt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}},$$

woraus wir schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

erhalten. Da  $(y_n)$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 6.20** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Beachten Sie, dass aus der Differenzierbarkeit einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  *nicht* die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion folgt, sondern nur deren Differenzierbarkeit in allen  $x \in f(I)$  mit  $f'(x) \neq 0$ . Diese Bedingung ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, denn aus der Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  in  $f(x)$  folgt mit der Kettenregel, dass

$$1 = (Id_{\mathbb{R}})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x),$$

woraus wir  $f'(x) \neq 0$  erhalten.

**Beispiel 6.21** 1) Die Funktion  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist wegen  $\exp(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  auf ganz  $]0, \infty[$  differenzierbar und für alle  $y \in ]0, \infty[$  gilt:

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Als Anwendung berechnen wir den Grenzwert der Folge aus Teil 6) von Beispiel 2.2. Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1}{\frac{1}{n}}\right).$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1}{\frac{1}{n}}\right) = \exp(\ln'(1)) = \exp(1) = e.$$

- 2) Als nächstes betrachten wir die auf den ersten Blick vielleicht unheimlich wirkende Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^x$ . Mithilfe der Darstellung  $f(x) = \exp(x \cdot \ln x)$  erhalten wir unter Anwendung von Produkt und Kettenregel, sowie mit 1), dass für alle  $x > 0$  gilt:

$$f'(x) = \exp'(x \cdot \ln x) \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

- 3) Wir betrachten die Wurzelfunktion  $g : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $y \mapsto \sqrt{y}$ . Diese ist die Umkehrfunktion von  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $x \mapsto x^2$  und wegen  $f'(0) = 0$  ist die Wurzelfunktion nicht differenzierbar in  $f(0) = 0$ . Sie ist aber für jedes  $y \in ]0, \infty[$  differenzierbar und wir erhalten

$$g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Alternativ können wir die Ableitung der Wurzelfunktion auch so bestimmen: Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und betrachte die Funktion  $h : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ . Wegen  $x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln x)$  ist  $h$  differenzierbar und für alle  $x > 0$  gilt nach der Kettenregel

$$h'(x) = \exp'(\alpha \cdot \ln x) \cdot \alpha \cdot \ln' x = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Dies verallgemeinert die Ableitungsregel aus Teil 1) von Beispiel 6.12. Für den Spezialfall  $\alpha = \frac{1}{2}$  erhalten wir dann insbesondere

$$h(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad h'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

## 6.3 Lokale Extrema und der Mittelwertsatz

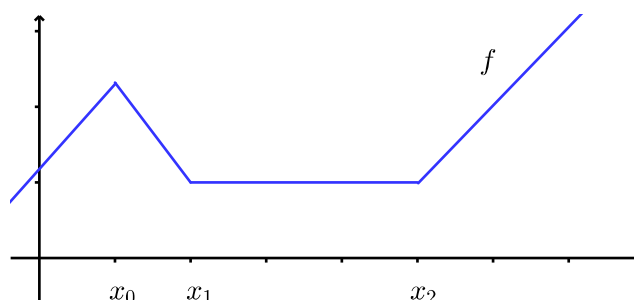
In Abschnitt 4.4 hatten wir uns bereits mit (globalen) *Extrema* (d.h. Maxima oder Minima) beschäftigt. In diesem Abschnitt wenden wir uns den *lokalen Extrema* zu.

**Definition 6.22** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ .

- 1) Wir sagen  $f$  hat ein lokales Maximum in  $x_0$ , falls es  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)$  gilt.
- 2) Wir sagen  $f$  hat ein striktes lokales Maximum in  $x_0$ , falls es  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $f(x_0) > f(x)$  für alle  $x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)$  mit  $x \neq x_0$  gilt.
- 3) Wir sagen  $f$  hat ein (striktes) lokales Minimum in  $x_0$ , falls  $-f$  ein (striktes) lokales Maximum in  $x_0$  hat.

### Beispiel 6.23

Die Funktion  $f$  mit dem in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Graphen hat ein striktes lokales Maximum in  $x_0$ , sowie lokale Minima in  $x_1$  und  $x_2$ . Darüberhinaus ist auch in jedem Punkt  $x \in ]x_1, x_2[$  sowohl ein lokales Minimum als auch ein lokales Maximum. Beachten Sie:  $x_0$  ist kein lokales Maximum, sondern  $f(x_0)$  ist das Maximum und  $x_0$  ist nur die Stelle, wo dieses angenommen wird. Allgemein bezeichnen wir solche Stellen wie  $x_0$  als *lokale Extremstellen*.



Die Funktion  $f$  hat ein striktes lokales Maximum in  $x_0$ , sowie lokale Minima in  $x_1$  und  $x_2$ . Darüberhinaus ist auch in jedem Punkt  $x \in ]x_1, x_2[$  sowohl ein lokales Minimum als auch ein lokales Maximum. Beachten Sie:  $x_0$  ist kein lokales Maximum, sondern  $f(x_0)$  ist das Maximum und  $x_0$  ist nur die Stelle, wo dieses angenommen wird. Allgemein bezeichnen wir solche Stellen wie  $x_0$  als *lokale Extremstellen*.

Ein Extremum im Sinn von Definition 4.28 (wir bezeichnen solche im Folgenden zur besseren Unterscheidung auch als *globale Extrema*) ist insbesondere auch ein lokales Extremum, denn die Bedingung in Definition 6.22 ist für jedes  $\varepsilon > 0$  erfüllt. Als nächstes wollen wir das sogenannte notwendige Kriterium für die Existenz von lokalen Extrema herleiten. Dafür benötigen wir die folgende Definition.

**Definition 6.24** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Ein Punkt  $x_0 \in D$  heißt innerer Punkt von  $D$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$  gilt. (Zur Erinnerung:  $U_\varepsilon(x_0) = ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ .)

**Beispiel 6.25** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .

- 1) Jedes  $x_0 \in ]a, b[$  ist ein innerer Punkt des offenen Intervalls  $]a, b[$ , denn setzen wir  $\varepsilon := \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ , so gilt  $\varepsilon > 0$  und  $U_\varepsilon(x_0) \subseteq ]a, b[$ .
- 2) Betrachten wir dagegen das abgeschlossene Intervall  $[a, b]$ , so sind  $a$  und  $b$  offenbar keine inneren Punkte von  $[a, b]$ , wohl aber jedes  $x_0 \in ]a, b[$  mit  $x_0 \neq a, b$ , also jedes  $x_0 \in ]a, b[$ .

**Satz 6.26 (Notwendiges Kriterium für lokale Extremstellen)** Sei  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$  ein innerer Punkt von  $D$ , sowie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ . Falls  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum hat, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .

**Beweis:** O.B.d.A. sei in  $x_0$  ein lokales Maximum. (Andernfalls betrachte  $-f$ .) Da  $x_0$  außerdem ein innerer Punkt von  $D$  ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass einerseits  $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$  und andererseits  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in U_\varepsilon(x_0)$  gilt. Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, erhalten wir einerseits

$$f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

da  $f(x) - f(x_0) \leq 0$  und  $x - x_0 < 0$  für alle  $x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0[$  gilt, und andererseits analog

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Beides ist nur möglich, wenn  $f'(x_0) = 0$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 6.27** 1) Die Voraussetzung, dass  $x_0$  ein innerer Punkt von  $D$  ist, ist wesentlich in Satz 6.26. Betrachten Sie z.B. die Funktion  $f = Id_{\mathbb{R}}|_{[0,1]}$ , d.h.

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x.$$

Dann hat  $f$  ein lokales Minimum in  $x_0 = 0$  und ein lokales Maximum in  $x_1 = 1$  (beides sind sogar globale Extrema), es gilt aber  $f'(0) = 1$  und  $f'(1) = 1$ .

- 2) Das notwendige Kriterium für die Existenz von Extremstellen ist *nicht* hinreichend. Z.B. hat die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  die Ableitung  $f' : x \mapsto 3x^2$  und es gilt  $f'(0) = 0$ , die Funktion  $f$  hat aber kein lokales Extremum in dem inneren Punkt 0 von  $\mathbb{R}$ , wie Sie leicht nachprüfen (vgl. auch Beispiel 6.58).

Im Folgenden wenden wir uns wieder Funktionen auf kompakten Intervallen zu wie schon im Abschnitt 4.5. Dabei wollen wir natürlich voraussetzen, dass diese Intervalle nichtleer sind und nicht nur aus einem Punkt bestehen. Wir treffen daher an dieser Stelle die *Generalvereinbarung*, dass die Schreibweise  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  im Folgenden automatisch die Voraussetzung  $a < b$  beinhaltet.

**Satz 6.28 (von Rolle)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie in  $]a, b[$  differenzierbar (d.h. differenzierbar in allen  $x \in ]a, b[$ ). Falls  $f(a) = f(b)$ , so gibt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

**Beweis:** Wir unterscheiden zwei Fälle:

*Fall 1:*  $f$  ist konstant. Dann gilt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .

*Fall 2:*  $f$  ist nicht konstant. Dann gibt es ein  $x \in ]a, b[$  mit  $f(x) \neq f(a) = f(b)$ . O.B.d.A. sei  $f(x) > f(a)$ . Da  $f$  stetig auf  $[a, b]$  ist, nimmt es nach Satz 4.31 sein Maximum in einer Stelle  $\xi \in [a, b]$  an und wegen  $f(\xi) \geq f(x) > f(a) = f(b)$  folgt  $\xi \in ]a, b[$ , d.h.  $\xi$  ist ein innerer Punkt von  $[a, b]$ . Daher erhalten wir  $f'(\xi) = 0$  aus Satz 6.26.  $\square$

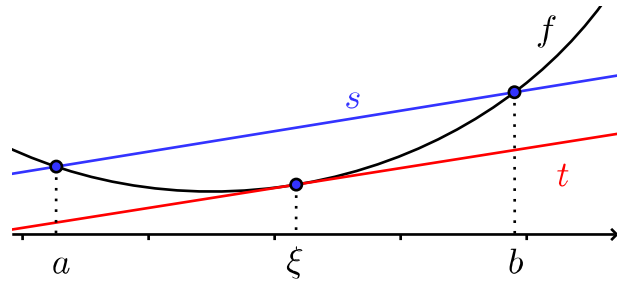


Betrachten wir eine differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so entspricht der Differenzenquotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

gerade der Steigung der Sekante von  $f$  durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$ .

Die nebenstehende Skizze legt die Vermutung nahe, dass es in  $]a, b[$  eine Stelle  $\xi$  gibt, an der die Tangente an  $f$  parallel zur Sekante  $s$  verläuft, d.h. die Steigung dieser Tangente entspricht genau der Steigung der Sekante  $s$ . Da die Steigung der Tangente durch  $f'(\xi)$  gegeben ist, ist dies gerade die geometrische Interpretation des folgenden Satzes.



**Satz 6.29 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gibt es eine Stelle  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Beweis:** (Die obige Skizze liefert uns nicht nur eine anschauliche Interpretation des Mittelwertsatzes, sondern auch eine Idee für seinen Beweis, denn die gesuchte Stelle scheint genau dort zu sein, wo der Abstand von Sekante und Funktionsgraph maximal wird. Die Sekante ist durch  $x \mapsto f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$  gegeben. Im Folgenden kommt es dann aber nicht auf die Konstante  $f(a)$  an, da wir ableiten werden und die Konstante dabei verschwinden wird.) Betrachte die Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

für alle  $x \in [a, b]$ . Dann ist  $g$  offenbar stetig, sowie differenzierbar in  $]a, b[$ . Außerdem gilt

$$g(a) = f(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = g(b).$$

Daher gibt es nach dem Satz von Rolle ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

woraus wir die Behauptung erhalten.  $\square$

Auf den ersten Blick wirkt der Mittelwertsatz vielleicht etwas enttäuschend, da nur die Existenz einer Stelle  $\xi$  mit einer gewissen Eigenschaft postuliert wird, der Satz aber keinen Hinweis darauf enthält, wie man diese Stelle denn finden kann. Tatsächlich gehört der Mittelwertsatz aber zu den wichtigsten Sätzen der Differentialrechnung und bringt eine ganze Reihe von bedeutenden Konsequenzen mit sich. So liefert er uns eine einfache Möglichkeit für die Abschätzung von Funktionswerten, wenn Schranken für die Ableitung der betrachteten Funktion bekannt sind.

**Korollar 6.30 (Schranksatz)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie in  $]a, b[$  differenzierbar. Ferner seien  $s, S \in \mathbb{R}$ , so dass

$$s \leq f'(x) \leq S$$

für alle  $x \in ]a, b[$  erfüllt ist. Dann gilt für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$ , dass

$$s(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq S(x_2 - x_1).$$

**Beweis:** Seien  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$ . Wir wenden den Mittelwertsatz auf die Funktion  $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  an und erhalten die Existenz einer Stelle  $\xi \in ]x_1, x_2[$  mit

$$s \leq f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq S.$$

Multiplikation mit  $(x_2 - x_1)$  liefert die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 6.31** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Korollar 6.30 erhalten wir die folgende Variante des Schranksatzes: Für alle  $x, y \in [a, b]$  gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi \in I(x, y)} |f'(\xi)| \cdot |x - y|, \quad (6.6)$$

wobei  $I(x, y) := ]x, y[ \cup ]y, x[$ . (Mindestens eins dieser beiden Intervalle ist jeweils leer, daher ist dies eine abkürzende Schreibweise für “ $I(x, y) = ]x, y[$  falls  $x \leq y$  und  $I(x, y) = ]y, x[$  falls  $x > y$ ”. Außerdem verwenden wir hier die Konvention  $\sup \emptyset = 0$ , damit auch der Fall  $x = y$  in der Aussage enthalten ist.)

Beachten Sie, dass die Formel (6.6) auch gültig bleibt, wenn die Ableitung von  $f$  entgegen der Voraussetzung des Schranksatz auf dem Intervall  $I(x, y)$  unbeschränkt ist. Allerdings ist dann das Supremum in (6.6) gleich  $\infty$ , d.h. die Aussage ist trivial und auch nicht besonders informativ.

**Beispiel 6.32** Für die Funktion  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir so

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq \sup_{\xi \in I(x, y)} |\cos(\xi)| \cdot |x - y| \leq |x - y|.$$

Für den Spezialfall  $y = 0$  erhalten wir damit die bekannte Abschätzung  $|\sin(x)| \leq |x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  (vgl. dazu auch Korollar 5.25).

**Korollar 6.33 (Konstanzkriterium)** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so dass  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in I$  gilt. Dann ist  $f$  konstant.

**Beweis:** Seien  $a, b \in I$  beliebig mit  $a < b$ . Dann ist der Schranksatz auf  $f|_{[a, b]}$  anwendbar und wir erhalten mit  $s = S = 0$ , dass

$$0 \leq s \cdot (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq S \cdot (b - a) = 0.$$

Da  $a$  und  $b$  beliebig waren, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 6.34** Die Voraussetzung in Korollar 6.33, dass der Definitionsbereich von  $f$  ein Intervall ist, lässt sich im Allgemeinen nicht abschwächen. Betrachten wir nämlich die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

so ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Dass die Ableitung einer konstanten Funktion überall gleich Null ist, war uns schon bekannt. Das Konstanzkriterium liefert uns nun auch die Umkehrung dieser Aussage, wenn der Definitionsbereich ein Intervall ist. Dies liefert uns eine Möglichkeit, Funktionen auf Konstanz zu testen. Um dies zu illustrieren, betrachten wir eine Anwendung auf sogenannte *Differentialgleichungen*, mit denen wir uns am Ende der *Analysis II* noch ausführlicher beschäftigen werden. Wie wir in Abschnitt 6.1 festgestellt haben, gilt für die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dass  $\exp' = \exp$ . Wir betrachten daher die Exponentialfunktion als eine *Lösung* der Differentialgleichung

$$y' = y.$$

Hierbei ist  $y$  als eine Variable für eine Funktion und nicht für eine reelle Zahl zu verstehen. Eine *Lösung* der Differentialgleichung ist daher per Definition eine differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist, so dass

$$y'(x) = y(x)$$

für alle  $x \in I$  gilt. Die Differentialgleichung  $y' = y$  ist ein Spezialfall der allgemeineren *Wachstumsgleichung*  $y' = \lambda y$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  (vgl. die Einführung in Abschnitt 3.3). Jede der Funktionen  $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto ce^{\lambda x}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , ist ebenfalls eine Lösung, denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$f'_c(x) = \lambda ce^{\lambda x} = \lambda f_c(x)$$

und daher  $f'_c = \lambda f_c$ . Das folgende Korollar zeigt, dass jede Lösung der Differentialgleichung  $y' = \lambda y$  diese Form haben muss.

**Korollar 6.35** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und sei die Funktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = \lambda y$ . Setze  $y_0 := y(0)$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(\lambda x) = y_0 \cdot e^{\lambda x}.$$

**Beweis:** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y(x) \exp(-\lambda x)$  ist konstant, denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$f'(x) = y'(x) \exp(-\lambda x) - \lambda y(x) \exp(-\lambda x) = (y'(x) - \lambda y(x)) \exp(-\lambda x) = 0.$$

Durch Einsetzen von  $x_0 = 0$  erhalten wir für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$y(x) \exp(-\lambda x) = f(x) = f(0) = y(0) = y_0.$$

Durch Multiplikation mit  $\exp(\lambda x)$  auf beiden Seiten folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 6.36** Die Lösung der Differentialgleichung  $y' = \lambda y$  ist also durch Festlegen des Funktionswerts an der Stelle  $x_0 = 0$  bereits eindeutig bestimmt. (Dabei kann auch ein Funktionswert an einer beliebigen anderen Stelle diese Rolle übernehmen. Wir kommen darauf in der Analysis II zurück.) Insbesondere ist  $\exp$  die einzige Funktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $y' = y$  und  $y(0) = 1$ .

Eine weitere wichtige Anwendung des Mittelwertsatzes ist eine Möglichkeit, die Monotonie einer Funktion zu testen.

**Korollar 6.37 (Monotoniekriterium für Funktionen)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gilt:

- 1)  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in ]a, b[ \iff f$  ist monoton wachsend
- 2)  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in ]a, b[ \implies f$  ist streng monoton wachsend
- 3)  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in ]a, b[ \iff f$  ist monoton fallend
- 4)  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in ]a, b[ \implies f$  ist streng monoton fallend

**Beweis:** Wir zeigen nur 1), die Aussagen 2)–4) zeigt man ganz analog.

“ $\implies$ ”: Seien  $x_1, x_2 \in [a, b]$  beliebig mit  $x_1 < x_2$ . Nach dem Mittelwertsatz gibt es eine Stelle  $\xi \in ]x_1, x_2[$  mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Da nach Voraussetzung  $f'(\xi) \geq 0$  gilt, folgt  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$  und daher  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Da  $x_1, x_2$  beliebig waren, folgt daraus, dass  $f$  monoton wachsend ist.

“ $\impliedby$ ”: Sei  $x \in ]a, b[$  beliebig. Da  $f$  monoton wachsend ist, gilt

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \geq 0$$

für alle  $\tilde{x} \in ]a, b[$ . Durch Grenzübergang erhalten wir hieraus

$$f'(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \geq 0. \quad \square$$

**Bemerkung 6.38** Korollar 6.37 wurde für abgeschlossene Intervalle formuliert. Tatsächlich möchte man die Aussage auch gerne für Funktionen verwenden, die auf einem unbeschränkten Intervall definiert sind. Dies ist aber kein Problem, denn ist z.B.  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar in  $]a, \infty[$  mit  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in ]a, \infty[$ , so ist  $f$  auf *jedem* Intervall  $[a, b] \subseteq [a, \infty[$  monoton wachsend und daher auch auf dem gesamten Intervall  $[a, \infty[$ . Analog lassen sich die anderen Implikationen verallgemeinern und dies funktioniert natürlich auch für Funktionen, die auf einem Intervall der Form  $] - \infty, b]$  oder auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind.

**Beispiel 6.39** 1) Die  $k$ -te Wurzelfunktion  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt[k]{x}$  ist streng monoton wachsend (vgl. Bemerkung 2.25 und Beispiel 4.42), denn für alle  $x \in ]0, \infty[$  gilt

$$f'(x) = \frac{1}{k} \cdot x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{1}{k} \cdot x^{\frac{1-k}{k}} = \frac{1}{k \sqrt[k]{x^{k-1}}} > 0.$$

An dieser Stelle zählt sich aus, dass Korollar 6.37 in der Voraussetzung auf die Differenzierbarkeit in den Intervallrändern verzichtet, da die  $k$ -te Wurzelfunktion nicht in  $x_0 = 0$  differenzierbar ist. Trotzdem erhalten wir mit dem Monotoniekriterium die strenge Monotonie auf dem gesamten Definitionsbereich.

- 2) Betrachten wir die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  so gilt  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und Korollar 6.37 liefert uns daher nur, dass  $f$  monoton wachsend ist. Tatsächlich ist  $f$  sogar streng monoton wachsend, denn da  $x_0 = 0$  die einzige Nullstelle von  $f'$  ist, folgt mit Korollar 6.37 (und Bemerkung 6.38), dass  $f$  auf den Intervallen  $[0, \infty[$  und  $] - \infty, 0]$  streng monoton wachsend ist. Betrachten wir die Funktionswerte, so erhalten wir, dass

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 0, \\ = 0 & \text{für } x = 0, \\ < 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

woraus die strenge Monotonie auf ganz  $\mathbb{R}$  folgt. Insbesondere sehen wir an diesem Beispiel, dass die umgekehrte Implikation in Teil 2) von Korollar 6.37 i.A. nicht gilt.

- 3) Es gilt  $\sin'(x) = \cos(x) > 0$  für alle  $x \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . (Dies folgt sofort aus Satz 5.27 und  $\cos(x) = \cos(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .) Folglich ist die Funktion  $\sin : ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ] - 1, 1[$  streng monoton wachsend. Wegen  $\sin(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = ] - 1, 1[$  ist die so eingeschränkte Sinusfunktion dann nach Satz 4.41 bijektiv, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : ] - 1, 1[ \rightarrow ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

heißt *Arkussinus*. Nach Satz 6.19 ist  $\arcsin$  differenzierbar im offenen Intervall  $] - 1, 1[$  und für alle  $y \in ] - 1, 1[$  gilt mit der Abkürzung  $x := \arcsin(y)$  (d.h.  $y = \sin x$ ), dass

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Hierbei haben wir für die Gleichheit  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  ausgenutzt, dass  $\cos x > 0$  für alle  $x \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  gilt.

Analog zeigt man die Existenz der Umkehrfunktionen  $\arccos : ] - 1, 1[ \rightarrow [0, \pi]$  und  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  von Cosinus bzw. Tangens, die als *Arkuscossinus* bzw. *Arkustangens* bezeichnet werden (Übung). Für diese gilt weiter, dass

$$\begin{aligned} \arccos'(y) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} && \text{für alle } y \in ] - 1, 1[, \\ \arctan'(y) &= \frac{1}{1 + y^2} && \text{für alle } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz lässt sich noch verallgemeinern und liefert dann als Anwendung ein nettes Hilfsmittel zur Berechnung von Grenzwerten von Quotienten von Funktionen wie z.B.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Offenbar existieren die Grenzwerte von Zähler und Nenner, aber leider sind beide Grenzwerte gleich Null, so dass sich unsere Grenzwertsätze für Quotienten von Folgen nicht anwenden lassen.

**Lemma 6.40 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)** *Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie in  $]a, b[$  differenzierbar. Außerdem sei  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ . Dann gilt  $g(a) \neq g(b)$  und es gibt eine Stelle  $\xi \in ]a, b[$ , so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Beweis:** Falls  $g(b) = g(a)$ , so gäbe es nach dem Satz von Rolle (Satz 6.28) ein  $x_0 \in ]a, b[$  mit  $g'(x_0) = 0$  was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also gilt  $g(b) \neq g(a)$ . Betrachte die Hilfsfunktion  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Dann gilt  $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$  und aus dem Satz von Rolle folgt die Existenz einer Stelle  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.  $\square$

Für den Spezialfall, dass  $g$  in Lemma 6.40 die Identität ist, erhalten wir wieder den Mittelwertsatz. Dies erklärt den Namen *verallgemeinerter Mittelwertsatz*.

**Satz 6.41 (Regel von Bernoulli/de L'Hospital)** *Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$  und seien  $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Weiter gelte*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

*und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I \setminus \{x_0\}$ . Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: a,$$

*so existiert auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  und es gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$$

**Beweis:** Zunächst bemerken wir, dass sich durch die Definition  $f(x_0) := 0$  und  $g(x_0) := 0$  beide Funktionen  $f, g$  stetig auf ganz  $I$  fortsetzen lassen. Wegen  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I \setminus \{x_0\}$  gilt auch  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in I \setminus \{x_0\}$ , denn sonst gäbe es nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle von  $g'$  in  $I \setminus \{x_0\}$ . Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (Lemma 6.40) existiert eine Stelle  $\xi_x \in I \setminus \{x_0\}$  (zwischen  $x$  und  $x_0$ ), so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Die Stelle  $\xi_x$  hängt zwar von  $x$  in einer uns unbekannten Weise ab, da  $\xi_x$  aber stets zwischen  $x$  und  $x_0$  liegt, gilt  $\xi_x \rightarrow x_0$  für  $x \rightarrow x_0$ . Damit erhalten wir wie gewünscht

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad \square$$

In der Literatur wird Satz 6.41 meist nur als *Regel von (de) L'Hospital* bezeichnet, da sie zuerst von Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital in einem Lehrbuch über Differentialrechnung veröffentlicht wurde. Entwickelt wurde die Regel aber von Johann Bernoulli.

**Beispiel 6.42** 1) Für unser eingangs betrachtetes Beispiel erhalten wir mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1 - \cos x$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin x$ , dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

und damit folgt auch die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0.$$

2) Die Voraussetzung, dass sowohl Zähler, als auch Nenner für  $x \rightarrow x_0$  gegen Null gehen, ist wesentlich. Z.B. erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x^4} = 0, \quad \text{aber} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x^3} = \infty.$$

Die Regel von Bernoulli/de L'Hospital ist also in diesem Fall nicht anwendbar.

**Bemerkung 6.43** 1) Der Satz lässt sich auf andere Fälle verallgemeinern. So bleibt der Satz auch gültig, wenn man  $x_0 = \pm\infty$  erlaubt und auch für den Fall  $a = \pm\infty$ , d.h. wenn der betrachtete Grenzwert uneigentlich ist. Weiter lässt sich die Voraussetzung  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  durch die Voraussetzung  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  ersetzen.

2) Falls der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  nicht existiert, liefert Satz 6.41 keine Aussage. Z.B. gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x + 2x}{\sin x + 2x} = 1,$$

obwohl der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin x + 2}{\cos x + 2}$  nicht existiert. (Übung.)

## 6.4 Höhere Ableitungen und Konvexität

Falls eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist, können wir natürlich auch ihre Ableitung  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf Differenzierbarkeit untersuchen.

**Definition 6.44** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Wir definieren induktiv:

- 1)  $f^{(0)} := f$  und  $f^{(1)} := f'$ .
- 2) Existiert  $f^{(k-1)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , und ist differenzierbar in  $x_0 \in D$ , so heißt  $f$   $k$ -mal differenzierbar in  $x_0$  und  $f^{(k)}(x_0) := (f^{(k-1)})'(x_0)$  heißt  $k$ -te Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .
- 3) Existiert  $f^{(k-1)}$  und ist in allen  $x_0 \in D$  differenzierbar, so heißt  $f$   $k$ -mal differenzierbar und  $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$  heißt  $k$ -te Ableitung von  $f$ .
- 4) Existiert  $f^{(k)}$  und ist stetig, so heißt  $f$   $k$ -mal stetig differenzierbar.

Im Fall  $k = 2$  oder  $k = 3$  benutzen wir auch die einfachere Schreibweise  $f''(x_0) := f^{(2)}(x_0)$  und  $f'''(x_0) := f^{(3)}(x_0)$  bzw.  $f'' := f^{(2)}$  und  $f''' := f^{(3)}$ .

**Bemerkung 6.45** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

- 1) Beachten Sie, dass man für die zweimalige Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0 \in D$  bereits voraussetzen muss, dass die erste Ableitung  $f$  nicht nur in  $x_0$ , sondern auf ganz  $D$  (oder zumindest in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ ) existiert.
- 2) Ist  $f$  differenzierbar, so ist nicht selbstverständlich, dass dann auch  $f'$  differenzierbar, geschweige denn stetig ist. Z.B. ist die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x \cdot |x|$  differenzierbar und ihre Ableitung ist die Funktion  $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2|x|$ . (Übung.) Diese ist nicht differenzierbar in  $x_0 = 0$ .

Andererseits ist auch die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  (also speziell in  $x_0 = 0$ ) differenzierbar und es gilt

$$h' : x \mapsto h'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die Ableitung  $h'$  ist nicht stetig in  $x_0 = 0$ . (Übung.)

- 3) Die folgenden Mengenschreibweisen sind geläufig:

$$\begin{aligned} C(D) &:= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\} \\ C^k(D) &:= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\} \\ C^\infty(D) &:= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\} \end{aligned}$$

Bei  $C^\infty(D)$  kann man auf die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit verzichten, da diese automatisch aus der Differenzierbarkeit jeder Ableitung folgt.



Während man die erste Ableitung einer Funktion geometrisch so interpretieren kann, dass sie das “Steigungsverhalten” einer Funktion beschreibt, kann man die zweite Ableitung als Beschreibung der “Krümmungseigenschaften” der Funktion interpretieren. Wir werden an dieser Stelle nicht detailliert darauf eingehen, sondern nur den folgenden, damit zusammenhängenden Begriff diskutieren.

**Definition 6.46** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- 1)  $f$  heißt konvex, falls für alle  $x_1, x_2 \in I$  und alle  $\lambda \in [0, 1]$  gilt, dass

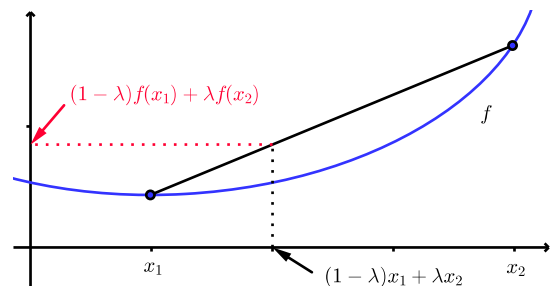
$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda) \cdot f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

- 2)  $f$  heißt konkav, falls  $-f$  konvex ist.

Die Bezeichnung “konvex” erklärt sich durch die nebenstehende Grafik. Für  $\lambda \in [0, 1]$  durchlaufen die Punkte

$$((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2))$$

gerade die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_2, f(x_2))$ . Anschaulich ist eine Abbildung konvex, wenn der Graph der Funktion stets unterhalb der Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten auf dem Graphen verläuft. Damit ergibt sich eine “konvexe Form” des Graphen.



**Satz 6.47** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt:

- 1)  $f$  ist genau dann konvex, wenn  $f'$  monoton wachsend ist.  
 2) Ist  $f$  zweimal differenzierbar, so ist  $f$  genau dann konvex, wenn  $f'' \geq 0$ , d.h. wenn  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$  gilt.

**Beweis:** 1) “ $\Rightarrow$ ”: Seien  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$ . Z.z. ist  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ . Sei  $x \in ]x_1, x_2[$ . Dann gibt es ein  $\lambda \in ]0, 1[$  mit  $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ . (Dies folgt sofort aus dem Zwischenwertsatz angewendet auf die stetige Funktion  $t \mapsto (1 - t)x_1 + tx_2$ .) Dann gilt insbesondere

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \quad \text{und} \quad x_2 - x = (1 - \lambda)(x_2 - x_1). \quad (6.7)$$

Daraus erhalten wir unter Ausnutzung der Konvexität von  $f$ , dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad (6.8)$$

denn die erste Ungleichung erhalten wir mittels

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{\lambda(-f(x_1) + f(x_2))}{\lambda(x_2 - x_1)}$$

und die zweite Ungleichung folgt analog. Mithilfe von (6.8) erhalten wir nun wie gewünscht

$$f'(x_1) = \lim_{x \searrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \nearrow x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2).$$

Somit ist  $f'$  monoton wachsend.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $f'$  monoton wachsend und seien  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$  und  $\lambda \in [0, 1]$  beliebig, sowie  $x := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ . Z.z. ist  $f(x) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ . Für  $\lambda \in \{0, 1\}$  ist dies offensichtlich, sei also  $\lambda \in ]0, 1[$ . Aus dem Mittelwertsatz (Satz 6.29) folgt dann die Existenz von  $\xi_1 \in ]x_1, x[$  und  $\xi_2 \in ]x, x_2[$ , so dass

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)},$$

wobei wir (6.7) ausgenutzt haben. Daraus erhalten wir wegen  $\xi_1 < \xi_2$  und der Monotonie von  $f'$ , dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)}$$

Multiplikation der Ungleichung mit der (positiven) Konstanten  $\lambda(1 - \lambda)(x_2 - x_1)$  liefert

$$(1 - \lambda)(f(x) - f(x_1)) \leq \lambda(f(x_2) - f(x))$$

bzw. wie gewünscht  $f(x) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ , woraus die Konvexität von  $f$  folgt.

2) folgt sofort aus 1) und dem Monotoniekriterium für Funktionen Korollar 6.37.  $\square$

**Beispiel 6.48** 1) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex, denn  $\exp''(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da  $\exp'' = \exp$ .

2) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow x^2$  ist wegen  $f''(x) = 2 \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvex.

Konvexität von Funktionen ist eine wichtige Eigenschaft in der *Optimierung*. Hier sucht man typischerweise das globale Minimum einer Funktion. Der folgende Satz zeigt, dass es bei konvexen Funktionen ausreicht, dazu ein lokales Minimum zu finden.

**Satz 6.49** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Hat  $f$  ein lokales Minimum in  $x_0 \in I$ , dann hat  $f$  sogar sein globales Minimum in  $x_0$ .

**Beweis:** Hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum, so existiert per Definition ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in I \cap U_\varepsilon(x_0) \quad (6.9)$$

gilt. Angenommen,  $f(x_0)$  ist nicht das globale Minimum von  $f$ . Dann gibt es ein  $y \in I$  mit  $f(y) < f(x_0)$ . O.B.d.A. sei  $x_0 < y$ . (Den anderen Fall beweist man analog.) Setze  $x_\lambda := (1 - \lambda)x_0 + \lambda y$  für  $\lambda \in ]0, 1[$ . Dann gilt wegen der Konvexität von  $f$  für alle  $\lambda \in ]0, 1[$ , dass

$$f(x_\lambda) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(y) < f(x_0).$$

Damit erhalten wir aber einen Widerspruch zu (6.9), denn für hinreichend kleines  $\lambda \in ]0, 1[$  gilt  $x_\lambda \in I \cap U_\varepsilon(x_0)$ . Also ist  $f(x_0)$  bereits das globale Minimum von  $f$ .  $\square$

## 6.5 Die Taylor-Formel

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  hinreichend oft differenzierbar. Im Abschnitt 6.1 haben wir die Tangente

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

als die “beste lineare Approximation” an  $f$  in  $x_0 \in D$  interpretiert, in dem Sinn, dass für den Fehler  $R(x) := f(x) - t(x)$  gilt, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Lineare Funktionen sind Polynomfunktionen vom Grad höchstens 1. Daher lässt sich vermuten, dass wir bessere Approximationen an  $f$  in  $x_0$  durch Polynomfunktionen höheren Grades erreichen können. Wie bestimmen wir aber eine solche Polynomfunktion? Betrachten wir dazu noch einmal unsere lineare Approximation, die Tangente  $t$ , so hat diese die Eigenschaft, dass  $t(x_0) = f(x_0)$  und  $t'(x_0) = f'(x_0)$ . Es liegt also nahe, eine  $f$  gut approximierende Polynomfunktion  $p$  so zu konstruieren, dass  $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  für möglichst viele  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Sei nun  $p$  eine Polynomfunktion vom Grad  $n$ . Wir schreiben dieses in der (wie sich gleich herausstellen wird geschickt gewählten) Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . In dieser Darstellung lassen sich die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  in einfacher Weise durch die Ableitungen von  $p$  in  $x_0$  ausdrücken, denn durch Einsetzen von  $x_0$  erhalten wir  $p(x_0) = a_0$ , sowie

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{k=1}^n k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \implies \quad p'(x_0) = a_1, \\ p''(x) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2} \quad \implies \quad p''(x_0) = 2a_2 \end{aligned}$$

und schließlich per Induktion  $p^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ . Damit erhalten wir

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Eine Polynomfunktion vom Grad  $n$  ist also durch den Funktionswert an der Stelle  $x_0$  und den Werten der ersten  $n$  Ableitungen an der Stelle  $x_0$  schon eindeutig bestimmt. Unsere vorangegangenen Überlegungen legen daher für eine  $f$  in  $x_0$  approximierende Polynomfunktion  $p$  die Forderung

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

nahe. Dies motiviert die folgende Definition des nach dem englischen Mathematiker Brook Taylor benannten *Taylorpolynoms*.

**Definition 6.50** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ , sowie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion.

1) Die Polynomfunktion  $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  heißt  $n$ -tes Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ .

2)  $R_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) - T_n(x)$  heißt das zu  $T_n$  gehörige Restglied.

**Bemerkung 6.51** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 6.50 gilt  $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ .

**Beispiel 6.52** Wir berechnen das Taylorpolynom der Exponentialfunktion  $\exp$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (x - 0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Dies ist gerade die  $n$ -te Partialsumme der Exponentialreihe. Wir wissen bereits aus Kapitel 3, dass

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Aus diesem Grund bezeichnet man die Reihe in der Reihendarstellung der Exponentialfunktion auch als *Taylorreihe*.

Analog erhalten wir, dass das  $n$ -te Taylorpolynom der Sinus- oder Cosinusfunktion im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  genau mit der  $n$ -ten Partialsumme der in Kapitel 5 ermittelten Sinus- bzw. Cosinusreihe übereinstimmt.

Auf Taylorreihen werden wir in Kapitel 8 noch detaillierter eingehen. Für den nächsten Satz erinnern wir an die in Abschnitt 6.3 eingeführte Bezeichnung  $I(x, y) := ]x, y[ \cup ]y, x[$ .

**Satz 6.53** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ , sowie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $x_0$ , wobei  $n \geq 1$ .

1) (**Taylor-Formel**) Für alle  $x \in I$  gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

2) (**Lagrangesche Form des Restglieds**) Ist  $f$  sogar  $(n+1)$ -mal differenzierbar (auf ganz  $I$ ), so gibt es zu jedem  $x \in I \setminus \{x_0\}$  ein  $\xi \in I(x, x_0)$  mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

**Beweis:** 1) Wir bezeichnen das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$  mit  $T_n$ . Durch  $(n-1)$ -malige Anwendung der Regel von Bernoulli/de L'Hospital erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}\end{aligned}$$

unter der Annahme, dass der letzte Grenzwert in dieser Gleichungskette existiert. (Warum haben wir an dieser Stelle aufgehört und nicht noch ein weiteres Mal die Regel von L'Hospital verwendet?) Die Existenz dieses Grenzwerts weisen wir jetzt nach. Wegen  $f^{(n-1)}(x_0) = T_n^{(n-1)}(x_0)$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - \frac{T_n^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \right) \\ &= \frac{1}{n!} (f^{(n)}(x_0) - T_n^{(n)}(x_0)) = 0,\end{aligned}$$

da  $T^{(n-1)}$  (als Polynomfunktion) und  $f^{(n-1)}$  differenzierbar sind. Also folgt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ .

2) Sei nun  $f$  sogar  $(n+1)$ -mal differenzierbar und sei  $x \in I \setminus \{x_0\}$  beliebig, aber für den Moment fest gewählt. Wir betrachten die Hilfsfunktion  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h(t) = \frac{f(t) - T_n(t)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} - R_n(x) \frac{(t-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

für alle  $t \in I$ . Da  $T_n$  eine Polynomfunktion vom Grad höchstens  $n$  ist, gilt  $T_n^{(n+1)} = 0$ . Daraus folgt

$$h^{(n+1)}(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} - R_n(x).$$

Die Behauptung ist also bewiesen, wenn wir zeigen können, dass  $h^{(n+1)}$  eine Nullstelle in  $I(x, x_0)$  hat. Nun gilt

$$0 = h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) \quad \text{und} \quad h(x) = (f(x) - T_n(x) - R_n(x)) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Folglich gilt nach dem Satz von Rolle (Satz 6.28):

$$\begin{aligned}&\text{Es gibt ein } \xi_1 \in I(x, x_0) \text{ mit } h'(\xi_1) = 0. \\ \implies &\text{Es gibt ein } \xi_2 \in I(\xi_1, x_0) \text{ mit } h''(\xi_2) = 0. \\ &\vdots \\ \implies &\text{Es gibt ein } \xi_{n+1} \in I(\xi_n, x_0) \text{ mit } h^{(n+1)}(\xi_n) = 0.\end{aligned}$$

Wählen wir also  $\xi = \xi_{n+1}$ , so gilt  $\xi \in I(x, x_0)$  und  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ .  $\square$

**Bemerkung 6.54** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Satz 6.53 liefert die Taylorformel für den Spezialfall  $n = 1$  für alle  $x \in I$ , dass  $f(x) = T_1(x) + R_1(x)$ , wobei

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dies entspricht genau der Definition der Differenzierbarkeit und  $T_1$  ist gerade die Tangente von  $f$  an  $x_0$ .

**Beispiel 6.55 (Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus)** Da wir bereits gesehen haben, dass die Taylorpolynome der Exponential-, Sinus- oder Cosinusfunktionen im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  gerade den Partialsummen der entsprechenden Reihendarstellungen der Funktionen entsprechen, versuchen wir nun unser Glück einmal bei der natürlichen Logarithmusfunktion  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Als Entwicklungspunkt eignet sich dabei am besten die Stelle  $x_0 = 1$ , da dort der Funktionswert des Logarithmus, sowie die Werte seiner Ableitungen sehr einfach auszudrücken sind. Andererseits haben Taylorpolynome für den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  die Standarddarstellung von Polynomen - statt  $(x - x_0)^k$  hat man dort den viel einfacheren Term  $x^k$  stehen. Da der Logarithmus an der Stelle  $x_0 = 0$  leider nicht definiert ist, betrachten wir an dessen Stelle einfach die Taylorentwicklung der Funktion  $f : ]-1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1 + x)$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Mit vollständiger Induktion erhalten wir für die Ableitungen von  $f$  die Formel

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}, \quad (6.10)$$

für alle  $x \in ]-1, \infty[$  und alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , denn  $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$  für alle  $x \in ]-1, \infty[$  und Ableiten von (6.10) ergibt  $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}$  für alle  $x \in ]-1, \infty[$ . Für  $x_0 = 0$  erhalten wir dann:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

Da außerdem  $f(0) = \ln 1 = 0$ , hat das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  die Form

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k.$$

Für das Restglied  $R_n$  gibt es nach Satz 6.53 zu jedem  $x \in ]-1, \infty[ \setminus \{0\}$  ein  $\xi_n \in I(x, 0)$ , so dass

$$R_n(x) = \ln(1+x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1}. \quad (6.11)$$

Für den Spezialfall  $x = 1$  vereinfacht sich dies zu

$$R_n(1) = \frac{-1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}.$$

Da  $\xi_n$  zwischen 0 und 1 liegt, ist die Folge  $\left(\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}\right)$  beschränkt und daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(1) = 0$ . Dadurch erhalten wir endlich die Möglichkeit, die Summe der alternierenden harmonischen Reihe (siehe Beispiel 3.12) zu bestimmen. Es gilt

$$\ln 2 = f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

**Bemerkung 6.56** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar und  $T_n$  das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0 \in I$ , so ist nicht garantiert, dass der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$  für alle  $x \in I$  existiert: In Beispiel 6.55 ist z.B. nicht klar, ob  $(R_n(x))$  mit  $R_n$  wie in (6.11) für  $x > 1$  konvergiert und wir werden in Kapitel 8 sehen, dass dies hier tatsächlich nicht der Fall ist. Dies steht nicht im Widerspruch zu Satz 6.53, denn dort wird nur eine Aussage über den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x)$  für festes  $n \in \mathbb{N}$  getroffen.

Aber selbst wenn die Folge  $(T_n(x))$  für ein  $x \in I$  konvergent ist, ist nicht gewährleistet, dass der Grenzwert mit dem Funktionswert  $f(x)$  übereinstimmt. Als Beispiel dazu betrachten wir die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  beliebig oft differenzierbar und es gilt  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . (Übung.) Das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  ist also das Nullpolynom und daher erhalten wir für alle  $x \neq 0$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = 0 \neq \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = f(x).$$

Zum Abschluss dieses Kapitels erhalten wir noch eine schöne Anwendung der Taylor-Formel, die die Ihnen aus der Schule bekannte Regel für die Untersuchung auf lokale Extrema mit Hilfe der zweiten Ableitung verallgemeinert.

### Satz 6.57 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extremstellen)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ , sei  $x_0 \in D$  ein innerer Punkt von  $D$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $x_0$ . Weiter gelte

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- 1) Ist  $n$  ungerade, so hat  $f$  in  $x_0$  kein lokales Extremum.
- 2) Ist  $n$  gerade, so hat  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Extremum und zwar ein lokales Minimum, falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$  bzw. ein lokales Maximum, falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .

**Beweis:** Da  $x_0$  ein innerer Punkt von  $D$  ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ . Da  $U_\varepsilon(x_0)$  insbesondere ein Intervall ist, gilt dort wegen  $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  nach der Taylor-Formel, dass

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Letztere Bedingung besagt insbesondere, dass man die auf  $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$  definierte Funktion  $g : x \mapsto \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$  durch  $g(x_0) := 0$  stetig auf  $U_\varepsilon(x_0)$  fortsetzen kann. Daher gibt es nach dem  $\varepsilon/\delta$ -Kriterium ein  $\delta > 0$  (mit  $\delta \leq \varepsilon$ ), so dass

$$\left| \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right| < \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|$$

für alle  $x \in U_\delta(x_0)$  gilt. Dies bedeutet aber, dass das Vorzeichen von

$$f(x) - f(x_0) = \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right) \cdot (x - x_0)^n$$

für alle  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  gleich dem Vorzeichen des Terms  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$  ist. Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle:

*Fall 1:*  $n$  ist ungerade. In diesem Fall wechselt  $(x - x_0)^n$  das Vorzeichen in  $x_0$  und daher auch  $f(x) - f(x_0)$ . Folglich hat  $f$  kein lokales Extremum in  $x_0$ .

*Fall 2:*  $n$  ist gerade: In diesem Fall gilt für alle  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ , dass

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0 & \text{falls } f^{(n)}(x_0) > 0, \\ < 0 & \text{falls } f^{(n)}(x_0) < 0. \end{cases}$$

Folglich hat  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Minimum, falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$  bzw. ein striktes lokales Maximum falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .  $\square$

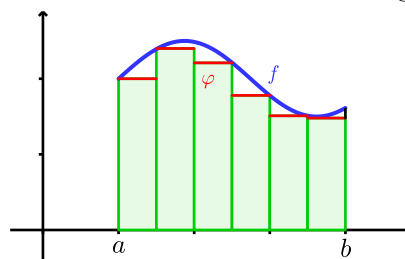
**Beispiel 6.58** Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$ . Dann gilt  $f^{(k)}(0) = 0$  für  $k = 1, \dots, n-1$  und  $f^{(n)}(0) = n! > 0$ . Folglich hat  $f$  ein striktes lokales Minimum in  $x_0 = 0$ , falls  $n$  gerade ist, aber  $f$  hat kein lokales Extremum in  $x_0 = 0$ , falls  $n$  ungerade ist.



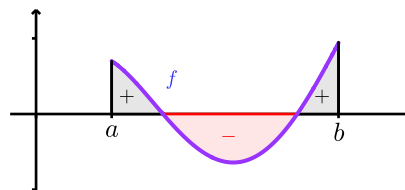
# Kapitel 7

## Integration

Neben der Differentiation ist die *Integration* das zweite wichtige Hauptthema der Analysis. Der Integralbegriff ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnungen hervorgegangen und lässt sich für den Fall von Funktionen einer Veränderlichen wie folgt entwickeln. Für eine gegebene Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$  wollen wir den Inhalt der Fläche bestimmen, die durch die  $x$ -Achse und den Graphen der Funktion (und die Geraden  $y = a$  und  $y = b$ ) eingeschlossen wird. Die entscheidende Idee ist nun, die Funktion  $f$  durch eine *Treppenfunktion*  $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$  zu approximieren, d.h. durch eine stückweise konstante Funktion. Für solche Funktionen ist die Bestimmung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen der Funktion  $\varphi$  und der  $x$ -Achse sehr einfach, da wir diese Fläche in Rechtecke zerlegen können, deren Inhalt sich einfach als Produkt von Länge und Breite ergibt. Den Flächeninhalt der gesuchten Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f$  erhalten wir dann durch einen Grenzwertprozess, indem wir immer bessere Approximationen durch Treppenfunktionen betrachten.



Bei der Betrachtung des Integralbegriffs erlauben wir statt nichtnegativen Funktionen auch beliebige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist es aber zweckmäßig, das Integral nicht als Flächeninhalt, sondern als *Flächenbilanz* zu interpretieren, d.h. Bereiche “oberhalb” der  $x$ -Achse werden positiv und Bereiche “unterhalb” der  $x$ -Achse negativ gewertet. Auf diese Art und Weise wird ein Integralbegriff mit nicht nur für die weitere Entwicklung der Analysis vorteilhaften Eigenschaften entwickelt, denn auch in Anwendungswissenschaften ist in den Fällen, in denen das Integral zum Einsatz kommt, eine “Bilanz” üblicherweise genau das, was man ausrechnen möchte. Unser in der Motivation genutztes Problem der Flächenberechnung lässt sich so aber auch lösen, wir müssten dazu nur das Integral der Funktion  $|f|$  bestimmen, damit auch die unterhalb der  $x$ -Achse liegenden Flächenanteile positiv gewertet werden.



## 7.1 Treppenfunktionen

Bevor wir uns der Definition des Integrals zuwenden, untersuchen wir in diesem Abschnitt das dafür entscheidende Hilfsmittel, die Treppenfunktionen.

**Definition 7.1** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

- 1) Eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  ist ein Tupel  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  von Zahlen  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so dass

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

gilt. Schreibweise:  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  (bzw. kurz  $Z$ ).

- 2) Sei  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion bzgl.  $Z$ , falls es  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\varphi(x) = c_i \quad \text{für alle } x \in ]x_{i-1}, x_i[, i = 1, \dots, n,$$

d.h. wenn  $\varphi|_{]x_{i-1}, x_i[}$  für jedes  $i = 1, \dots, n$  konstant ist.

- 3) Eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion, falls es eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gibt, so dass  $\varphi$  Treppenfunktion bzgl.  $Z$  ist.  $Z$  heißt dann eine zu  $\varphi$  passende Zerlegung von  $[a, b]$ .

- 4) Seien  $Z_1 : a = x_0 < \dots < x_n = b$  und  $Z_2 : a = y_0 < \dots < y_m = b$  zwei Zerlegungen von  $[a, b]$ . Dann heißt die durch  $z_0 := a$  und

$$z_k := \min(\{x_i \mid x_i > z_{k-1}\} \cup \{y_j \mid y_j > z_{k-1}\}) \quad \text{für } k \geq 1, \text{ falls } z_{k-1} \neq b$$

induktiv definierte Zerlegung  $Z : a = z_0 < \dots < z_\ell = b$  die gemeinsame Verfeinerung von  $Z_1$  und  $Z_2$ .

**Beispiel 7.2** 1) Jede konstante Funktion  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Treppenfunktion und zwar bzgl. jeder beliebigen Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$ .

- 2) Gegeben sei die Zerlegung  $Z : 0 < 1 < 2$  des Intervalls  $[0, 2]$ . Dann ist  $\varphi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{für } x \in ]1, 2] \end{cases}$$

eine Treppenfunktion bzgl.  $Z$ . Eine weitere Treppenfunktion bzgl.  $Z$  ist  $\psi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1[, \\ 99 & \text{für } x = 1, \\ 1 & \text{für } x \in ]1, 2]. \end{cases}$$

Es ist also nur wichtig, dass Treppenfunktionen auf den offenen Intervallen  $]x_i, x_{i+1}[$  einer Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  konstant sind. An den Stellen  $x_i$  darf die Funktion beliebige Werte annehmen.

**Bemerkung 7.3** 1) Ist  $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion bzgl. einer Zerlegung  $Z_1$  von  $[a, b]$  und ist  $\varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion bzgl. einer Zerlegung  $Z_2$  von  $[a, b]$ , so sind  $\varphi_1, \varphi_2$  beides Treppenfunktionen bzgl. der gemeinsamen Verfeinerung  $Z$  von  $Z_1$  und  $Z_2$ .

2) Aus 1) folgt, dass Summen von Treppenfunktionen wieder Treppenfunktionen sind. Ist weiter  $\varphi$  eine Treppenfunktion und  $c \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $c \cdot \varphi$  eine Treppenfunktion. Dies bedeutet, dass die Menge der Treppenfunktionen

$$\{\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}$$

ein Unterraum des Vektorraums  $\text{Abb}([a, b], \mathbb{R})$  der Funktionen von  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}$  ist.

**Definition 7.4** Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl. der Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  von  $[a, b]$  eine Treppenfunktion und seien  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , so dass  $\varphi(x) = c_i$  für alle  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt. Dann ist das Integral von  $\varphi$  definiert durch

$$I(\varphi) := I_Z(\varphi) := \sum_{i=1}^n c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Wir haben in der Definition bereits kühn die von  $Z$  unabhängige Notation  $I(\varphi)$  verwendet. Dass dies gerechtfertigt war, zeigt der folgende Satz.

**Satz 7.5** Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sowohl bzgl. der Zerlegung  $Z_1 : a = x_0 < \dots < x_n = b$ , als auch bzgl. der Zerlegung  $Z_2 : a = y_0 < \dots < y_m = b$  von  $[a, b]$  eine Treppenfunktion. Dann gilt

$$I_{Z_1}(\varphi) = I_{Z_2}(\varphi),$$

d.h. das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Zerlegung des Definitionsbereichs.

**Beweis:** Seien  $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ , so dass  $\varphi(x) = c_i$  für  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $\varphi(x) = d_j$  für  $x \in ]y_{j-1}, y_j[$ ,  $j = 1, \dots, m$  gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

*Fall 1:* Jeder Punkt  $x_i$  von  $Z_1$  ist auch ein Punkt von  $Z_2$ . Unter dieser Voraussetzung gibt es  $k_0 < k_1 < \dots < k_n$  mit  $k_0 = 0$  und  $k_n = m$ , so dass  $x_i = y_{k_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Insbesondere gilt für alle  $i = 1, \dots, n$ , dass

$$x_{i-1} = y_{k_{i-1}} < y_{k_{i-1}+1} < \dots < y_{k_i} = x_i \quad \text{und} \quad d_j = c_i \quad \text{für } j = k_{i-1} + 1, \dots, k_i.$$

Damit erhalten wir

$$I_{Z_2}(\varphi) = \sum_{j=1}^m d_j (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = I_{Z_1}(\varphi).$$

*Fall 2:*  $Z_1$  und  $Z_2$  sind beliebig. In diesem Fall betrachten wir die gemeinsame Verfeinerung  $Z$  von  $Z_1$  und  $Z_2$  und erhalten mit Fall 1 sofort, dass  $I_{Z_1}(\varphi) = I_Z(\varphi) = I_{Z_2}(\varphi)$ .  $\square$

**Beispiel 7.6** 1) Für die konstante (Treppen-)Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto c$  gilt offenbar

$$I(\varphi) = c \cdot (b - a).$$

2) Wir betrachten die beiden Treppenfunktionen  $\varphi, \psi$  von Teil 2) aus Beispiel 7.2. Dann gilt

$$I(\varphi) = 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) = 1 = I(\psi),$$

denn für beide Funktionen kommt es nach der Definition des Integrals für Treppenfunktionen nur auf den (konstanten) Funktionswert in den offenen Intervallen  $]0, 1[$  und  $]1, 2[$  an, wo beide Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  übereinstimmen. Die Funktionswerte an den Stellen  $x_i$  haben also keinen Einfluss auf den Wert des Integrals.

Der folgende Satz beinhaltet zwei grundlegende Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen. Für seine Formulierung formalisieren wir an dieser Stelle die schon vorher in Satz 6.47 benutzte Notation.

**Definition 7.7** Sei  $X$  eine Menge, sowie  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  Abbildungen. Dann bedeutet  $f \leq g$ , dass  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in X$ . (Analog definieren wir  $f < g$ ,  $f \geq g$  und  $f > g$ .)

**Satz 7.8** Seien  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Treppenfunktionen und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $I(\varphi_1 + \varphi_2) = I(\varphi_1) + I(\varphi_2)$  und  $I(\lambda\varphi_1) = \lambda I(\varphi_1)$ . (Linearität von  $I$ )
- 2)  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \implies I(\varphi_1) \leq I(\varphi_2)$ . (Monotonie von  $I$ )

**Beweis:** 1) Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  Treppenfunktionen bzgl. derselben Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  sind. (Betrachte sonst eine gemeinsame Verfeinerung von zwei Zerlegungen.) Seien dann  $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\varphi_1(x) = c_i \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = d_i \quad \text{für } x \in ]x_{i-1}, x_i[, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt

$$I(\varphi_1 + \varphi_2) = \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) = I(\varphi_1) + I(\varphi_2).$$

Analog zeigt man  $I(\lambda\varphi_1) = \lambda I(\varphi_1)$  und 2).  $\square$

## 7.2 Das Riemann-Integral

Nach unseren Vorbereitungen im letzten Abschnitt werden wir nun das (Riemann)-Integral einer Funktion über das Integral von Treppenfunktionen definieren, die die Funktion  $f$  “einschließen”, was möglich ist, wenn die Funktion *beschränkt* ist.

**Definition 7.9**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt  $f$  beschränkt, falls  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist.

**Definition 7.10** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

- 1)  $\int_a^b f(x) dx := \inf \{ I(\varphi) \mid f \leq \varphi, \varphi \text{ Treppenfunktion} \}$  heißt Oberintegral von  $f$ .
- 2)  $\int_a^b f(x) dx := \sup \{ I(\psi) \mid \psi \leq f, \psi \text{ Treppenfunktion} \}$  heißt Unterintegral von  $f$ .
- 3)  $f$  heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

In diesem Fall heißt  $\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx$  das (Riemann-)Integral von  $f$ .

**Bemerkung 7.11** Wegen der Monotonie des Integrals von Treppenfunktionen (Teil 2 von Satz 7.8) gilt für alle beschränkten Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Im Folgenden werden wir Funktionen nur als *integrierbar*, statt *Riemann-integrierbar* bezeichnen, denn da wir bisher noch keine andere Art der Integrierbarkeit kennengelernt haben, besteht zur Zeit noch keine Verwechslungsgefahr. Dies wird sich im Laufe der Vorlesung *Analysis III* allerdings ändern.

**Beispiel 7.12** 1) Treppenfunktionen  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind integrierbar denn offenbar gilt:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Insbesondere folgt damit  $\int_a^b \varphi(x) dx = I(\varphi)$ .

Wir haben bereits in Beispiel 7.6 gesehen, dass die Funktionswerte an den Stützstellen  $x_i$  einer zu  $\varphi$  passenden Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  nicht in den Wert des Integrals eingehen. Allgemeiner kann man für zwei Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zeigen (Übung, Sie dürfen dabei Satz 7.13 verwenden):

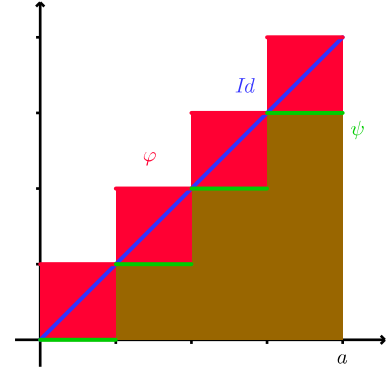
Ist  $f$  integrierbar und ist  $\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}$  endlich, dann ist auch  $g$  integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

- 2) Die Funktion  $Id : [0, b] \rightarrow [0, b]$  mit  $b > 0$  ist integrierbar. Dazu betrachten wir die Zerlegung  $Z_n : 0 = x_0 < \dots < x_n = b$  mit  $x_k = \frac{b}{n}k$  für  $k = 0, \dots, n$ . Weiter betrachten wir die Treppenfunktionen  $\psi_n, \varphi_n : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\psi_n(x) := \frac{b}{n}(k-1) \quad \text{und} \quad \varphi_n(x) := \frac{b}{n}k$$

für  $x \in [x_{k-1}, x_k[$ ,  $k = 1, \dots, n$  und  $\psi_n(b) := \varphi_n(b) := b$ . (In der Graphik sehen Sie die Treppenfunktionen skizziert im Fall  $n = 4$ .) Dann gilt  $\psi_n \leq Id \leq \varphi_n$  und



$$I(\varphi_n) = \sum_{k=1}^n \frac{b}{n}k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Analog erhalten wir  $I(\psi_n) = \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  und daher

$$\frac{b^2}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\psi_n) \leq \int_0^b x \, dx \leq \overline{\int_0^b x \, dx} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi_n) = \frac{b^2}{2}$$

Hieraus folgt die Integrierbarkeit von  $Id : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie

$$\int_0^b x \, dx = \frac{1}{2}b^2.$$

Dies stimmt mit geometrischen Überlegungen überein: Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der  $x$ -Achse ist ein Dreieck, das genau die Hälfte des Flächeninhalts des Quadrats mit Kantenlänge  $b$  haben sollte, welcher durch  $b^2$  gegeben ist.

- 3) Wir betrachten die *Dirichlet-Funktion*  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion mit  $f \leq \varphi$ , sei  $Z : 0 = x_0 < \dots < x_n = 1$  eine zu  $\varphi$  passende Zerlegung von  $[0, 1]$  und seien  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , so dass  $\varphi(x) = c_i$  für alle  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann gibt es zu jedem  $i = 1, \dots, n$  ein  $q_i \in ]x_{i-1}, x_i[ \cap \mathbb{Q}$ , woraus folgt, dass

$$c_i = \varphi(q_i) \geq f(q_i) = 1.$$

Damit erhalten wir  $\varphi(x) \geq 1$  für alle  $x \in [0, 1] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ , was  $I(\varphi) \geq 1$  zur Folge hat. Dann gilt aber

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \inf \{I(\varphi) \mid f \leq \varphi, \varphi \text{ Treppenfunktion}\} = 1,$$

denn mit der konstanten Treppenfunktion  $\varphi_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1$  wird das Infimum durch  $I(\varphi_0) = 1$  angenommen. Analog zeigt man, dass

$$\int_0^1 f(x) dx = 0,$$

womit folgt, dass die Dirichlet-Funktion  $f$  *nicht* integrierbar ist.

Die Definition der Integrierbarkeit mittels Ober- und Unterintegral geht eigentlich gar nicht auf Riemann, sondern auf Darboux zurück. Riemann dagegen benutzte die zu seinen Ehren heute so bezeichneten *Riemannschen Summen*. Dazu betrachtet man Treppenfunktionen  $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl. einer Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  für die gilt, dass

$$\tau(x) = f(\xi_i) \quad \text{für alle } x \in ]x_{i-1}, x_i[,$$

wobei  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  eine beliebig gewählte Stelle ist. Das Integral

$$I(\tau) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (7.1)$$

heißt dann eine *Riemannsche Summe*. Ist  $f$  integrierbar, so kann man zeigen, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für jede Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  gilt:

$$\max \{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\} < \delta \quad \implies \quad \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Hierdurch erklärt sich auch die Notation des Integralzeichens, das einem langgezogenen lateinischen “S” gleicht und ebenso wie das Symbol  $\Sigma$  an das Wort “Summe” erinnern soll. Setzt man in (7.1) noch  $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ , so stellt sich der Übergang von der Riemannschen Summe zum Integral bei immer feiner werdender Zerlegung des Intervalls in der Schreibweise

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \rightsquigarrow \int_a^b f(x) dx$$

dar. Das Symbol  $dx$  wurde dann im Rahmen der Infinitesimalrechnung als Intervall “unendlich kleiner Größe” interpretiert.

Als nächstes betrachten wir eine sich im späteren Verlauf als sehr nützlich erweisende Charakterisierung der Integrierbarkeit.

**Satz 7.13** *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  genau dann integrierbar, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  zwei Treppenfunktionen  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\psi \leq f \leq \varphi$  und*

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx = I(\varphi) - I(\psi) \leq \varepsilon.$$

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $f$  integrierbar und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es nach der Charakterisierung von Supremum und Infimum Treppenfunktionen  $\psi, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi \leq f \leq \varphi$ , sowie

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx \geq I(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \underline{\int_a^b} f(x) \, dx \leq I(\psi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhalten wir wegen der Gleichheit von Ober- und Unterintegral, dass

$$I(\varphi) - I(\psi) \leq \overline{\int_a^b} f(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig und seien  $\psi, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Treppenfunktionen, so dass  $\psi \leq f \leq \varphi$  und  $I(\varphi) - I(\psi) \leq \varepsilon$ . Dann gilt mit Bemerkung 7.11, dass

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x) \, dx - \underline{\int_a^b} f(x) \, dx \leq I(\varphi) - I(\psi) \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt damit die Integrierbarkeit von  $f$ .  $\square$

**Satz 7.14** Seien  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f_1 + f_2$  und  $\lambda f_1$  integrierbar und es gilt:

1) (Linearität des Integrals)

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx + \int_a^b f_2(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b (\lambda f_1)(x) \, dx = \lambda \int_a^b f_1(x) \, dx$$

2) (Monotonie des Integrals)  $f_1 \leq f_2 \implies \int_a^b f_1(x) \, dx \leq \int_a^b f_2(x) \, dx$

**Beweis:** 1) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es Treppenfunktionen  $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi_1 \leq f_1 \leq \varphi_1$  und  $\psi_2 \leq f_2 \leq \varphi_2$ , so dass

$$I(\varphi_i) - I(\psi_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Daraus erhalten wir sofort  $\psi_1 + \psi_2 \leq f_1 + f_2 \leq \varphi_1 + \varphi_2$  und wegen der Linearität von  $I$  (vgl. Satz 7.8) auch

$$I(\varphi_1 + \varphi_2) - I(\psi_1 + \psi_2) = I(\varphi_1) - I(\psi_1) + I(\varphi_2) - I(\psi_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist  $f_1 + f_2$  nach Satz 7.13 integrierbar. Die Integralformel folgt dann unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} (f_1 + f_2)(x) \, dx &\leq \overline{\int_a^b} f_1(x) \, dx + \overline{\int_a^b} f_2(x) \, dx \\ \text{und} \quad \underline{\int_a^b} (f_1 + f_2)(x) \, dx &\geq \underline{\int_a^b} f_1(x) \, dx + \underline{\int_a^b} f_2(x) \, dx. \end{aligned}$$

(Klar?) Analog zeigt man die zweite Bedingung für die Linearität und 2).  $\square$



## 7.3 Integrierbare Funktionen

Mithilfe von Satz 7.13 können wir die Integrierbarkeit einer großen Klasse von Funktionen nachweisen. Insbesondere sind stetige und monotone Funktionen stets integrierbar.

**Satz 7.15** *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar.*

**Beweis:** Nach Satz 4.31 ist  $f$  beschränkt, so dass wir Satz 7.13 anwenden können. Sei daher  $\varepsilon > 0$  beliebig. Nach dem Satz von Heine (Satz 4.38) ist  $f$  gleichmäßig stetig, d.h. zu  $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, \tilde{x} \in [a, b]$  gilt:

$$|x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \tilde{\varepsilon} \quad (7.2)$$

Sei nun  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $\frac{b-a}{n} < \delta$  und betrachte die Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_n = b$  mit  $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n$ , sowie die Treppenfunktionen  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\psi(x) := f(x_i) - \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \varphi(x) := f(x_i) + \tilde{\varepsilon}$$

für  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$  und

$$\psi(x_i) := \varphi(x_i) := f(x_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, n. \quad (7.3)$$

Dann gilt für alle  $i = 1, \dots, n$  und alle  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$  wegen  $|x - x_i| < \delta$  und (7.2), dass  $|f(x) - f(x_i)| < \tilde{\varepsilon}$ . Damit erhalten wir

$$\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

für alle  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$  und zusammen mit (7.3) folgt daraus  $\psi \leq f \leq \varphi$ . Außerdem gilt wegen  $\varphi(x) - \psi(x) = 2\tilde{\varepsilon}$  für alle  $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ , dass

$$I(\varphi) - I(\psi) = I(\varphi - \psi) = 2\tilde{\varepsilon}(b-a) = \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt mit Satz 7.13 die Integrierbarkeit von  $f$ .  $\square$

**Satz 7.16** *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton. Dann ist  $f$  integrierbar.*

**Beweis:** Übung.  $\square$

**Definition 7.17** *Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ .*

- 1)  $\max(f, g) : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ .
- 2)  $f^+ := \max(f, 0)$  und  $f^- := \max(-f, 0)$ .

**Bemerkung 7.18** Offenbar gilt  $f^+, f^- \geq 0$ , sowie  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$ .

**Satz 7.19** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann gilt:

- 1)  $\max(f, g)$  ist integrierbar.
- 2)  $|f|$  ist integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

- 3)  $|f|^p$  ist für alle  $p \in [1, \infty[$  integrierbar.
- 4)  $f \cdot g$  ist integrierbar.

**Beweis:** 1) Übung. (Nutzen Sie Satz 7.13.)

2) Die Integrierbarkeit von  $|f|$  folgt sofort aus  $|f| = f^+ + f^-$  und 1). Die Abschätzung folgt aus der Monotonie des Integrals, sowie aus  $f \leq |f|$  und  $-f \leq |f|$ .

3) Mit  $f$  ist auch  $|f|$  beschränkt, d.h. es gibt  $S > 0$  mit  $|f| \leq S$ . O.B.d.A. sei  $S \leq 1$  (andernfalls betrachten wir  $\frac{1}{S} \cdot |f|$ ), d.h. es gilt  $0 \leq |f| \leq 1$ . Dann gibt es wegen der Integrierbarkeit von  $|f|$  nach Satz 7.13 zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \psi \leq |f| \leq \varphi \leq 1$  (machen Sie sich klar, dass wir in der Tat annehmen können, dass  $0 \leq \psi, \varphi \leq 1$ ), so dass

$$I(\varphi - \psi) = I(\varphi) - I(\psi) \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Betrachte nun die Funktion  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^p$ . Diese ist differenzierbar mit der Ableitung  $h' : x \mapsto p x^{p-1}$ , so dass uns der Schrankensatz (Korollar 6.30) die Abschätzung

$$|h(x) - h(y)| \leq \sup_{\xi \in ]0, 1[} |h'(\xi)| \cdot |x - y| = p \cdot |x - y|$$

für alle  $x, y \in [0, 1]$  liefert. Damit erhalten wir

$$\varphi(x)^p - \psi(x)^p = |h(\varphi(x)) - h(\psi(x))| \leq p \cdot |\varphi(x) - \psi(x)| = p \cdot (\varphi(x) - \psi(x))$$

für alle  $x \in [a, b]$ , da  $0 \leq \psi \leq \varphi \leq 1$ . Hieraus erhalten wir schließlich

$$I(\varphi^p) - I(\psi^p) = I(\varphi^p - \psi^p) \leq p \cdot I(\varphi - \psi) \leq \varepsilon.$$

Da  $\varphi^p$  und  $\psi^p$  Treppenfunktionen sind, für die offenbar  $\psi^p \leq |f|^p \leq \varphi^p$  gilt, erhalten wir nach Satz 7.13 die Integrierbarkeit von  $|f|^p$ , da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist.

4) folgt aus  $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) = \frac{1}{4}(|f+g|^2 - |f-g|^2)$ .  $\square$

**Bemerkung 7.20** Machen Sie sich anhand von Beispielen klar, dass i.A. gilt, dass

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx \neq \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx.$$

## 7.4 Integration und Differentiation

In diesem Abschnitt formulieren und beweisen wir den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, der die beiden Operationen *Differentiation* und *Integration* in wunderschöner Weise in Zusammenhang bringt. Wir benötigen dazu allerdings einige Vorbereitungen.

**Satz 7.21** Sei  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b \in ]a, c[$ . Dann ist  $f$  genau dann integrierbar, wenn die Einschränkungen  $f|_{[a,b]}$  und  $f|_{[b,c]}$  integrierbar sind. In diesem Fall gilt außerdem

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx. \quad (7.4)$$

**Beweis:** Übung.  $\square$

Im Folgenden wird es sich als nützlich erweisen, wenn wir die Formel (7.4) statt nur für den Fall  $a < b < c$  auch für beliebige  $a, b, c \in \mathbb{R}$  benutzen können. (Dies erspart uns lästige Fallunterscheidungen.) Daher erweitern wir die Definition des Integrals wie folgt:

**Definition 7.22** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann setzen wir

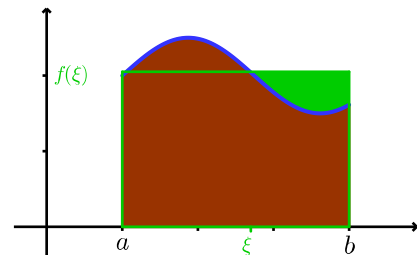
- 1)  $\int_a^a f(x) \, dx := 0,$
- 2)  $\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx.$

**Bemerkung 7.23** Mit Definition 7.22 gilt die Formel (7.4) für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (natürlich nur unter den entsprechenden Integrierbarkeitsvoraussetzungen an  $f$ ).

**Satz 7.24 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)** Gegeben sei die stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$ , so dass

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

**Bemerkung 7.25** Der Mittelwertsatz der Integralrechnung lässt sich wie folgt interpretieren: Es gibt eine Stelle  $\xi \in [a, b]$ , so dass der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse gleich der Fläche eines Rechtecks mit der “mittleren Höhe”  $f(\xi)$  ist, denn dieses hat gerade den Inhalt  $f(\xi) \cdot (b - a)$ . (An dieser Stelle muss man daran denken, dass es hier wieder um Flächenbilanzen geht und Flächenanteile unterhalb der  $x$ -Achse negativ gewichtet werden.)



**Beweis:** Nach dem Satz vom Maximum und Minimum (Satz 4.31) nimmt  $f$  auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  sein Maximum  $M$  und Minimum  $m$  an. Insbesondere gilt dann  $m \leq f \leq M$ , woraus wir erhalten, dass

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a) \quad \text{bzw.} \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M. \quad (7.5)$$

Mit dem Zwischenwertsatz erhalten wir dann die Existenz von  $\xi \in [a, b]$  mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Wir kommen nun zu einem wichtigen Satz der Analysis, den nicht umsonst den Namen *Hauptsatz* trägt und zeigt, dass man die Integration in gewisser Weise als “Umkehroperation” der Differentiation interpretieren kann.

**Definition 7.26** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$ , falls  $F$  differenzierbar ist und  $F' = f$  gilt.

**Satz 7.27 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $a \in I$ . Dann gilt:

- 1) Die Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

ist eine Stammfunktion von  $f$ , d.h.  $F$  ist differenzierbar und es gilt  $F' = f$ .

- 2) Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Stammfunktion von  $f$ , so gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \in I$  gilt:

$$G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t) \, dt + c$$

Speziell gilt  $c = G(a)$ .

- 3) Sei  $b \in I$ . Dann gilt für jede Stammfunktion  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$ :

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a)$$

**Beweis:** 1) Sei  $x \in I$  beliebig und  $h \neq 0$ , so dass  $x+h \in I$ . Dann gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es zu jedem  $h$  wie oben eine Stelle  $\xi_h \in [x, x+h] \cup [x+h, x]$ , so dass

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) \cdot h.$$

Wegen  $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$  und der Stetigkeit von  $f$  erhalten wir daraus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \cdot f(\xi_h) \cdot h \right) = f(x).$$

Folglich ist  $F$  in allen  $x \in I$  differenzierbar und  $F' = f$ .

2) Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Stammfunktion von  $f$ , so gilt  $(G - F)' = f - f = 0$  nach Teil 1). Mit dem Konstanzkriterium (Korollar 6.33) folgt die Existenz von  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $G(x) - F(x) = c$  für alle  $x \in I$  gilt, woraus wir

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

für alle  $x \in I$  erhalten. Einsetzen von  $a$  liefert  $G(a) = c$ .

3) Aus 2) folgt sofort

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt + G(a),$$

woraus wir unmittelbar die Behauptung erhalten.  $\square$

**Bemerkung 7.28** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

- 1) Ist  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $([a, b] \cup [b, a]) \subseteq D$ , so benutzen wir die Schreibweise

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

- 2) Die Menge

$$\int f(x) dx := \{F : D \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ ist Stammfunktion von } f\}$$

aller Stammfunktionen von  $f$  heißt *unbestimmtes Integral* von  $f$ . Ist  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine spezielle Stammfunktion von  $f$ , so schreibt man üblicherweise (etwas unpräzise)

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Im Unterschied hierzu bezeichnet man das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

für  $[a, b] \subseteq D$  dann auch als *bestimmtes Integral* von  $f$  über  $[a, b]$ .

**Beispiel 7.29** 1)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Stammfunktion von  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , denn es gilt  $\exp' = \exp$ . Damit erhalten wir für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$ , dass

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a.$$

2) Für die Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  gilt

$$\int f(x) dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + c,$$

denn für alle  $x \in ]0, \infty[$  gilt

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \right) = x^\alpha.$$

Für  $\alpha = -1$  ist “die” Stammfunktion offenbar nicht definiert, daher untersuchen wir diesen Fall gleich noch einmal isoliert.

3) Eine Stammfunktion der Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$  ist durch die Funktion  $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln |x|$  gegeben, denn für alle  $x > 0$  gilt  $\ln |x| = \ln x$  und wir erhalten

$$F'(x) = \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Für alle  $x < 0$  gilt dagegen  $\ln |x| = \ln(-x)$  und daher nach der Kettenregel

$$F'(x) = \ln'(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Somit gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ , dass

$$\int_a^b \frac{1}{x} = \ln |x| \Big|_a^b = \ln |b| - \ln |a| = \ln \frac{|b|}{|a|},$$

allerdings nur unter der Voraussetzung, dass  $0 \notin I(a, b)$ , da sonst der Hauptsatz nicht anwendbar ist.

4) Die sogenannte *Heaviside-Funktion*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Form

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

Wir betrachten im Folgenden ihre Einschränkung  $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$  für ein  $b > 0$ . Dann ist  $f$  als Treppenfunktion integrierbar und es existiert die Funktion  $F : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(x) := \int_{-b}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Allerdings ist  $F$  nicht differenzierbar in  $x_0 = 0$  und daher keine Stammfunktion von  $f$ . (Wir haben an dieser Stelle allerdings nur bewiesen, dass die so definierte Funktion  $F$  keine Stammfunktion von  $f$  ist. Man kann hier aber sogar nachweisen, dass es *keine* differenzierbare Funktion gibt, deren Ableitung  $f$  ist. (Übung.))

## 7.5 Integrationsregeln

Aus der Produkt- und Kettenregel für das Differenzieren lassen sich unter Ausnutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung Regeln für die Integration ableiten, mit denen sich Stammfunktionen für viele häufig vorkommende Funktionen bestimmen lassen.

**Satz 7.30 (Partielle Integration)** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = (f \cdot g)(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx. \quad (7.6)$$

**Beweis:** Nach der Produktregel gilt  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ , d.h.  $fg$  ist eine Stammfunktion von  $f'g + fg'$ . Die Formel (7.6) folgt dann sofort aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.  $\square$

Die Formel (7.6) heißt *partielle Integration*, weil nach Anwendung der Regel noch ein zu berechnendes Integral übrigbleibt. Dies mag auf den ersten Blick ein wenig enttäuschend wirken, tatsächlich hat man aber so die Möglichkeit, kompliziertere Integrale so zu vereinfachen, dass man die Stammfunktion im nächsten Schritt direkt bestimmen kann.

**Beispiel 7.31** 1) Wir bestimmen eine Stammfunktion von  $x \mapsto xe^x$ , indem wir in (7.6)  $f(x) = x$  und  $g'(x) = e^x$  wählen. Damit erhalten wir für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ , dass

$$\int_a^b xe^x \, dx = xe^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x \, dx = e^x(x-1) \Big|_a^b.$$

Dieselbe Rechnung können wir auch durch Weglassen der Grenzen für das unbestimmte Integral durchführen. Dabei sollten wir aber bedenken, dass das unbestimmte Integral für eine Menge von Stammfunktionen steht, die sich jeweils um eine Konstante unterscheiden. Wenn also nach einer Umformung kein unbestimmtes Integral mehr auftritt, sollten wir die Konstante  $c$  ins Spiel bringen:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = e^x(x-1) + c.$$

Partielle Integration ist die klassische Integrationsmethode für Funktionen der Form  $x \mapsto p(x)e^x$ ,  $x \mapsto p(x) \sin x$  und  $x \mapsto p(x) \cos x$ , wobei  $p$  eine beliebige Polynomfunktion ist.

- 2) Die partielle Integration ist auch nützlich, um die Stammfunktion des natürlichen Logarithmus  $x \mapsto \ln x$  zu finden, auch wenn auf den ersten Blick hier gar kein Produkt von Funktionen zu erkennen ist. Der Trick ist, in (7.6) einfach  $f = \ln$  und  $g' = 1$  zu setzen. Damit ergibt sich

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x(\ln x - 1) + c.$$

3) Mit  $f = \cos$  und  $g' = \cos$  in (7.6) erhalten wir

$$\int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x - \int \sin x (-\sin x) \, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx.$$

Erneute partielle Integration des letzten Integrals mit  $f = g' = \sin$  führt wieder auf das Integral  $\int \cos^2 x \, dx$ , womit wir nichts gewonnen hätten. Daher fahren wir wie folgt fort:

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx.$$

Diesmal hat das Integral  $\int \cos^2 x \, dx$  ein anderes Vorzeichen und daher können wir die Gleichung nach dem Integral “auflösen”.

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x + c \implies \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) + c$$

Müsste in der letzten Umformung nicht eigentlich  $\frac{c}{2}$  stehen? Da  $c$  hier für eine beliebige Konstante steht, können wir hier tatsächlich wieder  $c$  schreiben. (Wenn Ihnen diese Konvention nicht gefällt, dann sollten Sie einfach so darüber denken: Im letzten Schritt erhalten wir die Konstante  $\frac{c}{2}$ , die wir wieder in  $c$  umbenennen.)

An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Schreibweise  $\int f(x) \, dx = F(x) + c$  durchaus gefährlich ist, denn auf der linken Seite steht eine Menge von Funktionen, auf der rechten Seite dagegen scheinbar eine spezielle Funktion. Wenn man anfängt, mit letzterer auch so zu rechnen, kann man sich bei unbedachten Umformungen leicht in Widersprüche verstricken. Diskutieren Sie dazu im Tutorium die Berechnung des Integrals  $\int \frac{1}{x} \, dx$  durch partielle Integration.

**Satz 7.32 (Substitutionsregel)** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $g : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx \quad (7.7)$$

**Beweis:** Sei  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann ist  $F \circ g$  eine Stammfunktion von  $(f \circ g) \cdot g'$ , denn für alle  $t \in [a, b]$  gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Damit erhalten wir aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = (F \circ g)(t) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(x) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx. \quad \square$$



**Beispiel 7.33** 1) Ist  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar, so gilt mit  $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ , dass

$$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

Wenn wir das bestimmte Integral explizit berechnen wollen, können wir an dieser Stelle die zuletzt erhaltene Formel direkt benutzen. Wollen wir allerdings die Stammfunktion über das unbestimmte Integral bestimmen, so müssen wir am Ende  $x = g(t)$  “rücksubstituieren” um eine Funktion zu erhalten, die von der Variablen  $t$  abhängt:

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c = \ln |g(t)| + c$$

2) Als Spezialfall von 1) erhalten wir die (bzw. eine) Stammfunktion des Tangens:

$$\int \tan x dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c$$

3) Wir wenden 1) auf zwei verschiedene Arten auf dieselbe Funktion an:

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{1+4x} dx &= \ln |1+4x| + c \\ \int \frac{4}{1+4x} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{4}+x} dx = \ln \left| \frac{1}{4} + x \right| + c \end{aligned}$$

Haben wir hier irgendwo einen Fehler gemacht? Die beiden erhaltenen Funktionen  $x \mapsto \ln |1+4x|$  und  $x \mapsto \ln \left| \frac{1}{4} + x \right|$  sind offenbar verschieden, was man sofort durch einsetzen von  $x_0 = 0$  feststellt. Trotzdem sind beide Ergebnisse richtig, da sich die beiden Funktionen nur um eine Konstante unterscheiden: Für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$  gilt

$$\ln |1+4x| = \ln \left( 4 \cdot \left| \frac{1}{4} + x \right| \right) = \ln 4 + \ln \left| \frac{1}{4} + x \right|.$$

**Bemerkung 7.34** Leider ist der Integrand nicht immer in der Form  $f(g(t)) \cdot g'(t)$  gegeben, weshalb man in den meisten Fällen die folgende Variante der Substitutionsregel verwendet, die von der rechten Seite in der Formel (7.7) ausgeht. Ist die in Satz 7.32 gegebene Funktion  $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  bijektiv, so kann man die Substitutionsregel auch in der Form

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

schreiben. An dieser Stelle zeigt sich die Ausgeklügeltheit der Leibniz’schen Notation, denn formal müssen wir bei der Substitution  $x = g(t)$  im Integral  $dx = g'(t) dt$  ersetzen. Dies passt wunderbar zu der Notation der Ableitung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} = g'(t),$$

denn es scheint so, als müssten wir hier nur “auf beiden Seiten mit  $dt$  multiplizieren”, um die Formel  $dx = g'(t) dt$ . Eine wunderschöne Merkregel!

**Beispiel 7.35** Wir berechnen den Flächeninhalt  $A$  der oberen Hälfte des Einheitskreises. Diese entspricht gerade der Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ . Mit der Substitution  $x = \sin t$  und unserer “Merkregel”

$$\frac{dx}{dt} = \sin' t = \cos t \quad \implies \quad dx = \cos t \, dt$$

erhalten wir unter Berücksichtigung der Bijektivität von  $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ , dass

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \left( \sin t \cos t + t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = \frac{\pi}{2},$$

wobei wir benutzt haben, dass wir in Beispiel 7.31 die Funktion  $t \mapsto \frac{1}{2}(\sin t \cos t + t)$  als eine Stammfunktion von  $t \mapsto \cos^2 t$  bestimmt haben. Für die explizite Angabe einer Stammfunktion von  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  müssen wir rücksostituieren und nutzen dazu die Formeln  $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$  und  $t = \arcsin x$ . Damit erhalten wir:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} (x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c$$

**Bemerkung 7.36** Leider ist die Suche nach Stammfunktionen i.A. viel schwieriger als das Differenzieren von Funktionen. Dies liegt darin begründet, dass die Menge der “elementaren Funktionen” (dies sind grob gesagt alle Funktionen, die sich aus Polynomen, Wurzel-, Logarithmus-, Exponential- und trigonometrischen Funktionen durch Operationen wie Addition, Multiplikation, Division, Verkettung und Umkehrung erhalten lassen) nicht abgeschlossen gegen das Bilden von Stammfunktionen ist. Typische Beispiele für Funktionen, deren Stammfunktion sich nicht “elementar” ausdrücken lässt sind die Funktionen

$$x \mapsto e^{-x^2}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}, \quad x \mapsto x^x$$

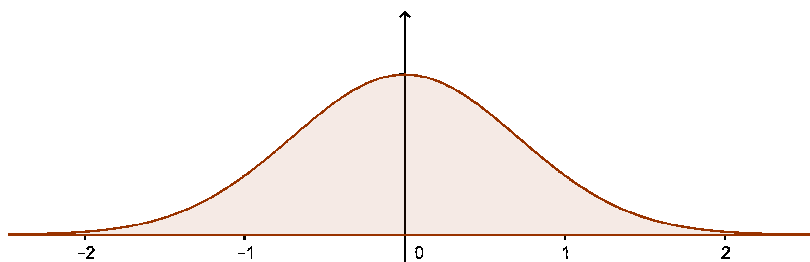
mit jeweils geeigneten Definitionsbereichen. (Wir verzichten hier auf einen Nachweis.) Diese Tatsache wird manchmal missverstanden als “diese Funktionen haben keine Stammfunktionen” oder “man kann die Stammfunktionen dieser Funktionen nicht hinschreiben”. Beides ist falsch, denn z.B. ist die Funktion  $f : x \mapsto e^{-x^2}$  stetig und hat daher nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion. Diese lässt sich auch wunderbar hinschreiben: Für  $a \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x \mapsto \int_a^x e^{-t^2} \, dt$$

eine Stammfunktion von  $f$ . Diese Funktion lässt sich eben nur nicht in der oben angedeuteten Weise durch “elementare Funktionen” ausdrücken. Stattdessen erhalten wir sozusagen einen “völlig neuen”, uns bislang “unbekannten” Funktionentyp.

Dies erklärt, warum alle Versuche, die Stammfunktion von  $f$  mit Hilfe von Integrationsregeln zu finden, zum Scheitern verurteilt sind. Würde nämlich eine unserer Methoden (z.B. die Substitution) eine Stammfunktion liefern, so wäre dies eine Funktion, die elementar ausdrückbar wäre.

## 7.6 Uneigentliche Integrale



Wir greifen noch einmal die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^{-x^2}$  aus dem letzten Abschnitt auf und betrachten ihren Funktionsgraphen. Für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  nähert sich die Funktion asymptotisch der  $x$ -Achse und das so schnell, dass wir schon außerhalb des Intervalls  $[-2, 2]$  in der obigen Skizze mit bloßem Auge kaum noch einen Unterschied zur  $x$ -Achse ausmachen können. Daher stellt sich die Frage, ob die Fläche unter dem Graphen von  $f$  trotz ihrer unendlichen Ausdehnung einen endlichen Inhalt hat. Dies können wir mit Hilfe eines weiteren Grenzwerts entscheiden.

### Definition 7.37 (Uneigentliche Integrale 1. Art)

- 1) Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über jedem kompakten Intervall  $[a, b]$ ,  $b > a$ , integrierbar ist. Existiert der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx,$$

so heißt dieser das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[a, \infty[$ .

- 2) Sei  $f : ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über jedem kompakten Intervall  $[a, b]$ ,  $a < b$ , integrierbar ist. Existiert der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx,$$

so heißt dieser das uneigentliche Integral von  $f$  über  $] -\infty, b]$ .

- 3) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über jedem kompakten Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Existieren die beiden uneigentlichen Integrale von  $f$  über  $] -\infty, 0]$  und  $[0, \infty[$ , so heißt

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx := \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx + \int_0^\infty f(x) \, dx$$

das uneigentliche Integral von  $f$  über  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 7.38** 1) Sei  $s \in \mathbb{R}$ , sowie  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^s}$ . Wir untersuchen die Existenz des uneigentlichen Integrals von  $f$  über  $[1, \infty[$  in Abhängigkeit von  $s$ . Dazu beobachten wir zunächst, dass für  $s \neq 1$  und alle  $b \geq 1$  gilt, dass

$$\int_1^b f(x) dx = \int_1^b x^{-s} dx = \frac{1}{-s+1} x^{-s+1} \Big|_1^b = -\frac{1}{s-1} (b^{1-s} - 1).$$

Fall 1:  $s > 1$ . Wegen  $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-s} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{s-1}} = 0$  erhalten wir

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1}.$$

Fall 2:  $s < 1$ . Hier liefert uns  $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-s} = \infty$ , dass das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[1, \infty[$  nicht existiert.

Fall 3:  $s = 1$ . Wegen

$$\int_1^b f(x) dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^b = \ln b \rightarrow \infty \quad \text{für } b \rightarrow \infty$$

ist auch in diesem Fall das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[1, \infty[$  nicht existent.

2) Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ . Da dies die Ableitungsfunktion des Arkustangens ist (vgl. Beispiel 6.39), erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \arctan \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

Analog erhalten wir

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{und damit} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

**Bemerkung 7.39** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  jeweils ein geeignetes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $f$  im Folgenden jeweils die Integrierbarkeitsvoraussetzungen in der Definition der entsprechenden uneigentlichen Integrale erfüllt.

1) Es gilt die Implikation

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \text{ existiert} \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx \text{ existiert}.$$

Die Umkehrung gilt allerdings nicht! Das uneigentliche Integral der Identität über  $\mathbb{R}$  existiert nicht, da weder  $\int_{-\infty}^0 x dx$  noch  $\int_0^\infty x dx$  existieren, es gilt aber

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} (-b)^2 \right) = 0.$$

Aus diesem Grund haben wir das uneigentliche Integral über  $\mathbb{R}$  nicht über einen einzigen Grenzwert definiert.

2) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $c \in [a, \infty[$ , dass

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^\infty f(x) \, dx. \quad (7.8)$$

Eigentlich hätten wir genauer sagen müssen: *Existiert das uneigentliche Integral  $\int_a^\infty f(x) \, dx$ , so existiert für alle  $c \in [a, \infty[$  auch das uneigentliche Integral  $\int_c^\infty f(x) \, dx$  und es gilt (7.8).*

Analog funktioniert dies für uneigentliche Integrale über Intervalle der Form  $] -\infty, b]$  und damit erhalten wir für alle  $c \in \mathbb{R}$ , dass

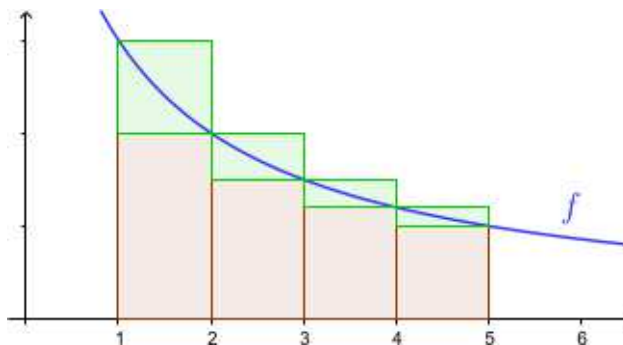
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^\infty f(x) \, dx.$$

(Die Formulierung der präzisen Aussage analog zu oben bleibt an dieser Stelle Ihnen überlassen.) Wir hätten also in der Definition des uneigentlichen Integrals über  $\mathbb{R}$  statt 0 auch eine beliebige andere Stelle wählen können.

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ . Ist die Funktion  $f : [n, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend, können wir sie auf jedem Intervall der Form  $[n, m]$ ,  $m > n$  von oben und unten durch Treppenfunktionen bzgl. der Zerlegung

$$Z = n < n+1 < \dots < m$$

einschließen, indem wir als Funktionswert der Treppenfunktion auf einem Intervall  $[k, k+1[$  jeweils den Funktionswert von  $f$  am linken bzw. rechten Intervallrand wählen, so wie in der nebenstehenden Skizze für  $n = 1$  und  $m = 5$  illustriert. Dadurch erhalten wir die Abschätzung



$$\sum_{k=n+1}^m f(k) = \sum_{k=n}^{m-1} f(k+1) \leq \int_n^m f(x) \, dx \leq \sum_{k=n}^{m-1} f(k). \quad (7.9)$$

Für  $m \rightarrow \infty$  gehen die Summen in Reihen über und das Integral wird zu einem uneigentlichen Integral. Dies liefert uns ein neues Konvergenzkriterium für Reihen, für dessen Beweis wir allerdings das folgende Lemma benötigen.

**Lemma 7.40 (Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale)** Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  über jedem Intervall  $[a, b]$ ,  $b > a$  integrierbar. Dann existiert das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[a, \infty[$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $c_0 \geq a$  gibt, so das für alle  $c_1, c_2 \geq c_0$  gilt:

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

**Beweis:** Übung.  $\square$

**Satz 7.41 (Integralkriterium für Reihen)** Sei  $f : [\ell, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{k=\ell}^{\infty} f(k) \text{ ist konvergent} \iff \int_{\ell}^{\infty} f(x) dx \text{ existiert}$$

**Beweis:** Zunächst halten wir fest, dass die Funktion  $f$  in jedem Intervall  $[n, b]$ ,  $b \geq 1$  integrierbar ist, da sie monoton ist.

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da die Reihe  $\sum_{k=\ell}^{\infty} f(k)$  konvergiert, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 3.7) ein  $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\sum_{k=n}^m f(k) < \varepsilon$$

für alle  $n, m \geq N_{\varepsilon}$  gilt. Seien nun  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  mit  $c_2 \geq c_1 \geq N_{\varepsilon}$ . Dann gibt es  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $m > c_2 \geq c_1 \geq n \geq N_{\varepsilon}$ . Da  $f$  eine nichtnegative Funktion ist, folgt daraus

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \right| = \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \leq \int_n^m f(x) dx \leq \sum_{k=n}^{m-1} f(k) < \varepsilon,$$

wobei wir für die vorletzte Abschätzung (7.9) benutzt haben. Mit Lemma 7.40 folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals.

“ $\Leftarrow$ ”: Es existiere das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[\ell, \infty[$ . Da  $f$  eine nichtnegative Funktion ist, gilt mit (7.9) für alle  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq \ell$ , dass

$$\sum_{k=\ell+1}^m f(k) \leq \int_{\ell}^m f(x) dx \leq \int_{\ell}^{\infty} f(x) dx.$$

Die Partialsummenfolge

$$\left( \sum_{k=\ell+1}^m f(k) \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

ist also beschränkt und außerdem wegen der Nichtnegativität von  $f$  monoton. Damit ist sie nach Satz 2.23 konvergent. Mit  $\sum_{k=\ell+1}^{\infty} f(k)$  konvergiert auch die Reihe  $\sum_{k=\ell}^{\infty} f(k)$ .  $\square$

Das Integralkriterium eignet sich hervorragend für die Konvergenzuntersuchung einer Reihe, wenn sich die Koeffizienten der Reihe als ganzzahlige Funktionswerte einer monoton fallenden Funktion interpretieren lassen, deren Stammfunktion leicht gebildet werden kann. Umgekehrt gibt es aber auch Situationen, wo der direkte Nachweis der Existenz einer uneigentlichen Integrals schwierig ist, da die gegebene Funktion keine Stammfunktion besitzt, die sich elementar ausdrücken lässt. Auch hier kann das Integralkriterium, diesmal in der anderen Richtung verwendet, hilfreich sein. Wir betrachten dazu im folgenden zwei Standardbeispiele.

**Beispiel 7.42** 1) Wir beweisen die Existenz des eingangs betrachteten uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (7.10)$$

Dazu zeigen wir zunächst die Existenz des uneigentlichen Integrals der Funktion  $x \mapsto e^{-x^2}$  über  $[0, \infty[$ . In diesem Intervall ist die Funktion monoton fallend und für alle  $x > 0$  gilt die Abschätzung

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} \geq x^2 \quad \implies \quad e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Damit ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$  konvergent, denn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist eine konvergente Majorante. Dann ist aber auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2}$  konvergent und mit dem Integralkriterium folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Für die Existenz des uneigentlichen Integrals über  $] -\infty, 0]$  beobachten wir, dass die Substitution  $x = -t$  und  $dx = -dt$  für alle  $b \geq 0$  liefert, dass

$$\int_{-b}^0 e^{-x^2} dx = - \int_b^0 e^{-t^2} dt = \int_0^b e^{-t^2} dt.$$

Daraus folgt sofort

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

und damit insbesondere auch die Existenz des Integrals (7.10). Für die Bestimmung seines Wertes fehlen uns an dieser Stelle leider noch die notwendigen Kenntnisse. Wir werden erst in der Vorlesung *Analysis III* auf dieses Problem zurückkommen.

- 2) Nach Beispiel 7.38 existiert das uneigentliche Integral von  $x \mapsto \frac{1}{x^s}$  für alle  $s > 1$ , für  $s \leq 1$  dagegen nicht. Folglich ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

für  $s > 1$  konvergent und für  $s \leq 1$  divergent. Dies bestätigt unsere Untersuchungen aus Kapitel 3, wo wir bereits die Konvergenz der Reihe für den Fall  $s = 2$  und die Divergenz für  $s = 1$  (harmonische Reihe) gezeigt haben.

Die obige Reihe hat wichtige Anwendungen in der analytischen Zahlentheorie, da sie für den Fall  $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$  eine Darstellung der dort wichtigen *Riemannschen Zeta-Funktion*  $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$  ist, d.h. es gilt

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Die Hypothese über die Lage der Nullstellen dieser Funktion ist als *Riemannsche Vermutung* das wohl berühmteste bisher<sup>1</sup> offiziell ungelöste Problem in der Mathematik. Da die Riemannsche Zeta-Funktion auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  definiert ist und in der Stelle  $-1$  den Wert  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  annimmt, wird in der Populärwissenschaft gerne die bisweilen auch unter Mathematikern scherzhaft kommunizierte Formel

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

zitiert, da das formale Einsetzen von  $s = -1$  in die obige Reihendarstellung auf die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k$  führt. Die Reihendarstellung ist allerdings nur in dem genannten Bereich  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$  eine zulässige Darstellung der Riemannschen Zeta-Funktion, so dass das Einsetzen von  $s = -1$  in die Reihe keinen Sinn macht. Man hätte für diese Stelle eine andere Darstellungen der Funktion verwenden müssen.

Es gibt noch eine weitere Art von uneigentlichen Integralen, nämlich, wenn eine Funktion am Rand des Integrationsintervalls nicht definiert ist.

**Definition 7.43 (Uneigentliche Integral 2. Art)** Sei  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  über jedem Intervall  $[a + \varepsilon, b]$ ,  $0 < \varepsilon < b - a$  integrierbar. Existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx,$$

so heißt dieser das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[a, b]$ .

(Analog definiert man das uneigentliche Integral über  $[a, b]$  für Funktionen  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ .)

**Bemerkung 7.44** Wir erlauben im Folgenden auch Kombinationen von uneigentlichen Integralen *erster Art* wie in Definition 7.37 und *zweiter Art* wie in Definition 7.43. Z.B. definieren wir das uneigentliche Integral einer Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  über  $[0, \infty[$  durch

$$\int_0^\infty f(x) \, dx := \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^\infty f(x) \, dx,$$

wenn beide Integrale auf der rechten Seite existieren. Auch hier kann man zeigen, dass als “Trennstelle” statt  $c = 1$  ein beliebiges  $c \in ]0, \infty[$  gewählt werden kann.

---

<sup>1</sup>zum Zeitpunkt des Schreibens dieses Skripts



**Beispiel 7.45** 1) Wir untersuchen die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$$

der Funktion  $x \mapsto x^{-s}$  in Abhängigkeit von  $s \in \mathbb{R}$ . Dazu beobachten wir, dass im Fall  $s \neq 1$  für alle  $\varepsilon \in ]0, 1[$  gilt, dass

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-s} (1 - \varepsilon^{1-s}).$$

Folglich existiert das uneigentliche Integral im Fall  $s < 1$ , wegen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{1-s}$$

und eine analoge Grenzwertbetrachtung zeigt, dass das uneigentliche Integral im Fall  $s > 1$  nicht existiert, ebensowenig im Fall  $s = 1$ , da

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty.$$

Insbesondere bedeutet das, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^s} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$$

für keine Wahl von  $s \in \mathbb{R}$  existiert, denn das erste Integral auf der rechten Seite existiert nur für  $s < 1$  und das zweite nur für  $s > 1$ .

2) Zur *Übung* können Sie zeigen, dass das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

für alle  $x \in ]0, \infty[$  existiert. Beachten Sie dabei, dass es sich für den Fall  $0 < x < 1$  um ein uneigentliches Integral von “gemischtem Typ” handelt, denn die Funktion  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  ist an der Stelle  $t = 0$  nur für den Fall  $x \geq 1$  definiert.

Die durch  $\Gamma : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \Gamma(x)$  gegebene Funktion bezeichnet man als die *Gamma-Funktion*. Sie hat die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \text{für alle } x \in ]0, \infty[.$$

(Übung.) Wegen  $\Gamma(1) = 1$  erhält man daraus mithilfe vollständiger Induktion, dass  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Durch die Definition

$$x! := \Gamma(x+1)$$

lässt sich die *Fakultät* damit auf alle  $x \in ]-1, \infty[$  verallgemeinern.



# Kapitel 8

## Konvergenz von Funktionenfolgen

Wie in Bemerkung 3.41 festgestellt, können wir den Begriff der *Folge* nicht nur für reelle Zahlen, sondern für beliebige Mengen betrachten, so also auch für Mengen von Funktionen. Tatsächlich sind uns Funktionenfolgen in Kapitel 3 bereits begegnet, denn dort haben wir die Exponentialfunktion mit Hilfe von speziellen Folgen, nämlich Reihen definiert. Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Durch die Zuordnung

$$p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

wird eine Polynomfunktion  $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. (Dies ist gerade das  $n$ -te Taylorpolynom von  $\exp$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .) Dementsprechend “*konvergiert*” also die Funktionenfolge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen die Exponentialfunktion  $\exp$  in dem Sinne, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \exp(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Eine zentrale Fragestellung ist nun die Folgende: Sind  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

für alle  $x \in [a, b]$  gilt, gilt dann auch

$$\int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

d.h. lassen sich Integration und Grenzwertbildung miteinander “vertauschen”? Dies würde u.a. neue Möglichkeiten für die Integration von Funktionen bieten, für die wir mit unseren klassischen Integrationsregeln keine Stammfunktionen bestimmen konnten wie z.B.

die Funktion  $x \mapsto e^{-x^2}$ . Wenn wir diese als “Grenzwert” einer Funktionenfolge darstellen könnten, deren einzelnen Folgenglieder sich leicht integrieren lassen (betrachten wir z.B. eine Folge von Taylorpolynomen, so fällt uns für jedes einzelne Taylorpolynom das Finden einer Stammfunktion sehr leicht), so erhielten wir auf diesem Weg eine Folge von Integralen (dies ist nichts weiter als eine reelle Zahlenfolge), deren Grenzwert gerade gleich dem Integral unserer “schwierigen” Funktion wäre. Wir schauen uns dazu einmal zwei instruktive Beispiele an.

**Beispiel 8.1** 1) Wir betrachten die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$ . Dann gilt:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

d.h. die “Grenzfunktion” unserer Funktionenfolge ist die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$ . Hier erleben wir die erste Überraschung. Obwohl alle Funktionen  $f_n$  stetig sind (sie sind sogar beliebig oft differenzierbar), ist die Grenzfunktion  $f$  nicht stetig in  $x_0 = 1$ . Sie ist allerdings eine Treppenfunktion, also integrierbar, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x) dx$$

Integration und Grenzwertbildung lassen sich hier also vertauschen.

2) Wir betrachten die Funktionenfolge  $(f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \geq 1}$ , wobei

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}[ \\ 2n - n^2 x & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{für } x \in ]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Dann gilt für alle  $x \in [0, 1]$ , dass

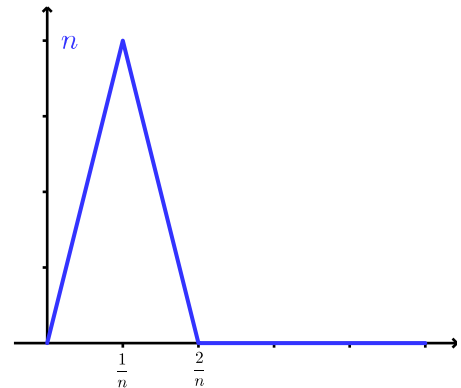
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

denn für  $x = 0$  ist dies klar und für  $x > 0$  gilt  $f_n(x) = 0$  für alle  $n$  mit  $\frac{2}{n} \leq x$ , d.h. für alle  $n \geq \frac{2}{x}$ .

Grenzfunktion unserer Funktionenfolge ist also die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 0$ . Im Gegensatz zu Teil 1) des Beispiels bleibt die Eigenschaft der Stetigkeit hier auch für die Grenzfunktion bestehen. Allerdings erhalten wir

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

denn wie aus der Skizze unschwer zu erkennen ist, gilt  $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . In diesem Fall lassen sich Grenzwertbildung und Integration also nicht vertauschen. Das Problem ist hier, dass die Konvergenz nicht “gleichmäßig” ist: Obwohl es zu jedem festen  $x \in [0, 1]$  ein  $N_x \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $f_n(x) = 0$  für alle  $n \geq N_x$  gilt, gibt es auch zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  immer noch Elemente  $x_N \in [0, 1]$ , für die der Funktionswert sehr groß ist, denn z.B. gilt  $f_N(\frac{1}{N}) = N$ .



## 8.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Im Folgenden betrachten wir zunächst sehr allgemeine Funktionen, deren Definitionsbereich eine beliebige Menge  $K$  und deren Wertebereich die komplexen Zahlen sein dürfen. Damit wollen wir betonen, dass es für die meisten folgenden Begriffe ausschließlich auf den Wertebereich der Funktionen ankommt. Tatsächlich haben wir aber meist Beispiele im Hinterkopf, für die  $K \subseteq \mathbb{C}$  eine Teilmenge der komplexen Zahlen ist, weshalb wir auch im Folgenden von “Funktionen” (statt allgemeiner “Abbildungen”) sprechen.

**Definition 8.2** Sei  $K$  eine beliebige Menge und seien  $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ .

- 1) Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt punktweise konvergent gegen  $f$ , falls für jedes  $x \in K$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

d.h. zu jedem  $x \in K$  und jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N_{x,\varepsilon}$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

- 2) Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt gleichmäßig konvergent gegen  $f$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq N_\varepsilon$  und alle  $x \in K$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Bemerkung 8.3** 1) Zum Besseren Vergleich stellen wir die beiden Begriffe noch einmal in formaler Schreibweise mit Quantoren dar:

$$\begin{aligned} \text{punktweise Konvergenz:} \quad & \forall x \in K \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ \text{gleichmäßige Konvergenz:} \quad & \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall x \in K \, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Wie schon bei der gleichmäßigen Stetigkeit im Vergleich zu Stetigkeit kommt es auch hier auf die Reihenfolge der Quantoren an. Im Fall der gleichmäßigen Konvergenz ist das gesuchte  $N \in \mathbb{N}$  nur von  $\varepsilon > 0$  abhängig, im Fall der punktwisen Konvergenz dagegen möglicherweise auch von  $x \in K$ .

- 2) Weiter folgt aus der Definition unmittelbar, dass eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auch punktweise konvergent ist. Die Umkehrung gilt nicht, denn die Funktionenfolgen in Beispiel 8.1 sind beide nur punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent (Übung).
- 3) Übliche Notationen sind auch  $f_n \rightarrow f$  für punktweise und  $f_n \rightrightarrows f$  für gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge  $(f_n)$  gegen die Funktion  $f$ .

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge lässt sich noch auf eine andere Art und Weise charakterisieren. Dazu beobachten wir zunächst, dass die Bedingung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in K$$

bedeutet, dass die Menge  $\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in K\} \subseteq \mathbb{R}$  durch  $\varepsilon$  nach oben beschränkt ist und daher ein Supremum besitzt. Für dieses gilt offenbar

$$\sup \{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in K\} \leq \varepsilon.$$

**Definition 8.4** Sei  $K$  eine Menge und  $g : K \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann heißt

$$\|g\|_K := \|g\| := \sup \{|g(x)| \mid x \in K\} \quad (8.1)$$

die Supremumsnorm von  $g$ .

Im Folgenden schreiben wir meist  $\|g\|$  statt  $\|g\|_K$  und benutzen die explizite Kennzeichnung des Definitionsbereichs nur, falls eine Verwechslungsgefahr besteht.

**Bemerkung 8.5** 1) Beachten Sie, dass die Menge in (8.1) nicht notwendigerweise beschränkt ist. Daher gilt  $\|g\| \in \mathbb{R}$  nur für *beschränkte Funktionen*  $g : K \rightarrow \mathbb{C}$  (die Erweiterung der Definition der Beschränktheit von Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  auf solche der Form  $g : K \rightarrow \mathbb{C}$  funktioniert in offensichtlicher Weise), für unbeschränkte Funktionen erhalten wir dagegen  $\|f\| = \infty$ . Der Name “Norm” (eine präzise Definition erhalten Sie in Kapitel 1 in der Analysis II) ist daher strenggenommen nur für den Fall beschränkter Funktionen auch verdient, es hat sich aber durchgesetzt, an dieser Stelle auch bei unbeschränkten Funktionen von der *Supremumsnorm* zu sprechen.

2) Mit unseren Vorbereitungen erhalten wir: *Eine Funktionenfolge  $(f_n : K \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gleichmäßig gegen  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ , falls*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0. \quad (8.2)$$

Strenggenommen haben wir es in (8.2) mit einer Folge zu tun, deren Folgenglieder auch den “Wert”  $\infty$  annehmen können. Ganz formal korrekt hätten wir also sagen müssen: Eine Funktionenfolge  $(f_n : K \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gleichmäßig gegen  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ , falls es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\|f_n - f\| \in \mathbb{R}$  für alle  $n \geq N$  erfüllt ist, und falls für die Folge  $(\|f_n - f\|_K)_{n \geq N}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

Dies ist offensichtlich sehr umständlich und unhandlich, weshalb wir uns mit der nur geringfügig unpräziseren Formulierung (8.2) zufriedengeben.

In Beispiel 8.1 hatten wir gesehen, dass der punktweise Limes einer Folge stetiger Funktionen im Allgemeinen nicht stetig zu sein braucht. Dies ändert sich, wenn die Funktionenfolge gleichmäßig konvergent ist.

**Satz 8.6** Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  und sei  $(f_n : K \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Falls jedes  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  stetig ist, so ist auch  $f$  stetig.

**Beweis:** (Wir haben bereits häufiger den “ $\frac{\varepsilon}{2}$ -Trick” verwendet. Der folgende Beweis ist analog dazu als “ $\frac{\varepsilon}{3}$ -Beweis” bekannt.) Sei  $x \in K$  beliebig. Wir zeigen mit Hilfe des  $\varepsilon/\delta$ -Kriteriums die Stetigkeit von  $f$  in  $x$ . Sei also  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann suchen wir  $\delta > 0$ , so dass für alle  $\tilde{x} \in K$  gilt:

$$|x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$$

Für jedes  $\tilde{x} \in K$  und jedes  $N \in \mathbb{N}$  gilt

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\tilde{x})| + |f_N(\tilde{x}) - f(\tilde{x})|. \quad (8.3)$$

Wir versuchen nun  $\delta > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$  so zu bestimmen, dass jeder der Terme auf der rechten Seite der Ungleichung kleiner als  $\frac{\varepsilon}{3}$  wird. Da  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|f_N(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle  $y \in K$  gilt. Außerdem ist  $f_N$  stetig in  $x$  und daher gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $\tilde{x} \in K$  gilt:

$$|x - \tilde{x}| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit diesem  $\delta$  und dem vorher gewählten  $N$  erhalten wir aus (8.3) für alle  $\tilde{x} \in K$ , dass

$$|x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Folglich ist  $f$  stetig in  $x$  und da  $x \in K$  beliebig war, ist  $f$  auch stetig.  $\square$

Machen Sie sich klar, dass in Satz 8.6 bereits die Forderung genügt hätte, dass es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, so dass alle  $f_n$  mit  $n \geq m$  stetig sind.

Eine weitere wichtige Eigenschaft gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen ist die eingangs erwünschte Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Integration.

**Satz 8.7** Sei  $(f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Beweis:** Nach Satz 8.6 ist  $f$  stetig, also insbesondere integrierbar. Ferner gilt wegen der Linearität und Monotonie des Integrals, dass

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b f_n(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \, dx \leq \int_a^b \|f - f_n\| \, dx,$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass  $|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt. Das letzte Integral ist auch wohldefiniert, denn da  $f - f_n$  mit  $f$  und  $f_n$  stetig ist, ist  $f - f_n$  insbesondere nach dem Satz vom Maximum und Minimum beschränkt auf  $[a, b]$  und es folgt  $\|f - f_n\| < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen

$$\int_a^b \|f - f_n\| \, dx = (b - a) \cdot \|f - f_n\|$$

erhalten wir aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $(f_n)$  gegen  $f$  (d.h.  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)_n \, dx = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

Nach diesem phänomenalem Erfolg des Begriffs “*gleichmäßige Konvergenz*” bei der Integration stellt sich die Frage, ob sich für gleichmäßig konvergente differenzierbare Funktionenfolgen auch Differentiation und Grenzwertbildung miteinander vertauschen lassen. Überraschenderweise ist dies nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 8.8** Wir betrachten die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 1}$  mit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{n} \sin(nx)$ . Offenbar gilt

$$\|f_n\| = \sup \left\{ |f_n(x)| \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , woraus wir erhalten, dass  $(f_n)$  gleichmäßig gegen die Nullfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 0$  konvergiert. Als Ableitungen erhalten wir allerdings

$$f'_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(nx)$$

für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und die Funktionenfolge  $(f'_n)$  konvergiert nicht einmal punktweise gegen  $f' = 0$ , denn z.B. erhalten wir für den Punkt  $x = \pi$ , dass

$$f_n(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Tatsächlich kann man nicht ohne weiteres auf die Konvergenz der Ableitungen einer Funktionenfolge schließen. Stattdessen funktioniert unter gewissen Voraussetzungen der umgekehrte Schluss von der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitungen  $(f'_n)$  auf die gleichmäßige Konvergenz der ursprünglichen Funktionenfolge  $(f_n)$ .

**Satz 8.9** Seien  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  stetig differenzierbare Funktionen und  $x_0 \in [a, b]$ , so dass die reelle Zahlenfolge  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. Falls die Funktionenfolge  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert, dann konvergiert auch die Funktionenfolge  $(f_n)$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner ist  $f$  differenzierbar mit  $f' = f^*$ , d.h. für alle  $x \in [a, b]$  gilt insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'(x) = f'(x).$$

**Beweis:** Da alle  $f'_n$  nach Voraussetzung stetig sind, gilt dies nach Satz 8.6 auch für deren gleichmäßigen Limes  $f^*$ . Somit ist  $f^*$  auf  $[a, b]$  integrierbar. Wir definieren nun eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$  und

$$f(x) := \int_{x_0}^x f^*(t) dt + f(x_0)$$

für  $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ . Dann ist  $f$  nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 7.27) differenzierbar mit  $f' = f^*$ . Noch zu zeigen ist, dass  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$



konvergiert. Dazu beobachten wir zunächst, dass für alle  $x \in [a, b]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0) + f(x_0) - f(x)| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0) - f(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f'_n(t) - f'(t)| dt + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es wegen der Konvergenz von  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  und wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N_\varepsilon$  gilt, dass

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|f'_n - f'\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Damit erhalten wir für alle  $n \geq N_\varepsilon$  und alle  $x \in [a, b]$  aus (8.4), dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_0}{b - a} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war impliziert dies die gleichmäßige Konvergenz von  $(f_n)$  gegen  $f$ .  $\square$

**Bemerkung 8.10** Die Notwendigkeit der Voraussetzung, dass die gegebene Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zumindest in einem Punkt  $x_0$  konvergent sein muss, lässt sich auf folgende Weise verdeutlichen: Die Stammfunktion einer stetigen Funktion auf einem Intervall ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Wir könnten also unsere Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch eine zweite Folge  $(f_n + c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit beliebigen Konstanten  $c_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ersetzen, ohne dass sich die Folge der Ableitungen ändert. Durch unsere Zusatzvoraussetzung der Konvergenz in einem Punkt wird die mögliche Auswahl dieser Konstanten so eingeschränkt, dass “kein Schaden angerichtet wird”.

Analog zu reellen Zahlenfolgen, kann man auch für Funktionenfolgen mit Hilfe von Partialsummenfolgen den Reihenbegriff einführen.

**Definition 8.11** Sei  $K$  eine Menge, sowie  $(f_n : K \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Funktionenfolge. Dann heißt die Folge

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k := \left( \sum_{k=0}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Funktionenreihe.

Die Begriffe *punktweise* und *gleichmäßige Konvergenz* übertragen sich nun unmittelbar auch auf Reihen. Ist  $f$  die Grenzfunktion, so schreiben wir in beiden Fällen

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k,$$

wobei dann noch durch einen Zusatz geklärt werden muss, um welche Art der Konvergenz es sich handelt. Ein Kriterium für die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenreihe liefert der folgende Satz.

**Satz 8.12 (Konvergenzkriterium von Weierstraß für Funktionenreihen)** *Sei  $K$  eine Menge und  $(f_n : K \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Funktionenfolge mit  $\|f_n\| < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Falls die reelle Zahlenreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|$$

*konvergiert, dann ist Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent.*

**Beweis:** Wegen  $|f_k(x)| \leq \|f_k\|$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $x \in K$  nach dem Majorantenkriterium absolut. Definiere  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{für } x \in K.$$

Wir zeigen, dass unsere Reihe gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 3.7) ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $m > n \geq N_\varepsilon$  gilt, dass

$$\sum_{n+1}^m \|f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhalten wir

$$\sum_{n+1}^{\infty} \|f_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für alle  $m > n \geq N_\varepsilon$ . Folglich gilt für alle  $x \in K$  und alle  $n \geq N_\varepsilon$ , dass

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| < \varepsilon,$$

wobei die erste Ungleichung eine Folgerung aus dem Majorantenkriterium ist. Da  $\varepsilon$  beliebig war folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe gegen  $f$ .  $\square$

**Bemerkung 8.13** Nach Satz 8.7 können wir auch im Fall von Funktionenreihen Integration und Grenzwertbildung miteinander vertauschen. Wir erhalten für eine Folge stetiger Funktionen  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  für die die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergiert, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \, dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) \, dx, \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichung die Linearität des Integrals ausgenutzt haben. Es lassen hier sich also Reihenbildung und Integration miteinander vertauschen.

## 8.2 Potenzreihen

In Abschnitt 6.6 haben wir die Approximation mehrfach differenzierbarer Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  durch *Taylorpolynome* betrachtet. Für den Entwicklungspunkt  $x_0 \in I$  hatten diese für mindestens  $n$ -mal differenzierbare Funktionen  $f$  die Form

$$x \mapsto T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Ist  $f$  sogar beliebig oft differenzierbar, so können wir formal die Funktionenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

betrachten. Diese ist ein Spezialfall einer sogenannten *Potenzreihe*, mit denen wir uns in diesem Abschnitt ausführlicher beschäftigen werden.

**Definition 8.14** 1) Eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (8.5)$$

ist eine Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  wobei  $f_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $z \mapsto c_k (z - a)^k$  mit  $c_k, a \in \mathbb{C}$  gegeben ist. Der Punkt  $a \in \mathbb{C}$  heißt Entwicklungspunkt der Potenzreihe (8.5).

- 2) Wir sagen, die Potenzreihe (8.5) konvergiert punktweise bzw. konvergiert gleichmäßig auf  $K \subseteq \mathbb{C}$ , wenn die durch die Einschränkungen der Funktionen  $f_k : z \mapsto c_k (z - a)^k$  auf  $K$  gegebene Funktionenreihe punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

**Bemerkung 8.15** Eine Potenzreihe wie in Definition 8.14 ist per Definition der Funktionenreihen nichts anderes als die Funktionenfolge der “*Partialsummenfunktionen*”

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k \quad \text{mit} \quad s_n : z \mapsto \sum_{k=0}^n c_k (z - a)^k$$

für  $z \in \mathbb{C}$ . Diese Funktionen  $s_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind offenbar differenzierbar und es gilt

$$s'_n : z \mapsto \sum_{k=1}^n k c_k (z - a)^{k-1}.$$

Die Ableitungen  $s'_n$  sind dabei wieder “*Partialsummenfunktionen*” einer Potenzreihe der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} (z - a)^k. \quad (8.6)$$

Die Schreibweise auf der rechten Seite entspricht dabei formal unserer Definition von Potenzreihen (mit Koeffizienten  $\tilde{c}_k = (k+1)c_{k+1}$ ). Allerdings werden wir die etwas einfachere Schreibweise auf der linken Seite bevorzugt verwenden.

Im Folgenden interessieren wir uns für Bedingungen, unter denen eine Potenzreihe zumindest auf einer Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{C}$  der komplexen Zahlen gleichmäßig konvergent ist. Wollen wir dann noch Satz 8.9 über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung anwenden, so ist es in Hinblick auf Bemerkung 8.15 sinnvoll, dabei auch Aussagen über die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (8.6) zu treffen.

**Satz 8.16** Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $a \in \mathbb{C}$ . Die komplexe Zahlenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z_0 - a)^k$$

konvergiere für ein  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Weiter seien  $r \in \mathbb{R}$  mit  $0 < r < |z_0 - a|$ , sowie

$$K := K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

Dann gilt:

- 1) Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$  konvergiert gleichmäßig auf  $K$ .
- 2) Die Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1}$  konvergiert gleichmäßig auf  $K$ .

**Beweis:** Wir beweisen zunächst 1) und definieren dazu  $f_k : z \mapsto c_k (z - a)^k$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Da nach Voraussetzung die komplexe Zahlenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z_0)$$

konvergiert, ist die Folge  $(f_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt. Folglich existiert ein  $M > 0$ , so dass  $|f_n(z_0)| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Sei nun  $z \in K$  beliebig. Dann gilt wegen  $|z - a| \leq r$ , dass

$$\begin{aligned} |f_k(z)| &= |c_k| \cdot |z - a|^k = |c_k| \cdot |z_0 - a|^k \cdot \frac{|z - a|^k}{|z_0 - a|^k} = f_k(z_0) \cdot \frac{|z - a|^k}{|z_0 - a|^k} \\ &\leq M \cdot \frac{r^k}{|z_0 - a|^k} = M \Theta^k, \end{aligned}$$

mit  $\Theta := \frac{r}{|z_0 - a|} < 1$ . Damit erhalten wir

$$\|f_k\|_K \leq M \cdot \Theta^k$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nun ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} M \Theta^k = M \sum_{k=0}^{\infty} \Theta^k$$

als Vielfaches der geometrischen Reihe über  $\Theta < 1$  eine konvergente Majorante für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_K$ , woraus deren Konvergenz folgt. Mit dem Konvergenzkriterium von Weierstraß (Satz 8.12) folgt die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  auf  $K$ .

Für den Beweis von 2) definieren wir die Funktionen  $g_k : z \mapsto k c_k (z - a)^{k-1}$  für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und erhalten komplett analog zu 1) die Abschätzung

$$\|g_k\|_K \leq kM \frac{\Theta^k}{r}, \quad \text{da} \quad |g_k(z)| = k|c_k| \cdot |z_0 - a|^k \cdot \frac{|z - a|^{k-1}}{|z_0 - a|^k} \leq kM \frac{r^{k-1}}{|z_0 - a|^k}$$

für alle  $z \in K$  gilt. Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{M}{r} \Theta^k$  konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1) \frac{M}{r} \Theta^{k+1}}{k \frac{M}{r} \Theta^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) \Theta \right) = \Theta < 1,$$

und ist daher eine konvergente Majorante für  $\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|$ , woraus wir mit Satz 8.12 die gleichmäßige Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$  auf  $K$  erhalten.  $\square$

**Beispiel 8.17** 1) Wir wissen bereits aus Kapitel 5, dass die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

für jedes  $z \in \mathbb{C}$  konvergent ist. Offenbar ist dies eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $a = 0$ . Damit erhalten wir mit Hilfe von Satz 8.16, dass die Reihe auf jeder Menge  $K_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ ,  $r < \infty$  gleichmäßig konvergent ist. Speziell ist also die Funktion  $\exp : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  der gleichmäßige Limes der entsprechenden Potenzreihe. Daher erhalten wir nach Bemerkung 8.13, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp(x) \, dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^k}{k!} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Big|_a^b \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x^k}{k!} \Big|_a^b \right) = \exp(x) \Big|_a^b, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit benutzt haben, dass die Terme für  $k = 0$  sich genau aufheben würden. Somit erhalten wir eine Bestätigung dafür, dass die Exponentialfunktion mit ihrer Stammfunktion (bzw. mit einer von diesen) übereinstimmt. Die wesentliche Erkenntnis dabei ist jedoch, dass wir eine neue Möglichkeit gefunden haben, um Stammfunktionen zu bestimmen.

- 2) Wir versuchen, die Technik aus 1) anzuwenden, um die Stammfunktion von  $x \mapsto e^{-x^2}$  zu bestimmen. Die Potenzreihe

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} x^{\ell} \quad \text{mit} \quad c_{\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } \ell = 2k+1, \\ \frac{(-1)^k}{k!} & \text{für } \ell = 2k. \end{cases}$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergent und daher auf jedem Intervall  $([0, x] \cup [x, 0]) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent. (Die letzte Darstellung der Reihe haben wir nur aufgeführt,

um zu verdeutlichen, dass es sich in der Tat um eine Potenzreihe wie in Definition 8.14 handelt.) Somit erhalten wir mit Hilfe von Bemerkung 8.13 für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1) \cdot k!} x^{2k+1}.$$

Obwohl wir die (bzw. eine) Stammfunktion von  $x \mapsto e^{-x^2}$  nicht durch elementare Funktionen ausdrücken konnten, so haben wir jetzt zumindest eine Reihendarstellung ermittelt und können damit ihre Funktionswerte beliebig genau berechnen.

3) Wir definieren den *Integralsinus*  $Si : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$Si(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Hierbei nutzen wir unser Wissen, dass sich die Funktion  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(vgl. Bemerkung 6.15 und Bemerkung 5.42) stetig auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen lässt und interpretieren den eigentlich undefinierten Ausdruck  $\frac{\sin 0}{0}$  einfach als 1. Da für alle  $t \in \mathbb{R}$  nach Satz 5.23 gilt, dass

$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

erhalten wir für jedes  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  durch Multiplikation mit der Konstanten  $\frac{1}{t}$  (dies ist in der Tat im Hinblick auf die Reihe eine Konstante, da nicht abhängig von  $k$ ), dass

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Mit der oben erwähnten Konvention  $\frac{\sin 0}{0} = 1$  liefert die Reihendarstellung auch für  $t = 0$  das richtige Ergebnis. Da die Reihe außerdem für alle  $t \in \mathbb{R}$  konvergent ist, konvergiert sie nach Satz 8.16 insbesondere auf jedem Intervall  $[0, x]$ ,  $x > 0$  gleichmäßig. Somit erhalten wir mit Hilfe von Bemerkung 8.13, dass

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

Die in den vorangegangenen Beispielen betrachteten Reihen waren jeweils für alle  $x \in \mathbb{R}$  (bzw. sogar für alle  $z \in \mathbb{C}$ ) konvergent. Dies ist allerdings nicht selbstverständlich, weshalb wir den folgenden Begriff einführen.

**Definition 8.18** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  eine Potenzreihe mit  $c_k, a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ . Dann heißt

$$R := \sup \left\{ |z-a| \mid z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \text{ konvergiert} \right\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe.

**Beispiel 8.19** 1) Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  ist offenbar eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $a = 0$ . Da die Reihe für  $|z| < 1$  konvergent ist, aber für  $|z| > 1$  divergiert (unsere Argumentation aus Teil 2) von Beispiel 3.2 lässt sich direkt auf den komplexen Fall verallgemeinern), folgt, dass der Konvergenzradius in diesem Fall den Wert  $R = 1$  hat.

2) Die Exponentialreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  ist, wie bereits des öfteren hervorgehoben, für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergent. Daher hat diese Reihe den Konvergenzradius  $R = \infty$ .

**Bemerkung 8.20** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  eine Potenzreihe mit  $c_k, a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ .

1) Hat unsere Potenzreihe den Konvergenzradius  $R > 0$ , so ist die Reihe nach Satz 8.16 auf jeder Menge  $K_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$  gleichmäßig konvergent und daher als Funktion in  $z$  insbesondere dort stetig (Satz 8.6). Da punktweise Konvergenz und auch Stetigkeit *lokale Eigenschaften* sind, die gerade *punktweise* definiert sind, folgt, dass unsere Potenzreihe auch auf der *offenen Kreisscheibe*

$$U_R(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\} = \bigcup_{r < R} K_r(a)$$

konvergiert und stetig ist. Damit erklärt sich letztendlich auch der Name *Konvergenzradius* für  $R$ . Die Konvergenz in  $U_R(a)$  ist aber i.A. nicht gleichmäßig, dies ist nur auf den *abgeschlossenen Kreisscheiben* mit Radius  $r < R$  gesichert. Für Punkte  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z-a| = R$  können wir dagegen keine Aussage treffen. Die Potenzreihe kann dort konvergieren oder auch divergieren.

2) Der Konvergenzradius unserer Potenzreihe lässt sich in vielen Fällen sehr einfach mit dem Quotientenkriterium bestimmen. Sind alle  $c_n$  von Null verschieden und existiert

$$c := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

so folgt aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|c_n(z-a)^n|} = c|z-a|$$

dass die Potenzreihe konvergiert, falls  $c|z-a| < 1$  gilt, und divergiert, falls  $c|z-a| > 1$  gilt. Somit erhalten wir den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

falls  $c \neq 0$  bzw.  $R = \infty$ , falls  $c = 0$ .

- 3) Leider gibt es Fälle, in denen die Berechnung des Konvergenzradius wie in 2) nicht möglich ist (denken Sie z.B. an Reihen, wo  $c_n = 0$  für alle geraden (oder alle ungeraden)  $n \in \mathbb{N}$  gilt). In diesen Fällen können wir auf das Wurzelkriterium ausweichen. Dazu betrachten wir den Grenzwert

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |z-a|^n} = |z-a| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Falls  $(\sqrt[n]{|c_n|})_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, existiert  $c := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  und analog zu 2) erhalten wir für den Konvergenzradius  $R$  der Potenzreihe für  $c \neq 0$  die sogenannte *Cauchy-Hadamard-Formel*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Mit der Konvention  $\frac{1}{0} = \infty$  und  $\frac{1}{\infty} = 0$  bleibt diese Formel auch für  $c = 0$  bzw. für den Fall, dass  $(\sqrt[n]{|c_n|})_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist (also für den Fall “ $c = \infty$ ”), gültig. Im letzteren Fall konvergiert die Potenzreihe nämlich nur für  $z = a$  und es folgt  $R = 0$ .

**Beispiel 8.21** 1) Für die beiden Reihen aus Beispiel 8.19 können wir den Konvergenzradius mit der Formel aus 2) noch einmal überprüfen. Für die Exponentialreihe gilt  $c_k = \frac{1}{k!}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit erhalten wir den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Für die geometrische Reihe gilt dagegen  $c_k = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  was wie erwartet auf den Konvergenzradius  $R = 1$  führt.

- 2) In Beispiel 6.55 haben wir bereits eine Reihendarstellung des natürlichen Logarithmus (bzw. genauer der Funktion  $x \mapsto \ln(1+x)$ ) mit Hilfe der Taylorentwicklung bestimmt. Diese Reihe werden wir jetzt noch einmal einfacher mit unserer neuen Technik herleiten. Für  $|x| < 1$  gilt

$$\ln(1+x) = \ln(1+t) \Big|_0^x = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k dt.$$



Die letzte Reihe ist wieder unsere geometrische Reihe mit Konvergenzradius  $R = 1$  und daher nach Satz 8.16 auf dem Intervall  $[-|x|, |x|]$  gleichmäßig konvergent. Damit erhalten wir

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Für  $x = 1$  und  $x = -1$  erhalten wir die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^k}{k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

von denen die erste konvergent ist und die zweite divergent. Hieraus folgt, dass  $R = 1$  der Konvergenzradius unserer Potenzreihe ist. (Klar?). Beachten Sie, dass die Gleichheit

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}, \quad (8.7)$$

die wir in Beispiel 6.55 nachgewiesen haben, an dieser Stelle nicht einfach aus der Konvergenz der entsprechenden Reihe folgt. Die Gleichheit

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

haben wir oben nämlich nur für den Fall  $|x| < 1$  bewiesen. Um damit auf (8.7) zu schließen zu können, müssten wir wissen, dass die Zuordnung

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

in  $x = 1$  stetig ist. Nach Bemerkung 8.20 ist uns die Stetigkeit aber nur in der Menge  $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$  bekannt. Wir werden im nächsten Abschnitt auf diese Problematik zurückkommen.

Wir sind mit unseren Folgerungen aus Satz 8.16 noch nicht ganz fertig. Bisher haben wir uns nur auf die Konvergenz der Potenzreihe konzentriert, nun wenden wir uns ihrer Ableitung zu.

**Korollar 8.22** Sei  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ ,  $c_k, a \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist die durch  $x \mapsto f(x)$  definierte Funktion  $f : ]a-R, a+R[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}. \quad (8.8)$$

Die Potenzreihe in (8.8) hat ebenfalls den Konvergenzradius  $R$ .

**Beweis:** Die Differenzierbarkeit und die Formel für die Ableitung folgen sofort aus Satz 8.9, da die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$  nach Satz 8.16 in jedem Intervall  $[a-r, a+r]$ ,  $r < R$  gleichmäßig konvergent ist und jedes  $x \in ]a-R, a+R[$  in einem Intervall der Form  $[a-r, a+r]$ ,  $r < R$  enthalten ist. Insbesondere folgt damit, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe in (8.8) mindestens  $R$  ist. Er kann aber andererseits nicht größer als  $R$  sein, denn sonst könnten wir unter Anwendung von Satz 8.7 folgern, dass auch der Konvergenzradius der ursprünglichen Potenzreihe größer als  $R$  sein müsste. (Klar? Wenn nicht, Übung!)  $\square$

Korollar 8.22 wird oft auch so zusammengefasst, dass man Potenzreihen *gliedweise differenzieren* darf.

**Beispiel 8.23** Als Anwendung von Korollar 8.22 bestimmen wir die Summe der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$$

Dazu betrachten wir für  $|x| < 1$  die Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$ . Diese sieht fast so aus, wie die “Ableitung der geometrischen Reihe”. Tatsächlich gilt nach Korollar 8.22:

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = x \cdot \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) = x \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Damit erhalten wir speziell für  $x = \frac{1}{3}$ , dass  $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{4}$ .

**Korollar 8.24** Sei  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ ,  $c_k, a \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist die durch  $x \mapsto f(x)$  definierte Funktion  $f : ]a-R, a+R[ \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar. Speziell gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

**Beweis:** Durch wiederholte Anwendung von Korollar 8.22 erhalten wir, dass  $f$  beliebig oft differenzierbar ist, sowie für alle  $x \in ]a-R, a+R[$ , dass

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) c_k \cdot (x-a)^{k-n}.$$

Einsetzen von  $x = a$  liefert  $f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n$ .  $\square$

Korollar 8.24 besagt nichts anderes, als dass eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises mit ihrer eigenen Taylorreihe übereinstimmt.

## 8.3 Analytische Funktionen

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises wunderschöne Eigenschaften haben. Aus diesem Grund ist es gerechtfertigt, solchen Funktionen einen eigenen Namen zu geben.

**Definition 8.25** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, sowie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1)  $f$  heißt analytisch in  $a \in I$ , falls es ein  $r > 0$  mit  $U_r(a) \subseteq I$  gibt, so dass  $f$  auf  $U_r(a)$  durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $a$  und Konvergenzradius  $R \geq r$  dargestellt werden kann.
- 2)  $f$  heißt analytisch, falls  $f$  in jedem  $a \in I$  analytisch ist.

**Bemerkung 8.26** Mit Korollar 8.24 folgt sofort, dass analytische Funktionen beliebig oft differenzierbar sind und in jedem Punkt  $a$  durch ihre Taylorreihe mit Entwicklungspunkt  $a$  dargestellt werden können.

**Beispiel 8.27** 1) Die Funktionen  $\exp$ ,  $\sin$  und  $\cos$  sind analytisch. Wir zeigen dies exemplarisch für die Exponentialfunktion. Die Analytizität in  $a = 0$  ist uns durch die zugehörige Reihendarstellung aus Kapitel 3 bestens bekannt. Die Reihendarstellung mit Entwicklungspunkt  $a \neq 0$  erhalten wir dagegen so:

$$\exp(x) = \exp(a + x - a) = \exp(a) \exp(x - a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(a)}{k!} (x - a)^k$$

- 2) Der natürliche Logarithmus  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist analytisch. Für den Nachweis der Analytizität in  $a = 1$  erhalten wir aus der Taylorreihe der Funktion  $x \mapsto \ln(x + 1)$  unmittelbar die Darstellung

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k},$$

wobei die so gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius  $R = 1$  hat. Für beliebiges  $a > 0$  erhalten wir dagegen

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln\left(\frac{ax}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \ln a + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^k}{k} \\ &= \ln a + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-a)^k}{ka^k}. \end{aligned}$$

Tatsächlich ist dies eine Potenzreihendarstellung mit den Koeffizienten  $c_0 = \ln a$  und  $c_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{ka^k}$  für  $k \geq 1$ . Der zugehörige Konvergenzradius lässt sich leicht als  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = a$  berechnen.

- 3) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht analytisch, da nicht analytisch in  $a = 0$ . Wir hatten bereits in Bemerkung 6.56 festgestellt, dass die Taylorreihe von  $f$  im Entwicklungspunkt  $a = 0$  konstant Null ist. Somit wird  $f$  in keiner Umgebung  $U_r(0)$ ,  $r > 0$  durch ihre Taylorreihe um  $a = 0$  dargestellt und ist folglich nicht analytisch in  $a = 0$ . Damit haben wir insbesondere ein Beispiel für eine beliebig oft differenzierbare Funktion gefunden, die nicht analytisch ist.

- 4) Die Funktion  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist analytisch in  $a = 0$ . Dies zeigen wir mit unserem im Abschnitt 8.2 entwickelten Trick. Sei dazu  $|x| < 1$ . Unter Ausnutzung der Formel für die Summe der geometrischen Reihe und von  $\arctan(0) = 0$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \int_0^x \arctan'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-t^2)} dt \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Hier haben wir für die Vertauschbarkeit von Integration und Reihenbildung wieder ausgenutzt, dass die Konvergenz auf jedem Intervall der Form  $[-r, r]$ ,  $r < 1$  gleichmäßig ist, da die geometrische Reihe den Konvergenzradius 1 hat. Betrachten wir die so erhaltene Reihe weiter, so ist diese für  $x = -1$  divergent, für  $x = 1$  erhalten wir jedoch die aus Beispiel 3.12 bekannte Leibniz-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Leider können wir an dieser Stelle nicht einfach darauf schließen, dass die Summe dieser Reihe  $\arctan(1)$  entspricht, denn dazu würden wir die Stetigkeit der durch die Potenzreihe gegebenen Funktion in der Stelle  $x = 1$  benötigen.

Das Problem am Ende des letzten Beispiels ist uns schon in Beispiel 8.21 begegnet. Der folgende Satz hilft uns, es zu lösen.

**Satz 8.28 (Abelscher Grenzwertsatz)** Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, so dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  konvergiert. Dann ist die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

für alle  $x \in [0, 1]$  konvergent und die durch  $x \mapsto f(x)$  gegebene Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig. Insbesondere ist  $f$  stetig in  $x_0 = 1$ , d.h. es gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k. \quad (8.9)$$

**Beweis:** Die eigentlich interessante Aussage des Satzes liegt in der Gleichung (8.9), denn nach Bemerkung 8.20 konvergiert die Potenzreihe in allen  $[-r, r]$  mit  $r < 1$  sogar gleichmäßig und daher insbesondere auch punktweise in  $] - 1, 1[ = \cup_{r < 1} [-r, r]$  und die Funktion  $f$  ist in diesem offenen Intervall stetig und sogar beliebig oft differenzierbar. Es bleibt also nur noch (8.9) zu zeigen.

Zum Beweis der Stetigkeit von  $f$  in 1 müssen wir dann die Existenz von  $\delta > 0$  zeigen, so dass für alle  $x \in [0, 1]$  gilt

$$|x - 1| < \delta \implies |f(1) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dazu betrachten wir die Reihenreste

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$$

für alle  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ . Wir stellen zunächst einige ihrer Eigenschaften zusammen:

- 1) Per Definition gilt  $r_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = f(1)$ .
- 2) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt offenbar  $r_{n-1} - r_n = c_n$ .
- 3) Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ . Speziell ist  $(r_n)$  beschränkt, d.h. es gibt  $M > 0$  mit  $|r_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$  konvergiert für alle  $x$  mit  $|x| < 1$  absolut, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} |r_k x^k| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{M}{1 - |x|}.$$

Sei nun  $x \in [0, 1[$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(1) - f(x) &= r_{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = r_{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} r_{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = - \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = (1 - x) \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k \\ &= (1 - x) \sum_{k=0}^{N-1} r_k x^k + (1 - x) \sum_{k=N}^{\infty} r_k x^k \end{aligned} \tag{8.10}$$

für ein beliebiges  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , das wir an dieser Stelle also noch frei wählen können. Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Zum Beweis der Stetigkeit von  $f$  in 1 müssen wir dann die Existenz von  $\delta > 0$  zeigen, so dass für alle  $x \in [0, 1]$  gilt

$$|x - 1| < \delta \implies |f(1) - f(x)| < \varepsilon.$$

Wir schätzen dazu die beiden Terme in (8.10) jeweils durch  $\frac{\varepsilon}{2}$  ab. Wegen 3) gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|r_k| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $k \geq N$ . Damit erhalten wir für alle  $x \in [0, 1[$ , dass

$$\left| (1-x) \sum_{k=N}^{\infty} r_k x^k \right| \leq (1-x) \sum_{k=N}^{\infty} |r_k| x^k < (1-x) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x) \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.11)$$

Weiter gilt wegen  $|x| < 1$ , dass

$$\left| (1-x) \sum_{k=0}^{N-1} r_k x^k \right| < (1-x) \sum_{k=0}^{N-1} |r_k| \leq (1-x) NM. \quad (8.12)$$

Wähle also  $\delta := \frac{\varepsilon}{2NM} > 0$ . Dann gilt für alle  $x \in ]1-\delta, 1[$  wegen (8.10), (8.11) und (8.12), dass

$$|f(1) - f(x)| \leq \left| (1-x) \sum_{k=0}^{N-1} r_k x^k \right| + \left| (1-x) \sum_{k=N}^{\infty} r_k x^k \right| < \delta NM + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**Beispiel 8.29** Als Anwendung von Satz 8.28 können wir nun auch die Summe der Leibniz-Reihe bestimmen. Wegen der Stetigkeit der Arkustangensfunktion gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{x \nearrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \lim_{x \nearrow 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Für die praktische Berechnung der Kreiszahl  $\pi$  ist die Leibniz-Reihe allerdings nicht geeignet, da sie nur sehr langsam konvergiert. Deutlich geeigneter ist die Berechnung über die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

die sich z.B. mit Hilfe von Additionstheoremen herleiten lässt. Mit dieser Formel hat der Mathematiker John Machin bereits 1706 die ersten 100 Stellen von  $\pi$  berechnen können.

# Teil II

## Analysis II





# Kapitel 1

## Topologische Grundlagen

In der *Analysis I* haben wir die *Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer Veränderlichen* betrachtet. Wesentliches Ziel der Vorlesungen *Analysis II* und *Analysis III* ist die Verallgemeinerung dieser Theorie auf Funktionen mehrerer Veränderlicher. Dabei liegt in der *Analysis II* der Schwerpunkt auf der *Differentiation* und in der *Analysis III* werden wir uns dann auf die *Integrationstheorie* konzentrieren.

Der grundlegende Begriff in der Analysis I war der der *Konvergenz von Folgen*. Aufbauend darauf, konnten wir die wichtigen Begriffe *Stetigkeit*, *Differenzierbarkeit* und *Integrierbarkeit*, sowie alle weiteren damit in Zusammenhang stehenden Konzepte einführen. Die Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  aus Analysis I lautete in rein formaler Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Vergleichen wir nun diese Definition mit der Definition der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen mit Hilfe der Supremumsnorm aus Abschnitt 8.1 der Analysis I! Dazu seien  $K \neq \emptyset$  eine Menge, sowie  $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon,$$

wobei  $\|g\|_{\sup} = \sup \{g(x) \mid x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  für  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die formale Ähnlichkeit dieser beiden Begriffe ist doch sehr offensichtlich. Der einzige Unterschied (abgesehen von der Tatsache, dass wir statt reeller Zahlen nun Funktionen betrachten) liegt darin, dass wir in der zweiten Definition den Betrag durch die Supremumsnorm ersetzt haben. Erinnern wir uns dann noch an die grundlegenden Eigenschaften des Betrages (Satz 1.13 aus Analysis I) und stellen wir fest, dass auch die Supremumsnorm dieselben Eigenschaften besitzt, so motiviert das die Definition der *Norm*, die wir im nächsten Abschnitt betrachten. Die Hauptrolle in diesem Kapitel spielt aber der Begriff der *Metrik*, der etwas schwächer ist, als der der Norm. Beide Begriffe erlauben uns dann die Verallgemeinerung der *Konvergenz* auf Folgen in beliebigen Mengen.

## 1.1 Normen und Metriken

Wie in der Einleitung angekündigt, verallgemeinern wir zunächst einmal den Begriff *Betrag* einer reellen Zahl auf beliebige Elemente eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums. Hier und im Folgenden steht  $\mathbb{K}$  dabei für einen der beiden Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.1** Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm auf  $\mathcal{V}$ , falls für alle  $v, w \in \mathcal{V}$  und alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

- i)  $\|v\| \geq 0$  und  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .
- ii)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$  (absolute Homogenität).
- iii)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (Dreiecksungleichung).

Ein normierter Raum  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{V}$  zusammen mit einer Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathcal{V}$ .

Im Folgenden schreiben wir meist  $\mathcal{V}$  statt  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  für einen normierten Raum und setzen voraus, dass die dort definierte Norm mit  $\|\cdot\|$  bezeichnet wird. Beachten Sie, dass Normen immer reelle Werte annehmen, selbst wenn der zugrundeliegende Körper der Körper der komplexen Zahlen ist.

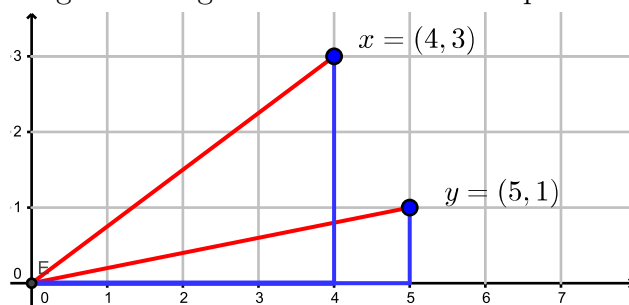
**Beispiel 1.2** 1)  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  sind Normen auf  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ .

- 2)  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$ , die sogenannte *euklidische Norm*. (Dies weisen Sie in der Linearen Algebra nach.) Eine weitere Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist die sogenannte *Taxifahrer-* oder *Manhattan-Norm*, die durch

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gegeben ist. Der Name dieser Norm erklärt sich leicht, wenn man die Norm von Vektoren mit ganzzahligen Einträgen betrachtet und interpretiert.

Die euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$  entspricht dann dem direkten Abstand zum Ursprung per “Luftlinie”, während die Norm  $\|\cdot\|_1$  sich als der “Abstand” interpretieren lässt, der sich für einen Taxifahrer ergibt, der sich an das blockartige Straßennetz in Manhattan halten muss. Für die Elemente  $x = (4, 3)$  und  $y = (5, 1)$  des  $\mathbb{R}^2$  erhalten wir z.B., dass



$$\|x\|_2 = 5, \quad \|x\|_1 = 7, \quad \|y\|_2 = \sqrt{26}, \quad \|y\|_1 = 6.$$

Interessanterweise gilt  $\|x\|_2 < \|y\|_2$ , aber  $\|x\|_1 > \|y\|_1$ , d.h. welcher der beiden Punkte einen “größeren Abstand” vom Ursprung hat, hängt von der betrachteten Norm ab. Allgemeiner kann man noch für  $p \geq 1$  die sogenannte  $p$ -Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  betrachten, die für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  durch

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

gegeben ist. Für die Spezialfälle  $p = 2$  und  $p = 1$  erhalten wir dann gerade wieder die euklidische bzw. die Manhattan-Norm, wodurch sich auch die oben gewählten Bezeichnungen dieser beiden Normen erklären. Während die Normeigenschaften i) und ii) leicht nachgewiesen können, ist der Nachweis der Dreiecksungleichung (Eigenschaft iii)) außer im Fall  $p = 1$  relativ kompliziert, weshalb wir an dieser Stelle auf einen Nachweis verzichten und auf andere Veranstaltungen wie z.B. *Funktionalanalysis I* verweisen.

3) Eine weitere Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  erhalten wir durch

$$\|x\|_\infty := \max \{ |x_i| \mid i = 1, \dots, n \}$$

für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (Übung), die sogenannte *Maximumsnorm*, die umgangssprachlich auch “Unendlich-Norm” genannt wird. Die Bezeichnung mit dem Index  $\infty$  erklärt sich dadurch, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt (Übung):

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$$

Auch die Supremumsnorm ist eine Norm, allerdings nur unter gewissen Voraussetzungen, die wir etwas später in diesem Abschnitt präzisieren werden. Weitere Beispiele für Normen lernen Sie in der *Linearen Algebra* kennen.

So schön und hilfreich der Begriff der Norm auch ist - wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viel damit arbeiten - so einschränkend ist auch die Tatsache, dass wir in der Definition von einem Vektorraum ausgehen müssen. Tatsächlich machen die Forderungen ii) und iii) in der Definition der Norm nur dann Sinn, wenn in unserer Menge  $\mathcal{V}$  eine Addition und eine Skalarmultiplikation erklärt sind. In der Analysis I haben wir es jedoch auch häufig mit von  $\mathbb{R}$  verschiedenen Intervallen als Definitionsbereich einer Funktion zu tun gehabt. Dies sind zwar Teilmengen von Vektorräumen, aber eben selbst keine Vektorräume. Schauen wir uns aber noch einmal die Konvergenzdefinitionen aus der Einführung dieses Kapitels an, so stellen wir fest, dass wir eigentlich gar nicht die “Norm” von einzelnen Elementen benötigen, sondern nur den Begriff des *Abstands*, der für zwei reellen Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  gerade durch  $|x - y|$  gegeben ist. Dieser Begriff lässt sich problemlos auf beliebige Mengen verallgemeinern, ohne dass wir eine Vektorraumstruktur benötigen.

**Definition 1.3** Sei  $X$  eine beliebige Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Metrik auf  $X$ , falls für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

- i)  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie).
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Dreiecksungleichung).

Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Metrik  $d$  auf  $X$ .

**Bemerkung 1.4** Die Bedingung  $d(x, y) \geq 0$  in i) hätten wir auch weglassen können, da sie aus den anderen Bedingungen folgt. Ist  $(X, d)$  nämlich ein metrischer Raum, so gilt für alle  $x, y \in X$  dass

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Zeigen Sie analog, dass man auch die Bedingung  $\|v\| \geq 0$  in der Definition der Norm weglassen könnte.

**Beispiel 1.5** 1)  $(\mathbb{R}, d)$  und  $(\mathbb{C}, d)$  jeweils mit  $d(x, y) := |x - y|$  für  $x, y \in \mathbb{K}$  sind metrische Räume. Dies weisen wir sogleich in allgemeinerer Form nach:

- 2) Sei  $\mathcal{V}$  ein normierter Raum. Dann wird durch  $d(v, w) := \|v - w\|$  eine Metrik auf  $\mathcal{V}$  definiert, denn i) ist klar und außerdem gilt

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \cdot \|w - v\| = \|w - v\| = d(w, v)$$

für alle  $v, w \in \mathcal{V}$ , was ii) zeigt, und die Dreiecksungleichung iii) folgt aus

$$d(u, w) = \|u - w\| = \|u - v + v - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$$

für alle  $u, v, w \in \mathcal{V}$ . Im Folgenden betrachten wir daher normierte Räume als Spezialfälle von metrischen Räumen.

- 3) Speziell ist also der  $\mathbb{R}^n$  mit der durch die euklidische Norm induzierten Metrik  $d$  ein metrischer Raum. Wir bezeichnen  $d$  dann als die *Standardmetrik* auf dem  $\mathbb{R}^n$ .
- 4) Sei  $X$  eine Menge. Dann ist durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik  $d$  auf  $X$  gegeben. (Klar?) Diese heißt die *diskrete Metrik* auf  $X$ , da zwei voneinander verschiedene Elemente  $x, y$  bereits den “großen” Abstand Eins besitzen, sich also “diskret” im Sinne von “abgesondert” verhalten.

- 5) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $Y \subseteq X$ . Dann ist auch  $(Y, d_Y)$  mit

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

für alle  $y_1, y_2 \in Y$  ein metrischer Raum. Es gilt offenbar  $d_Y = d|_{Y \times Y}$ . Wir nennen  $d_Y$  die *durch  $d$  induzierte Metrik* oder auch *Spurmetrik* auf  $Y$ .

Als nächstes wollen wir wie angekündigt in allgemeiner Form nachweisen, dass die Supremumsnorm tatsächlich eine Norm ist. In Kapitel 8 der Analysis I hatten wir schon angedeutet, dass die Supremumsnorm nur für beschränkte Funktionen endlich ist, dies müssen wir also voraussetzen. Tatsächlich lässt sich der Begriff der Beschränktheit in beliebigen metrischen Räumen definieren.

**Definition 1.6** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $A \subseteq X$ .

- 1)  $\text{diam}(A) := \sup \{d(a, \tilde{a}) \mid a, \tilde{a} \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  für  $A \neq \emptyset$  bzw.  $\text{diam}(A) := 0$  für  $A = \emptyset$  heißt der Durchmesser von  $A$ .
- 2) Die Menge  $A$  heißt beschränkt, falls  $\text{diam}(A) < \infty$ .

**Beispiel 1.7** 1) Sei  $\mathbb{R}$  mit der Standardmetrik versehen. Dann ist  $]0, 1[$  beschränkt, denn offenbar gilt:

$$\text{diam}([0, 1]) = \sup \{|x - y| \mid x, y \in ]0, 1[ \} = 1.$$

- 2) Ist die Menge  $X$  mit der diskreten Metrik versehen, so ist jede Teilmenge von  $X$  beschränkt, denn offenbar gilt  $\text{diam}(\emptyset) = 0$  und  $\text{diam}(A) = 1$  für alle  $\emptyset \neq A \subseteq X$ .

Immer wenn wir uns bereits bekannte Begriffe auf metrische Räume erweitern, möchten wir natürlich, dass diese Begriffe für den metrischen Raum  $(\mathbb{R}, d)$ , wobei  $d$  die Standardmetrik ist, mit den aus der Analysis I bekannten Begriffen übereinstimmen. Als Generalvereinbarung nehmen wir dazu an, dass  $\mathbb{R}$  stets mit der Standardmetrik versehen ist, falls wir nicht ausdrücklich etwas anderes behaupten. Mit Hilfe des nächsten Satzes können wir dann in der Tat bestätigen, dass der für metrische Räume neu definierte Begriff der *Beschränktheit* für den Spezialfall  $\mathbb{R}$  Altbekanntes liefert.

**Satz 1.8** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $A \subseteq X$  mit  $A \neq \emptyset$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1)  $A$  ist beschränkt.
- 2) Es gibt  $x \in X$  und  $M \geq 0$ , so dass  $d(a, x) \leq M$  für alle  $a \in A$  gilt.
- 3) Zu jedem  $x \in X$  gibt es ein  $M_x \geq 0$ , so dass  $d(a, x) \leq M_x$  für alle  $a \in A$  gilt.

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)”: Da  $A \neq \emptyset$  gilt, existiert ein  $x \in A$ . Da  $A$  außerdem beschränkt ist, gilt  $M := \text{diam}(A) < \infty$ . Damit folgt  $d(a, x) \leq M$  für alle  $a \in A$ .

“2)  $\Rightarrow$  3)”: Wegen 2) gibt es ein  $\tilde{x} \in X$  und  $M \geq 0$  mit  $d(a, \tilde{x}) \leq M$  für alle  $a \in A$ . Sei nun  $x \in X$  beliebig und  $M_x := M + d(x, \tilde{x}) \geq 0$ . Dann gilt für alle  $a \in A$ , dass

$$d(a, x) \leq d(a, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, x) \leq M + d(x, \tilde{x}) = M_x.$$

“3)  $\Rightarrow$  1)”: Wähle ein  $x \in X$ . Dann gibt es  $M_x \geq 0$ , so dass  $d(a, x) \leq M_x$  für alle  $a \in A$ . Dann gilt für alle  $a, \tilde{a} \in A$ , dass

$$d(a, \tilde{a}) \leq d(a, x) + d(x, \tilde{a}) \leq 2M_x,$$

und damit folgt  $\text{diam}(A) \leq 2M_x$ . Folglich ist  $A$  beschränkt.  $\square$

**Bemerkung 1.9** Mit der Charakterisierung 3) aus Satz 1.8 erhalten wir, dass eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  genau dann beschränkt ist, wenn es ein  $M \geq 0$  gibt, so dass

$$d(a, 0) = |a| \leq M$$

für alle  $a \in A$  gilt. Dies ist offensichtlich äquivalent zur Beschränktheit aus Analysis I, siehe dort Definition 1.46.

**Definition 1.10** Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $(Y, d)$  ein metrischer Raum.

- 1) Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt beschränkt, falls  $f(X) \subseteq Y$  beschränkt ist.
- 2)  $\mathcal{B}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ ist beschränkt}\}.$

**Satz 1.11** Sei  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $X \neq \emptyset$  eine Menge. Dann wird durch<sup>1</sup>

$$\|f\|_\infty := \sup \{\|f(x)\| \mid x \in X\}$$

eine Norm  $\|\cdot\|_\infty$  auf  $\mathcal{B}(X, \mathcal{V})$  definiert, die sogenannte Supremumsnorm.

**Beweis:** Für alle  $f \in \mathcal{B}(X, \mathcal{V})$  gilt  $\|f\|_\infty < \infty$ , denn da  $f$  beschränkt ist, gibt es nach Satz 1.8 ein  $M \geq 0$  mit

$$\|f(x)\| = d(f(x), 0) \leq M$$

für alle  $x \in X$  und es folgt  $\|f\|_\infty \leq M < \infty$ . Die Normeigenschaften i) und ii) sind nun klar und iii) folgt, da für alle  $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathcal{V})$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup \{\|f(x) + g(x)\| \mid x \in X\} \\ &\leq \sup \{\|f(x)\| + \|g(x)\| \mid x \in X\} \\ &\leq \sup \{\|f(x)\| \mid x \in X\} + \sup \{\|g(x)\| \mid x \in X\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \quad \square \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Da die Definition der Supremumsnorm in gewisser Weise der Definition der Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^n$  entspricht, wird diese üblicherweise mit  $\|\cdot\|_\infty$  statt mit  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  bezeichnet. Im Folgenden werden wir  $\|\cdot\|_\infty$  immer dann verwenden, wenn es sich dabei tatsächlich um eine Norm handelt. Die Bezeichnung  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  verwenden wir dann analog zur Analysis I, d.h. wenn auch der Wert  $\infty$  angenommen werden kann, wie z.B. bei unbeschränkten Funktionen.

## 1.2 Offen- und Abgeschlossenheit

Bereits in der Analysis I spielten  $\epsilon$ -Umgebungen eine wichtige Rolle, ebenso der Begriff *innerer Punkt* und die Unterscheidung von *offenen* und *abgeschlossenen* Intervallen. Diese Konzepte (wobei wir die letzten beiden losgelöst vom Begriff des Intervalls, der eine Ordnungsrelation voraussetzen würde, betrachten werden) lassen sich zusammen mit dem Begriff der *Konvergenz*, den wir im nächsten Abschnitt einführen, leicht auf beliebige metrische Räume verallgemeinern und gehören zu den elementaren Grundbegriffen der Topologie.

**Definition 1.12** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $a \in X$  und  $T \subseteq X$ .

- 1) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann heißt die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  (oder auch offene Kugel um  $a$  mit Radius  $\varepsilon$ ).

- 2)  $T$  heißt Umgebung von  $a$  und  $a$  heißt innerer Punkt von  $T$ , falls es eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  gibt, die noch ganz in  $T$  enthalten ist, d.h. es gibt  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$U_\varepsilon(a) \subseteq T.$$

- 3)  $T$  heißt offen falls jedes  $x \in T$  ein innerer Punkt von  $T$  ist.

- 4)  $T$  heißt abgeschlossen, falls  $X \setminus T$  (das Komplement von  $T$  in  $X$ ) offen ist.

Da eine Menge  $X$  mit verschiedenen Metriken ausgestattet werden kann, erhalten wir natürlich auch für jede dieser Metriken einen neuen Offenheitsbegriff. Daher wäre es eigentlich genauer Teilmengen als *offen* bzw. *abgeschlossen bzgl.  $d$*  zu bezeichnen. Wir verzichten aber der Einfachheit halber auf diese Verschärfung, wenn es nicht unbedingt nötig ist.

**Bemerkung 1.13** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $a \in X$ , sowie  $\delta, \varepsilon > 0$ . Dann gilt:

- 1)  $a \in U_\varepsilon(a)$

- 2)  $\delta < \varepsilon \implies U_\delta(a) \subseteq U_\varepsilon(a).$

- 3) Ist  $U \subseteq X$  offen, so ist  $U$  eine Umgebung all ihrer Elemente. (Aus diesem Grund ist in der Topologie  $U$  die Standardbezeichnung für eine offene Menge.)

**Beispiel 1.14** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $a \in X$  und  $\varepsilon > 0$ .

- 1)  $X$  und  $\emptyset$  sind offenbar beide offen. Wegen  $X = X \setminus \emptyset$  und  $\emptyset = X \setminus X$  sind beide Mengen aber auch gleichzeitig abgeschlossen.

- 2) Sei  $X = \mathbb{R}$ . (Nach unserer Generalvereinbarung ist  $d$  dann als die Standardmetrik anzunehmen.) Dann gilt

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,$$

d.h. die Definition der  $\varepsilon$ -Umgebung ist kompatibel mit der bisherigen Definition aus Analysis I (siehe dort Definition 2.4). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Dann sind die Intervalle  $]a, b[, ]b, \infty[$  und  $] - \infty, a[$  Beispiele für offene Mengen. Andererseits ist  $[a, b]$  eine abgeschlossene Menge, denn die Menge

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = ] - \infty, a[ \cup ]b, \infty[$$

ist offen, da alle ihre Elemente innere Punkte sind. Die Menge  $[0, 1[$  ist dagegen weder offen noch abgeschlossen. (Klar?)

- 3)  $\varepsilon$ -Umgebungen sind offen! Sei dazu  $x \in U_\varepsilon(a)$  beliebig. Wir zeigen, dass  $x$  ein innerer Punkt von  $U_\varepsilon(a)$  ist, indem wir eine  $\delta$ -Umgebung von  $x$  konstruieren, die noch ganz in  $U_\varepsilon(a)$  enthalten ist. Per Definition gilt  $d(x, a) < \varepsilon$  und daher  $\delta := \varepsilon - d(x, a) > 0$ . Wir zeigen nun  $U_\delta(x) \subseteq U_\varepsilon(a)$ : Sei dazu  $y \in U_\delta(x)$ . Dann gilt

$$d(x, y) < \delta = \varepsilon - d(x, a)$$

und damit folgt

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varepsilon - d(x, a) = \varepsilon,$$

woraus wir wie gewünscht  $y \in U_\varepsilon(a)$  erhalten.

- 4) Sei nun  $d$  die diskrete Metrik auf  $X$  und  $T \subseteq X$  beliebig. Wegen  $d(x, y) = 1$  für alle  $y \in X \setminus \{x\}$  gilt

$$x \in \{x\} = U_1(x) \subseteq T$$

für alle  $x \in T$ . Folglich sind alle Punkte von  $T$  innere Punkte und  $T$  ist daher offen. Da  $T$  aber beliebig war, bedeutet dies, dass alle Teilmengen von  $X$  offen sind, insbesondere auch  $X \setminus T$ . Jede Teilmenge  $T$  von  $X$  ist also sowohl offen als auch abgeschlossen. Etwas eintönig, oder?

- 5) Sei  $X = \mathbb{R}^2$ . Wie sieht  $U_1(0)$  aus, wenn wir  $\mathbb{R}^2$  mit der Norm  $\|\cdot\|_2$  (bzw. der dadurch gegebenen Metrik) betrachten? Wie sieht  $U_1(0)$  für die Norm  $\|\cdot\|_1$  aus?
- 6) Zum Schluss betrachten wir noch ein ausgefalleneres Beispiel. Sei  $X = \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$  der Vektorraum der beschränkten reellen Funktionen auf  $[a, b]$  zusammen mit der Supremumsnorm (bzw. der dadurch erzeugten Metrik). Dann ist die Menge

$$C([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ . (In der Tat gilt  $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ . Dies folgt sofort aus Satz 4.31 bzw. Korollar 4.32 aus Analysis I.) Dazu zeigen wir, dass die Menge

$$T := \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) \setminus C([a, b], \mathbb{R})$$



offen ist. Sei also  $f \in T$ . Dann ist  $f$  beschränkt, aber nicht stetig, d.h. es gibt  $x_0 \in [a, b]$ , so dass  $f$  nicht stetig in  $x_0$  ist. Dies wiederum bedeutet, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass zu jedem  $\delta > 0$  ein  $x_\delta \in [a, b]$  existiert, so dass

$$|x_\delta - x_0| < \delta \quad \text{und} \quad |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wir zeigen nun, dass  $U_{\frac{1}{3}\varepsilon}(f) \subseteq T$  gilt. Sei also  $g \in U_{\frac{1}{3}\varepsilon}(f)$  beliebig, d.h. es gilt  $\|f - g\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Ferner gibt es zu jedem  $\delta > 0$  das oben gewählte  $x_\delta \in [a, b]$  mit  $|x_\delta - x_0| < \delta$ . Für dieses gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(x_\delta) - f(x_0)| \leq |f(x_\delta) - g(x_\delta)| + |g(x_\delta) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + |g(x_\delta) - g(x_0)|, \end{aligned}$$

woraus wir

$$|g(x_\delta) - g(x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{3} =: \tilde{\varepsilon}$$

erhalten. Folglich ist  $g$  nicht stetig in  $x_0$  (klar?) und somit gilt  $g \in T$ . Damit haben wir  $U_{\frac{1}{3}\varepsilon}(f) \subseteq T$  gezeigt, woraus folgt, dass jedes  $f \in T$  ein innerer Punkt von  $T$  ist. Folglich ist  $T$  offen und daher  $C([a, b], \mathbb{R})$  als Komplement von  $T$  abgeschlossen.

**Bemerkung 1.15** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $U \subseteq X$  offen. Dann gibt es zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon_x > 0$  mit  $U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$ . Damit erhalten wir

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U \quad \text{und daher} \quad U = \bigcup_{x \in U} U_{\varepsilon_x}(x).$$

Eine offene Menge lässt sich also als Vereinigung von  $\varepsilon$ -Umgebungen darstellen.

**Satz 1.16** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $I$  eine (Index-)Menge, sowie  $U_i \subseteq X$ ,  $i \in I$ , offene Teilmengen von  $X$ . Dann gilt:

1)  $\bigcup_{i \in I} U_i = \{x \in X \mid \text{es gibt } i \in I \text{ mit } x \in U_i\}$  ist offen.

2) Ist  $I$  endlich, dann ist  $\bigcap_{i \in I} U_i = \{x \in X \mid x \in U_i \text{ für alle } i \in I\}$  offen.

Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind also wieder offen.

**Beweis:** 1) Sei  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$  beliebig. Dann gibt es ein  $j \in I$  mit  $x \in U_j$ . Da  $U_j$  offen ist, folgt die Existenz eines  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(x) \subseteq U_j$ . Dann gilt aber auch

$$U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

d.h.  $x$  ist ein innerer Punkt von  $\bigcup_{i \in I} U_i$ . Da  $x$  beliebig war, ist  $\bigcup_{i \in I} U_i$  offen.

2) Sei  $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$  beliebig. Dann gilt  $x \in U_i$  für alle  $i \in I$  und wegen der Offenheit aller  $U_i$  gibt es zu jedem  $i \in I$  ein  $\varepsilon_i > 0$  mit  $U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$ . Setze  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i \in I\}$ . Da  $I$  endlich ist, ist dieses Minimum wohldefiniert und daher  $\varepsilon > 0$ . Außerdem gilt

$$U_\varepsilon(x) \subseteq U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$$

für alle  $i \in I$  und daher  $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$ . Folglich ist  $\bigcap_{i \in I} U_i$  offen.  $\square$

**Bemerkung 1.17** Die Bedingung der Endlichkeit von  $I$  ist wesentlich in Teil 2) von Satz 1.16. So ist z.B. der abzählbare Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ = \{0\}$$

der offenen Intervalle  $\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  nicht mehr offen, sondern abgeschlossen.

**Korollar 1.18** Seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $I$  eine (Index-)Menge, sowie  $A_i \subseteq X$ ,  $i \in I$ , abgeschlossene Teilmengen von  $X$ . Dann gilt:

- 1)  $\bigcap_{i \in I} A_i$  ist abgeschlossen.
- 2) Ist  $I$  endlich, dann ist auch  $\bigcup_{i \in I} A_i$  abgeschlossen.

Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind also wieder abgeschlossen.

**Beweis:** Für alle  $x \in X$  gilt (Übung)

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Damit erhalten wir

$$\bigcap_{i \in I} A_i = X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \right) \quad \text{und analog} \quad \bigcup_{i \in I} A_i = X \setminus \left( \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \right).$$

Daher folgt die Aussage sofort aus Satz 1.16. (Diese Beweisstrategie bezeichnet man als “Dualisierung”. Zum Konzept der *Dualität* verweisen wir auf die Vorlesung *Lineare Algebra*.)  $\square$

Leider ist nicht jede Teilmenge eines metrischen Raum offen oder abgeschlossen. Unter Ausnutzung von Satz 1.16 und Korollar 1.18 lässt sich aber zu jeder Menge eine größte offene Teilmenge und kleinste abgeschlossene Obermenge definieren.

**Definition 1.19** Sei  $(X, d)$  ein metrischen Raum und  $T \subseteq X$ .

- 1)  $T^\circ := \bigcup \{U \subseteq X \mid U \subseteq T \text{ ist offen}\}$  heißt offener Kern oder Inneres von  $T$ .
- 2)  $\bar{T} := \bigcap \{A \subseteq X \mid A \supseteq T \text{ ist abgeschlossen}\}$  heißt Abschluss von  $T$ .

**Beispiel 1.20** Sei  $T$  eines der Intervalle  $]a, b[$ ,  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  oder  $[a, b]$ , wobei  $a < b$ . Dann gilt offenbar

$$T^\circ = ]a, b[ \quad \text{und} \quad \bar{T} = [a, b].$$

**Bemerkung 1.21** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq X$ .

- 1) Nach Konstruktion gilt  $T^\circ \subseteq T \subseteq \bar{T}$ .
- 2)  $T^\circ$  die größte offene Teilmenge von  $T$ , d.h. ist  $U \subseteq T$  offen, so folgt  $U \subseteq T^\circ$ .
- 3) Analog ist  $\bar{T}$  die kleinste abgeschlossene Obermenge von  $T$ , d.h. ist  $A \supseteq T$  abgeschlossen, so folgt  $A \supseteq \bar{T}$ .
- 4)  $T$  ist genau dann offen, wenn  $T = T^\circ$  gilt.
- 5)  $T$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $T = \bar{T}$  gilt.
- 6) Der Alternativname *Inneres* für den offenen Kern  $T^\circ$  rührt daher, dass er mit der Menge der inneren Punkte von  $T$  übereinstimmt, d.h. es gilt

$$T^\circ = \{x \in T \mid x \text{ ist innerer Punkt von } T\}.$$

Dies scheint in Hinblick auf die Definition offener Mengen zunächst trivial, ist aber beweisbedürftig, da es hier um die inneren Punkte von  $T$  statt von  $T^\circ$  geht:

“ $\subseteq$ ”: Sei  $x \in T^\circ$ . Dann gibt es nach Definition von  $T^\circ$  eine offene Menge  $U \subseteq T$ , so dass  $x \in U$ . Da  $U$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq T$ . Folglich ist  $x$  ein innerer Punkt von  $T$ .

“ $\supseteq$ ”: Ist umgekehrt  $x \in T$  ein innerer Punkt von  $T$ , dann gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq T$  und daher gilt auch  $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq T^\circ$ .

Betrachten wir noch einmal die Intervalle in Beispiel 1.20, so erhalten wir als Differenzmenge von Abschluss und offenem Kern jeweils die Menge der Randpunkte  $\bar{T} \setminus T^\circ = \{a, b\}$  des Intervalls. Diese Beobachtung nutzen wir, um auch diesen Begriff auf beliebige Mengen zu verallgemeinern

**Definition 1.22** Sei  $(X, d)$  ein metrischen Raum und  $T \subseteq X$ . Dann heißt  $\partial T := \bar{T} \setminus T^\circ$  der Rand von  $T$  und seine Elemente heißen Randpunkte von  $T$ .

Der folgende Satz liefert ein wichtiges Kriterium um zu entscheiden, wann ein Punkt ein Randpunkt einer Menge ist.

**Satz 1.23** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq X$ . Dann ist  $\partial T$  abgeschlossen und für alle  $x \in X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $x \in \partial T$ , d.h.  $x$  ist ein Randpunkt von  $T$ .
- ii) Jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  enthält sowohl Elemente aus  $T$  als auch aus  $X \setminus T$ , d.h. es gilt

$$U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus T) \neq \emptyset \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

**Beweis:** Da sich  $\partial T = \overline{T} \setminus T^\circ = \overline{T} \cap (X \setminus T^\circ)$  als Schnitt der abgeschlossenen Mengen  $\overline{T}$  und  $X \setminus T^\circ$  darstellen lässt folgt mit Korollar 1.18 die Abgeschlossenheit von  $\partial T$ . Wir zeigen nun noch die Äquivalenz von *i)* und *ii)*.

“*i)*  $\Rightarrow$  *ii)*”: Sei  $x \in \partial T = \overline{T} \setminus T^\circ$ . Dann gilt  $x \notin T^\circ$ , d.h.  $x$  ist kein innerer Punkt von  $T$ . Daher gilt für alle  $\varepsilon > 0$ , dass  $U_\varepsilon(x) \not\subseteq T$ . Dies bedeutet aber

$$U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus T) \neq \emptyset$$

für alle  $\varepsilon > 0$ . Wir zeigen nun noch, dass für alle  $\varepsilon > 0$  auch  $U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset$  gilt. Angenommen dies ist nicht der Fall, d.h. es gibt ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \cap T = \emptyset$ . Dann gilt  $T \subseteq X \setminus U_\varepsilon(x)$  und da  $X \setminus U_\varepsilon(x)$  abgeschlossen ist, folgt

$$\overline{T} \subseteq X \setminus U_\varepsilon(x).$$

Nun gilt aber  $x \in \partial T \subseteq \overline{T}$  und daher folgt  $x \in X \setminus U_\varepsilon(x)$  was im Widerspruch zu  $x \in U_\varepsilon(x)$  steht. Folglich gilt  $U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset$  für alle  $\varepsilon > 0$ .

“*ii)*  $\Rightarrow$  *i)*”: Z.z. ist  $x \in \partial T$ , d.h.  $x \in \overline{T}$  und  $x \notin T^\circ$ .

“ $x \notin T^\circ$ ”: Nach Voraussetzung gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ , dass  $U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus T) \neq \emptyset$  was gleichbedeutend mit  $U_\varepsilon(x) \not\subseteq T$  ist. Dann ist  $x$  aber kein innerer Punkt von  $T$ , d.h.  $x \notin T^\circ$ .

“ $x \in \overline{T}$ ”: Angenommen, es gilt  $x \notin \overline{T}$ , d.h.  $x \in X \setminus \overline{T}$ . Da  $\overline{T}$  abgeschlossen ist, ist  $X \setminus \overline{T}$  offen und es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus \overline{T} \subseteq X \setminus T$ . Dies steht aber im Widerspruch zu  $U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Folglich gilt  $x \in \overline{T}$  und damit  $x \in \partial T = \overline{T} \setminus T^\circ$ .  $\square$

**Korollar 1.24** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq X$ . Dann gilt:

- 1)  $\partial T = \partial(X \setminus T)$ .
- 2)  $T^\circ = T \setminus \partial T$
- 3)  $\overline{T} = T \cup \partial T$

**Beweis:** Übung.  $\square$

**Beispiel 1.25** 1) Sei  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann gilt (wie sie leicht nachprüfen) für alle  $x \in \mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned} \overline{U_\varepsilon(x)} &= \{y \in \mathcal{V} \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\} \\ \partial U_\varepsilon(x) &= \{y \in \mathcal{V} \mid \|x - y\| = \varepsilon\} \\ \overline{U_\varepsilon(x)}^\circ &= \{y \in \mathcal{V} \mid \|x - y\| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

- 2) Überraschenderweise gilt die in 1) festgestellte Form von  $\overline{U_\varepsilon(x)}$  nicht allgemein in metrischen Räumen. Ist z.B.  $d$  die diskrete Metrik auf  $\mathbb{R}$ , so erhalten wir

$$\{x\} = U_1(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < 1\} = \overline{U_1(x)},$$

da bzgl. der diskreten Metrik alle Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Andererseits gilt

$$\{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) \leq 1\} = \mathbb{R} \neq \overline{U_1(x)}.$$

- 3) Auch die Beobachtung  $\overline{U_\varepsilon(x)}^\circ = U_\varepsilon(x)$  gilt i.A. nicht für beliebige offene Teilmengen, wie das Beispiel  $]1, 2[ \cup ]2, 3[^\circ = ]1, 3[$  zeigt. Stattdessen gilt im Allgemeinen nur die Inklusion  $U \subseteq \overline{U}^\circ$ . (Klar? Wenn nicht, Übung!)
- 4) Wir betrachten den  $\mathbb{R}^3$  mit der euklidischen Norm und die Menge

$$T := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Dann gilt  $\overline{T} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = \partial T$  und  $\overline{T}^\circ = \emptyset$ . (Klar?)

- 5) Es gilt  $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ , denn für jedes  $x \in \mathbb{R}$  enthält jede Umgebung  $U_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon > 0$ , sowohl rationale, als auch irrationale Zahlen. Es gilt also  $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  für alle  $\varepsilon > 0$  und damit ist  $x$  nach Satz 1.23 ein Randpunkt von  $\mathbb{Q}$ .

Teilmengen wie  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  mit  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , d.h. Teilmengen, deren Abschluss der gesamte zu Grunde liegende metrische Raum ist, spielen häufig eine wichtige Rolle und erhalten daher einen eigenen Namen.

**Definition 1.26** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $D \subseteq X$ . Dann heißt  $D$  dicht in  $X$ , falls  $\overline{D} = X$ .

Wir hatten bereits festgestellt, dass jede Teilmenge eines metrischen Raums  $(X, d)$  mit Hilfe der durch  $d$  induzierten Metrik ebenfalls zu einem metrischen Raum befördert werden kann. Der folgende Satz liefert uns eine wichtige Charakterisierung des Begriffs der Offenheit in der induzierten Metrik.

**Satz 1.27** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, sowie  $T \subseteq X$  und sei  $d_T$  die durch  $d$  induzierte Metrik auf  $T$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $V \subseteq T$  ist offen bzgl.  $d_T$ .
- ii) Es gibt eine bzgl.  $d$  offene Menge  $U \subseteq X$ , so dass  $V = T \cap U$  gilt.

**Beweis:** Zur besseren Unterscheidung versehen wir im folgenden Beweis  $\varepsilon$ -Umgebungen mit einem Hochindex, der auf die zugrunde liegende Menge (und damit Metrik) hinweist. Ist dann  $x \in T$  und  $\varepsilon_x > 0$ , so gilt

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon_x}^T(x) &= \{y \in T \mid d_T(x, y) < \varepsilon_x\} = \{y \in T \mid d(x, y) < \varepsilon_x\} = T \cap \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon_x\} \\ &= T \cap U_{\varepsilon_x}^X(x), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichheit ausgenutzt haben, dass  $d$  auf  $T \times T$  mit  $d_T$  übereinstimmt.

“ $i) \Rightarrow ii)$ ”: Sei  $V \subseteq T$  offen bzgl.  $d_T$ . In Hinblick auf Bemerkung 1.15 finden wir zu jedem  $x \in V$  ein  $\varepsilon_x > 0$ , so dass

$$V = \bigcup_{x \in V} U_{\varepsilon_x}^T(x) = \bigcup_{x \in V} (T \cap U_{\varepsilon_x}^X(x)) = T \cap \left( \bigcup_{x \in V} U_{\varepsilon_x}^X(x) \right)$$

und

$$U := \bigcup_{x \in V} U_{\varepsilon_x}^X(x) \subseteq X$$

ist nach Satz 1.16 offen bzgl.  $d$ .

“ $ii) \Rightarrow i)$ ”: folgt ähnlich. (Übung.)  $\square$

**Korollar 1.28** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, sowie  $T \subseteq X$  und sei  $d_T$  die durch  $d$  induzierte Metrik auf  $T$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i)  $B \subseteq T$  ist abgeschlossen bzgl.  $d_T$ .

ii) Es gibt eine bzgl.  $d$  abgeschlossene Menge  $A \subseteq X$ , so dass  $B = T \cap A$ .

**Beweis:** durch Dualisierung.  $\square$

**Beispiel 1.29** Wir betrachten  $[0, 2]$  mit der durch die Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$  induzierten Metrik. Dann ist  $[0, 1[$  offen in  $[0, 2]$ , denn  $[0, 1[ = [0, 2] \cap ]-1, 1[$ . Außerdem gilt in  $[0, 2]$ :

$$U_{\varepsilon}^{[0,2]}(0) = U_{\varepsilon}^{\mathbb{R}}(0) \cap [0, 2] = \begin{cases} [0, \varepsilon[ & \text{für } 0 < \varepsilon \leq 2, \\ [0, 2] & \text{für } \varepsilon > 2. \end{cases}$$

**Bemerkung 1.30** Der Begriff des *metrischen Raums* lässt sich noch weiter abschwächen: Dazu beobachten wir, dass für einen metrischen Raum  $X$  das Mengensystem  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  der offenen Teilmengen von  $X$  nach Satz 1.16 abgeschlossen gegenüber beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten ist. Die Idee ist nun, statt einer Metrik auf  $X$  das Mengensystem  $\mathcal{T}$  als Grundlage für eine Definition zu verwenden: Eine Menge  $X$  zusammen mit einer Menge  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt dann *Topologie* auf  $X$ , falls gilt:

- i)  $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
- ii)  $U_i \in \mathcal{T}, i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
- iii)  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$

Die Elemente von  $\mathcal{T}$  nennt man dann *offene Mengen*. Es folgt, dass jeder metrischer Raum ein topologischer Raum ist, wenn man  $\mathcal{T}$  als die Menge der bzgl. der Metrik in  $X$  offenen Mengen wählt. Da sich fast alle in diesem Kapitel noch folgenden Begriffe wie *Konvergenz von Folgen*, *Stetigkeit von Abbildungen*, *Kompaktheit* und *Zusammenhang* (nicht aber *Cauchy-Folgen* oder *Vollständigkeit*) auf Eigenschaften, die über offene Mengen erklärt werden können, zurückführen lassen, ist es möglich diese Begriffe auch auf topologische Räume zu übertragen. (Für weitere Details verweisen wir auf die Vorlesung *Topologie*.) Der Begriff stellt eine echte Erweiterung des Begriffs des metrischen Raums dar, da es Topologien gibt, die nicht durch eine Metrik erzeugt werden können. Einfachstes Beispiel dafür sind die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  zusammen mit der *indiskreten Topologie*  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ , die - wie Sie leicht überprüfen - die Bedingungen i)–iii) erfüllt. Überlegen Sie sich, dass es keine Metrik auf  $\mathbb{R}$  geben kann, die dazu führt, dass nur die Mengen  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}$  offen sind. (Untersuchen Sie dazu, wie  $\varepsilon$ -Umgebungen bzgl. einer solchen Metrik aussehen müssten!) Zusammenfassend erhalten wir die folgende Abstufung, wobei die Rückrichtung jeweils i.A. nicht gilt:

$$X \text{ ist normierter Raum} \implies X \text{ ist metrischer Raum} \implies X \text{ ist topologischer Raum}$$

## 1.3 Konvergenz in metrischen Räumen

Nach unseren Vorbereitungen können wir den Konvergenzbegriff in metrischen Räumen leicht auf den Konvergenzbegriff in den reellen Zahlen zurückführen.

**Definition 1.31** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ .

- 1)  $(x_n)$  heißt konvergent gegen  $a \in X$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0.$$

In diesem Fall heißt  $a$  Limes oder Grenzwert der Folge. Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (oder  $x_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ ).

- 2)  $(x_n)$  heißt konvergent, falls es ein  $a \in X$  gibt, so dass  $(x_n)$  konvergent gegen  $a$  ist.

**Bemerkung 1.32** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ .

- 1) Nach Definition der Konvergenz in den reellen Zahlen (Definition 2.3 in Analysis I) konvergiert  $(x_n)$  gegen  $a \in X$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $d(x_n, a) < \varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$  gilt. Anders ausgedrückt bedeutet dies: Für jedes  $\varepsilon > 0$  liegen fast alle (zur Erinnerung: “fast alle” bedeutet “alle bis auf endlich viele”) Folgenglieder  $x_n$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(a)$ . Da jede Umgebung von  $a$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  enthält, erhalten wir schließlich:

Die Folge  $(x_n)$  konvergiert genau dann gegen  $a$ , wenn in jeder Umgebung von  $a$  fast alle Folgenglieder liegen.

- 2) Eine wichtige Eigenschaft metrischer Räume ist die sogenannte *Hausdorff-Eigenschaft*: Zu je zwei Punkten  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$  gibt es Umgebungen  $U \subseteq X$  von  $a$  und  $V \subseteq X$  von  $b$  mit  $U \cap V = \emptyset$ . Zum Nachweis betrachten wir  $\varepsilon := \frac{1}{2}d(a, b)$  und setzen

$$U := U_\varepsilon(a) \quad \text{und} \quad V := U_\varepsilon(b).$$

Dann gilt für  $x \in U \cap V$ , dass

$$2\varepsilon = d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

was zu einem Widerspruch führt. Folglich gilt  $U \cap V = \emptyset$ .

(Im Gegensatz dazu ist die Hausdorff-Eigenschaft in topologischen Räumen i.A. nicht erfüllt. Betrachten Sie z.B. die indiskrete Topologie auf  $\mathbb{R}$ .)

- 3) Eine unmittelbare Folgerung aus der Hausdorff-Eigenschaft ist die Eindeutigkeit von Grenzwerten: Dazu sei  $(x_n)$  konvergent gegen  $a \in X$  und sei  $b \in X$  mit  $b \neq a$ . Dann gibt es Umgebungen  $U \subseteq X$  von  $a$  und  $V \subseteq X$  von  $b$  mit  $U \cap V = \emptyset$ . Nach 1) liegen fast alle Folgenglieder in  $U$  und daher können höchstens endlich viele Folgenglieder in  $V$  liegen. Damit ist  $b$  aber kein Grenzwert von  $(x_n)$ .

**Beispiel 1.33** 1) (*Komponentenweise Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$ .*) Wir betrachten den  $\mathbb{R}^n$  mit der durch die  $p$ -Norm  $\|\cdot\|_p$  induzierten Metrik, wobei  $p \in [1, \infty[$  gelte. Ferner seien  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j \text{ für } j = 1, \dots, n,$$

denn “ $\Rightarrow$ ” folgt sofort aus

$$|x_{kj} - a_j| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_{ki} - a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - a\|_p.$$

Gilt andererseits  $x_{kj} \rightarrow a_j$  für  $k \rightarrow \infty$  für  $j = 1, \dots, n$ , so gibt es zu  $\varepsilon > 0$  beliebig und jedem  $j \in \{1, \dots, n\}$  ein  $N_j \in \mathbb{N}$  mit

$$|x_{kj} - a_j| < \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}}$$

für alle  $k \geq N_j$ . Wähle nun  $N_\varepsilon := \max\{N_1, \dots, N_n\}$ . Dann gilt für alle  $k \geq N$ , dass

$$\|x_k - a\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_{kj} - a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left( \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ .

- 2) Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge und seien  $f_n, f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ . Dann konvergiert  $(f_n)$  genau dann bzgl. der Supremumsnorm gegen  $f$  (bzw. genauer bzgl. der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik), wenn  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Für die Abgeschlossenheit einer Teilmenge eines metrischen Raums gibt es ein wichtiges Kriterium mit Hilfe von Folgen, die sogenannte *Folgenabgeschlossenheit*.

**Satz 1.34** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $A$  ist abgeschlossen.
- ii)  $A$  ist folgenabgeschlossen, d.h. für jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \in X$  gilt  $x \in A$ .

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)”: Sei  $A$  abgeschlossen und sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge in  $A$  mit Grenzwert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X$ . Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ , dass  $a_n \in U_\varepsilon(x)$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und daher

$$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \tag{1.1}$$

für alle  $\varepsilon > 0$ . Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle:



- 1) Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ . Dann ist  $x$  ein innerer Punkt von  $A$  und speziell gilt  $x \in A$ .
- 2) Es gibt kein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ . Dann gilt  $U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$  für alle  $\varepsilon > 0$  und zusammen mit (1.1) folgt  $x \in \partial A$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, gilt  $\partial A \subseteq \overline{A} = A$  und daher  $x \in A$ .

“*ii*)  $\Rightarrow$  *i*)”: Z.z. ist  $A = \overline{A} = A \cup \partial A$ , d.h.  $\partial A \subseteq A$ . Sei also  $x \in \partial A$ . Dann gilt  $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Wähle zu jedem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$  ein  $a_n \in U_{\varepsilon_n}(x) \cap A$ . Dann ist  $(a_n)$  eine Folge in  $A$  und für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt  $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$ . Daraus folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$  und aus *ii*) folgt  $x \in A$ .  $\square$

**Beispiel 1.35** 1) Sei  $\mathbb{R}^n$  mit der  $p$ -Norm  $\|\cdot\|_p$  versehen und seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen. Dann ist auch  $A_1 \times \dots \times A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  bzgl.  $\|\cdot\|_p$  abgeschlossen. Dies folgt sofort aus Satz 1.34 und der komponentenweisen Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$ . Speziell sind achsenparallele Quader abgeschlossene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , denn diese haben die Form

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

mit  $a_i < b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

- 2) Die Teilmenge  $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$  der stetigen Funktionen von  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ . (Dies hatten wir in Teil 6) von Beispiel 1.14 bereits direkt nachgewiesen.) Ist nämlich  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C([a, b], \mathbb{R})$ , die gegen  $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$  konvergiert, so ist die Konvergenz nach Beispiel 1.33 gleichmäßig und nach Satz 8.6 aus Analysis I ist dann auch die Grenzfunktion  $f$  stetig. Somit ist  $C([a, b], \mathbb{R})$  folgenabgeschlossen und daher nach Satz 1.34 auch abgeschlossen.

Eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen war deren *Vollständigkeit*. Auch dieses Konzept lässt sich auf metrische Räume verallgemeinern.

**Definition 1.36** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- 1) Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  heißt Cauchy-Folge, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$  gilt, dass  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .
- 2)  $(X, d)$  heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in  $(X, d)$  konvergent ist.
- 3) Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Genauso wie in Analysis I beweisen wir das folgende Resultat, das wir daher zu einer simplen Bemerkung degradieren.

**Bemerkung 1.37** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist jede in  $(X, d)$  konvergente Folge eine Cauchy-Folge. (Übung.)

**Beispiel 1.38** 1) Sei  $p \in [1, \infty[$ . Wir zeigen:  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  ist ein Banachraum. Sei dazu  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge mit  $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch  $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  für  $j = 1, \dots, n$ , denn für  $j = 1, \dots, n$  gilt

$$|x_{kj} - x_{mj}| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{mi}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - x_m\|_p.$$

Wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ist  $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$  für alle  $j = 1, \dots, n$  konvergent, also auch  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nach Beispiel 1.33.

2) Sei  $X$  eine Menge. Wir zeigen:  $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum. Sei dazu  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ . Dann gilt auch

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (1.2)$$

für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$  und alle  $x \in X$ . Da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, ist  $(f_n(x))$  für jedes  $x \in X$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ . Wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  existiert daher

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

für alle  $x \in X$ . Dies definiert eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$ , die der punktweise Limes der Folge  $(f_n)$  ist. Damit sind wir aber noch nicht fertig, denn wir müssen einerseits noch zeigen, dass  $f$  beschränkt ist, also in  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  liegt, und andererseits, dass  $(f_n)$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  gegen  $f$  konvergiert, d.h. dass die Konvergenz gleichmäßig ist. Seien also  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gilt wegen (1.2) für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , dass

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Stetigkeit des Absolutbetrags  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ausgenutzt haben. Aus (1.3) folgt aber

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

und da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt, dass  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Insbesondere folgt nun auch  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ , denn für alle  $n \geq N_\varepsilon$  und alle  $x \in X$  gilt

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon$$

und daher  $\|f\|_\infty < \infty$ .

Dieses Beispiel lässt sich verallgemeinern: Ist  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ein beliebiger normierter Raum, so ist  $(\mathcal{B}(X, \mathcal{V}), \|\cdot\|_\infty)$  genau dann vollständig, wenn  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  vollständig ist.

(Übung, allerdings benötigen sie hierzu ein Detail aus dem später folgenden Abschnitt 1.4. Welches?)

Der nachfolgende Satz ist relativ einfach zu beweisen, weshalb dies ebenfalls Ihnen überlassen bleibt.

**Satz 1.39** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $A \subseteq X$ , sowie  $d_A$  die durch  $d$  induzierte Metrik auf  $A$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $(A, d_A)$  ist vollständig.
- ii)  $A$  ist abgeschlossen (bzgl.  $d$ ).

**Beweis:** Übung.  $\square$

Einer der zentralen Sätze in der Analysis II ist der *Banachsche Fixpunktsatz* und das nicht nur deshalb, weil wir ihn später dazu benutzen werden, um zwei weitere, ebenso zentrale Sätze zu beweisen. Tatsächlich findet er in vielen Gebieten der Mathematik Anwendung, wenn es um die Existenz von Fixpunkten geht. Um zu verstehen, worum es dabei geht, schauen wir uns das folgende Beispiel an.

**Beispiel 1.40** Wir betrachten die rekursiv definierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  mit  $x_0 = 1$  und

$$x_{n+1} = \cos(x_n).$$

Die Befragung eines Taschenrechners ergibt die gerundeten Werte

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.540302305 \\ x_2 &= 0.857553215 \\ x_3 &= 0.654289790 \\ x_4 &= 0.793480358 \\ x_{10} &= 0.744237354 \\ x_{20} &= 0.739184399 \\ x_{40} &= 0.739085169 \end{aligned}$$

und lässt uns vermuten, dass diese Folge konvergent ist mit dem Grenzwert

$$x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.739\dots,$$

den wir natürlich noch genauer bestimmen müssten. Falls dies tatsächlich der Grenzwert unserer Folge  $(x_n)$  ist (bisher beruht unsere Vermutung nur auf Indizien, wir haben aber noch keinen Konvergenzbeweis geführt), so gilt wegen der Stetigkeit der Cosinusfunktion

$$\cos(x^*) = \cos\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$

Einen Punkt  $x^* \in X$  mit der Eigenschaft  $f(x^*) = x^*$  für eine Abbildung  $f : X \rightarrow X$  nennt man auch einen *Fixpunkt* der Funktion  $f$ . Wie aber können wir jetzt nachweisen, dass die Cosinusfunktion tatsächlich einen Fixpunkt hat? Eine nähere Untersuchung zeigt, dass die Einschränkung der Cosinusfunktion auf das Intervall  $[0, 1]$  *kontrahierend* ist.

**Definition 1.41** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, sowie  $f : X \rightarrow Y$ .

- 1)  $f$  heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L \geq 0$ , falls für alle  $x, \tilde{x} \in X$  gilt, dass

$$d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \leq L \cdot d_X(x, \tilde{x}).$$

- 2)  $f$  heißt Selbstabbildung, falls  $Y = X$ .

- 3)  $f$  heißt kontrahierend oder Kontraktion, falls  $f$  eine Lipschitz-stetige Selbstabbildung mit Lipschitz-Konstante  $L < 1$  ist.

**Satz 1.42 (Banachscher Fixpunktsatz)** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Kontraktion. Dann gilt:

- 1)  $f$  hat genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein  $x^* \in X$  mit  $f(x^*) = x^*$ .  
 2) Sei  $x_0 \in X$ . Dann konvergiert die durch  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  rekursiv definierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x^*$ .

Der Satz liefert also nicht nur eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Fixpunkte einer Abbildung, sondern liefert uns auch gleich eine Berechnungsmöglichkeit mit Hilfe der in 2) definierten Folge. Für den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes benötigen wir aber noch das folgende Lemma.

**Lemma 1.43** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} d(x_k, x_{k+1})$$

konvergent, so ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge.

**Beweis:** Sei  $s_n := \sum_{k=0}^n d(x_k, x_{k+1})$  die  $n$ -te Partialsumme unserer Reihe. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &= s_{n+m-1} - s_{n-1} \\ &= |s_{n+m-1} - s_{n-1}|, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt folgt, da  $d(x_k, x_{k+1}) \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Da  $(s_n)$  konvergiert, ist  $(s_n)$  insbesondere eine Cauchy-Folge und damit auch  $(x_n)$ .  $\square$

**Beweis (von Satz 1.42).** Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit in 1). Seien also  $x^*$  und  $\tilde{x}^*$  zwei Fixpunkte von  $f$ , d.h. es gilt  $f(x^*) = x^*$  und  $f(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*$ . Dann gilt

$$d(x^*, \tilde{x}^*) = d(f(x^*), f(\tilde{x}^*)) \leq L \cdot d(x^*, \tilde{x}^*).$$

Wegen  $L < 1$  folgt  $d(x^*, \tilde{x}^*) = 0$ , d.h.  $x^* = \tilde{x}^*$ .

Für die Existenz in 1) beweisen wir 2) gleich mit. Sei also  $x_0 \in X$  beliebig und  $(x_n)$  rekursiv definiert durch  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq L \cdot d(x_{n-1}, x_n).$$

Daraus erhalten wir per Induktion  $d(x_n, x_{n+1}) \leq L^n d(x_0, x_1)$ , woraus wegen  $0 \leq L < 1$  folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (L^k \cdot d(x_0, x_1)) = d(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-L}.$$

Nach dem Majorantenkriterium ist die Reihe auf der linken Seite der obigen Ungleichung also konvergent und daher ist  $(x_n)$  nach Lemma 1.43 eine Cauchy-Folge in  $X$  und daher existiert

$$x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $x^*$  ein Fixpunkt von  $f$  ist. Dies folgt, da für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\begin{aligned} d(f(x^*), x^*) &\leq d(f(x^*), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) = d(f(x^*), f(x_n)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq L \cdot d(x^*, x_n) + d(x_{n+1}, x^*). \end{aligned}$$

Per Grenzübergang erhalten wir daraus, da die linke Seite unabhängig von  $n$  ist, dass

$$d(f(x^*), x^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L \cdot d(x^*, x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x^*) = 0.$$

Also gilt  $d(f(x^*), x^*) = 0$  und daher  $f(x^*) = x^*$ .  $\square$

**Beispiel 1.44** Wir kommen auf die Funktion aus Beispiel 1.40 zurück. Betrachten wir die Einschränkung  $\cos : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  (an dieser Stelle ist wichtig, dass wir eine Selbstabbildung haben - glücklicherweise ist der Cosinus auf dem Intervall  $[0, 1]$  positiv), so ist dies eine Kontraktion, denn mit dem Schrankensatz (Korollar 6.30 bzw. Bemerkung 6.31 in Analysis I) folgt, dass

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq L \cdot |x - y|,$$

wobei

$$L := \sup_{\xi \in ]0,1[} |\cos'(\xi)| = \sup_{\xi \in ]0,1[} |\sin(\xi)| = \sin(1) < 1.$$

Folglich hat die Cosinusfunktion einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $x^* \in [0, 1]$ .

**Bemerkung 1.45** Auf den ersten Blick wirkt das *Fixpunktproblem*, also das Problem einen Fixpunkt zu bestimmen, sehr speziell. Ist allerdings  $\mathcal{V}$  ein Vektorraum, so lässt sich für eine Selbstabbildung  $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  die Gleichung

$$g(x) = y$$

schnell in ein Fixpunktproblem übersetzen, in dem man die neue Abbildung  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  mit

$$f(x) = x - g(x) + y$$

betrachtet. Offenbar ist  $x^*$  genau dann ein Fixpunkt von  $f$ , wenn  $g(x^*) = y$  gilt.

**Beispiel 1.46** Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass man die Lipschitz-Stetigkeit der Kontraktion  $f$  im Banachschen Fixpunktsatz nicht durch die schwächere Bedingung

$$d(f(x), f(\tilde{x})) < d(x, \tilde{x}) \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in X \quad (1.4)$$

ersetzen kann. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto x + e^{-x}$$

auf der abgeschlossenen Menge  $[0, \infty[ \subseteq \mathbb{R}$ , die somit nach Satz 1.39 ein vollständiger metrischer Raum ist. Dann erfüllt  $f$  die Bedingung (1.4), denn zu beliebigen  $x, \tilde{x} \in [0, \infty[$  gibt es nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $\tilde{x}$ , so dass

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = |f'(\xi) \cdot (x - \tilde{x})| = (1 - e^{-\xi}) \cdot |x - \tilde{x}| < |x - \tilde{x}|$$

gilt. Allerdings hat  $f$  keinen Fixpunkt, denn die Gleichung  $f(x) = x$  ist äquivalent zur Gleichung  $e^{-x} = 0$  die keine Lösung besitzt.

Die Kontraktionsbedingung im Banachschen Fixpunktsatz lässt sich allerdings auf eine andere Weise abschwächen. Ist  $f$  selbst keine Kontraktion, so ist schon ausreichend, dass eine Potenz von  $f$  eine Kontraktion ist:

**Satz 1.47** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Selbstabbildung. Ferner gebe es ein  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , so dass  $f^m$  eine Kontraktion ist. Dann hat  $f$  genau einen Fixpunkt.

**Beweis:** Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf die Kontraktion  $f^m$  liefert einen eindeutigen Fixpunkt  $x^* \in X$  von  $f^m$ . Dieser ist auch ein Fixpunkt von  $f$ , denn aus  $f^m(x^*) = x^*$  und der Kontraktionseigenschaft von  $f^m$  folgt, wenn  $L < 1$  die zu  $f^m$  gehörende Lipschitz-Konstante ist, dass

$$d(f(x^*), x^*) = d(f(f^m(x^*)), f^m(x^*)) = d(f^m(f(x^*)), f^m(x^*)) < L \cdot d(f(x^*), x^*)$$

was nur möglich ist, wenn  $f(x^*) = x^*$  gilt. Weiter ist  $x^*$  als Fixpunkt von  $f$  auch eindeutig, denn ist  $y \in X$  ein weiterer Fixpunkt von  $f$ , so folgt  $y = f(y) = \dots = f^m(y)$  und somit  $y = x^*$ , da  $x^*$  als Fixpunkt von  $f^m$  eindeutig bestimmt ist.  $\square$

## 1.4 Stetigkeit

Einer der zentralen Begriffe der Analysis I war der der Stetigkeit einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Auch diesen können wir leicht auf beliebige metrische Räume verallgemeinern.

**Definition 1.48** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, sowie  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

- 1)  $f$  heißt stetig in  $a \in X$ , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

- 2)  $f$  heißt stetig, falls  $f$  in allen  $a \in X$  stetig ist.

**Beispiel 1.49** 1) Konstante Abbildungen sind stetig. (Klar!)

- 2) Die Identität  $Id_X : X \rightarrow X$  ist stetig. **Stopp!** Hier müssen wir aufpassen und präziser sein: Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann ist  $Id_X : (X, d) \rightarrow (X, d)$  stetig. Ist die Menge  $X$  allerdings als Urbild- bzw. Bildraum mit unterschiedlichen Metriken versehen, so ist nicht von vornherein klar, ob die Identität noch stetig ist. Betrachten Sie z.B.  $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ , wobei  $d$  die diskrete Metrik ist. Ist  $Id_{\mathbb{R}}$  dann stetig?
- 3) Sei  $(X, d)$  ein beliebiger metrischer Raum und  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  mit der  $\|\cdot\|_p$ -Norm versehen, wobei  $p \geq 1$ . Jede Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  können wir dann  $n$  Komponentenfunktionen  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  zerlegen, wobei  $f_i(x) = y_i$  gilt, genau dann wenn  $f(x) = (y_1, \dots, y_n)$ . Wir schreiben dafür

$$f = (f_1, \dots, f_n).$$

Aus der komponentenweisen Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$  folgt sofort:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist stetig} \iff f_i : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig für } i = 1, \dots, n$$

- 4) Sei wieder  $\mathbb{R}^n$  mit der  $p$ -Norm  $\|\cdot\|_p$  versehen. Dann ist die  $j$ -te kanonische Projektion  $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$  stetig, denn ist  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  beliebig und  $(x_k)$  mit  $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$  eine Folge, die gegen  $a$  konvergiert, so gilt auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_j(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j = \pi_j(a).$$

- 5) Die Addition  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  und Multiplikation  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  sind stetig (bzgl.  $\|\cdot\|_p$  und  $|\cdot|$ ). Wir zeigen dies für die Multiplikation. Sei dazu  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  beliebig und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n = (x_{n1}, x_{n2}) \in \mathbb{R}^2$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni} = a_i, \quad i = 1, 2.$$

Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$|\mu(x_n) - \mu(a)| = |x_{n1}x_{n2} - a_1a_2| \leq |x_{n1}(x_{n2} - a_2)| + |(x_{n1} - a_1)a_2|.$$

Die rechte Seite geht gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ , woraus die Stetigkeit von  $\mu$  in  $a$  folgt.

- 6) Das Integral  $I : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$  ist stetig bzgl. der Standardmetriken. (Im Fall  $C([a, b])$  meinen wir damit natürlich die durch die Supremumsnorm induzierte Metrik.) Ist nämlich  $(f_n)$  eine Folge in  $C([a, b])$ , die bzgl. der Supremumsnorm gegen  $f \in C([a, b])$  konvergiert, so ist diese Konvergenz gleichmäßig und nach Analysis I Satz 8.7 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I(f).$$

- 7) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $a \in X$ . Dann ist die Abbildung

$$d(a, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(a, x)$$

stetig. Dazu sei  $x \in X$  beliebig, sowie  $(x_n)$  eine Folge in  $X$ , die gegen  $x$  konvergiert. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leq d(a, x_n) + d(x_n, x) \implies d(a, x) - d(a, x_n) \leq d(x_n, x) \\ \text{und } d(a, x_n) &\leq d(a, x) + d(x, x_n) \implies d(a, x_n) - d(a, x) \leq d(x_n, x), \end{aligned}$$

woraus wir  $|d(a, x) - d(a, x_n)| \leq d(x_n, x)$  erhalten. Da  $(x_n)$  gegen  $x$  konvergiert, folgt daraus, dass  $d(a, x_n)$  gegen  $d(a, x)$  konvergiert. Also ist  $d(a, \cdot)$  stetig in  $x$  und somit stetig, da  $x \in X$  beliebig war.

- 8) Als wichtigen Spezialfall von 7) erhalten wir die *Stetigkeit der Norm* im folgenden Sinn. Ist  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, so ist  $\|\cdot\| = d(0, \cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**Satz 1.50** Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen, sowie  $a \in X$ . Ist  $f$  stetig in  $a$  und  $g$  stetig in  $f(a)$ , dann ist  $g \circ f$  stetig in  $a$ .

**Beweis:** wie in Analysis I (Übung).  $\square$

**Beispiel 1.51** 1) Die Division  $\delta : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$  mit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$  ist stetig, denn es gilt

$$\delta = \mu \circ (\pi_1, \text{inv} \circ \pi_2),$$

wobei  $\mu$  die Multiplikation aus Teil 5) von Beispiel 1.49,  $\pi_1, \pi_2$  die kanonischen Projektionen aus Teil 5) von Beispiel 1.49 und  $\text{inv} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  die aus Analysis I als stetig bekannte *Inversion* ist. Die Stetigkeit der Abbildung  $(\pi_1, \text{inv} \circ \pi_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x, \frac{1}{y})$  folgt dabei aus der komponentenweisen Stetigkeit.

- 2) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in X$  und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\lambda f$  stetig in  $a$ . Ist außerdem  $g(a) \neq 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  stetig in  $a$ .

(Für die Stetigkeit von  $f + g$  folgt dies aus der Darstellung  $f + g = \alpha \circ (f, g)$ , wobei  $\alpha$  die Addition aus Teil 5 von Beispiel 1.49 ist. Die Stetigkeit der anderen Abbildungen folgt analog.)



- 3) Sei  $\mathbb{R}^{n,n}$  mit der *Frobeniusnorm*  $\|\cdot\|_F$  versehen die für  $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$  durch

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \quad \left( \sum_{i,j=1}^n \text{ ist eine Abkürzung für } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \right)$$

gegeben ist und genau der euklidischen Norm entspricht, wenn man den Raum  $\mathbb{R}^{n,n}$  mit dem dazu isomorphen Vektorraum  $\mathbb{R}^{n^2}$  identifiziert. Dann ist die Determinante  $\det : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig bzgl. Frobeniusnorm und Standardmetrik, denn für jede Matrix  $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$  gilt die Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

wobei  $S_n$  die *symmetrische Gruppe*, d.h. die Menge aller Permutationen auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$  und  $\operatorname{sgn}(\sigma)$  das *Signum* der Permutation  $\sigma \in S_n$  ist. (Für die Einzelheiten verweisen wir auf die Vorlesung *Lineare Algebra*.) Die Determinante ist daher eine Komposition von Additionen, Multiplikationen und kanonischen Projektionen.

- 4) Auch die Matrixmultiplikation  $\mu : \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^{m,\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{n,\ell}$ ,  $(A, B) \mapsto A \cdot B$  und die Matrixinversion  $\operatorname{inv} : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $A \mapsto A^{-1}$  sind stetig. Die Stetigkeit von  $\mu$  folgt dabei direkt aus der Definition der Matrixmultiplikation und der Nachweis der Stetigkeit von  $\operatorname{inv}$  ist eine Übung. Nutzen Sie z.B. die Darstellung

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A),$$

wobei  $\operatorname{adj}(A)$  die Adjunkte der Matrix  $A$  bezeichnet (vgl. *Lineare Algebra*).

Als nächstes wenden wir uns äquivalenten Charakterisierungen der Stetigkeit zu.

**Satz 1.52 ( $\varepsilon/\delta$ -Kriterium)** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und sei  $a \in X$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $f$  ist stetig in  $a$ .  
 ii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

- iii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass

$$f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a)).$$

**Beweis:** Der Beweis der Äquivalenz von i) und ii) verläuft analog zum Beweis des entsprechenden Satzes Satz 4.33 in Analysis I. (Übung: Übertragen Sie diesen Beweis in die neue Notation.) Die Aussage iii) ist nur eine Umformulierung von ii).  $\square$

**Satz 1.53** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, sowie  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i)  $f$  ist stetig.

ii) Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. für alle  $V \subseteq Y$  gilt:

$$V \text{ offen} \implies f^{-1}(V) \subseteq X \text{ offen}$$

iii) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)”: Sei  $f$  stetig und  $V \subseteq Y$  offen. Zu zeigen ist die Offenheit von  $f^{-1}(V)$  in  $X$ . Sei also  $x \in f^{-1}(V)$  beliebig. Dann gilt  $f(x) \in V$  und wegen der Offenheit von  $V$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  folgt nach Satz 1.52 die Existenz von  $\delta > 0$  mit

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)) \subseteq V.$$

Damit erhalten wir aber  $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$ . Da  $x$  beliebig war, folgt hieraus die Offenheit von  $f^{-1}(V)$ .

“ii)  $\Rightarrow$  i)”: Sei  $x \in X$  beliebig. Wir zeigen die Stetigkeit von  $f$  in  $x$ . Sei also  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann ist  $U_\varepsilon(f(x))$  offen und mit ii) folgt die Offenheit von  $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$ . Da die letztere Menge  $x$  enthält, existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))),$$

woraus wir  $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$  erhalten. Dies ist aber nach Satz 1.52 äquivalent zur Stetigkeit von  $f$  in  $x$ .

“i)  $\Leftrightarrow$  iii)” folgt durch Dualisierung aus “i)  $\Leftrightarrow$  ii)”, wobei wir  $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$  für alle  $A \subseteq Y$  ausnutzen.  $\square$

**Bemerkung 1.54** Beachten Sie, dass Satz 1.53 keine Aussagen über Bilder offener Mengen macht. Z.B. ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  stetig, aber  $f([0, 1]) = \{0\}$  ist nicht offen!

**Beispiel 1.55** 1) Die *Einheitssphäre*  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$  im  $\mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen, denn  $S^{n-1}$  ist das Urbild der abgeschlossenen Teilmenge  $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$  unter der stetigen Abbildung  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2$ .

Diese Aussage gilt sogar noch allgemeiner: Ist  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, so ist die Menge  $\{v \in \mathcal{V} \mid \|v\| = 1\}$  abgeschlossen.

2) Die Menge der invertierbaren Matrizen  $GL_n(\mathbb{R})$  ist offen in  $(\mathbb{R}^{n,n}, \|\cdot\|_F)$ , denn es gilt

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

d.h.  $GL_n(\mathbb{R})$  ist das Urbild der offenen Menge  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  unter der stetigen Abbildung  $\det$ . Die Offenheit der Menge der invertierbaren Matrizen ist von praktischer Bedeutung. Da zu jeder invertierbaren Matrix eine offene Umgebung existiert, die noch ganz in der Menge der invertierbaren Matrizen enthalten ist, bedeutet das, dass die Eigenschaft der Invertierbarkeit einer Matrix unter hinreichend kleinen Störungen (also wenn die Einträge der Matrix hinreichend kleine “Veränderungen” erfahren) erhalten bleibt. (Überlegen Sie sich nun noch, dass  $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^{n,n}$  gilt.)

## 1.5 Kompaktheit

In der Analysis I konnten wir beweisen, dass eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wichtige Eigenschaften hat, wie u.a. die Existenz eines Maximums und eines Minimums (Satz 4.31), sowie die gleichmäßige Stetigkeit (Satz von Heine, Satz 4.38). Eine Analyse der zugehörigen Beweise zeigt, dass wir dabei i.w. nur die Folgenabgeschlossenheit von  $[a, b]$  und den Satz von Bolzano-Weierstraß benutzt haben, der wiederum nur die Beschränktheit der Menge  $[a, b]$  voraussetzt. Folglich lassen sich beide oben genannten Sätze auf Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  verallgemeinern, wobei  $A \subseteq \mathbb{R}$  eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Da wir Beschränktheit und Abgeschlossenheit auch in beliebigen metrischen Räumen definieren können, stellt sich die Frage, ob wir als Urbildraum statt  $\mathbb{R}$  auch einen beliebigen metrischen Raum zulassen können, um den Satz vom Maximum und Minimum (und später auch den Satz von Heine) zu verallgemeinern. Leider ist dieser einfache Ansatz zum Scheitern verurteilt, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 1.56** Sei  $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ , wobei  $d$  die diskrete Metrik bezeichnet. Ist  $V \subseteq \mathbb{R}$  offen bzgl. der Standardmetrik, dann ist  $V = Id_{\mathbb{R}}^{-1}(V)$  auch offen bzgl. der diskreten Metrik (denn dort sind alle Teilmengen offen). Also sind Urbilder offener Mengen offen und  $Id_{\mathbb{R}}$  ist nach Satz 1.53 stetig. (Erinnern Sie sich noch an Teil 2) von Beispiel 1.49? Hier sollten Sie herausgefunden haben, dass die Umkehrfunktion  $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$  überraschenderweise *nicht* stetig ist.) Nun ist die Menge  $\mathbb{R}$  bzgl. der diskreten Metrik auch beschränkt (da enthalten in  $U_2(0)$ ) und abgeschlossen. Die Abbildung  $Id_{\mathbb{R}}$  hat aber kein Maximum oder Minimum auf der bzgl.  $d$  beschränkten und abgeschlossenen Menge  $\mathbb{R}$ .

Wir benötigen also in metrischen Räumen eine stärkere Eigenschaft als nur Beschränktheit und Abgeschlossenheit, und dies ist die sogenannte *Kompaktheit*, die wir durch die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft* definieren werden. Diese Eigenschaft ist leider alles andere als intuitiv und benötigt den Begriff der *Familie*, der den der Folge verallgemeinert.

**Definition 1.57** Sei  $I$  eine beliebige (Index)-Menge und  $Y$  eine weitere Menge. Eine Familie  $(y_i)_{i \in I}$  in  $Y$  ist eine Abbildung  $I \rightarrow Y$ ,  $i \mapsto y_i$ .

**Definition 1.58** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$ .

- 1) Eine Familie  $(U_i)_{i \in I}$  von offenen Mengen  $U_i \subseteq X$  heißt offene Überdeckung von  $A$ , falls

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

- 2)  $A$  heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von  $A$  eine endliche Teilüberdeckung von  $A$  enthält, d.h. ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , so gibt es eine endliche Teilmenge  $E \subseteq I$ , so dass

$$A \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i.$$

**Beispiel 1.59** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- 1) Wir betrachten das offene Intervall  $]0, 1[ \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist  $(]0, \frac{2}{3}[, ]\frac{1}{3}, 2[)$  eine offene Überdeckung von  $]0, 1[$ , denn

$$]0, \frac{2}{3}[ \cup ]\frac{1}{3}, 2[.$$

Diese Überdeckung ist sogar endlich, da sie nur zwei Elemente (offene Mengen) enthält. Eine andere endliche offene Überdeckung ist natürlich auch  $(]0, 1[)$ . Allerdings ist  $]0, 1[$  *nicht* kompakt, denn betrachten wir  $U_n = ]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , so gilt

$$]0, 1[ \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} U_n,$$

d.h.  $(U_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  ist eine offene Überdeckung von  $]0, 1[$ . Ist allerdings  $E \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$  endlich und  $m = \max E$ , so gilt

$$]0, 1[ \not\subseteq \bigcup_{n \in E} U_n = ]\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}[.$$

Folglich enthält  $(U_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  keine endliche Teilüberdeckung von  $]0, 1[$ .

- 2) Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge in  $X$  mit Grenzwert  $a \in X$ . Dann ist die Menge

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

kompakt, denn ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , so existiert wegen  $a \in A$  ein  $j \in I$  mit  $a \in U_j$ . Wegen der Konvergenz von  $(a_n)$  gegen  $a$  liegen bereits fast alle Folgenglieder in  $U_j$ , d.h. es gibt  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \in U_j$  für alle  $n \geq N$ . Wähle nun zu jedem  $n < N$  ein  $i_n \in I$  mit  $a_n \in U_{i_n}$  für  $n = 0, \dots, N$ . Dann gilt

$$A \subseteq U_j \cup \left( \bigcup_{n < N} U_{i_n} \right)$$

und die Menge auf der rechten Seite der Inklusion ist eine endliche Teilüberdeckung von  $(U_i)_{i \in I}$ . Genauer gesagt ist  $E := \{j, i_0, \dots, i_{N-1}\}$  die gesuchte endliche Teilmenge von  $I$  mit  $A \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i$ .

- 3) Sei  $A \subseteq X$  endlich. Dann ist  $A$  kompakt, denn ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , so wähle zu jedem  $a \in A$  ein  $i_a \in I$  mit  $a \in U_{i_a}$ . Dann ist  $(U_{i_a})_{a \in A}$  eine endliche Teilüberdeckung der Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$ , denn

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_{i_a}.$$

- 4) Sei  $X$  eine Menge und  $d$  die diskrete Metrik auf  $X$ . Dann sind die kompakten Teilmengen von  $X$  genau die endlichen Teilmengen von  $X$ . Aus Teil 3) wissen wir bereits, dass für jede beliebige Metrik gilt, dass endliche Teilmengen kompakt sind. Ist andererseits  $A \subseteq X$  unendlich, so lässt sich aus der offenen Überdeckung

$$(U_1(a))_{a \in A}$$

keine endliche Teilüberdeckung von  $A$  auswählen, da jede Menge  $U_1(a)$  genau aus dem einen Punkt  $a$  besteht. Also ist eine nicht endliche Teilmenge von  $X$  nicht kompakt und mit Kontraposition folgt, dass jede kompakte Teilmenge von  $X$  endlich ist.

**Bemerkung 1.60** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq T \subseteq X$ , sowie  $d_T$  die durch  $d$  induzierte Metrik auf  $T$ . Dann gilt (Übung):

$$A \text{ kompakt in } (X, d) \iff A \text{ kompakt in } (T, d_T)$$

So effektiv und nützlich sich die Definition der Kompaktheit im Folgenden erweisen wird, so schwierig ist es jedoch manchmal auf diese Art nachzuweisen, dass eine Menge tatsächlich kompakt ist. Glücklicherweise gibt es im  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardmetrik eine viel einfachere Charakterisierung. Unser nächstes Ziel ist es daher zu zeigen, dass im  $\mathbb{R}^n$  eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  genau dann kompakt ist, wenn sie (wie eingangs angedeutet) beschränkt und abgeschlossen ist. Eine Richtung ist dabei relativ einfach zu zeigen und gilt sogar in beliebigen metrischen Räumen.

**Satz 1.61** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $A$  beschränkt und abgeschlossen.

**Beweis:** Wir zeige zunächst die Beschränktheit von  $A$ . Für  $X = \emptyset = A$  ist das klar, sei also  $X \neq \emptyset$ . Wähle ein  $x \in X$  und betrachte die offene Überdeckung  $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  von  $A$ . (Dies ist in der Tat eine offene Überdeckung von  $A$ , denn ist  $a \in A$ , so ist  $d(a, x) \in \mathbb{R}$  und mit dem Archimedischen Axiom (Satz 1.53 in Analysis I) folgt die Existenz von  $n \in \mathbb{N}$  mit  $d(a, x) < n$ . Dann gilt aber  $a \in U_n(x)$ .) Da  $A$  kompakt ist, hat diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt  $E \subseteq \mathbb{N}$  endlich mit

$$A \subseteq \bigcup_{n \in E} U_n(x) = U_m(x)$$

mit  $m = \max E$ . Damit ist  $A$  nach Satz 1.8 aber beschränkt. (Klar?)

Für die Abgeschlossenheit von  $A$  weisen wir nach, dass  $X \setminus A$  offen ist. Für  $A = X$  ist dies klar, sei also  $X \setminus A \neq \emptyset$  und  $x \in X \setminus A$  beliebig. Zu jedem  $a \in A$  definieren wir die offene Menge  $U_a := U_{\varepsilon_a}(a)$  mit  $\varepsilon_a := \frac{1}{2} d(a, x)$ . Dann ist  $(U_a)_{a \in A}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Wegen der Kompaktheit von  $A$  existiert  $E = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq A$  endlich, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{a \in E} U_a = \bigcup_{k=1}^m U_{\varepsilon_{a_k}}(a_k).$$

Sei nun  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{a_1}, \dots, \varepsilon_{a_m}\}$ . Dann gilt  $\varepsilon > 0$  und

$$U_\varepsilon(x) \cap U_{\varepsilon_{a_k}}(a_k) = \emptyset$$

für  $k = 1, \dots, m$ , da  $\varepsilon \leq \varepsilon_{a_k} = \frac{1}{2} d(a_k, x)$  für  $k = 1, \dots, m$ . Damit folgt aber  $U_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$ , d.h.  $x$  ist ein innerer Punkt von  $X \setminus A$ . Also ist  $X \setminus A$  offen und daher  $A$  abgeschlossen.  $\square$

**Bemerkung 1.62** Die Umkehrung von Satz 1.61 gilt natürlich nicht, denn dann hätten wir uns gar nicht erst die Mühe machen müssen den Begriff der *Kompaktheit* einzuführen. Ein Gegenbeispiel erhalten wir schnell für eine unendliche Menge  $X$ , die mit der diskreten Metrik versehen ist. Diese ist sowohl beschränkt und abgeschlossen, aber nach Teil 4) von Beispiel 1.59 nicht kompakt.

Der Nachweis dafür, dass eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  tatsächlich kompakt ist, ist alles andere als trivial. Wir benötigen dazu etliche Vorbereitungen.

**Lemma 1.63** *Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt und  $A \subseteq K$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt.*

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Wir nehmen noch die offene Menge  $X \setminus A$  hinzu und erhalten so eine offene Überdeckung von  $K$  (bzw. sogar von  $X$ ). Ganz formal wählen wir dazu einen Index  $j \notin I$  und setzen  $U_j := X \setminus A$  und  $\tilde{I} := I \cup \{j\}$  und betrachten die offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in \tilde{I}}$ . Wegen der Kompaktheit von  $K$  existiert nun eine endliche Teilmenge  $E \subseteq I$ , so dass

$$A \subseteq K \subseteq \left( \bigcup_{i \in E} U_i \right) \cup (X \setminus A).$$

(Klar? Wie drücken Sie das formal über die Menge  $\tilde{I}$  aus?) Wegen  $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$  gilt dann schon

$$A \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i$$

und  $(U_i)_{i \in E}$  ist eine endliche Teilüberdeckung von  $(U_i)_{i \in I}$ . Da letztere beliebig war, folgt die Kompaktheit von  $A$ .  $\square$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips, d.h. Satz 2.38 aus Analysis I.

**Satz 1.64 (Schachtelungsprinzip)** *Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von  $X$  mit*

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0.$$

*Dann existiert genau ein  $x \in X$  mit  $x \in A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d.h. es gilt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

**Beweis:** Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien also  $x, \tilde{x} \in A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$0 \leq d(x, \tilde{x}) \leq \text{diam}(A_n)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und da die rechte Seite dieser Ungleichung eine (reelle) Nullfolge ist, folgt mit dem “Sandwich-Prinzip” aus Analysis I, dass  $d(x, \tilde{x}) = 0$ , also  $x = \tilde{x}$  gilt.

Für die Existenz wählen wir zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $a_n \in A_n$ , was wegen  $A_n \neq \emptyset$  möglich ist. Dann ist  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge in  $X$ , denn sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann gibt es ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $\text{diam}(A_n) < \varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$ . Dann gilt aber für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ , dass

$$d(a_n, a_m) \leq \text{diam}(A_{N_\varepsilon}) < \varepsilon,$$

da  $a_n, a_m \in A_{N_\varepsilon}$  wegen  $A_n, A_m \subseteq A_{N_\varepsilon}$  gilt. Da  $X$  vollständig ist, hat die Cauchy-Folge  $(a_n)$  einen Grenzwert  $x \in X$ . Es bleibt z.z., dass  $x \in A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Sei dazu  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Betrachten wir die Teilfolge  $(a_k)_{k \geq n}$ , so ist dies wegen  $a_k \in A_k \subseteq A_n$  für  $k \geq n$  eine Teilfolge in  $A_n$  mit Grenzwert  $x$ . Wegen der Abgeschlossenheit von  $A_n$  gilt dann aber auch  $x \in A_n$ .  $\square$

**Lemma 1.65** Seien  $r > 0$  und  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist der Würfel

$$W = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + r] = [a_1, a_1 + r] \times \cdots \times [a_n, a_n + r] \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis:** Eine wichtige Grundidee im Beweis ist die Tatsache, dass sich jeder Würfel  $W$  mit Kantenlänge  $r$  wie im Satz als Vereinigung von  $2^n$  abgeschlossenen Würfeln halber Kantenlänge darstellen lässt, die wir *kanonische Teilwürfel* nennen wollen. Diese haben die Form

$$\prod_{i=1}^n \left[ \alpha_i, \alpha_i + \frac{r}{2} \right], \quad \alpha_i \in \left\{ a_i, a_i + \frac{r}{2} \right\}.$$

Angenommen,  $W$  ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $W$ , die keine endliche Teilüberdeckung von  $W$  enthält. Wir konstruieren nun rekursiv eine Folge  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener Würfel wie folgt:

$$W_0 := W.$$

Dann ist  $W_0$  abgeschlossen nach Beispiel 1.35. Außerdem hat  $W_0$  die Kantenlänge  $r = \frac{r}{2^0}$  und keine endliche Teilfamilie von  $(U_i)_{i \in I}$  überdeckt  $W_0$ .

Sei nun  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  bereits konstruiert, so dass  $W_k$  die Kantenlänge  $\frac{r}{2^k}$  hat und keine endliche Teilfamilie von  $(U_i)_{i \in I}$  den Würfel  $W_k$  überdeckt. Dann gibt es mindestens einen (der  $2^n$ ) kanonischen Teilwürfel von  $W_k$ , der von keiner endlichen Teilfamilie von  $(U_i)_{i \in I}$  überdeckt wird. (Andernfalls erhielten wir eine endliche Teilüberdeckung von  $W_k$ .) Einen von diesen Würfeln wählen wir als  $W_{k+1}$ . Dieser hat die Kantenlänge  $\frac{r}{2^{k+1}}$ .

Diese Konstruktionsvorschrift liefert uns eine Folge  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nichtleerer abgeschlossener Würfel, so dass

$$W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_k \supseteq W_{k+1} \supseteq \cdots \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(W_k) = 0,$$

denn

$$\text{diam}(W_k) = \sqrt{\left(\frac{r}{2^k}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{r}{2^k}\right)^2} = \frac{r}{2^k} \sqrt{n}.$$

(Klar?) Mit Satz 1.64 folgt die Existenz von  $x \in W = W_0$  mit

$$\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k.$$

Da  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $W$  ist, gibt es ein  $i_0 \in I$  mit  $x \in U_{i_0}$ . Da  $U_{i_0}$  offen ist, gibt es außerdem ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$ . Dann gilt aber für jeden der Würfel  $W_k$  mit der Eigenschaft  $\text{diam}(W_k) < \varepsilon$ , dass  $W_k \subseteq U_{i_0}$ . Dann ist aber die einelementige Teilfamilie  $(U_i)_{i=i_0}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $W_k$  im Widerspruch zur Konstruktionsvorschrift der Würfelreihe  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Folglich war unsere Annahme falsch, d.h.  $W$  ist kompakt.  $\square$

**Satz 1.66 (von Heine-Borel)** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $A$  genau dann kompakt, wenn  $A$  beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ” folgt sofort aus Satz 1.61.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $A$  beschränkt und abgeschlossen. Wegen der Beschränktheit von  $A$  finden wir einen abgeschlossenen Würfel  $W = I^n \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $A \subseteq W$ . Da der Würfel  $W$  nach Lemma 1.65 kompakt ist, folgt mit Lemma 1.63 aus der Abgeschlossenheit von  $A$  auch die Kompaktheit.  $\square$

**Beispiel 1.67** 1)  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  ist kompakt. Ebenso  $[0, 1] \cup [\sqrt{2}, \pi]$ .

2) Die Einheitssphäre  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.

Der nächste Satz ist von zentraler Bedeutung für die Beweise der nachfolgenden Sätze über Existenz von Extremwerten und über gleichmäßige Stetigkeit.

**Satz 1.68** Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $K \subseteq X$  kompakt, so ist auch  $f(K)$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $f(K) \subseteq Y$ . Dann ist

$$(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$$



eine offene Überdeckung von  $K \subseteq X$ , denn wegen der Stetigkeit von  $f$  folgt nach Satz 1.53 für alle  $i \in I$  aus der Offenheit von  $U_i$  auch die von  $f^{-1}(U_i)$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es  $E \subseteq I$  endlich, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i \in E} f^{-1}(U_i).$$

Damit erhalten wir

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{i \in E} f^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i \in E} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i,$$

d.h.  $(U_i)_{i \in E}$  ist eine endliche Teilüberdeckung von  $f(K)$ . Folglich ist  $f(K)$  kompakt.  $\square$

**Satz 1.69 (“vom Maximum und Minimum”)** Seien  $(X, d)$  ein nichtleerer, kompakter metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt  $\sup f, \inf f \in f(X)$ , d.h. die Abbildung  $f$  nimmt auf  $X$  ihr Maximum und ihr Minimum an.

**Beweis:** Nach Satz 1.68 ist  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  kompakt, also nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen. Wegen der Beschränktheit gilt  $s := \sup f = \sup f(X) \in \mathbb{R}$  und nach Analysis I Satz 1.50 gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $y_n \in f(X)$  mit

$$s - \frac{1}{n} < y_n \leq s.$$

Für die dadurch gegebene Folge  $(y_n)$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = s = \sup f$  und wegen der Abgeschlossenheit von  $f(X)$  folgt  $\sup f \in f(X)$ .

Analog zeigt man  $\inf f \in f(X)$ .  $\square$

Als nächstes verallgemeinern wir den Satz von Heine aus Analysis I (dort Satz 4.38), wozu wir insbesondere den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit benötigen.

**Definition 1.70** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Dann heißt  $f : X \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x, \tilde{x} \in X$  gilt:

$$d_X(x, \tilde{x}) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$$

**Satz 1.71 (“von Heine”)** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, sowie  $K \subseteq X$  kompakt und  $f : K \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f$  stetig ist, existiert zu jedem  $x \in K$  ein  $\delta_x > 0$ , so dass für alle  $\tilde{x} \in K$  gilt:

$$d_X(x, \tilde{x}) < \delta_x \implies d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.5)$$

Setze  $U_x := U_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)$ . Dann ist  $(U_x)_{x \in K}$  eine offene Überdeckung von  $K$  und da  $K$  kompakt ist, gibt es  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_n \in K$ , so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

Setze  $\delta := \min \left\{ \frac{1}{2}\delta_{x_j} \mid j = 1, \dots, n \right\}$ . Seien nun  $x, \tilde{x} \in K$  mit  $d_X(x, \tilde{x}) < \delta$ . Wir zeigen, dass dann auch  $d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$  gilt. Zu  $x$  gibt es ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x \in U_{x_j}$ . Damit folgt

$$d_X(x, x_j) < \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_{x_j}$$

und daher  $d_Y(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$  mit (1.5). Andererseits gilt

$$d_X(x_j, \tilde{x}) \leq d_X(x_j, x) + d_X(x, \tilde{x}) < \frac{\delta_{x_j}}{2} + \delta \leq \delta_{x_j}$$

und durch erneute Anwendung von (1.5) erhalten wir auch  $d_Y(f(x_j), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{2}$ , und hieraus schließlich

$$d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \leq d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), f(\tilde{x})) < \varepsilon.$$

Somit ist  $f$  gleichmäßig stetig.  $\square$

In Analysis I hatten wir den Satz von Heine mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß bewiesen. Diesen Beweis hätten wir auch an dieser Stelle exakt übertragen können, da auch der Satz von Bolzano-Weierstraß eine Verallgemeinerung auf metrische Räume hat. Der Begriff der *Teilfolge* wird dabei komplett analog zur Analysis I definiert, weshalb wir uns hier eine ausführliche Definition sparen.

**Satz 1.72 (“von Bolzano-Weierstraß”)** *Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $A$  folgenkompakt, d.h. jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  hat eine in  $A$  konvergente Teilfolge (d.h. eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch wieder in  $A$  liegt).*

**Beweis:** Wenn  $(a_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})$  mit Grenzwert  $a \in A$  hat, dann liegen in jeder offenen Umgebung von  $a$  fast alle Folgenglieder von  $(a_{n_k})$  und damit unendlich viele Folgenglieder von  $(a_n)$ . Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer konvergenten Teilfolge ist daher: “Es gibt  $a \in A$ , so dass in jeder offenen Umgebung von  $a$  unendlich viele Folgenglieder liegen.”

Angenommen, diese Bedingung ist nicht erfüllt. Dann gibt es zu jedem  $a \in A$  ein  $U_a \subseteq X$  offen mit  $a \in U_a$ , so dass  $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_a\}$  endlich ist. Dann gilt aber

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a,$$

d.h.  $(U_a)_{a \in A}$  ist eine offene Überdeckung von  $A$  und wegen der Kompaktheit von  $A$  gibt es  $E \subseteq A$  endlich, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{a \in E} U_a.$$

Dann erhalten wir allerdings durch

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in A\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \bigcup_{a \in E} U_a\} = \bigcup_{a \in E} \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_a\}$$

einen Widerspruch, da die Menge auf der rechten Seite nur endlich viele Elemente enthält. Folglich gibt es ein  $a \in A$ , so dass in jeder offenen Umgebung von  $a$  unendlich viele Folgenglieder liegen. Wir konstruieren nun eine Teilfolge, die gegen  $a$  konvergiert. Dazu wählen wir  $n_0 \in \mathbb{N}$  beliebig und zu jedem  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  mit

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a) \quad \text{und} \quad n_k > n_{k-1}.$$

Dies ist möglich, da in  $U_{\frac{1}{k}}(a)$  unendlich viele Folgenglieder liegen. Nach Konstruktion gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \quad \square$$

In Satz 1.72 haben wir gezeigt, dass jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums folgenkompakt ist. Tatsächlich gilt sogar die Umkehrung, d.h. die Begriffe *Kompaktheit* und *Folgenkompaktheit* sind in metrischen Räumen äquivalent. (Der Beweis ist allerdings alles andere als einfach, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten.) In topologischen Räumen sind beide Begriffe (analog verallgemeinert) jedoch nicht mehr äquivalent, weshalb wir für die Definition der Kompaktheit die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft* verwendet haben.

Beachten Sie, dass wir in Satz 1.72 *nicht* die Vollständigkeit des zu Grunde liegenden metrischen Raums vorausgesetzt haben. Daher erhalten wir nun das folgende interessante Korollar.

**Korollar 1.73** *Jeder kompakte metrische Raum  $(X, d)$  ist vollständig.*

**Beweis:** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $X$ . Dann hat  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $x \in X$ . Wie in Analysis I zeigen Sie nun, dass  $x$  dann schon der Grenzwert der Folge  $(x_n)$  sein muss (Übung).  $\square$

Für spätere Zwecke (in der *Analysis III*) benötigen wir noch das folgende Resultat, für das wir zunächst den Abstand von Mengen in einem metrischen Raum definieren.

**Definition 1.74** *Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und seien  $A, B \subseteq X$  zwei nichtleere Mengen. Dann heißt*

$$d(A, B) := \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

*der Abstand von  $A$  und  $B$ .*

**Satz 1.75** *Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und seien  $A, K \subseteq X$  zwei nichtleere Mengen. Sind  $A, K$  disjunkt und ist  $A$  abgeschlossen und  $K$  kompakt, so gilt  $d(A, K) > 0$ .*

**Beweis:** Übung.  $\square$

## 1.6 Zusammenhang

Unser nächstes Ziel ist eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes, für den wir in Korollar 4.32 in Analysis I die folgende prägnante Form gefunden haben:

*Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist auch  $f(I)$  ein Intervall.*

Für die Definition des Begriffs *Intervall* haben wir allerdings die auf  $\mathbb{R}$  vorhandene Anordnung benutzt. Gibt es vielleicht andere Eigenschaften von Intervallen, die sich auf beliebige metrische Räume verallgemeinern lassen? Ja, denn Intervalle zeichnen sich anschaulich gesprochen dadurch aus, dass sie keine “*Lücken*” haben, so ist z.B.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  kein Intervall. Für diese spezielle Teilmenge stellen wir fest, dass sie sich wegen

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[$$

in zwei disjunkte, nichtleere, offene Mengen zerlegen lässt. Auf dieser Beobachtung baut die folgende Definition auf.

**Definition 1.76** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- 1)  $X$  heißt zusammenhängend, falls für alle offenen Teilmengen  $U, V \subseteq X$  gilt:

$$U \cup V = X \text{ und } U \cap V = \emptyset \implies U = \emptyset \text{ oder } V = \emptyset.$$

- 2) Eine Teilmenge  $T \subseteq X$  heißt zusammenhängend, falls  $(T, d_T)$  zusammenhängend ist, wobei  $d_T$  die durch  $d$  induzierte Metrik auf  $T$  bezeichnet.

**Bemerkung 1.77** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $X$  ist *nicht* zusammenhängend.
- 2)  $X$  lässt sich in zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen  $U, V$  zerlegen, d.h. es gilt  $U \cup V = X$  und  $U \cap V = \emptyset$ .
- 3) Es gibt eine nichttriviale Teilmenge  $C \subseteq X$  (d.h.  $C \neq \emptyset, X$ ), so dass  $C$  offen und abgeschlossen ist.

Dabei folgt “2)  $\Rightarrow$  3)” daraus, dass  $U$  wie in 2) wegen  $U = X \setminus V$  auch abgeschlossen ist. “3)  $\Rightarrow$  2)” folgt, indem wir  $U := C$  und  $V := X \setminus C$  setzen.

Im englischen Sprachgebrauch bezeichnet man Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind üblicherweise mit dem Portmanteauwort “*clopen*” (entstanden aus “closed” und “open”).<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Die deutsche Entsprechung “*abgeschlossen*” hat sich dagegen nicht durchgesetzt und daher sollte man auf die ernstgemeinte Verwendung dieses Begriffs lieber verzichten.

**Beispiel 1.78** 1)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht zusammenhängend. Doch Vorsicht! Dies ist nicht ganz so offensichtlich wie man zuerst vielleicht denken mag. Zwar gilt wie eingangs festgestellt

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[,$$

doch das entscheidende Argument an dieser Stelle ist, dass die beiden Intervalle  $]-\infty, 0[$  und  $]0, \infty[$  nicht nur offen in  $\mathbb{R}$ , sondern auch offen in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind. Z.B. ist dies für die Menge  $]0, \infty[$  nach Satz 1.27 der Fall, weil

$$]0, \infty[ = ]0, \infty[ \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

als Spur einer offenen Menge in  $\mathbb{R}$  darstellbar ist.  $]0, \infty[$  ist übrigens auch abgeschlossen (und daher “clopen”) in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , denn es gilt auch

$$]0, \infty[ = [0, \infty[ \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

d.h.  $]0, \infty[$  ist auch die Spur der in  $\mathbb{R}$  abgeschlossenen Menge  $[0, \infty[$  und somit nach Korollar 1.28 abgeschlossen.

2)  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, denn die Menge

$$C := [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[ \cap \mathbb{Q}$$

ist in  $\mathbb{Q}$  sowohl offen als auch abgeschlossen.

**Satz 1.79** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist  $I$  genau dann zusammenhängend, wenn  $I$  ein (möglicherweise unendliches) Intervall ist.

**Beweis:** Wir zeigen die äquivalente Aussage: “ $I$  ist kein Intervall  $\iff I$  ist nicht zusammenhängend.”

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $I$  kein Intervall. Dann gibt es  $a, b \in I$  und  $c \in ]a, b[$  mit  $c \notin I$ . Setze nun  $U := I \cap ]-\infty, c[$  und  $V := I \cap ]c, \infty[$ . Dann sind  $U$  und  $V$  offen in  $I$ , nichtleer (da  $a \in U$  und  $b \in V$ ) und es gilt  $U \cup V = I$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Folglich ist  $I$  nicht zusammenhängend.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $I$  nicht zusammenhängend. Dann gibt es  $U, V \subseteq \mathbb{R}$  offen, so dass für die in  $I$  offenen Mengen  $U_I := I \cap U$  und  $V_I := I \cap V$  gilt:

$$U_I, V_I \neq \emptyset, \quad U_I \cap V_I = \emptyset, \quad I = U_I \cup V_I$$

Seien  $a \in U_I$  und  $b \in V_I$ . O.B.d.A. sei  $a < b$ . (Ansonsten vertauschen wir die Rollen von  $U_I$  und  $V_I$ . Dabei ist gesichert, dass  $a \neq b$ , da  $U_I \cap V_I = \emptyset$ .) Setze

$$s := \sup \{x \in \mathbb{R} \mid [a, x] \subseteq U\}.$$

Dann gilt  $a \leq s \leq b$ , denn im Fall  $s > b$  wäre  $[a, b] \subseteq U$  woraus der Widerspruch  $b \in U_I \cap V_I = \emptyset$  folgt.

Angenommen  $I$  ist ein Intervall. Dann folgt  $s \in I$ . Weiter gilt  $s \notin U$ , denn sonst würde  $[a, s] \subseteq U$  gelten und es gäbe wegen der Offenheit von  $U$  ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $[a, s + \varepsilon] \subseteq U$

im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von  $s$  gilt. Wegen  $I = U_I \cup V_I$  und  $U_I \subseteq U$  folgt  $s \notin U$  aber  $s \in V$ . Da  $V$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(s) \subseteq V$ . O.B.d.A. sei  $\varepsilon$  dabei so klein gewählt, dass  $a < s - \frac{\varepsilon}{2} < s$ . Da  $I$  ein Intervall ist, folgt  $s - \frac{\varepsilon}{2} \in I$  und außerdem  $s - \frac{\varepsilon}{2} \in U \cap V$  nach Definition von  $s$ , also auch  $s - \frac{\varepsilon}{2} \in U_I \cap V_I = \emptyset$ , woraus wir einen Widerspruch erhalten. Folglich ist  $I$  kein Intervall.  $\square$

**Satz 1.80** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $X$  zusammenhängend, dann ist auch  $f(X)$  zusammenhängend.

**Beweis:** Zunächst zeigen Sie zur Übung, dass  $f : X \rightarrow Y$  genau dann stetig ist, wenn  $f : X \rightarrow f(X)$  dies ist, wobei  $f(X)$  dann natürlich mit der induzierten Metrik versehen ist. Dann können wir nämlich o.B.d.A. annehmen, dass  $f$  surjektiv ist, also  $f(X) = Y$  gilt. Wir zeigen nun, dass es keine nichttriviale Teilmenge von  $Y$  gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Dann ist  $Y = f(X)$  nach Bemerkung 1.77 zusammenhängend.

Sei also  $C \subseteq Y$  sowohl offen als auch abgeschlossen. Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist dann auch  $f^{-1}(C)$  offen und da auch  $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$  offen ist, ist  $f^{-1}(C)$  auch abgeschlossen in  $X$ . Da  $X$  zusammenhängend ist, folgt  $f^{-1}(C) = \emptyset$  oder  $f^{-1}(C) = X$ . Dann folgt wegen der Surjektivität von  $f$ , dass  $C = f(f^{-1}(C)) = \emptyset$  oder  $C = f(f^{-1}(C)) = Y$  (siehe Bemerkung 0.32 in Analysis I). Somit ist  $C$  eine triviale Teilmenge von  $Y$  und daher ist  $Y$  zusammenhängend.  $\square$

**Beispiel 1.81** Die Menge der invertierbaren Matrizen  $GL_n(\mathbb{R})$  ist nicht zusammenhängend, denn da  $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und  $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt, wäre andernfalls auch  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  zusammenhängend. Alternativ betrachten wir die beiden Mengen

$$U := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \quad \text{und} \quad V := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}.$$

Diese sind als Urbilder der offener Mengen  $]0, \infty[$  bzw.  $] \infty, 0[$  offen und außerdem disjunkt, beide nichtleer und offenbar gilt  $GL_n(\mathbb{R}) = U \cup V$ .

**Korollar 1.82 (“Zwischenwertsatz”)** Sei  $(X, d)$  ein zusammenhängender metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Ferner seien  $a, b \in X$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(a) < c < f(b)$ . Dann gibt es ein  $x \in X$  mit  $f(x) = c$ .

**Beweis:** Nach Satz 1.80 ist  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  zusammenhängend, also nach Satz 1.79 ein Intervall. Dann gilt aber  $c \in [f(a), f(b)] \subseteq f(X)$ .  $\square$

Für viele Anwendungen ist der folgende anschauliche Begriff hilfreich, der den doch recht abstrakt definierten Begriff des Zusammenhangs verschärft.

**Definition 1.83** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- 1) Seien  $x, y \in X$ . Eine stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $f(0) = x$  und  $f(1) = y$  heißt Weg von  $x$  nach  $y$  in  $X$ .
- 2)  $(X, d)$  heißt wegzusammenhängend, falls es zu je zwei Elementen  $x, y \in X$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  in  $X$  gibt.

**Satz 1.84** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Ist  $X$  wegzusammenhängend, dann ist  $X$  auch zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $X$  wegzusammenhängend. Angenommen,  $X$  ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere, disjunkte, offene Mengen  $U, V \subseteq X$  mit  $X = U \cup V$ . Sei nun  $u \in U$  und  $v \in V$ . Da  $X$  wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $f : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $f(0) = u$  und  $f(1) = v$ . Ferner ist  $f([0, 1])$  nach Satz 1.80 zusammenhängend, da  $f$  stetig und  $[0, 1]$  als Intervall zusammenhängend ist. Betrachte nun die in  $f([0, 1])$  offenen Mengen

$$U_f := U \cap f([0, 1]) \quad \text{und} \quad V_f := V \cap f([0, 1]).$$

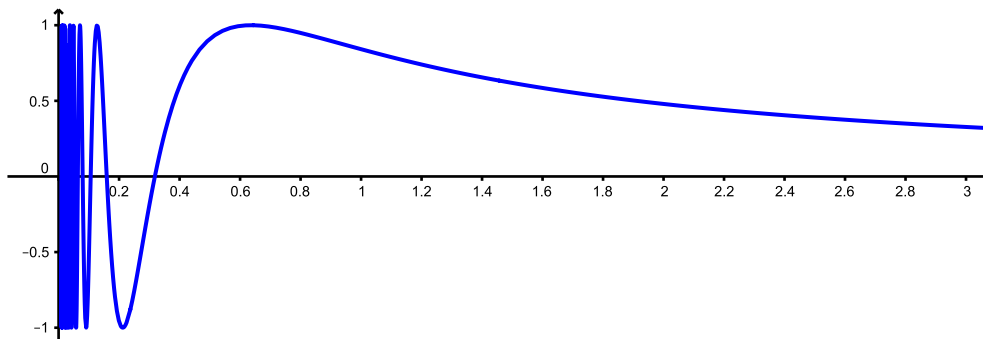
Dann sind  $U_f, V_f$  disjunkt und nichtleer (da  $u \in U_f$  und  $v \in V_f$ ) und außerdem gilt wegen  $U \cup V = X$  auch  $U_f \cup V_f = f([0, 1])$  im Widerspruch zum Zusammenhang von  $f([0, 1])$ . Folglich war die Annahme falsch, d.h.  $X$  ist zusammenhängend.  $\square$

**Beispiel 1.85**  $\mathbb{R}^n$  ist wegzusammenhängend und damit auch zusammenhängend, denn zu je zwei Punkten  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto x + t(y - x)$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ .

**Bemerkung 1.86** Überraschenderweise gibt es Mengen, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind. Ein Standardbeispiel ist die durch

$$T = \left\{ (x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in ]0, \infty[ \right\} \cup \left\{ (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

gegebene Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  (Übung). Dies ist einfach der Graph der Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  zusammen mit dem Abschnitt von  $-1$  bis  $1$  auf der  $y$ -Achse.



Unter stärkeren Voraussetzungen lässt sich aber auch die Rückrichtung von Satz 1.84 beweisen. Dazu führen wir zunächst den folgenden Begriff ein.

**Definition 1.87** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine nichtleere offene zusammenhängende Teilmenge  $G \subseteq X$  heißt Gebiet.

**Satz 1.88** Sei  $\mathcal{V}$  ein normierter Raum und  $G \subseteq \mathcal{V}$  ein Gebiet. Dann ist  $G$  wegzusammenhängend.

**Beweis:** Übung. Betrachten Sie  $G(x) := \{y \in G \mid \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } G\}$  für ein beliebiges  $x \in G$  und zeigen Sie, dass  $G(x)$  sowohl offen, als auch abgeschlossen in  $G$  ist.  $\square$

## 1.7 Normierte Räume und lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns etwas detaillierter mit normierten Räumen befassen. Insbesondere haben wir es also mit metrischen Räumen zu tun, die zusätzlich noch eine Vektorraumstruktur besitzen. In der Linearen Algebra haben Sie sich dann die zugehörigen strukturverträglichen Abbildungen studiert, d.h. die sogenannten *linearen Abbildungen*. Da diese im Folgenden auch bei uns eine zentrale Rolle spielen werden, wollen wir sie einmal etwas näher aus dem Blickwinkel der Analysis untersuchen. Zunächst aber erinnern wir an einige wichtige Grundkonzepte aus der Linearen Algebra: Dazu seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  zwei  $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

- 1) Eine Abbildung  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  heißt *linear*, falls für alle  $v, \tilde{v} \in \mathcal{V}$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v}) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

- 2) Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann linear, wenn es eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  gibt, so dass  $f(x) = Ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Sind allgemeiner  $V, W$  endlich-dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{B}_1$  bzw.  $\mathcal{B}_2$ , so hat jede lineare Abbildung  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  eine darstellende Matrix  $A$  bzgl. der Basen  $\mathcal{B}_1$  von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{B}_2$  von  $\mathcal{W}$ . Diese bezeichnen wir mit

$$[f]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$$

oder kurz mit  $[f]$ , wenn klar ist, um welche Basen es sich handelt.

- 3) Gilt  $\dim(\mathcal{V}) = n$ , so gibt es einen *Isomorphismus*  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$ , d.h.  $\Phi$  ist eine bijektive lineare Abbildung. (Insbesondere ist auch  $\Phi^{-1}$  wieder linear.)

Die naheliegende Frage, ob lineare Abbildungen grundsätzlich auch stetig sind, mag auf den ersten Blick trivial erscheinen. Betrachten wir z.B. eine Matrix  $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$  und die dadurchgegebene lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto Ax$ , so ist diese stetig, da die Komponentenfunktionen

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m$$

als Linearkombinationen von kanonischen Projektionen ganz offensichtlich stetig sind. Überraschenderweise gibt es jedoch lineare Abbildungen, die *nicht* stetig sind. Bevor wir dazu ein Gegenbeispiel präsentieren, werden wir zunächst einmal ein sehr praktisches und einfaches Kriterium zum Überprüfen der Stetigkeit linearer Abbildungen bereitstellen. Dabei zeigt sich u.a., dass wir die zusätzliche Struktur der Linearität dazu führt, dass die Stetigkeit einer linearen Abbildung in einem speziellen Punkt (z.B. 0) schon gleichbedeutend mit der Stetigkeit (sogar Lipschitz-Stetigkeit) der Abbildung auf dem gesamten Definitionsbereich ist.



**Satz 1.89** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  normierte Räume und sei  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $f$  ist Lipschitz-stetig.
- 2)  $f$  ist gleichmäßig stetig.
- 3)  $f$  ist stetig.
- 4)  $f$  ist stetig in 0.

5) Es gibt eine Konstante  $c \geq 0$ , so dass  $\|f(v)\| \leq c\|v\|$  für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt.

**Beweis:** Die Implikationen “1)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  4)” sind trivial.

“4)  $\Rightarrow$  5)”: Ist  $f$  stetig in 0, so gibt es nach dem  $\varepsilon/\delta$ -Kriterium zu  $\varepsilon = 1$  ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt:

$$\|v\| < \delta \implies \|f(v)\| < 1 \quad (1.6)$$

(Beachten Sie, dass es sich dabei um zwei verschiedene Normen handelt, nämlich einmal die auf  $\mathcal{V}$  und einmal die auf  $\mathcal{W}$ .) Sei nun  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  beliebig. Dann gilt

$$\left\| \frac{\delta}{2\|v\|} v \right\| = \frac{\delta}{2\|v\|} \|v\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

und daher folgt mit (1.6), dass

$$\|f(v)\| = \left\| \frac{2\|v\|}{\delta} f\left(\frac{\delta}{2\|v\|} v\right) \right\| = \frac{2\|v\|}{\delta} \cdot \|f\left(\frac{\delta}{2\|v\|} v\right)\| < \frac{2}{\delta} \|v\|$$

für alle  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  gilt. Dann gilt aber mit  $c := \frac{2}{\delta}$ , für alle  $v \in \mathcal{V}$ , dass  $\|f(v)\| \leq c\|v\|$ , denn für  $v = 0$  ist diese Ungleichung trivial.

“5)  $\Rightarrow$  1)”: Für alle  $v, \tilde{v} \in \mathcal{V}$  gilt

$$\|f(v) - f(\tilde{v})\| = \|f(v - \tilde{v})\| \leq c \cdot \|v - \tilde{v}\|.$$

Somit ist  $f$  Lipschitz-stetig. (Wähle  $L = c$  bzw.  $L = 1$  falls  $c = 0$ ).  $\square$

**Beispiel 1.90** Der Raum

$$C^1([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$$

ist ein Teilraum des Raums  $C([0, 1])$  der stetigen Funktionen auf  $[0, 1]$  und wird damit selbst zu einem normierten Raum (bzgl. der Supremumsnorm). Wir betrachten nun die Abbildung  $D : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ ,  $f \mapsto f'$ . (Die Abbildung  $D$  ist also nichts anderes als das Differenzieren von Funktionen.) Dann ist  $D$  linear, denn für alle  $f, g \in C^1([0, 1])$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g) \quad \text{und} \quad D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda D(f).$$

Überraschenderweise ist  $D$  aber nicht stetig, denn dazu betrachten wir die Funktionen  $f_n \in C^1([0, 1])$  mit  $f_n : x \mapsto x^n$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 1 \quad \text{und} \quad \|D(f_n)\|_\infty = n,$$

da  $f'_n(x) = nx^{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  bzw.  $f'_0(x) = 0$  für alle  $x \in [0, 1]$  gilt. Es gibt daher kein  $c \geq 0$  mit

$$\|D(f)\|_\infty \leq c\|f\|_\infty$$

für alle  $f \in C^1([0, 1])$ .

Wie ist dies zu verstehen? Spätestens an dieser Stelle sollte man sich von der überholten Vorstellung trennen, dass unstetige Funktionen “Sprünge” aufweisen müssen. Im abstrakten Sinn bedeutet Stetigkeit, dass “konvergente Folgen auf konvergente Folgen abgebildet werden”. Die Tatsache, dass  $D$  unstetig ist, bedeutet für Funktionenfolgen  $(f_n)$  in  $C^1([0, 1])$  einfach nur, dass aus  $f_n \rightrightarrows f$  i.A. nicht  $D(f_n) \rightrightarrows D(f)$  folgt, d.h. es gibt Funktionenfolgen  $(f_n)$ , die gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion  $f$  konvergieren, für die die Folge der Ableitungen  $(f'_n)$  aber nicht gleichmäßig gegen  $f'$  konvergiert. Dies hatten wir bereits in Analysis I in Beispiel 8.8 festgestellt.

(In der Übung werden sie allerdings lernen, dass das Differenzieren  $D$  durchaus stetig sein kann, wenn man eine geeignetere Norm auf  $C^1([0, 1])$  betrachtet, nämlich die Norm  $\|\cdot\|$  mit  $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ .)

Der folgende Satz zeigt, dass die unendlich-Dimensionalität des Urbildraums entscheidend für die Existenz unseres gerade betrachteten Gegenbeispiels war, denn ist der Urbildraum endlich-dimensional, so ist jede lineare Abbildung zwischen normierten Räumen stetig (und dies gilt unabhängig von der gewählten Norm).

**Satz 1.91** *Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  normierte Räume und sei  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  eine lineare Abbildung. Gilt  $\dim \mathcal{V} < \infty$ , so ist  $f$  stetig.*

**Beweis:** Wir unterscheiden zwei Fälle:

- 1) *Fall 1:*  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  (mit der Standardnorm). In diesem Fall seien  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , dass  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  und

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|f(e_j)\| \leq M \cdot \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

wobei  $M := \max \{\|f(e_j)\| \mid j = 1, \dots, n\}$ . Da  $|x_j| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|$  für alle  $j = 1, \dots, n$  gilt, folgt mit  $c := Mn$ , dass

$$\|f(x)\| \leq Mn\|x\| = c\|x\|$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt. Somit ist  $f$  stetig.

- 2) *Fall 2:  $\mathcal{V}$  ist ein beliebiger endlich-dimensionaler Vektorraum.* Sei  $n := \dim \mathcal{V}$ . Dann gibt es einen Isomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$ . Dieser ist nach Fall 1 stetig, ebenso wie die Komposition  $f \circ \Phi$ . Wir zeigen nun, dass die Umkehrabbildung  $\Phi^{-1}$  stetig ist, denn dann ist auch  $f = (f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$  als Komposition stetiger Funktionen stetig. Dazu zeigen wir, dass es eine Konstante  $M > 0$  gibt, so dass

$$\|\Phi(x)\| \geq M\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

gilt, denn damit erhalten wir für alle  $v \in \mathcal{V}$ , dass

$$M \cdot \|\Phi^{-1}(v)\| \leq \|\Phi(\Phi^{-1}(v))\| = \|v\|,$$

d.h. für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt  $\|\Phi^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{M}\|v\|$  und somit ist  $\Phi^{-1}$  stetig. Es bleibt also (1.7) zu zeigen. Dazu betrachten wir die Abbildung  $\|\cdot\| \circ \Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|\Phi(x)\|$ , die als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Folglich nimmt diese Abbildung auf der kompakten Menge  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  ihr Minimum  $M$  in einem Punkt  $x^* \in S^{n-1}$  an. Insbesondere gilt dann  $M = \|\Phi(x^*)\| > 0$ , denn  $x^* \neq 0$  und da  $\Phi$  ein Isomorphismus ist, gilt dann auch  $\Phi(x^*) \neq 0$ . Damit erhalten wir für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , dass

$$\|\Phi(x)\| = \|\Phi(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|})\| = \|x\| \cdot \|\Phi(\frac{x}{\|x\|})\| \geq M \cdot \|x\|,$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass  $\frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$  gilt. Damit haben wir (1.7) bewiesen, denn für  $x = 0$  ist diese Ungleichung trivial.  $\square$

Wie wir bereits an verschiedenen Stellen festgestellt haben, hängt die Stetigkeit einer Abbildung stark von den benutzten Metriken bzw. im Fall normierter Räume von den zu Grunde liegenden Normen ab. Wir werden daher im Folgenden versuchen, verschiedene Normen miteinander zu "vergleichen".

**Definition 1.92** Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf  $\mathcal{V}$  heißen äquivalent, falls es Konstanten  $c, C > 0$  gibt, so dass für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt:

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1.$$

Wie Sie leicht feststellen, handelt es sich bei der Äquivalenz von Normen um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf einem Vektorraum  $\mathcal{V}$ .

**Satz 1.93** Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen auf  $\mathcal{V}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- i) Die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  sind äquivalent.
- ii)  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_1)$  und  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_2)$  sind topologisch äquivalent, d.h. für alle  $U \subseteq \mathcal{V}$  gilt:

$$U \text{ offen bzgl. } \|\cdot\|_1 \iff U \text{ offen bzgl. } \|\cdot\|_2.$$

- iii)  $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2)$  und  $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1)$  sind stetig.

**Beweis:** “ $i) \Rightarrow ii)$ ”: Gilt  $i)$ , so gibt es per Definition zwei positive Konstanten  $c, C$ , so dass  $c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1$  für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt. Wir zeigen nun die in  $ii)$  behauptete Äquivalenz:

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen bzgl.  $\|\cdot\|_1$  und sei  $v \in U$  beliebig. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\{w \in \mathcal{V} \mid \|v - w\|_1 < \varepsilon\} \subseteq U$ . Dann gilt aber auch

$$\{w \in \mathcal{V} \mid \|v - w\|_2 < c\varepsilon\} \subseteq U,$$

denn aus  $\|v - w\|_2 < c\varepsilon$  folgt  $\|v - w\|_1 \leq \frac{1}{c}\|v - w\|_2 < \frac{1}{c} \cdot c\varepsilon = \varepsilon$ , also  $w \in U$ . Da  $v$  beliebig war folgt die Offenheit von  $U$  bzgl.  $\|\cdot\|_2$ .

“ $\Leftarrow$ ”: folgt analog mit Hilfe der Ungleichung  $\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$  für alle  $v \in \mathcal{V}$ .

“ $ii) \Rightarrow iii)$ ”: folgt sofort aus  $Id_{\mathcal{V}}^{-1}(U) = U$  für alle  $U \subseteq \mathcal{V}$  und dem Kriterium für Stetigkeit, dass Urbilder offener Mengen offen sind (Satz 1.53).

“ $iii) \Rightarrow i)$ ”: Da  $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2)$  und  $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1)$  stetig sind, gibt es Konstanten  $M_1, M_2 \geq 0$  mit

$$\|v\|_2 = \|Id_{\mathcal{V}}(v)\|_2 \leq M_1 \cdot \|v\|_1 \quad \text{und} \quad \|v\|_1 = \|Id_{\mathcal{V}}(v)\|_1 \leq M_2 \cdot \|v\|_2$$

für alle  $v \in \mathcal{V}$ . Dabei gilt insbesondere  $M_1, M_2 > 0$ , da  $Id_{\mathcal{V}}$  nicht die Nullabbildung ist. Daher sind die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  äquivalent, denn für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt, dass

$$\frac{1}{M_2}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq M_1\|v\|_1. \quad \square$$

**Bemerkung 1.94** Aussage  $ii)$  in Satz 1.93 lässt sich dahingehend interpretieren, dass äquivalente Normen *diesselbe Topologie erzeugen*. Insbesondere sind alle *topologischen Eigenschaften*, d.h. Eigenschaften, die wir allein mit Hilfe von offenen Mengen beschreiben können (wie z.B. Konvergenz von Folgen, Stetigkeit von Abbildungen, Beschränktheit, Kompaktheit oder Zusammenhang von metrischen Räumen oder deren Teilmengen) unabhängig von der Art der speziellen Norm, da sich die offenen Mengen bei äquivalenten Normen nicht unterscheiden.

Unsere bisherigen Erkenntnisse haben weitreichende Konsequenzen für die Topologie endlich-dimensionaler normierter Räume.

**Korollar 1.95** Sei  $\mathcal{V}$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann sind alle Normen auf  $\mathcal{V}$  äquivalent.

**Beweis:** Seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei beliebige Normen auf  $\mathcal{V}$ . Da  $\mathcal{V}$  endlich-dimensional ist, sind die Abbildungen  $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2)$  und  $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1)$  nach Satz 1.91 stetig und damit sind die beiden Normen nach Satz 1.93 äquivalent.  $\square$

Es ist also aus der Sicht der Analysis egal, ob wir auf dem  $\mathbb{R}^n$  die Standardnorm oder eine andere Norm betrachten. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  bleiben die topologischen Eigenschaften unverändert. Dies betrifft aber nur die qualitativen Aussagen, nicht die quantitativen. Aus Sicht der *Numerik* kann es daher vorteilhafter sein, je nach

Anwendung oder Situation manchen Normen gegenüber anderen den Vorzug zu geben, z.B. weil dadurch Fehler einfacher oder besser abgeschätzt werden können.

Eine weitere interessante Folgerung ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Heine-Borel, siehe Satz 1.66.

**Korollar 1.96** Sei  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum mit Dimension  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $K \subseteq \mathcal{V}$ . Dann gilt:

$$K \text{ ist kompakt} \iff K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen}$$

**Beweis:** Die Richtung “ $\Rightarrow$ ” gilt nach Satz 1.61 schon in beliebigen metrischen Räumen. Somit bleibt nur noch die Richtung “ $\Leftarrow$ ” zu beweisen. Sei also  $K$  beschränkt und abgeschlossen. Wegen  $\dim \mathcal{V} = n$ , gibt es einen Isomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$ . Durch

$$\|x\| := \|\Phi(x)\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  definiert. Offenbar ist  $\Phi^{-1}(K) \subseteq \mathbb{R}^n$  bzgl. dieser Norm beschränkt (weil  $K$  beschränkt ist) und abgeschlossen (weil  $\Phi$  stetig ist und daher Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind). Da auf dem  $\mathbb{R}^n$  alle Normen äquivalent sind, ist  $\Phi^{-1}(K)$  auch beschränkt und abgeschlossen bzgl.  $\|\cdot\|_2$  und somit nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Dann ist aber auch  $K = \Phi(\Phi^{-1}(K))$  kompakt, da  $\Phi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  wegen der endlichen Dimension des  $\mathbb{R}^n$  stetig ist.  $\square$

**Bemerkung 1.97** Das vorangegangene Korollar erlaubt uns den Trick aus dem Beweis von Satz 1.91 (dies ist ein Standardtrick der Analysis) in beliebigen endlich-dimensionalen normierten Räumen anzuwenden. Zuerst definieren wir aber eine Norm auf dem Raum  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \{f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \mid f \text{ linear}\}$  wie folgt:

Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  normierte Räume, wobei  $\dim \mathcal{V} < \infty$ . Dann wird durch

$$\|f\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}$$

eine Norm auf  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  definiert, die sogenannte Operatornorm bzgl. der Normen in  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$ . (Übung.)

Dass der obige Ausdruck wohldefiniert ist, folgt sofort aus der Stetigkeit jeder Abbildung  $f \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ . (Klar?) Unter Ausnutzung von

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0} \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = \sup_{\|\tilde{v}\|=1} \|f(\tilde{v})\|$$

können wir analog zum Beweis von Satz 1.91 zeigen, dass das Supremum angenommen wird, also ein Maximum ist, da die Menge  $\{\tilde{v} \in \mathcal{V} \mid \|\tilde{v}\| = 1\}$  kompakt in  $\mathcal{V}$  ist.

Für spätere Zwecke halten wir noch fest, dass die Operatornorm (quasi per Definition) die folgende nützliche Eigenschaft hat. Für alle  $f \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  und alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt

$$\|f(v)\| \leq \|f\| \cdot \|v\|.$$

Beachten Sie dabei, dass in dieser Ungleichung drei unterschiedliche Normen auftauchen.

Endlich-dimensionale normierte Räume haben noch eine weitere interessante Eigenschaft:

**Satz 1.98** *Sei  $\mathcal{V}$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann ist  $\mathcal{V}$  bzgl. jeder Norm vollständig, d.h. ein Banachraum.*

**Beweis:** Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathcal{V}$  und  $n := \dim \mathcal{V}$ . Dann gibt es einen Isomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$  und nach Satz 1.91 ist neben  $\Phi$  auch die Umkehrabbildung  $\Phi^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, da linear. Folglich gibt es ein  $c \geq 0$ , so dass

$$\|\Phi^{-1}(v)\| \leq c \cdot \|v\|$$

für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt. Sei nun  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Cauchy-Folge in  $\mathcal{V}$  und sei  $x_k := \Phi^{-1}(v_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für alle  $k, \ell \in \mathbb{N}$ , dass

$$\|x_k - x_\ell\| = \|\Phi^{-1}(v_k) - \Phi^{-1}(v_\ell)\| = \|\Phi^{-1}(v_k - v_\ell)\| \leq c\|v_k - v_\ell\|.$$

Daraus folgt, dass  $(x_k)$  eine Cauchy-Folge im  $\mathbb{R}^n$  ist. Da  $\mathbb{R}^n$  vollständig ist, ist diese konvergent. Setze  $x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Dann gilt wegen der Stetigkeit von  $\Phi$ , dass

$$\Phi(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k.$$

Also ist  $(v_k)$  konvergent. Dies beweist die Vollständigkeit von  $\mathcal{V}$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|$ .  $\square$

Beachten Sie an dieser Stelle, dass die Vollständigkeit keine Eigenschaft ist, die sich allein mithilfe von offenen Mengen beschreiben lässt! Tatsächlich ist schon die Cauchy-Folgen-Eigenschaft keine Invariante in topologisch äquivalenten metrischen Räumen, wie das folgende Gegenbeispiel beweist:

**Beispiel 1.99** Wir betrachten die beiden metrischen Räume  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$  und  $(\mathbb{R}, d)$ , wobei  $d$  die sogenannte “*Arkustangens-Metrik*” ist, die durch

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

definiert ist. Tatsächlich können Sie leicht nachweisen (Übung), dass durch  $d$  eine Metrik auf  $\mathbb{R}$  definiert wird, die topologisch äquivalent zur Standardmetrik ist (d.h.  $U \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann offen in der Standardmetrik, wenn  $U$  offen bzgl.  $d$  ist). Im Gegensatz zu  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ist  $(\mathbb{R}, d)$  nicht vollständig, da die Folge  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwar eine Cauchy-Folge in  $(\mathbb{R}, d)$ , aber nicht konvergent ist. (Übung.)

# Kapitel 2

## Mehrdimensionale Differentialrechnung

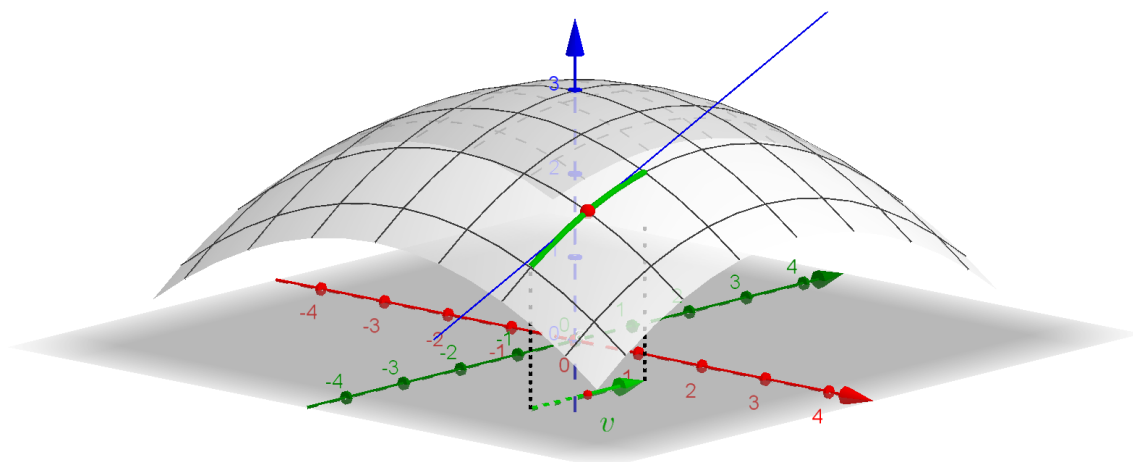
In der Analysis I hatten wir im Abschnitt 6.1 die Differenzierbarkeit einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Häufungspunkt  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$  mit Hilfe des Differentialquotienten definiert:  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$ , wenn der Grenzwert

$$\begin{aligned} f'(x_0) &:= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

existiert. Dieser Begriff lässt sich relativ einfach auf Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  verallgemeinern, wobei wir uns für den Moment auf den Spezialfall  $m = 1$  zurückziehen wollen, also Funktionen der Form  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten und uns erst zu einem späteren Zeitpunkt überlegen werden, welche Voraussetzungen an den Definitionsbereich  $D$  zu stellen sind. Da wir nicht “durch Vektoren teilen” dürfen, benutzen wir die Darstellung des Differenzenquotienten mit  $h \in \mathbb{R}$ . Dann müssen wir den Ausdruck  $x_0 + h$  allerdings anpassen, da dieser für  $n > 1$  sonst nicht erklärt ist. Daher betrachten für ein  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$  den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Dieser Wert hat auch eine wunderbare, anschauliche Bedeutung. Er lässt sich als die Steigung der Funktion  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $v$  interpretieren, d.h. wenn man die Funktion  $f$  nur entlang der durch  $v$  gegebenen Geraden betrachtet. Etwas genauer gesagt können wir im Punkt  $f(x_0)$  Tangenten “an unseren Graph anlegen”. Wählen wir dabei gerade die Tangente aus, die in Richtung des Vektors  $v$  zeigt, so ist die Steigung dieser Tangente durch den Grenzwert (2.1) gegeben. Die nachfolgende Graphik skizziert diese Interpretation für den Fall  $n = 2$ .



Leider wird an dieser Graphik auch schon der Nachteil des obigen Konzepts (das wir im Folgenden *Richtungsableitung* nennen werden) deutlich, denn im Gegensatz zum Fall  $n = 1$  gibt es statt zwei Richtungen (die durch die “*Richtungsvektoren*” 1 oder  $-1$  gegeben sind) unendlich viele Richtungen im Fall  $n \geq 2$ .

Andererseits hatten wir in der Analysis I in Satz 6.3 festgestellt, dass der Begriff der Differenzierbarkeit auch auf eine andere Art und Weise charakterisieren können, die auf der Interpretation der Ableitung als *lineare Approximation* an die gegebene Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  beruht: Die Funktion  $f$  ist genau dann differenzierbar in  $x_0 \in D$ , wenn  $x_0$  ein Häufungspunkt ist und ein Skalar  $m \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass für alle  $x \in D$  gilt, dass

$$f(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Der Skalar  $m$  ist dabei mit der Ableitung  $f'(x_0)$  von  $f$  in  $x_0$  identisch. Die Tangente an  $f$  in  $x_0$  wird dann durch die Funktion  $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  beschrieben und ist die gesuchte lineare Approximation. Auch dieses zweite Konzept lässt sich leicht auf Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in D$  verallgemeinern. Ziel ist dann eine Gleichheit der Form

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{?} \cdot (x - x_0) + R(x),$$

für alle  $x \in D$  aufzustellen, wobei  $R(x)$  ein Fehlerterm ist, der wieder “schneller als  $x - x_0$ ” gegen 0 gehen soll. Was muss dann an der Stelle  $\boxed{?}$  stehen, damit dies zu einer sinnvollen Definition der Differenzierbarkeit führt? Nun,  $\boxed{?}$  soll eine “*lineare Approximation*” sein und einen Vektor des  $\mathbb{R}^n$  (nämlich  $x - x_0$ ) auf einen Vektor des  $\mathbb{R}^m$  abbilden. Folglich sollte  $\boxed{?}$  eine  $m \times n$ -Matrix bzw. eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sein!

Diese wesentliche Erkenntnis werden wir für die Definition der Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher im folgenden Abschnitt verwenden, wobei wir auch das Konzept der Richtungsableitung nicht aus den Augen verlieren wollen.



## 2.1 Richtungsableitung und Differenzierbarkeit

Im Folgenden definieren wir die Differenzierbarkeit gleich ein bisschen allgemeiner und gehen von zwei beliebigen endlich-dimensionalen Banachräumen  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  und einer Abbildung  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ , wobei  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen ist, aus. Die Offenheit von  $U$  stellt dabei sicher, dass wir uns einem beliebigen Punkt  $x_0 \in U$  aus “beliebiger Richtung nähern” können (d.h. für  $x_0 \in U$  und  $v \in \mathcal{V}$  gilt auch  $x_0 + hv \in U$  für  $h \in \mathbb{R}$  mit hinreichend kleinem Betrag) und daher Grenzwertbetrachtungen sinnvoll sind. Die beiden Banachräume  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  unterscheiden sich nach unseren Erkenntnissen aus Abschnitt 1.7 aus Sicht der Analysis eigentlich gar nicht von den Banachräumen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  (wenn  $\dim \mathcal{V} = n$  und  $\dim \mathcal{W} = m$ ), also warum beschränken wir uns nicht gleich auf letztere? Durch die allgemeine Vorgehensweise bleiben wir flexibler, da wir dann auch Unterräume des  $\mathbb{R}^n$  wie z.B.

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$$

betrachten können. Würden wir die Differenzierbarkeit nur für Abbildungen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, definieren, so hätten wir an dieser Stelle ein Problem, da  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^3$  keine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  ist (klar?). Wir könnten den zwei-dimensionalen Raum  $\mathcal{V}$  zwar mit  $\mathbb{R}^2$  identifizieren, aber dann müssten wir unsere Ergebnisse immer mit Hilfe eines Vektorraumisomorphismus auf unser  $\mathcal{V}$  übertragen, was recht umständlich sein kann.

Für die Einführung der in der Einleitung angedeuteten zwei unterschiedlichen Differenzierbarkeitskonzepte benutzen wir *Grenzwerte von Funktionen*, auf deren explizite Einführung wir verzichten, da diese genau so definiert sind wie in Analysis I (“für jede Folge ...”).

**Definition 2.1** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  zwei endlich-dimensionale Banachräume und  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  und  $a \in U$ . Existiert für  $v \in \mathcal{V}$  der Grenzwert

$$\partial_v f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \in \mathcal{W} \quad (h \in \mathbb{R}),$$

so heißt dieser Richtungsableitung von  $f$  in  $a$  in Richtung  $v$ .

Beachten Sie, dass wir in Definition 2.1 auch Vektoren  $v$  zulassen, die nicht auf die Länge 1 normiert sind, und auch der Nullvektor ist erlaubt.

**Beispiel 2.2** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^2$  und  $v = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$ . Dann existiert für alle  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$ , denn wegen

$$\frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \frac{(a_1 + 2h)(a_2 + h)^2 - a_1 a_2^2}{h} = 2a_1 a_2 + a_1 h + 2a_2^2 + 4a_2 h + 2h^2$$

erhalten wir

$$\partial_v f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = 2a_1 a_2 + 2a_2^2,$$

also z.B. speziell für  $a = (3, -1)$  erhalten wir  $\partial_v f(3, -1) = -4$ . (Dieser Wert entspricht aber nicht der Steigung der Funktion in  $(3, -1)$  in Richtung  $v$ , denn dazu hätten wir den Vektor  $v$  zuerst auf die Länge 1 normieren müssen. Welches Ergebnis hätten wir dann erhalten?)

Die nächste und für uns wichtigere Definition basiert auf der am Anfang des Kapitels wiederholten Interpretation der Ableitung als *lineare Approximation*.

**Definition 2.3** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  zwei endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  eine Funktion.  $f$  heißt differenzierbar in  $a \in U$  (auch: total differenzierbar in  $a$ ), falls es eine lineare Abbildung  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  und eine Funktion  $R : U \rightarrow \mathcal{W}$  gibt, so dass für alle  $x \in U$  gilt:

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{\|x - a\|} = 0 \quad (2.2)$$

In diesem Fall heißt  $Df(a) := L$  Ableitung von  $f$  in  $a$ .

In Nachweisen und Untersuchungen schreiben wir im Folgenden kurz  $v$  statt  $x - a$  in (2.2), ersetzen analog  $x$  durch  $a + v$ , d.h. wir schreiben

$$f(a + v) = f(a) + L(v) + R(a + v) \quad \text{und} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(a + v)}{\|v\|} = 0. \quad (2.3)$$

Diese Schreibweise erweist sich als praktischer, wenn wir die lineare Abbildung  $L = Df(x)$  explizit bestimmen wollen.

**Beispiel 2.4** Es seien  $U = \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$  und  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ , sowie  $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^2$ . Dann ist  $f$  in jedem  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar. Um dies zu zeigen, suchen wir eine lineare Abbildung  $L$ , so dass (2.3) für alle  $v = (v_1, v_2)$  gilt. Dazu beobachten wir, dass in der Gleichung

$$\begin{aligned} f(a + v) &= (a_1 + v_1)(a_2 + v_2)^2 = (a_1 + v_1)(a_2^2 + 2a_2 v_2 + v_2^2) \\ &= f(a) + a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2 + a_1 v_2^2 + 2a_2 v_1 v_2 + v_1 v_2^2 \end{aligned}$$

der Term  $a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2$  aufgefasst als Abbildung in  $v = (v_1, v_2)$  eine lineare Abbildung ist. Wir setzen daher

$$L(v) := a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2 \quad \text{und} \quad R(a + v) := a_1 v_2^2 + 2a_2 v_1 v_2 + v_1 v_2^2$$

für alle  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  und zeigen nun die gewünschte Grenzwerteigenschaft von  $R$ . Dazu sei  $(v_{1k}, v_{2k})$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$0 \leq \frac{|R(a_1 + v_{1k}, a_2 + v_{2k})|}{\|(v_{1k}, v_{2k})\|} = \frac{|a_1 v_{2k}^2 + 2a_2 v_{1k} v_{2k} + v_{1k} v_{2k}^2|}{\sqrt{v_{1k}^2 + v_{2k}^2}} \leq |a_1 v_{2k} + 2a_2 v_{1k} + v_{1k} v_{2k}| \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ , da  $(v_{1k})$  und  $(v_{2k})$  Nullfolgen sind. Dabei haben wir in der obigen Abschätzung ausgenutzt, dass  $\sqrt{v_{1k}^2 + v_{2k}^2} \geq |v_{2k}|$  für  $v_{2k} \neq 0$  gilt und anschließend  $v_{2k}$  gekürzt. (Für  $v_{2k} = 0$  gilt dagegen schon  $|a_1 v_{2k}^2 + 2a_2 v_{1k} v_{2k} + v_{1k} v_{2k}^2| = 0$ .) Die Ableitung  $Df(a)$  von  $f$  in  $a$  ist also die lineare Abbildung  $Df(a) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Df(a)(v_1, v_2) = a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2 = \begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1 a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

also die lineare Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch die Matrix  $\begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1 a_2 \end{bmatrix}$  dargestellt wird.

Diese Herleitung war sehr mühsam. Zum Glück werden wir im nächsten Abschnitt eine viel einfachere Methode kennenlernen, um Ableitungen zu berechnen.

**Bemerkung 2.5** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  zwei endlich-dimensionale Banachräume und  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  differenzierbar in  $a \in U$ .

- 1) Die Ableitung von  $f$  in  $a$ , also die lineare Abbildung  $L = Df(a)$  aus Definition 2.3 ist eindeutig bestimmt, denn sind  $v \in \mathcal{V}$  und  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $a + hv \in U$ , so gilt

$$f(a + hv) = f(a) + L(hv) + R(a + hv) = f(a) + h \cdot L(v) + R(a + hv).$$

Hieraus erhalten wir

$$L(v) = \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} - \frac{R(a + hv)}{h}.$$

Da die linke Seite unabhängig von  $h$  ist, existiert auch der Grenzwert auf der rechten Seite für  $h \rightarrow 0$  (da  $U$  offen ist gilt  $a + hv \in U$  für hinreichend betragskleine  $h$ ) und ist gleich  $L(v)$ . Damit erhalten wir

$$L(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \partial_v f(a),$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{R(a + hv)}{h} \right\| &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \|v\| \cdot \frac{\|R(a + hv)\|}{\|hv\|} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \|v\| \cdot \frac{\|R(a + hv)\|}{\|(a + hv) - a\|} \right) = 0 \end{aligned}$$

nach Definition der Differenzierbarkeit.

- 2) Wir haben im vorangegangenen Punkt eine wesentliche Erkenntnis über den Zusammenhang von Richtungsableitung und (totaler) Ableitung gewonnen: Ist  $f$  differenzierbar in  $a$ , so gilt

$$Df(a)(v) = \partial_v f(a) \tag{2.4}$$

für alle  $v \in \mathcal{V}$ . (Für  $v \neq 0$  haben wir dies oben nachgewiesen, für  $v = 0$  kommt auf beiden Seiten Null heraus und die Gleichheit wird offensichtlich.) Es gibt zwar unendlich viele verschiedene Richtungen, falls  $\dim \mathcal{V} > 1$ , aber mit Hilfe der Ableitung können wir die Richtungsableitung für jede beliebige Richtung ganz einfach berechnen. Die Schreibweise in (2.4) ist allerdings gewöhnungsbedürftig: Da  $Df(a)$  eine lineare Abbildung  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  ist, können wir als Argument natürlich Vektoren aus  $\mathcal{V}$  einsetzen und erhalten so ein Element  $Df(a)(v)$  aus  $\mathcal{W}$  – die Richtungsableitung von  $f$  in  $a$  in Richtung  $v$ .

Vergleichen Sie dazu auch die Funktion  $f$  aus Beispiel 2.4. Für die Ableitung von  $f$  in der Stelle  $a$  hatten wir die durch die Matrix  $\begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1a_2 \end{bmatrix}$  definierte lineare Abbildung  $Df(a) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt. Einsetzen von  $v = (2, 1)$  bestätigt dann

$$\partial_v f(a) = Df(a)(v) = \begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2a_1a_2 + 2a_2^2,$$

was wir bereits in Beispiel 2.2 ausgerechnet hatten.

- 3) Die lineare Abbildung  $Df(a) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  kann nach Wahl von Basen in  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  durch eine Matrix dargestellt werden. Diese bezeichnen wir mit  $[Df(a)]$ . Für den Spezialfall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$  und bei Wahl der Standardbasen bezeichnet man die darstellende Matrix

$$[Df(a)] \in \mathbb{R}^{m,n}$$

als *Jacobi-Matrix* (oder auch *Funktionalmatrix*) von  $f$  in  $a$ .

- 4) Betrachten wir nun den Spezialfall  $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$ . Ist  $f$  differenzierbar in  $a \in U$  im Sinn von Analysis I und gilt  $f'(a) = m \in \mathbb{R}$ , so gilt nach Satz 6.3 aus Analysis I für alle  $x \in U$ , dass

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + R(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0.$$

Damit ist  $f$  auch differenzierbar im Sinn von Definition 2.3 und die Ableitung von  $f$  in  $a$  ist die lineare Abbildung  $Df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Df(a)(v) = m \cdot v = f'(a) \cdot v. \quad (2.5)$$

Als lineare Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  lässt sich diese durch eine  $1 \times 1$ -Matrix darstellen. Wählen wir die Standardbasis in  $\mathbb{R}$  (diese ist durch das Element 1 gegeben), so erhalten wir die *Jacobi-Matrix*

$$[Df(a)] = [f'(a)].$$

Auf diese Art und Weise erhalten wir die uns aus der Analysis I bekannte Ableitung als Spezialfall der jetzt neu definierten Ableitung. Hat man sich erst einmal ausgiebig genug mit dem neuen Ableitungsbegriff beschäftigt und diesen verstanden, so unterscheidet man im Fall  $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$  nicht mehr zwischen  $Df(a)$  und  $f'(a)$  und identifiziert die beiden Begriffe. An dieser Stelle fehlt uns dazu aber noch die Erfahrung und daher unterscheiden wir konsequent zwischen der reellen Zahl  $f'(a)$  und der linearen Abbildung  $Df(a)$ , deren Jacobi-Matrix genau die  $1 \times 1$ -Matrix mit dem Element  $f'(a)$  ist.

Es gibt noch einen zweiten subtilen Unterschied zwischen den Begriffen aus Analysis I und Analysis II. In Analysis I reichte es, dass  $a$  ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs  $D$  war. In Analysis II muss der Definitionsbereich  $U$  eine offene Menge sein. Da jeder Punkt einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}$  auch ein Häufungspunkt dieser Menge ist, ist der Begriff aus Analysis I im Spezialfall  $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$  etwas allgemeiner.

Neben der Bezeichnung  $Df(a)$  für die Ableitung von  $f$  in  $a$  gibt es noch viele andere Schreibweisen. In der Mathematik ist die (uns aus Analysis I vertraute) Notation  $f'(a)$  weit verbreitet, daneben gibt es auch die Schreibweisen  $D_a f$  oder  $df(a)$ . Wir benutzen zur besseren Abgrenzung des neuen Begriffs zum Differenzierbarkeitsbegriff aus Analysis I durchgängig die Notation  $Df(a)$  statt  $f'(a)$ .

**Definition 2.6** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  zwei endlich-dimensionale Banachräume und  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ . Dann heißt  $f$  differenzierbar (auch: total differenzierbar), falls  $f$  in allen  $x \in U$  differenzierbar ist. In diesem Fall nennen wir die Abbildung  $Df : U \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ,  $x \mapsto Df(x)$  Ableitung von  $f$ .

Beachten Sie, dass die Ableitung einen anderen Wertebereich als die ursprüngliche Funktion, da die Ableitung von  $f$  in  $x$  kein Element aus  $\mathcal{W}$ , sondern eine lineare Abbildung von  $\mathcal{V}$  nach  $\mathcal{W}$  ist.

**Beispiel 2.7** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  zwei endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ .

- 1) Sei  $f$  konstant, d.h. es gibt  $w \in \mathcal{W}$  mit  $f(x) = w$  für alle  $x \in U$ . Dann ist  $f$  differenzierbar in jedem  $x \in U$  und es gilt  $Df(x) = 0 \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  für alle  $x \in U$ , denn für alle  $v \in \mathcal{V}$  mit  $x + v \in U$  erhalten wir

$$f(x + v) = w = f(x) = f(x) + 0(v) + R(x + v) \quad \text{mit } R = 0.$$

- 2) Sei  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  linear. Dann ist  $f$  differenzierbar und es gilt  $Df(x) = f$  für alle  $x \in \mathcal{V}$ , denn aus der Linearität von  $f$  folgt für alle  $v \in \mathcal{V}$ , dass

$$f(x + v) = f(x) + f(v) = f(x) + f(v) + R(x + v)$$

mit  $R = 0$ . Die Ableitung einer linearen Funktion ist also an jeder Stelle gleich dieser ursprünglichen linearen Funktion, was auch interpretativ einleuchtend ist, da eine lineare Abbildung an jeder Stelle natürlich die beste lineare Approximation dieser Funktion ist.

Beachten Sie an dieser Stelle noch einmal den Unterschied zwischen der Ableitung  $Df(x)$  an der Stelle  $x$  und der *Ableitungsfunktion*  $Df$ . Diese ist gegeben durch

$$Df : \mathcal{V} \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \quad x \mapsto Df(x) = f$$

und ist daher *konstant*. Da auch  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  ein Banachraum ist (vgl. dazu Abschnitt 2.5), ist  $Df$  nach Teil 2) selbst differenzierbar und es gilt  $D(Df) = 0$ .

Dies ist eine einfache Verallgemeinerung eines uns sehr gut bekannten Spezialfalls. Ist nämlich  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  linear, dann gilt  $f(x) = mx$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und ein  $m \in \mathbb{R}$ . Es gilt dann  $f'(x) = m$  und  $f''(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Beachten Sie, dass auch hier  $Df(x) = f$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Die darstellende Matrix dieser linearen Abbildung  $Df(x)$  ist dann gerade

$$\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(x) \end{bmatrix}.$$

**Bemerkung 2.8** 1) *Komponentenweise Differenzierbarkeit:* Wir betrachten den Spezialfall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ . Ist dann  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathcal{W}$ , so ist  $f$  genau dann differenzierbar in  $x \in U$ , wenn alle Komponentenfunktionen  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x$  differenzierbar sind. In diesem Fall gilt für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ :

$$Df(x)(v) = (Df_1(x)(v), \dots, Df_m(x)(v)) \in \mathbb{R}^m.$$

Dies folgt daraus, dass sich die Gleichung  $f(x+v) = f(x) + L(v) + R(x+v)$  mit einer linearen Funktion  $L = (L_1, \dots, L_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und einer "Rest"-Funktion  $R = (R_1, \dots, R_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  komponentenweise betrachten lässt:

$$f_i(x+v) = f_i(x) + L_i(v) + R_i(x+v), \quad i = 1, \dots, m.$$

Die oben behauptete Äquivalenz folgt dann sofort aus Grenzwertbetrachtungen für  $R$  und  $R_1, \dots, R_m$  unter Ausnutzung der komponentenweisen Konvergenz im  $\mathbb{R}^m$  (siehe Beispiel 1.33).

- 2) Ein Spezialfall von 1) sind Kurven. Dies sind für uns an dieser Stelle<sup>1</sup> Abbildungen  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Ist  $I$  offen und ist  $\varphi$  differenzierbar, so gilt für alle  $t \in I$  und alle  $v \in \mathbb{R}$ , dass

$$D\varphi(t)(v) = \begin{bmatrix} D\varphi_1(t)(v) \\ \vdots \\ D\varphi_m(t)(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \cdot v \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \cdot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \end{bmatrix} \cdot v,$$

wobei wir (2.5) ausnutzen konnten, da  $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  reellwertige Funktionen einer Veränderlichen sind. Der Spaltenvektor bzw. die  $m \times 1$ -Matrix

$$\varphi'(t) := \begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \end{bmatrix} = D\varphi(t)(1)$$

ist also die darstellende Matrix von  $D\varphi(t)$  und hat als Vektor auch eine anschauliche physikalische Interpretation: Fassen wir unsere Kurve als Bahnkurve eines Teilchens im Raum in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  auf, so entspricht  $\varphi'(t)$  gerade dem Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zum Zeitpunkt  $t$  in der Position  $\varphi(t)$ . Für diesen Spezialfall verwenden wir im Folgenden stets die Bezeichnung  $\varphi'(t)$  statt  $[D\varphi(t)]$  für die darstellende Matrix der Ableitung. Und wir können sogar noch einen Schritt weitergehen: Dadurch, dass wir in diesem Fall den Differenzierbarkeitsbegriff auf den aus Analysis I zurückführen konnten, können wir in diesem Spezialfall statt einem offenen Intervall  $I$  nun auch halboffene oder abgeschlossene Intervalle  $I$  als Definitionsbereich erlauben, denn für die Differenzierbarkeit in Analysis I reichte es zu fordern, dass der betreffende Punkt ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs ist.

<sup>1</sup>Manche Lehrbücher sind hier strenger und bezeichnen nur das Bild von  $\varphi$  als Kurve und  $\varphi$  als *Parameterdarstellung*, vgl. dazu Abschnitt 3.3. Außerdem müssten wir noch weitere Voraussetzungen an  $\varphi$  stellen um zu garantieren, dass das Bild  $\varphi(I)$  Ähnlichkeit mit dem hat, was wir uns von einer *Kurve* vorstellen.

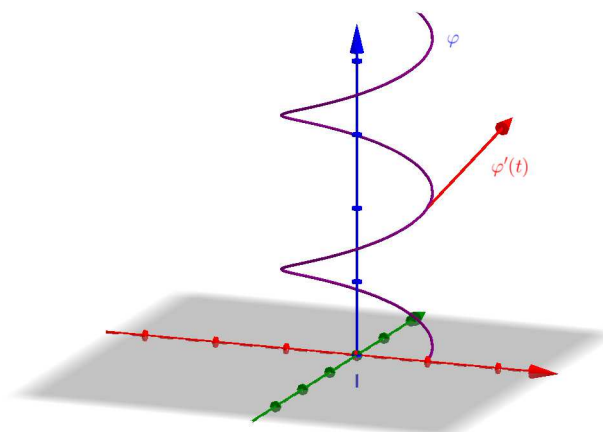
- 3) Die Beobachtungen aus 2) gelten analog für Funktionen  $A = [a_{ij}]_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$  über einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Da wir  $\mathbb{R}^{m,n}$  mit dem  $\mathbb{R}^{m \cdot n}$  identifizieren können, ist die Differenzierbarkeit von  $A$  äquivalent zur der jedes einzelnen “Eintrags”  $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Für die Matrix  $[a'_{ij}(t)]_{i,j}$  schreiben wir kurz  $A'(t)$ . Es gilt  $DA(t)(1) = A'(t)$ .

**Beispiel 2.9** Die Kurve  $\varphi : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}.$$

Dies ist eine Schraubenlinie, die sich im Abstand 1 um die  $z$ -Achse gegen den Uhrzeigersinn in die Höhe schraubt. Wir erhalten

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$



und stellen fest, dass dieser Vektor im Punkt  $\varphi(t)$  tangential an der Kurve anliegt.

**Satz 2.10** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  differenzierbar in  $x \in U$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x$ .

**Beweis:** Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $U$  mit Grenzwert  $x$ . Da  $f$  in  $x$  differenzierbar ist, gibt es eine Funktion  $R : U \rightarrow \mathcal{W}$  mit

$$f(x_n) = f(x) + Df(x)(x_n - x) + R(x_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(x_n)}{\|x_n - x\|} = 0.$$

Da  $Df(x)$  linear und daher stetig ist, erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) + Df(x)(x_n - x) + R(x_n)) \\ &= f(x) + Df(x)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} R(x_n) = f(x) + 0 + 0. \end{aligned}$$

Folglich ist  $f$  stetig in  $x$ .  $\square$

**Bemerkung 2.11** Die Definition der Differenzierbarkeit und der Ableitung lässt sich auch auf den Fall unendlich-dimensionaler Banachräume  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  erweitern. Dann fordert man allerdings noch - damit Satz 2.10 gültig bleibt - die Stetigkeit der linearen Abbildung  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  aus Definition 2.3 und nennt das Ganze *Fréchet-Ableitung*. (Im endlich-dimensionalen Fall ist die Eigenschaft der Stetigkeit nach Satz 1.91 automatisch erfüllt und muss nicht extra gefordert werden.) Interessierte verweisen wir dazu auf die Vorlesungen aus dem Gebiet der *Funktionalanalysis*.

## 2.2 Partielle Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den Spezialfall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ . Wie können wir die Ableitung  $Df(x)$  einer differenzierbaren Funktion  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen,  $x \in U$ , explizit berechnen? Dabei reicht es schon, die Jacobi-Matrix von  $f$  in  $x$  zu bestimmen, weil die lineare Abbildung  $Df(x)$  dadurch eindeutig bestimmt ist. Wir betrachten dazu ein instruktives Beispiel.

**Beispiel 2.12** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$ . Falls  $f$  differenzierbar ist, so gilt  $Df(x) \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^3$ , d.h. die darstellende Matrix von  $Df(x)$  hat die Form

$$A := [ Df(x) ] = [ a_1 \quad a_2 \quad a_3 ] \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

Da wir die  $j$ -te Spalte (die hier nur aus einem Eintrag besteht) einer Matrix durch Multiplikation mit dem  $j$ -ten Einheitsvektor erhalten und das Einsetzen eines Vektors in die Ableitung  $Df(x)$  gerade die Richtungsableitung von  $f$  in  $x$  in Richtung dieses Vektors ergibt (siehe (2.4)), erhalten wir

$$a_j = Ae_j = Df(x)(e_j) = \partial_{e_j} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}.$$

In unserem Fall gilt also speziell

$$a_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_1 + h)^2 x_2 + x_3 - (x_1^2 x_2 + x_3)}{h}.$$

Halten wir hier einmal für einen Moment inne und betrachten diesen Grenzwert genauer! Dieser entspricht nämlich exakt dem Grenzwert, den wir zu berechnen hätten, wenn wir die Ableitung der Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_1 \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$  bestimmen wollten, wobei  $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  zwei Konstanten sind. Wenn wir die Situation auf diese Weise interpretieren, brauchen wir uns allerdings nicht die Mühe zu machen, den Grenzwert explizit über die obige Formel zu berechnen, sondern wir erhalten ihn ganz einfach mit Hilfe unserer Ableitungsregeln aus Analysis I:

$$g'(x_1) = 2x_1 x_2.$$

Damit folgt schließlich

$$a_1 = 2x_1 x_2.$$

Analog können wir mit den anderen Einträgen von  $A$  verfahren. Wir berechnen

$$\begin{aligned} a_2 &= \partial_{e_2} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^2(x_2 + h) + x_3 - (x_1^2 x_2 + x_3)}{h} = x_1^2 \\ \text{und } a_3 &= \partial_{e_3} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2 + (x_3 + h) - (x_1^2 x_2 + x_3)}{h} = 1, \end{aligned}$$

indem wir unsere Ableitungsregeln aus Analysis I auf die Funktionen  $x_2 \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$  (mit  $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$  konstant) und  $x_3 \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$  (mit  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  konstant) anwenden. Somit erhalten wir schließlich *unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit von  $f$* , dass

$$[ Df(x) ] = [ 2x_1 x_2 \quad x_1^2 \quad 1 ].$$



Auf Grund der Erkenntnisse des vorangegangenen Beispiels erhalten die Richtungsableitungen einer Funktion in Richtung der Einheitsvektoren einen eigenen Namen: Wir sprechen in diesem Fall von *partiellen Ableitungen*, da wir anschaulich gesprochen “alle Variablen bis auf eine festhalten” und als Konstanten betrachten, also nur “*teilweise*” ableiten.

**Definition 2.13** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion.

- 1) Existiert in  $x \in U$  die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung des  $i$ -ten Standardbasisvektors  $e_i \in \mathbb{R}^n$ , so heißt  $f$  partiell in  $x$  nach  $x_i$  differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \partial_i f(x) := \partial_{e_i} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}^m$$

$i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $x$ .

- 2)  $f$  heißt partiell nach  $x_i$  differenzierbar, falls  $f$  in allen  $x \in U$  partiell differenzierbar nach  $x_i$  ist. In diesem Fall heißt die Abbildung  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$ .
- 3)  $f$  heißt partiell differenzierbar in  $x \in U$ , falls  $f$  nach allen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  partiell differenzierbar in  $x$  ist.
- 4)  $f$  heißt partiell differenzierbar, falls  $f$  in allen  $x \in U$  partiell differenzierbar ist.
- 5)  $f$  heißt stetig partiell differenzierbar, falls  $f$  partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, \dots, n$ , stetig sind.

**Bemerkung 2.14** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x \in U$ . Aus dem Zusammenhang zwischen Ableitung und Richtungsableitung erhalten wir sofort, dass  $f$  partiell differenzierbar in  $x$  ist. Die darstellende Matrix  $[ Df(x) ] \in \mathbb{R}^{m,n}$  der Ableitung  $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (also die Jacobi-Matrix von  $f$  in  $x$ ) erhalten wir dann analog zur Vorgehensweise in Beispiel 2.12 wie folgt: Die  $i$ -te Spalte der Jacobi-Matrix ist gegeben durch

$$[ Df(x) ] \cdot e_i = Df(x)(e_i) = \partial_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Außerdem gilt bei komponentenweiser Betrachtung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)(e_i) = \begin{bmatrix} Df_1(x)(e_i) \\ \vdots \\ Df_m(x)(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{bmatrix}$$

Damit hat die Jacobi-Matrix die folgende Gestalt:

$$[ Df(x) ] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]_{i,j}$$

Die Einträge der Jacobi-Matrix haben auch eine schöne anschauliche Bedeutung, wie wir aus Abschnitt 2.1 wissen. Da partielle Ableitungen nichts anderes als Richtungsableitungen sind, entspricht  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  der Steigung der  $i$ -ten Komponentenfunktion  $f_i$  in Richtung  $x_j$ .

**Beispiel 2.15** Gegeben sei die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit<sup>2</sup>

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \sin x \cos y \\ x^3 y^2 \\ e^x \end{bmatrix}$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Unter der Annahme, dass  $f$  differenzierbar ist (dies erhalten wir später aus Satz 2.18), gilt

$$\begin{bmatrix} Df(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ 3x^2 y^2 & 2x^3 y \\ e^x & 0 \end{bmatrix}.$$

**Bemerkung 2.16** Wir hatten schon festgestellt, dass für eine in  $x \in U$  differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen, die klassische Ableitung  $f'(x)$  gerade dem Eintrag der  $(1 \times 1)$ -Jacobi Matrix  $\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix}$  entspricht. Somit erhalten wir für diesen Spezialfall einfach

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = f'(x).$$

Bisher haben wir immer Differenzierbarkeit vorausgesetzt, bevor wir die Einträge der Jacobi-Matrix mit Hilfe der partiellen Ableitungen berechnet haben. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies notwendig war.

**Beispiel 2.17** Gegeben sei die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x^2 \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  partiell differenzierbar in  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

und analog erhalten wir  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Unser einziger Kandidat für die Jacobi-Matrix von  $f$  in  $(0, 0)$  ist daher die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Allerdings ist  $f$  nicht differenzierbar in  $(0, 0)$ , denn  $f$  ist dort nicht einmal stetig. Dazu betrachten wir die Folge  $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = (0, 0) \quad \text{aber} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

Damit stellen wir fest: *Aus der partiellen Differenzierbarkeit von  $f$  folgt i.A. nicht die Differenzierbarkeit von  $f$ .*

---

<sup>2</sup>Im Folgenden bezeichnen wir im Fall  $n = 2$  oder  $n = 3$  die Variablen der Einfachheit halber auch häufig mit  $x, y$  bzw.  $x, y, z$  statt  $x_1, x_2$  bzw.  $x_1, x_2, x_3$ .

Haben wir aber zusätzlich zur Existenz der partiellen Ableitungen noch eine weitere Eigenschaft, so erhalten wir auch die Differenzierbarkeit der untersuchten Funktion.

**Satz 2.18** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion. Ist  $f$  stetig partiell differenzierbar, dann ist  $f$  auch stetig differenzierbar und für alle  $x \in U$  gilt*

$$\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

**Beweis:** Da eine Funktion genau dann differenzierbar ist, wenn sie komponentenweise differenzierbar ist (Bemerkung 2.8), reicht es den Spezialfall  $m = 1$  zu betrachten. Sei nun  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  beliebig. Definiere die Abbildung  $F_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F_x(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \cdot v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \quad (2.6)$$

für  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $F_x$  eine lineare Abbildung und der einzig mögliche Kandidat für die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$ . Da  $U$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Sie überzeugen sich leicht davon, dass dann für jedes  $v = (v_1, \dots, v_n)$  mit  $x + v \in U_\varepsilon(x)$  auch  $(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) \in U_\varepsilon(x)$  für alle  $j = 1, \dots, n$  gilt. Wir zeigen nun, dass  $f$  differenzierbar in  $x$  ist und  $Df(x) = F_x$  gilt, indem wir zeigen dass

$$\frac{R(x+v)}{\|v\|} := \frac{f(x+v) - f(x) - F_x(v)}{\|v\|}, \quad x+v \in U_\varepsilon(x) \quad (2.7)$$

für  $v \rightarrow 0$  gegen Null geht. Dazu beobachten wir, dass wir in der Summe

$$\begin{aligned} f(x+v) - f(x) &= f(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) \\ &\quad + f(x_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, x_2, x_3 + v_3, \dots, x_n + v_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + v_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + v_j, \dots, x_n + v_n) \right. \\ &\quad \left. - f(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) \right) \end{aligned}$$

wegen der partiellen Differenzierbarkeit von  $f$  auf jede der Funktionen

$$g_j : \overline{I(x_j, x_j + v_j)} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n)$$

für  $j = 1, \dots, n$  den Mittelwertsatz (siehe Analysis I Satz 6.29) anwenden können. (Zur Erinnerung: In Analysis I hatten wir die Schreibweise  $I(x_j, y_j) = ]x_j, y_j[ \cup ]y_j, x_j[$  eingeführt.

Mit  $\overline{I(x_j, y_j)}$  meinen wir dann natürlich den Abschluss dieser Menge, also das entsprechende abgeschlossene Intervall.) Wegen

$$g'_j(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

erhalten wir daher zu jedem  $j \in \{1, \dots, n\}$  ein  $\xi_j$  zwischen  $x_j$  und  $x_j + v_j$ , so dass

$$f(x + v) - f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) \cdot v_j.$$

Setzen wir dies und (2.6) in (2.7) ein, so erhalten wir

$$\frac{R(x + v)}{\|v\|} = \sum_{j=1}^n \frac{v_j}{\|v\|} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right),$$

und wegen  $|v_j| \leq \|v\|$  für alle  $j = 1, \dots, n$  folgt daraus

$$\frac{|R(x + v)|}{\|v\|} \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right|.$$

Da  $\xi_j$  jeweils zwischen  $x_j$  und  $x_j + v_j$  liegt, geht dieser Ausdruck wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen für  $v \rightarrow 0$  gegen Null. Folglich ist  $f$  differenzierbar in  $x$  mit  $Df(x) = F_x$ . Offenbar ist  $f$  sogar stetig differenzierbar.  $\square$

**Beispiel 2.19** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} xy \\ x^2y - y^2 \end{bmatrix}$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Offensichtlich ist  $f$  partiell differenzierbar und wir erhalten die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ 2xy \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ x^2 - 2y \end{bmatrix}.$$

Diese sind als Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig und daher ist  $f$  nach Satz 2.18 differenzierbar und für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$[Df(x, y)] = \begin{bmatrix} y & x \\ 2xy & x^2 - 2y \end{bmatrix}.$$

**Bemerkung 2.20** In den allermeisten Fällen hilft Satz 2.18 beim Nachweis der Differenzierbarkeit einer Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Allerdings gibt es auch Funktionen, die zwar differenzierbar sind, deren partielle Ableitungen aber nicht stetig sind, wie z.B. (Übung) die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 2.3 Rechenregeln der Differentiation

Unser nächstes Ziel ist die Herleitung von Rechenregeln der Differentiation, so dass wir mit Hilfe von Ableitungen bereits bekannter Funktionen weitere Ableitungen berechnen können. Zentral ist dabei die Kettenregel.

**Satz 2.21 (Kettenregel)** *Seien  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{U}$ ,  $V \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $f : V \rightarrow \mathcal{W}$  Abbildungen, so dass  $\varphi(U) \subseteq V$  gilt. Ist  $\varphi$  differenzierbar in  $t \in U$  und  $f$  differenzierbar in  $\varphi(t)$ , dann ist  $f \circ \varphi$  differenzierbar in  $t$  und es gilt*

$$D(f \circ \varphi)(t) = Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t).$$

**Beweis:** Wegen der Differenzierbarkeit von  $\varphi$  in  $t$  und von  $f$  in  $\varphi(t)$  gilt für alle  $u \in \mathcal{U}$  und  $v \in \mathcal{V}$  mit  $t + u \in U$  und  $\varphi(t) + v \in V$ , dass

$$\begin{aligned} \varphi(t + u) &= \varphi(t) + D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t + u) \quad \text{und} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{R_\varphi(t + u)}{\|u\|} = 0, \\ f(\varphi(t) + v) &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(v) + R_f(\varphi(t) + v) \quad \text{und} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{R_f(\varphi(t) + v)}{\|v\|} = 0. \end{aligned}$$

Sei im Folgenden  $u \in \mathcal{U}$  hinreichend klein (d.h. hinreichend klein in der Norm), so dass  $t + u \in U$  gilt. Setzen wir dann

$$v := \varphi(t + u) - \varphi(t) = D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t + u), \quad (2.8)$$

so folgt, dass

$$\begin{aligned} f(\varphi(t + u)) &= f(\varphi(t) + \varphi(t + u) - \varphi(t)) = f(\varphi(t) + v) \\ &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(v) + R_f(\varphi(t) + v) \\ &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t + u)) + R_f(\varphi(t) + v) \\ &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(u)) + Df(\varphi(t))(R_\varphi(t + u)) + R_f(\varphi(t) + v), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Linearität von  $Df(\varphi(t))$  ausgenutzt haben. Nun ist  $Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t)$  wegen

$$(Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t))(u) = Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(u))$$

die gewünschte Ableitung von  $f \circ \varphi$  in  $x$ , wenn wir zeigen können, dass  $R$  mit

$$R(t + u) := Df(\varphi(t))(R_\varphi(t + u)) + R_f(\varphi(t) + v)$$

die Eigenschaft hat, dass

$$0 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{R(t + u)}{\|u\|} = \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{Df(\varphi(t))(R_\varphi(t + u))}{\|u\|} + \frac{R_f(\varphi(t) + v)}{\|u\|} \right). \quad (2.9)$$

Dazu schätzen wir die beiden Summanden auf der rechten Seite von 2.9 nacheinander ab. Da die linearen Abbildungen  $Df(\varphi(t))$  und  $D\varphi(t)$  nach Satz 1.91 stetig sind, existieren nach Satz 1.89 zwei Konstanten  $c_1, c_2 \geq 0$ , so dass

$$\|Df(\varphi(t))(\tilde{v})\| \leq c_1 \|\tilde{v}\| \quad \text{und} \quad \|D\varphi(t)(\tilde{u})\| \leq c_2 \|\tilde{u}\|$$

für alle  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  und alle  $\tilde{v} \in \mathcal{V}$  gilt. Damit erhalten wir einerseits, dass

$$0 \leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|Df(\varphi(t))(R_\varphi(t+u))\|}{\|u\|} \leq c_1 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|R_\varphi(t+u)\|}{\|u\|} = 0.$$

Andererseits gilt wegen (2.8), dass

$$\|v\| = \|D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t+u)\| \leq c_2 \cdot \|u\| + \|R_\varphi(t+u)\|,$$

woraus wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|R_f(\varphi(t)+v)\|}{\|u\|} = \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\|R_f(\varphi(t)+v)\|}{\|v\|} \cdot \frac{\|v\|}{\|u\|} \right) \\ &\leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|R_f(\varphi(t)+v)\|}{\|v\|} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \left( c_2 + \frac{\|R_\varphi(t+u)\|}{\|u\|} \right) = 0 \end{aligned}$$

erhalten, wobei wir für den ersten Grenzwert ausgenutzt haben, dass aus  $u \rightarrow 0$  auch  $v \rightarrow 0$  folgt. Damit haben wir (2.9) gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 2.22** 1) Mit denselben Bezeichnungen und unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 2.21 gilt

$$D(f \circ \varphi)(t) \in L(\mathcal{U}, \mathcal{W}), \quad Df(\varphi(t)) \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \quad \text{und} \quad D\varphi(t) \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V}).$$

Mit  $k := \dim \mathcal{U}$ ,  $n := \dim \mathcal{V}$  und  $m := \dim \mathcal{W}$  und nach Wahl von Basen in  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  gilt dann für die darstellenden Matrizen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D(f \circ \varphi)(t) \end{bmatrix}}_{m \times k} = \begin{bmatrix} Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Df(\varphi(t)) \end{bmatrix}}_{m \times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} D\varphi(t) \end{bmatrix}}_{n \times k},$$

denn wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, übersetzt sich die Komposition von linearen Abbildungen gerade in die Multiplikation der darstellenden Matrizen.

- 2) Im Folgenden seien  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$ ,  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ . Wie sehen dann die partiellen Ableitungen von  $f \circ \varphi$  aus? Diese sind ja gerade die Einträge der Jacobi-Matrix. Um dies näher zu untersuchen bezeichnen wir zur besseren Unterscheidung die Variablen in  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$  mit  $t_1, \dots, t_k$  und die in  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  mit  $x_1, \dots, x_n$ . Dann erhalten wir die

partielle Ableitung der  $i$ -ten Komponentenfunktion von  $f \circ \varphi$  in  $t$ , also den  $(i, j)$ -Eintrag von  $[D(f \circ \varphi)(t)]$  durch Multiplikation der  $i$ -ten Zeile von  $[Df(\varphi(t))]$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $D\varphi(t)$ , d.h. es gilt

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)_i}{\partial t_j}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\varphi(t)) & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\varphi(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j}(t) \end{bmatrix} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial t_j}(t).$$

3) Im Spezialfall  $k = n = m = 1$  erhalten wir die Kettenregel aus Analysis I, denn

$$\begin{aligned} [(f \circ \varphi)'(t)] &= [D(f \circ \varphi)(t)] = [Df(\varphi(t))] \cdot [D\varphi(t)] \\ &= [f'(\varphi(t))] \cdot [\varphi'(t)] = [f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)], \end{aligned}$$

d.h. es gilt  $(f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ .

4) In der Physik und in den Ingenieurwissenschaften stehen die beiden Funktionen  $f$  und  $f \circ \varphi$  häufig für dieselbe physikalische Größe, die nur in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben wird. Z.B. kann die Temperatur  $T$  auf und über der Erdoberfläche statt in kartesischen Koordinaten in der Form  $T(x_1, x_2, x_3)$  einfacher durch Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt, geographische Breite  $\theta$  und Länge  $\phi$  in der Form  $T(r, \theta, \phi)$  angegeben werden. Die Abbildung  $\varphi$  übernimmt dann die Rolle einer *Koordinatentransformation*, die den *Kugelkoordinaten*  $(r, \theta, \phi)$  eines Punktes seine kartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  zuordnet. (Auf dieses spezielle Beispiel kommen wir etwas später noch einmal im Detail zurück.)

Daher nennt man die Komponentenfunktionen von  $\varphi$  bisweilen einfach  $x_1, \dots, x_n$ , lässt das jeweilige Argument weg und bezeichnet sowohl  $f$  als auch  $f \circ \varphi$  mit  $f$ . Damit vereinfacht sich die Kettenregel für die partiellen Ableitungen zu der folgenden einprägsamen Formel:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_j} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial x_\ell}{\partial t_j}$$

**Beispiel 2.23** Wir betrachten die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + \sin y \quad \text{und} \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ e^t \end{bmatrix},$$

sowie die Komposition  $F = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \cos^2 t + \sin e^t$ . Dann gilt

$$[Df(x)] = \begin{bmatrix} 2x & \cos y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [D\varphi(t)] = \begin{bmatrix} -\sin t \\ e^t \end{bmatrix},$$

woraus wir schließlich erhalten, dass

$$\begin{aligned} [DF(t)] &= [Df(\varphi(t))] \cdot [D\varphi(t)] = \begin{bmatrix} 2 \cos t & \cos e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ e^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \cos t \sin t + e^t \cos e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen und der in Physik/Ingenieurwissenschaften üblichen Vereinfachungen  $x = \varphi_1(t) = \cos t$  und  $y = \varphi_2(t) = e^t$  lautet die Rechnung

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2x(-\sin t) + \cos y \cdot e^t = -2 \sin t \cos t + e^t \cos e^t.$$

Mit Hilfe der Kettenregel lässt sich das Kriterium für Differenzierbarkeit aus Satz 2.18 auf beliebige endlich-dimensionale Banachräume verallgemeinern.

**Satz 2.24** *Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  eine Abbildung. Existieren alle Richtungsableitungen von  $f$  auf ganz  $U$  und sind diese stetig, so ist  $f$  differenzierbar auf  $U$ .*

**Beweis:** Die Beweisidee ist die Rückführung auf den Fall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$  mit Hilfe von Isomorphismen  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$  und  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{W}$  mit Hilfe der Komposition

$$\tilde{f} := (\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi) : \Phi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

denn  $\tilde{f}$  ist genau dann differenzierbar, wenn  $f$  differenzierbar ist. Die Ausführung der Details dieses Beweises bleibt zur Übung Ihnen überlassen.  $\square$

Als nächstes wollen wir die *Produktregel* aus Analysis I verallgemeinern. Dabei stoßen wir auf die kleine Schwierigkeit, dass es im Zusammenhang mit Funktionen mehrerer Veränderlicher recht viele unterschiedliche Produkte gibt, wie z.B. die Skalarmultiplikation, die Matrixmultiplikation, Skalarprodukte oder das Vektorprodukt. Um all diese unterschiedlichen Produkte unter einen Hut zu bekommen beobachten wir, dass ein *Produkt* in der Regel ein *Distributivgesetz* erfüllt und verträglich mit der Skalarmultiplikation ist. Dies führt dazu, dass wir ein Produkt als *bilineare Abbildung* im Sinn der Linearen Algebra auffassen können. Diesen Begriff führen wir an dieser Stelle als Spezialfall der noch allgemeineren *multilinearen Abbildungen* ein, da wir letztere im übernächsten Abschnitt ebenfalls benötigen werden.

**Definition 2.25** *Seien  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $K$  ein Körper und  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k, \mathcal{W}$  (möglicherweise unendlich-dimensionale) Vektorräume über  $K$ . Ferner sei  $\mu : \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{W}$ .*

- 1)  $\mu$  heißt *multilinear* bzw. *genauer  $k$ -linear*, falls  $\mu$  in jeder Komponente linear ist, d.h. für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  ist jede der Abbildungen

$$\mu(v_1, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_k) : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{W}, \quad v \mapsto \mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

für feste  $v_j \in \mathcal{V}_j$ ,  $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k$  linear.

- 2)  $\mu$  heißt *Multilinearform* bzw.  *$k$ -Linearform*, falls  $\mu$   $k$ -linear ist und  $\mathcal{W} = K$  gilt.
- 3)  $\mu$  heißt *bilinear*, falls  $\mu$  2-linear ist und Bilinearform, falls zusätzlich  $\mathcal{W} = K$  gilt.

Ist zusätzlich  $\mathcal{V}_1 = \dots = \mathcal{V}_k = \mathcal{V}$ , so bezeichnen wir die Menge der  $k$ -linearen Abbildungen von  $\mathcal{V}^k$  nach  $\mathcal{W}$  mit  $L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ .

Bilinearformen kennen Sie aus der *Linearen Algebra II*, wo Sie üblicherweise auch allgemeine Körper  $K$  erlauben. Im Folgenden beschränken wir uns natürlich wieder auf den Spezialfall  $K = \mathbb{R}$ .



**Beispiel 2.26** 1) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass das Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear ist (wie jedes andere Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  auch).

2) Die Matrixmultiplikation  $\mu : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{m,\ell}$ ,  $(A, B) \mapsto A \cdot B$  ist bilinear, denn für alle  $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $B, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n,\ell}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B = \lambda_1 A_1 \cdot B + \lambda_2 A_2 \cdot B \quad \text{und} \quad A \cdot (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 A \cdot B_1 + \lambda_2 A \cdot B_2.$$

3) Für jeden beliebigen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{V}$  ist auch die Skalarmultiplikation  $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$  bilinear.

4) Das *Vektorprodukt* (auch *Kreuzprodukt*)  $\times : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(v, w) \mapsto v \times w$  mit

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

ist ebenfalls bilinear, wie Sie leicht nachprüfen können

5) Die Determinante  $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\det(x_1, \dots, x_n) := \det \left( \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \right)$$

ist multilinear bzw. genauer  $n$ -linear. (Auch dies wissen Sie aus der Linearen Algebra!)

**Satz 2.27 (“Produktregel”)** Seien  $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume und sei  $\mu : \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{W}$  bilinear. Dann ist  $\mu$  differenzierbar und für alle  $(x, \tilde{x}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  und alle  $(v, \tilde{v}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  gilt

$$D\mu(x, \tilde{x})(v, \tilde{v}) = \mu(x, \tilde{v}) + \mu(v, \tilde{x}). \quad (2.10)$$

**Beweis:** Den Beweis führen wir in zwei Schritten:

*Schritt 1:* Es gibt ein  $C \geq 0$ , so dass für alle  $v \in \mathcal{V}$  und alle  $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$  gilt, dass

$$\|\mu(v, \tilde{v})\| \leq C \cdot \|v\| \cdot \|\tilde{v}\|. \quad (2.11)$$

(Analog wie bei linearen Abbildungen kann man zeigen, dass diese Bedingung äquivalent zur Stetigkeit von bilinearen Abbildungen ist - bei endlich-dimensionalen Urbildräumen ist die Stetigkeit dann auch immer gegeben.) Sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  und  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m)$  eine Basis von  $\tilde{\mathcal{V}}$ . Dann gibt es zu jedem  $v \in \mathcal{V}$  und jedem  $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$  Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ , so dass

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{und} \quad \tilde{v} = \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{v}_j.$$

(Wir unterdrücken hier in der Notation die Abhängigkeit dieser Koeffizienten von  $v$  bzw.  $\tilde{v}$ .) Die Koordinatenprojektionen  $v \mapsto \alpha_i$  und  $\tilde{v} \mapsto \beta_j$  sind für jedes  $i = 1, \dots, n$  bzw.

$j = 1, \dots, m$  linear, also nach Satz 1.91 stetig, und folglich existiert eine Konstante  $c \geq 0$ , so dass

$$|\alpha_i| \leq c\|v\| \quad \text{und} \quad |\beta_j| \leq c\|\tilde{v}\| \quad (2.12)$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  und alle  $v \in \mathcal{V}$ ,  $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$  gilt. (Wir wählen diese Konstante als das Maximum von  $n + m$  nach Satz 1.89 existierenden Konstanten.) Dann folgt

$$\begin{aligned} \|\mu(v, \tilde{v})\| &= \left\| \mu \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{v}_j \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \mu(v_i, \tilde{v}_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i| \cdot |\beta_j| \cdot \|\mu(v_i, \tilde{v}_j)\| \\ &\leq M \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i| \cdot |\beta_j|, \quad \text{wobei } M := \max_{i,j} \|\mu(v_i, \tilde{v}_j)\| \\ &\leq M n m c^2 \cdot \|v\| \cdot \|\tilde{v}\|, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (2.12) ausgenutzt haben. Wähle also  $C := M n m c^2$ .

*Schritt 2:*  $\mu$  ist differenzierbar und es gilt (2.10). Sei  $(x, \tilde{x}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  beliebig. Wegen der Bilinearität von  $\mu$  gilt dann für alle  $(v, \tilde{v}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ , dass

$$\mu(x + v, \tilde{x} + \tilde{v}) = \mu(x, \tilde{x}) + \mu(x, \tilde{v}) + \mu(v, \tilde{x}) + \mu(v, \tilde{v}).$$

Da die Abbildung  $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $(v, \tilde{v}) \mapsto \mu(x, \tilde{v}) + \mu(v, \tilde{x})$  linear ist (klar?), reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{(v, \tilde{v}) \rightarrow 0} \frac{\mu(v, \tilde{v})}{\|(v, \tilde{v})\|} = 0$$

gilt. Doch halt! Was bedeutet eigentlich  $\|(v, \tilde{v})\|$ ? Wir hatten nur vorausgesetzt, dass  $\mathcal{V}$  und  $\tilde{\mathcal{V}}$  Banachräume sind, über den Vektorraum  $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  haben wir nichts gesagt. Dies brauchten wir aber auch nicht, da  $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  endlich-dimensional ist! Nach Korollar 1.95 sind daher alle Normen auf  $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  äquivalent und  $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  ist bzgl. jeder dieser Normen ein Banachraum. Es ist also egal, mit welcher Norm wir den Vektorraum  $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  versehen. Aus taktischen Gründen wählen wir die durch  $\|(v, \tilde{v})\| := \|v\| + \|\tilde{v}\|$  für alle  $(v, \tilde{v}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  gegebene Norm. (Zeigen Sie zur Übung, dass dies tatsächlich eine Norm auf  $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$  definiert.) Wegen  $\|v\| \cdot \|\tilde{v}\| \leq (\|v\| + \|\tilde{v}\|)(\|v\| + \|\tilde{v}\|)$  und (2.11) erhalten wir damit

$$\frac{\|\mu(v, \tilde{v})\|}{\|(v, \tilde{v})\|} \leq \frac{C \cdot \|v\| \cdot \|\tilde{v}\|}{\|v\| + \|\tilde{v}\|} \leq \frac{C \cdot (\|v\| + \|\tilde{v}\|)(\|v\| + \|\tilde{v}\|)}{\|v\| + \|\tilde{v}\|} = C \cdot (\|v\| + \|\tilde{v}\|)$$

und daher

$$\lim_{(v, \tilde{v}) \rightarrow 0} \frac{\mu(v, \tilde{v})}{\|(v, \tilde{v})\|} = 0.$$

Somit ist  $\mu$  differenzierbar und es gilt (2.10).  $\square$

**Beispiel 2.28** 1) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und seien  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,\ell}$  differenzierbar in  $t \in I$ . (Dann ist auch die Funktion  $A \cdot B : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,\ell}$ ,  $t \mapsto A(t) \cdot B(t)$  differenzierbar in  $t$  und es gilt<sup>3</sup>

$$(A \cdot B)'(t) = A'(t) \cdot B'(t) + A(t) \cdot B'(t).$$

Um dies zu zeigen, fassen wir das Produkt  $A \cdot B$  als Verkettung  $A \cdot B = \mu \circ (A, B)$  der Matrixmultiplikation  $\mu : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{m,\ell}$  und der Funktion  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,\ell}$  mit  $C(t) = (A(t), B(t))$ , die wir natürlich ebenfalls wieder eintragsweise differenzieren können, wobei  $C'(t) = (A'(t), B'(t))$  gilt. Mit Hilfe der Kettenregel und Satz 2.27 erhalten wir, dass für alle  $t \in I$  gilt:

$$\begin{aligned} (A \cdot B)'(t) &= (D(A \cdot B)(t))(1) = \left( D(\mu \circ C)(t) \right)(1) = \left( D\mu(C(t)) \right)(DC(t)(1)) \\ &= \left( D\mu(C(t)) \right)(C'(t)) = D\mu(A(t), B(t))(A'(t), B'(t)) \\ &= \mu(A(t), B'(t)) + \mu(A'(t), B(t)) = A'(t) \cdot B'(t) + A(t) \cdot B'(t). \end{aligned}$$

Für den Spezialfall  $m = n = \ell$  erhalten wir die in Analysis I in Satz 6.10 bewiesene Produktregel für reellwertige Funktionen einer Veränderlichen.

- 2) Analog zu 1) erhalten wir für in  $t \in I$  differenzierbare Kurven  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einem offenen Intervall  $I$ , dass

$$(\langle \varphi, \psi \rangle)'(t) = \langle \varphi'(t), \psi(t) \rangle + \langle \varphi(t), \psi'(t) \rangle.$$

- 3) Sei  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ . Die durch  $(x, \tilde{x}) \mapsto x^\top A \tilde{x}$  gegebene Abbildung  $\mu_A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist bilinear und somit nach Satz 2.27 differenzierbar. Ferner gilt für alle  $(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  und alle  $(v, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , dass

$$D\mu_A(x, \tilde{x})(v, \tilde{v}) = \mu_A(x, \tilde{v}) + \mu_A(v, \tilde{x}) = x^\top A \tilde{v} + v^\top A \tilde{x}.$$

Die eigentliche Interpretation der Ableitung als *lineare Approximation* an die ursprüngliche Funktion lässt sich an diesem Beispiel noch einmal eindrucksvoll verdeutlichen. Betrachten wir die Gleichung

$$\mu_A(x + v, \tilde{x} + \tilde{v}) = (x + v)^\top A(\tilde{x} + \tilde{v}) = x^\top A \tilde{x} + x^\top A \tilde{v} + v^\top A \tilde{x} + v^\top A \tilde{v},$$

so ist der Term  $\mu_A(v, \tilde{v}) = v^\top A \tilde{v}$  für den Fall, dass sowohl  $v$  als auch  $\tilde{v}$  klein in der Norm sind, vernachlässigbar klein gegenüber den anderen Termen. In der Nähe von  $(x, \tilde{x})$  ist die Funktion  $\mu_A$  also näherungsweise durch

$$\mu_A(x + v, \tilde{x} + \tilde{v}) \approx x^\top A \tilde{x} + x^\top A \tilde{v} + v^\top A \tilde{x} = \mu_A(x, \tilde{x}) + D\mu_A(x, \tilde{x})(v, \tilde{v})$$

gegeben.

---

<sup>3</sup>Wir erinnern hier an unsere Vereinbarung in Bemerkung 2.8, dass wir die Jacobi-Matrix der Ableitung von  $A$  in  $t$  in diesem Fall mit  $A'(t)$  bezeichnen und dass wir diese einfach durch Ableiten der jeweiligen Komponentenfunktionen  $a_{ij}$  von  $A$  erhalten. Der Zusammenhang mit der Ableitung  $DA(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m,n})$  ist dann durch  $DA(t)(1) = A'(t)$  gegeben. Dies gilt natürlich analog für  $B$ .

- 4) Für  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  betrachten wir die Abbildung  $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^\top A x$ . (Dies ist nichts anderes als die zu der durch die Matrix  $A$  gegebene Bilinearform gehörende *quadratische Form*, siehe *Lineare Algebra II*.) Dann ist  $q_A$  zwar nicht bilinear, aber es lässt sich als Komposition in der Form

$$q_A = \mu_A \circ \delta$$

schreiben, wobei  $\mu_A$  die Bilinearform aus 1) und  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow (R^n)^2$ ,  $x \mapsto (x, x)$  die „*Verdopplungsfunktion*“ ist. Letztere ist offensichtlich linear und daher gilt  $D\delta(x) = \delta$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  nach Teil 2) von Beispiel 2.7. Somit erhalten wir aus 3) und mit Hilfe der Kettenregel, dass für alle  $x, v \in \mathbb{R}^n$  gilt, dass

$$\begin{aligned} Dq_A(x)(v) &= \left( D\mu_A(\delta(x)) \circ D\delta(x) \right)(v) = \left( D\mu_A(\delta(x)) \circ \delta \right)(v) \\ &= \left( D\mu_A(\delta(x)) \right)(\delta(v)) = (D\mu_A(x, x))(v, v) \\ &\stackrel{3)}{=} \mu_A(x, v) + \mu_A(v, x) = x^\top A v + v^\top A x = x^\top A v + x^\top A^\top v \\ &= x^\top (A + A^\top) v. \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix von  $q_A$  in  $x \in \mathbb{R}^n$  ist also  $[ Dq_A(x) ] = x^\top (A + A^\top) \in \mathbb{R}^{1,n}$ . (Diese hätten wir auch anders bestimmen können, indem wir einfach

$$q_A(x) = x^\top A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

ausmultipliziert und dann die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial q_A}{\partial x_i}$  bestimmt hätten. Übung: Zeigen Sie, dass wir so tatsächlich dasselbe Ergebnis erhalten.)

Ist nun speziell  $A = A^\top$  eine symmetrische Matrix, so gilt  $[ Dq_A(x) ] = 2x^\top A$ . Ist noch spezieller  $n = 1$ , also  $A = [ a ] \in \mathbb{R}^{1,1}$ , so gilt einfach  $q_A(x) = ax^2$  und  $q'_A(x) = 2ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  bzw. in unserer neuen Differentiationstheorie:

$$[ Dq_A(x) ] = [ 2xa ] = [ q'_A(x) ]$$

- 5) Nun sind Sie dran! Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $f, g : U \rightarrow \mathcal{W}$  differenzierbar und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $f + g$  und  $\lambda f$  differenzierbar sind mit  $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$  und  $D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x)$  für alle  $x \in U$ . Nutzen Sie dazu die Bilinearität der Skalarmultiplikation  $m : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  und die Linearität der Addition  $\alpha : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ .

Satz 2.27 lässt sich auf multilineare Abbildungen verallgemeinern:

**Satz 2.29** Seien  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume und  $\mu : \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{W}$  sei  $k$ -linear. Dann ist  $\mu$  differenzierbar und für alle  $(x_1, \dots, x_k), (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k$  gilt

$$D\mu(x_1, \dots, x_k)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^k \mu(x_1, \dots, x_{j-1}, v_j, x_{j+1}, \dots, x_k).$$

**Beweis:** Übung.  $\square$

## 2.4 Der Schrankensatz

Ein sowohl in der Analysis I als auch im Beweis von Satz 2.18 sehr hilfreicher Satz war der *Mittelwertsatz*: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so gibt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(Unsere Voraussetzungen in Analysis I, siehe dort Satz 6.29, waren sogar noch etwas schwächer.) Lässt sich dieses Resultat auf differenzierbare Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen verallgemeinern? Da wir keine Division im  $\mathbb{R}^n$  zur Verfügung haben, müssten wir den Mittelwertsatz natürlich etwas anpassen, indem wir die Differenz  $b - a$  auf die andere Seite bringen. Die Frage lautet also: Gibt es zu  $a, b \in G$  ein  $\xi$  “zwischen”  $a$  und  $b$  (was dies genau bedeuten soll müssen wir uns natürlich noch überlegen), so dass

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a)$$

gilt? Leider ist die Antwort an dieser Stelle i.A. *nein*, selbst dann, wenn wir uns auf den Raum  $\mathcal{V} = \mathbb{R}$  einschränken. Für die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$  (dies ist die “*Schraubenkurve*” aus Beispiel 2.9) und  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$  und alle  $\xi \in [0, 2]$  gilt nämlich

$$Df(\xi)(2\pi - 0) = 2\pi(\sin \xi, -\cos \xi, 1) \neq (0, 0, 2\pi) = f(2\pi) - f(0).$$

Wir lassen uns von diesem Gegenbeispiel allerdings nicht entmutigen und versuchen stattdessen wichtige Folgerungen aus dem Mittelwertsatz zu verallgemeinern. Eine davon war der *Schrankensatz* (siehe Korollar 6.30 in Analysis I). Bevor wir auf dessen Verallgemeinerung näher eingehen, definieren wir zunächst einmal den oben angedeuteten Ausdruck “zwischen  $a$  und  $b$ ” für Vektoren mit Hilfe der sogenannten *Verbindungsstrecke*.

**Definition 2.30** Sei  $\mathcal{V}$  ein Vektorraum und seien  $a, b \in \mathcal{V}$ . Dann heißt

$$\overline{ab} := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

die Verbindungsstrecke zwischen  $a$  und  $b$ .

Für den Beweis des folgenden Schrankensatzes benötigen wir ein kleines Hilfsresultat, das wir in Hinblick auf spätere Zwecke gleich ein bisschen allgemeiner formulieren.

**Lemma 2.31** Seien  $X, Y$  zwei metrische Räume und  $g_1, g_2 : X \rightarrow Y$  stetig. Dann gilt:

- 1) Die Menge  $\{x \in X \mid g_1(x) = g_2(x)\}$  ist abgeschlossen.
- 2) Gilt speziell  $Y = \mathbb{R}$  (mit der Standardmetrik), so ist auch  $\{x \in X \mid g_1(x) \leq g_2(x)\}$  abgeschlossen.

**Beweis:** Übung.  $\square$

**Satz 2.32 (Schranksatz)** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  differenzierbar. Ferner seien  $a, b \in U$ , so dass die Verbindungsstrecke  $\overline{ab}$  zwischen  $a$  und  $b$  in  $U$  enthalten ist. Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in \overline{ab}} \|Df(x)\| \cdot \|b - a\|,$$

wobei  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  mit der Operatornorm bzgl. der Normen in  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  versehen ist.

**Beweis:** Sei  $M := \sup_{x \in \overline{ab}} \|Df(x)\|$ . Falls  $M = \infty$ , so ist die Aussage trivial. Daher nehmen wir an, dass  $M < \infty$  gilt. Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir setzen

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \left\{ t \in [0, 1] \mid \|f(a + t(b - a)) - f(a)\| \leq t(M + \varepsilon)\|b - a\| \right\}.$$

Wenn wir  $1 \in \mathcal{T}_\varepsilon$  zeigen können, dann gilt  $\|f(b) - f(a)\| \leq (M + \varepsilon)\|b - a\|$  und da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt daraus

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|,$$

womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. Es bleibt also zu zeigen, dass  $1 \in \mathcal{T}_\varepsilon$  gilt. Den Nachweis führen wir in zwei Schritten, indem wir zuerst  $\sup \mathcal{T}_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$  und dann  $\sup \mathcal{T}_\varepsilon = 1$  zeigen.

*Schritt 1:*  $\sup \mathcal{T}_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$ : Offenbar gilt  $0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$ , d.h.  $\mathcal{T}_\varepsilon$  ist nichtleer. Außerdem ist  $\mathcal{T}_\varepsilon$  beschränkt und daher existiert  $s := \sup \mathcal{T}_\varepsilon \in [0, 1]$ . Folglich gibt es nach Lemma 4.30 aus Analysis I eine Folge  $(t_n)$  in  $\mathcal{T}_\varepsilon$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$ . Nach Lemma 2.31 ist  $\mathcal{T}_\varepsilon$  abgeschlossen und daher folgt  $s \in \mathcal{T}_\varepsilon$ .

*Schritt 2:*  $s = \sup \mathcal{T}_\varepsilon = 1$ . Angenommen  $s < 1$ . Dann gibt es wegen der Differenzierbarkeit von  $f$  zu  $x_0 := a + s(b - a)$  eine Funktion  $R : U \rightarrow \mathcal{W}$ , so dass für alle  $x = a + t(b - a)$  mit  $t \in [0, 1]$  gilt, dass

$$\begin{aligned} f(a + t(b - a)) &= f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R(x) \\ &= f(a + s(b - a)) + Df(x_0)((t - s)(b - a)) + R(a + t(b - a)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

und

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|} = \lim_{t \rightarrow s} \frac{R(a + t(b - a))}{|t - s| \cdot \|b - a\|}.$$

Folglich gibt es zu unserem bereits gegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $t$  mit  $s < t < \min\{s + \delta, 1\}$  gilt, dass

$$\|R(a + t(b - a))\| < \varepsilon \cdot |t - s| \cdot \|b - a\|.$$

Damit erhalten wir aus (2.13), dass

$$\begin{aligned} \|f(a + t(b - a)) - f(a + s(b - a))\| &\leq \|Df(x_0)\| \cdot |t - s| \cdot \|b - a\| + \varepsilon \cdot |t - s| \cdot \|b - a\| \\ &\leq (M + \varepsilon) \cdot (t - s) \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

(Wegen  $t > s$  konnten wir  $|t - s|$  durch  $(t - s)$  ersetzen.) Hieraus folgt andererseits, dass

$$\begin{aligned} & \|f(a + t(b - a)) - f(a)\| \\ & \leq \|f(a + t(b - a)) - f(a + s(b - a))\| + \|f(a + s(b - a)) - f(a)\| \\ & \leq (M + \varepsilon) \cdot (t - s) \cdot \|b - a\| + (M + \varepsilon)s \cdot \|b - a\| \\ & \leq (M + \varepsilon)t\|b - a\|, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt  $s \in \mathcal{T}_\varepsilon$  ausgenutzt haben. Aus der letzten Ungleichung folgt  $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$ , was wegen  $s < t$  im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von  $s = \sup \mathcal{T}_\varepsilon$  steht. Also war unsere Annahme falsch und es gilt  $s = \sup \mathcal{T}_\varepsilon = 1$ , womit der Beweis abgeschlossen ist.  $\square$

**Korollar 2.33 (Konstanzkriterium)** *Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $G \subseteq \mathcal{V}$  ein nichtleeres Gebiet (d.h.  $G$  ist offen und zusammenhängend) und  $f : G \rightarrow \mathcal{W}$  differenzierbar. Falls  $Df(x) = 0$  für alle  $x \in G$  gilt, so ist  $f$  konstant.*

**Beweis:** Sei  $x_0 \in G$  beliebig gewählt und  $U := \{x \in G \mid f(x) = f(x_0)\}$ . Wir zeigen, dass  $U$  sowohl offen, als auch abgeschlossen in  $G$  ist. Wegen des Zusammenhangs von  $G$  folgt dann  $U = G$ , da  $U$  wegen  $x_0 \in U$  nicht leer ist.

i)  $U$  ist abgeschlossen: Dies folgt sofort aus Lemma 2.31.

ii)  $U$  ist offen: Sei  $a \in U$  beliebig. Wegen der Offenheit von  $G$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(a) \subseteq G$ . Wir zeigen, dass auch  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$  gilt. Dazu sei  $b \in U_\varepsilon(a)$  beliebig. Dann gilt auch für die Verbindungsstrecke zwischen  $a$  und  $b$ , dass  $\overline{ab} \subseteq U_\varepsilon(a)$ . (Klar?) Mit dem Schrankensatz erhalten wir dann

$$\|f(b) - f(x_0)\| = \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in \overline{ab}} \|Df(x)\| \cdot \|b - a\| = 0$$

und daher  $f(b) = f(x_0)$ , woraus wiederum  $b \in U$  folgt. Da  $b$  beliebig war, folgt  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$  und da  $a$  beliebig war, folgt die Offenheit von  $U$ .  $\square$

Der folgende neue Begriff liefert uns Teilmengen, die aus offensichtlichen Gründen für die Verwendung des Schrankensatzes hervorragende Definitionsbereiche liefern.

**Definition 2.34** *Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Teilmenge  $K \subseteq \mathcal{V}$  heißt konvex, falls  $K$  zu je zwei Punkten aus  $K$  auch deren Verbindungsstrecke enthält, d.h. wenn für alle  $a, b \in K$  gilt, dass  $\overline{ab} \subseteq K$ .*

**Beispiel 2.35** 1) Ist  $\mathcal{V}$  ein normierter Raum und  $a \in \mathcal{V}$ , dann ist  $U_\varepsilon(a)$  konvex. (Dies hatten wir im Beweis von Korollar 2.33 bereits benutzt.) Ebenso ist  $\overline{U_\varepsilon(a)}$  konvex.

2) Im  $\mathbb{R}^n$  sind (offene oder abgeschlossene) Kugeln und Quader konvex. Nicht konvex ist dagegen die Teilmenge  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . (Klar?)

Die Vokabel “konvex” haben wir in der Analysis I auch schon für Funktionen kennengelernt. Tatsächlich gibt es einen Zusammenhang zwischen beiden Begriffen. Man kann nämlich zeigen (Übung), dass eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall, genau dann konvex ist, wenn ihr *Epigraph*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y\}$$

eine konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ist. Doch zurück zu unseren Banachräumen. Eine weitere Folgerung aus dem Schrankensatz besagt, dass stetig differenzierbare Funktionen auf kompakten konvexen Mengen nicht nur stetig, sondern sogar Lipschitz-stetig sind.

**Korollar 2.36** *Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  stetig differenzierbar, sowie  $K \subseteq U$  kompakt und konvex. Dann ist  $f$  Lipschitz-stetig auf  $K$ , d.h. es gibt eine Konstante  $L \geq 0$ , so dass für alle  $x, y \in K$  gilt:*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

**Beweis:** Da  $Df : U \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  stetig ist, ist auch die Komposition aus Operatornorm und  $Df$ , also die Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|Df(x)\|$  stetig und nimmt daher, da  $K$  kompakt ist, dort nach Satz 1.69 ihr Maximum (und Minimum) an, d.h. es gibt eine Konstante  $L \geq 0$ , so dass  $\|Df(x)\| \leq L$  für alle  $x \in K$  gilt. Mit dem Schrankensatz erhalten wir daraus wegen der Konvexität von  $K$ , dass  $\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$  für alle  $x, y \in K$  gilt.  $\square$

Im Folgenden wollen wir hin und wieder einmal den Banachschen Fixpunktsatz anwenden und dazu benötigen wir ein einfaches Kriterium dafür, wann eine Abbildung eine Kontraktion, also Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L < 1$  ist. Analog zum Beweis von Korollar 2.36 erhalten wir das folgende Resultat:

**Korollar 2.37** *Seien  $\mathcal{V}$  ein endlich-dimensionaler Banachraum,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen und konvex, sowie  $f : U \rightarrow U$  differenzierbar. Falls es eine Konstante  $L < 1$  gibt, so dass  $\|Df(x)\| \leq L$  für alle  $x \in U$  gilt, so ist  $f$  eine Kontraktion.*

Auf die Kompaktheit einer Teilmenge  $K$  von  $U$  (und die Stetigkeit der Ableitung  $Df$ ) haben wir hier verzichten können, da wir diese Eigenschaft im Beweis von Korollar 2.36 nur benötigt haben, um die Beschränktheit von  $Df$  beweisen zu können. Diese haben wir hier allerdings schon vorausgesetzt.

Für den Spezialfall  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$  schaffen wir es allerdings, den *Mittelwertsatz* in der eingangs beschriebenen Form zu beweisen. Dies bleibt zu Übungszwecken wieder einmal Ihnen überlassen.

**Satz 2.38** *Seien  $\mathcal{V}$  ein endlich-dimensionaler Banachraum,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Ferner seien  $a, b \in U$ , so dass die Verbindungsstrecke  $\overline{ab}$  zwischen  $a$  und  $b$  in  $U$  enthalten ist. Dann gibt es ein  $\xi \in \overline{ab}$  mit  $\xi \neq a, b$ , so dass*

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a).$$

**Beweis:** Übung. (Sie dürfen dazu schon die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.6 benutzen!)  $\square$



## 2.5 Höhere Ableitungen

Der doch recht abstrakte und gewöhnungsbedürftige Begriff der Ableitung in endlich-dimensionalen Banachräumen  $V, W$  bringt leider noch weitere Tücken mit sich. Betrachten wir nämlich eine differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow W$ ,  $U \subseteq V$  offen, so ist die Ableitung eine Funktion  $Df : U \rightarrow L(V, W)$  mit dem Bildbereich  $L(V, W)$ , da ja  $Df(x)$  in jedem Punkt  $x \in U$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$  ist. Nun ist auch  $L(V, W)$  ein endlich-dimensionaler Banachraum, denn wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, gilt  $\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$  und als Norm bietet sich die Operatornorm

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, \quad f \in L(V, W)$$

an. Daher macht es Sinn, auch die Ableitung  $Df$  auf Differenzierbarkeit zu untersuchen. Ist  $Df$  in  $x \in U$  differenzierbar, so ist  $D(Df)(x)$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $L(V, W)$ . Wir können daher zweimal hintereinander Elemente aus  $V$  einsetzen und erhalten

$$\underbrace{\underbrace{D(Df)(x)}_{\in L(V, L(V, W))}}_{\in L(V, W)}(v_1)(v_2) \in W$$

für alle  $v_1, v_2 \in V$ . Ist  $Df$  nun in jedem Punkt  $x \in U$  differenzierbar, so ist die Ableitung von  $Df$  die Funktion

$$D(Df) : G \rightarrow L(V, L(V, W)),$$

und ist diese wiederum differenzierbar in  $x \in U$ , so gilt

$$D(D(Df))(x) \in L(V, L(V, L(V, W))).$$

Dies wird sehr schnell unübersichtlich und wir sollten uns daher ein besseres Konzept für höhere Ableitungen überlegen. Das folgende instruktive Beispiel wird uns dabei helfen.

**Beispiel 2.39** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch und sei  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{2}x^\top Ax$ . Dann ist  $q$  nach Teil 4) von Beispiel 2.28 differenzierbar und für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $Dq(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  die durch

$$[Dq(x)] = x^\top A$$

dargestellte lineare Abbildung. Nun ist die Ableitung  $Dq : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  offensichtlich linear<sup>4</sup>, da die Zuordnung  $x \mapsto x^\top A$  linear ist. Daher ist  $Dq$  differenzierbar und es gilt  $D(Dq)(x) = Dq$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  nach Teil 3) von Beispiel 2.7. Da andererseits  $D(Dq)(x)$

---

<sup>4</sup>**Warnung!** Dies ist ein absoluter Ausnahmefall! Erinnern Sie sich an dieser Stelle daran, dass zwar für eine differenzierbare Funktion  $Df(x)$  an jeder Stelle  $x$  eine lineare Abbildung ist, wohingegen die Ableitung  $Df : x \mapsto Df(x)$  i.A. *nicht* linear ist!

formal eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  ist, können wir zweimal hintereinander Vektoren aus  $V$  einsetzen und erhalten für alle  $v_1, v_2 \in V$ , dass

$$D(Dq)(x)(v_1)(v_2) = Dq(v_1)(v_2) = v_1^\top A v_2.$$

An dieser Stelle können wir aber auch statt des “Nacheinandereinsetzens” von  $v_1$  und  $v_2$  gleich die Zuordnung  $(v_1, v_2) \mapsto v_1^\top A v_2$  betrachten. Dies ist eine bilineare Abbildung, die durch die Matrix  $A$  dargestellt wird.

Die letzte Erkenntnis im obigen Beispiel ist die wesentliche Idee bei der Einführung höherer Ableitungen: Statt als lineare Abbildung von  $\mathcal{V}$  nach  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  interpretieren wir die zweite Ableitung einfach als bilineare Abbildung von  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  nach  $\mathcal{W}$ . Der wichtige theoretische Hintergrund dazu ist die Tatsache, dass  $L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W}))$  gilt, d.h. beide Mengen sind als Vektorräume isomorph. Dazu betrachten wir den *kanonischen Isomorphismus*  $\Phi_2 : L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W})) \rightarrow L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ , wobei  $\tilde{\varphi} := \Phi_2(\varphi) \in L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  für  $\varphi \in L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W}))$  durch

$$\tilde{\varphi}(v_1, v_2) := \varphi(v_1)(v_2)$$

für alle  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  gegeben ist. (Nachweis: Übung!) Allgemeiner gilt

$$L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong L(\mathcal{V}, L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})),$$

wie man mit Hilfe des Isomorphismus

$$\Phi_k : L(\mathcal{V}, L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})) \rightarrow L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \quad \Phi_k(\varphi)(v_1, v_2, \dots, v_k) := \varphi(v_1)(v_2, \dots, v_k)$$

einsieht. (Wieder eine Übung!) Damit erhalten wir dann z.B.

$$L^3(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong L(\mathcal{V}, L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})) \cong L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W}))),$$

denn natürlich gilt  $L^1(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ . Per Induktion folgt damit auch

$$\dim L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = (\dim \mathcal{V})^k \cdot \dim \mathcal{W}. \quad (2.14)$$

**Definition 2.40** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, sowie  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  und  $k \geq 2$ . Dann definieren wir induktiv:

- 1) Ist  $f$  bereits  $(k-1)$ -mal differenzierbar und ist die  $(k-1)$ -te Ableitung

$$D^{k-1}f : U \rightarrow L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$$

differenzierbar in  $x \in U$ , so heißt  $f$   $k$ -mal differenzierbar in  $x$  und die  $k$ -te Ableitung  $D^k f(x) \in L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  von  $f$  in  $x$  ist gegeben durch

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) := D(D^{k-1}f)(x)(v_1)(v_2, \dots, v_k), \quad v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{V}.$$

- 2) Ist  $f$  in allen  $x \in U$   $k$ -mal differenzierbar, so heißt  $f$   $k$ -mal differenzierbar.
- 3) Ist  $f$   $k$ -mal differenzierbar und  $D^k f$  stetig, so heißt  $f$   $k$ -mal stetig differenzierbar.

**Bemerkung 2.41** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 2.40 gilt

$$\underbrace{\underbrace{D(D^{k-1}f)(x)}_{\in L(\mathcal{V}, L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W}))}}_{\in L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})}(v_1)(v_2, \dots, v_k) \in \mathcal{W},$$

d.h.  $D^k f(x)$  ist tatsächlich eine Abbildung von  $\mathcal{V}^k$  nach  $\mathcal{W}$ . Nach unseren Vorbemerkungen vor Definition 2.40 ist klar, dass diese Abbildung  $k$ -linear ist.

**Beispiel 2.42** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch und sei wieder  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{2}x^\top Ax$  die schon in Beispiel 2.39 betrachtete Abbildung. Dann ist  $q$  zweimal differenzierbar und für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$Dq(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto x^\top Av$$

und  $D^2q(x) : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, \tilde{v}) \mapsto v^\top A \tilde{v}.$

Da die zweite Ableitung  $D^2q$  nicht mehr explizit von  $x$  abhängt ist sie konstant, also ist  $q$  sogar dreimal differenzierbar mit  $D^3q(x) = 0 \in L^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Wie schon bei der ersten Ableitung gibt es auch bei den höheren Ableitungen einen Zusammenhang mit Richtungsableitungen.

**Satz 2.43** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Vektorräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, und  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  sei  $k$ -mal differenzierbar in  $x \in U$ . Dann gilt für alle  $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ , dass

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = \partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f(x) := \partial_{v_1} \left( \partial_{v_2} \dots (\partial_{v_k} f) \dots \right)(x).$$

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage per Induktion nach  $k$ .

“ $k = 1$ ”: Laut Bemerkung 2.5 (siehe Formel (2.4)) gilt  $Df(x)(v_1) = \partial_{v_1} f(x)$ .

“ $k - 1 \Rightarrow k$ ”: Seien  $v_2, \dots, v_k \in \mathcal{V}$  beliebig, aber fest. Wir betrachten den “Einsetzungshomomorphismus”

$$\Psi : L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{W}, \quad \varphi \mapsto \varphi(v_2, \dots, v_k).$$

Dieser ist offensichtlich linear (klar?) und daher differenzierbar. Außerdem gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$(\Psi \circ D^{k-1}f)(x) = \Psi(D^{k-1}f(x)) = D^{k-1}f(x)(v_2, \dots, v_k) = \partial_{v_2} \dots \partial_{v_k} f(x). \quad (2.15)$$

Da  $D^{k-1}f$  in  $x \in U$  differenzierbar ist, ist auch  $\Psi \circ D^{k-1}f$  differenzierbar in  $x$  und für die Ableitung  $D(\Psi \circ D^{k-1}f)(x) \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel (beachten Sie dabei die Linearität von  $\Psi$ ) für alle  $v_1 \in \mathcal{V}$ , dass

$$\begin{aligned} D(\Psi \circ D^{k-1}f)(x)(v_1) &= \left( D\Psi(D^{k-1}f(x)) \circ D(D^{k-1}f)(x) \right)(v_1) \\ &= \Psi(D(D^{k-1}f)(x))(v_1) \\ &= D(D^{k-1}f)(x)(v_1)(v_2, \dots, v_k) \\ &= D^k f(x)(v_1, v_2, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit Hilfe des bereits bewiesenen Induktionsanfangs für  $k = 1$ , dass

$$D(\Psi \circ D^{k-1}f)(x)(v_1) = \partial_{v_1}((\Psi \circ D^{k-1}f))(x) = \partial_{v_1}(\partial_{v_2} \dots \partial_{v_k} f)(x),$$

wobei wir im letzten Schritt (2.15) benutzt haben. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Definition 2.44** Seien  $\mathcal{W}$  ein endlich-dimensionaler Banachraum,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  eine Abbildung, sowie  $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$  (nicht notwendigerweise paarweise verschieden). Existiert der Ausdruck

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) := \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f(x) \in \mathcal{W}, \quad (2.16)$$

so heißt dieser  $k$ -te partielle Ableitung (auch partielle Ableitung  $k$ -ter Ordnung) von  $f$  in  $x$  nach  $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ . (Wir erinnern uns dabei daran, dass  $\partial_j$  eine Abkürzung für  $\partial_{e_j}$ , also die Richtungsableitung in Richtung des  $j$ -ten Standardbasisvektors ist.)

Sind einige der Indizes  $j_i$  in (2.16) identisch, so fassen wir diese in der Schreibweise zusammen wie z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x) := \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x).$$

Mit Definition 2.44 haben wir jetzt nicht nur partielle Ableitungen höherer Ordnung eingeführt, sondern auch den Begriff der partiellen Ableitung erster Ordnung auf beliebige Bildräume  $\mathcal{W}$  verallgemeinert.

**Beispiel 2.45** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^3 y^3$ . Dann gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ , dass

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}(x, y) = 18x^2 y,$$

denn wir erhalten

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y^3) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y^3) = \frac{\partial}{\partial y}(9x^2 y^2) = 18x^2 y.$$

(In der letzten Zeile haben wir eine weit verbreitete und übliche Konvention benutzt und die Funktion  $f$  mit ihrem Funktionswert  $x^3 y^3$  identifiziert. Dies macht die einzelnen Schritte beim partiellen Ableiten besser nachvollziehbar und erweist sich in vielen Situationen als sehr praktisch!)

**Bemerkung 2.46** Seien  $\mathcal{W}$  ein endlich-dimensionaler Banachraum,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x \in U$ , sowie  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  eine Abbildung.

1) Mit Hilfe von Satz 2.18 und Satz 2.43 lässt sich zeigen (Übung):

*Existieren alle partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung von  $f$  und sind diese stetig, so ist  $f$   $k$ -mal (stetig) differenzierbar.*

- 2) Sei  $f$  zweimal differenzierbar in  $x$ , sowie  $v = (v_1, \dots, v_n), \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} D^2 f(x)(v, \tilde{v}) &= D^2 f(x) \left( \sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \tilde{v}_j D^2 f(x)(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \tilde{v}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

da ja  $D^2 f(x)(e_i, e_j) = \partial_i(\partial_j f(x))$  nach Satz 2.43 gilt.

Die erste Ableitung  $Df(x)$  können wir als lineare Abbildung aus  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  nach Wahl von Basen jeweils durch eine Matrix darstellen. Bei der zweiten Ableitung ist das nicht mehr so leicht, denn  $D^2 f(x)$  ist nun eine bilineare Abbildung aus  $L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ . Allerdings haben Sie in der Linearen Algebra gelernt, dass man *Bilinearformen* (d.h. wenn der Bildraum  $\mathcal{W}$  ein Körper ist) durch Matrizen darstellen kann. Gilt also speziell  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ , so sind die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  in  $x$  reellwertig und (2.17) lässt sich in “Matrix/Vektor-Schreibweise” darstellen:

$$D^2 f(x)(v, \tilde{v}) = v^\top H_f(x) \tilde{v},$$

wobei

$$H_f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

die sogenannte *Hesse-Matrix* von  $f$  in  $x$  ist. Aus der Sicht der Linearen Algebra ist dies gerade die darstellende Matrix der Bilinearform  $D^2 f(x) \in L^2(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ . Vergessen Sie dabei an dieser Stelle nicht, dass es sich hier um zwei grundlegend verschiedene Darstellungsmethoden durch Matrizen handelt! Beachten Sie dazu, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} [Df(x)] &\in \mathbb{R}^{1,n} \quad \text{und} \quad Df(x)(v) = [Df(x)] \cdot v \\ H_f(x) &\in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{und} \quad D^2 f(x)(v, \tilde{v}) = v^\top \cdot H_f(x) \cdot \tilde{v} \end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung hört die anschauliche Darstellung durch Matrizen dann auch leider schon auf. Zwar können auch höhere Ableitungen dargestellt werden, jedoch benötigt man hierzu *Tensoren höherer Stufen*. Z.B. lebt die dritte Ableitung  $D^3 f(x) \in L^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  (falls  $f$  in  $x$  dreimal differenzierbar ist) bereits in einem Vektorraum der Dimension  $n^3$  und für eine Darstellung benötigen wir dann schon einen sogenannten “*dreistufigen Tensor*”, denn Sie sich (grob gesprochen) als “*würfelförmige Matrix*” vorstellen könnten. (Analog betrachtet man Vektoren als *einstufige* und

Matrizen als *zweistufige Tensoren*). Wir werden uns allerdings an dieser Stelle nicht weiter damit beschäftigen, sondern verweisen auf Spezialvorlesungen, die sich mit der Theorie von Tensoren beschäftigen.

**Beispiel 2.47** 1) Gegeben Sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto e^{xy}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= ye^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xe^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y^2 e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (1 + xy)e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= (1 + xy)e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= x^2 e^{xy}.\end{aligned}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  existieren auf ganz  $\mathbb{R}^2$  und sind stetig, daher ist  $f$  zweimal differenzierbar und für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$\begin{bmatrix} Df(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \end{bmatrix}, \quad H_f(x) = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & (1 + xy)e^{xy} \\ (1 + xy)e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix}.$$

- 2) Wir betrachten die euklidische Norm  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  im  $\mathbb{R}^n$ . (Der Buchstabe “r” soll hier an “Radius” im Sinn von “Abstand vom Ursprung” erinnern.) Dann ist  $r$  in  $x = 0$  nicht differenzierbar, da für beliebiges  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  wegen

$$\frac{\|0 + hv\|}{h} = \|v\| \cdot \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \|v\| & \text{für } h > 0, \\ -\|v\| & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

die Richtungsableitung von  $r$  in Richtung  $v$  nicht existiert. In jedem  $x \in U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist  $r$  allerdings differenzierbar, denn wegen  $r(x) = \|x\| = \sqrt{x^\top x}$  lässt sich  $r$  als Komposition  $r = f \circ q$  schreiben, wobei  $q : x \mapsto x^\top x$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \sqrt{t}$  die Wurfelfunktion bezeichnet. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir für alle  $x \in U$  und alle  $v \in \mathbb{R}^n$  unter Ausnutzung von Teil 4) von Beispiel 2.28, dass

$$Dr(x)(v) = (Df(q(x)) \circ Dq(x))(v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \end{bmatrix} \cdot (2x^\top I_n v) = \frac{x^\top}{\|x\|} v.$$

Die darstellende Matrix von  $Dr(x)$  ist für alle  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  also  $\begin{bmatrix} Dr(x) \end{bmatrix} = \frac{x^\top}{\|x\|}$ . Damit erhalten wir insbesondere

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{x^\top}{\|x\|} e_j = \frac{x_j}{\|x\|}.$$

(Dies hätten wir natürlich auch durch direktes partielles Ableiten der Funktion  $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  herausfinden können. Überprüfen Sie das!) Mit Hilfe der Quotientenregel (aus Analysis I) erhalten wir dann für die zweiten partiellen Ableitungen für alle  $x \in U$ , dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_j}{\|x\|} \right) = \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x_i} x_j \right) \cdot r(x) - x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} r(x)}{r(x)^2} = \frac{\delta_{ij} r(x) - x_j \frac{x_i}{r(x)}}{r(x)^2} = \frac{\delta_{ij} \|x\|^2 - x_i x_j}{\|x\|^3},$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol bezeichnet, also

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen existieren für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  auf ganz  $U$  und sind dort stetig. Also ist  $f$  auf der offenen Menge  $U$  zweimal differenzierbar und für alle  $x \in U$  gilt

$$H_f(x) = \frac{1}{\|x\|^3} \begin{bmatrix} x_2^2 + \dots + x_n^2 & -x_1x_2 & \dots & -x_1x_n \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x_{n-1}x_n \\ -x_nx_1 & \dots & -x_nx_{n-1} & x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \end{bmatrix}.$$

Fällt Ihnen etwas auf? In allen bisherigen Beispielen erhielten wir als Hesse-Matrix eine symmetrische Matrix. Ist das immer so? D.h. gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad (2.18)$$

für alle  $i, j$  und alle  $x$ ? Im Allgemeinen leider nicht!

**Beispiel 2.48** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann gilt (Übung)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Allerdings stellt man auch fest (Übung), dass  $f$  zwar differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar in  $(0, 0)$  ist.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass (2.18) erfüllt ist, wenn  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  zweimal differenzierbar ist. (Hierbei sind natürlich  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume, sowie  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen.) Wegen der linearen Approximationseigenschaft der Ableitung gilt für in  $x \in U$  differenzierbares  $g : U \rightarrow \mathcal{W}$  und kleine  $u, v \in \mathcal{V}$ , dass  $g(x + u) - g(x) \approx Dg(x)(u)$ . Wenden wir diese Eigenschaft sowohl auf  $Df$  als auch auf  $f$  an, so erhalten wir für  $x \in U$ ,  $u, v \in \mathcal{V}$  und betragskleine  $h \in \mathbb{R}$ , dass

$$\begin{aligned} h^2 D^2 f(x)(u, v) &= D^2 f(x)(hu, hv) = D(Df)(x)(hu)(hv) \\ &\approx (Df(x + hu) - Df(x))(hv) = Df(x + hu)(hv) - Df(x)(hv) \\ &\approx f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x). \end{aligned}$$

Das folgende Lemma besagt, dass diese Approximation für hinreichend kleines  $|h|$  beliebig genau wird.

**Lemma 2.49** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume, sei  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, und sei  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  zweimal differenzierbar in  $x \in U$ . Dann gilt für alle  $u, v \in \mathcal{V}$ , dass

$$D^2 f(x)(u, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x)}{h^2}.$$

**Beweis:** Auf eine Darbietung des sehr technischen Beweises verzichten wir in der Vorlesung. Zur Vollständigkeit sei er an dieser Stelle im Kleingedruckten bereitgestellt:

*Schritt 1:* Sei  $(w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $\mathcal{W}$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in U$  Koordinaten  $\lambda_1^{(x)}, \dots, \lambda_m^{(x)} \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(x)} w_i$ . Daher können wir  $f$  in der Form

$$f = \sum_{i=1}^m f_i w_i \quad \text{mit } f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda_i^{(x)}$$

darstellen. Wie man leicht nachweist, sind mit  $f$  auch die Funktionen  $f_i$  zweimal differenzierbar in  $x \in U$ . Ebenso zeigt man unter Ausnutzung der komponentenweisen Differenzierbarkeit, dass es im Folgenden reicht, das Lemma für jede der Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  zu beweisen.

*Schritt 2:* Sei also o.B.d.A.  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ . Ferner seien o.B.d.A.  $u, v \in \mathcal{V}$  so klein in Norm, dass  $x + u + tv, x + tv \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt. Wir definieren  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(t) := f(x + u + tv) - f(x + tv), \quad t \in [0, 1].$$

Da  $f$  zweimal differenzierbar in  $x$  ist, ist  $f$  per Definition auch differenzierbar (in ganz  $U$ ) und somit ist auch  $F$  differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 6.29 aus Analysis I) existiert ein  $\tau \in ]0, 1[$ , so dass

$$\begin{aligned} & f(x + u + v) - f(x + v) - f(x + u) + f(x) \\ &= F(1) - F(0) = F'(\tau) \cdot (1 - 0) = DF(\tau)(1) \\ &= (Df(x + u + \tau v) \circ (v \cdot Id_{\mathbb{R}}))(1) - (Df(x + \tau v) \circ (v \cdot Id_{\mathbb{R}}))(1), \\ &= Df(x + u + \tau v)(v) - Df(x + \tau v)(v) \\ &= (Df(x + u + \tau v) - Df(x))(v) - (Df(x + \tau v) - Df(x))(v). \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten zur dritten Zeile die Kettenregel benutzt haben, sowie, dass die Ableitung der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto w + tv$  für  $w \in \mathbb{R}^n$  durch  $v \cdot Id_{\mathbb{R}}$  gegeben ist. (Klar?) Da  $Df : U \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  in  $x \in U$  differenzierbar ist, gibt es eine Funktion  $R : U \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  mit

$$Df(y) = Df(x) + (D(Df)(x))(y - x) + R(y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{R(y)}{\|y - x\|} = 0. \quad (2.19)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & f(x + u + v) - f(x + v) - f(x + u) + f(x) \\ &= (D(Df)(x)(u + \tau v) + R(x + u + \tau v))(v) - (D(Df)(x)(\tau v) + R(x + \tau v))(v) \\ &= D^2 f(x)(u + \tau v, v) - D^2 f(x)(\tau v, v) + (R(x + u + \tau v) - R(x + \tau v))(v) \\ &= D^2 f(x)(u, v) + \tilde{R}(u, v)(v), \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei wir im letzten Schritt die Bilinearität von  $D^2 f(x)$  ausgenutzt und die Abkürzung

$$\tilde{R}(u, v) := R(x + u + \tau v) - R(x + \tau v)$$

eingeführt haben. Wegen (2.19) gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $y \in U$  gilt:

$$\|y - x\| < \delta_\varepsilon \quad \implies \quad \frac{\|R(y)\|}{\|y - x\|} < \varepsilon,$$

wobei  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  mit der Operatornorm versehen ist. Sind dann  $u, v$  so klein gewählt, dass  $\|u\| + \|v\| < \delta_\varepsilon$ , so gilt auch  $\|u + \tau v\|, \|\tau v\| < \delta_\varepsilon$  und daher

$$\begin{aligned} \|R(x + u + \tau v)\| &< \varepsilon \|u + \tau v\| \leq \varepsilon(\|u\| + \|v\|) \\ \text{und } \|R(x + \tau v)\| &< \varepsilon \|\tau v\| \leq \varepsilon(\|u\| + \|v\|). \end{aligned}$$



Beachten wir dann noch, dass für die Operatornorm auf  $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  nach Bemerkung 1.97 für alle  $y \in U$  gilt, dass  $\|R(y)(v)\| \leq \|R(y)\| \cdot \|v\|$ , so erhalten wir

$$\|\tilde{R}(u, v)(v)\| \leq \|R(x + u + \tau v)\| \cdot \|v\| + \|R(x + \tau v)\| \cdot \|v\| < 2\varepsilon(\|u\| + \|v\|) \cdot \|v\|. \quad (2.21)$$

*Schritt 3:* Seien nun  $u, v \in \mathcal{V}$  beliebig, aber fest gewählt. Weiter sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $t_0 \in [0, 1]$ , so dass  $\|t_0 u\| + \|t_0 v\| < \delta_\varepsilon$ . Daher gilt für alle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $|h| \leq t_0$ , dass

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x)}{h^2} - D^2 f(x)(u, v) \right\| \\ = & \left\| \frac{f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x) - D^2 f(x)(hu, hv)}{h^2} \right\| \\ \stackrel{(2.20)}{=} & \frac{\|\tilde{R}(hu, hv)(hv)\|}{|h|^2} \stackrel{(2.21)}{<} 2\varepsilon \frac{(\|hu\| + \|hv\|) \cdot \|hv\|}{|h|^2} = 2\varepsilon(\|u\| + \|v\|) \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt hieraus die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.50 (von Schwarz)** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  zweimal differenzierbar in  $x \in U$ . Dann ist  $D^2 f(x)$  eine symmetrische Bilinearform, d.h. für alle  $u, v \in \mathcal{V}$  gilt

$$D^2 f(x)(u, v) = D^2 f(x)(v, u).$$

**Beweis:** Der Satz folgt sofort aus Lemma 2.49, denn der dort betrachtete Grenzwert ist symmetrisch in  $u$  und  $v$  (d.h. er ändert sich nicht, wenn man  $u$  und  $v$  vertauscht).  $\square$

**Korollar 2.51** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar in  $x \in U$ . Dann gilt für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Insbesondere ist die Hesse-Matrix  $H_f(x) \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch.

**Bemerkung 2.52** 1) Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume und  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen.

Ist  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  zweimal differenzierbar in  $x \in U$ , so folgt mit Satz 2.50 und Satz 2.43, dass für alle  $v_i, v_j \in \mathcal{V}$  gilt, dass  $\partial_{v_i} \partial_{v_j} f(x) = \partial_{v_j} \partial_{v_i} f(x)$ . Ist  $f$  sogar  $k$ -mal differenzierbar in  $x \in U$ , so erhalten wir daraus per Induktion (und erneut mit Satz 2.43), dass für alle  $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$  gilt, dass

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = D^k f(x)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

wobei  $\sigma \in S_k$  eine beliebige Permutation ist.

- 2) In der Literatur findet man das obige Korollar häufig mit der Voraussetzung, dass die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  auf ganz  $U$  existieren und stetig sein müssen. Wir sind an dieser Stelle der Vorgehensweise im Skript von D. Ferus gefolgt und haben gezeigt, dass zweimalige Differenzierbarkeit von  $f$  im betrachteten Punkt bereits hinreichend ist.

## 2.6 Satz von Taylor und lokale Extrema

Wie in Analysis I werden wir mit Hilfe des Satzes von Taylor, den wir gleich auf Funktionen zwischen endlich-dimensionalen Banachräumen verallgemeinern werden, Kriterien für die Existenz von lokalen Extremstellen herleiten.

**Satz 2.53 (Taylorformel)** Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  endlich-dimensionale Banachräume,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  sei  $k$ -mal differenzierbar. Dann gilt mit  $D^0 f(x_0) := f(x_0)$ :

1) Für alle  $x \in U$  gilt

$$f(x) = \left( \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x_0) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{j\text{-mal}} \right) + R_k(x), \quad \text{wobei } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0.$$

2) Ist  $f$  sogar  $(k+1)$ -mal differenzierbar,  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$  und gilt für  $x \in U$  auch  $\overline{xx_0} \subseteq U$ , so gibt es ein  $\xi \in \overline{xx_0}$ , so dass für  $R_k(x)$  aus 1) gilt, dass

$$R_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(\xi) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{k+1\text{-mal}}.$$

**Beweis:** Der Beweis von 2) ist relativ einfach und kann sogar unabhängig von Teil 1) geführt werden. Wir setzen dazu  $v := x - x_0$  und betrachten die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x_0 + tv)$ . Mit  $f$  ist auch  $g$  eine  $(k+1)$ -mal differenzierbare Funktion, und es gilt

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv + hv) - f(x_0 + tv)}{h} = \partial_v f(x_0 + tv)$$

und analog  $g^{(j)}(t) = \partial_v^j f(x_0 + tv) := \partial_v \dots \partial_v f(x_0 + tv)$  (wobei hier  $\partial_v$  insgesamt  $j$ -mal auf  $f(x_0 + tv)$  angewendet wird.) Mit Hilfe der Taylorformel aus Analysis I (dort Satz 6.53) folgt die Existenz eines  $\tau \in [0, 1]$  (sogar  $\tau \in ]0, 1[$ ), so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= g(1) = \left( \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)(1-0)^j \right) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\tau)(1-0)^{k+1} \\ &= \left( \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \partial_v^j f(x_0) \right) + \frac{1}{(k+1)!} \partial_v^{k+1} f(x_0 + \tau v) \\ &= \left( \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x_0) (x - x_0, \dots, x - x_0) \right) + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(\xi) (x - x_0, \dots, x - x_0), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 2.43 und die Abkürzung  $\xi := x_0 + \tau v$  benutzt haben.

Der Beweis von Teil 1) ist dagegen überraschend kompliziert und wir verzichten in der Vorlesung darauf, liefern ihn allerdings der Vollständigkeit halber im “Kleingedruckten” nach.

Den **Beweis von 1)** führen wir in mehreren Schritten, wobei wir nur den Fall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  betrachten. Der allgemeine Fall lässt sich darauf durch Wahl einer Basis zurückführen. An die Stelle der im Folgenden betrachteten kanonischen Koordinatenprojektionen  $\pi_j$  treten dann die Vektoren der zu der gewählten Basis dualen Basis des  $L(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ .

- (i) Wir betrachten die kanonischen Koordinatenprojektionen  $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$  (vgl. Beispiel 1.49). Diese sind offensichtlich linear und daher differenzierbar mit  $D\pi_j(x) = \pi_j$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Damit lässt sich jeder Vektor  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  in der folgenden Form schreiben:

$$v = \sum_{j=1}^n v_j e_j = \sum_{j=1}^n \pi_j(v) e_j = \sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) e_j$$

Damit erhalten wir für alle  $x \in U$  wegen der Linearität von  $Df(x)$ , dass

$$Df(x)(v) = Df(x) \left( \sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) e_j \right) = \sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) \cdot Df(x)(e_j) = \sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Dies schreibt man auch in der Form

$$Df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot D\pi_j, \quad (2.22)$$

mit der Definition

$$(g \cdot D\pi_j)(x)(v) := (g(x) \cdot D\pi_j(x))(v) := D\pi_j(x)(v) \cdot g(x) = v_j \cdot g(x) \quad (2.23)$$

für  $x \in U$ ,  $v \in \mathcal{V}$  und eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathcal{W}$  (wie z.B.  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  eine ist). Dann zeigt man, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \cdot D\pi_j) = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot D\pi_j \quad (2.24)$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt, falls  $g$  differenzierbar ist. (Übung. Beachten Sie dabei, dass  $D\pi_j$  als Ableitung einer linearen Funktion eine konstante Funktion ist.)

- (ii) Wir zeigen, dass für alle  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  und alle  $x \in U$  gilt, dass

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = \left( D^{k-1}(Df)(x)(v_2, \dots, v_k) \right)(v_1). \quad (2.25)$$

Dazu sei  $v_i = (v_{1i}, \dots, v_{ni})$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann erhalten wir mit Satz 2.43 und (2.22)–(2.24), dass

$$\begin{aligned} & \left( D^{k-1}(Df)(x)(v_2, \dots, v_k) \right)(v_1) \\ &= \left( \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} D^{k-1}(Df)(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \right)(v_1) \\ &= \left( \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot D\pi_j \right)(x) \right)(v_1) \\ &= \left( \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{j=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \cdot D\pi_j(x) \right)(v_1) \\ &= \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{j=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} \cdot v_{j1} D^k f(x)(e_{i_2}, \dots, e_{i_k}, e_j) \\ &= D^k f(x)(v_2, \dots, v_k, v_1). \end{aligned}$$

Der Rest folgt dann aus dem Satz von Schwarz.

(iii) Wir zeigen nun die Taylorformel per Induktion nach  $k$ .

“ $k = 1$ ”: Dies ist einfach nur die Definition der Differenzierbarkeit.

“ $k - 1 \Rightarrow k$ ”: Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die  $k - 1$  mal differenzierbare Funktion  $Df$  an und erhalten

$$Df(x) = \left( \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} D^j(Df)(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) \right) + \tilde{R}(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{R}(x)}{\|x - x_0\|^{k-1}} = 0.$$

Weiter betrachten wir die Restfunktion

$$R(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x_0) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{j\text{-mal}}$$

und berechnen deren Ableitung. (In der Tat ist  $R(x)$  differenzierbar, da  $f$  es ist und die nachfolgende Summe aus  $k$ -linearen Abbildungen besteht, die nach der verallgemeinerten Produktregel aus Bemerkung 2.29 differenzierbar sind. Beachten Sie dabei, dass wir hier von den Ableitungen von  $D^j f(x_0)$  und nicht von  $D^j f$  sprechen, da  $x_0$  fest gewählt ist.) Da der Summand für  $j = 0$  konstant  $f(x_0)$  ist, fällt er beim Differenzieren weg und wir erhalten für alle  $x \in U$  und alle  $v \in \mathbb{R}^n$  unter Benutzung der verallgemeinerten Produktregel aus Bemerkung 2.29 und dem Satz von Schwarz, dass

$$\begin{aligned} DR(x)(v) &= Df(x)(v) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} j D^j f(x_0)(v, \underbrace{x - x_0, \dots, x - x_0}_{(j-1)\text{-mal}}) \\ &= Df(x)(v) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} \left( D^{j-1}(Df)(x_0) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{(j-1)\text{-mal}} \right)(v), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (2.25) aus (ii) benutzt haben. Folglich gilt

$$DR(x) = Df(x) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} (D^{j-1}(Df)(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) = \tilde{R}(x).$$

Aus der Grenzwerteigenschaft von  $\tilde{R}(x)$  folgt nun, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $U_\delta(x_0) \subseteq U$  und so dass für alle  $x \in U_\delta(x_0)$  gilt, dass

$$\|\tilde{R}(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - x_0\|^{k-1}.$$

Dann folgt aber mit Hilfe des Schrankensatzes für alle  $x \in U_\delta(x_0)$ , dass

$$\|R(x)\| = \|R(x) - R(x_0)\| \leq \sup_{y \in U_\delta(x_0)} \|DR(y)\| \cdot \|x - x_0\| \leq \varepsilon \cdot \|x - x_0\|^k.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt hiermit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0. \quad (2.26)$$

Die eigentliche Schwierigkeit im Beweis lag übrigens nicht in der möglichen Mehrdimensionalität von  $\mathcal{W}$ . Auch im Fall  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$  hätte ein Ansatz wie im Beweis von 2) nur zu Aussagen über Grenzwerte der Form  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + hv)}{\|hv\|^k}$  geführt, woraus sich (2.26) nicht ohne weiteres folgern lässt.  $\square$

**Bemerkung 2.54** Wir betrachten im Folgenden einmal den Spezialfall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$  etwas genauer. Ist also  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und  $x_0 \in U$ , so gilt für alle  $x \in U$ , dass

$$f(x) = T_k(x) + R_k(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0,$$

wobei

$$T_k(x) := \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0)$$

wegen der  $j$ -Linearität der Ableitungen  $D^j f(x_0)$  ein Polynom in  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  (den Komponenten von  $x$ ) ist, welches höchstens den Grad  $k$  besitzt (d.h. dass das Polynom nur Terme der Form  $x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n}$  mit  $\ell_1 + \cdots + \ell_n \leq k$  enthält). Dieses Polynom nennen wir (wenig überraschend) das  $k$ -te *Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$* . Ist nun noch spezieller  $k = 2$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + D^2 f(x_0)(x - x_0, x - x_0) \\ &= f(x_0) + [Df(x_0)] \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top H_f(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

**Beispiel 2.55** Wir betrachten wieder die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto e^{xy}$  und wollen einmal das zweite Taylorpolynom von  $f$  im Punkt  $(1, 0)$  bestimmen. Die Ableitung und Hesse-Matrix von  $f$  haben wir bereits in Beispiel 2.47 bestimmt:

$$\begin{aligned} [Df(x, y)] &= [ye^{xy} \quad xe^{xy}], \\ H_f(x) &= \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & (1 + xy)e^{xy} \\ (1 + xy)e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, 0) + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x - 1 \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [x - 1 \quad y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ y \end{bmatrix} \\ &= 1 + y + \frac{1}{2}(2(x - 1)y + y^2) = 1 + xy + \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

Dieses Polynom ist also in der Nähe des Punktes  $(1, 0)$  eine gute Approximation an die Funktion  $f$  in dem Sinne, dass

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} (f(x, y) - T_2(x, y)) = 0.$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen. Für diese können wir analog zur Vorgehensweise in Analysis I lokale Extremwerte einführen.

**Definition 2.56** Sei  $\mathcal{V}$  ein endlich-dimensionaler Banachraum,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in U$ .

- 1) Wir sagen  $f$  hat ein lokales Maximum in  $x_0$ , falls es  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in U \cap U_\varepsilon(x_0)$  gilt.
- 2) Wir sagen  $f$  hat ein striktes lokales Maximum in  $x_0$ , falls es  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $f(x_0) > f(x)$  für alle  $x \in U \cap U_\varepsilon(x_0)$  mit  $x \neq x_0$  gilt.
- 3) Wir sagen  $f$  hat ein (striktes) lokales Minimum in  $x_0$ , falls  $-f$  ein (striktes) lokales Maximum in  $x_0$  hat.

In der Analysis I hatten wir die Taylorformel benutzt um Kriterien für die Existenz von lokalen Extremstellen herzuleiten. Wir benutzen diese Idee auch hier und betrachten eine  $k$ -mal differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen. Gilt dann für ein  $x_0 \in U$ , dass  $Df(x_0) = 0$ ,  $\dots$ ,  $D^{k-1}f(x_0) = 0$ , so folgt für  $x \in U$ , welches hinreichend nahe an  $x_0$  liegt, dass

$$f(x) - f(x_0) \approx \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0).$$

Falls nun die rechte Seite immer dasselbe Vorzeichen hat, können wir Aussagen über die Existenz von lokalen Extrema treffen. Es bietet sich daher an dieser Stelle eine nähere Untersuchung  $k$ -linearer Abbildungen an, von denen  $D^k f(x_0)$  bekanntlich eine ist.

**Definition 2.57** Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\mu \in L^k(\mathcal{V}, \mathbb{R})$  eine  $k$ -Linearform auf  $\mathcal{V}$ .

- 1)  $\mu$  heißt symmetrisch, falls für alle  $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$  und alle Permutationen  $\sigma \in S_k$  gilt, dass  $\mu(v_1, \dots, v_k) = \mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ .
- 2)  $\mu$  heißt positiv definit, falls für alle  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  gilt, dass  $\mu(v, \dots, v) > 0$ .
- 3)  $\mu$  heißt positiv semidefinit, falls für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt, dass  $\mu(v, \dots, v) \geq 0$ .
- 4)  $\mu$  heißt negativ (semi)definit, falls  $-\mu$  positiv (semi)definit ist.
- 5)  $\mu$  heißt indefinit, falls es  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  gibt mit  $\mu(v_1, \dots, v_1) > 0 > \mu(v_2, \dots, v_2)$ .

**Lemma 2.58** Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und sei  $\mu \in L^k(\mathcal{V}, \mathbb{R})$  eine symmetrische  $k$ -Linearform auf  $\mathcal{V}$ .

- 1) Falls  $\mu(v, \dots, v) = 0$  für alle  $v \in \mathcal{V}$  gilt, so folgt  $\mu = 0$ .
- 2) Ist  $k$  ungerade, so ist entweder  $\mu$  indefinit oder  $\mu = 0$ .

**Beweis:** Wir beweisen 1) per Induktion nach  $k$ .

“ $k = 1$ ”: Dieser Fall ist trivial.

“ $k - 1 \Rightarrow k$ ”: Seien  $v, w \in \mathcal{V}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Da  $\mu$  eine symmetrische  $k$ -Linearform ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(v + tw, \dots, v + tw) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu(\underbrace{v, \dots, v}_{j\text{-mal}}, tw, \dots, tw) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu(\underbrace{v, \dots, v}_{j\text{-mal}}, w, \dots, w) t^{k-j}. \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck eine Polynomfunktion in  $t$  ist, folgt, dass alle Koeffizienten des Polynoms Null sind. Speziell gilt für alle  $v, w \in \mathcal{V}$ , dass  $\mu(v, \dots, v, w) = 0$ . Sei nun  $w \in \mathcal{V}$  beliebig, aber fest gewählt. Dann wird durch

$$\mu(\cdot, \dots, \cdot, w) : \mathcal{V}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, \dots, v_{k-1}) \mapsto \mu(v_1, \dots, v_{k-1}, w)$$

eine symmetrische  $(k - 1)$ -Linearform auf  $\mathcal{V}$  definiert. Nach Induktionsvoraussetzung ist diese dann die Nullabbildung, d.h. für alle  $v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathcal{V}$  gilt  $\mu(v_1, \dots, v_{k-1}, w) = 0$ . Da  $w$  beliebig war, folgt  $\mu = 0$ .

2) Sei  $\mu \neq 0$ . Dann gibt es wegen 1) ein  $v \in \mathcal{V}$  mit  $\mu(v, \dots, v) \neq 0$ . Da  $k$  ungerade ist gilt dann

$$\mu(-v, \dots, -v) = (-1)^k \mu(v, \dots, v),$$

woraus sofort folgt, dass  $\mu$  indefinit ist.  $\square$

**Satz 2.59** Sei  $\mathcal{V}$  ein endlich-dimensionaler Banachraum, sei  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $k$ -mal differenzierbar und sei  $x_0 \in U$ , so dass

$$Df(x_0) = 0, \dots, D^{k-1}f(x_0) = 0, \quad \text{aber } D^k f(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- 1) Ist  $D^k f(x_0)$  negativ definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Maximum.
- 2) Ist  $D^k f(x_0)$  positiv definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Minimum.
- 3) Ist  $D^k f(x_0)$  indefinit, so hat  $f$  in  $x_0$  kein lokales Extremum.

**Beweis:** Da  $f$   $k$ -mal differenzierbar ist, gibt es nach der Taylorformel aus Satz 2.53 eine Funktion  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \in U$  gilt, dass

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) + R(x), \quad \text{wobei } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0. \quad (2.27)$$

Nach Bemerkung 2.29 ist  $\mu := D^k f(x_0)$  als  $k$ -Linearform differenzierbar, also insbesondere stetig und daher nimmt die ebenfalls stetige Funktion  $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \mapsto D^k f(x_0)(v, \dots, v)$

auf der nach Korollar 1.96 kompakten Menge  $S^{n-1} = \{v \in \mathcal{V} \mid \|v\| = 1\}$  Maximum und Minimum an, d.h. es gibt  $m, M \in \mathbb{R}$  mit

$$m = \min_{v \in S^{n-1}} \mu(v, \dots, v) \quad \text{und} \quad M = \max_{v \in S^{n-1}} \mu(v, \dots, v).$$

Wegen  $\mu\left(\frac{v}{\|v\|}, \dots, \frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|^k} \mu(v, \dots, v)$  für alle  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  erhalten wir daraus

$$m\|v\|^k \leq \mu(v, \dots, v) \leq M\|v\|^k. \quad (2.28)$$

für alle  $v \in \mathcal{V}$  (denn für  $v = 0$  ist (2.28) trivialerweise ebenfalls erfüllt). Ferner gibt es wegen der Grenzwerteigenschaft von  $R$  zu  $\varepsilon = \frac{1}{2k!} \min\{|m|, |M|\}$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $U_\delta(x_0) \subseteq U$  und so dass für alle  $x \in U_\delta(x_0)$ , gilt, dass

$$|R(x)| \leq \varepsilon \cdot \|x - x_0\|^k. \quad (2.29)$$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum eigentlichen Beweis.

1) Sei  $D^k f(x_0)$  negativ definit. Dann gilt für  $M$  aus (2.28), dass  $M < 0$ . Weiter folgt dann mit Hilfe von (2.27)–(2.29) und unter Ausnutzung von  $|M| = -M$ , dass

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) + R(x) \\ &\leq \frac{M}{k!} \|x - x_0\|^k + \frac{|M|}{2k!} \|x - x_0\|^k = \frac{M}{2k!} \|x - x_0\|^k \leq 0 \end{aligned}$$

für alle  $x \in U_\delta(x_0)$  gilt. Wegen  $M < 0$  gilt dabei  $f(x) = f(x_0)$  nur im Fall  $x = x_0$ , so dass  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Maximum hat.

2) folgt analog bzw. durch Betrachten von  $-f$ .

3) Sei  $D^k f(x_0)$  indefinit. Dann gilt für  $m$  und  $M$  aus (2.28), dass  $m < 0 < M$ . Insbesondere gibt es  $v, \tilde{v} \in S^{n-1}$  mit  $D^k f(x_0)(v, \dots, v) = m$  und  $D^k f(x_0)(\tilde{v}, \dots, \tilde{v}) = M$ . Damit folgt für alle  $t \in ]0, \delta[$ , dass  $x_0 + tv \in U_\delta(x_0)$  und

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv) - f(x_0) &= \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(tv, \dots, tv) + R(x_0 + tv) \\ &\leq \frac{m}{k!} \|tv\|^k - \frac{m}{2k!} \|tv\|^k = \frac{mt^k}{2k!} < 0. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für alle  $t \in ]0, \delta[$ , dass  $f(x_0 + t\tilde{v}) - f(x_0) > 0$  und es folgt, dass  $f$  kein lokales Extremum in  $x_0$  hat.  $\square$

**Bemerkung 2.60** Beachten Sie, dass es hier im Gegensatz zum entsprechenden Resultat aus Analysis I (siehe dort Satz 6.57) einen Fall gibt, in dem der Satz keine Aussage liefert. Ist  $D^k f(x_0)$  nämlich nur positiv oder negativ semidefinit, aber nicht definit, so trifft keiner der drei Fälle des Satzes zu. Tatsächlich kann man für diesen Fall Beispiele von Funktionen finden, die lokale Extrema besitzen und auch solche, die kein lokales Extremum besitzen. (Übung). Im Fall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}$  kommt dieser Ausnahmefall nicht vor, da dort  $D^k f(x_0)$  genau dann semidefinit, aber nicht definit ist, wenn  $f^{(k)}(x_0) = 0$  gilt.



Es fehlt noch die Verallgemeinerung des *notwendigen Kriteriums* für die Existenz von Extremstellen aus Analysis I. Dieses erhalten wir unmittelbar als Folgerung aus Satz 2.59.

**Korollar 2.61** Sei  $\mathcal{V}$  ein endlich-dimensionaler Banachraum, sei  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Hat  $f$  in  $x_0 \in U$  ein lokales Extremum, so gilt  $Df(x_0) = 0$ .

**Beweis:** Ist  $Df(x_0) \neq 0$ , so ist  $Df(x_0)$  nach Lemma 2.58 indefinit und  $f$  hat nach Satz 2.59 kein lokales Extremum in  $x_0$ . Daraus folgt unmittelbar die Aussage mit Kontraposition.  $\square$

**Beispiel 2.62** Wir betrachten die Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  und  $f_2 : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ . Wir bestimmen zunächst die *kritischen Punkte* von  $f_1$  und  $f_2$ , das sind Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , für die die Ableitung Null ist. Hier gilt

$$Df_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Df_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \end{bmatrix}.$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und daher ist  $(0, 0)$  in beiden Fällen der einzige kritische Punkt. Weiter erhalten wir für die Hesse-Matrizen von  $f_1$  bzw.  $f_2$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , dass

$$H_{f_1}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_{f_2}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wegen  $D^2f_i(x, y)(v_1, v_2) = v_1^\top H_{f_i}(x, y)v_2$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und alle  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  ist  $D^2f_i(x, y)$  genau dann positiv definit, negativ definit oder indefinit, wenn  $H_{f_i}(x, y)$  positiv definit, negativ definit bzw. indefinit ist und aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass wir diese Eigenschaft an den Eigenwerten der Hesse-Matrix ablesen können. Es folgt, dass  $H_{f_1}(0, 0)$  positiv definit ist, d.h.  $f_1$  hat in  $(0, 0)$  ein striktes lokales Minimum. Andererseits ist  $H_{f_2}(0, 0)$  indefinit und daher hat  $f_2$  *kein* lokales Extremum in  $(0, 0)$ . Solche Punkte (d.h. kritische Punkte, an denen kein lokales Extremum vorliegt) nennt man *Sattelpunkte*. Der Name erklärt sich aus der Skizze des Graphen von  $f_2$  in Abbildung 2.1.

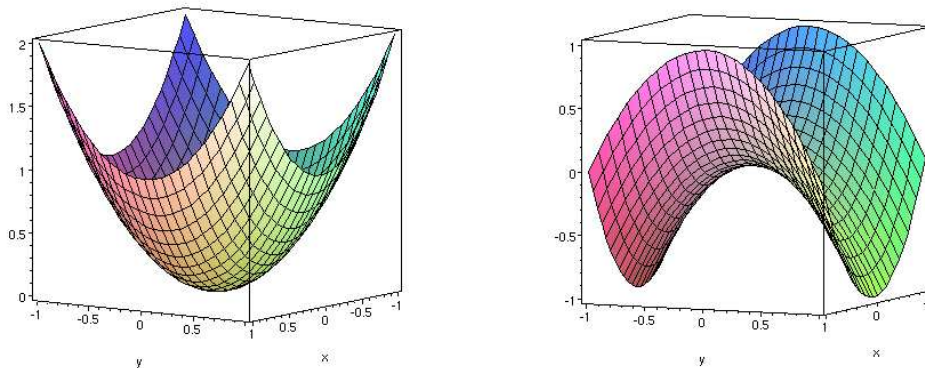


Abbildung 2.1: Graphen der Funktionen  $f_1$  (links) und  $f_2$  (rechts) aus Beispiel 2.62

Wie im letzten Beispiel angedeutet, kann man anhand der Eigenwerte der Hesse-Matrix entscheiden, ob diese positiv oder negativ definit bzw. semidefinit oder indefinit ist. (Beachten Sie dazu das bekannte Resultat aus der linearen Algebra, das besagt, dass Eigenwerte von reellen symmetrischen Matrizen, sowie auch von komplexen Hermiteschen Matrizen, stets reell sind, so dass jede symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  genau  $n$  Eigenwerte hat, ggf. mehrfach gezählt mit algebraischen Vielfachheiten.) Der Vollständigkeit halber zitieren wir hier die entsprechenden Resultate aus der Linearen Algebra. Falls die Größe  $n$  der betrachteten Matrix nicht zu groß ist, ist das sogenannte *Hauptminorenkriterium* für die Überprüfung der Definitheit der Matrix allerdings viel einfacher als die Berechnung aller Eigenwerte und daher vorzuziehen.

**Satz 2.63** Sei  $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $A$  ist positiv definit.
- 2) Alle Eigenwerte von  $A$  sind positiv.
- 3) (**Hauptminorenkriterium.**) Für  $k = 1, \dots, n$  sei

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k,k}.$$

Dann gilt

$$\det A_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Die Determinante  $\det A_k$  der Hauptabschnittsmatrix  $A_k$  von  $A$  heißt auch *führender  $k$ -ter Hauptminor* von  $A$ . Durch Anwenden des Satzes auf die Matrix  $-A$  erhalten wir unmittelbar die folgende Charakterisierung negativ definiter symmetrischer Matrizen.

**Satz 2.64** Sei  $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $A$  ist negativ definit.
- 2) Alle Eigenwerte von  $A$  sind negativ.
- 3) (**Hauptminorenkriterium.**) Für  $k = 1, \dots, n$  sei

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k,k}.$$

Dann gilt

$$(-1)^k \det A_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Für die Semidefinitheit einer symmetrischen Matrix gilt leider keine naheliegende Analogie des Hauptminorenkriteriums, weswegen wir uns hier auf eine Charakterisierung über die Eigenwerte beschränken.

**Satz 2.65** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch. Dann gilt:

- 1)  $A$  ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  nicht-negativ sind.
- 2)  $A$  ist genau dann negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  nicht-positiv sind.
- 3)  $A$  ist genau dann indefinit, wenn  $A$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

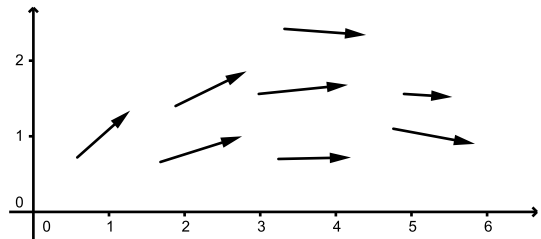
## 2.7 Differentialoperatoren der klassischen Vektoranalysis

In diesem Abschnitt gehen wir kurz auf die Differentialoperatoren *Gradient*, *Divergenz* und *Rotation* der *klassischen Vektoranalysis* ein. Dazu führen wir zunächst *Skalar-* und *Vektorfelder* ein.

**Definition 2.66** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1) Eine Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Skalarfeld*.
- 2) Eine Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Vektorfeld*.

Der Name *Vektorfeld* rührt daher, dass wir uns eine Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  so vorstellen können, dass jedem Punkt des Raums ein Vektor zugeordnet wird. Im Spezialfall  $n = 2$  können wir dann Vektorfelder visualisieren, indem wir in jedem Punkt  $x$  der Ebene (bzw. von  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ) den Vektor  $f(x)$  einzeichnen. Diese sehen dann aus wie Ähren auf einem Getreidefeld. Da es sich aber um Vektoren und nicht um Weizen handelt, nennen wir es eben *Vektorfeld*. Klassische Vektorfelder sind z.B. Geschwindigkeitsfelder einer Strömung. Der Vektor  $f(x)$  stellt dann die Geschwindigkeit einer Strömung im Punkt  $x$  dar, die durch Richtung und Betrag (Länge des Vektors) gegeben ist. Bevor wir Skalarfelder visualisieren, führen wir den Begriff der *Niveaumenge* ein.

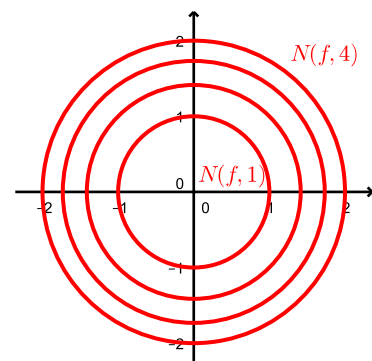


**Definition 2.67** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarfeld, sowie  $c \in \mathbb{R}$ . Dann heißt die Menge

$$N(f, c) := \{x \in G \mid f(x) = c\}$$

die Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $c$ .

Niveaumengen liefern eine neue Möglichkeit für die graphische Darstellung von Skalarfeldern  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ . Erinnern Sie sich dazu an die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  aus Beispiel 2.62. Diese hatten wir dort durch ihren dreidimensionalen Graph  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$  dargestellt. Interpretieren wir nun  $f(x, y)$  als „Höhe“, so können wir  $f$  auch mit Hilfe von „Höhenlinien“ (so wie sie es von Landkarten gewöhnt sind) darstellen, indem wir im Definitionsbereich  $\mathbb{R}^2$  zu einem  $c \in \mathbb{R}$  alle Punkte einzeichnen, für die  $f$  den Funktionswert  $c$  annimmt – dies ist gerade die Niveaumenge  $N(f, c)$ . In der nebenstehenden Graphik sehen Sie die Niveaumengen (in diesem Spezialfall spricht man aus naheliegenden Gründen auch von *Niveaulinien*) von  $f$  zu den Niveaus  $c = 1, 2, 3, 4$ .



Wir wenden uns nun den *klassischen Differentialoperatoren* der Vektoranalysis zu. Der erste und für uns im folgenden Verlauf auch wichtigste ist der sogenannte *Gradient*.

**Definition 2.68** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein differenzierbares Skalarfeld.

1) Sei  $x \in U$ . Dann heißt der Vektor

$$\text{grad } f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Gradient von  $f$  in  $x$ .

2) Das Vektorfeld  $\text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto \text{grad } f(x)$  heißt der Gradient von  $f$ .

**Bemerkung 2.69** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein differenzierbares Skalarfeld. Wenn wir den  $\mathbb{R}^n$  (wie in der Linearen Algebra üblich) mit dem Raum  $\mathbb{R}^{n,1}$  der  $n \times 1$  Matrizen identifizieren, gilt

$$\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} = (\text{grad } f(x))^\top.$$

Speziell gilt dann für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = \begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} \cdot v = Df(x)(v) = \partial_v f(x), \quad (2.30)$$

wobei hier und im Folgenden  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

Der Gradient unterscheidet sich also nicht besonders von der Ableitung von  $f$ . Der Grund dafür, dass er einen eigenen Namen erhält, liegt an seinen Eigenschaften als klassischer Vektor, den wir uns mit einer “*Richtung*” verbunden denken können.

**Bemerkung 2.70** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein differenzierbares Skalarfeld. Ferner sei  $x \in U$ , so dass  $\text{grad } f(x) \neq 0$ .

1) Für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  gilt unter Ausnutzung von (2.30) und der aus der Linearen Algebra bekannten Formel für das Skalarprodukt, dass

$$\partial_v f(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle = \|v\| \cdot \|\text{grad } f(x)\| \cdot \cos \phi,$$

wobei  $\phi \in [0, \pi]$  den Winkel zwischen  $v$  und  $\text{grad } f(x)$  bezeichnet. Beschränken wir uns nun auf Vektoren  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$ , so wird  $\partial_v f(x)$  maximal für  $\phi = 0$ , d.h. wenn  $v = \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$  gilt. Da wir die Richtungsableitung in Richtung von normierten Vektoren als Steigung der Funktion in dieser Richtung interpretieren können, fassen wir unsere hier gewonnene Erkenntnis wie folgt zusammen:

*Der Gradient zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$ .*

- 2) Seien  $\varepsilon > 0$ , sowie  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve mit  $\alpha(0) = x$ . Dann folgt für alle  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  mit Hilfe der Kettenregel und (2.30), dass

$$(f \circ \alpha)'(t) = Df(\alpha(t))(\alpha'(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

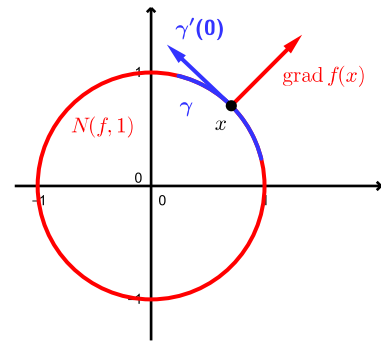
Falls nun das Bild von  $\alpha$  in der Niveaumenge  $N(f, c)$  von  $f$  liegt, wobei  $c = f(x)$ , so ist  $f \circ \alpha$  konstant und wir erhalten speziell für  $t = 0$ , dass

$$\langle \operatorname{grad} f(x), \alpha'(0) \rangle = 0$$

für alle  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Da  $\alpha$  eine Kurve in  $N(f, c)$  ist, ist  $\alpha'(0)$  anschaulich gesehen ein Vektor, der tangential zu der Menge  $N(f, c)$  verläuft. (Vergleichen Sie hierzu auch Abschnitt 3.3, wo wir präzisieren werden, was ein *Tangentenvektor* ist.) Der Gradient  $\operatorname{grad} f(x)$  ist folglich senkrecht zu diesem Vektor und da dies für jede beliebige Kurve in  $N(f, c)$  gilt, können wir unser Ergebnis wie folgt anschaulich zusammenfassen:

*Der Gradient steht senkrecht auf der jeweiligen Niveaumenge von  $f$ .*

Die nebenstehende Graphik illustriert noch einmal die obige Feststellung für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$  aus Beispiel 2.62. Betrachten wir den Punkt  $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  mit  $f(x) = 1$  und eine differenzierbare Kurve  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow N(f, 1)$  in der zugehörigen Niveaumenge  $N(f, 1)$  mit  $\alpha(0) = x$ , so ist  $\alpha'(0)$  ein Tangentialvektor der Niveaumenge und der Gradient  $\operatorname{grad} f(x)$  ist senkrecht zu  $\alpha'(0)$  und steht auch senkrecht auf der Niveaumenge  $N(f, 1)$  (und zeigt zudem noch in die Richtung, in der die Funktionswerte am stärksten anwachsen).



Der Grund dafür, dass der Gradient als *Differentialoperator* bezeichnet wird rührt daher, dass wir ihn als lineare Abbildung auffassen können. Betrachten wir zu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen die Menge  $\mathcal{S}_d(U)$  der differenzierbaren Skalarfelder auf  $U$  und mit  $\mathcal{V}(U)$  die Menge der Vektorfelder auf  $U$ , so erhalten wir durch die Zuordnung  $f \mapsto \operatorname{grad} f$  eine Abbildung  $\operatorname{grad} : \mathcal{S}_d(U) \rightarrow \mathcal{V}(U)$ . Diese ist linear, denn für alle  $f, g \in \mathcal{S}_d(U)$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} g.$$

Lineare Abbildungen zwischen Funktionenräumen bezeichnet man üblicherweise als *lineare Operatoren*. Diese werden in der *Operatortheorie*, einem Teilgebiet der *Funktionalanalysis*, näher untersucht.

Neben dem Gradienten gibt es weitere wichtige Differentialoperatoren in der klassischen Vektoranalysis, auf die wir in der Analysis III zurückkommen werden bzw. die Sie in Vertiefungsveranstaltungen wiedertreffen können.

**Definition 2.71** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbares Vektorfeld.

1) Das Skalarfeld  $\operatorname{div} f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$

für  $x \in U$  heißt Divergenz von  $f$ .

2) Im Fall  $n = 3$  heißt das Vektorfeld  $\operatorname{rot} f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix}$$

für  $x \in U$  die Rotation von  $f$ .

Der Name *Divergenz* hat nichts mit der Divergenz von Folgen zu tun, sondern ist hier wörtlich als “Auseinanderlaufen” zu verstehen. Man kann nämlich zeigen, dass sich die Divergenz als *Quelldichte* eines Vektorfelds interpretieren lässt. Dazu fasst man ein differenzierbares Vektorfeld  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, als das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung auf. Gilt für  $x \in U$ , dass  $\operatorname{div} f(x) > 0$ , so befindet sich in  $x$  eine *Quelle*, d.h. anschaulich gesprochen, dass für jede hinreichend kleine Umgebung um  $x$  gilt, dass aus dieser “mehr herausfließt als hinein”. Ist analog  $\operatorname{div} f(x) < 0$ , so spricht man von einer Senke, denn in jede hinreichend kleine Umgebung um  $x$  “fließt mehr hinein als heraus”. Ein Vektorfeld mit der Eigenschaft  $\operatorname{div} f(x) = 0$  für alle  $x \in U$  heißt *quellfrei*.

Auch die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen, hat eine anschauliche Bedeutung. Sie ist ein Maß für die “Verwirbelung” des Vektorfelds. Befestigt man in  $x \in U$  ein hinreichend kleines “Windrädchen” mit Achse in Richtung  $\operatorname{rot} f(x)$  (falls  $\operatorname{rot} f(x) \neq 0$ ), so beginnt sich dieses mit der Winkelgeschwindigkeit  $\|\operatorname{rot} f(x)\|$  zu drehen. Jedes Windrädchen mit einer Achse, die linear unabhängig von  $\operatorname{rot} f(x)$  ist, weist eine Drehung mit niedrigerer Winkelgeschwindigkeit auf.

Ebenfalls häufig taucht in Anwendungen (z.B. in der Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung oder Schrödingergleichung) der sogenannte *Laplace-Operator* auf.

**Definition 2.72 (Laplace-Operator)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein zweimal differenzierbares Skalarfeld. Dann ist das Skalarfeld  $\Delta f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x \mapsto \Delta f(x) := \operatorname{div} (\operatorname{grad} f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(x).$$

Schöne Merkgeregeln für die klassischen Differentialoperatoren erhalten wir mit Hilfe des sogenannten *Nabla-Operators*  $\nabla$ , dessen Name auf den griechischen Namen des Nevels, einem antiken Saiteninstrument, das eine ähnliche Form aufweist, zurückgeht und der für die Dimension  $n$  wie folgt definiert ist:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Durch Anwenden, bzw. formales Bilden des Standardskalarprodukts (das wir hier wie in den Anwendungswissenschaften üblicher mit  $\cdot$  statt mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnen werden), erhalten wir dann für ein differenzierbares Skalarfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. differenzierbares Vektorfeld  $f = f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  die folgende Darstellung für die klassischen Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} \nabla F &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \text{grad } F, \\ \nabla \cdot f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \text{div } f, \\ \nabla^2 F &= \nabla \cdot \nabla F = \text{div}(\text{grad } F) = \Delta F, \end{aligned}$$

und für den Fall  $n = 3$  unter Hinzunahme des Vektorprodukts auch

$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \text{rot } f$$





## Kapitel 3

# Die großen Sätze der mehrdimensionalen Differentialrechnung und Anwendungen

In diesem Kapitel werden wir uns unter anderem mit einer wichtigen Anwendung befassen, nämlich der Theorie nichtlinearer Gleichungssysteme. Genauso wie sich ein lineares Gleichungssystem in der Form  $Ax = y$  mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  und einer rechten Seite  $y \in \mathbb{R}^m$  schreiben lässt, bzw. äquivalent dazu in der Form  $L(x) = b$ , wobei  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung ist, so können wir ein nichtlineares Gleichungssystem in der Form  $f(x) = y$  schreiben, wobei  $X, Y$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung ist.

Mit der Theorie der linearen Gleichungssysteme sind sie bestens aus der Linearen Algebra vertraut. In der Theorie nichtlinearer Gleichungssysteme lassen sich dagegen meist nur in Spezialfällen Aussagen treffen, wie z.B., wenn unsere zu Grunde liegende Funktion  $f$  differenzierbar ist. In diesem Fall lässt sie sich nämlich in jedem Punkt  $x$  durch ihre Ableitung  $Df(x)$  linear approximieren, wodurch sich einige Erkenntnisse aus der Theorie linearer Gleichungssysteme auf diesen Fall übertragen lassen. Da die Ableitung  $Df(x)$  die Funktion  $f$  allerdings nur in einer kleinen Umgebung von  $x \in G$  gut approximiert, erhalten wir als Antwort auf unsere Fragen im Allgemeinen nur *lokale* Aussagen, also Aussagen, die nur in einer Umgebung eines betrachteten Punktes gelten.

Damit der Begriff der Differenzierbarkeit für unsere Funktion  $f : X \rightarrow Y$  Sinn macht, sollten die Mengen  $X$  und  $Y$  Teilmengen von endlich-dimensionalen Banachräumen  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  sein. Der Einfachheit halber werden wir uns in diesem Kapitel auf den Fall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$  beschränken. Wie wir bereits in einigen Beweisen ausgenutzt haben, lässt sich der allgemeine Fall mit Hilfe von Isomorphismen  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$  und  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{W}$  darauf zurückführen. Die Differenzierbarkeit und auch Ableitungen von Funktionen sind verträglich mit diesen Isomorphismen, denn mit Hilfe der Kettenregel folgt für differenzierbares  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $U \subseteq \mathcal{V}$  offen, und für  $\tilde{f} := \Psi^{-1} \circ f \circ \Phi : \Phi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dass

$$D\tilde{f}(x) = D\Psi^{-1}(f(\Phi(x))) \circ Df(\Phi(x)) \circ D\Phi(x) = \Psi^{-1} \circ Df(\Phi(x)) \circ \Phi$$

für alle  $x \in \Phi^{-1}(U)$  gilt.

Bisher haben wir immer strikt zwischen der Ableitung  $Df(x)$  von  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  im Punkt  $x$  der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und der darstellenden Matrix  $[ Df(x) ]$  unterschieden. Im Folgenden wollen wir beide Begriffe jedoch beide Begriffe identifizieren und lassen folgerichtig die eckigen Klammern bei der Jacobi-Matrix weg, um fortan die Notation  $Df(x) \in \mathbb{R}^{m,n}$  zu verwenden. Diese Generalvereinbarung soll jedoch nur für den Fall gelten, dass Urbild- und Bildraum unserer Abbildung  $f$  Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$  sind, und daher auch nur für die *erste* Ableitung von  $f$  in  $x \in U$ . Die zweite Ableitung ist nämlich die Ableitung der Funktion  $Df : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (bzw. von  $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$  unter Nutzung unserer Generalvereinbarung, dass wir  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  und  $\mathbb{R}^{m,n}$  identifizieren) und in diesem Fall ist es handlicher  $D^2f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  wie gehabt als eine bilineare Abbildung zu betrachten.

### 3.1 Der Umkehrsatz

Eine zentrale Frage in der Analysis ist die, ob eine gegebene Funktion umkehrbar ist und ggf. welche analytischen Eigenschaften ihre Umkehrfunktion hat. Übersetzt in die Sprache der nichtlinearen Gleichungssysteme entspricht dies gerade der Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit des Gleichungssystems. Genauer betrachten wir dazu ein nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= y_m, \end{aligned}$$

wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar und  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  seien. Die Frage, ob für alle  $y \in \mathbb{R}^m$  in einer Umgebung  $V$  von  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  eine eindeutige Lösung existiert, entspricht dann der Suche nach einer *Umkehrabbildung* von  $f$ , die auf der Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  definiert ist.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  genau dann für alle  $b \in \mathbb{R}^m$  eindeutig lösbar ist, wenn  $m = n$  gilt und  $A$  invertierbar ist. Die Beobachtung in der nachfolgenden Bemerkung zeigt, dass wir uns auch im Fall nichtlinearer Gleichungssysteme, die durch differenzierbare Funktionen gegeben sind, auf den Fall  $n = m$  beschränken sollten - anschaulich gesprochen entspricht das der Situation, dass die Anzahl  $m$  der Gleichungen mit der Anzahl  $n$  der Variablen übereinstimmt.

**Bemerkung 3.1** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen sowie  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow U$  differenzierbar, so dass  $g \circ f = Id_U$  und  $f \circ g = Id_V$  gilt. Dann erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel für alle  $x \in U$  und  $y := f(x)$ , dass

$$\begin{aligned} I_n &= DId_U(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x) \\ \text{und } I_m &= DId_V(y) = Df(g(y)) \cdot Dg(y) = Df(x) \cdot Dg(f(x)). \end{aligned}$$

Somit ist  $Df(x)$  invertierbar und es gilt  $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ . Insbesondere folgt  $n = m$ .

Bemerkung 3.1 zeigt insbesondere, dass die Invertierbarkeit der Ableitung notwendig für die Existenz der Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion ist, zumindest, wenn wir voraussetzen, dass die Umkehrfunktion ebenfalls differenzierbar sein soll. (Vergleichen Sie dazu auch Bemerkung 6.20 aus Analysis I.) Ist nun umgekehrt  $Df(x_0)$  invertierbar, so können wir die approximative Gleichung

$$y = f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0),$$

nach  $x$  auflösen und erhalten

$$x \approx x_0 + Df(x_0)^{-1} \cdot (f(x) - f(x_0)).$$

Tatsächlich werden wir im Folgenden zeigen, dass die Invertierbarkeit der Ableitung von  $f$  an einer Stelle  $x_0$  unter gewissen Voraussetzungen schon hinreichend für die Existenz einer Umkehrfunktion von  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  ist. Dabei erweist sich das folgende Resultat als nützlich, das ein Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix liefert.

**Lemma 3.2 (Neumann-Reihe)** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $\|A\| < 1$ , wobei  $\|\cdot\|$  die Operatornorm ist. Dann ist  $I_n - A$  invertierbar und es gilt<sup>1</sup>

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \quad (3.1)$$

**Beweis:** Die Operatornorm hatten wir formal zwar nur für lineare Abbildungen definiert, aber natürlich lässt sich diese Definition sofort auf Matrizen übertragen, d.h. für  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  ist

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Diese Norm hat die Eigenschaft *submultiplikativ* zu sein, d.h. für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  gilt<sup>2</sup>

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

woraus per Induktion sofort  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt. Wegen  $\|A\| < 1$  folgt damit aber  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ . Weiter erhalten wir

$$(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^m A^k = \sum_{k=0}^m A^k - \sum_{k=1}^{m+1} A^k = I_n - A^{m+1}$$

und daher

$$I_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (I_n - A^{m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^m A^k \right) = (I_n - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Hieraus folgt die Invertierbarkeit von  $I_n - A$ , sowie die Formel (3.1).  $\square$

<sup>1</sup>Der Reihenbegriff in Banachräumen wird über die Folge der zugehörigen Partialsummen definiert und ist damit komplett analog zu dem Reihenbegriff reeller Zahlen in Analysis I erklärt.

<sup>2</sup>Dies zeigt man in der Linearen Algebra, aber wegen seiner Kürze geben wir den Nachweis auch an dieser Stelle an: Per Definition der Operatornorm gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , dass  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$  und daher auch  $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$ . Hieraus folgt für alle  $x \neq 0$ , dass  $\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , und daher auch  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Kam Ihnen dieser Beweis bekannt vor? Wenn nicht, dann schauen Sie sich noch einmal den Beweis über die Konvergenz der geometrischen Reihe aus Analysis I an (siehe dort Teil 2) von Beispiel 3.2). Tatsächlich ist die Neumann-Reihe die Entsprechung der geometrischen Reihe für Matrizen bzw. lineare Abbildungen.

**Theorem 3.3 (Umkehrsatz)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Ferner sei  $x_0 \in U$ , so dass  $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  invertierbar ist. Dann ist  $f$  um  $x_0$  lokal invertierbar mit stetig differenzierbarer Inverser, d.h. es gibt  $\tilde{U} \subseteq U$  offen mit  $x_0 \in \tilde{U}$ , so dass  $f : \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$  bijektiv und die lokale Inverse  $g : f(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U}$  von  $f$  stetig differenzierbar ist. Weiter gilt für alle  $x \in \tilde{U}$ , dass  $Df(x)$  invertierbar ist und dass

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}. \quad (3.2)$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis in insgesamt drei Schritten:

Schritt 1: Vereinfachungen.

i) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $x_0 = 0$  und  $f(x_0) = 0$  gilt. Andernfalls betrachten wir die Funktion

$$\tilde{f} : x \mapsto f(x + x_0) - f(x_0).$$

Diese hat die Eigenschaft  $\tilde{f}(0) = 0$ , sowie  $D\tilde{f}(0) = Df(x_0)$ , d.h.  $D\tilde{f}(0)$  ist invertierbar. Offenbar ist mit  $\tilde{f}$  auch  $f$  lokal invertierbar.

ii) Weiter können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $Df(x_0) = I_n$  bzw. in der Sprache linearer Abbildungen  $Df(x_0) = Id_{\mathbb{R}^n}$  gilt. Andernfalls betrachten wir die Funktion

$$\hat{f} := (Df(0))^{-1} \circ f.$$

Diese hat die Eigenschaften  $\hat{f}(0) = 0$  und

$$D\hat{f}(0) = D\left((Df(0))^{-1}\right)(f(0)) \circ Df(0) = (Df(0))^{-1} \circ Df(0) = Id,$$

wobei wir hier die Linearität der Abbildung  $(Df(0))^{-1}$  ausgenutzt haben. Auch hier folgt aus der lokalen Invertierbarkeit von  $\hat{f}$  die lokale Invertierbarkeit von  $f$ .

Schritt 2: Konstruktion der lokalen Inversen  $g$ .

Für ein  $y$  in der Nähe von 0 suchen wir ein  $x^* \in U$  in der Nähe von 0, so dass  $f(x^*) = y$  gilt. Die entscheidende Idee ist nun, dass wir aus dieser Gleichung eine Fixpunktgleichung basteln können, indem wir den Trick aus Bemerkung 1.45 verwenden. Definieren wir die Abbildung  $\Phi_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto x - f(x) + y$ , so ist wegen

$$\Phi_y(x^*) = x^* - f(x^*) + y$$

der Punkt  $x^*$  genau dann ein Fixpunkt von  $\Phi_y$  wenn  $f(x^*) = y$ . Ziel ist nun die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes Satz 1.42 und die Konstruktion von  $\delta > 0$ , so dass

$$\Phi_y : \overline{U_\delta(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x - f(x) + y$$

für alle  $y$  in einer Umgebung von 0 eine Kontraktion, also eine Lipschitz-stetige Selbstabbildung mit Lipschitz-Konstante  $L < 1$  ist. (Den Abschluss betrachten wir hier, da der Banachsche Fixpunkt voraussetzt, dass die Kontraktion auf einer abgeschlossenen Menge definiert ist.) In Hinblick auf Korollar 2.37 ist es in diesem Fall zweckmäßig, die Norm der

Ableitung von  $\Phi_y$  durch eine Konstante  $L < 1$  zu beschränken. (Der Einfachheit halber werden wir diese Konstante als  $L = \frac{1}{2}$  festlegen.) Dazu beobachten wir, dass mit  $f$  auch  $\Phi_y$  stetig differenzierbar ist und dass für alle  $x \in U$  gilt, dass

$$D\Phi_y(x) = DId(x) - Df(x) + 0 = I_n - Df(x) = Df(0) - Df(x).$$

Das gesuchte  $\delta$  wählen wir nun wie folgt: Wegen der Stetigkeit von  $Df$  gibt es zu  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  ein  $\delta > 0$  mit  $\overline{U_\delta(0)} \subseteq U$  und  $\|Df(x) - I_n\| \leq \frac{1}{2}$  für alle  $x \in \overline{U_\delta(0)}$ . (Klar?) Daraus erhalten wir für alle  $y$  und alle  $x$  mit  $\|x\| \leq \delta$ , dass

$$\|D\Phi_y(x)\| = \|I_n - Df(x)\| \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Wir zeigen nun, dass  $\Phi_y$  für alle  $y$  mit  $\|y\| \leq \frac{1}{2}\delta$  eine Kontraktion ist: Seien dazu  $x, \tilde{x} \in \overline{U_\delta(0)}$  beliebig. Zunächst einmal gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi_y(x)\| &\leq \|\Phi_y(x) - \Phi_y(0)\| + \|\Phi_y(0)\| \\ &\leq \sup_{v \in \overline{0x}} \|D\Phi_y(v)\| \cdot \|x - 0\| + \|y\| \\ &\leq \frac{1}{2}\delta + \|y\| \leq \delta, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung den Schrankensatz benutzt haben. Damit folgt  $\Phi_y(\overline{U_\delta(0)}) \subseteq \overline{U_\delta(0)}$ , d.h.  $\Phi_y$  ist eine Selbstabbildung. Außerdem gilt unter erneuter Anwendung des Schrankensatzes, dass

$$\|\Phi_y(x) - \Phi_y(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|, \quad (3.4)$$

d.h.  $\Phi_y$  ist auch Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L = \frac{1}{2}$ . Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und daher existiert zu jedem  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|y\| \leq \frac{1}{2}\delta$  ein eindeutig bestimmtes  $x^* \in \overline{U_\delta(0)}$  mit  $\Phi_y(x^*) = x^*$  bzw. mit  $f(x^*) = y$ . Setze nun

$$\tilde{U} := U_\delta(0) \cap f^{-1}(U_{\delta/2}(0)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \delta \text{ und } \|f(x)\| < \frac{1}{2}\delta\}.$$

Dann ist  $\tilde{U}$  offen ( $f$  ist stetig) und nach Konstruktion ist  $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$  injektiv, also auch bijektiv und es existiert eine eindeutige *lokale Inverse*  $g : f(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U}$  von  $f$  (d.h. eine Inverse von  $f|_{\tilde{U}}$ ).

Schritt 3:  $g$  ist stetig differenzierbar. Notwendig für die Differenzierbarkeit von  $g$  ist zunächst einmal die Offenheit des Definitionsbereichs  $f(\tilde{U})$ . (Beachten Sie, dass dies nicht automatisch aus der Stetigkeit von  $f$  folgt. Zwar sind Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen offen, aber über Bilder von offenen Mengen können wir i.A. keine Aussage treffen.) Um dies zu zeigen beobachten wir, dass wegen  $\Phi_0(x) = x - f(x)$  für alle  $x, \tilde{x} \in \overline{U_\delta(0)}$  gilt, dass

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|f(x) - f(\tilde{x})\| + \|\Phi_0(x) - \Phi_0(\tilde{x})\| \leq \|f(x) - f(\tilde{x})\| + \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|,$$

wobei wir für die letzte Abschätzung (3.4) ausgenutzt haben. Durch Umstellen erhalten wir daraus

$$\frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\| \leq \|f(x) - f(\tilde{x})\| \quad \text{bzw.} \quad \|x - \tilde{x}\| \leq 2\|f(x) - f(\tilde{x})\|. \quad (3.5)$$

Nach Konstruktion gilt  $f(\tilde{U}) \subseteq U_{\delta/2}(0)$ . Wir zeigen hier nun die Gleichheit, woraus die Offenheit von  $f(\tilde{U})$  folgt. Sei also  $y \in U_{\delta/2}(0)$ . Dann gibt es wegen der Konstruktion in Schritt 2 ein  $x \in \overline{U_\delta(0)}$  mit  $f(x) = y$ . Weiter gilt unter Ausnutzung von (3.5) für  $\tilde{x} = 0$ , dass

$$\|x\| \leq 2\|f(x)\| < 2 \cdot \frac{1}{2}\delta = \delta,$$

woraus  $x \in U_\delta(0)$  und damit  $x \in \tilde{U}$  folgt. Dies impliziert  $y \in f(\tilde{U})$  und damit die Offenheit von  $f(\tilde{U})$ .

Wenden wir Lemma 3.2 auf  $I_n - (I_n - Df(x))$  an, so folgt, dass  $Df(x)$  nicht nur für  $x = 0$ , sondern für alle  $x \in \tilde{U}$  invertierbar ist, denn mit Hilfe von (3.3) erhalten wir, dass

$$\|I_n - Df(x)\| = \|D\Phi_0(x)\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Sei nun  $\tilde{y}_0 \in f(\tilde{U})$  beliebig und  $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}$  mit  $f(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$ . Nach Voraussetzung ist  $f$  differenzierbar und daher gibt es eine Funktion  $R : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass für alle  $x \in \tilde{U}$  gilt, dass

$$f(x) = f(\tilde{x}_0) + Df(\tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_0) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0} \frac{R(x)}{\|x - \tilde{x}_0\|} = 0.$$

Nach Bemerkung 3.1 ist nun  $Df(\tilde{x}_0)^{-1}$  der einzig sinnvolle Kandidat für die Ableitung von  $g$  in  $\tilde{y}_0$ . Tatsächlich gilt für alle  $y \in f(\tilde{U})$  (und  $x \in \tilde{U}$  mit  $f(x) = y$ ), dass

$$\begin{aligned} g(y) - g(\tilde{y}_0) - (Df(\tilde{x}_0))^{-1}(y - \tilde{y}_0) &= x - \tilde{x}_0 - (Df(\tilde{x}_0))^{-1}(f(x) - f(\tilde{x}_0)) \\ &= x - \tilde{x}_0 - (Df(\tilde{x}_0))^{-1}(Df(\tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_0) + R(x)) \\ &= -(Df(\tilde{x}_0))^{-1}(R(x)). \end{aligned}$$

Weiter gilt wegen (3.5), dass

$$\frac{\|(Df(\tilde{x}_0))^{-1}(R(x))\|}{\|y - \tilde{y}_0\|} \leq 2 \frac{\|(Df(\tilde{x}_0))^{-1}\| \cdot \|R(x)\|}{\|x - \tilde{x}_0\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow \tilde{y}_0,$$

denn wegen (3.5) gilt für  $y \rightarrow \tilde{y}_0$  auch  $x \rightarrow \tilde{x}_0$  und wegen der Differenzierbarkeit von  $f$  geht der Grenzwert auf der rechten Seite der Ungleichung gegen Null. Dies beweist die Differenzierbarkeit von  $g$  auf ganz  $f(\tilde{U})$ . Insbesondere folgt dann mit Bemerkung 3.1 sofort die Formel

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}.$$

Für den Nachweis der Stetigkeit der Ableitung  $Dg$  von  $g$  beobachten wir, dass für alle  $y \in f(\tilde{U})$  gilt, dass

$$Dg(y) = Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1} = (Df(g(y)))^{-1},$$

wobei  $x \in \tilde{U}$  so gewählt ist, dass  $f(x) = y$ . Damit ist  $Dg = \text{inv} \circ Df \circ g$  als Komposition stetiger Funktionen stetig. Hierbei bezeichnet  $\text{inv}$  die Inversion auf der Menge  $GL_n(\mathbb{R})$ , die wir in Beispiel 1.51 als stetig entlarvt hatten.  $\square$

**Beispiel 3.4** Wir betrachten die Funktion

$$f : ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\varrho, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{bmatrix},$$

die den Polarkoordinaten  $(\varrho, \phi)$  die kartesischen Koordinaten  $(\varrho \cos \phi, \varrho \sin \phi)$  zuordnet. Beachten Sie, dass  $f$  nicht injektiv ist! (Die Einschränkung von  $f$  auf  $]0, \infty[ \times [0, 2\pi[$  ist allerdings injektiv und damit global invertierbar, jedoch ist die Inverse dann leider auf der positiven  $x$ -Achse nicht stetig. Klar?) Betrachten wir die Ableitung von  $f$ , so gilt

$$Df(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\varrho \sin \phi \\ \sin \phi & \varrho \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \det Df(\varrho, \phi) = \varrho \cos^2 \phi + \varrho \sin^2 \phi = \varrho > 0$$

für alle  $(\varrho, \phi) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ , d.h.  $Df(\varrho, \phi)$  ist für alle  $(\varrho, \phi)$  invertierbar. Damit ist  $f$  nach Satz 3.3 überall lokal invertierbar. Zu gegebenem  $(\varrho_0, \phi_0)$  können wir dabei die Menge  $U = ]0, \infty[ \times ]\phi_0 - \pi, \phi_0 + \pi[$  wählen. Für die lokale Inverse  $g : f(U) \rightarrow U$  gilt dann in  $(x, y) = (\varrho \cos \phi, \varrho \sin \phi) \in f(U)$ , dass

$$\begin{aligned} Dg(x, y) &= Dg(f(\varrho, \phi)) = (Df(\varrho, \phi))^{-1} = \frac{1}{\varrho} \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi & \varrho \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\varrho} \begin{bmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\varrho} & \frac{x}{\varrho} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.5** Aus Beispiel 3.4 gewinnen wir zwei wichtige Erkenntnisse:

- 1) Wir können die Ableitung der lokalen Inversen  $g$  bestimmen, ohne eine explizite Funktionsvorschrift für  $g$  zu kennen.
- 2) Funktionen, deren Ableitung überall invertierbar ist, sind nicht notwendigerweise global umkehrbar. Dies steht im Gegensatz zum Analogon des Umkehrsatzes aus Analysis I (siehe dort Satz 6.19), wo aus der Invertierbarkeit der Ableitung  $f'(x)$  einer differenzierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall, in allen  $x \in I$  (dies bedeutet einfach nur, dass die Ableitung überall von Null verschieden ist) bereits die Existenz und Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion auf ganz  $f(I)$  folgt.

Satz 3.3 lässt sich noch verschärfen: Ist  $f$  sogar  $k$ -mal stetig differenzierbar, so gilt dies auch für die lokale Inverse  $g$ . Dies folgt per Induktion leicht aus der Darstellung  $Dg = \text{inv} \circ Df \circ g$ , wenn wir zeigen können, dass  $\text{inv}$  nicht nur stetig, sondern sogar  $k$ -mal stetig differenzierbar ist. Wir beginnen dazu mit dem Nachweis der Differenzierbarkeit.

**Lemma 3.6** Die Abbildung  $\text{inv} : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $A \mapsto A^{-1}$  ist differenzierbar und für alle  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  und alle  $H \in \mathbb{R}^{n,n}$  gilt

$$D(\text{inv})(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

**Beweis:** Zunächst einmal erinnern wir daran, dass  $GL_n(\mathbb{R})$  nach Beispiel 1.55 offen ist, d.h. die Frage nach der Differenzierbarkeit von  $\text{inv}$  ist überhaupt erst einmal sinnvoll, da der Definitionsbereich eine offene Menge ist. Sei nun  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(A) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ , sowie  $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ , so dass  $\|H\| < \varepsilon$ . (Damit gilt  $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$ .) Dann folgt:

$$\begin{aligned} \text{inv}(A + H) - \text{inv}(A) &= (A + H)^{-1} - A^{-1} = (A(I + A^{-1}H))^{-1} - A^{-1} \\ &= (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} - A^{-1} = ((I + A^{-1}H)^{-1} - I)A^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sei nun o.B.d.A.  $H$  so klein, dass  $\|A^{-1}H\| < 1$ . Dann folgt mit Lemma 3.2, dass

$$(I + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k = I - A^{-1}H + \underbrace{(A^{-1}H)^2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^{k-2}}_{=: g(H)}.$$

Damit erhalten wir aus (3.6), dass

$$\text{inv}(A + H) - \text{inv}(A) = -A^{-1}HA^{-1} + (A^{-1}H)^2 g(H)A^{-1},$$

wobei gilt, dass

$$\frac{\|(A^{-1}H)^2 g(H)A^{-1}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|H\|^2 \|g(H)\| \cdot \|A^{-1}\|}{\|H\|} = \|A^{-1}\|^2 \|H\| \cdot \|g(H)\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

und da  $g(H)$  nur nichtnegative Potenzen von  $H$  enthält, bleibt  $\|g(H)\|$  beschränkt für  $H \rightarrow 0$ , so dass

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|(A^{-1}H)^2 g(H)A^{-1}\|}{\|H\|} = 0.$$

Damit folgt (da  $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$  eine lineare Abbildung ist), dass  $\text{inv}$  differenzierbar ist und dass für alle  $H \in \mathbb{R}^{n,n}$  gilt, dass

$$D(\text{inv})(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}. \quad \square$$

**Bemerkung 3.7** 1) Die Formel  $D(\text{inv})(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$  sieht auf den ersten Blick etwas ungewöhnlich aus, ist aber eine Verallgemeinerung einer uns ganz vertrauten Ableitungsregel. Für den Spezialfall  $n = 1$  und  $a \in \mathbb{R}^{1,1} \cong \mathbb{R}$  erhalten wir nämlich für alle  $h \in \mathbb{R}$ , dass

$$D(\text{inv})(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1} = -\frac{h}{a^2}$$

und somit

$$\left[ D(\text{inv})(a) \right] = \left[ -\frac{1}{a^2} \right],$$

was mit unserem Wissen übereinstimmt, dass die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  die Ableitung  $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$  hat.

- 2) Da sich  $D(\text{inv})$  als Verkettung von Matrixmultiplikationen und  $\text{inv}$  schreiben lässt (versuchen sie dies einmal explizit), folgt mit Induktion, dass  $\text{inv}$  sogar beliebig oft differenzierbar ist.



## 3.2 Implizite Funktionen

In diesem Abschnitt wenden wir uns unterbestimmten nichtlinearen Gleichungssystemen zu, d.h. dem Fall, dass weniger Gleichungen als Variablen gegeben sind. Eine zentrale Fragestellung ist dann die Auflösbarkeit des Gleichungssystemen nach einer oder mehrerer Variablen. Auch hier werden wir zunächst den linearen Fall studieren und betrachten dazu ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Ax + By = 0, \quad (3.7)$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $y \in \mathbb{R}^m$  gilt. Falls  $B$  invertierbar ist, so ist das Gleichungssystem eindeutig nach  $y$  auflösbar, denn es gilt

$$y = -B^{-1}Ax.$$

Betrachten wir nun ein unterbestimmtes nichtlineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n + m$  Variablen. Letzte teilen wir in  $m$  Unbekannte  $y_1, \dots, y_m$  und  $n$  Parameter  $x_1, \dots, x_n$  auf. Unser Gleichungssystem hat dann die Form

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

mit Funktionen  $F_i : W \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Wir schreiben dieses Gleichungssystem auch kurz in der Form  $F(x, y) = 0$  mit  $F = (F_1, \dots, F_m)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Unser Ziel ist nun, das Gleichungssystem nach  $y$  aufzulösen, d.h. die Unbekannten  $y_1, \dots, y_m$  in Abhängigkeit der Parameter  $x_1, \dots, x_n$  darzustellen. Ist dies möglich, so existiert eine Funktion  $f : x \mapsto y$  mit der Eigenschaft

$$F(x, f(x)) = 0 \quad (3.8)$$

für alle  $x$ . Wir sagen dann, dass die Funktion  $f$  *implizit durch* (3.8) *gegeben* ist. Wenn wir nun annehmen, dass  $F$  differenzierbar ist und wir in  $(x_0, y_0) \in W$  durch  $DF(x_0, y_0)$  approximieren können, so benötigen wir gemäß unserer Vorüberlegungen beim linearen Fall die Invertierbarkeit desjenigen Teils der Jacobi-Matrix  $DF(x_0, y_0)$ , der durch die letzten  $m$  Spalten gegeben ist. Um dies mathematisch präzise formulieren zu können, benötigen wir an dieser Stelle eine flexible Notation für Untermatrizen der Jacobi-Matrix.

**Definition 3.8** Sei  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^q$  differenzierbar. Für  $z \in W$  und Indizes  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq q$  sei

$$\frac{\partial(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_\ell})}(z) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{i_1}}{\partial z_{j_1}}(z) & \dots & \frac{\partial F_{i_1}}{\partial z_{j_\ell}}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{i_k}}{\partial z_{j_1}}(z) & \dots & \frac{\partial F_{i_k}}{\partial z_{j_\ell}}(z) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

die Teilmatrix von  $DF(z)$ , die aus den Zeilen  $i_1, \dots, i_k$  und Spalten  $j_1, \dots, j_\ell$  besteht.

Für den Fall, dass wir eine differenzierbare Funktion  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^q$  mit offenem Definitionsbereich  $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  betrachten und die Variablen des  $\mathbb{R}^n$  mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und die des  $\mathbb{R}^m$  mit  $y = (y_1, \dots, y_m)$  bezeichnen, benutzen wir für  $(x_0, y_0) \in W$  auch die vereinfachte Notation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) := \frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{q,n} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) := \frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{q,m}$$

In diesem Fall gilt also

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Für den Beweis des Hauptresultat dieses Abschnitts, benötigen wir nun noch den folgenden Hilfssatz.

**Lemma 3.9** *Sei  $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  offen. Dann gibt es zu jedem  $(x, y) \in W$  offene Umgebungen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  von  $y$ , so dass  $U \times V \subseteq W$ .*

**Beweis:** Da alle Normen auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  äquivalent sind, ist  $W$  nach Satz 1.93 auch offen bzgl. der durch  $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  definierten Norm. Folglich gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x, y) \subseteq W$ . Für die letzte  $\varepsilon$ -Umgebung gilt aber  $U_\varepsilon(x, y) = U_\varepsilon(x) \times U_\varepsilon(y)$ . (Klar?). Wähle also  $U = U_\varepsilon(x)$  und  $V = U_\varepsilon(y)$ .  $\square$

**Satz 3.10 (über implizite Funktionen)** *Seien  $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  offen,  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar, sowie  $(x_0, y_0) \in W$ , so dass gilt:*

- (i)  $F(x_0, y_0) = 0$ .
- (ii)  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m,m}$  ist invertierbar.

*Dann gibt es offene Umgebungen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  von  $y_0$  mit  $U \times V \subseteq W$ , so dass folgende Aussagen gelten:*

- 1) *Zu jedem  $x \in U$  gibt es genau ein  $y_x \in V$  mit  $F(x, y_x) = 0$ . Insbesondere gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion  $f : U \rightarrow V$ ,  $x \mapsto y_x$  mit der Eigenschaft*

$$F(x, f(x)) = 0.$$

- 2) *Die Funktion  $f$  aus 1) ist stetig differenzierbar. Ferner ist  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$  für alle  $x \in U$  invertierbar und es gilt*

$$Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

*für alle  $x \in U$ .*

**Beweis:** Unser Ziel ist die Anwendung des Umkehrsatzes, wofür wir allerdings eine Funktion benötigen, bei der Bild- und Urbildraum Teilmengen von Räumen derselben Dimension sind. Daher betrachten wir die Hilfsfunktion  $h : W \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  mit

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ F(x, y) \end{bmatrix}$$

für alle  $(x, y) \in W$ . Mit  $F$  ist auch  $h$  stetig differenzierbar und hat in  $(x, y) \in W$  die Jacobi-Matrix

$$Dh(x, y) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Somit ist  $Dh(x_0, y_0)$  wegen (ii) invertierbar und aus dem Umkehrsatz folgt die Existenz einer offenen Umgebung  $\widetilde{W} \subseteq W$  von  $(x_0, y_0)$ , so dass die Einschränkung  $h : \widetilde{W} \rightarrow h(\widetilde{W})$  eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion  $g : h(\widetilde{W}) \rightarrow \widetilde{W}$  hat. Nach Lemma 3.9 gibt es offene Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $y_0$  mit  $U \times V \subseteq \widetilde{W}$ . Der Einfachheit halber nehmen wir o.B.d.A. an, dass  $\widetilde{W} = U \times V$  (andernfalls verkleinern wir  $\widetilde{W}$ ). Dann zerlegen wir  $g = (g_1, g_2)$  in zwei Komponentenfunktionen

$$g_1 : h(\widetilde{W}) \rightarrow U \text{ und } g_2 : h(\widetilde{W}) \rightarrow V.$$

Sei nun  $(a, b) \in h(\widetilde{W})$ , sowie  $x := g_1(a, b)$  und  $y := g_2(a, b)$ . Dann gilt  $(x, y) = g(a, b) \in \widetilde{W}$  und, da  $g$  die lokale Inverse von  $h$  ist, folgt

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = h(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ F(x, y) \end{bmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir

$$a = x = g_1(a, b) \quad \text{und} \quad b = F(x, y) = F(x, g_2(x, b)). \quad (3.10)$$

Nach Voraussetzung gilt  $(x_0, 0) = h(x_0, y_0) \in h(\widetilde{W})$ . Wegen der Offenheit von  $h(\widetilde{W})$  gilt dann auch  $(a, 0) \in h(\widetilde{W})$  für alle  $a \in U$  in einer kleinen Umgebung von  $x_0$ , o.B.d.A. bereits für alle  $a \in U$ . (Andernfalls verkleinern wir  $U$ .) Definiere nun  $f : U \rightarrow V$  durch  $f(x) := g_2(x, 0)$  für alle  $x \in U$ . Dann ist  $f$  stetig differenzierbar als Komposition  $f = g_2 \circ \ell$ , wobei  $\ell$  die lineare Abbildung  $\ell : x \mapsto (x, 0)$  bezeichnet, und wegen der Gleichung (3.10) gilt

$$0 = F(x, g_2(x, 0)) = F(x, f(x)).$$

Die Funktion  $f$  ist mit dieser Eigenschaft auch eindeutig bestimmt, denn ist  $x \in U$  und  $y \in V$ , so dass  $F(x, y) = 0$ , so folgt

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

und daher

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = g(h(x, y)) = g(x, 0) = \begin{bmatrix} x \\ g_2(x, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix},$$

also  $y = f(x)$ . Insbesondere gibt es also zu jedem  $x \in U$  genau ein  $y \in V$  mit  $F(x, y) = 0$ , was den Beweis von 1) abschließt.

Für den Beweis von 2) nutzen wir, dass wir bereits die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  gezeigt haben. Dann erhalten wir mit der Kettenregel aus der Gleichung

$$0 = F(x, f(x)) = (F \circ (Id, f))(x)$$

für alle  $x \in U$ , dass

$$\begin{aligned} 0 &= DF(x, f(x)) \cdot D(Id, f)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n \\ Df(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot Df(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$  für alle  $x \in U$ , denn aus dem Umkehrsatz folgt die Invertierbarkeit von  $Dh(x, y)$  und damit auch die von  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$  für alle  $(x, y) \in \widetilde{W}$ .  $\square$

**Beispiel 3.11** Wir untersuchen die Auflösbarkeit der Gleichung  $ye^{-x} = x$ . Dazu betrachten wir die (stetig differenzierbare) Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto ye^{-x} - x$  mit der Ableitung

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} -(ye^{-x} + 1) & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

- 1) *Auflösen nach y*: Wir versuchen  $y$  als Funktion von  $x$  darzustellen, d.h. wir suchen eine Funktion  $f$ , so dass  $F(x, f(x)) = 0$ . Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^{-x} \neq 0$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ist  $\frac{\partial F}{\partial y}$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  invertierbar und nach dem Satz über implizite Funktionen ist unsere Gleichung  $ye^{-x} = x$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  lokal nach  $x$  auflösbar. Tatsächlich können wir die gesuchte Funktion  $f$  sogar explizit darstellen, denn aus

$$0 = F(x, f(x)) = f(x)e^{-x} - x$$

folgt  $f(x) = e^x x$ . Damit erhalten wir eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h. die Gleichung ist nicht nur lokal, sondern sogar global nach  $y$  auflösbar. Die Formel für das “*implizierte Differenzieren*” aus Satz 3.10 liefert uns

$$f'(x) = Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) = e^x (f(x)e^{-x} + 1).$$

Da uns die Funktion allerdings *explizit* bekannt ist, können wir sie auch “*explizit differenzieren*” und erhalten

$$f'(x) = e^x x + e^x = e^x (x + 1) = e^x (f(x)e^{-x} + 1),$$

wobei wir im letzten Schritt die Identität  $f(x)e^{-x} = x$  ausgenutzt haben. In beiden Fällen erhalten wir also dasselbe Ergebnis.

- 2) *Auflösen nach  $x$* : Jetzt wollen wir  $x$  als Funktion von  $y$  darstellen, d.h. wir suchen eine Funktion  $\mathbf{W}$ , so dass  $F(\mathbf{W}(y), y) = 0$ . (Die ungewöhnliche Bezeichnung “ $\mathbf{W}$ ” für eine Funktion an dieser Stelle hat gute Gründe, von denen Sie in Kürze erfahren werden.) Nun gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -ye^{-x} - 1 \neq 0$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $ye^{-x} \neq -1$ , also z.B. für  $(x, y) = (0, 0)$ . Folglich ist die Gleichung  $ye^{-x} - x = 0$  lokal in  $(0, 0)$  nach  $x$  auflösbar. Umformen ergibt

$$y = e^x x,$$

d.h. wir erhalten  $x = \mathbf{W}(y)$ , wobei  $\mathbf{W}$  die sogenannte *Lambertsche  $W$ -Funktion* ist. Diese ist per Definition gerade die Umkehrfunktion von  $] -1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xe^x$ . Das Besondere an der Lambertschen  $\mathbf{W}$ -Funktion ist, dass sie nicht durch elementare Funktionen (vgl. Bemerkung 7.36 in Analysis I) dargestellt werden kann und uns daher in diesem Sinne nicht explizit vorliegt. Daher können wir sie leider auch nicht explizit differenzieren, um ihre Ableitungsfunktion zu bestimmen. Wir können sie jedoch implizit differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'(y) &= -\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{W}(y), y)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{W}(y), y) \\ &= \frac{1}{ye^{-\mathbf{W}(y)} + 1} \cdot e^{-\mathbf{W}(y)} = \frac{1}{y + e^{\mathbf{W}(y)}} = \frac{\mathbf{W}(y)}{\mathbf{W}(y)(y + e^{\mathbf{W}(y)})} \\ &= \frac{\mathbf{W}(y)}{y(\mathbf{W}(y) + 1)}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt  $y = e^{\mathbf{W}(y)} \mathbf{W}(y)$  ausgenutzt haben. Damit liegt uns die Ableitung allerdings auch nicht explizit, sondern nur in Form einer Differentialgleichung vor. Dies ist jedoch nicht überraschend, denn wenn wir die Ableitung von  $\mathbf{W}$  in expliziter Form vorliegen hätten, könnten wir möglicherweise durch Integration auch eine explizite Form der ursprünglichen Funktion  $\mathbf{W}$  erhalten, was nach unseren Vorbemerkungen aber leider nicht möglich ist.

Der Satz über implizite Funktionen ist einer der wichtigsten Sätze der Analysis, da er unter relativ schwachen Voraussetzungen nicht nur die Existenz von Funktionen liefert, für die sich keine explizite Konstruktionsvorschrift angeben lässt, sondern auch gleichzeitig eine Formel für die Ableitung dieser Funktionen enthält.

### 3.3 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Die beiden großen Sätze der mehrdimensionalen Differentialrechnung, die wir in den beiden vorigen Abschnitten kennengelernt haben, liefern uns ein wichtiges Werkzeug in der Behandlung nichtlinearer Gleichungssysteme. Doch was lässt sich eigentlich über die Struktur der Lösungsmengen dieser Gleichungssysteme sagen? Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme Unterräume (im homogenen Fall) bzw. affine Unterräume (im inhomogenen Fall) des  $\mathbb{R}^n$  sind. Liegt das nichtlineare Gleichungssystem in Form einer stetig differenzierbaren Funktion vor, die sich lokal durch ihre Ableitung linear approximieren lässt, ist es naheliegend sich zu fragen, ob sich die Lösungsmenge des Gleichungssystem “lokal wie ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  verhält”. Die Antwort darauf liefert der Begriff der *Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$*  mit dem wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen wollen. Als instruktives Beispiel betrachten wir zunächst die Kugeloberfläche der dreidimensionalen Einheitskugel, also die Einheitssphäre

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\},$$

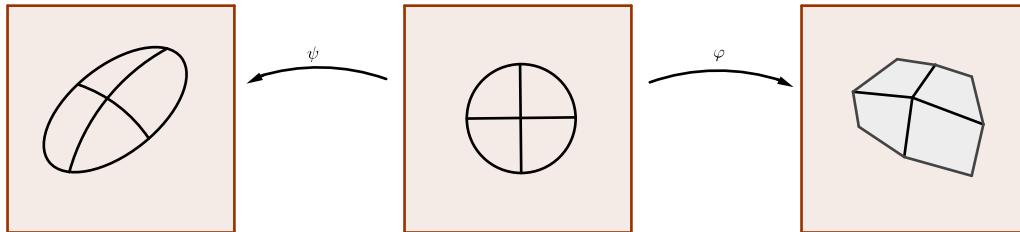
die wir als Lösungsmenge des nichtlinearen Gleichungssystem  $f(x) = 0$  mit der stetig differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$  interpretieren können. Jeder Punkt der Kugeloberfläche lässt sich eindeutig durch zwei Parameter charakterisieren, nämlich der “*geographischen Breite*” und der “*geographischen Länge*”. Wie Ihnen aus der Geographie bekannt ist, lassen sich mit diesem Wissen Teile der Erdoberfläche auf einer zweidimensionalen Karte in einem Atlas darstellen. Mathematisch formuliert bedeutet das, dass sich Teile der Einheitssphäre bijektiv auf eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  abbilden lässt, wobei diese Bijektion nicht beliebig ist, sondern noch ein paar schöne Eigenschaften hat, was anschaulich gesprochen dazu führt, dass eine Teilmenge unter dieser Bijektion nur etwas “verformt” wird. Für die präzise mathematische Definition dieser Eigenschaften müssen wir allerdings etwas mehr ausholen und lernen zunächst ein paar neue Begriffe kennen.

**Definition 3.12** 1) Seien  $X, Y$  metrische Räume. Eine Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  heißt Homöomorphismus, falls  $\varphi$  bijektiv ist und  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  beide stetig sind. In diesem Fall heißen die Mengen  $X$  und  $Y$  homöomorph.

2) Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  heißt Diffeomorphismus, falls  $\varphi$  bijektiv ist und  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  beide stetig differenzierbar sind. In diesem Fall heißen die Mengen  $U$  und  $V$  diffeomorph.

**Bemerkung 3.13** Ein Homöomorphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  ist sozusagen ein “Topologie-Isomorphismus” zwischen zwei metrischen Räumen  $X$  und  $Y$ , in dem Sinn, dass beide Räume “*topologisch äquivalent*” sind. Für alle Mengen  $U \subseteq X$  ist nämlich  $U$  genau dann offen in  $X$ , wenn  $\varphi(U)$  offen in  $Y$  ist. (Dies folgt sofort aus der Stetigkeit von  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  die bedingt, dass Urbilder offener Mengen offen sind.) Wir können daher die homöomorphen Mengen  $X$  und  $Y$  mit Hilfe der bijektiven Abbildung  $\varphi$  identifizieren.

**Beispiel 3.14** Die untenstehende Graphik illustriert die typische Wirkung von Homöomorphismen und Diffeomorphismen am Beispiel einer kreisförmigen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ . Während ein Homöomorphismus  $\varphi$  (rechte Seite) die Kreisscheibe bijektiv auf eine Teilmenge abbildet, deren Rand auch Ecken haben kann, ist das Bild eines Diffeomorphismus  $\psi$  (linke Seite) deutlich “glatter”.



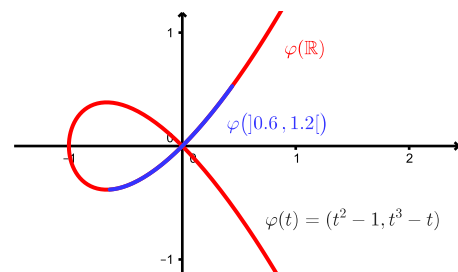
Wenn wir an “möglichst glatten Verformungen” von Teilmengen durch bijektive Abbildungen interessiert sind, dann veranschaulicht Beispiel 3.14, dass der Begriff des Homöomorphismus noch zu schwach ist. Der Begriff des Diffeomorphismus ist auf der anderen Seite wiederum zu stark für die Beschreibung einer Untermannigfaltigkeit, denn wegen Bemerkung 3.1 kann es keinen Diffeomorphismus von einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  auf eine Teilmenge einer Kugeloberfläche im  $\mathbb{R}^3$  geben, da Definitions- und Wertebereich offene Teilmengen von Banachräumen derselben Dimension sein müssen. (Dabei macht uns hier nicht nur das Problem der unterschiedlichen Dimensionen zu schaffen, sondern auch die Tatsache, dass außer der leeren Menge keine Teilmenge einer Kugeloberfläche eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  sein kann.) Daher wählen wir als Kompromiss den Zugang über “*immersive Homöomorphismen*”, d.h. Homöomorphismen, die zusätzlich noch eine *Immersion* sind.

**Definition 3.15** Sei  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen. Eine Abbildung  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Immersion, falls  $\varphi$  stetig differenzierbar ist und  $D\varphi(t)$  für alle  $t \in T$  injektiv ist, d.h. wenn  $\text{Rang } D\varphi(t) = k$  für alle  $t \in T$  gilt.

**Beispiel 3.16** 1) *Reguläre Kurven*, d.h. Abbildungen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist, sind Immersionen. Ein spezielles Beispiel ist durch die Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$  gegeben. Wir erhalten

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

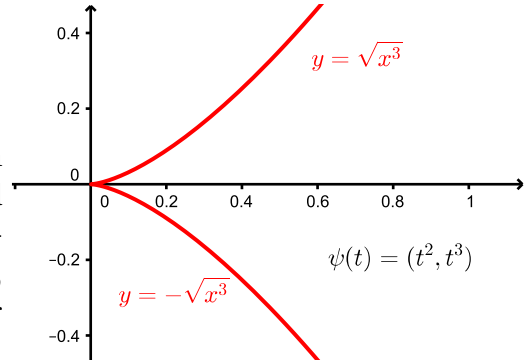
für alle  $t \in \mathbb{R}$  und damit ist  $\varphi$  eine Immersion. Beachten Sie jedoch, dass  $\varphi$  nicht injektiv und daher nicht global umkehrbar ist. Schränken wir  $\varphi$  jedoch z.B. auf das Intervall  $]0.6, 1.2[$  ein (das Bild entspricht dann dem blauen Bereich in der Skizze), so ist  $\varphi$  dort lokal umkehrbar und, da die Umkehrfunktion offenbar ebenfalls stetig ist, dort lokal ein Homöomorphismus.



- 2) Ein Beispiel für eine nicht-reguläre Kurve ist die sogenannte *Neilsche Parabel*, die durch die Vorschrift

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^2, t^3)$$

gegeben ist. Das Bild dieser Kurve setzt sich aus den beiden Parabelästen  $y = \sqrt{x^3}$  und  $y = -\sqrt{x^3}$  zusammen. In diesem Fall handelt es sich folgerichtig um keine Immersion, denn wir erhalten  $\psi'(t) = (2t, 3t^2)$  und daher  $\psi'(0) = (0, 0)$ .



Teil 2) aus Beispiel 3.16 veranschaulicht, warum wir auf die Injektivität der Ableitung bei Immersionen nicht verzichten sollten: Interessanterweise befindet sich der “Knick” in der Neilschen Parabel genau an der Stelle, in der die Ableitung nicht den vollen Rang hat. Der folgende Satz besagt, dass eine Immersion überall lokal ein Homöomorphismus ist.

**Satz 3.17** Sei  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion. Dann gibt es zu jedem  $t \in T$  eine offene Umgebung  $\tilde{T} \subseteq T$  von  $t$ , so dass die Einschränkung  $\varphi|_{\tilde{T}} : \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T})$  ein Homöomorphismus ist. (Hierbei sind  $\tilde{T}$  und  $\varphi(\tilde{T})$  mit der durch  $\mathbb{R}^k$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  induzierten Metrik bzw. Spurmatrike ausgestattet, vgl. Teil 5) von Beispiel 1.5).

**Beweis:** Falls  $k = n$  gilt, so folgt dies sofort aus dem Umkehrsatz, da es dann eine offene Umgebung  $\tilde{T} \subseteq T$  von  $t$  gibt, auf der  $\varphi$  bijektiv mit stetiger (sogar stetig differenzierbarer) Umkehrfunktion ist. Sei also im Folgenden  $k < n$  und sei  $t \in T$  beliebig. Wegen  $\text{Rang}(D\varphi(t)) = k$  gibt es  $k$  Zeilen von  $D\varphi(t) \in \mathbb{R}^{n,k}$ , die linear unabhängig sind. O.B.d.A. seien dies die ersten  $k$  Zeilen. (Ansonsten betrachten wir die Immersion  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  mit  $\psi_i = \varphi_{\sigma(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , für eine geeignete Permutation  $\sigma \in S_n$ .) Schreibe nun  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \hat{\varphi})$  mit  $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  und  $\hat{\varphi} = (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)$ . Dann gilt unter Benutzung der Notation (3.9), dass

$$\det D\tilde{\varphi}(t) = \det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0.$$

Daher existiert nach dem Umkehrsatz Satz 3.3 eine offene Umgebung  $\tilde{T} \subseteq T$  von  $t$ , so dass  $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{T})$  bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion  $\tilde{\psi} : \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \rightarrow \tilde{T}$  besitzt. Mit  $\tilde{\varphi}$  ist auch  $\varphi$  injektiv und daher ist  $\varphi : \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T})$  bijektiv. Die Umkehrfunktion ist  $\psi : \varphi(\tilde{T}) \rightarrow \tilde{T}$  mit

$$\psi(y, z) := \tilde{\psi}(y) \quad \text{für } (y, z) \in \varphi(\tilde{T}) \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k},$$

denn für alle  $u \in \tilde{T}$  gilt, dass

$$\psi(\varphi(u)) = \psi(\tilde{\varphi}(u), \hat{\varphi}(u)) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(u)) = u.$$

Offenbar ist mit  $\tilde{\psi}$  auch  $\psi$  stetig und daher ist  $\varphi : \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T})$  ein Homöomorphismus.  $\square$



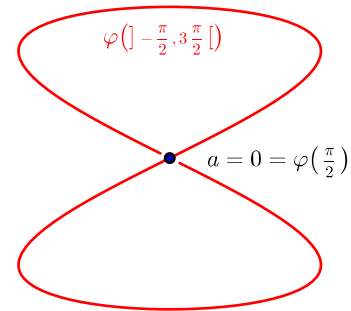
**Beispiel 3.18** 1) Betrachten wir noch einmal die Immersion  $\varphi$  aus Beispiel 3.16, so erhalten wir für  $t = 1$  die Umgebung  $\tilde{I} = ]0.6, 1.2[$ , so dass  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow \varphi(\tilde{I})$  ein Homöomorphismus ist. Dabei ist  $\varphi(\tilde{I})$  durch den blauen Bereich der Kurve gegeben. Dieser “verhält sich wie” das Intervall  $]0.6, 1.2[$  in dem Sinn, dass  $\tilde{I}$  stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion auf  $\varphi(\tilde{I})$  abgebildet werden kann. Anschaulich gesprochen haben wir mit  $\varphi(\tilde{I})$  ein Kurvenstück gegeben, dass sich “zu einem Intervall glattwalzen lässt”.

- 2) Genauso wie beim Umkehrsatz erhalten wir auch hier stets nur eine lokale Aussage, selbst dann, wenn die gegebene Immersion injektiv ist.

Als Beispiel betrachten wir die reguläre Kurve

$$\varphi : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Dann ist  $\varphi$  injektiv und auch eine Immersion, jedoch ist  $\varphi : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \rightarrow \varphi(]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[)$  kein Homöomorphismus, da die Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  im Punkt  $a = 0 = \varphi(\frac{\pi}{2})$  nicht stetig ist. (Klar?)



Nach diesen Vorbereitungen haben wir endlich die notwendigen Hilfsmittel zusammengestellt, um den Begriff der *Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$*  definieren zu können.

**Definition 3.19** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1)  $M$  heißt  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , falls es zu jedem  $a \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $a$ , sowie eine offene Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine Immersion  $\varphi : T \rightarrow M$  gibt, so dass

$$\varphi(T) = M \cap U$$

gilt (d.h.  $\varphi(T)$  ist offen in  $M$ ) und  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T)$  ein Homöomorphismus ist.

- 2)  $\varphi : T \rightarrow M$  wie in 1) heißt Parameterdarstellung (auch lokales Koordinatensystem) von  $M$  um  $a$ . Ist  $(t_1, \dots, t_k) \in T$  mit  $\varphi(t_1, \dots, t_k) = a$ , so heißen  $t_1, \dots, t_k$  die lokalen Koordinaten von  $a$  bzgl.  $\varphi$ . (Die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1} : \varphi(T) \rightarrow T$  bezeichnet man auch als eine Karte von  $M$ .)

**Beispiel 3.20** 1) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $U$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , denn für jedes  $a \in U$  ist  $\text{Id}_U : U \rightarrow U$  eine Parameterdarstellung von  $U$  um  $a$ .

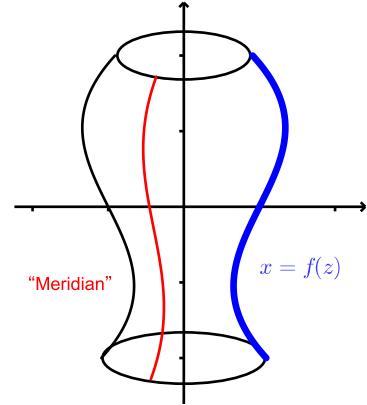
- 2) Sei  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion. Dann folgt sofort aus Satz 3.17, dass es zu jedem  $t \in T$  eine offene Umgebung  $\tilde{T} \subseteq T$  von  $t$  gibt, so dass  $\varphi(\tilde{T}) \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. (Handelt es sich bei dem Bild  $\varphi(\mathbb{R})$  der Immersion aus Beispiel 3.16 um eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ ?)

- 3) *Rotationsflächen im  $\mathbb{R}^3$* . Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall sowie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, deren Graphen wir als “ $x = f(z)$ ” in der  $x, z$ -Ebene betrachten. Durch Rotation dieses Graphen um die  $z$ -Achse (siehe Skizze) entsteht eine Fläche  $M$  als Bild der Abbildung

$$\psi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} f(t) \cos \phi \\ f(t) \sin \phi \\ t \end{bmatrix}.$$

Für deren Ableitung erhalten wir

$$D\psi(t, \phi) = \begin{bmatrix} f'(t) \cos \phi & -f(t) \sin \phi \\ f'(t) \sin \phi & f(t) \cos \phi \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



und offenbar gilt  $\text{Rang } D\psi(t, \alpha) = 2$  genau dann, wenn  $f(t) \neq 0$ . Folglich ist  $\psi$  genau dann eine Immersion, wenn der Graph von  $f$  die  $z$ -Achse nicht schneidet. Allerdings ist  $\psi$  nicht injektiv und bildet daher  $I \times \mathbb{R}$  nicht homöomorph auf  $M$  ab. Betrachten wir jedoch für ein festes  $\beta \in \mathbb{R}$  die Einschränkung

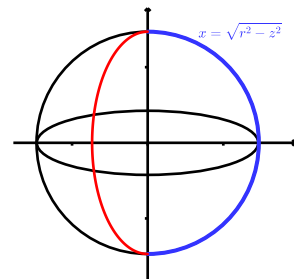
$$\psi_\beta := \psi|_{I \times ]\beta, \beta + 2\pi[} : I \times ]\beta, \beta + 2\pi[ \rightarrow \psi(I \times ]\beta, \beta + 2\pi[) \subseteq M,$$

so ist dies ein Homöomorphismus (was wir an dieser Stelle allerdings nicht nachweisen werden). Somit ist  $\psi$  eine Parameterdarstellung für alle  $x \in \psi(I \times ]\beta, \beta + 2\pi[)$ , wobei man die letztere Menge erhält, indem man aus der Rotationsfläche  $M$  den “Meridian”  $\psi(I \times \{\beta\})$  entfernt. (In der Graphik ist dieser rot eingezeichnet.) Für alle Punkte des Meridians kann z.B.  $\psi_{\beta+\pi}$  als Parameterdarstellung gewählt werden. Daher ist  $M$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

- 4) Die Sphäre  $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$  vom Radius  $r > 0$  ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Parameterdarstellungen erhalten wir analog wie in 3) durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f : ]0, r[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sqrt{r^2 - t^2}.$$

um die  $z$ -Achse. Für jedes  $\beta \in \mathbb{R}$  ist dann



$$\psi_\beta : ]-r, r[ \times ]\beta, \beta + 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{r^2 - t^2} \cos \phi \\ \sqrt{r^2 - t^2} \sin \phi \\ t \end{bmatrix}$$

eine Parameterdarstellung für alle Punkte von  $M$  mit Ausnahme eines Meridians. Allerdings sind die Wurzelterme in dieser Parameterdarstellung doch recht störend.

Man wählt daher an dieser Stelle eine andere Parametrisierung und ersetzt  $t$  einfach durch  $r \cos \theta$ . Damit erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\widehat{\psi}_\beta : ]0, \pi[ \times ]\beta, \beta + 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}$$

Der Parameter  $\theta$  entspricht hierbei der “*Poldistanz*” (nicht jedoch der “*geographischen Breite*”, diese wäre durch  $\frac{\pi}{2} - \theta$  gegeben), während  $\phi$  der “*geographischen Länge*” entspricht. “*Nord-*” und “*Südpol*”, d.h. die Punkte  $(0, 0, r)$  bzw.  $(0, 0, -r)$  werden von keiner der Parameterdarstellungen  $\psi_\beta$  oder  $\widehat{\psi}_\beta$  erfasst. Für diese beiden Ausnahmepunkte erhalten wir Parameterdarstellungen z.B. mit Hilfe der Rotation von Funktionsgraphen in der  $x, y$ -Ebene um die  $x$ -Achse.

- 5) Jeder  $k$ -dimensionale affine Unterraum  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Gilt nämlich

$$M = v + \mathcal{W} := \{v + w \mid w \in \mathcal{W}\}$$

wobei  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ist und ist  $(v_1, \dots, v_k)$  eine Basis von  $\mathcal{W}$ , so erhalten wir durch

$$\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow M, \quad (t_1, \dots, t_k) \mapsto v + \sum_{j=1}^k t_j v_j$$

für jedes  $a \in M$  eine Parameterdarstellung von  $M$  um  $a$ , denn wie sie leicht überprüfen gilt  $\text{Rang } D\varphi(t) = k$  für alle  $t \in \mathbb{R}^k$  und offenbar ist  $\varphi$  bijektiv und  $\varphi^{-1}$  ist stetig, d.h.  $\varphi$  ist ein Homöomorphismus.

Die Definition von Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  wie in Definition 3.19 ist für die weitere Theorie sehr nützlich, in manchen Situationen allerdings auch sehr unhandlich. Daher ist es zweckmäßig auf alternative Darstellungen ausweichen zu können. Welche anderen Möglichkeiten man dabei in Betracht ziehen kann, wollen wir uns am Beispiel der Einheitssphäre klarmachen, die wir im vorigen Beispiel als zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  entlarvt haben.

**Beispiel 3.21** Wir betrachten die Einheitssphäre  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ .

- 1) *Beschreibung durch eine Gleichung.* Bereits in der Mengenbeschreibung ist die Gleichung  $1 = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  enthalten. Der Nachteil bei dieser Darstellung ist allerdings wieder einmal der unhandliche Wurzelausdruck. Daher betrachten wir stattdessen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

Dann ist  $f$  stetig differenzierbar und offenbar gilt  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$ . Außerdem beobachten wir, dass für alle  $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$  gilt, dass

$$Df(x) = 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

- 2) *Beschreibung durch Graphen.* Sei  $a = (a_1, a_2, a_3) \in S^2$  mit  $a_3 > 0$ . Durch Auflösen der Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  können wir  $x_3$  lokal um  $a$  als Funktion von  $x_1$  und  $x_2$  darstellen. Es gilt:

$$x_3 = g(x_1, x_2) := \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Definieren wir nun die offenen Mengen  $U' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  und  $U'' := ]0, \infty[$ , so erhalten wir durch

$$S^2 \cap (U' \times U'') = \{(x_1, x_2, x_3) \in U' \times U'' \mid x_3 = g(x_1, x_2)\}$$

eine lokale Darstellung von  $S^2$  um  $a$  als Graph der Funktion  $g$ . Analog funktioniert dies um Punkte  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  mit  $\hat{x}_3 < 0$ . Ist dagegen  $\hat{x}_3 = 0$ , so gilt entweder  $\hat{x}_1 \neq 0$  oder  $\hat{x}_2 \neq 0$ , so dass wir  $S^2$  lokal als Graph einer Funktion von  $x_2, x_3$  bzw. von  $x_1, x_3$  darstellen können.

Die Beobachtung des vorangegangenen Beispiels lassen sich verallgemeinern, wobei wir im folgenden Satz noch eine weitere äquivalente Bedingung zur Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  hinzufügen.

**Satz 3.22** *Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- 1)  $M$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .  
 2) **(Darstellung durch Flachmacher).** Zu jedem  $a \in M$  gibt es offene Mengen  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$ , sowie einen Diffeomorphismus  $\Psi : U \rightarrow V$ , so dass

$$\Psi(M \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\} \cap V.$$

- 3) **(Darstellung durch Gleichungen).** Zu jedem  $a \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $a$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  mit der Eigenschaft

$$\text{Rang } Df(x) = n - k$$

für alle  $x \in M \cap U$ , so dass

$$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

- 4) **(Darstellung als Graph).** Zu jedem  $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$  gibt es (ggf. nach Umm Nummerierung der Koordinaten) offene Umgebungen  $U' \subseteq \mathbb{R}^k$  von  $a' := (a_1, \dots, a_k)$  und  $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$  von  $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$  sowie eine stetig differenzierbare Abbildung  $g : U' \rightarrow U''$ , so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}.$$

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)”: Sei  $a \in M$ . Dann gibt es eine offene Menge  $\widehat{T} \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine Immersion  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \widehat{T} \rightarrow \varphi(\widehat{T}) \subseteq M$ , so dass  $a \in \varphi(\widehat{T})$  gilt und  $\varphi(\widehat{T})$  offen in  $M$  ist. Im Beweis von Satz 3.17 haben wir gezeigt, dass es dann (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten) eine offene Menge  $T \subseteq \widehat{T}$  gibt, so dass  $a \in \varphi(T)$  und so dass

$$\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : T \rightarrow \tilde{\varphi}(T) \subseteq \mathbb{R}^k$$

ein Diffeomorphismus ist. Wir erweitern  $\tilde{\varphi}$  auf  $T \times \mathbb{R}^{n-k}$  durch

$$\Phi : T \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_k) \\ \varphi_{k+1}(x_1, \dots, x_k) + x_{k+1} \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_k) + x_n \end{bmatrix}.$$

Dann ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus, denn wie Sie leicht nachrechnen, ist

$$\Psi : \tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow T \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}^{-1}(y_1, \dots, y_k) \\ y_{k+1} - \varphi_{k+1}(\tilde{\varphi}^{-1}(y_1, \dots, y_k)) \\ \vdots \\ y_n - \varphi_n(\tilde{\varphi}^{-1}(y_1, \dots, y_k)) \end{bmatrix}$$

die Umkehrfunktion von  $\Phi$  und diese ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen selbst stetig differenzierbar. Speziell gilt

$$\Phi(T \times \{0\}) = \varphi(T) \subseteq M.$$

Da  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi$  ein Homöomorphismus, also  $\varphi^{-1}$  stetig ist, ist insbesondere  $\varphi(T)$  offen in  $\varphi(\widehat{T})$ , also auch in  $M$ , d.h. es gibt eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit

$$M \cap U = \varphi(T).$$

O.B.d.A. sei  $U \subseteq \tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k}$ . (Andernfalls ersetze  $U$  durch  $U \cap (\tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k})$ , denn  $\tilde{\varphi}(T)$  ist offen im  $\mathbb{R}^k$ , da  $\tilde{\varphi}$  ein Diffeomorphismus ist.) Setze nun  $V := \Phi^{-1}(U)$ . Dann ist  $\Psi : U \rightarrow V$  immer noch ein Diffeomorphismus. Außerdem gilt  $V \subseteq T \times \mathbb{R}^{n-k}$  und

$$\Psi(M \cap U) = \Psi(\varphi(T)) = T \times \{0\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\} \cap V.$$

“2)  $\Rightarrow$  3)”: Sei  $a \in M$ . Dann gibt es nach 2) einen Diffeomorphismus  $\Psi : U \rightarrow V$ , wobei  $U$  eine offene Umgebung von  $a$  ist und  $\Psi(M \cap U) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\} \cap V$  gilt. Mit  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$  erhalten wir daraus

$$M \cap U = \{x \in U \mid \Psi_{k+1}(x) = \dots = \Psi_n(x) = 0\}.$$

Setze also  $f_i := \Psi_{k+i}$  für  $i = 1, \dots, n-k$  und  $f = (f_1, \dots, f_{n-k})$ . Da  $\Psi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $D\Psi(x)$  nach Bemerkung 3.1 für alle  $x \in U$  invertierbar und daher gilt für alle  $x \in U$ , dass

$$\text{Rang } Df(x) = \text{Rang } \frac{\partial(\Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = n - k.$$

“3)  $\Rightarrow$  4)”: Sei  $a \in M$  und sei  $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  wie in 3). Wegen  $\text{Rang } Df(x) = n-k$  für alle  $x \in U$  hat die Matrix  $Df(a)$  insgesamt  $n-k$  linear unabhängige Spalten. O.B.d.A. seien dies die Spalten  $k+1, \dots, n$ . (Andernfalls nummerieren wir die Variablen um.) Somit hat  $Df(a)$  die Form

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x'}(a) & \frac{\partial f}{\partial x''}(a) \end{bmatrix}$$

mit  $x' = (x_1, \dots, x_k)$  und  $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ , wobei  $\frac{\partial f}{\partial x''}(a)$  invertierbar ist. Daher lässt sich der Satz 3.10 über implizite Funktionen anwenden und es folgt die Existenz von offenen Umgebungen  $U' \subseteq \mathbb{R}^k$  von  $a'$  und  $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$  von  $a''$ , so dass zu jedem  $x' \in U'$  genau ein  $x'' \in U''$  existiert mit  $f(x', x'') = 0$ . Insbesondere gibt es eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U' \rightarrow U''$ , so dass  $x'' = g(x')$  genau dann gilt, wenn  $f(x', x'') = 0$ . Damit erhalten wir

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}.$$

“4)  $\Rightarrow$  1)”: Sei  $a \in M$  und seien  $U', U''$  und  $g$  wie in 4). Setze  $T := U'$ . Dann ist

$$\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M \cap (U' \times U''), \quad t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ g(t) \end{bmatrix}$$

eine Immersion, denn es gilt

$$D\varphi(t) = \begin{bmatrix} I_k \\ Dg(t) \end{bmatrix},$$

d.h.  $D\varphi(t)$  hat vollen Rang für alle  $t \in T$ . Ferner ist  $\varphi$  offenbar injektiv und die Umkehrfunktion  $\varphi^{-1} : \varphi(T) \rightarrow T$  ist ebenso offenbar stetig. Folglich ist  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T)$  ein Homöomorphismus und damit auch eine Parameterdarstellung von  $M$  um den Punkt  $a$ .  $\square$

**Bemerkung 3.23** Die Darstellungsmöglichkeit 3) aus Satz 3.22 verdeutlicht, dass Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  in natürlicher Weise als Lösungsmengen nichtlinearer Gleichungssysteme auftreten. Ist nämlich ein solches Gleichungssystem in der Form  $f(x) = 0$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, gegeben und gilt  $\text{Rang } Df(x) = n - k$  für alle  $x \in U$ , so ist  $M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

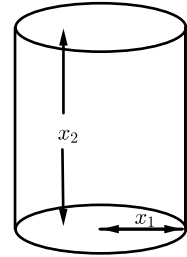
Diese Erkenntnis verdeutlicht auch noch einmal unsere ursprüngliche Interpretation einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , dass sie sich lokal “wie der  $\mathbb{R}^k$  verhält”. Betrachten wir nämlich ein lineares Gleichungssystem der Form  $Ax = 0$  mit  $A \in \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$  und  $\text{Rang } A = n - k$ , so ist aus der linearen Algebra bekannt, dass die Lösungsmenge  $\text{Kern}(A)$  des linearen Gleichungssystems  $Ax = 0$  ein  $k$ -dimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und daher isomorph zum  $\mathbb{R}^k$  ist. Dass sich eine stetig differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  lokal um einen Punkt  $x_0 \in U$  durch eine lineare Abbildung (nämlich  $Df(x_0)$ ) approximieren lässt, können wir nun so argumentieren, dass sie sich nahe  $x_0$  “wie eine lineare Funktion verhält”. Dementsprechend “verhält sich” die Lösungsmenge des nichtlinearen Gleichungssystems  $f(x) = 0$  wie ein  $k$ -dimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.4 Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen

Eine wichtige Anwendung unserer bisherigen Erkenntnisse dieses Kapitels ist die Lösung von Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen. Dazu betrachten wir als Motivation das folgende Beispiel.

**Beispiel 3.24** Ein Hersteller möchte zylinderförmige Dosen für Katzenfutter herstellen. Eine einzelne Dose soll das Volumen  $V \in \mathbb{R}$  besitzen. Um Materialkosten zu sparen soll der Zylinder dabei so konstruiert werden, dass seine Oberfläche minimal ist.

Es sei  $x_1$  der Radius der Grundfläche des Zylinders und  $x_2$  seine Höhe. Dann ist die Mantelfläche des Zylinders durch  $2\pi x_1 x_2$  und seine Boden- und Deckelfläche jeweils durch  $\pi x_1^2$  gegeben. Das Volumen des Zylinders ist dann  $\pi x_1^2 x_2$ . Da letzteres den vorgegebenen Wert  $V$  annehmen soll, können wir unser Problem nun wie folgt mathematisch formulieren: *Minimiere die Funktion*



$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2$$

unter der Nebenbedingung  $g(x_1, x_2) := \pi x_1^2 x_2 - V = 0$ .

In diesem speziellen Fall ist die Aufgabe auch ohne weitere Hilfsmittel möglich, da die Nebenbedingung  $g(x_1, x_2) = 0$  explizit nach  $x_2$  auflösbar ist. Dann können wir  $x_2$  in  $f(x_1, x_2)$  einsetzen und erhalten eine Minimierungsaufgabe für eine Funktion einer Veränderlichen ohne Nebenbedingung. Im Allgemeinen ist diese Vorgehensweise allerdings nicht immer möglich, weshalb wir in diesem Abschnitt ein neues Lösungsverfahren entwickeln werden.

**Definition 3.25** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar, wobei  $m \leq n$ .

1) Wir nennen

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen.

2)  $\mathcal{F} := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$  heißt zulässiger Bereich<sup>3</sup> von (3.11).

3) Ein Punkt  $x \in \mathcal{F}$  heißt regulär, falls  $\text{Rang } Dg(x) = m$ .

4) Ein Punkt  $x^* \in \mathcal{F}$  heißt lokale Lösung von (3.11) oder auch Stelle eines lokalen Minimums von (3.11), falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

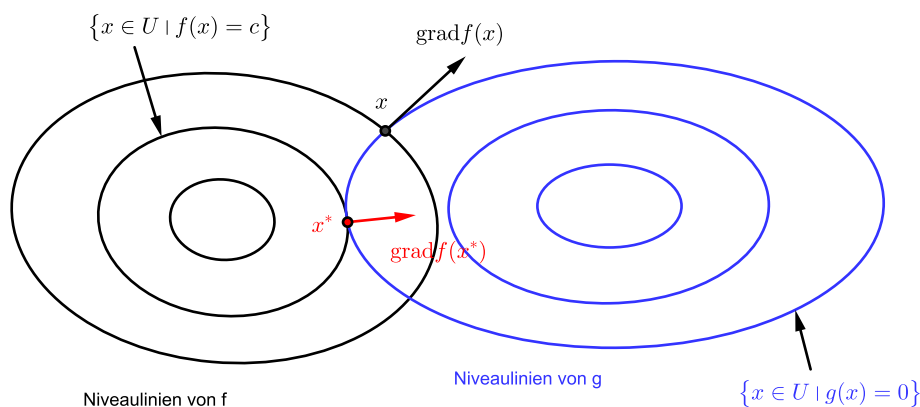
$$f(x^*) \leq f(x)$$

für alle  $x \in \mathcal{F}$  mit  $\|x - x^*\| < \varepsilon$  gilt.

<sup>3</sup>Die übliche Bezeichnung mit  $\mathcal{F}$  erklärt sich dadurch, dass “zulässig” im Englischen mit “feasible” übersetzt wird.

**Bemerkung 3.26** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 3.25 sei  $x^* \in \mathcal{F}$  regulär. Wegen  $\text{Rang } Dg(x^*) = m$  und der stetigen Differenzierbarkeit von  $g$  gibt es dann eine offene Umgebung  $\tilde{U} \subseteq U$  von  $x^*$ , so dass  $\text{Rang } Dg(x) = m$  für alle  $x \in \tilde{U}$  gilt. (Übung.) Damit ist  $M := \mathcal{F} \cap \tilde{U}$  nach Teil 3) von Satz 3.22 eine  $(n - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

Um eine Idee für ein Lösungsverfahren für das Problem 3.11 zu finden, betrachten wir einmal den Spezialfall  $n = 2$  und  $m = 1$  etwas genauer, d.h. wir betrachten  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und stetig differenzierbare Funktionen  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir uns mit Hilfe von Niveaumengen (dies sind in diesem Fall typischerweise Linien) vorstellen können, vgl. Definition 2.67.



Insbesondere ist  $\mathcal{F} = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$  eine dieser Niveaumengen. Anschaulich ist klar: Ist  $x \in \mathcal{F}$  und steht  $\text{grad } f(x)$  nicht senkrecht auf  $\mathcal{F}$ , so gibt es entlang der Niveaulinie  $\mathcal{F}$  in einer Richtung einen Anstieg von  $f$ , in der anderen Richtung dagegen einen Abfall. In solchen Punkten kann also kein lokales Minimum vorliegen, sondern höchstens in einem Punkt  $x^* \in U$ , in dem der Gradient von  $f$  senkrecht auf  $\mathcal{F}$  steht. Da der Gradient von  $g$  in  $x^*$  ebenfalls senkrecht auf  $\mathcal{F}$  steht, bedeutet das in diesem Fall (da wir uns im  $\mathbb{R}^2$  befinden), dass  $\text{grad } f(x^*)$  und  $\text{grad } g(x^*)$  parallel sein müssen, d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\text{grad } f(x^*) = \lambda \text{grad } g(x^*)$$

gilt. Diese Beobachtung werden wir nun im Folgenden formalisieren und präzisieren.

**Definition 3.27** Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $a \in M$ .

- 1) Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt Tangentialvektor an  $M$  in  $a$ , falls es  $\varepsilon > 0$  und eine stetig differenzierbare Kurve  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  gibt, so dass

$$\alpha(0) = a \quad \text{und} \quad \alpha'(0) = v.$$

- 2) Die Menge  $\mathcal{T}_a(M) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}$  heißt Tangentialraum von  $M$  in  $a$ .
- 3) Die Menge  $\mathcal{N}_a(M) := \mathcal{T}_a(M)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \perp v \text{ für alle } v \in \mathcal{T}_a(M)\}$  heißt Normalenraum von  $M$  in  $a$ . Ihre Elemente heißen Normalenvektoren von  $M$  in  $a$ .

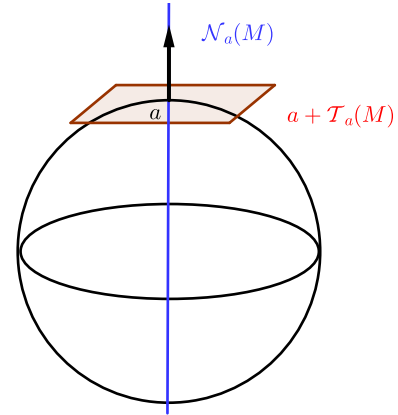


**Beispiel 3.28** 1) Sei  $M = S^2$  die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$  und sei  $a = (0, 0, 1) \in S^2$  der “Nordpol”. Dann gilt (Übung):

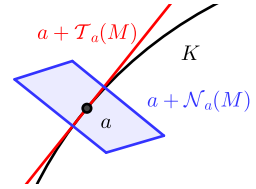
$$\mathcal{T}_a(M) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{und } \mathcal{N}_a(M) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Offenbar handelt es sich bei  $\mathcal{T}_a(M)$  und  $\mathcal{N}_a(M)$  um Unterräume des  $\mathbb{R}^3$ . Betrachten wir den affinen Raum  $E = a + \mathcal{T}_a(M)$ , so erhalten wir eine *Tangentialebene* von  $M$  in  $a$ . Analog ist  $a + \mathcal{N}_a(M)$  ein affiner Raum, der senkrecht auf  $M$  steht. In diesem speziellen Fall ist sogar  $\mathcal{N}_a(M) = a + \mathcal{N}_a(M)$ , da  $a$  selbst in  $\mathcal{N}_a(M)$  liegt.



- 2) Sei nun  $K$  das Bild einer regulären Kurve  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist. In diesem Fall ist der Tangentialraum ein eindimensionaler Unterraum und der affine Raum  $a + \mathcal{T}_a(M)$  entspricht einer Tangente an die Kurve  $K$  im Punkt  $a$ . Andererseits ist  $\mathcal{N}_a(M)$  ein zweidimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  und der affine Raum  $a + \mathcal{N}_a(M)$  ist “senkrecht” zur Kurve  $K$ .



In beiden Fällen beobachten wir, dass  $\dim \mathcal{T}_a(M) = k$  und  $\dim \mathcal{N}_a(M) = n - k$  gilt, wenn  $k$  die Dimension der Untermannigfaltigkeit  $M$  ist.

**Satz 3.29** Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $a \in M$ . Dann gilt:

- 1) Der Tangentialraum  $\mathcal{T}_a(M)$  von  $M$  in  $a$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $k$ . Ist  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi : T \rightarrow M$  mit  $a \in \varphi(T)$  eine Parameterdarstellung von  $M$  um  $a$  und ist  $t^* := \varphi^{-1}(a)$ , dann ist durch die Spalten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t^*), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t^*)$$

von  $D\varphi(t^*)$  eine Basis von  $\mathcal{T}_a(M)$  gegeben.

- 2) Der Normalenraum  $\mathcal{N}_a(M)$  von  $M$  in  $a$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - k$ . Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $a$  und  $g = (g_1, \dots, g_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  stetig differenzierbar, so dass  $\text{Rang } Dg(x) = n - k$  für alle  $x \in U$  und

$$M \cap U = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_{n-k}(x) = 0\}$$

gilt, so ist durch die Zeilen

$$\text{grad } g_1(a), \dots, \text{grad } g_{n-k}(a)$$

von  $Dg(a)$  eine Basis von  $\mathcal{N}_a(M)$  gegeben.

**Beweis:** Aus der Linearen Algebra ist bekannt (falls nicht: Übung), dass  $\mathcal{N}_a(M)$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ist und dass

$$\mathcal{T}_a(M) \subseteq \mathcal{N}_a(M)^\perp$$

gilt. Gleichheit liegt vor, wenn  $\mathcal{T}_a(M)$  bereits selbst ein Vektorraum ist. Wir definieren nun

$$\mathcal{V} := \text{span} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t^*), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t^*) \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \text{span} \left( \text{grad } g_1(a), \dots, \text{grad } g_{n-k}(a) \right).$$

Dann gilt  $\dim \mathcal{V} = k$  und  $\dim \mathcal{W} = n - k$ , da  $D\varphi(t^*) \in \mathbb{R}^{n,k}$  und  $Dg(a) \in \mathbb{R}^{n-k,n}$  vollen Rang und somit linear unabhängige Spalten bzw. Zeilen haben. Es reicht nun zu zeigen, dass  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_a(M)$  und  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{N}_a(M)$  gilt, denn dann folgt

$$n - k = \dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{N}_a(M) = \dim \mathcal{T}_a(M)^\perp \leq \dim \mathcal{V}^\perp = n - k$$

und daher gilt  $\mathcal{W} = \mathcal{N}_a(M)$ . Wegen  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_a(M) \subseteq \mathcal{N}_a(M)^\perp$  folgt dann insbesondere aus  $\dim \mathcal{V} = k = \dim \mathcal{N}_a(M)^\perp$ , dass  $\mathcal{V} = \mathcal{T}_a(M) = \mathcal{N}_a(M)^\perp$  gilt. Speziell ist damit  $\mathcal{T}_a(M)$  ein Vektorraum.

“ $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_a(M)$ ”: Sei  $v \in \mathcal{V}$  beliebig. Dann gibt es Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  mit

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t^*).$$

Wir definieren nun die Kurve  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  durch

$$\alpha(s) := \varphi(t^* + s \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_k)),$$

wobei wir  $\varepsilon > 0$  so klein wählen, dass  $t^* + s(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in U$  für alle  $s \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  gilt. Dann gilt  $\alpha(0) = a$  und mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$\alpha'(0) = D\varphi(t^*) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t^*) = v.$$

Folglich ist  $v$  ein Tangentialvektor von  $M$  in  $a$ , d.h. es gilt  $v \in \mathcal{T}_a(M)$ .

“ $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{N}_a(M)$ ”: Da wir bereits wissen, dass  $\mathcal{N}_a(M)$  ein Vektorraum ist, reicht es zu zeigen, dass  $\text{grad } g_j(a) \in \mathcal{N}_a(M)$  für  $j = 1, \dots, n - k$  gilt. Seien also  $j \in \{1, \dots, n - k\}$  und  $v \in \mathcal{T}_a(M)$  beliebig. Dann gibt es nach Definition von  $\mathcal{T}_a(M)$  ein  $\varepsilon > 0$  und eine Kurve  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$ , so dass  $\alpha(0) = a$  und  $\alpha'(0) = v$ . Da das Bild der Kurve  $\alpha$  in  $M$  enthalten ist, gilt insbesondere

$$g_j(\alpha(t)) = 0$$

für alle  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Mit Hilfe der Kettenregel folgt für alle  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , dass

$$0 = Dg_j(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \langle \text{grad } g_j(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

Speziell für  $t = 0$  erhalten wir daraus

$$\langle \text{grad } g_j(a), v \rangle = \langle \text{grad } g_j(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle = 0.$$

Da  $v$  beliebig war, folgt  $\text{grad } g_j(a) \perp \mathcal{T}_a(M)$  und daher  $\text{grad } g_j(a) \in \mathcal{N}_a(M)$ .  $\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun unserer Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen zuwenden und erhalten die folgende notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung.

**Satz 3.30** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g = (g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar. Ferner sei  $x^* \in \{x \in U \mid g(x) = 0\}$  eine Stelle eines lokalen Minimums der Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Falls  $x^*$  regulär ist (d.h.  $\text{Rang } Dg(x^*) = m$ ), so gibt es Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\text{grad } f(x^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } g_j(x^*). \quad (3.12)$$

**Beweis:** Da  $x^*$  regulär ist, können wir nach Bemerkung 3.26 (ggf. nach Verkleinerung von  $U$ ) annehmen, dass

$$\mathcal{F} := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$$

eine  $(n - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Seien nun weiter  $\varepsilon > 0$  sowie  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathcal{F}$  eine stetig differenzierbare Kurve mit  $\alpha(0) = x^*$ . Da  $x^*$  Stelle eines lokalen Minimums ist, hat die differenzierbare Abbildung  $t \mapsto f(\alpha(t))$  in der Stelle  $t = 0$  ein lokales Minimum. Daraus erhalten wir (analog wie im Beweis von Satz 3.29), dass

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \langle \text{grad } f(x^*), \alpha'(0) \rangle.$$

Da  $\alpha$  eine beliebige Kurve in  $\mathcal{F}$  mit  $\alpha(0) = x^*$  war, folgt  $\text{grad } f(x^*) \perp \mathcal{T}_{x^*}(\mathcal{F})$  und daher  $\text{grad } f(x^*) \in \mathcal{N}_{x^*}(\mathcal{F})$ . Dann gibt es aber nach Satz 3.29 Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  mit

$$\text{grad } f(x^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } g_j(x^*). \quad \square$$

**Bemerkung 3.31** Die Parameter  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  aus Satz 3.30 bezeichnet man als *Lagrange-Multiplikatoren*. Der Name *Multiplikator* erklärt sich dabei durch die folgende Herangehensweise: Setzen wir nämlich  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  und betrachten wir die sogenannte *Lagrange-Funktion*

$$L : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, \lambda) \mapsto f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x),$$

die wir, anschaulich gesprochen, durch “Anhängen der Nebenbedingung nach Multiplikation mit den Lagrange-Multiplikatoren” erhalten, so ist mit  $f$  auch  $L$  differenzierbar und es gilt:

$$\text{grad } L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \text{grad } f(x) - \langle \lambda, \text{grad } g(x) \rangle \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

Für  $x^* \in U$  gilt also:  $x^* \in U$  liegt im zulässigen Bereich (d.h.  $g(x^*) = 0$ ) und erfüllt die notwendige Bedingung (3.12) aus Satz 3.30, genau dann, wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  gibt, so dass  $\text{grad } L(x^*, \lambda) = 0$  gilt, d.h. wenn  $(x^*, \lambda)$  ein kritischer Punkt der Funktion  $L$  ist.

Damit sieht es so aus, als hätten wir das Problem des Findens eines lokalen Extremums unter Nebenbedingungen für die Funktion  $f$  auf das klassische Extremwertproblem (d.h. ohne Nebenbedingungen) für die Funktion  $L$  zurückgeführt. Doch Vorsicht! Unsere Überlegungen beziehen sich dabei nur auf die jeweilige *notwendige* Bedingung. Die Untersuchung der Hesse-Matrix  $H_L(x^*, \lambda)$  von  $L$  auf Definitheit bringt keine Auskunft darüber, ob  $x^*$  Stelle eines lokalen Minimums ist oder nicht, da in diesem Fall der Punkt  $(x^*, \lambda)$  nicht notwendigerweise auch ein lokales Minimum von  $L$  ist. Wir verzichten an dieser Stelle aber auf die Herleitung von hinreichenden Bedingungen und verweisen stattdessen auf Spezialvorlesungen, die sich mit Optimierungsproblemen beschäftigen.

**Beispiel 3.32** Wir kommen auf unsere Aufgabenstellung in Beispiel 3.24 zurück und suchen das (globale!) Minimum der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto 2\pi x_1 x_2 + 2x_1^2 \pi$  unter der Nebenbedingung  $g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V = 0$ , wobei wir  $V > 0$  annehmen. Es gilt:

$$\text{grad } f(x) = \begin{bmatrix} 2\pi x_2 + 4\pi x_1 \\ 2\pi x_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \text{grad } g(x) = \begin{bmatrix} 2\pi x_1 x_2 \\ \pi x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Hier sind alle Punkte des zulässigen Bereichs regulär, denn aus  $\text{grad } g(x) = 0$  folgt  $x_1 = 0$ , doch dann ist die Nebenbedingung  $g(x_1, x_2) = 0$  nicht erfüllt. Somit liefert uns die notwendige Bedingung  $\text{grad } f(x) = \lambda \text{grad } g(x)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  zusammen mit der Nebenbedingung  $g(x) = 0$  das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$2\pi x_2 + 4\pi x_1 = 2\lambda \pi x_1 x_2 \tag{3.13}$$

$$2\pi x_1 = \lambda \pi x_1^2 \tag{3.14}$$

$$\pi x_1^2 x_2 - V = 0 \tag{3.15}$$

Aus  $\lambda = 0$  folgt aus (3.14) auch  $x_1 = 0$  im Widerspruch zu (3.15). Damit erhalten wir aus (3.14), dass  $x_1 = \frac{2}{\lambda}$ . Einsetzen in 3.13 liefert  $x_2 = \frac{4}{\lambda}$ . Setzen wir die Ergebnisse für  $x_1$  und  $x_2$  schließlich in (3.15) ein, so erhalten wir  $\frac{16\pi}{\lambda^3} = V$  bzw.  $\lambda = 2\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$ , sowie

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{und} \quad x_2 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Damit haben wir zunächst einmal nur einen kritischen Punkt  $x^*$  für die Lösung unserer Minimierungsaufgabe gefunden. Anschaulich ist aber aus der zugrunde liegenden Anwendung klar, dass es ein Minimum geben muss. Da dieses die notwendige Bedingung erfüllen muss und wir nur einen einzigen kritischen Punkt gefunden haben, muss an diesem das gesuchte Minimum vorliegen. Der Zylinder hat bei gegebenem Volumen also die kleinste Oberfläche, wenn die Höhe genau doppelt so groß ist wie der Radius der Grundfläche.

# Kapitel 4

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Zahlreiche Anwendungsprobleme in den Naturwissenschaften, den Ingenieurwissenschaften und anderen Disziplinen führen auf sogenannte *Differentialgleichungen*. Wir haben diese spezielle Klasse von Gleichungen bereits in der Analysis I kennengelernt, dort auch kurz diskutiert, und darüberhinaus im Abschnitt 3.2 des vorigen Kapitels festgestellt, dass sie auch beim impliziten Differenzieren eine wichtige Rolle spielen. Obwohl es eine eigene Vorlesung zum Thema Differentialgleichungen gibt, gehört eine Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen dennoch zu den klassischen Aufgaben der Vorlesung Analysis, weshalb wir uns an dieser Stelle etwas näher mit ihnen beschäftigen wollen.

Wir erinnern uns an dieser Stelle daran, dass wir bereits in Abschnitt 3.3 der Analysis I die Differentialgleichung

$$x' = \lambda x \tag{4.1}$$

für  $\lambda \in \mathbb{R}$  untersucht haben. Entscheidend ist hier zunächst die Erkenntnis, dass es sich um eine Gleichung für Funktionen handelt. Die Variable  $x$  steht hier also nicht für eine reelle Zahl, sondern für eine differenzierbare Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Ableitung ein Vielfaches der ursprünglichen Funktion ist. Eine Lösung der Differentialgleichung (4.1) ist die Exponentialfunktion  $t \mapsto \exp(\lambda t)$  und wie wir in Abschnitt 6.3 von Analysis I festgestellt haben, sind alle anderen Lösungen Vielfache dieser Funktion. Die Lösungsmenge der Differentialgleichung (4.1) ist also

$$\{x_c : t \mapsto c \cdot \exp(\lambda t) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

und wir stellen fest, dass es sich dabei um einen eindimensionalen Unterraum des Raums  $C^\infty(\mathbb{R})$  der beliebig oft differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  handelt. Eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (4.1) erhalten wir, wenn wir noch einen *Anfangswert* festsetzen. Wegen  $x_c(0) = c \cdot \exp(0) = c$  ist  $x_c : t \mapsto c \cdot \exp(\lambda t)$  die eindeutige Lösung des sogenannten Anfangswertproblems

$$x' = \lambda x, \quad x(0) = c.$$

Speziell ist die Exponentialfunktion  $\exp$  die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x, \quad x(0) = 1.$$

**Definition 4.1** Sei  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  eine Abbildung, sowie  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $I^\circ \neq \emptyset$ .

1) Die Gleichung

$$x' = f(t, x) \quad (4.2)$$

heißt gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

2) Eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Lösung der Differentialgleichung (4.2), falls gilt:

i)  $(t, x(t)) \in U$  für alle  $t \in I$ .

ii)  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist differenzierbar.

iii)  $x'(t) = f(t, x(t))$  für alle  $t \in I$ .

3) Sei  $(t_0, x_0) \in U$ . Dann heißt das Gleichungssystem

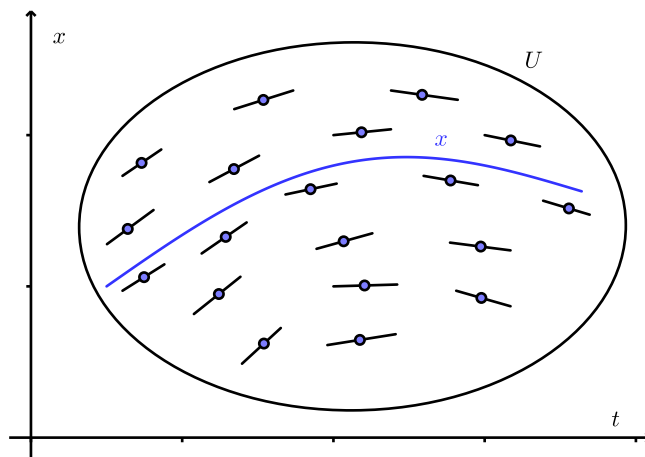
$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.3)$$

ein Anfangswertproblem.

4) Eine Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Differentialgleichung (4.2) heißt Lösung des Anfangswertproblems (4.3), falls  $x(t_0) = x_0$ .

Es macht an dieser Stelle nichts aus, dass wir das Intervall  $I$  in Definition 4.1 nicht als offen vorausgesetzt haben, denn für die Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  können wir die Differenzierbarkeit komponentenweise betrachten und für die Komponentenfunktionen  $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  den Begriff der Differenzierbarkeit aus Analysis I verwenden. Aus diesem Grund schreiben wir an dieser Stelle auch bevorzugt  $x'(t)$  statt  $Dx(t)$ .

Die rechte Seite  $f(t, x)$  der Differentialgleichung  $x' = f(t, x)$  lässt sich im Fall  $n = 1$  als *Richtungsfeld* (auch *Steigungsfeld* genannt) interpretieren. In jedem Punkt  $(t, x)$  wird durch  $f(t, x)$  eine *Steigung* vorgegeben. Eine Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung ist dann eine Funktion, deren Funktionsgraph in jedem Punkt die vorgegebene Steigung aufweist.



## 4.1 Elementare Lösungsmethoden

Wie lässt sich eine Differentialgleichung lösen? In einigen Spezialfällen ist die Antwort sehr einfach. Für den Fall, dass die „rechte Seite“, also die Funktion  $f$  in Definition 4.1, nicht explizit von  $x$  abhängt, d.h. falls  $f(t, x) = f(t)$  gilt, so erhalten wir die Lösung der Differentialgleichung  $x' = f(t)$  einfach durch Integration. Präziser sei dazu  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist die Lösung der Differentialgleichung  $x' = f(t)$  gegeben durch

$$x : t \mapsto \int_{t_0}^t f(s) \, ds + c,$$

wobei  $t_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dabei können wir  $t_0$  beliebig wählen. Die Konstante  $c$  können wir durch einen Anfangswert festlegen: Verlangen wir z.B.  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ , so gilt  $c = x_0$ .

Das war leicht und daher trauen wir uns optimistisch an „schwierigere rechte Seiten“ heran. Als nächstes betrachten wir den Spezialfall, dass sich  $f(t, x) = g(t) \cdot h(x)$  als Produkt von zwei Funktionen  $g$  und  $h$  schreiben lässt, die jeweils nur von  $t$  bzw.  $x$  abhängen. Genauer seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  offene Intervalle sowie  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Falls die Funktion  $x$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $x' = g(t)h(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  ist, so gilt per Definition

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$$

für alle  $t$  (aus dem Definitionsbereich der Funktion  $x$ ). Division durch  $h(x(t))$  (falls dies erlaubt ist) und Integration auf beiden Seiten liefert

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{h(x(s))} \, ds = \int_{t_0}^t g(s) \, ds.$$

Substituieren wir  $u = x(s)$  (wir müssen dann  $x'(s) \, ds$  durch  $du$  ersetzen), so erhalten wir

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{h(u)} \, du = \int_{t_0}^t g(s) \, ds. \quad (4.4)$$

Diese Gleichung können wir dann nach  $x(t)$  auflösen um die Lösung des Anfangswertproblems zu erhalten. Allerdings haben wir hier schon die Existenz einer Lösung vorausgesetzt! Der folgende Satz zeigt, dass wir auf diese Art und Weise tatsächlich eine Lösung erhalten.

**Satz 4.2 (Trennung der Variablen)** Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  offene Intervalle, seien  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $h(x) \neq 0$  für alle  $x \in J$  und sei  $(t_0, x_0) \in I \times J$ . Definiere die Funktionen  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H : J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G : t \mapsto \int_{t_0}^t g(s) \, ds \quad \text{und} \quad H : x \mapsto \int_{x_0}^x \frac{1}{h(u)} \, du.$$

Weiter sei  $\tilde{I} \subseteq I$  ein Intervall mit  $t_0 \in \tilde{I}$  und  $G(\tilde{I}) \subseteq H(J)$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.5)$$

genau eine Lösung  $x : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $\tilde{I}$  und für diese gilt:

$$x(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \text{für alle } t \in \tilde{I}. \quad (4.6)$$

**Beweis:** Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Ist  $x : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems (4.5), so haben wir schon gezeigt, dass (4.4) erfüllt ist, was gleichbedeutend mit

$$H(x(t)) = G(t) \quad (4.7)$$

für alle  $t \in \tilde{I}$  ist. Da  $H'(x) = \frac{1}{h(x)} \neq 0$  für alle  $x \in J$  gilt, ist  $H : J \rightarrow H(J)$  umkehrbar (Satz 6.19 aus Analysis I). Daher folgt aus (4.7) für alle  $t \in \tilde{I}$ , dass

$$x(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Für den Nachweis der Existenz definieren wir  $x : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $t \mapsto H^{-1}(G(t))$ . Dann ist mit  $G$  und  $H^{-1}$  auch  $x$  stetig differenzierbar (die stetige Differenzierbarkeit von  $H^{-1}$  folgt aus Satz 6.19 aus Analysis I) und wegen  $H(x(t)) = G(t)$  gilt für alle  $t \in \tilde{I}$ , dass

$$g(t) = G'(t) = H'(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{1}{h(x(t))} \cdot x'(t),$$

woraus wir  $x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$  für alle  $t \in \tilde{I}$  erhalten. Weiter gilt

$$x(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0,$$

da  $G(t_0) = 0 = H(x_0)$ . Also ist  $x$  eine Lösung des Anfangswertproblems (4.5).  $\square$

**Beispiel 4.3** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = 1 + x^2, \quad x(0) = 0.$$

Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.2 haben wir hier die Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto 1$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1 + x^2$  gegeben. Dann folgt

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{1+u^2} du = \int_0^t 1 ds,$$

woraus wir  $\arctan(x(t)) = t$  bzw.  $x(t) = \tan t$  erhalten. Vorsichtshalber machen wir eine Probe und stellen fest, dass wegen

$$\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$$

(vgl. Beispiel 6.18 aus Analysis I) und  $\tan(0) = 0$  die Funktion  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  tatsächlich eine Lösung unseres Anfangswertproblems ist. Vielleicht etwas überrascht stellen Sie fest, dass die Lösung  $\tan$  im Gegensatz zu den Funktionen  $g$  und  $h$  *nicht* auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist. Dies steht aber im Einklang mit Satz 4.2, denn dieser postuliert die Existenz einer Lösung nur auf Intervallen  $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $\tilde{I} = G(\tilde{I}) \subseteq H(J) = \arctan(\mathbb{R}) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . (Hierbei haben wir  $G = Id_{\mathbb{R}}$  für die Gleichheit  $\tilde{I} = G(\tilde{I})$  ausgenutzt.)

Neben der *Trennung der Variablen* gibt es noch viele weitere direkte Lösungsmethoden für Differentialgleichungen, auf die wir an dieser Stelle aber nicht weiter eingehen werden.



## 4.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der folgenden Frage beschäftigen: Unter welchen Bedingungen an die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen, hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit  $(t_0, x_0) \in U$  eine eindeutige Lösung? Für einige spezielle “rechte Seiten”  $f$  haben wir die Antwort bereits im vorigen Abschnitt erhalten - jetzt wollen wir natürlich versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen mit dieser Eigenschaft zu identifizieren. Naheliegend ist zunächst, erst einmal nur die Stetigkeit von  $f$  vorauszusetzen. Tatsächlich reicht dies für den Beweis der Existenz einer Lösung aus (dies folgt aus dem Satz von Peano, den sie in der Vorlesung *Differentialgleichungen* kennenlernen können), jedoch nicht für die Eindeutigkeit, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 4.4** Das Anfangswertproblem

$$x' = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = 0$$

hat unendlich viele Lösungen, nämlich die Nullfunktion sowie die Funktionen

$$x_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < \alpha \\ \frac{1}{27}(t - \alpha)^3 & \text{für } t \geq \alpha \end{cases}$$

für  $\alpha \geq 0$ , denn  $x_\alpha$  ist differenzierbar (Übung) und für  $t > \alpha$  gilt

$$x'_\alpha(t) = \frac{1}{9}(t - \alpha)^2 = \sqrt[3]{x_\alpha(t)^2}.$$

(Dass die Differentialgleichung auch für  $t < \alpha$  erfüllt ist, ist trivial, und für  $t = \alpha$  ist es eine Übung.)

Wir benötigen also zur Stetigkeit noch zusätzliche Eigenschaften von  $f$ , um die Eindeutigkeit von Lösungen gewährleisten zu können. Um auf eine Idee zu kommen, welche Eigenschaften das sein könnten, wenden wir noch einmal unsere Strategie aus dem vorigen Abschnitt an und wandeln das Anfangswertproblem (4.8) in eine Integralgleichung um. Das Integral für eine Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist dabei komponentenweise definiert:

**Definition 4.5** Sei  $g := (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sind die Funktionen  $g_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar für  $i = 1, \dots, n$ , so heißt

$$\int_a^b g(t) \, dt := \begin{bmatrix} \int_a^b g_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(t) \, dt \end{bmatrix}.$$

das Integral von  $g$  über  $[a, b]$ .

**Bemerkung 4.6** Zeigen Sie zur Übung, dass mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Definition 4.5 gilt, dass

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

**Lemma 4.7** Seien  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, x_0) \in U$ , sowie  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1)  $x$  ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.8)$$

2) Für alle  $t \in I$  gilt  $(t, x(t)) \in U$  und  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ .

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)” folgt durch Integration beider Seiten der Differentialgleichung und “2)  $\Rightarrow$  1)” zeigen Sie leicht mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 7.27 in Analysis I), der insbesondere die Differenzierbarkeit von  $x$  liefert.  $\square$

Definieren wir  $\Phi : \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid (t, x(t)) \in U \text{ für alle } t \in I\} \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$  durch

$$\Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (4.9)$$

für alle  $t \in I$ , so ist  $x$  in Hinblick auf Lemma 4.7 genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (4.8), wenn  $\Phi(x) = x$  gilt, d.h. wenn  $x$  ein Fixpunkt von  $\Phi$  ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz 1.42) ist die Eindeutigkeit des Fixpunktes garantiert, wenn es sich bei  $\Phi$  um eine Kontraktion handelt. Wann also ist  $\Phi$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $c < 1$ ? Wenn wir annehmen, dass  $C(I, \mathbb{R}^n)$  mit der Supremumsnorm versehen ist, dann suchen wir eine Konstante  $c < 1$  so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(\tilde{x})\|_\infty \leq c \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

für alle  $x, \tilde{x}$  aus einer Teilmenge des Definitionsbereichs von  $\Phi$  gilt. Nun folgt

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)(t) - \Phi(\tilde{x})(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))\| ds \\ &\leq (t - t_0) \sup_{s \in [t_0, t]} \|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))\|. \end{aligned}$$

Den ersten Faktor können wir durch Verkleinerung des Intervalls  $I$  nach Belieben kontrollieren. Es gilt also, den zweiten Faktor abzuschätzen. Dabei wird uns der folgende Begriff helfen.

**Definition 4.8** Seien  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir sagen:

- 1)  $f$  genügt in  $G$  einer Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante  $L \geq 0$ , falls für alle  $(t, x), (t, \tilde{x}) \in G$  gilt, dass

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|.$$

- 2)  $f$  genügt in  $G$  lokal einer Lipschitzbedingung, falls es zu jedem  $(t, x) \in G$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  von  $(t, x)$  gibt, so dass  $f$  in  $G \cap U$  einer Lipschitzbedingung mit (von  $U$  abhängiger) Lipschitz-Konstante  $L_U \geq 0$  genügt.

**Satz 4.9** Seien  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , bzgl. der Variablen im  $\mathbb{R}^n$  (bezeichnet mit  $x_1, \dots, x_n$ ) stetig partiell differenzierbar. Dann genügt  $f$  in  $U$  lokal einer Lipschitzbedingung.

**Beweis:** Sei  $(t_0, x_0) \in U$  beliebig. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq \varepsilon \text{ und } \|x - x_0\| \leq \varepsilon\} \subseteq U$$

gilt. (Klar? Vergleichen Sie dies mit Lemma 3.9!) Insbesondere ist  $K$  eine Umgebung von  $(t_0, x_0)$  und kompakt. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von  $f$  existiert daher

$$L := \sup_{(t,x) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| < \infty,$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial f}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Diese Matrix ist für jedes feste  $t$  die Jacobi-Matrix der Abbildung  $x \mapsto f(t, x)$ , die nach Satz 2.18 differenzierbar ist. Anwendung des Schrankensatzes (Satz 2.32) liefert schließlich

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|.$$

Folglich genügt  $f$  lokal einer Lipschitzbedingung. (Als die in der Definition geforderte offene Umgebung von  $(t_0, x_0)$  wählen wir einfach  $K^\circ$ .)  $\square$

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts.

**Satz 4.10 (von Picard-Lindelöf)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig und genüge lokal einer Lipschitzbedingung. Dann gilt:

- 1) **(Lokale eindeutige Existenz.)** Zu jedem  $(t_0, x_0) \in U$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.11)$$

genau eine Lösung  $x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt.

- 2) **(Globale Eindeutigkeit.)** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $t_0 \in I$ . Sind  $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Lösungen von (4.11), so gilt  $x_1 = x_2$ .

**Beweis:** 1) Nach Bemerkung 4.7 ist die Lösung des Anfangswertproblems (4.11) äquivalent zur Lösung einer Integralgleichung bzw. zum Finden eines Fixpunkts der Funktion  $\Phi$ , die wie in (4.11) definiert ist. Ziel ist nun, den Definitionsbereich von  $\Phi$  soweit einzuschränken, dass  $\Phi$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Nach Voraussetzung gibt es (ggf. nach Verkleinerung von  $U$ ) eine Konstante  $L \geq 0$ , so dass

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|$$

für alle  $(t, x), (t, \tilde{x}) \in U$  gilt. Wegen der Offenheit von  $U$  gibt es  $\delta_t, \delta_x > 0$ , so dass

$$K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq \delta_t \text{ und } \|x - x_0\| \leq \delta_x\} \subseteq U.$$

(Dieses Argument haben Sie schon im Beweis von Satz 4.9 gesehen.) Da  $K$  kompakt und  $f$  stetig ist, gibt es  $M > 0$  mit  $\|f(t, x)\| \leq M$  für alle  $(t, x) \in K$ . Setze  $\varepsilon := \min\{\delta_t, \frac{\delta_x}{M}, \frac{1}{2L}\}$  und

$$\mathcal{D} := \{y \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|y - x_0\|_\infty \leq \delta_x\}.$$

(Hierbei bezeichnen wir mit  $x_0$  neben dem Anfangswert aus  $\mathbb{R}^n$  auch die konstante Funktion  $t \mapsto x_0$ .) Dann ist  $\mathcal{D}$  eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums  $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$  und daher vollständig. Wir zeigen nun, dass  $\Phi$  auf  $\mathcal{D}$  eine Kontraktion ist:

i)  $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  ist eine Selbstabbildung: Sei  $y \in \mathcal{D}$  beliebig. Dann gilt per Definition

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \text{für alle } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

denn wegen  $\|y - x_0\| \leq \delta_x$  gilt  $(s, y(s)) \in K \subseteq U$  für alle  $s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , d.h.  $f(s, y(s))$  und  $\Phi(y)$  sind wohldefiniert. Weiter gilt

$$\|\Phi(y) - x_0\|_\infty = \left\| t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right\|_\infty \leq \sup_t |t - t_0| \cdot M = \varepsilon M \leq \delta_x$$

woraus wir  $\Phi(y) \in \mathcal{D}$  erhalten.

ii)  $\Phi$  ist Lipschitz-stetig mit Konstante  $c < 1$ : Seien  $y_1, y_2 \in \mathcal{D}$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t L \cdot \|y_1(s) - y_2(s)\| \, ds \\ &\leq L \cdot |t - t_0| \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

für alle  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  woraus  $\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_\infty$  folgt.

Somit ist  $\Phi$  eine Kontraktion und die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt. Daher es gibt genau ein  $x \in \mathcal{D}$  mit  $\Phi(x) = x$ , d.h. genau eine Lösung des Anfangswertproblems (4.11) in  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

2) Seien  $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Lösungen von (4.11). Definiere die Menge

$$V := \{t \in I \mid x_1(t) = x_2(t)\}.$$

Dann gilt  $V \neq \emptyset$  wegen  $t_0 \in V$ . Da  $x_1, x_2$  differenzierbar, also auch stetig sind, ist  $V$  nach Lemma 2.31 abgeschlossen (in  $I$ ). Andererseits ist  $V$  auch offen in  $I$ , denn ist  $\hat{t}_0 \in I$ , so gibt es nach Teil 1) ein  $\hat{\varepsilon} > 0$ , so dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(\hat{t}_0) = \hat{x}_0 := x_1(\hat{t}_0) = x_2(\hat{t}_0)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung im Intervall  $[\hat{t}_0 - \hat{\varepsilon}, \hat{t}_0 + \hat{\varepsilon}]$  hat. Damit gilt aber insbesondere  $x_1(t) = x_2(t)$  für alle  $t \in \hat{I} := I \cap ]\hat{t}_0 - \hat{\varepsilon}, \hat{t}_0 + \hat{\varepsilon}[$ , d.h.  $\hat{t}_0$  ist in der in  $I$  offenen Menge  $\hat{I}$  enthalten. Somit ist  $V$  eine Teilmenge von  $I$ , die sowohl offen, als auch abgeschlossen ist. Da  $I$  ein Intervall, also zusammenhängend, und  $V$  nichtleer ist, folgt  $V = I$ .  $\square$

**Beispiel 4.11** Die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf erlaubt uns auch die Verwendung der Fixpunktiteration (siehe Teil 2 in Satz 1.42) zur expliziten Berechnung des Fixpunktes, die in diesem Spezialfall als *Picard-Iteration* bekannt ist. Wir illustrieren dies am Beispiel

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = c,$$

wobei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto 2tx$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf sind erfüllt, denn die "rechte Seite"  $f$  ist stetig partiell nach  $x$  differenzierbar und erfüllt daher nach Satz 4.9 lokal eine Lipschitzbedingung. Wir wählen nun als Startwert die konstante Funktion  $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto c$ . Unsere Fixpunktiteration lautet dann

$$x_{k+1}(t) = c + \int_0^t f(s, x_k(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

für alle  $k \in \mathbb{R}$ . Damit erhalten wir für alle  $t \in \mathbb{R}$ , dass

$$x_1(t) = c + \int_0^t 2cs \, ds = c(1 + t^2), \quad x_2(t) = c + \int_0^t 2cs(1 + s^2) \, ds = c(1 + t^2 + \tfrac{1}{2}t^4)$$

und mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x_k(t) = c \left( 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3!}t^6 + \cdots + \frac{1}{k!}t^{2k} \right)$$

Hieraus folgt die Konvergenz der Iterationsfolge für alle  $t \in \mathbb{R}$  und wir erhalten als Lösung des Anfangswertproblems die Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = c \cdot e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

In der Tat ist  $x$  differenzierbar und es gilt  $x(0) = c$  und

$$x'(t) = ce^{t^2} \cdot 2t = 2tx(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Die Berechnung der Lösung auf diese Weise war allerdings unnötig aufwändig, denn wir hätten diese viel einfacher durch Trennung der Variablen ermitteln können. Außerdem handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine *lineare Differentialgleichung*, deren Lösungen wir noch viel eleganter bestimmen können.

### 4.3 Lineare Differentialgleichungen

In vielen Fällen lässt sich die Lösung einer gewöhnliche Differentialgleichung nicht explizit mit Hilfe von Methoden der Analysis bestimmen, sondern es ist nur möglich, eine Näherungslösung zu berechnen. (Dies wird eines der zentralen Themen in der *Numerischen Mathematik* sein.) Im Spezialfall der *linearen Differentialgleichungen* ist das allerdings anders, weshalb wir diese im Folgenden ausführlich diskutieren wollen.

**Definition 4.12** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall sowie  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Abbildungen. Dann heißt die Differentialgleichung

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (4.12)$$

lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Sie heißt homogen, falls  $b = 0$ , und inhomogen sonst.

Zunächst einmal beschäftigen wir uns mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen, bevor wir die Lösungsmenge linearer Differentialgleichungen genauer charakterisieren.

**Satz 4.13** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, seien  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Abbildungen und seien  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.13)$$

genau eine auf ganz  $I$  definierte Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Beweis:** Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: Sei  $J \subseteq I$  ein beliebiges kompaktes Teilintervall von  $I$ , sowie  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto A(t)x + b(t)$ . Da  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  stetig ist, existiert

$$L := \sup_{t \in J} \|A(t)\| \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt für alle  $t \in J$  und alle  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| = \|A(t)(x - \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|, \quad (4.14)$$

d.h.  $f$  genügt auf  $J \times \mathbb{R}^n$  einer Lipschitzbedingung. Da  $J \subseteq I$  beliebig war, genügt  $f$  auf  $I \times \mathbb{R}^n$  lokal einer Lipschitzbedingung und erfüllt somit die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf. Damit folgt die Eindeutigkeit einer Lösung von (4.13) auf  $I$ .

Kommen wir nun zum Beweis der Existenz. Wir wissen bereits, dass  $f$  auf  $I$  lokal einer Lipschitzbedingung genügt, doch damit liefert uns der Satz von Picard-Lindelöf nur lokal die Existenz einer Lösung. Die entscheidende Aussage des Satzes ist allerdings, dass unser Anfangswertproblem (4.13) eine Lösung hat, die auf ganz  $I$  definiert ist. Daher kehren

wir noch einmal zur Grundidee des Beweises des Satzes von Picard-Lindelöf zurück und betrachten die Funktionenfolge  $(\varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$\varphi_0 : t \mapsto x_0, \quad \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) \, ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Unser Ziel ist zu zeigen, dass diese Folge auf jedem kompakten Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  gleichmäßig gegen eine Lösung  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  konvergiert. Für den Nachweis nutzen wir aus, dass sich die mutmaßliche Grenzfunktion  $x$  auch in der Form

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

schreiben lässt. (Klar?) Aus der Stetigkeit von  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  und der Kompaktheit von  $J$  folgt

$$M := \sup_{t \in J} \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < \infty.$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass für alle  $t \in J$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq M \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!}. \quad (4.15)$$

“ $k = 0$ ”: Dies folgt sofort aus der Definition von  $M$ .

“ $k \Rightarrow k + 1$ ”: Wegen  $\varphi_{k+2}(t) - \varphi_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{k+1}(s)) - f(s, \varphi_k(s)) \, ds$  erhalten wir mit Hilfe von (4.14) und der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+2}(t) - \varphi_{k+1}(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi_{k+1}(s) - \varphi_k(s)\| \, ds \\ &\leq ML \int_{t_0}^t \frac{L^k |s - t_0|^k}{k!} \, ds = ML^{k+1} \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

was den Beweis von (4.15) abschließt. Setzen wir  $r := \sup_{t \in J} |t - t_0|$  (da  $J$  kompakt ist, ist  $r$  endlich), so folgt aus (4.15), dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{\infty} \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k r^k}{k!} = M e^{Lr}.$$

Daher ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$  nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß (Satz 8.12 aus Analysis I) auf  $J$  gleichmäßig konvergent und da dies für alle kompakten Teilintervalle  $J \subseteq I$  gilt, ist

$$x := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

auf ganz  $I$  definiert und dort stetig. Insbesondere gilt für alle  $t \in I$ , dass

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, \varphi_k(s)) \, ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds,$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit die gleichmäßige Konvergenz auf dem kompakten Intervall  $[t_0, t]$  (bzw.  $[t, t_0]$ ) ausgenutzt haben, um Satz 8.7 aus Analysis I anzuwenden. Die letzte Gleichheit folgt dann aus der Stetigkeit von  $f$ . Nach Bemerkung 4.7 ist  $x$  dann differenzierbar und eine Lösung des Anfangswertproblems (4.13).  $\square$

**Beispiel 4.14** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ . Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = a(t)x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Mit Trennung der Variablen (Übung) erhalten wir die Lösung

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto x_0 \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right),$$

die auf ganz  $I$  definiert ist. Ist speziell  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto 2t$  und  $x_0 = c \in \mathbb{R}$  (vgl. Beispiel 4.11), so erhalten wir die Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x(t) = c \exp \left( \int_{t_0}^t 2s \, ds \right) = ce^{t^2}.$$

Beachten Sie, dass alle Lösungen der Differentialgleichung  $x' = a(t)x$  aus Beispiel 4.14 Vielfache der Exponentialfunktion  $t \mapsto \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right)$  sind. Dies bedeutet insbesondere, dass es sich bei der Lösungsmenge dieser Differentialgleichung um einen Vektorraum handelt. Dies ist kein Zufall, denn interessanterweise stellt sich heraus, dass die Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung (4.12) stets ein Vektorraum ist, der sogar endlich-dimensional ist.

**Satz 4.15** Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung (4.12), d.h.  $x' = A(t)x$ . Betrachte die Abbildung

$$\mathcal{L} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n), \quad x \mapsto x' - A(t)x. \quad (4.16)$$

Dann gilt:

- 1)  $\mathcal{L}$  ist linear und eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine Lösung von  $x' = A(t)x$ , wenn  $\mathcal{L}(x) = 0$  gilt.
- 2)  $\text{Kern}(\mathcal{L})$  ist ein Unterraum von  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$  und es gilt  $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}) = n$ .
- 3) Für Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$  sind folgende Aussagen äquivalent:
  - i)  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  sind für alle  $t \in I$  linear unabhängig im  $\mathbb{R}^n$ .
  - ii) Es gibt ein  $t_0 \in I$ , so dass  $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$  linear unabhängig im  $\mathbb{R}^n$  sind.
  - iii) Die Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sind linear unabhängig in  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ .



**Beweis:** 1)  $\mathcal{L}$  ist linear, denn für alle stetig differenzierbare Funktionen  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x + \beta y)' - A(t)(\alpha x + \beta y) = \alpha(x' - A(t)x) + \beta(y' - A(t)y) \\ &= \alpha \mathcal{L}(x) + \beta \mathcal{L}(y)\end{aligned}$$

Offenbar ist jede Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $x' = A(t)x$  wegen der Stetigkeit der rechten Seite stetig differenzierbar und erfüllt  $\mathcal{L}(x) = 0$ . Daher ist  $\text{Kern}(\mathcal{L})$  die Lösungsmenge der Differentialgleichung  $x' = A(t)x$ . Umgekehrt ist jedes  $x \in \text{Kern}(\mathcal{L})$  eine Lösung von  $x' = A(t)x$ .

2) Dass  $\text{Kern}(\mathcal{L})$  ein Unterraum von  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$  ist, ist der Spezialfall einer bekannten Aussage der Linearen Algebra. Bevor wir die Dimension von  $\text{Kern}(\mathcal{L})$  bestimmen, weisen wir zuerst 3) nach.

3) “i)  $\Rightarrow$  ii)” ist trivial.

“ii)  $\Rightarrow$  iii)”: Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , so dass  $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0$ . Dann gilt auch

$$\alpha_1 \varphi_1(t_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t_0) = 0(t_0) = 0$$

und mit 2) folgt  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Also sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  linear unabhängig.

“iii)  $\Rightarrow$  i)”: Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$  linear unabhängig, sei  $t_0 \in I$  beliebig und seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  mit

$$\alpha_1 \varphi_1(t_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t_0) = 0.$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$\varphi := \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L}),$$

so gilt  $\varphi(t_0) = 0$  und damit ist  $\varphi$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $x' = A(t)x$  und  $x(t_0) = 0$ . Da auch die Nullfunktion dieses Anfangswertproblem löst, folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung nach Satz 4.13, dass  $\varphi = 0$  gilt. Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  folgt dann aber

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

d.h.  $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$  sind linear unabhängig im  $\mathbb{R}^n$ .

2) (Fortsetzung.) Wir weisen nun den noch fehlenden Teil der Aussage in 2) über die Dimension des Kerns von  $\mathcal{L}$  nach. Sei  $t_0 \in I$ . Dann gibt es Lösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$  von  $x' = A(t)x$  mit  $\varphi_i(t_0) = e_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Wegen der Äquivalenz von ii) und iii) in 3) folgt damit  $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}) \geq n$ . Sind andererseits  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \in \text{Kern}(\mathcal{L})$  und  $t \in I$  beliebig, so sind  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_{n+1}(t)$  linear abhängig im  $\mathbb{R}^n$  und daher auch  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ , woraus  $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}) = n$  folgt.  $\square$

**Definition 4.16** Gegeben sei die homogene Differentialgleichung (4.12) und die Abbildung  $\mathcal{L}$  wie in (4.16). Eine Basis von  $\text{Kern}(\mathcal{L})$  heißt Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung  $x' = A(t)x$ .

**Bemerkung 4.17** Gegeben sei die homogene Differentialgleichung (4.12) und die Abbildung  $\mathcal{L}$  wie in (4.16). Ferner seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$ . Setze

$$\Phi := \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{bmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad (4.17)$$

d.h. für jedes  $t \in I$  ist  $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$  die Matrix mit den Spalten  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ . Dann gilt:

1) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i)  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ist ein Lösungsfundamentalsystem von  $x' = A(t)x$ .
- ii) Es gilt  $\det \Phi(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .
- iii) Es gilt  $\det \Phi(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0 \in I$ .

2)  $\Phi$  ist eine Lösung der *Matrix-Differentialgleichung*  $X' = A(t)X$ , denn für alle  $t \in I$  gilt

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)\varphi_1(t) & \dots & A(t)\varphi_n(t) \end{bmatrix} = A(t)\Phi(t).$$

3) Ist  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Lösungsfundamentalsystem von  $x' = A(t)x$ , so gibt es zu jeder Lösung  $\varphi$  von  $x' = A(t)x$  Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  mit

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = \Phi \cdot \alpha, \quad \text{wobei } \alpha := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Wegen  $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t)$  erhält man die Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  für beliebiges  $t \in I$  als die Koordinaten von  $\varphi(t)$  bzgl. der Basis  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  des  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 4.18** Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 & \text{bzw.} & \quad x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x, & \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned}$$

Wir “erraten” (einen systematischen Zugang lernen wir im nächsten Abschnitt kennen) die beiden Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\varphi_1, \varphi_2$  ein Lösungsfundamentalsystem von  $x' = A(t)x$ , denn es gilt

$$\det \Phi(t) = \det \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} = 1$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Wegen  $\Phi(\frac{\pi}{2}) = I_2$  erhalten wir somit die Lösung des Anfangswertproblems  $x' = A(t)x, x(\frac{\pi}{2}) = c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^\top$  durch

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \Phi(t)c = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t).$$

An dieser Stelle haben wir die Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung (4.12) vollständig charakterisiert. Wie aber sieht es mit der Lösungsmenge der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $x' = A(t)x + b(t)$  aus? Hierzu bemühen wir ein zentrales Prinzip aus der Linearen Algebra, das wir wegen seiner Wichtigkeit an dieser Stelle explizit formulieren:

**Bemerkung 4.19** Seien  $K$  ein Körper und  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  (möglicherweise unendlich-dimensionale)  $K$ -Vektorräume, sowie  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  linear. Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems  $L(x) = 0$  ist dann durch  $\text{Kern}(L)$  gegeben. Sei nun  $b \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ . Sind  $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$  zwei Lösungen des linearen Gleichungssystems  $L(x) = b$ , so gilt

$$L(x_1 - x_2) = L(x_1) - L(x_2) = b - b = 0,$$

d.h. es gilt  $x_1 - x_2 \in \text{Kern}(L)$ . Daher ist die Lösungsmenge von  $L(x) = b$  ein affiner Raum: Ist  $x_p$  eine *partikuläre* (d.h. eine beliebige spezielle) Lösung von  $L(x) = b$ , so ist

$$x_p + \text{Kern}(L) := \{x_p + x_h \mid x_h \in \text{Kern}(L)\}$$

die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems  $L(x) = b$ . (Klar? Falls nicht: Übung!)

**Bemerkung 4.20** Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung (4.12). Haben wir die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung  $x' = A(t)x$  bereits bestimmt, so reicht es nach Bemerkung 4.19 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen. Diese erhalten wir durch die sogenannte *Variation der Konstanten*. Der Name erklärt sich dabei wie folgt: Wie wir bereits aus Bemerkung 4.17 wissen, hat eine beliebige Lösung der homogenen Differentialgleichung die Form  $\Phi \cdot c$  mit  $c \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $\Phi$  wie in (4.17) zu einem Lösungsfundamentalsystem  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  definiert ist. Wir machen nun für eine Lösung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der inhomogenen Differentialgleichung den Ansatz

$$\psi(t) = \Phi(t)c(t)$$

für alle  $t \in I$ , d.h. hier ist  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zunächst noch unbekannte Funktion. (Die Konstante  $c$  wird also "variiert".) Da  $\Phi(t)$  für alle  $t \in I$  invertierbar ist, gilt  $c(t) = \Phi(t)^{-1}\psi(t)$  und mit  $\psi$  ist wegen Lemma 3.6 auch  $c$  stetig differenzierbar. Mit Hilfe der Produktregel aus Teil 1) von Beispiel 2.28 erhalten wir

$$\Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = \psi'(t) = A(t)\psi(t) + b(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t)$$

für alle  $t \in I$ . Mit Teil 2) von Bemerkung 4.17 folgt  $\Phi'(t)c(t) = A(t)\Phi(t)c(t)$  und somit

$$c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$$

für alle  $t \in I$ . Durch Integration erhalten wir dann für alle  $t \in I$ , dass

$$c(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) \, ds + k$$

mit einem  $t_0 \in I$  und einer Konstanten  $k \in \mathbb{R}^n$ , die wir, da wir nur *eine* Lösung suchen, auch einfach als  $k = 0$  wählen können.

**Beispiel 4.21** Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 + t \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist uns bereits aus Beispiel 4.18 bekannt. Damit erhalten wir (unter Benutzung derselben Notation wie in Bemerkung 4.20)

$$\Phi(t)^{-1}b(t) = \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{bmatrix}$$

sowie mit Hilfe partieller Integration

$$c(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} s \cdot \cos s \\ s \cdot \sin s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t \sin t + \cos t \\ -t \cos t + \sin t \end{bmatrix}.$$

Als eine partikuläre Lösung berechnen wir daher  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\psi(t) = \Phi(t)c(t) = \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \sin t + \cos t \\ -t \cos t + \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist daher durch

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  gegeben, wobei sich die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  mit Hilfe eines Anfangswerts eindeutig bestimmen lassen.

Statt Differentialgleichungen erster Ordnung kann man auch solche höherer Ordnung betrachten. Seien dazu  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall sowie  $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Wir betrachten die *lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t). \quad (4.18)$$

Wir können dann die Lösung dieser Differentialgleichung durch die sogenannte *Ordnungsreduktion* auf den Fall linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Dazu betrachten wir die Ableitungen bis zur  $(n-1)$ -ten Ordnung als neue Variablen und setzen

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= x' = y_1' \\ y_3 &= x'' = y_2' \\ &\vdots \\ y_n &= x^{(n-1)} = y_{n-1}' \end{aligned} \quad \text{sowie} \quad y := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ist  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (4.18), so gilt  $x^{(n)} = y'_n$  und daher

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= y_2(t) \\ &\vdots \\ y'_{n-1}(t) &= y_n(t) \\ y'_n(t) &= -a_{n-1}(t)y_n(t) - \cdots - a_1(t)y_2(t) - a_0(t)y_1(t) + b(t), \end{aligned}$$

d.h.  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Ist umgekehrt  $y$  eine Lösung der Differentialgleichung (4.19), so gilt  $y = [y_1 \ y'_1 \ \dots \ y_1^{(n-1)}]^\top$  und  $x = y_1$  ist eine Lösung der Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung (4.18). Daher können wir unsere bisherigen Kenntnisse über die Lösungsmengen von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung auf den Fall höherer Ordnungen übertragen und erhalten unmittelbar die nachstehenden Folgerungen:

- 1) Das Anfangswertproblem bestehend aus der Differentialgleichung (4.18) und den Anfangswerten  $x(t_0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = c_n$  mit  $t_0 \in I$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  hat genau eine Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- 2) Die Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichung (4.18) ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum: Dazu sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Lösungsfundamentalsystem von (4.19). Dann gilt  $\varphi_i = [x_i \ x'_i \ \dots \ x_i^{(n-1)}]^\top$  für Funktionen  $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die Lösungen von (4.18) sind. Weiter sind  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig, denn sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , so dass  $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ , so erhalten wir durch sukzessives Differenzieren dieser Gleichung auch

$$\alpha_1 x_1^{(j)} + \cdots + \alpha_n x_n^{(j)} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Hieraus folgt  $\alpha_1 \varphi_1 + \cdots + \alpha_n \varphi_n = 0$  und damit  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ , da  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Lösungsfundamentalsystem von (4.19) bilden. Umgekehrt lässt sich jede Lösung von (4.18) als Linearkombination der Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  darstellen. (Klar?)

- 3) Die  $n$  Lösungen  $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  der homogenen Differentialgleichung (4.18) sind genau dann linear unabhängig, wenn für die sogenannte *Wronski-Determinante*

$$W(t) := \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & \cdots & x'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in I$  gilt (bzw. äquivalent dazu für ein  $t \in I$ ), dass  $W(t) \neq 0$ . (Die Wronski-Determinante entspricht dabei der Determinante der Matrix  $\Phi(t)$  aus Bemerkung 4.17 für die Differentialgleichung (4.19).)

## 4.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt untersuchen wir die lineare Differentialgleichung

$$x' = Ax + b$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , d.h. die Matrix  $A$  und die rechte Seite  $b$  hängen nicht explizit von  $t \in \mathbb{R}$  ab, sondern sind konstant. Gesucht sind dann Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir werden uns dabei im wesentlichen auf den homogenen Fall

$$x' = Ax \tag{4.20}$$

beschränken, d.h. wir nehmen an, dass  $b = 0$  gilt. Im Spezialfall  $n = 1$  kennen wir die Lösung schon: Ist  $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1,1}$ , so hat nach Analysis I jede Lösung der Differentialgleichung (4.20) die Form  $x(t) = ce^{at}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und ein  $c \in \mathbb{R}$ . Daher versuchen wir es einmal mit dem folgenden Ansatz. Wir nehmen einfach an, dass eine Lösung der Form

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{\lambda t} v$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und ein  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  existiert. Trifft diese Annahme zu, so erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung, dass  $\lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, können wir durch  $e^{\lambda t}$  dividieren und erhalten

$$Av = \lambda v.$$

Diese Gleichung ist Ihnen aus der Linearen Algebra bekannt. Es ist die sogenannte *charakteristische Gleichung*, die Sie dort für die Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren verwendet haben. Tatsächlich ist die Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eine der Hauptanwendungen der Eigenwerttheorie, wenn auch längst nicht die einzige.

Im Folgenden geht es darum, ein Fundamentalsystem von Lösungen für unsere homogene Differentialgleichung (4.20), also die Differentialgleichung  $x' = Ax$ , zu bestimmen. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

*Fall 1:  $A$  ist diagonalisierbar über  $\mathbb{R}$ , d.h. es gibt eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus Eigenvektoren von  $A$ .*

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  die zu  $v_1, \dots, v_n$  gehörigen Eigenwerte von  $A$ , d.h. es gilt  $Av_i = \lambda_i v_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . (Die Eigenwerte sind sämtlich reell, da auch die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  reell sind.) In diesem Fall erhalten wir sofort durch  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  mit

$$\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$$

für  $i = 1, \dots, n$  ein Lösungsfundamentalsystem von  $x' = Ax$ , denn nach unseren Vorbemerkungen sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  Lösungen der Differentialgleichung und wegen  $\varphi_i(0) = v_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und der linearen Unabhängigkeit von  $v_1, \dots, v_n$  sind auch  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  nach Satz 4.15 linear unabhängig, bilden also ein Lösungsfundamentalsystem.

**Beispiel 4.22** Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Methoden aus der Linearen Algebra berechnen Sie die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$ , sowie die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ein Lösungsfundamentalsystem  $\varphi_1, \varphi_2$  der Differentialgleichung

$$x' = Ax \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = x_1 \end{cases}$$

ist dann durch die Funktionen

$$\varphi_1 : t \mapsto \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

gegeben. Rechnen Sie es nach!

*Fall 2:  $A$  ist nicht diagonalisierbar über  $\mathbb{R}$ , aber diagonalisierbar über  $\mathbb{C}$ .*

In diesem Fall können wir den Umweg über die komplexen Zahlen gehen. Tatsächlich lassen sich alle Resultate aus dem vorigen Abschnitt auf den Fall verallgemeinern, dass wir Funktionen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  als Lösungen von linearen Differentialgleichungen zulassen. (Übung: Überprüfen Sie das!) Dann liefert uns der Ansatz  $x(t) = e^{\lambda t}v$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  komplexe Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  unserer Differentialgleichung  $x' = Ax$ , und wegen der Diagonalisierbarkeit von  $A$  erhalten wir dann ein komplexes Lösungsfundamentalsystem. Schön und gut, aber was machen wir, wenn wir doch lieber ein reelles Lösungsfundamentalsystem hätten? Nach Satz 4.15 muss ein solches schließlich existieren! Hier können wir ausnutzen, dass komplexe Eigenwerte von reellen Matrizen in komplex konjugierten Paaren auftreten. Ist z.B.  $\lambda = \alpha + \beta i$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ , ein Eigenwert von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor  $v = u + iw$ ,  $u, w \in \mathbb{R}^n$ , so gilt  $Av = \lambda v$ , woraus wir

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}$$

erhalten, d.h.  $\bar{v} = u - iw$  ist ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$ . Damit erhalten wir gleich zwei komplexe Lösungen  $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit

$$x_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}(u + iw) \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}(u - iw) = \overline{x_1(t)}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist also die zweite Lösung in jedem  $t \in \mathbb{R}$  komplex konjugiert zur ersten Lösung, d.h. es gilt  $x_2 = \overline{x_1}$ . Betrachten wir nun Real- und Imaginärteil von  $x_1$ ,

d.h. die Funktionen  $x_{re}, x_{im} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\begin{aligned} x_{re}(t) &= \operatorname{Re}(x_1(t)) = \operatorname{Re}\left(e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u + iw)\right) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w) \\ &= \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) \\ \text{und } x_{im}(t) &= \operatorname{Im}(x_1(t)) = \operatorname{Im}\left(e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u + iw)\right) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)w + \sin(\beta t)u) \\ &= \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)) \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ , so folgt  $x_{re} + i \cdot x_{im} = x_1$  und  $x_{re} - i \cdot x_{im} = x_2$  bzw.

$$\operatorname{Span}(x_1, x_2) = \operatorname{Span}(x_{re}, x_{im})$$

in  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ . Da  $x_1$  und  $x_2$  linear unabhängig sind, sind dies auch  $x_{re}$  und  $x_{im}$ . Wir können also in einem komplexen Lösungsfundamentalsystem die komplexen Funktionen  $x_1$  und  $x_2$  durch die reellen Funktionen  $x_{re}$  und  $x_{im}$  ersetzen. Machen wir dies für alle komplex konjugierten Paare von Lösungen, so erhalten wir auf diese Weise ein reelles Fundamentalsystem.

**Beispiel 4.23** Wir kommen auf die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.18 zurück. Damals hatten wir ein Lösungsfundamentalsystem “geraten”, nun wollen wir es systematisch bestimmen. Mit Methoden der Linearen Algebra berechnen Sie schnell die beiden Eigenwerte  $i$  und  $-i$  mit den zugehörigen Eigenvektoren  $\begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^\top$  bzw.  $\begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}^\top$ . Damit erhalten wir die komplexen Lösungen  $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  mit

$$x_1(t) = e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Als reelle Lösungen erhalten wir  $x_{re}, x_{im} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\begin{aligned} x_{re}(t) &= \cos t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \\ \text{und } x_{im}(t) &= \cos t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und damit (bis auf ein Vorzeichen) das Lösungsfundamentalsystem aus Beispiel 4.18.



*Fall 3:  $A$  ist nicht diagonalisierbar (über  $\mathbb{C}$ ).*

Das Hauptproblem in diesem Fall ist, dass es keine Basis des  $\mathbb{C}^n$  (geschweige denn des  $\mathbb{R}^n$ ) aus Eigenvektoren von  $A$  gibt. Stattdessen wissen wir aus der Linearen Algebra, dass  $A$  (zumindest über  $\mathbb{C}$ ) ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform ist, d.h. es gibt  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  mit

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix},$$

wobei jede Untermatrix  $J_i$  ein sogenannter *Jordanblock* ist, d.h. es gibt einen Eigenwert  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  von  $A$ , so dass

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i, n_i} \quad \text{mit } n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, r.$$

(Für Details verweisen wir dabei auf die Vorlesung Lineare Algebra. Beachten Sie hier nur, dass die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  nicht paarweise verschieden sein müssen, d.h. es ist möglich, dass es mehrere Jordanblöcke zum gleichen Eigenwert gibt.) Die Spalten von  $S$  bilden dann eine Basis des  $\mathbb{C}^n$  und bestehen aus sogenannten *Jordan-Ketten*. Genauer gesagt gilt

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n_1} & s_{2,1} & \dots & s_{2,n_2} & \dots & s_{r,1} & \dots & s_{r,n_r} \end{bmatrix}$$

sowie

$$(A - \lambda_i I_n) s_{i,1} = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda_i I_n) s_{i,j} = s_{i,j-1}$$

für  $j = 2, \dots, n_i$  und  $i = 1, \dots, r$ . (Beachten Sie dabei, dass  $s_{i,j}$  trotz der zwei Indizes hier ein Vektor ist und nicht etwa für den  $(i, j)$ -Eintrag der Matrix  $S$  steht.) Es sind also nur die Vektoren  $s_{i,1}$ ,  $i = 1, \dots, r$  Eigenvektoren von  $A$ , die übrigen Vektoren sind sogenannte *Hauptvektoren*: Als einen *Hauptvektor  $k$ -ter Stufe* zu einem Eigenwert  $\lambda$  einer Matrix  $B \in \mathbb{C}^{n,n}$  bezeichnet man dabei einen Vektor  $v$  mit der Eigenschaft

$$(B - \lambda I_n)^k v = 0 \quad \text{und} \quad (B - \lambda I_n)^{k-1} v \neq 0.$$

Insbesondere sind Eigenvektoren auch Hauptvektoren erster Stufe. Wie sie leicht feststellen ist  $s_{i,j}$  ein Hauptvektor  $j$ -ter Stufe zum Eigenwert  $\lambda_i$  unserer Matrix  $A$ , denn es gilt

$$(A - \lambda_i I_n)^{j-1} s_{i,j} = (A - \lambda_i I_n)^{j-2} s_{i,j-1} = \dots = s_{i,1} \neq 0,$$

sowie  $(A - \lambda_i I_n)^j s_{i,j} = (A - \lambda_i I_n) s_{i,1} = 0$ .

Der folgende Satz zeigt uns, wie wir aus Hauptvektoren von  $A$  nun Lösungen unserer Differentialgleichung  $x' = Ax$  erhalten können.

**Satz 4.24** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  und sei  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ein Hauptvektor  $k$ -ter Stufe von  $A$ , d.h. es gibt einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  von  $A$  und ein  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  mit  $(A - \lambda I_n)^k v = 0$ , aber  $(A - \lambda I_n)^{k-1} v \neq 0$ . Dann ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$x(t) = e^{\lambda t} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $x' = Ax$  mit  $x(0) = v$ .

**Beweis:** Wegen  $(A - \lambda I_n)^k v = 0$ , erhalten wir insbesondere

$$x(t) = e^{\lambda t} \left( \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . (Beachten Sie, dass der obere Index der Summe nun  $k$  ist, d.h. wir haben einen “Null-Summanden” hinzugefügt.) Ableiten liefert unter Nutzung der Produktregel, dass

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \left( \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right) + e^{\lambda t} \left( \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda I_n)^j v \right) \\ &= \lambda x(t) + e^{\lambda t} (A - \lambda I_n) \left( \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda I_n)^{j-1} v \right) \\ &= \lambda x(t) + (A - \lambda I_n) \cdot \left( e^{\lambda t} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right) \right) \\ &= \lambda x(t) + (A - \lambda I_n) x(t) \\ &= Ax(t) \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Außerdem gilt  $x(0) = v$ , d.h.  $x$  ist in der Tat eine Lösung des Anfangswertproblems  $x' = Ax$  und  $x(0) = v$ .  $\square$

Falls das charakteristische Polynom von  $A$  über  $\mathbb{R}$  in Linearfaktoren zerfällt, d.h. wenn die Matrix  $A$  nur reelle Eigenwerte hat, dann existiert eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus Eigenvektoren und Hauptvektoren von  $A$ . Daraus erhalten wir dann mit Satz 4.24 unmittelbar ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung  $x' = Ax$ . Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen folgt dabei aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  und Teil 3) von Satz 4.15.

Sollte  $A$  jedoch auch komplexe Eigenwerte besitzen, so können wir wieder den Umweg über komplexe Zahlen gehen und danach mit Hilfe von Real- und Imaginärteil von komplex konjugierten Paaren von Lösungen ein reelles Fundamentalsystem bestimmen.

**Beispiel 4.25** Gegeben sei die Differentialgleichung  $x' = Ax$  mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Diese Matrix ist bereits in Jordanscher Normalform und daher bilden die Einheitsvektoren  $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_3$  eine *Jordan-Kette*, d.h. es gilt  $(A - \lambda I_3)v_2 = v_1$  und  $(A - \lambda I_3)v_3 = v_2$  sowie

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0, \quad (A - \lambda I_3)^2 v_2 = 0, \quad (A - \lambda I_3)^3 v_3 = 0.$$

Folglich ist  $v_1$  ein Eigenvektor von  $A$  und  $v_2$  und  $v_3$  sind Hauptvektoren von  $A$  zweiter bzw. dritter Stufe. Mit Hilfe von Satz 4.24 erhalten wir nun ein Lösungsfundamentalsystem  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  durch

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} v_1, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t} ((A - \lambda I_3)v_1 + tv_1) = e^{\lambda t} (v_2 + tv_1)$$

und

$$\varphi_3(t) = e^{\lambda t} ((A - \lambda I_3)^2 v_1 + t(A - \lambda I_3)v_1 + \frac{t^2}{2}v_1) = e^{\lambda t} (v_3 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_1)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ausrechnen liefert dann

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad \varphi_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Als Anwendung unserer bisherigen Ergebnisse betrachten wir die *homogene lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0, \quad (4.21)$$

wobei  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Auch hier können wir wieder mit dem klassischen Lösungsansatz " $x(t) = e^{\lambda t}$ " beginnen und erhalten durch Einsetzen in die Differentialgleichung (und Division durch  $e^{\lambda t}$ ) die *charakteristische Gleichung*

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (4.22)$$

Das der Polynomabbildung  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto p(\lambda)$  zu Grunde liegende Polynom  $p$  nennen wir das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung (4.21). Der folgende Satz liefert dann ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung (4.21), wobei wir in manchen Fällen wieder einmal den Umweg über die komplexen Zahlen gehen müssen.

**Satz 4.26** Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung (4.21) mit dem charakteristischen Polynom  $p$  wie in (4.22). Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  die paarweise verschiedenen Nullstellen von  $p$  mit den Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_{k-1}$  bzw.  $m_k$ , dann bilden die Funktionen  $x_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$x_{i,j}(t) = t^{j-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, k$$

ein komplexes Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung (4.21).

**Beweis:** Wir benutzen erneut den Trick mit der Ordnungsreduktion und betrachten das zugehörige System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung  $y' = Ay$ , wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Dann ist  $p$  das charakteristische Polynom von  $A$ . (Dies ist Ihnen entweder schon aus der Linearen Algebra bekannt, weil Sie feststellen, dass  $A$  einfach nur die sogenannte *Begleitmatrix* des Polynoms  $p$  ist, oder Sie prüfen es nach, indem Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace die Determinante  $\det(\lambda I_n - A)$  berechnen und so  $p(\lambda)$  erhalten.) Folglich sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von  $A$  mit den algebraischen Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_k$ . Die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts  $\lambda_j$  ist jeweils 1, denn wie man sofort sieht, sind die ersten  $n-1$  Zeilen von  $\lambda_j I_n - A$  linear unabhängig, d.h. die Matrix hat den Rang mindestens  $n-1$ . Mit dem Dimensionssatz aus der Linearen Algebra folgt dann  $\dim \text{Kern}(\lambda_j I_n - A) \leq 1$ , wobei hier sogar Gleichheit vorliegen muss, da  $\lambda_j$  ein Eigenwert ist und daher der Kern von  $\lambda_j I_n - A$  nicht nur aus dem Nullvektor besteht.

Folglich hat  $A$  eine Basis  $(v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k})$  aus Hauptvektoren von  $A$ , wobei  $v_{i,j}$  ein Hauptvektor  $j$ -ter Stufe zum Eigenwert  $\lambda_i$  ist. Nach Satz 4.24 bilden dann die Funktionen  $y_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$y_{i,j}(t) = e^{\lambda_i t} \left( \sum_{\ell=0}^{j-1} \frac{t^\ell}{\ell!} (A - \lambda_i I_n)^\ell v_{i,j} \right), \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.23)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  ein Lösungsfundamentalsystem der linearen Differentialgleichung  $y' = Ay$ . Bezeichnen wir die erste Komponente von  $y_{i,j}$  mit  $\tilde{x}_{i,j}$ , so bilden nach unseren Ausführungen in Abschnitt 4.3 die Funktionen  $\tilde{x}_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, m_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung (4.21). Mit einem Blick auf (4.23) stellen wir fest, dass die Funktionen  $\tilde{x}_{i,j}$  die Form

$$\tilde{x}_{i,j}(t) = e^{\lambda_i t} q_{i,j}(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  haben, wobei  $q_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom mit  $\deg q_{i,j} \leq j-1$  ist. Daher gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$ , dass

$$\tilde{x}_{i,j} \in \text{Span}(e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{j-1} e^{\lambda_i t}) = \text{Span}(x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i})$$

für alle  $j = 1, \dots, m_i$ . Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $\tilde{x}_{i,j}$  folgt aus Dimensionsgründen

$$\text{Span}(\tilde{x}_{i,1}, \dots, \tilde{x}_{i,m_i}) = \text{Span}(x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i})$$

für  $i = 1, \dots, k$ . Dies beweist die Behauptung des Satzes.  $\square$

**Beispiel 4.27** Wir betrachten die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' - 6x' + ax = 0$$

und bestimmen deren Lösungen für verschiedene Werte des Parameters  $a \in \{8, 9, 10\}$ . Die charakteristische Gleichung ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + a$$

gegeben.

- i) Im Fall  $a = 8$  hat  $p$  die Nullstellen  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 4$ . Folglich ist ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung gegeben durch die Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi_1(t) = e^{2t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{4t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

- ii) Im Fall  $a = 9$  hat  $p$  eine doppelte Nullstelle in  $\lambda = 3$ . Also bilden die Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi_1(t) = e^{3t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = te^{3t}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  ein Lösungsfundamentalsystem. Dies wollen wir für die Funktion  $\varphi_2$  einmal nachprüfen. Tatsächlich erhalten wir für alle  $t \in \mathbb{R}$ , dass

$$\varphi_2''(t) - 6\varphi_2'(t) + 9\varphi_2(t) = 9te^{3t} + 6e^{3t} - 6(3te^{3t} + e^{3t}) + 9te^{3t} = 0.$$

- iii) Im Fall  $a = 10$  hat  $p$  die komplexen Nullstellen  $\lambda_1 = 3+i$  und  $\lambda_2 = 3-i$ . Wir erhalten damit das komplexe Lösungsfundamentalsystem  $t \mapsto e^{(3+i)t}$ ,  $t \mapsto e^{(3-i)t}$  bzw. das reelle Lösungsfundamentalsystem

$$t \mapsto e^{3t} \cos t, \quad t \mapsto e^{3t} \sin t.$$

Für den Fall einer inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten benötigen wir noch eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Diese können wir wie üblich mit dem Prinzip der Variation der Konstanten bestimmen. Für spezielle rechte Seiten gibt es noch ein paar weitere Tricks, aber dafür verweisen wir auf die Vorlesung *Differentialgleichungen*.



# Kapitel 5

## Fourieranalysis

Dieses Kapitel gehört thematisch ganz klar zu den Grundlagen der Analysis, wir mussten jedoch leider aus Zeitgründen auf eine detaillierte Behandlung in der Vorlesung verzichten. Da das Thema aber wichtig ist und Sie es je nach weiterer Ausrichtung Ihres Studiums vielleicht auch Kenntnisse darüber benötigen, liefern wir die fehlenden Details an dieser Stelle nach. Dieses Kapitel wird Ihnen daher wärmstens zum Selbststudium empfohlen.

Das Hauptziel der Fourieranalysis ist die Approximation von periodischen Funktionen, da dies eine wichtige Aufgabe in der Signalverarbeitung und anderen Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist. Beim Stichwort “*Approximation*” fällt uns vielleicht zunächst die Taylorapproximation ein. Diese ist für periodische Funktionen allerdings nicht geeignet, da hier gegebene Funktionen durch Polynome approximiert werden, die nun leider mal alles andere als periodisch sind. Daher erhält man zwar in einem kleinen Intervall um den Entwicklungspunkt gute Näherungswerte für die gegebene Funktion, i.A. aber nicht, wenn man sich weit vom Entwicklungspunkt entfernt. Viel naheliegender ist daher, periodische Funktionen durch einfachere (oder zumindest gut zu analysierende) Funktionen zu approximieren, die selbst periodisch sind, da man in diesem Fall darauf hoffen kann, gute Näherungen auf dem gesamten Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  zu erzielen.

Die uns am besten vertrauten periodischen Funktionen sind natürlich die Sinus- und Cosinusfunktionen, deren Periode von  $2\pi$  wir durch Strecken und Stauchen beliebig anpassen können. Tatsächlich lassen sich periodische Funktionen durch Überlagerung von Sinus- und Cosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen im Allgemeinen gut approximieren, was wir im Folgenden im Detail untersuchen wollen.

Optimal wäre es, wenn sie dieses Kapitel erst lesen, nachdem Sie sich mit Kapitel 1 der Analysis III beschäftigt haben und Ihnen der Begriff des Lebesgue-Integrals vertraut ist. Sie können dieses Kapitel aber im wesentlichen auch ohne diesen Hintergrund verstehen, indem Sie immer dann, wenn von Integrierbarkeit die Rede ist, an Riemann-Integrierbarkeit denken. Ab Abschnitt 5.2 müssen Sie dann allerdings die Existenz des Funktionenraums  $L_2([a, b])$  hinnehmen und an seine genannten Eigenschaften glauben.

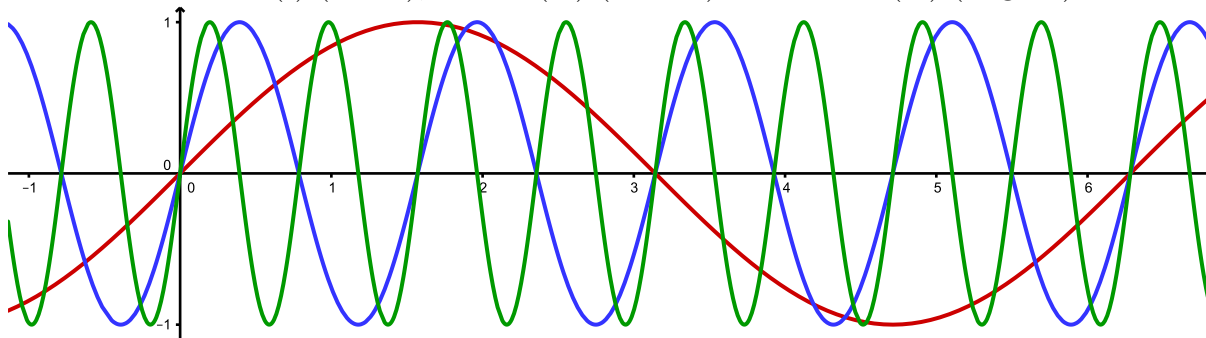
## 5.1 Fourierpolynome

Zunächst werden wir den Begriff der Periodizität präzisieren.

**Definition 5.1** Sei  $T > 0$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $T$ -periodisch, falls  $f(t+T) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

**Bemerkung 5.2** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für ein  $T > 0$  eine  $T$ -periodische Funktion, dann ist  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion, d.h. durch Strecken oder Stauchen können wir aus jeder periodischen Funktion eine  $2\pi$ -periodische Funktion machen. Daher werden wir im Folgenden der Einfachheit halber ausschließlich den Fall  $T = 2\pi$  betrachten.

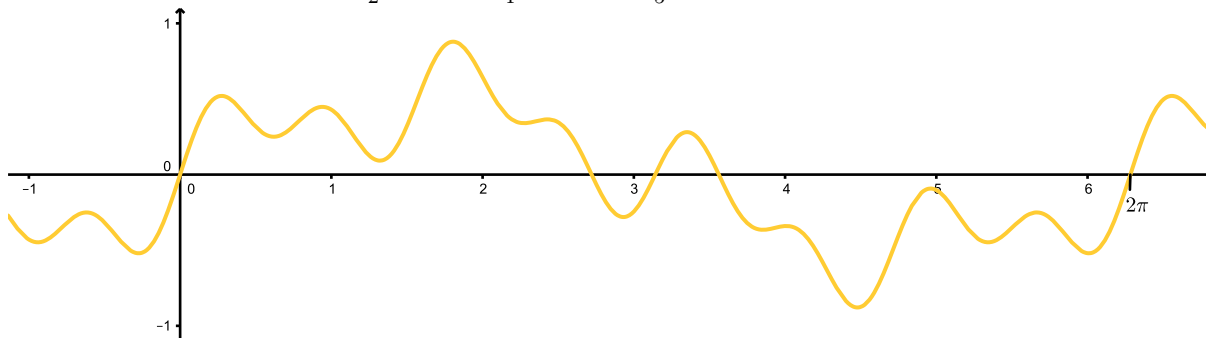
**Beispiel 5.3** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann sind die Funktionen  $t \mapsto \sin(kt)$  und  $t \mapsto \cos(kt)$  für  $k \neq 0$  jeweils  $\frac{2\pi}{k}$ -periodisch, aber andererseits auch  $2\pi$ -periodisch. Die folgende Skizze zeigt die Funktionen  $t \mapsto \sin(t)$  (in rot),  $t \mapsto \sin(4t)$  (in blau) und  $t \mapsto \sin(8t)$  (in grün):



Dann sind aber auch Linearkombinationen dieser Funktionen, also Funktionen der Form

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F_n(t) := \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) + c \quad (5.1)$$

mit  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{R}$  wieder  $2\pi$ -periodische Funktionen. (Solche Funktionen bezeichnen wir als *trigonometrische Polynome*.) Die nachfolgende Skizze zeigt die  $2\pi$ -periodische Funktion  $t \mapsto \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{1}{5} \sin(8t)$ .





Ziel ist im folgenden die Approximation  $2\pi$ -periodischer Funktionen durch Linearkombinationen von Sinus- und Cosinusfunktionen wie in (5.1). Um zu entscheiden, wie wir dazu die Parameter  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c$  am geschicktesten wählen, benötigen wir ein wenig Hintergrundwissen. Dazu betrachten wir den Funktionenraum  $C([-\pi, \pi])$  der stetigen (reellwertigen) Funktionen auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$ . Dieser ist ein euklidischer Raum, denn durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt \quad (5.2)$$

wird ein Skalarprodukt auf  $C([-\pi, \pi])$  definiert. (Übung. Statt des Faktors  $\frac{1}{\pi}$  kann dabei auch eine andere Konstante gewählt werden, unsere spezielle Wahl wird sich aber im Folgenden als nützlich erweisen.) Betrachten wir dann den Unterraum

$$\mathcal{V}_n := \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) + c \mid a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{R} \right\}$$

so bilden die Funktionen (die wir der Einfachheit halber hier in der unpräzisen Schreibweise “ $f(t)$ ” statt “ $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ ” auflisten)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(kt), \cos(kt), \quad k = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}_n$ , denn wie sie leicht nachrechnen gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(\ell t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell \\ 0 & \text{für } k \neq \ell \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \sin(\ell t) dt = 0$$

für alle  $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , sowie

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(kt) dt = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktionen in (5.3) ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{V}_n$  bilden. Da sich offenbar jedes Element  $F \in \mathcal{V}_n$  auch als Linearkombination dieser Funktionen darstellen lässt, haben wir also eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}_n$  gefunden. Der folgende Satz aus der Linearen Algebra zeigt uns, wie wir diese Information geschickt ausnutzen können.

**Satz 5.4** Sei  $\mathcal{V}$  ein euklidischer oder unitärer Raum (d.h. ein reeller oder komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt<sup>1</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ), sei  $\mathcal{W}$  ein  $n$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathcal{V}$  mit Orthonormalbasis  $(u_1, \dots, u_n)$  und sei  $v \in \mathcal{V}$ . Dann hat die Orthogonalprojektion

$$P_{\mathcal{W}}(v) := \sum_{k=1}^n \langle u_k, v \rangle u_k \in \mathcal{W}$$

von  $v$  auf  $\mathcal{W}$  die folgenden Eigenschaften:

- 1)  $v - P_{\mathcal{W}}(v) \perp \mathcal{W}$ , d.h.  $v - P_{\mathcal{W}}(v)$  ist zu allen  $w \in \mathcal{W}$  orthogonal.
- 2)  $\|v - P_{\mathcal{W}}(v)\| = \min_{w \in \mathcal{W}} \|v - w\|$ , wobei Gleichheit nur für  $w = P_{\mathcal{W}}(v)$  gilt.

Hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|$  die durch das Skalarprodukt auf  $\mathcal{V}$  induzierte Norm auf  $\mathcal{V}$ .

**Beweis:** siehe Lineare Algebra II.  $\square$

Betrachten wir nun eine Funktion  $f \in C([-\pi, \pi])$ , dann erhalten wir die Koeffizienten der Orthogonalprojektion  $F_n \in \mathcal{V}_n$ ,

$$x \mapsto F_n(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) + \tilde{c} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

von  $f$  auf  $\mathcal{V}_n$  durch

$$a_k = \langle f, \cos(kt) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad (5.4)$$

$$b_k = \langle f, \sin(kt) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad (5.5)$$

$$\tilde{c} = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2}} dt. \quad (5.6)$$

Die konstante Funktion  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist wegen des unhandlichen Wurzelterms ein kleiner Störenfried in unserer Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}_n$ . Daher ersetzen wir ihn einfach durch die konstante Funktion  $t \mapsto 1 = \cos(0t)$ . Dann gilt zwar  $\langle \cos(0t), \cos(0t) \rangle = 2$ , aber dies macht eigentlich gar nichts aus, denn dafür können wir unsere Darstellung vereinheitlichen. Setzen wir  $a_0 = \tilde{c} \cdot \sqrt{2}$  bzw.  $a_0 = 2c$  mit  $c$  wie in (5.1), so gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(0t) dt = \langle f, \cos(0t) \rangle$$

und dieses Integral passt wunderbar zu den Formeln für  $a_1, \dots, a_n$ .

Betrachten wir nun wieder eine  $2\pi$ -periodische Funktion, so kommt es eigentlich nur auf deren Verlauf im Intervall  $[-\pi, \pi]$  an und für die Berechnung der Integrale in (5.4)–(5.6) benötigen wir nicht einmal die Stetigkeit. Daher bietet sich auf Grund unserer bisherigen Beobachtungen die folgenden Definition an.

---

<sup>1</sup>In dieser Veranstaltung sind Skalarprodukte im komplexen Fall im zweiten Argument linear und im ersten Argument semilinear.

**Definition 5.5** Sei  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann heißen

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, dt \quad \text{und} \quad b_\ell := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(\ell t) \, dt$$

für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ . Ferner heißt

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

das  $n$ -te Fourierpolynom von  $f$ .

**Beispiel 5.6** Wir betrachten die Sägezahnfunktion, die durch die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf dem Intervall  $[-\pi, \pi[$  durch

$$t \mapsto f(t) = \begin{cases} -t & \text{für } t \in ]-\pi, \pi[, \\ 0 & \text{für } t = -\pi \end{cases}$$

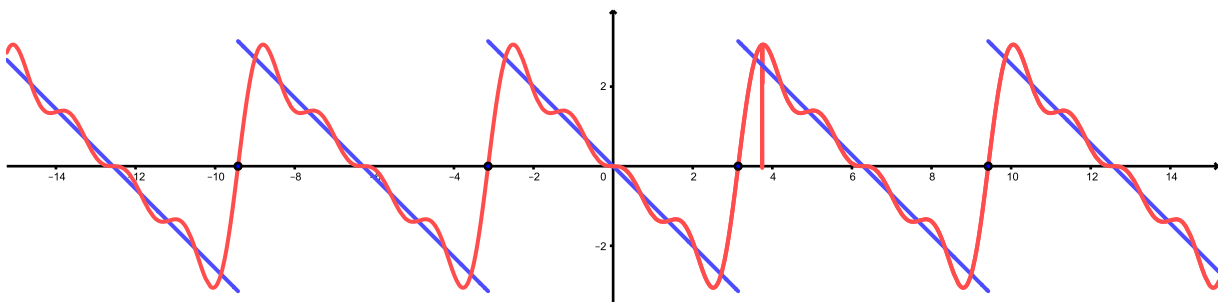
gegeben ist. Dann erhalten wir (wie sie leicht mittels partieller Integration nachrechnen)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t) \cos(kt) \, dt = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t) \sin(kt) \, dt = (-1)^k \frac{2}{k}.$$

Somit hat das  $n$ -te Fourierpolynom  $F_n$  von  $f$  die Form

$$F_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{2}{k} \sin(kt).$$

Die nachfolgende Skizze zeigt den Graphen der Sägezahnfunktion (in blau) und den Graphen des zugehörigen 4-ten Fourierpolynoms (in rot):



Auf den ersten Blick vielleicht überraschend ergab sich in Beispiel 5.6, dass die zu den Cosinusfunktionen gehörenden Fourierkoeffizienten  $a_k$  alle verschwinden. Dies war allerdings kein Zufall, wie wir im Folgenden einsehen werden!

**Definition 5.7** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1)  $f$  heißt gerade, falls  $f(-t) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.
- 2)  $f$  heißt ungerade, falls  $f(-t) = -f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

**Beispiel 5.8** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Die Funktionen  $t \mapsto \cos(kt)$  und  $t \mapsto e^{-x^2}$  sind gerade, die Funktionen  $t \mapsto \sin(kt)$  dagegen ungerade. Ist

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

eine Polynomfunktion, so ist  $p$  genau dann gerade, wenn  $a_1 = a_3 = \dots = a_{2[\frac{n}{2}]} = 0$  gilt, d.h. wenn  $p$  nur aus Monomen  $a_k x^k$  mit geraden Potenzen von  $x$  besteht. Analog ist  $p$  ungerade, wenn  $p$  nur aus Monomen mit ungeraden Potenzen von  $x$  besteht.

**Bemerkung 5.9** Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1) Sind  $f$  und  $g$  beide gerade oder beide ungerade, so ist  $fg$  gerade.
- 2) Ist  $f$  gerade und  $g$  ungerade, so ist  $fg$  ungerade.
- 3) Ist  $f$  ungerade, so gilt  $f(0) = 0$ .
- 4) Sei  $f$  differenzierbar. Ist  $f$  gerade, so ist  $f'$  ungerade. Analog folgt, dass  $f'$  gerade ist, wenn  $f$  ungerade ist. (Übung.)
- 5) Ist  $f$  ungerade und integrierbar über jedem kompakten Intervall, sowie  $a \geq 0$ , so gilt

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

Für den Fall, dass  $f$  stetig ist, folgt dies sofort aus der Substitutionsregel, denn mit der Substitution  $s = -t$  gilt

$$\begin{aligned} \int_a^0 f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = - \int_a^0 f(-s) ds + \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^a f(-s) ds + \int_0^a f(t) dt = 0, \end{aligned}$$

da  $f(-t) = -f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Die Aussage bleibt auch dann richtig, wenn  $f$  nur integrierbar, aber nicht stetig ist. (Übung.)

- 6) Sei  $f$  eine über jedem kompakten Intervall integrierbare  $2\pi$ -periodische Funktion. Dann gilt für alle  $a \in \mathbb{R}$ , dass

$$\int_a^{2\pi+a} f(t) dt = \int_a^\pi f(t) dt + \int_\pi^{2\pi+a} f(t) dt = \int_a^\pi f(t) dt + \int_{-\pi}^a f(t) dt = \int_{-\pi}^\pi f(t) dt,$$

wobei wir im vorletzten Schritt die  $2\pi$ -Periodizität von  $f$  ausgenutzt haben.

- 7) Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische, ungerade Funktion. Dann ist nach 2) auch  $t \mapsto f(t) \cos(kt)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ungerade und mit 5) und 6) folgt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

- 8) Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische, gerade Funktion. Dann ist  $t \mapsto f(t) \sin(kt)$  nach 2) für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ungerade und mit 5) und 6) folgt

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Damit erklärt sich unsere Beobachtung in Beispiel 5.6. Die Sägezahnfunktion ist eine ungerade Funktion und daher sind die Fourierkoeffizienten  $a_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gleich Null.

Da das Rechnen mit Sinus- und Cosinusfunktion bisweilen unhandlich werden kann, ist in der Fourieranalysis der Umweg über komplexe Zahlen weit verbreitet, der auf der Eulerschen Formel  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  basiert. Dafür benötigen wir allerdings ein Integral über komplexwertige Funktionen, dass in Hinblick auf Definition 4.5 einfach "komponentenweise" definiert werden kann.

**Definition 5.10** Seien  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $f := u + iv : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann heißt  $f$  integrierbar über  $[a, b]$  und

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

heißt das Integral von  $f$  über  $[a, b]$ .

**Beispiel 5.11** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{ikt} dt &= \int_a^b \cos(kt) dt + i \int_a^b \sin(kt) dt = \frac{1}{k} \sin(kt) \Big|_a^b - \frac{i}{k} \cos(kt) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{ki} (\cos(kt) + i \sin(kt)) \Big|_a^b = \frac{1}{ki} e^{ikt} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Dies ist kein Zufall, denn tatsächlich lässt sich leicht zeigen, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch für stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  gültig bleibt. (Übung)

**Bemerkung 5.12** Unter Ausnutzung der Formeln 2) in Bemerkung 5.21 aus Analysis I erhält man für ein trigonometrisches Polynom mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  mithilfe der Definition

$$c_k := \begin{cases} \frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2}ib_k & \text{für } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}a_0 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}ib_k & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \end{cases}$$

die folgende alternative und vereinfachte Darstellung:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) &= c_0 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2}a_k(e^{ikt} + e^{-ikt}) + \frac{1}{2}ib_k(-e^{ikt} + e^{-ikt}) \right) \\ &= c_0 e^{i0t} + \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-ikt} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $c_k$  können wir dabei wie folgt berechnen: Für  $k \geq 0$  gilt

$$c_k = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}ib_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt - \frac{1}{2\pi}i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

und für  $k = -\ell \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  erhalten wir

$$c_k = c_{-\ell} = \overline{c_{\ell}} = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\ell t} dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\ell t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

d.h. die Formel ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$  einheitlich.

**Definition 5.13** Sei  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann heißen die komplexen Zahlen

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

für  $k \in \mathbb{Z}$  die komplexen Fourierkoeffizienten von  $f$ . Ferner heißt

$$F_n^c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$$

das  $n$ -te komplexe Fourierpolynom von  $f$ .

**Bemerkung 5.14** Auch im Fall der komplexen Fourierpolynome gibt es eine schöne Interpretation der betrachteten Funktionen  $v_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{ikt}$ . Betrachten wir nämlich den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\mathcal{V}_n^c := \left\{ t \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \mid c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C} \right\},$$

so ist dieser ein Unterraum des unitären Raums  $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

## 5.2 Fourierreihen in Hilberträumen

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  das  $n$ -te Fourierpolynom mithilfe einer Orthonormalbasis darstellen und eine dadurch schöne Formel für die Berechnung der Fourierkoeffizienten erhalten konnten. Diesen Zusammenhang werden wir jetzt abstrahieren und dabei den Begriff der *Fourierreihe* einführen.

**Definition 5.15** 1) Ein euklidischer oder unitärer Vektorraum  $\mathcal{V}$  (d.h. ein reellen bzw. komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt) heißt Prähilbertraum.

2) Ein Prähilbertraum heißt Hilbertraum, wenn er bzgl. der durch sein Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass uns die Lineare Algebra lehrt, dass die durch ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm  $\| \cdot \|$  auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum  $\mathcal{V}$  durch die Definition

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

für alle  $v \in \mathcal{V}$  gegeben ist.

**Beispiel 5.16** 1) Jeder endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Vektorraum ist ein Hilbertraum. Für den reellen Fall folgt dies unmittelbar aus Satz ??, der sich so wie er ist auch auf komplexe Räume übertragen lässt. (Klar? Wenn nicht, Übung.) Speziell sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  versehen mit dem Standardskalarprodukt Hilberträume.

2) Der Raum  $C([a, b])$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

(wir verzichten hier der Einfachheit halber auf die zusätzliche Multiplikation mit einer Konstanten wie z.B.  $\frac{1}{\pi}$ ) ist ein Prähilbertraum, aber *kein* Hilbertraum, da es ihm an der Vollständigkeit mangelt (Übung). Er ist allerdings Teilraum eines Hilbertraums, nämlich des Raums  $L_2([a, b])$ . Diesen Raum werden wir zwar erst im Abschnitt 1.8 der Analysis III kennenlernen, wir werden seine Existenz aber bereits an dieser Stelle hinnehmen und an seine Vollständigkeit glauben. Grob können Sie sich unter  $L_2([a, b])$  die Menge aller Funktionen  $f$  vorstellen, für die die Funktion  $|f|^2$  integrierbar ist. Für diese ist dann insbesondere die Norm

$$\|f\|_{L_2} := \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

wohldefiniert, die wir von nun an als  $L_2$ -Norm bezeichnen werden. Im komplexen Fall betrachten wir analog das Skalarprodukt bzw. die Norm

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}g(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_{L_2} := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Im letzten Abschnitt haben sich Orthonormalbasen als sehr nützlich erwiesen. Dieses Konzept aus der Linearen Algebra hat allerdings den entscheidenden Nachteil, dass es nur i.A. nur für den Fall endlich-dimensionaler Vektorräume ein brauchbares Werkzeug darstellt, während der für uns an dieser Stelle interessante Hilbertraum ein unendlich-dimensionaler Funktionenraum ist. Anders als in der Linearen Algebra steht uns allerdings durch die Existenz der Norm auch eine Topologie zur Verfügung, die wir an dieser Stelle ausnutzen können.

**Definition 5.17** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum über dem Körper  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Eine Familie  $(u_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{H}$  heißt orthonormal (oder ein Orthonormalsystem), falls für alle  $i, j \in I$  gilt, dass

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

**Beispiel 5.18** Wie wir im vorigen Abschnitt festgestellt haben, bilden die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (5.7)$$

ein Orthonormalsystem im Hilbertraum  $L_2([-\pi, \pi])$ , wenn wir das zu Grunde liegende Skalarprodukt wie in (5.2) skalieren. (Alternativ können wir natürlich auch die Funktionen skalieren, so dass sie bzgl. der  $L_2$ -Norm skaliert sind.)

**Bemerkung 5.19** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Ist  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von linear unabhängigen Vektoren in  $\mathcal{H}$  (d.h.  $(v_0, \dots, v_n)$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  linear unabhängig), dann können wir das Gram-Schmidt-Verfahren aus der Linearen Algebra verwenden um daraus ein Orthonormalsystem  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zu konstruieren, nämlich durch

$$u_0 = \frac{1}{\|v_0\|} v_0$$

und

$$\tilde{u}_{n+1} := v_{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle u_k, v_{n+1} \rangle u_k, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\|\tilde{u}_{n+1}\|} \tilde{u}_{n+1}.$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition 5.20** Seien  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{H}$  sowie  $v \in \mathcal{H}$ . Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k, v \rangle u_k$$

die Fourierreihe von  $v$  bzgl.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und die Koeffizienten  $\langle u_n, v \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$  heißen die Fourierkoeffizienten von  $v$  bzgl.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



Wie in Analysis I nutzen wir auch hier die Reihe als Symbol für die zugehörige Folge der Partialsummen ungeachtet dessen, ob diese Folge konvergent ist oder nicht. Der nächste Satz zeigt allerdings, dass Fourierreihen in Hilberträumen immer konvergieren.

**Satz 5.21** *Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{H}$  und  $v \in \mathcal{H}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- 1)  $\sum_{k=0}^{\infty} |\langle u_k, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2$  (Besselsche Ungleichung)
- 2) Die Fourierreihe von  $v$  bzgl.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent (in  $\mathcal{H}$ ).
- 3) Folgende Aussagen sind äquivalent:
  - i)  $\sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k, v \rangle u_k = v$ , d.h. die Fourierreihe von  $v$  bzgl.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $v$ .
  - ii)  $\sum_{k=0}^{\infty} |\langle u_k, v \rangle|^2 = \|v\|^2$  (Parsevalsche Gleichung).

**Beweis:** Sei im Folgenden  $F_n := \sum_{k=0}^n \langle u_k, v \rangle u_k$  die  $n$ -te Partialsumme der Fourierreihe von  $v$  bzgl.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- 1) Nach Satz 5.4 ist  $F_n = P_{\mathcal{V}_n}(v)$  die Orthogonalprojektion von  $v$  auf den Unterraum  $\mathcal{V}_n = \text{span}(u_0, \dots, u_n)$  und wegen  $P_{\mathcal{V}_n}(v) \perp v - P_{\mathcal{V}_n}(v)$  folgt

$$\|v\|^2 = \|F_n\|^2 + \|v - F_n\|^2. \quad (5.8)$$

(Dies ist der “Satz des Pythagoras” aus der Linearen Algebra). Damit erhalten wir

$$\sum_{k=0}^n |\langle u_k, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2 = \|F_n\|^2 \leq \|v\|^2$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , woraus wir durch Grenzübergang und mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihe in 1), sowie die Besselsche Ungleichung erhalten.

- 2) Da die Reihe in 1) konvergent ist, existiert nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|F_n - F_{m-1}\|^2 = \sum_{k=m}^n |\langle u_k, v \rangle|^2 < \varepsilon.$$

für alle  $n \geq m \geq N$  gilt. Folglich ist  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{H}$  und somit wegen der Vollständigkeit des Hilbertraums  $\mathcal{H}$  konvergent.

- 3) folgt direkt aus (5.8).  $\square$

An dieser Stelle macht es Sinn, den Begriff der *Orthonormalbasis* auf (möglicherweise unendlich-dimensionale) Hilberträume zu verallgemeinern.

**Definition 5.22** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum über dem Körper  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

- 1) Ein Orthonormalsystem  $(u_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{H}$  heißt vollständig oder Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ , falls

$$\text{span}(u_i)_{i \in I} := \left\{ \sum_{j \in E} \lambda_j u_j \mid E \subseteq I \text{ endlich, } \lambda_j \in \mathbb{K}, j \in E \right\}$$

dicht in  $\mathcal{H}$  liegt, d.h. falls gilt:

$$\overline{\text{span}(u_i)_{i \in I}} = \mathcal{H}$$

- 2)  $\mathcal{H}$  heißt separabel, falls  $\mathcal{H}$  eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

**Satz 5.23** Sei  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalsystem  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann ist  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann eine Orthonormalbasis, wenn für jedes  $v \in \mathcal{H}$  die Fourierreihe von  $v$  bzgl.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $v$  konvergiert, d.h. wenn gilt

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k, v \rangle u_k.$$

**Beweis:** Es bezeichne  $F_n$  wieder die  $n$ -te Partialsumme der Fourierreihe von  $v$  bzgl.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie im Beweis von Satz 5.21. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wenn  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$  ist, gibt es ein  $w \in \text{span}(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\|v - w\| < \varepsilon$ . Da im Spann nur endliche Linearkombinationen erlaubt sind, folgt die Existenz eines  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $w \in \mathcal{V}_n = \text{span}(u_0, \dots, u_n)$ . Dann folgt aber mit Satz 5.4, dass

$$\|v - F_n\| \leq \|v - w\| < \varepsilon,$$

woraus wir wegen der schon bekannten Konvergenz von  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus Satz 5.21 nun die Konvergenz gegen  $v$  erhalten. Die andere Richtung ist klar.  $\square$

**Bemerkung 5.24** Durch Satz 5.23 erklärt sich nun (an dieser Stelle zumindest für separable Hilberträume) der Begriff *Orthonormalbasis* eines vollständigen Orthonormalsystems, denn jedes Element  $v \in \mathcal{H}$  unseres separablen Hilbertraums lässt sich als Fourierreihe und damit als “*unendliche Linearkombination*” der “*Basisvektoren*” darstellen. Beachten Sie allerdings, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Basis im Sinne der Linearen Algebra ist, weil dort nur endliche Linearkombinationen erlaubt sind. Alles andere würde dort auch keinen Sinn machen, denn einer unendlichen Linearkombination können wir nur deshalb einen Sinn geben, weil uns in Hilberträumen der Begriff der Konvergenz zur Verfügung steht. Aus diesem Grund nennt man Basen im Sinne der Linearen Algebra in unendlich-dimensionalen Räumen zur besseren Unterscheidung auch *Hamel-Basen*. Deren Existenz kann i.A. nur mit Hilfe des Lemmas von Zorn, welches auf dem Auswahlaxiom beruht, bewiesen werden. Dies wiederum hat zur Folge, dass i.A. keine Konstruktion dieser Hamelbasen möglich ist. Für den Gebrauch in der Analysis sind diese Basen daher nicht so nützlich, weshalb man den Begriff der Basis in diesem Fall gefahrlos uminterpretieren kann.

**Beispiel 5.25** Zu einer integrierbaren Funktion  $f \in L_2([-\pi, \pi])$  können wir nun die reellen Fourierpolynome  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , als Partialsummen der *reellen Fourierreihe*

$$t \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

auffassen, wobei die Koeffizienten  $a_k, b_k$  wie in Definition 5.5 angegeben berechnet werden können. Aus Satz 5.21 folgt nun die Konvergenz dieser Reihe. (Genau genommen handelt es sich bei der Folge der Fourierpolynome von  $f$  um eine Teilfolge der Partialsummen der Fourierreihe wie in Definition 5.20. Klar? Die Konvergenz folgt natürlich trotzdem!) Allerdings wissen wir an dieser Stelle noch nicht, ob die Fourierreihe auch gegen  $f$  konvergiert, denn wir wissen noch nicht, ob unser Orthonormalsystem aus den trigonometrischen Funktionen  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin(kx)$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  auch vollständig ist, also eine Orthonormalbasis bildet. Sollte dies der Fall sein (wie wir in Abschnitt 5.5 erfahren werden ist er es), dann ist diese Konvergenz allerdings im Sinn der (skalierten)  $L_2$ -Norm zu verstehen, d.h. es gilt dann

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n\|_{L_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(t) - \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right)^2 dt}.$$

Hieraus ist zunächst einmal nicht ersichtlich, ob die Reihe auch punktweise, geschweige denn gleichmäßig konvergent ist, weshalb wir diese Fragestellung in den folgenden Abschnitten gesondert untersuchen werden. Die Konvergenz im Sinne der  $L_2$ -Norm wird im obigen Spezialfall auch als *Konvergenz im quadratischen Mittel* bezeichnet, da der Wert

$$\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt$$

als Mittelwert des Quadrats der Abweichung von  $f$  und  $g$  im Intervall  $[a, b]$  interpretiert werden kann.

Analog erhalten wir auch Aussagen über die Konvergenz der *komplexen Fourierreihe*

$$t \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

von  $f$ , wobei die Koeffizienten  $c_k$  wieder die komplexen Fourierkoeffizienten von  $f$  aus Definition 5.13 bezeichnen. Diese Reihe können wir hier als die Partialsummenfolge

$$\left( \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

interpretieren und auch hier folgt aus Satz 5.21 die Konvergenz im Sinne der  $L_2$ -Norm.

### 5.3 Regelfunktionen

Im vorigen Abschnitt haben wir Fourierpolynome für beliebige integrierbare Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Falls es sich bei der ursprünglichen Funktion  $f$  bereits um ein trigonometrisches Polynom handelte, so stimmt das  $n$ -te Fourierpolynom von  $f$  für hinreichend großes  $n$  mit  $f$  überein. Für ein  $f \in \mathcal{V}_n$  gilt also  $F_m = f$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq n$ . Ist nun  $f$  eine allgemeine integrierbare Funktion, so besteht zumindest noch die Hoffnung, dass die  $n$ -ten Fourierpolynome für größer werdendes  $n$  immer bessere Approximationen an  $f$  liefern. In den nächsten Abschnitten werden wir dies für “nicht zu unstetige” Funktionen bestätigen. Diese “nicht zu unstetigen” Funktionen sind dabei die sogenannten *Regelfunktionen*, die der Gegenstand dieses Abschnitts sein sollen.

**Definition 5.26** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Regelfunktion, falls gilt:

- i) Für jedes  $c \in [a, b[$  existiert der rechtsseitige Grenzwert  $f(c_+) := \lim_{x \searrow c} f(x)$ .
- ii) Für jedes  $c \in ]a, b]$  existiert der linksseitige Grenzwert  $f(c_-) := \lim_{x \nearrow c} f(x)$ .

Die Menge aller Regelfunktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}([a, b])$ .

Die geforderte Existenz der Grenzwerte bezieht sich dabei auf eigentliche Grenzwerte, d.h. bestimmte Divergenz ist nicht zugelassen. Beispiele für Regelfunktionen sind monotone Funktionen (Übung) und *stückweise stetige Funktionen*, d.h. stetige Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen. Insbesondere ist jede Treppenfunktion eine Regelfunktion, es gibt allerdings auch Regelfunktionen mit abzählbar unendlich vielen Sprungstellen. Der folgende Satz liefert eine alternative Charakterisierung von Regelfunktionen.

**Satz 5.27** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $f$  ist eine Regelfunktion.
- ii) Es gibt eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)”: Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  beliebig. Analog zum Beweis des  $\varepsilon/\delta$ -Kriteriums aus Analysis I (siehe dort Satz 4.33) zeigt man mit Hilfe der Existenz der einseitigen Grenzwerte, dass zu jedem  $c \in [a, b]$  ein  $\delta_c > 0$  mit der folgenden Eigenschaft existiert: Für alle  $x, y \in [a, b]$  mit  $|x - y| < \delta_c$  und entweder  $x, y < c$  oder  $x, y > c$  gilt  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$ . Nun ist

$$(U_{\delta_c}(c))_{c \in [a, b]}$$

eine offene Überdeckung von  $[a, b]$  und da es sich dabei um ein kompaktes Intervall handelt, reichen schon endlich viele dieser Umgebungen aus, um  $[a, b]$  zu überdecken. Diese Umgebungen seien durch die Punkte  $c_1, \dots, c_k$  gegeben. Ordnen wir diese und die in  $[a, b]$

liegenden Randpunkte der Intervalle  $[c_i - \delta_{c_i}, c_i + \delta_{c_i}]$  der Größe nach, so erhalten wir dadurch eine Zerlegung  $Z : a = x_0 < \dots < x_m = b$  des Intervalls  $[a, b]$ . Wir wählen nun zu jedem  $i = 1, \dots, m$  ein  $t_i \in ]x_{i-1}, x_i[$  und definieren die Treppenfunktion  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(t_i) & \text{für } x \in ]x_{i-1}, x_i[, \quad i = 1, \dots, m, \\ f(x_i) & \text{für } x = x_i, \quad i = 0, \dots, m. \end{cases}$$

Sei nun  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Dann gilt für alle  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$ , dass

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(t_i)| < \frac{1}{n},$$

denn nach Konstruktion der Stützstellen  $x_0, \dots, x_m$  gilt entweder  $x, t_i < c_j$  oder  $x, t_i > c_j$  und  $|x - t_i| < \delta_{c_j}$  für ein  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Wegen  $f(x_i) = \varphi_n(x_i)$  für  $i = 0, \dots, m$  erhalten wir damit

$$\|f - \varphi_n\| \leq \frac{1}{n},$$

woraus folgt, dass  $(\varphi_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

“*ii*)  $\Rightarrow$  *i*)”: Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Wir zeigen zuerst, dass für jedes  $c \in [a, b[$  der rechtsseitige Grenzwert von  $f$  gegen  $c$  existiert. Sei dazu  $(x_n)$  eine beliebige Folge in  $[a, b]$  mit  $x_n > c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ . Sei weiter  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|f - \varphi_N\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Ferner hat  $\varphi_N$  als Treppenfunktion (offensichtlich) einen rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle  $c$ . Genauer gesagt folgt aus der “stückweisen Konstanz” sogar, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $\varphi_N(x) = \varphi_N(y)$  für alle  $x, y > c$  mit  $|x - c|, |y - c| < \delta$  gilt. Da  $(x_n)$  gegen  $c$  konvergiert, gibt es nun ein  $N_\delta \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - c| < \delta$  für alle  $n \geq N_\delta$ . Dann folgt aber für alle  $n, m \geq N_\delta$ , dass

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leq |f(x_m) - \varphi_N(x_m)| + |\varphi_N(x_m) - \varphi_N(x_n)| + |\varphi_N(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und somit ist  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge und daher in  $\mathbb{R}$  konvergent. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  für jede gegen  $c$  konvergente Folge  $(x_n)$  gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dies folgt aber schnell daraus, dass man aus zwei solchen Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch “Verschachtelung” eine neue gegen  $c$  konvergente Folge konstruieren kann, deren zugehörige Folge der Bilder ebenfalls wieder konvergent sein muss. (Klar? Wenn nicht, Übung!)  $\square$

**Bemerkung 5.28** Aus Satz 5.27 folgt sofort, dass jede Regelfunktion beschränkt ist, da Treppenfunktionen dies sind und der Raum der beschränkten Funktionen vollständig ist, siehe Teil 2) von Beispiel 1.38.

**Korollar 5.29**  $\mathcal{R}([a, b])$  ist bzgl. der Supremumsnorm ein Banach-Raum.

**Beweis:** Aus der Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit der Addition und Skalarmultiplikation in  $\mathbb{R}$  (siehe Satz 2.14 in Analysis I) folgt sofort, dass  $\mathcal{R}([a, b])$  ein Teilraum des Banachraums der reellwertigen beschränkten Funktionen auf  $[a, b]$  ist. Es reicht also, die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{R}([a, b])$  zu zeigen, die Vollständigkeit folgt damit sofort aus Satz 1.39. Sei also  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen die (beschränkte) Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$ . Außerdem gibt es nach Satz 5.27 zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Treppenfunktion  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\|f_n - \varphi_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt aber für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , dass

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n - \varphi_n\|_\infty < \varepsilon,$$

woraus folgt, dass auch  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann ist  $f$  aber nach Satz 5.27 eine Regelfunktion und es folgt die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{R}([a, b])$  als Teilraum des Raums der beschränkten Funktionen auf  $[a, b]$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass Regelfunktionen integrierbar sind.

**Satz 5.30** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion. Dann ist  $f$  (Riemann-)integrierbar. Ist  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx. \quad (5.9)$$

**Beweis:** Die Integrierbarkeit von  $f$  folgt leicht mit Hilfe von Satz 7.13 aus Analysis I, da es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\varphi_n - \varepsilon \leq f \leq \varphi_n + \varepsilon$  gilt. Die anschließende Formel folgt dann analog zum Beweis von Satz 8.7 aus Analysis I (Übung).  $\square$

**Bemerkung 5.31** Satz 5.27 liefert die Möglichkeit einer alternativen Einführung des Integrals als das sogenannte *Regelintegral*. Dabei definiert man zunächst das Integral für Treppenfunktionen wie im Abschnitt 7.1 in Analysis I. Ist dann  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, so definiert man das Integral von  $f$  über  $[a, b]$  durch (5.9), wobei man dann natürlich zeigen muss, dass das so definierte Integral nicht von der Auswahl der Folge von Treppenfunktionen abhängt, wenn man dieses Integral unabhängig von der Theorie nach Riemann einführen möchte.

Der Grund dafür, dass wir in Kapitel 7 der Analysis I das Riemann-Integral anstelle des Regelintegrals eingeführt haben liegt darin, dass das Riemann-Integral allgemeiner ist, da es Funktionen gibt, die Riemann-integrierbar, aber keine Regelfunktionen sind, wie z.B. die Funktion (Übung)

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 5.4 Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Zunächst einmal die schlechte Nachricht: Es existieren stetige Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  für die ihre Fourierreihe nicht einmal punktweise gegen  $f$  konvergiert<sup>2</sup>. Dies ist eine herbe Enttäuschung, denn in der Signalverarbeitung hat man es sogar häufig mit Funktionen zu tun, die nur stückweise stetig sind, also Unstetigkeitsstellen aufweisen. Es hilft aber alles nichts: Wir brauchen stärkere Voraussetzungen!

**Definition 5.32** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $x \in [a, b]$ , so dass der rechtsseitige Grenzwert  $f(x_+) := \lim_{t \searrow x} f(t)$  existiert. Existiert der Grenzwert

$$f'(x_+) := \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x_+)}{h}$$

so heißt dieser rechtsseitige Ableitung von  $f$  in  $x$ . Analog definiert man die linksseitige Ableitung  $f'(x_-)$  von  $f$  in einem  $x \in ]a, b]$ , für das der Grenzwert  $f(x_-) := \lim_{t \nearrow x} f(t)$  existiert.

Unser Ziel ist nun, die punktweise Konvergenz der Fourierreihe in den Stellen zu beweisen, in denen sowohl die rechtsseitige, als auch die linksseitige Ableitung existieren. Dafür benötigen wir allerdings einige Hilfsmittel.

**Definition 5.33** Die durch die Funktionen

$$D_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

gegebene Funktionenfolge  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Dirichlet-Kern<sup>3</sup>.

Offenbar sind die Funktionen  $D_n$  gerade Funktionen mit der Periode  $2\pi$ . Desweiteren erfüllen sie die in der folgenden Bemerkung gelisteten nützlichen Eigenschaften.

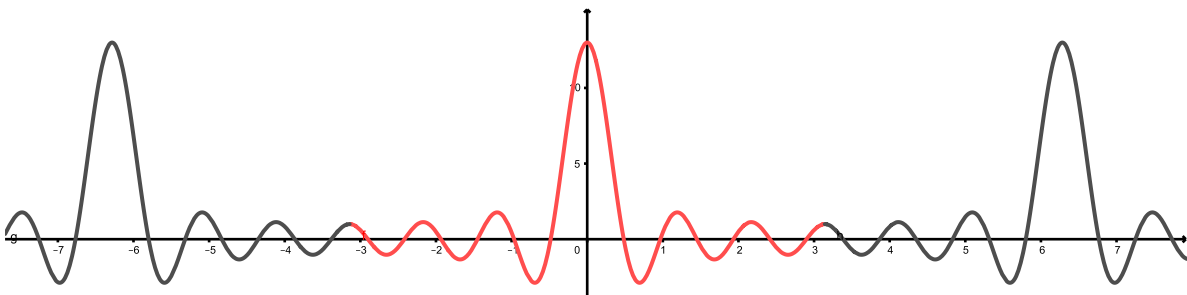


Abbildung 5.1: Die Funktion  $D_6$  - in rot die Einschränkung auf das Intervall  $[-\pi, \pi]$ .

<sup>2</sup>Beispiele für solche Funktionen sind allerdings alles andere als trivial und nicht leicht zu konstruieren.

<sup>3</sup>Der Begriff *Kern* hat hier nichts mit dem Kern aus der Linearen Algebra zu tun, sondern leitet sich von der Bezeichnung *Integalkern* aus der Theorie der Integraloperatoren in der Funktionalanalysis ab.

**Bemerkung 5.34** Die Funktion  $D_n$  des Dirichlet-Kerns hat die folgenden Eigenschaften:

- 1) Wegen der in Abschnitt 5.1 gezeigten Orthogonalität der Funktionen  $\cos(kx)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , folgt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \left\langle 1, 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right\rangle = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1.$$

- 2) Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht, dass

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, wobei wir den letztgenannten Ausdruck in den Fällen, in denen der Nenner Null ist, als Grenzwert interpretieren.

**Satz 5.35** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch und es gelte  $f|_{[-\pi, \pi]} \in L_2([-\pi, \pi])$ . Dann gilt für alle  $x \in [0, 2\pi]$ , dass

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt, \quad (5.10)$$

wobei  $F_n$  das  $n$ -te Fourierpolynom von  $f$  bezeichnet.

**Beweis:** Per Definition der Fourierkoeffizienten von  $f$  und unter Ausnutzung des Additionstheorems für den Cosinus erhalten wir

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kx) \sin(kt)) \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(s) f(x+s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) f(x+s) ds, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Substitution  $s = t - x$  vorgenommen und im letzten Schritt die  $2\pi$ -Periodizität von  $D_n$  und  $f$  ausgenutzt haben. Dies zeigt die erste Gleichheit in (5.10) und mit der Substitution  $t = -s$  erhalten wir

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} -D_n(-t) f(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt,$$

da  $D_n$  gerade ist, und somit schließlich durch Bilden des arithmetischen Mittels auch die zweite Gleichheit in (5.10).  $\square$



**Satz 5.36** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch und es gelte  $f|_{[-\pi, \pi]} \in L_2([-\pi, \pi])$ . Existieren in  $x \in \mathbb{R}$  sowohl der rechts- und linksseitige Grenzwert  $f(x_+)$  bzw.  $f(x_-)$  als auch die rechts- und linksseitige Ableitung  $f'(x_+)$  und  $f'(x_-)$ , so konvergiert die Folge  $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  der Fourierpolynome von  $f$  in  $x$  und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

**Beweis:** Wir betrachten die  $2\pi$ -periodische Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die für  $t \in \mathbb{R}$  durch

$$g(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

gegeben ist. Aus Satz 5.35 und Bemerkung 5.34 folgt unter Benutzung des Additionstheorems für den Sinus, dass

$$\begin{aligned} F_n(x) - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left( \cos(nt) + \sin(nt) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} g(t) \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} g(t) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite sind Fourierkoeffizienten der Funktionen  $\frac{1}{2}g(t)$  und  $\frac{1}{2}g(t) \cot(\frac{t}{2})$ , d.h. mit der Konvergenz von Fourierreihen gemäß Satz 5.21 folgt, dass diese Fourierkoeffizienten für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null gehen, womit der Satz bewiesen ist. Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Einschränkungen von  $g$  und  $t \mapsto h(t) := g(t) \cot(\frac{t}{2})$  auf das Intervall  $[-\pi, \pi]$  Elemente von  $\mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$ , also der Menge der quadrat-integrierbaren Funktionen, sind.<sup>4</sup> Für  $g$  folgt dies sofort aus  $f \in \mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$ . Bei der zweiten Funktion macht aber der Pol des Cotangens an der Stelle  $t = 0$  Probleme, weshalb wir für den noch ausstehenden Nachweis einmal kurz auf das Wissen aus der Vorlesung Analysis III vorgreifen müssen. Dazu beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} h(t) = g(t) \cot\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{f(x+t) + f(x-t) - (f(x_+) + f(x_-))}{2} \cdot \frac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \\ &= \left( \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t} \right) \cdot \frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

gilt, woraus wir wegen  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\sin(s)} = 1$  erhalten, dass

$$\lim_{t \searrow 0} g(t) \cot\left(\frac{t}{2}\right) = f'(x_+) + f'(x_-).$$

<sup>4</sup>Dass es einen subtilen Unterschied zwischen den Mengen  $L_2([-\pi, \pi])$  und  $\mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$  gibt, können Sie an dieser Stelle ignorieren. Sie erfahren mehr davon in Abschnitt 1.8 in der Analysis III.

Da die Funktion  $h$  ungerade ist, folgt damit auch

$$\lim_{t \nearrow 0} g(t) \cot\left(\frac{t}{2}\right) = -f'(x_+) - f'(x_-).$$

Aus der Existenz dieser beiden Grenzwerte folgt die Existenz eines kleinen Intervalls  $[-\delta, \delta] \subseteq [-\pi, \pi]$  auf dem  $h$  beschränkt ist. (Klar?) Da  $h$  außerdem messbar ist, folgt mit dem Satz von Lebesgue (Analysis III Satz 1.80) die Quadrat-Integrierbarkeit von  $h$  auf  $[-\delta, \delta]$ . Mit  $f$  ist  $h$  aber auch auf  $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$  quadrat-integrierbar, und somit auch auf ganz  $[-\pi, \pi]$ .  $\square$

**Definition 5.37** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stückweise differenzierbar, wenn es eine Zerlegung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  und differenzierbare Funktionen  $f_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt, dass

$$f|_{]x_{i-1}, x_i[} = f_i|_{]x_{i-1}, x_i[}.$$

Eine  $T$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stückweise differenzierbar, wenn ihre Einschränkung auf  $[0, T]$  stückweise differenzierbar ist.

Beachten Sie, dass eine stückweise stetige Funktion in den Gitterstellen  $x_i$  nicht notwendigerweise stetig sein muss, da die Definition sich nur auf die offenen Intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$  bezieht. Insbesondere ist die Sägezahnfunktion aus Beispiel 5.6 ein Beispiel für eine stückweise differenzierbare Funktion.

**Korollar 5.38** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch und stückweise differenzierbar. Dann ist die Fourierreihe von  $f$  punktweise konvergent und für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2},$$

wobei  $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  die Fourierkoeffizienten von  $f$  aus Definition 5.5 bezeichnen. Ist  $f$  zusätzlich auch stetig, so gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  sogar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = f(x).$$

An dieser Stelle erklärt sich rückwirkend auch die Definition der Sägezahnfunktion aus Beispiel 5.6 in den Unstetigkeitsstellen  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Hier wurde dafür gesorgt, dass der Funktionswert an diesen Stellen gerade dem arithmetischen Mittel der rechtsseitigen- und linksseitigen Grenzwerte der Sägezahnfunktion an den entsprechenden Stellen entspricht. Mit Korollar 5.38 folgt somit, dass die Fourierreihe der Sägezahnfunktion auf ganz  $\mathbb{R}$  punktweise gegen die Sägezahnfunktion konvergiert.

## 5.5 Der Satz von Fejér

Wie bereits mehrfach erwähnt gibt es stetige periodische Funktionen, für die die Fourierreihe nicht einmal punktweise gegen die gegebene Funktion konvergiert. (Aus dem vorangegangenen Abschnitt folgt allerdings, dass eine solche Funktion nicht stückweise differenzierbar sein kann.) Darüberhinaus haben wir auch noch nicht beantworten können, ob die Fourierreihe einer stetigen periodischen Funktion zumindest im Sinne der  $L_2$ -Norm auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  gegen die gegebene Funktion konvergiert. Zwar wissen wir aus Satz 5.21, dass die Fourierreihe konvergiert, wir wissen aber noch nicht, ob sie auch mit der gegebenen Funktion übereinstimmt. Dieses Problem werden wir in diesem Abschnitt dadurch lösen, dass wir zeigen, dass zumindest das arithmetische Mittel bzw. *Cesàro-Mittel* der Partialsummenfolge der Fourierreihe einer stetigen periodischen Funktion gegen die gegebene Funktion konvergiert. Als Bonus erhalten wir dadurch auch einen Beweis für den *Approximationssatz von Weierstraß*, der besagt, dass es zu jeder stetigen Funktion eine Folge von Polynomfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen die gegebene Funktion konvergiert.

**Definition 5.39** Sei  $\mathcal{V}$  ein normierter Raum und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{V}$ . Dann heißt

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

das  $n$ -te Cesàro-Mittel von  $(a_n)$ .

In anderen Worten ausgedrückt ist das  $n$ -te Cesàro-Mittel einer Folge also nichts anderes als das arithmetische Mittel der ersten  $n$  Folgenglieder.

**Beispiel 5.40** Sei  $(a_n)$  gegeben durch  $a_n = n$ . Dann gilt

$$\sigma_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{0 + 1 + 2 + \cdots + n}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2}.$$

**Satz 5.41 (Cauchyscher Grenzwertsatz)** Sei  $\mathcal{V}$  ein normierter Raum. Die Folge  $(a_n)$  konvergiere in  $\mathcal{V}$  gegen  $a \in \mathcal{V}$ . Dann konvergiert auch die Folge  $(\sigma_n)$  der Cesàro-Mittel von  $(a_n)$  gegen  $a$ .

**Beweis:** Aus der Konvergenz von  $(a_n)$  gegen  $a$  folgt die Existenz eines  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N$  gilt. Setze nun

$$M := \left\| \sum_{k=0}^N (a_k - a) \right\|.$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , gibt es  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{M}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann gilt für alle  $n \geq \max\{N, \tilde{N}\}$ , dass

$$\left\| \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \right) - a \right\| = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N (a_k - a) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^n (a_k - a) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-N}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

woraus die Konvergenz von  $(\sigma_n)$  gegen  $a$  folgt.  $\square$

**Bemerkung 5.42** Die Umkehrung von Satz 5.41 gilt nicht, denn z.B. ist die Folge  $((-1)^n)$  bekanntlich divergent, die zugehörige Folge

$$(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, \dots)$$

der Cesàro-Mittel ist dagegen eine Nullfolge.

Konvergieren die Cesàro-Mittel einer Folge, so nennt man die Folge auch *Cesàro-konvergent*. Wie wir gerade gezeigt haben, haben wir damit einen neuen und schwächeren Konvergenzbegriff für Folgen gefunden. Unser Ziel ist nun die Cesàro-Konvergenz von Fourierreihen stetiger Funktionen zu beweisen. Dazu benötigen wir wieder einmal ein paar Vorbereitungen.

**Definition 5.43** Der Fejér-Kern ist die Folge  $(\mathcal{F}_n)$  der Cesàro-Mittel vom Dirichlet-Kern  $(D_n)$  aus Definition 5.33.

**Bemerkung 5.44** Die Funktion  $\mathcal{F}_n$  des Dirichlet-Kerns hat die folgenden Eigenschaften:

- 1) Per Definition folgt für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{D_0(x) + \dots + D_n(x)}{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx)$$

- 2) Mit Teil 1 von Bemerkung 5.34 folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(x) dx = 1.$$

- 3) Mit Teil 2 von Bemerkung 5.34 und der Hilfe von Additionstheoremen zeigt man (Übung), dass

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, wobei wir wieder den letztgenannten Ausdruck in den Fällen, in denen der Nenner Null ist, als Grenzwert interpretieren.

**Satz 5.45 (von Fejér)** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $2\pi$ -periodisch. Dann konvergieren die Cesàro-Mittel

$$\sigma_n := \frac{F_0 + \dots + F_n}{n+1}$$

der Folge der Fourierpolynome  $(F_n)$  von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ . Insbesondere ist die Fourierreihe von  $f$  punktweise Cesàro-konvergent gegen  $f$ .

**Beweis:** Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist die Einschränkung von  $f$  auf das kompakte Intervall  $[-\pi, \pi]$  beschränkt und gleichmäßig stetig. Wegen der  $2\pi$ -Periodizität von  $f$  erfüllt  $f$  diese Eigenschaften sogar selbst. Folglich gibt es ein  $M \in \mathbb{R}$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$|f(x)| \leq M \quad \text{und} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

O.B.d.A. sei  $\delta < \pi$ . Mit Satz 5.35 und Teil 2) von Bemerkung 5.44 folgt

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n F_k(x) \right) - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \mathcal{F}_n(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathcal{F}_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) \mathcal{F}_n(t) dt \end{aligned}$$

Wegen  $\delta < \pi$  erhalten wir für  $t \in [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$  aus Teil 3) von Bemerkung 5.44 die Abschätzung

$$0 \leq \mathcal{F}_n(t) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}.$$

Teilen wir daher das Integral über  $[-\pi, \pi]$  auf drei Integrale über die Teilintervalle  $[-\pi, -\delta]$ ,  $[-\delta, \delta]$  und  $[\delta, \pi]$  auf so folgt mit  $|f(x+t) - f(x)| \leq 2M$  für alle  $x, t \in [-\pi, \pi]$ , dass

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \mathcal{F}_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2M \cdot 2(\pi - \delta)}{2(n+1) \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (5.11)$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  und Teil 2) von Bemerkung 5.44 erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \mathcal{F}_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{F}_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

und für hinreichend große  $n \in \mathbb{N}$  wird auch der zweite Summand in (5.11) kleiner als  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Dies zeigt aber, dass  $\|\sigma_n - f\|_{\infty} < \varepsilon$  für hinreichend große  $n \in \mathbb{N}$  gilt, woraus wir schließlich die gleichmäßige Konvergenz von  $(\sigma_n)$  gegen  $f$  erhalten.  $\square$

Der Satz von Fejér hat einige bemerkenswerte Konsequenzen. So erhalten wir durch ihn einen einfachen Beweis für den folgenden Satz.

**Satz 5.46 (Weierstraßscher Approximationssatz)**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es eine Folge  $(p_n)$  von Polynomfunktionen die auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $[a, b] = [0, \pi]$ . Den allgemeinen Fall können wir leicht durch Betrachten von  $t \mapsto f(a + (b - a)\frac{t}{\pi})$  darauf zurückführen. Dann erweitern wir  $f$  auf  $[-\pi, \pi]$  durch  $f(-t) := f(t)$  für  $t \in [-\pi, \pi]$  und setzen  $f$  dann  $2\pi$ -periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fort. Nach Konstruktion ist  $f$  dann immer noch stetig. Sei nun  $(\sigma_n)$  die Folge der Cesàro-Mittel der Folge der Fourierpolynome  $(F_n)$  von  $f$ . Dann gibt es nach Satz 5.45 zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$|f(x) - \sigma_N(x)| < \frac{1}{n}$$

Als arithmetisches Mittel von Fourierpolynomen ist  $\sigma_n$  eine Linearkombination von Funktionen der Form  $\cos(k\pi x)$  und  $\sin(k\pi x)$ . Diese lassen sich nach Satz 8.16 aus Analysis I auf dem Intervall  $[0, \pi]$  gleichmäßig durch ihre Taylorpolynome approximieren. Da Polynome einen Vektorraum bilden, also Linearkombinationen von Polynomen wieder Polynome sind, folgt die Existenz eines Polynoms  $p_n$ , so dass

$$|\sigma_N(x) - p_n(x)| < \frac{1}{n}$$

für alle  $x \in [0, T]$  gilt. Damit erhalten wir aber, dass

$$|f(x) - p_n(x)| \leq |f(x) - \sigma_N(x)| + |\sigma_N(x) - p_n(x)| < \frac{2}{n}$$

für alle  $x \in [0, T]$  gilt, was gleichbedeutend damit ist, dass die so konstruierte Folge  $(p_n)$  auf  $[0, \pi]$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.  $\square$

Anders ausgedrückt bedeutet Satz 5.46, dass der Raum der Polynomfunktionen auf  $[a, b]$  bzgl. der Supremumsnorm dicht im Raum  $C([a, b])$  der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$  liegt. Stetige Funktionen lassen sich also beliebig genau gleichmäßig durch Polynome approximieren. Dies ist insofern bemerkenswert, da aus Kapitel 8 der Analysis I bekannt ist, dass sich selbst beliebig oft differenzierbare Funktionen i.A. nicht gleichmäßig durch ihre Taylorpolynome approximieren lassen.

Als eine weitere wichtige Konsequenz aus dem Satz von Fejér erhalten wir für den Hilbertraum  $L_2([-\pi, \pi])$  die Vollständigkeit des Orthonormalsystems (5.7).

**Satz 5.47** *Das System der trigonometrischen Funktionen*

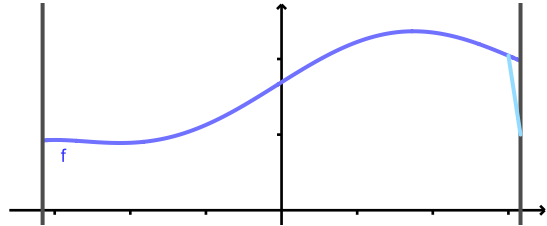
$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (5.12)$$

*bildet (nach Skalierung) eine Orthonormalbasis des Hilbertraums  $L_2([-\pi, \pi])$ .*

**Beweis:** Den Zusatz “nach Skalierung” haben wir aufnehmen müssen, da die aufgelisteten Funktionen nur bzgl. des mit  $\frac{1}{\pi}$  skalierten Skalarprodukts in  $L_2([-\pi, \pi])$  ein Orthonormalsystem bilden. Für den weiteren Beweis verschieben wir die Skalierung aber wieder in das Skalarprodukt, so dass wir die Funktionen wie in (5.12) verwenden können. Nach

Definition 5.22 ist z.z., dass zu jedem  $f \in L_2([-\pi, \pi])$  und jedem  $\varepsilon > 0$  eine (endliche) Linearkombination  $g$  der Funktionen aus dem Orthonormalsystem (5.12) gibt, so dass  $\|f - g\|_{L_2} < \varepsilon$  gilt. Dies zeigen wir allerdings nur für den Spezialfall, dass  $f$  stetig ist. Den allgemeinen Fall kann man darauf zurückführen, indem man zeigt, dass jede Funktion aus  $L_2([-\pi, \pi])$  beliebig gut durch eine stetige Funktion approximiert werden kann. Um dies zu zeigen müssten wir allerdings weitere Kenntnisse aus der Analysis III verwenden, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten.

Sei also  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Durch eine wie in der Skizze angedeutete stetige Abänderung der Funktion, kann eine stetige Funktion  $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|f - \tilde{f}\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}$  konstruiert werden, für die zusätzlich die  $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$  gilt. (Beachten Sie, dass es hier um die  $L_2$ -Norm und nicht die Supremumsnorm geht!) Damit lässt sich  $\tilde{f}$  stetig und  $2\pi$ -periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen. Dann existiert es nach dem Satz von Fejér (Satz 5.45) ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass



$$|\sigma_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, wobei  $\sigma_n$  das  $n$ -te Cèsaro-Mittel der Fourierpolynome von  $\tilde{f}$  bezeichnet. Damit erhalten wir schließlich

$$\|\sigma_n - \tilde{f}\|_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt} < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus wir schließlich  $\|f - \sigma_n\|_{L_2} < \varepsilon$  erhalten. Da  $\sigma_n$  eine Linearkombination aus dem System (5.12) ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 5.48** Sei  $f \in L_2([-\pi, \pi])$ . Dann konvergiert die Fourierreihe

$$t \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

von  $f$  bzgl. der  $L_2$ -Norm gegen  $f$ . Insbesondere gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 5.47 und Satz 5.21.  $\square$

Mit der Parsevalschen Gleichung haben wir nun ein weiteres Hilfsmittel gefunden, um die Summen von bestimmten Reihen zu bestimmen.

**Beispiel 5.49** Betrachten wir erneut die Sägezahnfunktion aus Beispiel 5.6, so hatten wir dort die Fourierkoeffizienten  $a_0 = 0$  und

$$a_k = 0, \quad b_k = (-1)^k \frac{2}{k}$$

für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  bestimmt. Aus der Parsevalschen Gleichung folgt damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

woraus wir schließlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

erhalten. Damit haben wir endlich die noch unbekannte Summe der Reihe aus Beispiel 3.20 in Analysis I bestimmt.



**Teil III**

**Analysis III**

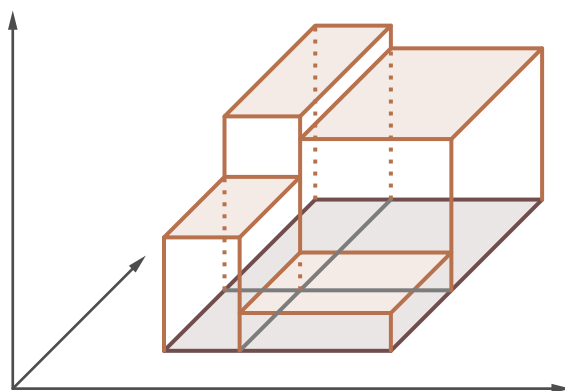


# Einführung

Nachdem wir in der Analysis II die Differentialrechnung auf Banachräume und damit insbesondere auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert haben, ist es jetzt unser Ziel, dies ebenfalls mit der Integrationstheorie zu tun. Unser Hauptziel ist dabei die Integration von Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dabei können wir uns im Bildraum auf den Fall  $m = 1$  beschränken, da wir das Integral komponentenweise definieren können (vgl. Definition 4.5 in Analysis II). Der eigentlich interessante Fall ist also der von Funktionen der Form  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Grundidee bei der Integration nach Riemann einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Zerlegung des Urbildraums in kleine Teilintervalle und Approximation der zu integrierenden Funktion durch Treppenfunktionen, die auf diesen Teilintervallen konstante Werte annehmen. Grundsätzlich ist diese Idee auch für Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  denkbar. Ist z.B.  $A$  ein Quader, so könnte man  $A$  in kleine Teilquader zerlegen und  $f$  auf  $A$  durch eine Treppenfunktion approximieren, die auf jedem dieser Teilquader konstante Werte annimmt. Abbildung 0.1 zeigt den Graph einer solchen Treppenfunktion  $T : R \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Rechteck  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bei einer Unterteilung in vier Teilrechtecke.

Abbildung 0.1: Graph einer Treppenfunktion  $T : R \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Rechteck  $R \subseteq \mathbb{R}^2$



Die Integrationstheorie nach Riemann hat allerdings einige gravierende Nachteile. Zum einen gibt es eine ganze Reihe von Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind, deren Integrale aber in einigen mathematischen Disziplinen (wie z.B. der Wahrscheinlichkeitstheorie) eine wichtige Rolle spielen. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist die *charakteristische Funktion*  $\chi_A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der Menge  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  der rationalen Zahlen im Intervall  $[0, 1]$ . Diese ist definiert durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus A. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, denn für ihr Ober- und Unterintegral erhalten wir die unterschiedlichen Werte

$$\int_0^1 \chi_A(x) \, dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \chi_A(x) \, dx = 0.$$

Ein zweiter Nachteil des Riemann-Integrals ist, dass wir die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung nur für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen bewiesen haben, obwohl es viele Beispiele für punktweise konvergente Funktionenfolgen gibt, bei denen sich ebenfalls Integration und Grenzwertbildung miteinander vertauschen lassen (siehe z.B. Teil 1) von Beispiel 8.1 aus Analysis I). Die Abschwächung der Forderung der gleichmäßigen Konvergenz für Funktionenfolgen in den Sätzen von Beppo Levi und Lebesgue ist eine der großen Errungenschaften in der *Integrationstheorie nach Lebesgue*.

Die Grundidee für diese Integrationstheorie ist sehr einfach. Im Gegensatz zur Theorie nach Riemann wird hier nicht der Urbildraum, sondern der Bildraum in Teilintervalle zerlegt. Die Rolle von Treppenfunktionen übernehmen nun die sogenannten *Elementarfunktionen*, die nur endlich viele Werte annehmen. Abbildung 0.2 illustriert die beiden unterschiedlichen Vorgehensweisen nach Riemann und Lebesgue.

Für eine Treppenfunktion berechnet sich das Integral einfach als Summe der Funktionswerte multipliziert mit dem jeweiligen Maß des zu Grunde liegenden Teilintervalls, also der Intervalllänge: Ist  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  und nimmt die Treppenfunktion  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Teilintervall  $]x_{i-1}, x_i[$  den konstanten Wert  $T(\xi_i)$  an, so gilt

$$\int_a^b T(x) \, dx = \sum_{i=1}^n T(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

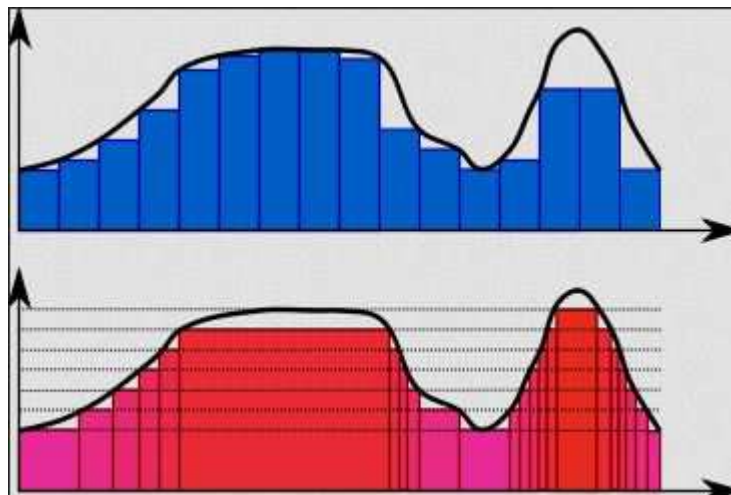
Für eine Elementarfunktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur endlich viele Werte  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  annimmt, erhalten wir analog ein Integral, wenn wir den jeweiligen Funktionswert  $\alpha_i$  mit dem Maß  $\mu(A_i)$  des Urbilds  $A_i := \{x \in [a, b] \mid f(x) = \alpha_i\}$  multiplizieren. Wir erhalten also das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Besteht dieses Urbild aus einer disjunkten Vereinigung von endlich vielen Intervallen, so wie in der Abbildung 0.2 angedeutet, so können wir dieses Maß  $\mu(A_i)$  einfach als Summe

Abbildung 0.2: Zerlegung nach Riemann (blau) und Lebesgue (rot)

Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemannvslebesgue.svg>



der Intervalllängen definieren. Insbesondere ist in diesem Fall die Elementarfunktion auch eine Treppenfunktion und wir erwarten daher für die Integrationstheorie nach Lebesgue, dass sie die Integrationstheorie nach Riemann als Spezialfall enthält und das neu definierte Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt, wenn beide Integrale existieren.

Neu ist allerdings jetzt, dass wir auch allgemeinere Mengen als Urbilder der Werte  $\alpha_i$  zulassen wollen. Betrachten wir z.B. noch einmal die charakteristische Funktion  $\chi_A$  der Menge  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , so nimmt diese nur zwei Werte an und ist daher eine Elementarfunktion. Es gilt  $(\chi_A)^{-1}(\{1\}) = A$  und  $(\chi_A)^{-1}(\{0\}) = [0, 1] \setminus A$ . Damit könnten wir jetzt auch das Integral dieser Funktion definieren durch

$$\int_a^b \chi_A(x) dx = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu([0, 1] \setminus A) = \mu(A),$$

wenn wir das *Maß* der Menge  $A$  und ihres Komplements  $[0, 1] \setminus A$  definiert haben. Diese Herangehensweise führt uns zu dem sogenannten *Inhaltsproblem*, nämlich der Definition eines Maßes bzw. Inhalts einer Menge, der den Begriff der Länge für uns bekannte Mengen wie Intervalle in  $\mathbb{R}$  bzw. den des Volumens für uns bekannte Mengen wie Quader, Kugeln etc. im  $\mathbb{R}^n$  auf beliebige Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert.

**Problem:** Finde eine Funktion  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty] := [0, \infty[ \cup \{\infty\}$  für die gilt:

- 1) **Normiertheit:** Für den Einheitswürfel  $W = [0, 1]^n$  gilt  $\mu(W) = 1$ .
- 2) **Bewegungsinvarianz:** Translation, Rotation und Spiegelung einer Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  verändern  $\mu(A)$  nicht.

3)  **$\sigma$ -Additivität:** Für alle  $A_k, k \in \mathbb{N}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

Dass wir den Wert  $\infty$  als Maß einer Menge zulassen wollen, ist unvermeidbar, da z.B. der gesamte  $\mathbb{R}^n$  keinen endlichen Volumeninhalt haben kann. Die Eigenschaften i) und ii) sind naheliegend und ebenso iii), wenn wir uns auf endliche Vereinigungen beschränken. Um einen stärkeren Integralbegriff zu erhalten, wollen wir hier allerdings auch abzählbare Vereinigungen zulassen.

Leider konnte Giuseppe Vitali 1905 beweisen, dass das Inhaltsproblem unlösbar ist: Es gibt keine Funktion  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ , die alle gewünschten Eigenschaften i)–iii) erfüllt. Wer nun meint, das die geforderte  $\sigma$ -Additivität der Übeltäter dafür ist, hat zum Teil recht, denn schwächt man die Bedingung iii) so ab, dass sie nur für endliche Vereinigungen erfüllt ist, so lassen sich zumindest Inhaltsfunktionen auf  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^2$  definieren. Felix Hausdorff zeigte jedoch 1914, dass das Inhaltsproblem unter diesen Bedingungen zumindest für  $n \geq 3$  unlösbar ist und da wir als Lebewesen in einem Raum existieren, von dem wir wissen, dass seine Dimension mindestens drei ist, ist das eine herbe Enttäuschung für uns. Abgesehen davon sind die so in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^2$  erhaltenen Inhalte nicht eindeutig bestimmt, so dass auch hier kein befriedigender Inhaltsbegriff erreicht wird.

Wir verzichten daher nicht auf die  $\sigma$ -Additivität als Eigenschaft, sondern drehen an einer anderen Schraube. Statt den Inhaltsbegriff für *alle* Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  zu definieren, werden wir uns mit einer hinreichend großen Menge von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  begnügen, der sogenannte *Borelschen  $\sigma$ -Algebra*. Damit erhalten wir dann auch einen Integrationsbegriff, der hinreichend flexibel für all unsere (mathematischen) Wünsche ist.

# Kapitel 1

## Maß- und Integrationstheorie

Da wir in der Einführung erfahren haben, dass das *Inhaltsproblem* für beliebige Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  unlösbar ist, müssen wir uns auf gewisse Teilmengen der Potenzmenge des  $\mathbb{R}^n$  einschränken, nämlich sogenannte  $\sigma$ -Algebren. Da dieses Konzept auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt wird, betrachten wir in diesem Kapitel als Ausgangspunkt stets eine allgemeine nichtleere Grundmenge  $\Omega$ .

### 1.1 Ringe, $\sigma$ -Algebren, Inhalte und Maße

Um in einem Mengensystem vernünftig Analysis betreiben zu können ist es sinnvoll zu fordern, dass dieses *stabil* gegenüber den klassischen Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz ist. Dabei gehen wir minimalistisch vor und lassen die *Durchschnittsstabilität* zunächst unter den Tisch fallen um sie dann aus den übrigen Eigenschaften zu folgern.

**Definition 1.1** Eine Menge  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt Ring über  $\Omega$ , falls gilt:

- i)  $\mathcal{R} \neq \emptyset$ .
- ii)  $\mathcal{R}$  ist vereinigungsstabil, d.h. für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \cup B \in \mathcal{R}$ .
- iii)  $\mathcal{R}$  ist differenzstabil, d.h. für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ .

**Beispiel 1.2** 1) Triviale Ringe über  $\Omega$  sind  $\{\emptyset\}$  und die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

- 2) Wir nennen eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  *elementargeometrisch*, falls  $A$  Vereinigung von endlich vielen achsenparallelen Quadern

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n$$

mit  $I_j \in \{[a_j, b_j], [a_j, b_j[, ]a_j, b_j], ]a_j, b_j[ \mid a_j, b_j \in \mathbb{R}\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist

$$\mathcal{R}_{EG}^n := \mathcal{R}_{EG} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist elementargeometrisch}\}$$

ein Ring über  $\mathbb{R}^n$ . (Übung.)

**Bemerkung 1.3** Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$ . Dann gilt:

- 1)  $\emptyset \in \mathcal{R}$ , denn  $\mathcal{R} \neq \emptyset$ , d.h. es gibt eine Menge  $A \in \mathcal{R}$ . Dann gilt auch  $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$ .
- 2)  $\mathcal{R}$  ist *durchschnittsstabil*, d.h. es gilt  $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$ . Dies folgt sofort aus  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ .
- 3) Der Name *Ring* für die hier definierten Mengensysteme hat tatsächlich etwas mit dem Begriff *Ring* aus der Algebra zu tun. Definieren wir nämlich auf Mengen die sogenannte Operation *symmetrische Differenz* durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

so ist  $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$  ein Ring im Sinne der Algebra mit Nullelement  $0 = \emptyset$  und Einselement  $1 = \Omega$ , falls  $\Omega \in \mathcal{R}$ .

Der Begriff des Ringes hat leider noch den Nachteil, dass er nicht allgemein genug ist. So können wir zwar jedem achsenparallelen Quader und auch jeder elementargeometrischen Menge leicht ein Volumen bzw. einen *Inhalt* zuordnen, der mit unserem geometrischen Grundverständnis übereinstimmt (in Beispiel 1.15 werden wir dies präzisieren), jedoch sind elementargeometrische Mengen noch viel zu speziell. Sie machen sich leicht klar, dass jede elementargeometrische Menge als Vereinigung endlich vieler Quader dargestellt werden kann. Objekte, wie z.B. Kugeln, Zylinder, Kegel und ihre Verallgemeinerungen im  $\mathbb{R}^n$  gehören dann gerade nicht zum Ring  $\mathcal{R}_{EG}$  und das ist natürlich eine erhebliche Einschränkung. Wir benötigen daher einen noch stärkeren Begriff.

**Definition 1.4** Ein Mengensystem  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ .
- ii)  $\mathcal{A}$  ist komplementstabil, d.h. mit der Notation  $A^c := \Omega \setminus A$  gilt:

$$A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}.$$

- iii)  $\mathcal{A}$  ist stabil bzgl. abzählbaren Vereinigungen, d.h. es gilt

$$A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

**Bemerkung 1.5** 1) Eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  über  $\Omega$  ist auch stabil bzgl. abzählbaren Durchschnitten, denn für  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gilt auch

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

- 2) Ein Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$  ist genau dann eine  $\sigma$ -Algebra, falls  $\Omega \in \mathcal{R}$  gilt und  $\mathcal{R}$  stabil bzgl. abzählbaren Vereinigungen ist. (Übung).



**Beispiel 1.6** Triviale  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$  sind  $\{\emptyset, \Omega\}$  und  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Natürlich gibt es auch noch etwas interessantere  $\sigma$ -Algebren, jedoch benötigen wir für deren Konstruktion noch die folgende zusätzliche Beobachtung.

**Bemerkung 1.7** 1) Beliebige Schnitte von  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$  sind wieder  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ , d.h. ist  $I$  eine Indexmenge und sind  $\mathcal{A}_i$ ,  $i \in I$ ,  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ , so auch

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap \{ \mathcal{A}_i \mid i \in I \}.$$

2) Ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , so gibt es eine kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , die alle Mengen aus  $\mathcal{E}$  enthält, nämlich

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \}.$$

Wir nennen  $\sigma(\mathcal{E})$  die *von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra*.

**Beispiel 1.8** Seien  $A \subseteq \Omega$  und  $\mathcal{E} = \{A\}$ . Dann ist  $\{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$  eine  $\sigma$ -Algebra und offenbar die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$ .

Die für uns wichtigste  $\sigma$ -Algebra ist die folgende.

**Definition 1.9** Die von den elementargeometrischen Mengen  $\mathcal{R}_{EG}^n$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}^n$  heißt Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}^n$  (kurz:  $\mathcal{B}$ , wenn klar ist, welches  $n$  gemeint ist) und ihre Elemente nennen wir Borel-Mengen.

Es gilt also  $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{R}_{EG}^n)$ . Wie genau sehen Borel-Mengen nun eigentlich aus? Eine äquivalente Charakterisierung anzugeben ist eine schwierige, wenn nicht unlösbare Aufgabe, aber wir können leicht zeigen, dass die Borelsche  $\sigma$ -Algebra viele wichtige Mengen enthält wie z.B. insbesondere alle offenen und abgeschlossenen Mengen.

**Satz 1.10** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann gibt es abzählbar viele abgeschlossene achsenparallele Würfel  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$ .

**Beweis:** Sei  $x \in A$ . Da  $A$  offen ist, gibt es  $\varepsilon_x > 0$  mit  $U_{\varepsilon}(x) \subseteq A$ . Wir wählen nun zu jedem  $x$  einen achsenparallelen Würfel  $W_x$  mit Mittelpunkt aus  $\mathbb{Q}^n$  und rationaler Kantenlänge, so dass  $x \in W_x \subseteq U_{\varepsilon}(x) \subseteq A$ . (Machen sie sich klar, dass so eine Wahl immer möglich ist.) Es gilt nun

$$A = \bigcup_{x \in A} W_x.$$

Da es nur abzählbar viele verschiedene Würfel dieser Art gibt, können wir diese Vereinigung als eine abzählbare Vereinigung schreiben.  $\square$

**Korollar 1.11** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen oder abgeschlossen. Dann ist  $A$  eine Borel-Menge.

Unser nächstes Ziel ist die Definition einer *Inhaltsfunktion* für unsere bereitgestellten Mengensysteme.

**Definition 1.12** Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$  und  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty] := [0, \infty[ \cup \{\infty\}$ .

- 1)  $\mu$  heißt *additiv* oder *Inhalt* auf  $\mathcal{R}$ , falls  $\mu(\emptyset) = 0$  und falls für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt, dass

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

- 2)  $\mu$  heißt  *$\sigma$ -additiv* oder *Prämaß* auf  $\mathcal{R}$ , falls  $\mu(\emptyset) = 0$  und falls für alle  $A_k \in \mathcal{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  gilt:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

- 3) Ein Prämaß  $\mu$  auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  heißt *Maß* auf  $\mathcal{A}$ .
- 4) Ein Maßraum ist ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  bestehend aus einer Menge  $\Omega$ , einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  über  $\Omega$  und einem Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$ .

Hier und im folgenden benutzen wir die Konventionen  $a + \infty := \infty$  und  $a < \infty$  für  $a \in [0, \infty[$ . Wir gehen darauf im Abschnitt 1.4 noch etwas genauer ein. Beachten Sie außerdem, dass bei der  $\sigma$ -Additivität vorausgesetzt wird, dass die abzählbare disjunkte Vereinigung der betrachteten Ringmengen selbst wieder im Ring enthalten ist. In  $\sigma$ -Algebren ist diese Bedingung automatisch erfüllt, in beliebigen Ringen jedoch nicht immer.

**Bemerkung 1.13** Jedes Prämaß (bzw. Maß)  $\mu$  ist auch ein Inhalt. Die Additivität für zwei disjunkte Mengen  $A, B$  erhalten wir aus der  $\sigma$ -Additivität, indem wir  $A_0 = A$ ,  $A_1 = B$  und  $A_k = \emptyset$  wählen für  $k \geq 2$ .

**Bemerkung 1.14** Sei  $\mu$  ein Inhalt auf dem Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$ , sowie  $A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$ , denn  $B = (A \cap B) \dot{\cup} (B \setminus A)$ .  
(Das Symbol  $\dot{\cup}$  bezeichnet eine disjunkte Vereinigung.)
- 2)  $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ , d.h. Inhalte sind *monoton*. Dies folgt wegen  $A \cap B = A$  und  $\mu(B \setminus A) \geq 0$  sofort aus 1).
- 3)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ . (Übung.)
- 4)  $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ , wobei Gleichheit gilt, wenn die  $A_i$  paarweise disjunkt sind. (Übung.)

**Beispiel 1.15** 1) Wir betrachten den Ring  $\mathcal{R}_{EG}$  der elementargeometrischen Mengen über  $\mathbb{R}^n$ . Für einen achsenparallelen Quader

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n$$

mit  $I_j \in \{[a_j, b_j], [a_j, b_j[, ]a_j, b_j], ]a_j, b_j[ \}$ ,  $a_j \leq b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  definieren wir

$$\lambda(Q) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Anschaulich ist dies gerade das klassische Volumen des  $n$ -dimensionalen Quaders  $Q$ . Zerfällt nun  $A \in \mathcal{R}_{EG}$  in  $m$  paarweise disjunkte Quader  $Q_1, \dots, Q_m$ , so setzen wir

$$\lambda(A) := \sum_{k=1}^m \lambda(Q_k).$$

Dadurch und mit  $\lambda(\emptyset) := 0$  wird ein Inhalt  $\lambda : \mathcal{R}_{EG} \rightarrow [0, \infty[$  definiert, den wir den *elementargeometrischen Inhalt* auf  $\mathcal{R}_{EG}$  nennen. Um einzusehen, dass dieser Inhalt wohldefiniert ist, müssen Sie sich klarmachen, dass man jede elementargeometrische Menge in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Quadern zerlegen kann und dass je zwei unterschiedliche Zerlegungen einer elementargeometrischen Menge  $A$  in paarweise disjunkte Quader den gleichen Inhalt für  $A$  liefern. (Übung.)

2) Die Abbildung  $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\mu(A) := \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Maß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ , das sogenannte *Zählmaß*, denn hierbei steht  $|A|$  für die *Kardinalität* der endlichen Menge  $A$ , also die Anzahl deren Elemente. Insbesondere ist also  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$  ein Maßraum.

Unser nächstes Ziel ist die Erweiterung des elementargeometrischen Inhalts auf dem Ring der elementargeometrischen Mengen zu einem Maß auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$ . Dazu werden wir im nächsten Abschnitt zeigen, dass sich jedes Prämaß auf einem Ring  $\mathcal{R}$  zu einem Maß auf der von diesem Ring erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  erweitern lässt. Um dieses allgemeine Resultat dann auf den für uns wichtigen Spezialfall anwenden zu können, benötigen wir dann das folgende Resultat.

**Satz 1.16** *Der elementargeometrische Inhalt  $\lambda$  auf  $\mathcal{R}_{EG}$  ist ein Prämaß auf  $\mathcal{R}_{EG}$ .*

**Beweis:** Seien  $A_k \in \mathcal{R}_{EG}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt, so dass  $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}_{EG}$ . Nach Definition von  $\lambda$  gilt  $\lambda(A) < \infty$ . Wir zeigen

$$\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k).$$

“ $\geq$ ”: Aus Teil 4) und 2) von Bemerkung 1.14 erhalten wir

$$\sum_{k=0}^m \lambda(A_k) = \lambda\left(\bigcup_{k=0}^m A_k\right) \leq \lambda(A)$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Durch Grenzübergang folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k) \leq \lambda(A),$$

denn wegen  $\lambda(A) < \infty$  ist die Folge  $(\sum_{k=0}^m \lambda(A_k))_{m \in \mathbb{N}}$  monoton und beschränkt und daher die zugehörige Reihe konvergent und ihre Summe ist kleiner oder gleich  $\lambda(A)$ .

“ $\leq$ ”: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir bemerken zunächst, dass  $A$  nach Voraussetzung elementargeometrisch und daher als Vereinigung endlich vieler Quader darstellbar und insbesondere beschränkt ist. Dann wählen wir offene Mengen  $G_k \supseteq A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und eine abgeschlossene Menge  $F \subseteq A$  mit den Eigenschaften  $F, G_k \in \mathcal{R}_{EG}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und

$$\lambda(G_k) \leq \lambda(A_k) + 2^{-k} \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \lambda(A) \leq \lambda(F) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Machen Sie sich klar, dass man solche Mengen leicht durch das Vergrößern bzw. Verkleinern der  $A_k$  bzw.  $A$  zu Grunde liegenden Quader erhalten kann. Mit  $A$  ist auch  $F$  beschränkt. Weiter gilt

$$F \subseteq A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k,$$

d.h.  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine offene Überdeckung von  $F$ . Dann gibt es aber wegen der Kompaktheit von  $F$  ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass schon

$$F \subseteq G_0 \cup \dots \cup G_m$$

gilt. Damit erhalten wir mit den Teilen 2) und 4) aus Bemerkung 1.14, dass

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\leq \lambda(F) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \lambda\left(\bigcup_{k=0}^m G_k\right) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{k=0}^m \lambda(G_k) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{k=0}^m \left(\lambda(A_k) + 2^{-k} \frac{\varepsilon}{3}\right) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \sum_{k=0}^m \lambda(A_k) + \sum_{k=0}^m 2^{-k} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k) + 2 \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, liefert der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  die gewünschte Ungleichung.  $\square$

## 1.2 Existenz von Maßen nach Carathéodory

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Menge  $\Omega$ , sowie einen Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$ , auf dem ein Prämaß  $\mu$  gegeben ist. Die Elemente von  $\mathcal{R}$  nennen wir *Elementarmengen*. Unser Ziel ist dann die Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  über  $\Omega$ . Um dies zu erreichen, benötigen wir allerdings noch eine technische Voraussetzung, nämlich, dass  $\mathcal{R}$  unsere Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  ausschöpft. Dies definieren wir für spätere Zwecke gleich ein bisschen allgemeiner.

**Definition 1.17** Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$  und  $\mu$  ein Prämaß auf  $\mathcal{R}$ .

- 1) Wir sagen  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  schöpft  $\Omega$  aus, falls es abzählbar viele Mengen  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$  gilt.
- 2) Sei  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$ . Wir sagen  $\mathcal{E}$  schöpft  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  aus, falls es abzählbar viele Mengen  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\mu(E_k) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$  gilt.

**Beispiel 1.18** Der Ring  $\mathcal{R}_{EG}$  schöpft den  $\mathbb{R}^n$  bzgl. des elementargeometrischen Inhalts  $\lambda$  aus, denn wir erhalten

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} [-k, k]^n \quad \text{und} \quad \lambda([-k, k]^n) = (2k)^n < \infty.$$

Die Hauptidee für die Konstruktion eines Maßes, das das gegebene Prämaß  $\mu$  auf eine  $\mathcal{R}$  enthaltende  $\sigma$ -Algebra fortsetzt, ist die folgende: Zunächst definieren wir eine Funktion  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ , das sogenannte *äußere Maß*, das diesen Namen zunächst eigentlich gar nicht verdient, da es kein Maß im Sinne von Definition 1.12 ist. Im Folgenden zeigen wir aber, dass es eingeschränkt auf eine gewisse  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  tatsächlich ein Maß ist.

**Definition 1.19 (Äußeres Maß)** Für eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  sei

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) \mid E_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \right\}.$$

Dann heißt die dadurch definierte Abbildung  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  das *äußere Maß* auf  $\Omega$ .

Beachten Sie, dass die Menge in Definition 1.19, über die das Infimum gebildet wird, nicht leer ist, da wir vorausgesetzt haben, dass  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  ausschöpft. Der Name *äußeres Maß* führt sich dann darauf zurück, dass wir  $\mu^*$  mit Hilfe des “inneren Maßes”  $\mu$  durch Approximation von Mengen  $A$  durch Vereinigungen von Elementarmengen von “außen” (d.h. durch Obermengen) definiert haben. Bevor wir einige wichtige Eigenschaften des äußeren Maßes zusammenstellen, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

**Lemma 1.20** Seien  $\tilde{\mathcal{R}}$  ein Ring über  $\Omega$ , sowie  $A_k \in \tilde{\mathcal{R}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $A \subseteq \Omega$ . Dann gilt:

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \implies \text{Es gibt } A'_k \in \tilde{\mathcal{R}}, k \in \mathbb{N}, \text{ paarweise disjunkt, so dass } A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k.$$

**Beweis:** Wir definieren die Mengen  $A'_0 := A_0$  und

$$A'_k := A_k \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{k-1})$$

für  $k \geq 1$ . Dann gilt  $A'_k \in \tilde{\mathcal{R}}$ ,  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k$  und die Mengen  $A'_k$  sind nach Konstruktion paarweise disjunkt.  $\square$

**Satz 1.21** Seien  $A, B, A_k \subseteq \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- 1)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
- 2)  $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , d.h. das äußere Maß  $\mu^*$  ist monoton.
- 3) Für alle  $E \in \mathcal{R}$  gilt  $\mu^*(E) = \mu(E)$ , d.h.  $\mu^*$  ist eine Fortsetzung von  $\mu$  auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ .
- 4)  $\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$ , d.h.  $\mu^*$  ist subadditiv.

**Beweis:**

1) und 2) folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des Inhalts  $\mu$ .

3) Wir zeigen  $\mu^*(E) = \mu(E)$  für alle  $E \in \mathcal{R}$ .

“ $\leq$ ”: ist klar, denn  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $E_0 = E$  und  $E_k = \emptyset$  für  $k \geq 1$  ist eine Überdeckung von  $E$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) = \mu(E)$ .

“ $\geq$ ”: Sei  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung von  $E$ . Setze  $E'_k := E_k \cap E \in \mathcal{R}$ . Dann gilt

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E'_k.$$

Wegen Lemma 1.20 können wir o.B.d.A annehmen, dass die Mengen  $E'_k$  paarweise disjunkt sind. Damit erhalten wir:

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E'_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E'_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k)$$

und da dies für alle Überdeckungen gilt, schließlich  $\mu(E) \leq \mu^*(E)$ .

- 4) Wir benutzen die Abkürzung  $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\mu^*(A_k) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, denn sonst ist die Abschätzung trivial. Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es nach Definition des Infimums Überdeckungen  $(E_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  von  $A_k$  bestehend aus Elementarmengen  $E_{k,\ell} \in \mathcal{R}$ , so dass

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mu(E_{k,\ell}) \leq \mu^*(A_k) + 2^{-k-1} \varepsilon.$$

Da nun  $(E_{k,\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Überdeckung von  $A$  aus Elementarmengen ist, erhalten wir

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu(E_{k,\ell}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \mu^*(A_k) + 2^{-k-1} \varepsilon \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Die gewünschte Ungleichung erhalten wir nun durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Ziel ist es nun, eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  zu finden, auf der das äußere Maß nicht nur subadditiv, sondern auch  $\sigma$ -additiv ist. Um die Mengen dieser  $\sigma$ -Algebra zu lokalisieren, benutzen wir eine geeignete Approximation durch Elementarmengen im Sinn einer geeigneten “Metrik”, des sogenannten *Abstandsmaßes*.

**Definition 1.22** Seien  $A, B \subseteq \Omega$ . Dann heißt

$$d(A, B) := \mu^*(A \triangle B)$$

das Abstandsmaß von  $A$  und  $B$ . (Hierbei bezeichnet  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  die symmetrische Differenz aus Bemerkung 1.3.)

**Bemerkung 1.23** Das Abstandsmaß erfüllt die folgenden Eigenschaften (Übung):

- i)  $d(A, A) = 0$ .
- ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .
- iii)  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ .
- iv)  $d(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2) \leq d(A_1, A_2) + d(B_1, B_2)$ .
- v)  $d(A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2) \leq d(A_1, A_2) + d(B_1, B_2)$ .
- vi)  $d(A_1 \setminus B_1, A_2 \setminus B_2) \leq d(A_1, A_2) + d(B_1, B_2)$ .

Die Eigenschaften i)–vi) des Abstandsmaßes folgen unmittelbar aus analogen Eigenschaften der symmetrischen Differenz. So beweist man z.B. iii), indem man zunächst mengentheoretisch nachweist, dass  $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$  gilt und folgert dann mit Hilfe der Monotonie und Subadditivität des äußeren Maßes:

$$d(A, B) = \mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B) = d(A, C) + d(C, B).$$

Analog zeigt man zunächst  $(A_1 \square B_1) \triangle (A_2 \square B_2) \subseteq (A_1 \triangle A_2) \cup (B_1 \triangle B_2)$ , wobei  $\square$  für eine der drei Operationen  $\cup$ ,  $\cap$  oder  $\setminus$  steht, und beweist dann damit die Bedingungen iv)–vi).

Die Bedingungen i)–iii) aus Bemerkung 1.23 besagen, dass sich  $d$  im wesentlichen wie eine Metrik verhält. Allerdings gibt es kleine Unterschiede, denn im Gegensatz zu einer echten Metrik ist  $d(A, B) = \infty$  möglich und außerdem auch  $d(A, B) = 0$  für  $A \neq B$ , da z.B. in  $\Omega = \mathbb{R}$  gilt, dass

$$d([0, 1], ]0, 1[) = \lambda^*(\{0, 1\}) = \lambda(\{0, 1\}) = \lambda([0, 1]) - \lambda(]0, 1[) = 1 - 1 = 0.$$

Wir könnten nun Aufwand betreiben und eine Teilmenge von Mengen endlichen äußeren Maßes zusammen mit einer Äquivalenzrelation  $A \sim B :\Leftrightarrow d(A, B) = 0$  betrachten, um auf der Menge der Äquivalenzklassen eine echte Metrik zu erhalten, aber das wäre vergebene Mühe, da wir im Folgenden mit den Eigenschaften i)–iii) auskommen und an keiner Stelle benötigen, dass  $d$  tatsächlich eine Metrik ist.

**Definition 1.24** Sei  $A \subseteq \Omega$ .

- 1)  $A$  heißt endlich messbar bzgl.  $\mu^*$  (kurz: endlich messbar), falls  $\mu^*(A) < \infty$  und falls es eine Folge  $(E_n)$  von Elementarmengen  $E_n \in \mathcal{R}$  gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, A) = 0.$$

Die Menge der endlich messbaren Teilmengen von  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .

- 2)  $A$  heißt messbar bzgl.  $\mu^*$ , falls  $A$  abzählbare Vereinigung von endlich messbaren Mengen bzgl.  $\mu^*$  ist. Die Menge der bzgl.  $\mu^*$  messbaren Teilmengen von  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ .

Im Gegensatz zur endlichen Messbarkeit verzichten wir bei der Messbarkeit nicht auf den Zusatz “bzgl.  $\mu^*$ ”, da wir den Begriff der Messbarkeit in den folgenden Kapiteln noch in anderen Zusammenhängen definieren und benutzen werden.

**Bemerkung 1.25** 1) Elementarmengen  $E \in \mathcal{R}$  mit  $\mu(E) < \infty$  sind endlich messbar.

- 2) Grob gesprochen ist die Menge der endlich messbaren Mengen der “Abschluss” der Menge der Elementarmengen endlichen äußeren Maßes bzgl. der “Topologie”, die durch die “Metrik” *Abstandsmaß* erzeugt wird.

Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass die Menge  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  der messbaren Mengen eine  $\sigma$ -Algebra ist, auf der das äußere Maß ein Maß ist. Dazu benötigen wir eine Serie von Lemmata.

**Lemma 1.26** Für alle  $A, B \subseteq \Omega$  mit  $\mu^*(A), \mu^*(B) < \infty$  gilt  $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B)$ .

**Beweis:** Zunächst stellen wir fest, dass

$$d(A, \emptyset) = \mu^*((A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A)) = \mu^*(A).$$

Damit erhalten wir  $\mu^*(A) \leq d(A, B) + d(B, \emptyset) = d(A, B) + \mu^*(B)$ , woraus die Ungleichung

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B)$$

folgt. Durch Rollentausch von  $A$  und  $B$  erhalten wir  $\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq d(B, A) = d(A, B)$  und damit die Behauptung.  $\square$



**Lemma 1.27** *Die Menge  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  der endlich messbaren Mengen ist ein Ring und das äußere Maß  $\mu^*$  ist ein Inhalt auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .*

**Beweis:** Seien  $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  beliebig. Dann gibt es nach Definition Folgen  $(A_n), (B_n)$  von Elementarmengen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B).$$

Wir zeigen nun die beiden Aussagen des Lemmas:

- 1)  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ist ein Ring:  $\mathcal{M}_{\mu^*} \neq \emptyset$  ist klar, da  $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Mit  $\mu^*(A), \mu^*(B) < \infty$  folgt dann  $\mu^*(A \cup B), \mu^*(A \setminus B) < \infty$ . Weiter gilt nach iv)–vi) von Bemerkung 1.23, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B) = 0, \quad (1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n \cap B_n, A \cap B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B) = 0, \quad (1.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n \setminus B_n, A \setminus B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B) = 0. \quad (1.3)$$

Da  $A_n \cup B_n$  und  $A_n \setminus B_n$  wieder Elementarmengen sind, erhalten wir daraus insbesondere  $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ , d.h.  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ist ein Ring.

- 2)  $\mu^*$  ist additiv auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ : Z.z. ist also  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$  für  $A \cap B = \emptyset$ . Da für Elementarmengen  $E$  gilt, dass  $\mu^*(E) = \mu(E)$ , erhalten wir mit Hilfe von Lemma 1.26, dass

$$|\mu(A_n) - \mu^*(A)| = |\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \leq d(A_n, A)$$

und daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu^*(A)$ . Analog erhalten wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu^*(B)$  und aus (1.1) und (1.2), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cup B_n) = \mu^*(A \cup B), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap B_n) = \mu^*(A \cap B).$$

Weiter gilt  $\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n)$  wegen Teil 3) von Bemerkung 1.14 und der Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  liefert

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A \cup B),$$

da  $\mu^*(A \cap B) = \mu^*(\emptyset) = 0$ .  $\square$

**Lemma 1.28** *Seien  $A_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt. Dann gilt*

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

*Insbesondere ist also  $\mu^*$  ein Prämaß auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .*

**Beweis:** Da nach Lemma 1.27  $\mu^*$  additiv auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ist, erhalten wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\sum_{k=0}^n \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right)$$

wobei die Ungleichung aus der Monotonie des äußeren Maßes folgt. Der Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  liefert die Ungleichung

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

und die umgekehrte Ungleichung folgt sofort aus der Subadditivität des äußeren Maßes.  $\square$

Das nächste Lemma verdeutlicht, dass die Bezeichnung *endlich messbar* für die Mengen  $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  eine sinnvolle Benennung war.

**Lemma 1.29** *Ist  $A \subseteq \Omega$  messbar bzgl.  $\mu^*$  und  $\mu^*(A) < \infty$ , so ist  $A$  endlich messbar.*

**Beweis:** Sei  $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  messbar bzgl.  $\mu^*$  mit  $\mu^*(A) < \infty$ . Dann gibt es endlich messbare Mengen  $A_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ . Zu zeigen ist, dass es eine Folge  $(E_n)$  von Elementarmengen  $E_n \in \mathcal{R}$  gibt, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, A) = 0$  gilt.

Da  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ein Ring ist, können wir nach Lemma 1.20 o.B.d.A. annehmen, dass die Mengen  $A_k$  paarweise disjunkt sind. Wir definieren nun die Mengen  $B_n := A_0 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt wegen  $B_n \setminus A = \emptyset$  und Lemma 1.28, dass

$$d(B_n, A) = \mu^*(B_n \triangle A) = \mu^*(A \setminus B_n) = \mu^*\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Nach Voraussetzung ist  $\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$  endlich, d.h. diese Reihe ist konvergent. Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, A) = 0.$$

Da die Mengen  $B_n$  endlich messbar sind, gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von Elementarmengen  $(E_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ , so dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(E_{n,m}, B_n) = 0.$$

Insbesondere finden wir zu jedem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ein  $m_n \in \mathbb{N}$  mit  $d(E_{n,m_n}, B_n) \leq \frac{1}{n}$ . Setzen wir nun noch  $E_n := E_{n,m_n}$ , so erhalten wir eine Folge von Elementarmengen  $E_n \in \mathcal{R}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, B_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 0 = 0.$$

Folglich ist  $A$  endlich messbar, also  $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .  $\square$

**Satz 1.30** Die Menge  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  der bzgl.  $\mu^*$  messbaren Mengen  $A \subseteq \Omega$  ist eine  $\sigma$ -Algebra und das äußere Maß  $\mu^*$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  und damit ein Maß auf  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ .

**Beweis:** Wir weisen zunächst nach, dass  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

- i) “ $\Omega \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ”: Da  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  ausschöpft gibt es Elementarmengen  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(E_n) < \infty$  und

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Folglich ist  $\Omega$  messbar.

- ii) “ $A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*} \ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ”:

Zu  $A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  gibt es endlich messbare Mengen  $A_{k,n} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n}$ . Dann gilt aber

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n}$$

und dies ist eine abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen.

- iii) “ $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ”:

Zu  $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  gibt es nach Definition endlich messbare Mengen  $A_k, B_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k.$$

Nun gilt

$$A \setminus B = \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) \setminus B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \setminus B).$$

Wenn wir zeigen können, dass die Mengen  $A_k \setminus B$  endlich messbar sind, folgt also  $A \setminus B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ . Wegen

$$A_k \cap B = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} (A_k \cap B_{\ell})$$

folgt, dass  $A_k \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ , da die Mengen  $A_k \cap B_{\ell}$  endlich messbar sind. Außerdem gilt

$$\mu^*(A_k \cap B) \leq \mu^*(A_k) < \infty$$

und damit ist  $A_k \cap B$  nach Lemma 1.29 sogar endlich messbar. Dann sind aber auch die Mengen  $A_k \setminus B = A_k \setminus (A_k \cap B)$  endlich messbar, da die endlich messbaren Mengen nach Lemma 1.27 einen Ring bilden.

Es bleibt noch die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu^*$  auf  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  zu zeigen. Seien dazu die Mengen  $A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt. Dann gibt es zu jedem  $A_k$  nach Lemma 1.20 o.B.d.A. paarweise disjunkte endlich messbare Mengen  $A_{k,n} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n}$ . Daraus erhalten wir mit Lemma 1.28, dass

$$\mu^* \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \mu^* \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_{k,n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k). \quad \square$$

Aus den bisherigen Erkenntnissen erhalten wir sofort das folgende Hauptresultat dieses Abschnitts. Dazu erinnern wir uns noch einmal daran, dass die bisherigen Resultate unter der Voraussetzung erzielt wurden, dass  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  ausschöpft. Damit unser Hauptresultat - wie es sich gehört - alleinstehend gültig ist, nehmen wir diese Voraussetzung noch einmal explizit in der Formulierung des Satzes mit auf.

**Satz 1.31 (Maßerweiterungssatz von Carathéodory)** *Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$  und sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $\mathcal{R}$ , so dass  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  ausschöpft. Dann ist das äußere Maß  $\mu^*$  ein Maß auf der von  $\mathcal{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$ .*

**Beweis:** Der Satz folgt sofort aus Satz 1.30.  $\square$

**Korollar 1.32** *Sei  $\lambda$  der elementargeometrische Inhalt auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist das äußere Maß  $\lambda^*$*

- 1) *ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  der bzgl.  $\lambda^*$  messbaren Mengen (genannt Lebesgue-messbare Mengen), das sogenannte Lebesgue-Maß  $\lambda^n := \lambda := \lambda^*|_{\mathcal{A}_{\lambda^*}}$ ,*
- 2) *ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  der Borel-Mengen das sogenannte Lebesgue-Borelsche Maß  $\lambda^n := \lambda := \lambda^*|_{\mathcal{B}}$ .*

An diesem Punkt stellt sich natürlich die Frage, ob sich die beiden  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  und  $\mathcal{B}$  überhaupt unterscheiden. Dies ist tatsächlich der Fall und um den Unterschied illustrieren zu können, betrachten wir zunächst eine wichtige Klasse messbarer Mengen, die sogenannten *Nullmengen*.

**Definition 1.33** *Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum.*

- 1) *Eine Menge  $N \in \mathcal{A}$  heißt Nullmenge, falls  $\mu(N) = 0$ .*
- 2) *Eine Menge  $T \subseteq \Omega$  heißt vernachlässigbar, falls es eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$  gibt, so dass  $T \subseteq N$ .*
- 3)  *$\mu$  bzw.  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt vollständig, falls jede vernachlässigbare Menge eine Nullmenge ist, d.h. falls für alle  $N \in \mathcal{A}$  gilt:*

$$\mu(N) = 0 \text{ und } T \subseteq N \implies T \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(T) = 0.$$

**Beispiel 1.34** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ .

- 1) Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist  $\{x\} = [x_1, x_1] \times \dots \times [x_n, x_n]$  eine Nullmenge, denn  $\{x\} \in \mathcal{B}$  und

$$\lambda(\{x\}) = \prod_{k=1}^n (x_k - x_k) = 0.$$

- 2) Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  abzählbar. Dann gilt  $X \in \mathcal{B}$  und  $X$  ist eine Nullmenge, denn ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung der Elemente von  $X$ , so gilt  $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x_k\}$  und daher

$$\lambda(X) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\{x_k\}) = 0.$$

Insbesondere gilt also  $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{B}$  und  $\lambda(\mathbb{Q}^n) = 0$ .

- 3) Zur Übung können Sie noch zeigen, dass  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n$  für jedes  $m \in \{1, \dots, n-1\}$  eine Nullmenge ist. (Dies zeigt die Existenz von überabzählbaren Nullmengen für  $n > 1$ . Für  $n = 1$  ist die sogenannte Cantor-Menge eine überabzählbare Nullmenge (Übung).)

In einer Übung werden Sie zeigen, dass das Lebesgue-Borelsche Maß nicht vollständig ist. Damit unterscheidet es sich vom Lebesgue-Maß, denn es gilt der folgende Satz:

**Satz 1.35** Das äußere Maß  $\mu^*$  ist vollständig auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  der messbaren Mengen.

**Beweis:** Sei  $N \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  eine Nullmenge und  $\tilde{N} \subseteq N$ . Wegen  $\mu^*(N) = 0$  ist  $N$  nach Lemma 1.28 sogar endlich messbar und daher gibt es eine Folge  $(E_n)$  von Elementarmengen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, N) = 0.$$

Nun gilt  $d(E_n, \tilde{N}) \leq d(E_n, N) + d(N, \tilde{N}) = d(E_n, N)$ , da

$$d(N, \tilde{N}) = \mu^*(N \triangle \tilde{N}) = \mu^*(N \setminus \tilde{N}) \leq \mu^*(N) = 0.$$

Dann gilt aber auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, \tilde{N}) = 0$  und  $\tilde{N}$  ist endlich messbar (mit  $\mu^*(\tilde{N}) = 0$ ).  $\square$

**Bemerkung 1.36** Man kann zeigen, dass das Lebesgue-Maß auf  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  die Vervollständigung des Lebesgue-Borelschen Maßes ist, d.h. man kann zeigen, dass gilt:

$$\mathcal{A}_{\lambda} = \{A \subseteq \mathbb{R}^d \mid \text{es gibt } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ mit } \lambda(B_2 \setminus B_1) = 0 \text{ und } B_1 \subseteq A \subseteq B_2\}.$$

### 1.3 Eindeutigkeit von Maßen

Da die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  offenbar größer als die Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  ist, stellt sich natürlich die Frage, warum man die kleinere Menge überhaupt betrachtet. Grund dafür ist, dass die Mengen unserer  $\sigma$ -Algebren schwierig zu charakterisieren sind. Will man daher Eigenschaften für alle Mengen aus diesen  $\sigma$ -Algebren beweisen, gelingt dies meist nur über einen Umweg und hierbei benötigt man die wichtige Eigenschaft der Borelschen  $\sigma$ -Algebra, dass sie von den elementargeometrischen Mengen erzeugt wird. Die dahinterstehende Beweisidee ist das sogenannte *Prinzip der guten Menge*: Sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  und  $\sigma(\mathcal{E})$  die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Um zu beweisen, dass alle Mengen  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  eine Eigenschaft  $(*)$  haben, definieren wir die *Menge der guten Mengen*

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ hat die Eigenschaft } (*)\}$$

und zeigen dann

- i)  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$ .
- ii)  $\mathcal{G}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Dann gilt nämlich  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$  und damit haben auch alle Mengen aus  $\sigma(\mathcal{E})$  die gewünschte Eigenschaft. Beim Nachweis der Eigenschaft ii) gibt es manchmal Schwierigkeiten bei dem Beweis, dass eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{G}$  wieder zu  $\mathcal{G}$  gehört, wenn diese nicht paarweise disjunkt sind, da wir in diesem Fall die  $\sigma$ -Additivität eines Maßes nicht ausnutzen können. Aus diesem Grund benötigen wir den folgenden Begriff, der den der  $\sigma$ -Algebra abschwächt.

**Definition 1.37** Eine Menge  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt Dynkin-System, falls gilt:

- i)  $\Omega \in \mathcal{D}$ .
- ii)  $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$ .
- iii)  $A_k \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}, \text{ paarweise disjunkt} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$ .

**Bemerkung 1.38** 1) Jede  $\sigma$ -Algebra ist ein Dynkin-System, aber nicht umgekehrt. Betrachte z.B.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ . Dann ist

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \Omega\}$$

ein Dynkin-System, aber keine  $\sigma$ -Algebra, da  $\{1, 2, 4\} = \{1, 2\} \cup \{2, 4\} \notin \mathcal{D}$ .

- 2) Beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen sind wieder Dynkin-Systeme.
- 3) Zu jedem  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  gibt es ein kleinstes Dynkin-System  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ , nämlich

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \bigcap \{\mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ Dynkin-System mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  heißt das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System.

- 4) Wegen 1) folgt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ . Z.B. ist  $\mathcal{D}$  aus 1) das von  $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  erzeugte Dynkin-System, die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra ist dagegen  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ .

Unser nächstes Ziel ist es, einfache Kriterien dafür zu finden, dass ein Dynkin-System bereits eine  $\sigma$ -Algebra ist.

**Lemma 1.39** *Sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ein durchschnittsstabiles Dynkin-System. Dann ist  $\mathcal{D}$  eine  $\sigma$ -Algebra.*

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass  $\mathcal{D}$  abgeschlossen gegenüber beliebigen abzählbaren Vereinigungen ist.  $\mathcal{D}$  ist differenzstabil, denn sind  $A, B \in \mathcal{D}$ , so gilt auch  $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{D}$ . Seien nun  $A_k \in \mathcal{D}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Wir benutzen den Trick aus dem Beweis von Lemma 1.20, um daraus paarweise disjunkte Mengen zu machen: Setze

$$A'_0 := A_0, \quad A'_k = A_k \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{k-1}) = A_k \setminus (A'_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A'_{k-1})$$

Dann gilt  $A'_k \in \mathcal{D}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und daher

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k \in \mathcal{D}. \quad \square$$

**Satz 1.40** *Sei  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  durchschnittsstabil. Dann gilt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E})$ , d.h. das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System ist eine  $\sigma$ -Algebra.*

**Beweis:** Zu  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  definieren wir die Menge

$$\mathcal{D}(B) := \{D \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \mid D \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\}.$$

Dann reicht es, die beiden folgenden Eigenschaften zu zeigen:

i)  $\mathcal{D}(B)$  ist ein Dynkin-System.

ii)  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(B)$  für alle  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ ,

denn daraus folgt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathcal{D}(B)$  für alle  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ . Sind dann  $A, B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  beliebig, so folgt  $A \in \mathcal{D}(B)$  und daher  $A \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ . Folglich ist  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  durchschnittsstabil und damit nach Lemma 1.39 eine  $\sigma$ -Algebra.

Offenbar gilt  $\Omega \in \mathcal{D}(B)$ , wegen  $\Omega \cap B = B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ . Ist  $A \in \mathcal{D}(B)$ , also  $A \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ , so gilt

$$A^c \cap B = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap B) = (A^c \cup B^c) \cap B = (A \cap B)^c \cap B = \left((A \cap B) \dot{\cup} B^c\right)^c$$

und wegen  $A \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  folgt  $A^c \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  und damit  $A^c \in \mathcal{D}(B)$ . Sind ferner  $A_k \in \mathcal{D}(B)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt, so folgt

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap B) \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$$

und damit ist  $\mathcal{D}(B)$  auch abgeschlossen gegenüber disjunkten abzählbaren Vereinigungen, also insgesamt ein Dynkin-System, was i) beweist. Zum Beweis von ii) sei  $E \in \mathcal{E}$  beliebig. Da  $\mathcal{E}$  durchschnittsstabil ist, gilt  $\tilde{E} \cap E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  für alle  $\tilde{E} \in \mathcal{E}$ , also  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Da  $\mathcal{D}(E)$  nach i) ein Dynkin-System ist, gilt dann auch  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Wegen  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$  gilt  $B \cap E \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ , also auch  $E \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  bzw.  $E \in \mathcal{D}(B)$ . Da  $E$  beliebig war folgt ii).  $\square$

**Satz 1.41 (Eindeutigkeit von Maßen)** Sei  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  durchschnittsstabil, sowie  $\mu_1, \mu_2$  zwei Maße auf der von  $\mathcal{E}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$ . Ferner schöpfe  $\mathcal{E}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu_1$  aus, d.h. es gebe  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \quad \text{und} \quad \mu_1(E_k) < \infty.$$

Dann gilt: Stimmen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  auf  $\mathcal{E}$  überein, so sind sie schon gleich, d.h. es gilt

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2.$$

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten:

- 1) Für alle  $E \in \mathcal{E}$  mit  $\mu_1(E) < \infty$  und alle  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  gilt  $\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$ .

Wir zeigen dies mit dem Prinzip der guten Mengen. Sei dazu  $E \in \mathcal{E}$  mit  $\mu_1(E) < \infty$  fest. Setze dann

$$\mathcal{D}(E) := \{A \in \sigma(\mathcal{E}) \mid \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\}.$$

Dann ist  $\mathcal{D}(E)$  ein Dynkin-System, denn nach Voraussetzung gilt  $\Omega \in \mathcal{D}(E)$  und weiter erhalten wir aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \mu_1(A^c \cap E) + \mu_1(A \cap E) &= \mu_1((A^c \cap E) \cup (A \cap E)) = \mu_1(E) = \mu_2(E) \\ &= \mu_2((A^c \cap E) \cup (A \cap E)) = \mu_2(A^c \cap E) + \mu_2(A \cap E), \end{aligned}$$

dass  $A \in \mathcal{D}(E)$  genau dann gilt, wenn  $A^c \in \mathcal{D}(E)$ . Sind schließlich  $A_k \in \mathcal{D}(E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt, so gilt

$$\mu_1\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap E)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(A_k \cap E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_k \cap E) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap E)\right)$$

und daher  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}(E)$ . Weiter gilt  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(E)$ , denn da  $\mathcal{E}$  durchschnittsstabil ist, gilt für  $\tilde{E} \in \mathcal{E}$  beliebig auch  $\tilde{E} \cap E \in \mathcal{E}$  und daher

$$\mu_1(\tilde{E} \cap E) = \mu_2(\tilde{E} \cap E),$$

also  $\tilde{E} \in \mathcal{D}(E)$ . Damit folgt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Nach Satz 1.40 gilt wegen der Durchschnittsstabilität von  $\mathcal{E}$  aber  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Dies beendet den Beweis von 1).

- 2) Es gilt  $\mu_1 = \mu_2$  auf ganz  $\sigma(\mathcal{E})$ .

Nach Voraussetzung gibt es Mengen  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\mu_1(E_k) < \infty$ , so dass  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ . Setze

$$F_0 := E_0 \quad \text{und} \quad F_k := E_k \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1}), \quad k \geq 1.$$



Dann ist  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$  eine disjunkte Vereinigung und für alle  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  gilt wegen 1):

$$\begin{aligned}\mu_1(A \cap F_0) &= \mu_1(A \cap E_0) = \mu_2(A \cap E_0) = \mu_2(A \cap F_0) \\ \mu_1(A \cap F_k) &= \mu_1\left((A \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1})) \cap E_k\right) \\ &= \mu_2\left((A \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1})) \cap E_k\right) = \mu_2(A \cap F_k),\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $A \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1}) \in \sigma(\mathcal{E})$  gilt. Damit erhalten wir für alle  $A \in \sigma(\mathcal{E})$ , dass

$$\begin{aligned}\mu_1(A) &= \mu_1\left(A \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k\right)\right) = \mu_1\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A \cap F_k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(A \cap F_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A \cap F_k) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A \cap F_k)\right) = \mu_2\left(A \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k\right)\right) = \mu_2(A). \quad \square\end{aligned}$$

**Korollar 1.42** Die Fortsetzung eines auf einem Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$  definierten Prämaßes  $\mu$  zu einem Maß auf die von  $\mathcal{R}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  ist eindeutig bestimmt.

Damit ist insbesondere das Lebesgue-Borelsche Maß  $\lambda$  auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  eindeutig bestimmt. Da die Menge der achsenparallelen Quader  $\mathcal{Q}$  ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem des Rings der elementargeometrischen Mengen ist, ist  $\lambda$  sogar bereits durch die Werte auf  $\mathcal{Q}$  eindeutig bestimmt.

**Korollar 1.43** Sei  $B \in \mathcal{B}^n$  und  $\tilde{B} := \{rx + q \mid x \in B\}$ , wobei  $r > 0$  und  $q \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\tilde{B} \in \mathcal{B}^n \quad \text{und} \quad \lambda(\tilde{B}) = r^n \lambda(B).$$

Insbesondere ist das Lebesgue-Borelsche Maß  $\lambda$  translationsinvariant.

**Beweis:**  $\tilde{B} \in \mathcal{B}$  ist klar oder eine Übung. Ferner werden durch

$$\mu_1(A) := \lambda(\{rx + q \mid x \in A\}), \quad \mu_2(A) := r^n \lambda(A)$$

zwei Maße auf  $\mathcal{B}$  definiert, die auf den achsenparallelen Quadern übereinstimmen. Dann folgt mit dem Eindeutigkeitssatz schon  $\mu_1 = \mu_2$ .  $\square$

**Korollar 1.44** Das Lebesgue-Borelsche Maß ist permutationsinvariant, d.h. ist  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine Permutationsmatrix, so gilt für alle  $B \in \mathcal{B}^n$ , dass

$$\lambda(\{Px \mid x \in B\}) = \lambda(B).$$

**Beweis:** Übung.  $\square$

## 1.4 Messbare Funktionen

Wir betrachten im Folgenden einen Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , die Mengen in  $\mathcal{A}$  nennen wir  $\mu$ -messbar bzw. kurz einfach nur *messbar*. (Dieser Begriff ist nicht zu verwechseln mit der Messbarkeit bzgl. des äußeren Maßes aus Definition 1.24, der nur von dem äußerem Maß, aber nicht von der betrachteten  $\sigma$ -Algebra abhängt.)

Unser späteres Ziel ist die Einführung des Integralbegriffs nach Lebesgue mit Hilfe der Approximation von Funktionen durch sogenannte *einfache Funktionen* oder *Elementarfunktionen*, d.h. Funktionen, die nur endlich viele Werte  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  annehmen. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so können wir  $f$  durch die Elementarfunktion

$$f_n(x) = \alpha_i \quad \text{für alle } x \text{ mit } \alpha_i \leq f(x) < \alpha_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

approximieren, wobei wir  $\alpha_{n+1} := \infty$  setzen. Unter der Annahme  $\alpha_1 \leq \inf f$  (dies können wir z.B. immer erreichen, wenn  $f$  eine nichtnegative Funktion ist und wir  $\alpha_1 := \inf f$  setzen) ist  $f_n$  auf ganz  $\Omega$  definiert und es gilt  $f_n \leq f$ . Wir können nun einfach ein Integral für  $f_n$  definieren vermöge

$$\int f_n d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \quad \text{mit } A_k = f_n^{-1}(\{\alpha_k\}) = \{x \mid \alpha_k \leq f(x) < \alpha_{k+1}\}.$$

Dies funktioniert allerdings nur, wenn die Mengen  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  messbar sind. Dies motiviert den Begriff der *messbaren Funktion*, wobei wir uns allerdings auf gewisse Grundmengen beschränken und dann hinterher mit Hilfe der Eigenschaften der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  nachweisen, dass dann auch die gewünschten Mengen  $A_k$  messbar sind.

Da wir es bei Maßen auch mit dem Wert  $\infty$  zu tun haben, ist es im Folgenden zweckmäßiger (und in weise Voraussicht auf Abschnitt 1.8 auch unabdingbar) nicht nur reellwertige Funktionen zu betrachten, sondern auch solche, die die Werte  $\infty$  und  $-\infty$  annehmen dürfen. Dazu erweitern wir die reellen Zahlen und definieren

$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

und verwenden beim Rechnen in  $\overline{\mathbb{R}}$  die folgenden Vereinbarungen: Sei  $a \in [-\infty, \infty]$ . Dann gilt per Konvention:

$$\begin{aligned} -\infty < a < \infty & \quad \text{für } a \neq -\infty, \infty, \\ a + \infty = \infty + a = \infty & \quad \text{für } a \neq -\infty, \\ a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty & \quad \text{für } a \neq \infty, \\ \infty \cdot a := a \cdot \infty := \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0, \\ 0 & \text{für } a = 0, \\ -\infty & \text{für } a < 0, \end{cases} \\ a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := -(a \cdot \infty). \end{aligned}$$

Undefiniert bleiben jedoch die Ausdrücke  $\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$  und auch die Division durch  $\infty$ ,  $-\infty$  bleibt strengstens verboten.

Unseren Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  können wir dann zu einem Maßraum  $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}, \lambda)$  erweitern. Sie rechnen leicht nach, dass durch

$$\overline{\mathcal{B}} := \{B \subseteq [-\infty, \infty] \mid B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}\} = \{B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, \infty\} \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert wird. Ebenso leicht zeigen Sie, dass wir  $\lambda$  durch die Definition

$$\lambda(B \cup \{\infty\}) := \lambda(B \cup \{-\infty\}) := \lambda(B \cup \{-\infty, \infty\}) := \lambda(B)$$

für alle  $B \in \mathcal{B}$  zu einem Maß auf  $\overline{\mathcal{B}}$  erweitern können.

Der Vorteil der Erweiterung der reellen Zahlen zeigt sich insbesondere bei der Erweiterung der Begriffe Infimum, Supremum und Konvergenz. Für jede nichtleere Teilmenge  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  existieren nun

$$\begin{aligned} \sup A &:= \text{kleinstes } c \in \overline{\mathbb{R}} \text{ mit } x \leq c \text{ für alle } x \in A, \\ \inf A &:= \text{größtes } c \in \overline{\mathbb{R}} \text{ mit } x \geq c \text{ für alle } x \in A. \end{aligned}$$

Seien weiter  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann erweitern wir die Definition der Konvergenz durch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &:\Leftrightarrow \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit} \\ &\quad a_n \in \mathbb{R} \text{ und } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty &:\Leftrightarrow \text{Zu jedem } c \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } c < a_n \text{ für alle } n \geq N, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty &:\Leftrightarrow \text{Zu jedem } c \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n < c \text{ für alle } n \geq N. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Fälle entsprechen im wesentlichen dem bisherigen Begriff der *bestimmten Divergenz gegen  $\pm\infty$* , wobei wir jetzt nur zusätzlich erlauben, dass auch schon einige der Folgenglieder die Werte  $\pm\infty$  annehmen dürfen.

Als eine wichtige Folgerung unserer Erweiterungen stellen wir fest, dass jetzt jede monotone Folge konvergiert. Ist nämlich  $(a_n)$  eine monoton wachsende und  $(b_n)$  eine monoton fallende Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n.$$

Dies hat weiter zur Folge, dass *Limes inferior* und *Limes superior* für jede Folge  $(a_n)$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  existieren:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k \quad (1.4)$$

Nach diesen Vorbereitungen fahren wir mit der Definition messbarer Funktionen fort.

**Definition 1.45** Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt messbar, falls für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f^{-1}(]c, \infty]) = \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \in \mathcal{A}.$$

**Beispiel 1.46** 1) Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in A^c = \Omega \setminus A \end{cases}$$

messbar, denn es gilt  $\emptyset, A, \Omega \in \mathcal{A}$ , sowie

$$(\chi_A)^{-1}(]c, \infty]) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } c \geq 1, \\ A & \text{für } 0 \leq c < 1, \\ \Omega & \text{für } c < 0. \end{cases}$$

2) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ . Dann sind stetige Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind messbar, denn da  $f$  nicht die Wert  $\infty, -\infty$  annimmt, ist

$$f^{-1}(]c, \infty]) = f^{-1}(]c, \infty[)$$

als stetiges Urbild einer offenen Menge selbst offen und daher eine Borel-Menge, also gilt  $f^{-1}(]c, \infty]) \in \mathcal{B}$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

**Satz 1.47** Sei  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $f$  ist messbar.
- 2)  $\{x \in \Omega \mid f(x) \geq c\}$  ist messbar für alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- 3)  $\{x \in \Omega \mid f(x) < c\}$  ist messbar für alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- 4)  $\{x \in \Omega \mid f(x) \leq c\}$  ist messbar für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Wir beweisen den Satz durch Ringschluss, indem wir die Eigenschaften der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  ausnutzen.

$$“1) \Rightarrow 2)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) > c - \frac{1}{n}\}.$$

$$“2) \Rightarrow 3)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) < c\} = \Omega \setminus \{x \mid f(x) \geq c\}.$$

$$“3) \Rightarrow 4)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) < c + \frac{1}{n}\}.$$

$$“4) \Rightarrow 1)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} = \Omega \setminus \{x \mid f(x) \leq c\}. \quad \square$$

**Korollar 1.48** Seien  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar und  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Dann sind die Mengen  $\{x \in \Omega \mid a < f(x) < b\}$ ,  $\{x \in \Omega \mid a \leq f(x) < b\}$ ,  $\{x \in \Omega \mid a < f(x) \leq b\}$  und  $\{x \in \Omega \mid a \leq f(x) \leq b\}$  messbar.

**Beweis:** Für  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  ist dies einer der Fälle aus dem Satz und für  $a, b \in \mathbb{R}$  folgt dies aus

$$\{x \in \Omega \mid a < f(x) < b\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \cap \{x \in \Omega \mid f(x) < b\}$$

bzw. aus analogen Identitäten für die anderen Mengen.  $\square$

Nachdem wir nun wissen, dass messbare Funktionen die für uns eingangs erwähnten, wichtigen Eigenschaften erfüllen, benötigen wir nun weitere Kriterien, um die Messbarkeit von Funktionen nachweisen zu können.

**Satz 1.49** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann gilt:

- 1)  $\max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  sind messbar.
- 2)  $f^+ := \max(f, 0)$  und  $f^- := -\min(f, 0)$  sind messbar.
- 3)  $|f| := f^+ + f^-$  ist messbar.

**Beweis:** 1) Für  $\max(f, g)$  folgt dies aus der Messbarkeit der Mengen

$$\{x \in \Omega \mid \max(f(x), g(x)) > c\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \cup \{x \in \Omega \mid g(x) > c\}$$

für alle  $c \in \mathbb{R}$ . Der Beweis für  $\min(f, g)$  ist analog.

2) Dies ist ein Spezialfall von 1).

3) Da für jedes  $x \in \Omega$  nur eine der beiden Größen  $f^+(x)$  und  $f^-(x)$  von Null verschieden sein kann, gilt

$$\{x \in \Omega \mid |f(x)| > c\} = \{x \in \Omega \mid f^+(x) > c\} \dot{\cup} \{x \in \Omega \mid f^-(x) > c\}.$$

Die Messbarkeit von  $|f|$  folgt damit aus der Messbarkeit von  $f^+$  und  $f^-$ .  $\square$

**Satz 1.50** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann sind die durch

$$i) \quad g(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad h(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x),$$

$$ii) \quad \tilde{g}(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \tilde{h}(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

definierten Funktionen  $g, \tilde{g}, h, \tilde{h} : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar.

**Beweis:** 1) Die Messbarkeit von  $g$  und  $h$  folgt aus der Messbarkeit der  $f_n$  wegen

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega \mid g(x) > c\} &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) > c\} \\ \text{und } \{x \in \Omega \mid h(x) < c\} &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) < c\}. \end{aligned}$$

2) ist wegen (1.4) ein Spezialfall von 1).  $\square$

**Korollar 1.51** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die punktweise gegen  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  konvergiert:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

Dann ist  $f$  messbar.

**Beweis:** Wegen  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  folgt dies sofort aus Satz 1.50.  $\square$

Für den folgenden Satz und das folgende Korollar müssen wir uns auf Funktionen beschränken, die nicht die Werte  $-\infty$  oder  $\infty$  annehmen, da wir den Begriff der Stetigkeit und dafür die Topologie auf  $\mathbb{R}$  benötigen.

**Satz 1.52** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist die Funktion  $h = F \circ (f, g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto F(f(x), g(x))$  messbar.

**Beweis:** Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig. Da  $F$  stetig ist und daher Urbilder offener Mengen offen unter  $F$  sind, ist die Menge

$$G_c := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid F(u, v) > c\} = F^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x > c\})$$

offen und daher nach Satz 1.10 eine Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen achsenparallelen Quadern:

$$G_c = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n \quad \text{mit} \quad Q_n = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a_n \leq u \leq b_n, c_n \leq v \leq d_n\}, \quad a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$$

Damit gilt

$$\{x \in \Omega \mid h(x) > c\} = \{x \in \Omega \mid (f(x), g(x)) \in G_c\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \Omega \mid (f(x), g(x)) \in Q_n\}.$$

Da wegen der Messbarkeit von  $f$  und  $g$  die Mengen

$$\{x \in \Omega \mid (f(x), g(x)) \in Q_n\} = \{x \in \Omega \mid a_n \leq f(x) \leq b_n\} \cap \{x \in \Omega \mid c_n \leq g(x) \leq d_n\}$$

nach Korollar 1.48 messbar sind, folgt die Messbarkeit der Menge  $\{x \in \Omega \mid h(x) > c\}$ . Da  $c$  beliebig war, ist  $h$  somit messbar.  $\square$

**Korollar 1.53** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\alpha \cdot f$  messbar.

**Bemerkung 1.54** Wir haben uns hier bei dem Begriff der Messbarkeit von Funktionen auf das Lebesgue-Borel-Maß im Bildraum beschränkt. Allgemeiner kann man auch Funktionen zwischen zwei Maßräumen  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$  betrachten und definiert diese dann als messbar, wenn Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind, d.h.,

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \text{ ist messbar} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \text{ für alle } A \in \mathcal{A}_2.$$

Zur Übung können Sie zeigen, dass eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann messbar im Sinn von Definition 1.45 ist, wenn Sie messbar im obigen Sinn als Funktion zwischen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  ist.

## 1.5 Das Lebesgue-Integral

Aus der Analysis I ist Ihnen bekannt, dass sich bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen stetiger Funktionen Grenzwertbildung und Integration miteinander vertauschen lassen (siehe Analysis I Satz 8.7). Eine wesentliche Beobachtung in der Integrationstheorie ist die Tatsache, dass sich die Forderung der gleichmäßigen Konvergenz durch die Forderung der *Monotonie* der Folge ersetzen lässt. Diesen Umstand, den wir im nächsten Abschnitt allgemein beweisen werden, werden wir schon jetzt antizipativ bei der Definition des *Lebesgue-Integrals* nutzen.

Im Folgenden sei der Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  gegeben. Wir beginnen mit der im vorigen Abschnitt angekündigten Definition der *Elementarfunktionen*, schränken uns dabei aber auf nichtnegative Funktionen ein. Grund dafür ist vor allem, dass wir bei der anschließenden Definition des Integrals nicht definierbare Ausdrücke wie  $-\infty + \infty$  vermeiden wollen, die z.B. in Summen der Form  $\alpha_1 \cdot \infty + \alpha_2 \cdot \infty$  mit  $\alpha_1 < 0$  und  $\alpha_2 > 0$  auftreten könnten.

**Definition 1.55** Eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Elementarfunktion* (auch einfache Funktion), falls  $f \geq 0$  gilt und  $f(\Omega)$  endlich ist, d.h. falls  $f$  nur endlich viele Werte annimmt, die zusätzlich alle nichtnegativ sind.

**Beispiel 1.56** Sei  $A \subseteq \Omega$ . Dann ist die *charakteristische Funktion*  $\chi_A : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  gegeben durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Da die Funktion  $\chi_A$  nur zwei verschiedene Werte annehmen kann, ist  $\chi_A$  offenbar genau dann eine Elementarfunktion, wenn sie messbar ist, was der Fall ist, wenn  $A$  messbar ist, also  $A \in \mathcal{A}$  gilt. Ein konkretes Beispiel für eine Elementarfunktion ist also die charakteristische Funktion  $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ , denn es gilt  $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$ .

**Definition 1.57** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  eine Elementarfunktion und seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  paarweise verschieden, so dass  $f(\Omega) \setminus \{0\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}.$$

mit  $A_k = f^{-1}(\{\alpha_k\})$ ,  $k = 1, \dots, n$  die *Normaldarstellung* von  $f$ .

Da eine Elementarfunktion nach Voraussetzung messbar ist, so sind nach Korollar 1.48 auch die Mengen  $A_k = f^{-1}(\{\alpha_k\}) = \{x \in \Omega \mid \alpha_k \leq f(x) \leq \alpha_k\}$  messbar. Dies ermöglicht uns die folgende Definition.

**Definition 1.58** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  eine Elementarfunktion mit der Normaldarstellung  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ . Dann heißt

$$\int f \, d\mu := \int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \in [0, \infty]$$

das Integral von  $f$  (über  $\Omega$ ).

**Beispiel 1.59** Sei  $A \subseteq \Omega$  messbar. Dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_A$  schon in Normaldarstellung und es gilt

$$\int \chi_A d\mu = \mu(A).$$

Diese Gleichung bleibt auch für  $A = \emptyset$  richtig, da dann die Normaldarstellung von  $\chi_\emptyset$  die leere Summe ist. Für den Spezialfall  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $A = \mathbb{Q}$  erhalten wir insbesondere

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

**Satz 1.60** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  Elementarfunktionen und  $\alpha \geq 0$ . Dann gilt:

1) (*“Linearität” des Integrals*):  $\alpha f$  und  $f + g$  sind Elementarfunktionen und es gilt

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu \quad \text{und} \quad \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

2) (*Monotonie des Integrals*): Für  $f \leq g$  gilt  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .

**Beweis:** Übung. (Nutzen sie die Normaldarstellungen von  $f$  und  $g$  und betrachten Sie eine gemeinsame Verfeinerung der zu Grunde liegenden Unterteilungen von  $\Omega$ .)  $\square$

Im nächsten Schritt wollen wir das Integral für eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  definieren. Die Idee ist dabei eine Folge von Elementarfunktionen betrachten, die gegen  $f$  konvergiert, und dann einfach  $\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$  zu setzen. Das Problem ist dabei nur die Frage der Wohldefiniertheit, weil es natürlich unterschiedliche Folgen von Elementarfunktionen geben kann, die punktweise gegen dieselbe Funktion  $f$  konvergieren. Leider zeigt das folgende Beispiel, dass die zugehörigen Folgen von Integralen unterschiedliche Limes besitzen können.

**Beispiel 1.61** Gegeben sei der Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , sowie für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  die Elementarfunktionen  $f_k, g_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  mit

$$f_k(x) = 0 \quad \text{und} \quad g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{für } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 0$ , aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\lambda = 0 \neq 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k d\lambda.$$

Von zentraler Bedeutung für die Integrationstheorie nach Lebesgue ist die Erkenntnis, dass sich das Problem der Wohldefiniertheit lösen lässt, wenn man sich auf *monoton wachsende* Folgen von Elementarfunktionen beschränkt. In der Tat ist dies der Grund für das beobachtete Scheitern im Beispiel 1.61, denn die dort betrachtete Funktionenfolge  $(g_n)$  ist nicht monoton. Der folgende Satz zeigt zunächst, dass sich jede nichtnegative messbare Funktion als Limes einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen darstellen lässt.



**Satz 1.62** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eine messbare Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Elementarfunktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ , die punktweise gegen  $f$  konvergiert, d.h. es gilt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

**Beweis:** Wir unterteilen das Intervall  $[0, \infty]$  in  $[0, n[$  und  $[n, \infty]$ , sowie das Intervall  $[0, n[$  in  $n2^n$  rechts-halboffene Intervalle der Länge  $2^{-n}$ . Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} A_{n,k} &:= \left\{ x \in \Omega \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad k = 1, \dots, n2^n, \\ B_n &:= \{ x \in \Omega \mid f(x) \geq n \}. \end{aligned}$$

Wegen der Messbarkeit von  $f$  sind diese Mengen messbar und daher ist

$$f_n := \left( \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} \right) + n \chi_{B_n}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Elementarfunktion in Normaldarstellung. Offenbar ist  $(f_n)$  monoton wachsend und  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .  $\square$

Vor der Definition des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen lösen wir nun das Problem der Wohldefiniertheit mithilfe des folgenden Satzes und des anschließenden Korollars.

**Satz 1.63** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  eine Elementarfunktion und  $(f_n)$  eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ . Dann gilt:

$$f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

**Beweis:** Für  $f = 0$  ist der Satz trivial, da dann  $\int f \, d\mu = 0$  gilt. Sei also  $f \neq 0$  und  $f(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  mit  $\alpha_1 < \dots < \alpha_m$ , sowie

$$A := \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}, \quad \alpha := \min \{f(x) \mid x \in A\}, \quad \beta := \alpha_m.$$

Dann gilt  $\alpha, \beta > 0$  (sowie  $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ). Sei  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \alpha$  beliebig und

$$A_n := \{x \in A \mid f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^m (\{x \in A \mid f_n(x) \geq \alpha_k - \varepsilon\} \cap \{x \in A \mid f(x) = \alpha_k\})$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind die  $A_n$  als Vereinigungen von Schnitten messbarer Mengen alle messbar und wegen der Monotonie der Folge  $(f_n)$  und der Eigenschaft  $f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  gilt

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Sei weiter  $B_0 = A_0$  und  $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$  für  $k \geq 1$ . Dann sind die  $B_k$  paarweise disjunkt und messbar und es gilt

$$A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k.$$

Damit erhalten wir insbesondere wegen der  $\sigma$ -Additivität des Maßes  $\mu$ , dass

$$\mu(A_n) = \sum_{k=0}^n \mu(B_k) \quad \text{und} \quad \mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k)$$

und daher  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ . Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle.

*Fall 1:*  $\mu(A) = \infty$ . In diesem Fall gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$ . Da nach Definition von  $A_n$  außerdem  $f_n \geq (f - \varepsilon)\chi_{A_n} \geq (\alpha - \varepsilon)\chi_{A_n}$  gilt, erhalten wir aus der Monotonie des Integrals

$$\int f_n \, d\mu \geq (\alpha - \varepsilon)\mu(A_n),$$

woraus wegen  $\alpha - \varepsilon > 0$  dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \infty$  folgt und die behauptete Ungleichung trivialerweise erfüllt ist.

*Fall 2:*  $\mu(A) < \infty$ . In diesem Fall gilt nach Konstruktion von  $A_n$ , dass

$$f_n + (\beta - \varepsilon)\chi_{A \setminus A_n} + \varepsilon\chi_A \geq (f - \varepsilon)\chi_{A_n} + (f - \varepsilon)\chi_{A \setminus A_n} + \varepsilon\chi_A = (f - \varepsilon)\chi_A + \varepsilon\chi_A = f.$$

Daher erhalten wir die Abschätzung

$$\int f_n \, d\mu + (\beta - \varepsilon)\mu(A \setminus A_n) + \varepsilon\mu(A) \geq \int f \, d\mu,$$

woraus wir wegen  $\mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  durch Grenzübergang die Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu + \varepsilon\mu(A) \geq \int f \, d\mu$$

erhalten. Da  $\varepsilon$  beliebig war und  $\mu(A)$  endlich ist, erhalten wir schließlich die im Satz behauptete Ungleichung.  $\square$

**Korollar 1.64** Seien  $(f_n), (g_n)$  zwei monoton wachsende Folgen von Elementarfunktionen  $f_n, g_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

**Beweis:** Setze  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . Dann gilt für  $m \in \mathbb{N}$  fest, dass

$$f_m \leq f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

Daher erhalten wir mit Satz 1.63, dass

$$\int f_m \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

Die andere Ungleichung beweisen wir analog durch Rollentausch von  $f_n$  und  $g_n$ .  $\square$

**Definition 1.65** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $(f_n)$  eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ . Dann heißt

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

das Integral von  $f$  über  $\Omega$ .

Dank Satz 1.62 ist garantiert, dass jede nichtnegative messbare Funktion ein Integral besitzt und wegen Korollar 1.64 ist dieses auch wohldefiniert.

**Satz 1.66** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $\alpha \geq 0$ . Dann sind auch  $f + g$  und  $\alpha f$  messbar und es gilt:

1) (“Linearität” des Integrals):

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu \quad \text{und} \quad \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

2) (Monotonie des Integrals): Aus  $f \leq g$  folgt  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ .

**Beweis:** Übung. (Nutzen Sie Korollar 1.51 und Satz 1.62 um die Messbarkeit von  $f + g$  und  $\alpha f$  zu zeigen und nutzen Sie dann die entsprechenden Eigenschaften des Integrals für Elementarfunktionen.)  $\square$

Wir kommen nun zur eigentlichen Definition des *Lebesgue-Integrals*. Dabei verzichten wir letztendlich auch auf die Nichtnegativität der betrachteten messbaren Funktionen.

**Definition 1.67 (Lebesgue-Integral)** Eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt integrierbar über  $\Omega$ , falls

$$\int f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall ist das Integral von  $f$  (über  $\Omega$ ) definiert durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

**Bemerkung 1.68** Für die Wohldefiniertheit des Integrals einer messbaren Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  reicht es bereits zu fordern, dass wenigstens eines der beiden Integrale  $\int f^+ \, d\mu$  und  $\int f^- \, d\mu$  endlich ist. In diesem Fall bezeichnet man eine Funktion als *quasiintegrierbar* und definiert auch für diese ein Integral durch

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}},$$

womit wir dann eine echte Fortsetzung des Integrals aus Definition 1.65 erhalten. Wir werden quasiintegrierbare Funktionen im Rahmen der Vorlesung allerdings nicht weiter untersuchen.

**Beispiel 1.69** Wir betrachten den Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ .

- 1) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1$ . Es gilt also  $f = \chi_{\mathbb{R}}$  und  $f$  ist insbesondere eine Elementarfunktion. Wegen

$$\int f^+ d\lambda = \int f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{R}) = \infty$$

ist  $f$  nicht integrierbar über  $\mathbb{R}$ .

- 2) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1]^2 \\ -2 & \text{für } x \in [0, 2]^2 \setminus [0, 1]^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar über  $\mathbb{R}^2$ , denn wie Sie leicht nachrechnen gilt  $\int f^+ d\lambda = \lambda^2([0, 1]^2) = 1$  und  $\int f^- d\lambda = 2 \cdot \lambda([0, 2]^2 \setminus [0, 1]^2) = 6$ . Somit erhalten wir  $\int f d\lambda = -5$ .

- 3) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{k^2} & \text{für } x \in [k-1, k[, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

ist integrierbar. Um dies zu zeigen, definieren wir uns eine Folge von Elementarfunktionen  $(f_n)$ , die monoton wachsend gegen  $f$  konvergiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x \geq n \\ f(x) & \text{für } x \in [0, n[ \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \lambda([k-1, k[) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

**Satz 1.70 (Monotonie des Integrals)** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar. Dann gilt:

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

**Beweis:** Falls  $f \leq g$ , so gilt auch  $f^+ \leq g^+$  und  $g^- \leq f^-$ , sowie

$$f^+ + g^- \leq f^- + g^+.$$

Aus der Monotonie und Linearität des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen erhalten wir damit

$$\int f^+ d\mu + \int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu.$$

Da wegen der Integrierbarkeit alle auftretenden Integrale endlich sind, gilt schließlich auch

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu. \quad \square$$

**Satz 1.71 (Linearität des Integrals)** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g$  und  $\alpha f$  integrierbar und es gilt:

$$1) \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \quad 2) \int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

**Beweis:**

1) Mit Fallunterscheidung zeigt man die folgende Gleichheit (Übung):

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Da alle hier auftretenden Funktionen nichtnegativ sind, gilt wegen der Linearität des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen, dass

$$\int (f + g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f + g)^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu.$$

In dieser Gleichheit sind alle auftretenden Integrale endlich, denn für  $f^\pm$  und  $g^\pm$  folgt das aus der Integrierbarkeit von  $f$  und  $g$  und für  $(f + g)^\pm$  wegen  $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+$  und  $(f + g)^- \leq f^- + g^-$  aus der Monotonie des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen. Folglich ist  $f + g$  integrierbar und wir erhalten

$$\int (f + g)^+ \, d\mu - \int (f + g)^- \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu$$

was äquivalent zur gewünschten Gleichung ist.

2) beweisen wir analog mit einer Fallunterscheidung für  $c \geq 0$  und  $c < 0$ .  $\square$

**Definition 1.72** Sei  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar, sowie  $A \in \mathcal{A}$ . Dann heißt  $f$  integrierbar über  $A$ , falls  $\chi_A f$  integrierbar über  $\Omega$  ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f \, d\mu := \int \chi_A f \, d\mu$$

das Integral von  $f$  über  $A$ .

**Bemerkung 1.73** Seien  $A, B \in \mathcal{A}$  disjunkt und  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar über  $A \cup B$ . Dann gilt  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$  und daher  $(\chi_{A \cup B} f)^\pm = (\chi_A f)^\pm + (\chi_B f)^\pm$ . Ausnutzen der Linearität für Integrale nichtnegativer messbarer Funktionen und anschließendes Zusammensetzen der endlichen Integrale liefert

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Speziell gilt, falls  $f$  auch integrierbar über  $\Omega$  ist, dass

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{\Omega \setminus A} f \, d\mu.$$

Wir kommen nun auf Nullmengen zurück, d.h. Mengen  $N \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(N) = 0$ .

**Satz 1.74** *Sei  $N \subseteq \Omega$  eine Nullmenge und  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann ist  $f$  integrierbar über  $N$  und es gilt*

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

**Beweis:** Wir beweisen den Satz durch *maßtheoretische Induktion*, d.h. in drei Schritten, indem wir zunächst Elementarfunktionen, dann nichtnegative messbare Funktionen und zum Schluss integrierbare Funktionen betrachten:

- 1)  *$f$  ist eine Elementarfunktion:* In diesem Fall gibt es  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  und disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  mit

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k},$$

woraus folgt, dass

$$\chi_N f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_N \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{N \cap A_k}$$

gilt. Da die Mengen  $N \cap A_k \in \mathcal{A}$  Nullmengen sind, folgt  $\int_N f \, d\mu = 0$ .

- 2)  *$f \geq 0$  ist messbar:* In diesem Fall gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_n)$  von Elementarfunktionen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ . Dann ist

$$\chi_N f = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_N f_n$$

Grenzwert der monoton wachsenden Folge  $(\chi_N f_n)$ , die ebenfalls aus Elementarfunktionen besteht. Mithilfe von 1) erhalten wir dann

$$\int_N f \, d\mu = \int \chi_N f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_N f_n \, d\mu = 0.$$

- 3)  *$f$  ist messbar:* Dieser Fall folgt aus 2) durch Betrachtung von  $f^+$  und  $f^-$ .  $\square$

Satz 1.74 besagt, dass die Werte einer messbaren Funktion, die sie auf einer Nullmenge annimmt keine Rolle bei der Integration spielen, da das Integral jeder beliebigen messbaren Funktion auf einer Nullmenge den Wert Null annimmt. Dies motiviert die folgende Ausdrucksweise:

**Definition 1.75** *Sei  $A(x)$  eine Aussage (genauer: eine Aussageform mit Variable  $x$ ). Wir sagen  $A(x)$  gilt fast überall oder  $A(x)$  gilt für fast alle  $x \in \Omega$ , falls es eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$  gibt, so dass  $A(x)$  für alle  $x \in \Omega \setminus N$  gilt.*

Im folgenden Korollar sammeln wir ein paar Aussagen über Integrale, die im Zusammenhang mit Nullmengen stehen. Teil 3) besagt insbesondere, dass wir integrierbare Funktionen auf einer Nullmenge geeignet abändern können, ohne dadurch den Wert des Integrals zu verändern.

**Korollar 1.76** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann gilt:

- 1) Ist  $f$  integrierbar, so ist  $f$  fast überall endlich, d.h. es gilt fast überall  $f(x) \in \mathbb{R}$ .
- 2) Sind  $f, g \geq 0$  oder sind  $f, g$  integrierbar, so gilt:

$$f = g \text{ fast überall} \implies \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

- 3) Sei  $N \in \mathcal{A}$  eine Nullmenge. Ist  $f \geq 0$  oder ist  $f$  integrierbar und gilt

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus N, \\ 0 & \text{falls } x \in N, \end{cases}$$

so ist auch  $\tilde{f}$  messbar bzw. integrierbar und es gilt  $\int f \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$ .

- 4) Ist  $f \geq 0$  und  $\int f \, d\mu = 0$ , so gilt fast überall  $f = 0$ .

**Beweis:** 1) Übung.

- 2) Sei  $N := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ . Dann ist  $N$  eine Nullmenge und es folgt:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega \setminus N} f \, d\mu + \int_N f \, d\mu = \int_{\Omega \setminus N} g \, d\mu + \int_N g \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

denn es gilt  $f = g$  auf  $\Omega \setminus N$  und andererseits

$$\int_N f \, d\mu = \int_N g \, d\mu = 0.$$

- 3) Es gilt

$$\tilde{f}^{-1}([c, \infty]) = \begin{cases} f^{-1}([c, \infty]) \setminus N & \text{falls } c > 0, \\ f^{-1}([c, \infty]) \cup N & \text{falls } c \leq 0. \end{cases}$$

Damit folgt die Messbarkeit von  $\tilde{f}$  aus der Messbarkeit von  $f$ . Der Rest folgt mit 2) angewendet auf  $f, \tilde{f}$  im Fall  $f \geq 0$  bzw. auf  $f^+, \tilde{f}^+$  und  $f^-, \tilde{f}^-$  im Fall, dass  $f$  integrierbar ist.

- 4) Sei  $N := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ . Wir zeigen, dass  $N$  eine Nullmenge ist. Setze

$$N_1 := \{x \in \Omega \mid 1 < f(x)\} \quad \text{und} \quad N_n := \left\{x \in \Omega \mid \frac{1}{n} < f(x) \leq \frac{1}{n-1}\right\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Dann ist  $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$  disjunkte Vereinigung der Mengen  $N_n$  und daher messbar. Angenommen  $\mu(N) \neq 0$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , so dass  $\mu(N_n) \neq 0$ . Dann erhalten wir aber einen Widerspruch aus

$$\int f \, d\mu \geq \int_{N_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(N_n) > 0. \quad \square$$

## 1.6 Die großen Konvergenzsätze

Bevor wir zeigen, dass jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auch Lebesgue-integrierbar ist und dass in diesem Fall beide Integralbegriffe übereinstimmen, werden wir zunächst auf die wichtigsten Vorzüge des Lebesgue-Integrals eingehen. Dazu erinnern wir uns noch einmal daran, dass wir in Analysis I den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen benötigten, um zu zeigen, dass auch die zugehörigen Integrale gegen das Integral der Grenzfunktion konvergierten (siehe Analysis I Satz 8.7). Mit Hilfe der Lebesgue-Theorie können wir die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz abschwächen und gehen daher im Folgenden immer davon aus, dass mit *Konvergenz* der Begriff der *punktweisen Konvergenz* gemeint ist, wenn wir von dem Grenzwert einer Funktionenfolge sprechen. Die ersten beiden Konvergenzsätze befassen sich mit dem Integral nichtnegativer messbarer Funktionen.

### Satz 1.77 (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levi, 1906)

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu.$$

**Beweis:** Sei  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Dann ist  $f$  messbar und wegen  $f_n \leq f$  folgt für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu. \quad (1.5)$$

Die Idee ist daher, eine monoton wachsende Folge  $(\tilde{f}_n)$  von Elementarfunktionen zu konstruieren mit der Eigenschaft

$$\tilde{f}_n \leq f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n = f. \quad (1.6)$$

Dann erhalten wir per Definition des Integrals und aus (1.5), dass

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{f}_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

womit der Satz bewiesen ist. Wir konstruieren die Folge  $(\tilde{f}_n)$ : Da  $f_n$  messbar ist, existiert eine monoton wachsende Folge  $(f_{n,m})$  von Elementarfunktionen mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n,m} = f_n$ . Setze

$$\tilde{f}_n := \max\{f_{0,n}, \dots, f_{n,n}\}.$$

Dann ist  $\tilde{f}_n$  eine Elementarfunktion und für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\tilde{f}_n := \max\{f_{0,n}, \dots, f_{n,n}\} \leq \max\{f_{0,n+1}, \dots, f_{n+1,n+1}\} = \tilde{f}_{n+1},$$

d.h.  $(\tilde{f}_n)$  ist monoton wachsend. Ist nun  $k \leq n$ , so gilt  $f_{k,n} \leq f_k \leq f_n$  und daher auch  $\tilde{f}_n \leq f_n$ . Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$



Andererseits gilt für  $k \leq n$  nach Konstruktion  $f_{k,n} \leq \tilde{f}_n$  und daher

$$f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k,n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n,$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  woraus wir schließlich die andere Ungleichung

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n$$

erhalten. Die Folge  $(\tilde{f}_n)$  konvergiert also gegen  $f$ .  $\square$

**Korollar 1.78** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Dann gilt:

$$\int \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu$$

**Beweis:** Dies folgt leicht mithilfe von Satz 1.77, da die Partialsummenfolge  $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$  wegen der Nichtnegativität der Funktionen  $f_n$  eine monoton wachsende Funktionenfolge darstellt.  $\square$

**Satz 1.79 (Lemma von Fatou)** Sei  $(f_n)$  Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Dann gilt:

$$\int \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

**Beweis:** Betrachte die monoton wachsende Folge  $(g_n)$  mit  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . Dann gilt nach dem Satz von Beppo Levi, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \right) d\mu = \int \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu.$$

Sei  $k \geq n$ . Dann gilt  $g_n \leq f_k$  und daher

$$\int g_n d\mu \leq \int f_k d\mu$$

für alle  $k \geq n$ . Dann folgt aber auch

$$\int g_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k d\mu.$$

Durch Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir daraus schließlich

$$\int \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int f_k d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \quad \square$$

**Satz 1.80 (Satz von der majorisierten Konvergenz, Satz von Lebesgue, 1910)**

Sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die fast überall gegen eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Ferner sei  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so dass

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und fast alle  $x \in \Omega$  gilt. Dann ist auch  $f$  integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

**Beweis:** Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $(f_n)$  auf ganz  $\Omega$  gegen  $f$  konvergiert und dass  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in \Omega$  und  $g(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  gilt. Andernfalls ändern wir  $f_n$ ,  $f$  und  $g$  auf einer Nullmenge geeignet ab (vgl. Korollar 1.76). Dann gilt insbesondere

$$|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq g(x) < \infty$$

für alle  $x \in \Omega$ . Da  $|f|$  eine messbare nichtnegative Funktion ist, existiert das Integral  $\int |f| \, d\mu$ . Wegen  $f^+, f^- \leq |f| \leq g = |g|$  und der Integrierbarkeit von  $g$  folgt

$$\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty,$$

d.h.  $f$  ist integrierbar. Es bleibt noch die Gleichheit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

nachzuweisen. Dazu zeigen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu, \quad (1.7)$$

denn da “ $\liminf \leq \limsup$ ” immer gilt, folgt damit “ $\liminf = \limsup = \lim$ ” und damit die gewünschte Gleichheit.

Wegen  $|f|, |f_n| \leq g$  sind die Funktionen  $f + g$  und  $f_n + g$ ,  $n \in \mathbb{N}$  alle nichtnegativ. Anwendung des Lemmas von Fatou liefert dann

$$\int (f + g) \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g) \, d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n + g) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g) \, d\mu,$$

woraus durch Subtraktion von  $\int g \, d\mu$  die zweite Ungleichung in (1.7) folgt.

Analog liefert das Lemma von Fatou für die nichtnegativen Funktionen  $-f + g$  und  $-f_n + g$ , dass

$$-\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( -\int f_n \, d\mu \right) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu,$$

was die erste Ungleichung in (1.7) beweist.  $\square$

Die Funktion  $g$  aus dem Satz wird auch gerne *integrierbare Majorante* genannt. Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Lebesgue ist das folgende einfache Kriterium für die Integrierbarkeit einer Funktion.

**Korollar 1.81** Seien  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar und  $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar, so dass fast überall  $|f| \leq g$  gilt. Dann ist auch  $f$  integrierbar.

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue sind wir nun auch dazu in der Lage, die Riemann- und Lebesgue-Theorie zusammenzuführen.

**Satz 1.82** Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei Riemann-integrierbar. Setze  $f$  trivial auf  $\mathbb{R}$  fort durch  $f(x) := 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, so ist  $f$  Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Beweis:** Für eine Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es nach Satz 7.13 aus Analysis I zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  Treppenfunktionen  $\varphi_n, \psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_n(x) \, dx - \int_a^b \varphi_n(x) \, dx < \frac{1}{n}.$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) \, dx.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $(\varphi_n)$  monoton wachsend und  $(\psi_n)$  monoton fallend ist. (Andernfalls betrachte  $\tilde{\varphi}_n = \max\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  und  $\tilde{\psi}_n = \min\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ , dann gilt immer noch  $\tilde{\varphi}_n \leq f \leq \tilde{\psi}_n$  und  $\int \tilde{\psi}_n - \int \tilde{\varphi}_n \leq \int \psi_n - \int \varphi_n < \frac{1}{n}$ .) Setze  $\varphi_n$  und  $\psi_n$  trivial auf  $\mathbb{R}$  fort. Dann sind  $\varphi_n^+, \varphi_n^-, \psi_n^+, \psi_n^-$  Elementarfunktionen und es gilt

$$\int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \int \varphi_n \, d\lambda \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_n(x) \, dx = \int \psi_n \, d\lambda.$$

Außerdem existieren wegen der Monotonie  $\varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  und  $\psi := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$  und es gilt  $\varphi \leq f \leq \psi$ . Dann ist die messbare Funktion  $\psi - \varphi$  nichtnegativ und es folgt mit Hilfe des Lemmas von Fatou, dass

$$0 \leq \int (\psi - \varphi) \, d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\psi_n - \varphi_n) \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int \psi_n \, d\lambda - \int \varphi_n \, d\lambda \right) = 0.$$

Damit gilt nach Korollar 1.76 fast überall  $\varphi = \psi$ . Wegen  $\varphi \leq f \leq \psi$  gilt dann auch fast überall  $\varphi = f = \psi$ . Weiter gilt  $\varphi_0 \leq \varphi_n \leq \varphi \leq \psi \leq \psi_0$  und daher  $\varphi_n^+ \leq \psi_0^+$  und  $\varphi_n^- \leq \varphi_0^-$ , woraus wir

$$|\varphi_n| \leq \varphi_0^- + \psi_0^+ =: g$$

erhalten. Damit ist  $g$  als Elementarfunktion eine integrierbare Majorante der Folge  $(\varphi_n)$ . Somit ist  $\varphi$  (genauso wie  $f$ ) nach dem Satz von Lebesgue integrierbar und es gilt

$$\int f \, d\lambda = \int \varphi \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

**Beispiel 1.83** 1) Betrachte die Funktionenfolge  $(f_n)$  der durch die Vorschrift

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegebenen Funktionen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir wissen aus Analysis I Beispiel 8.1, dass diese Folge punktweise gegen die Funktion  $f = \chi_{\{1\}}$  konvergiert (bzw. fast überall gegen die Nullfunktion). Jedoch ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, so dass Satz 8.7 aus Analysis I nicht angewendet werden kann, um zu zeigen, dass sich Grenzwertbildung und Integration hier “vertauschen” lassen. Andererseits gilt  $|f_n| \leq \chi_{[0,1]}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2) Erlauben wir bei der Riemann-Theorie allerdings auch uneigentliche Integrale, so ergeben sich Unterschiede zur Lebesgue-Theorie. Betrachten wir z.B. die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} & \text{für } n-1 \leq x < n, \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Andererseits erhalten wir  $\int f^+ \, d\lambda = \infty = \int f^- \, d\lambda$ , d.h. das Lebesgue-Integral von  $f$  existiert nicht.

Da für Riemann-integrierbare Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  das Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen, verwenden wir im Folgenden die für das Riemann-Integral übliche Bezeichnung auch für das Lebesgue-Integral, d.h. wir schreiben

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{statt} \quad \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Insbesondere stehen uns nun zur Berechnung von Integralen alle Methoden aus Analysis I zur Verfügung wie z.B. der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 7.27 in Analysis I) für Integrale stetiger Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 1.7 Produktmaße

Nachdem wir im letzten Kapitel gesehen haben, wie wir Integrale im Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  berechnen können, wenden wir uns nun dem Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$  für  $n > 1$  zu. Unser Ziel ist es, diesen Fall auf den Fall  $n = 1$  zurückzuführen. Dies gelingt uns mit Hilfe von sogenannten *Produktmaßen*, die auf *Produkt- $\sigma$ -Algebren* definiert sind. Im Folgenden seien jeweils  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  zwei Maßräume.

**Definition 1.84** Die von allen Mengen der Form  $A_1 \times A_2$ ,  $A_i \in \mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, 2$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega_1 \times \Omega_2$  heißt Produkt- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  und wird mit  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  bezeichnet.

Man beachte, dass im Allgemeinen  $\{A_1 \times A_2 \mid (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} \subsetneq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  gilt. Kennen wir jedoch hinreichend große Erzeugendensysteme von  $\mathcal{A}_i$ , so erhalten wir daraus in einfacher Weise ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

**Satz 1.85** Für  $i = 1, 2$  sei  $\mathcal{E}_i$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}_i$ , das  $\Omega_i$  ausschöpft, d.h. es gebe Folgen  $(E_i^{(k)})$  von Mengen  $E_i^{(k)} \in \mathcal{E}_i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit

$$\Omega_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_i^{(k)}.$$

Dann ist  $\mathcal{E} := \{E_1 \times E_2 \mid (E_1, E_2) \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2\}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , d.h. es gilt  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

**Beweis:** Die Inklusion  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  ist trivial, da  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Die andere Inklusion zeigen wir mit Hilfe des Prinzips der guten Mengen. Dazu sei

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A_1 \subseteq \Omega_1 \mid A_1 \times \Omega_2 \in \sigma(\mathcal{E})\}.$$

Dann ist (wie man unmittelbar nachweist)  $\tilde{\mathcal{A}}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Ferner gilt für alle  $E_1 \in \mathcal{E}_1$ , dass

$$E_1 \times \Omega_2 = E_1 \times \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} E_2^{(k)} \right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (E_1 \times E_2^{(k)}) \in \sigma(\mathcal{E})$$

und daher  $\mathcal{E}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ , sowie  $\mathcal{A}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ . Dadurch erhalten wir

$$A_1 \times \Omega_2 \in \sigma(\mathcal{E})$$

für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und analog zeigen wir  $\Omega_1 \times A_2 \in \sigma(\mathcal{E})$  für alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Dann gilt aber für alle  $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ , dass

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) \in \sigma(\mathcal{E})$$

und daher  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ .  $\square$

**Bemerkung 1.86** Für unsere Borelschen  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{B}^n$  über  $\mathbb{R}^n$  erhalten wir einige wichtige Folgerungen aus Satz 1.85:

- 1) Es gilt  $\mathcal{B}^{n_1} \otimes \mathcal{B}^{n_2} = \mathcal{B}^{n_1+n_2}$ , denn wählen wir als Erzeugendensysteme  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  die  $n_1$ - bzw.  $n_2$ -dimensionalen achsenparallelen Quader, so ist  $\mathcal{E}$  aus dem Satz gerade die Menge der  $(n_1 + n_2)$ -dimensionalen Quader.
- 2) Sind  $B_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$  und  $B_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$  Borel-Mengen, so ist auch  $B_1 \times B_2$  eine Borel-Menge.
- 3)  $\mathcal{B}^n$  wird von der Menge aller offenen Mengen erzeugt. Dies folgt daraus, dass  $\mathcal{B}^1$  schon von der Menge  $\{ ] - \infty, a[ \mid a \in \mathbb{R} \}$  erzeugt wird (Übung).

**Definition 1.87** Sei  $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ . Dann heißen die Mengen

$$A_{x_1} := \{x_2 \in \Omega_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \quad \text{und} \quad A_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}$$

der  $x_1$ -Schnitt bzw.  $x_2$ -Schnitt von  $A$ .

**Satz 1.88** Sei  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Dann gilt  $A_{x_1} \in \mathcal{A}_2$  und  $A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$  für alle  $x_1 \in \Omega_1$ ,  $x_2 \in \Omega_2$ .

**Beweis:** Wir beweisen nur die Aussage für  $x_2$ -Schnitte, der Beweis für  $x_1$ -Schnitte ist analog. Wir benutzen wieder das Prinzip der guten Mengen. Sei also  $x_2 \in \Omega_2$  fest. Setze

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A_{x_2} \in \mathcal{A}_1\}.$$

Dann ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra (Übung) und für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$  gilt:

$$(A_1 \times A_2)_{x_2} = \begin{cases} A_1 & \text{für } x_2 \in A_2, \\ \emptyset & \text{für } x_2 \notin A_2 \end{cases}$$

und daher  $(A_1 \times A_2)_{x_2} \in \mathcal{A}_1$ . Da  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  durch alle Mengen dieser Form erzeugt wird, erhalten wir  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$  und daher  $A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$  für alle  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .  $\square$

Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion eines Maßes  $\mu_1 \otimes \mu_2$  auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  mit der Eigenschaft

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Dazu benötigen wir zwei Funktionen, deren Messbarkeit wir im folgenden Satz nachweisen, sowie einen weiteren Begriff für Maßräume.

**Definition 1.89** Ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt  $\sigma$ -endlich, falls  $\Omega$  durch  $\mathcal{A}$  bzgl.  $\mu$  ausgeschöpft wird, d.h. wenn es Mengen  $\Omega^{(n)} \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass gilt:

$$\mu(\Omega^{(n)}) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)}$$

**Satz 1.90** Seien die Maßräume  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$   $\sigma$ -endlich und  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Dann sind die durch

$$s_A^{(1)}(x_1) := \mu_2(A_{x_1}) \quad \text{und} \quad s_A^{(2)}(x_2) := \mu_1(A_{x_2})$$

definierten Funktionen  $s_A^{(i)} : \Omega_i \rightarrow [0, \infty]$  messbar (genauer:  $\mathcal{A}_i$ -messbar).

**Beweis:** Wir zeigen nur die Messbarkeit von  $s_A := s_A^{(1)}$ , die Messbarkeit von  $s_A^{(2)}$  folgt analog. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

*Fall 1):*  $\mu_2(\Omega_2) < \infty$ . Wir nutzen wieder das Prinzip der guten Mengen. Sei

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid s_A \text{ ist messbar}\}.$$

Wir müssen also zeigen, dass  $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  gilt. Dazu zeigen wir zunächst, dass  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist:

i) Sei  $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ . Es gilt

$$s_\Omega(x_1) = \mu_2((\Omega_1 \times \Omega_2)_{x_1}) = \mu_2(\Omega_2).$$

Also ist  $s_\Omega(x_1)$  konstant und daher messbar. Daraus folgt  $\Omega \in \mathcal{D}$ .

ii) Sei  $A \in \mathcal{D}$ , d.h.  $s_A$  ist messbar. Dann gilt für  $x_1 \in \Omega_1$ , dass

$$s_\Omega(x_1) = \mu_2(\Omega_2) = \mu_2((\Omega \setminus A)_{x_1}) + \mu_2(A_{x_1}) = s_{\Omega \setminus A}(x_1) + s_A(x_1),$$

da  $\Omega_2 = \Omega_{x_1} = (\Omega \setminus A)_{x_1} \dot{\cup} A_{x_1}$ . Folglich ist  $s_{\Omega \setminus A} = \mu_2(\Omega_2) - s_A$  als Differenz einer konstanten Funktion und einer messbaren Funktion messbar, d.h. es gilt  $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$ .

iii) Seien  $A^{(k)} \in \mathcal{D}$  paarweise disjunkt und  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ . Dann gilt

$$s_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{x_1}^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1}^{(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{A^{(k)}}(x_1),$$

d.h.  $s_A$  ist punktweiser Grenzwert der messbaren Funktionen  $s_{A^{(k)}}$  und somit selbst messbar. Also gilt  $s_A \in \mathcal{D}$ .

$\mathcal{D}$  ist also ein Dynkin-System. Außerdem gilt für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ , dass

$$s_{A_1 \times A_2}(x_1) = \mu_2((A_1 \times A_2)_{x_1}) = \mu_2(A_2) \chi_{A_1}(x_1),$$

denn  $(A_1 \times A_2)_{x_1} = A_2$  falls  $x_1 \in A_1$  und  $(A_1 \times A_2)_{x_1} = \emptyset$  falls  $x_1 \notin A_1$ . Damit ist  $s_{A_1 \times A_2}$  als Produkt einer Konstanten und einer messbaren Funktion messbar. Somit enthält  $\mathcal{D}$  alle Mengen der Form  $A_1 \times A_2$  mit  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Da das System aus letzteren Mengen durchschnittsstabil ist, ist das davon erzeugte Dynkin-System  $\mathcal{D}_0$  nach Lemma 1.39 eine  $\sigma$ -Algebra und wir erhalten

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$$

wegen der Minimalität von  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  als  $\sigma$ -Algebra und von  $\mathcal{D}_0$  als Dynkin-System. Folglich gilt  $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , was zu zeigen war.

*Fall 2):*  $\mu_2(\Omega_2) = \infty$ . Da  $\Omega_2$   $\sigma$ -endlich ist, gibt es Mengen  $\Omega_2^{(k)}$  mit  $\mu_2(\Omega_2^{(k)}) < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\Omega_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_2^{(k)}.$$

Nach Lemma 1.20 können wir annehmen, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind. (Nach der Konstruktion im Beweis von Lemma 1.20 ändern sich zwar dann möglicherweise die Maße dieser Mengen, sie bleiben aber wegen der Monotonie des Maßes endlich, weil die neu konstruierten Mengen Teilmengen der jeweiligen ursprünglichen Mengen sind.) Damit erhalten wir für  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , dass

$$s_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A_{x_1} \cap \Omega_2^{(k)})\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1} \cap \Omega_2^{(k)}).$$

Da  $\mu_2^{(k)}$  mit  $\mu_2^{(k)}(B) := \mu_2(B \cap \Omega_2^{(k)})$  ein endliches Maß auf  $\Omega_2$  ist, sind die Funktionen  $x_1 \mapsto \mu_2^{(k)}(A_{x_1})$  nach Fall 1) alle messbar. Daher ist auch  $s_A$  als punktweiser Grenzwert dieser Funktionen messbar.  $\square$

Da wir im Folgenden mit Integralen über zwei verschiedenen Maßräumen zu tun haben, wollen wir unsere Notation etwas übersichtlicher gestalten, indem wir die Abhängigkeit einer Funktion  $f : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$  von der Variable  $x_i \in \Omega_i$  zum Ausdruck bringen wollen. Wir schreiben daher im Folgenden

$$\int f(x_i) d\mu_i(x_i) := \int f d\mu_i.$$

**Satz 1.91 (Produktmaß)** *Seien die Maßräume  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$   $\sigma$ -endlich. Dann gibt es genau ein Maß  $\mu$  (genannt Produktmaß  $\mu_1 \otimes \mu_2$ ) auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  mit der Eigenschaft*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad (1.8)$$

*für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Dieses Maß  $\mu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$  ist gegeben durch*

$$\mu(A) := \int \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2(x_2). \quad (1.9)$$

**Beweis:** 1) Die Eindeutigkeit des Maßes  $\mu$  folgt sofort aus (1.8) mit Hilfe von Satz 1.41, da die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  von allen Mengen der Form  $A_1 \times A_2$  erzeugt wird.

2) Wir zeigen nun, dass die durch die erste Gleichheit in (1.9) definierte Funktion  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  ist. Die Eigenschaft  $(\mu)(\emptyset) = 0$  ist trivial, seien also  $A^{(k)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt und  $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ . Dann sind auch die Schnitte  $A_{x_1}^{(k)}$  paarweise disjunkt und da  $\mu_2$  ein Maß ist, folgt:

$$\mu_2(A_{x_1}) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{x_1}^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1}^{(k)}).$$



Damit erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi bzw. mit Korollar 1.78, dass

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1}^{(k)}) d\mu_1(x_1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int \mu_2(A_{x_1}^{(k)}) d\mu_1(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A^{(k)}),\end{aligned}$$

d.h.  $\mu$  ist  $\sigma$ -additiv und daher ein Maß.

3) Als nächstes zeigen wir die Produkteigenschaft (1.8). Dazu sei  $A := A_1 \times A_2$  für  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $A_2 \in \mathcal{A}_2$  beliebig. Da  $A_{x_1} = \emptyset$  für  $x_1 \notin A_1$  gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int \mu_2(A_{x_1}) \chi_{A_1}(x_1) d\mu_1(x_1) = \int \mu_2(A_2) \chi_{A_1}(x_1) d\mu_1(x_1) \\ &= \mu_2(A_2) \int \chi_{A_1}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu_2(A_2) \cdot \mu_1(A_1).\end{aligned}$$

4) Analog zu 3) zeigen wir die Produkteigenschaft (1.8) für  $\int \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2(x_2)$ . Wegen der Eindeutigkeit beweist dies insbesondere die zweite Gleichheit in (1.9).  $\square$

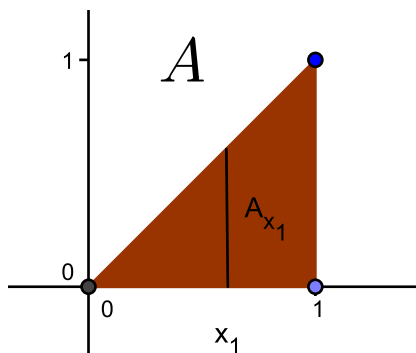
**Korollar 1.92** *Es gilt  $\lambda^{m+n} = \lambda^m \otimes \lambda^n$ . Bezeichnen wir die Variablen des  $\mathbb{R}^n$  mit  $x$  und die des  $\mathbb{R}^m$  mit  $y$ , so gilt speziell für  $A \in \mathcal{B}^{m+n}$ , dass*

$$\lambda^{m+n}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^m(A_x) d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(A_y) d\lambda^m(y).$$

**Beweis:** Dies folgt wegen  $\mathcal{B}^{m+n} = \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n$  sofort aus Satz 1.91, da  $\lambda^m \otimes \lambda^n$  die Produkteigenschaft (1.8) insbesondere für achsenparallele Quader erfüllt. Dadurch stimmt es auf den achsenparallelen Quadern im  $\mathbb{R}^{m+n}$  mit  $\lambda^{m+n}$  überein und wegen des Eindeutigkeitsatzes 1.41 folgt die Gleichheit der beiden Maße.  $\square$

**Beispiel 1.93** Wir benutzen Korollar 1.92 zur Inhaltsberechnung einiger Mengen des  $\mathbb{R}^n$ .

1) *Flächeninhalt eines Einheitsdreiecks:*



Wir betrachten das Einheitsdreieck  $A$  mit den Eckpunkten  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  und  $(0,1)$ . Für das Maß des  $x_1$ -Schnitts von  $A$  gilt:

$$\lambda^1(A_{x_1}) = \lambda^1([0, x_1]) = \begin{cases} x_1 & \text{für } x_1 \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$\lambda^2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(A_x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2) *Volumen der abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen Kugel vom Radius  $R$* 

Wir berechnen das Volumen der Kugel  $K_n(x_0, R) := K(x_0, R) := \overline{U_R(x_0)}$  um  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit Radius  $R > 0$ . Mit Hilfe von Korollar 1.43 erhalten wir

$$\lambda^n(K_n(x_0, R)) = R^n \lambda^n(K_n(0, 1)) = R^n \tau_n \quad \text{mit } \tau_n := \lambda^n(K_n(0, 1)).$$

Für  $n = 1$  erhalten wir

$$\tau_1 = \lambda^1(K_1(0, 1)) = \lambda^1([-1, 1]) = 2.$$

Für  $n \geq 1$  bestimmen wir nun eine Rekursionsformel. Dazu benötigen wir die  $x_{n+1}$ -Schnitte der  $(n+1)$ -dimensionalen Einheitskugel:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(0, 1)_{x_{n+1}} &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 \leq 1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 - x_{n+1}^2\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{für } |x_{n+1}| > 1, \\ K_n(0, r) & \text{für } |x_{n+1}| \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $r := \sqrt{1 - x_{n+1}^2}$ . Wegen  $\lambda^n(K_n(0, r)) = (1 - x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}} \tau_n$  erhalten wir damit mit der Substitution  $x_{n+1} = \cos t$ , dass

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^n(K_{n+1}(0, 1)_{x_{n+1}}) d\lambda^1(x_{n+1}) = \tau_n \int_{-1}^1 (1 - x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}} dx_{n+1} \\ &= \tau_n \int_{\pi}^0 (\sin t)^n (-\sin t) dt = \tau_n \int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1} dt. \end{aligned}$$

Mittels Induktion können Sie nun zeigen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\tau_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \quad \text{und} \quad \tau_{2n+1} = \left( \prod_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} \right) \pi^n.$$

Speziell gilt  $\tau_2 = \pi$ ,  $\tau_3 = \frac{4}{3}\pi$  bzw.  $\lambda^2(K_2(0, R)) = \pi R^2$  und  $\lambda^3(K_3(0, R)) = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

**Satz 1.94 (von Tonelli)** *Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume, sowie  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$  eine  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbare Funktion. Dann sind die Schnittfunktionen*

$$\begin{aligned} f_{x_2} : \Omega_1 &\rightarrow [0, \infty], & x_1 &\mapsto f(x_1, x_2) \\ \text{und } f_{x_1} : \Omega_2 &\rightarrow [0, \infty], & x_2 &\mapsto f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

*für alle  $x_i \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , messbar, sowie ebenso die Funktionen  $x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2$  und  $x_2 \mapsto \int f_{x_2} d\mu_1$  und mit der Notation  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$  gilt*

$$\int f d\mu = \int \left( \int f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int f_{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2$$

*bzw. in ausführlicherer Notation*

$$\int f(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2) = \int \left( \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int \left( \int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis mittels “maßtheoretischer Induktion”, wobei wir hier nach dem zweiten Schritt bereits fertig sind, da der Satz nur das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen behandelt.

*Fall 1:  $f$  ist eine Elementarfunktion.* In diesem Fall gibt es Skalare  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$  und Mengen  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  mit

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A^{(k)}}.$$

Offenbar gilt  $(\chi_{A^{(k)}})_{x_i} = \chi_{A_{x_i}^{(k)}}$  für alle  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  und daher folgt

$$f_{x_i} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_{x_i}^{(k)}}.$$

Damit ist  $f_{x_i}$  messbar für alle  $x_i \in \Omega_i$ , da alle Mengen  $A_{x_i}^{(k)}$  messbar sind. Weiter gilt für  $i = 1, 2$  und  $j = 3 - i$ , dass

$$\int f_{x_i} d\mu_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \chi_{A_{x_i}^{(k)}} d\mu_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_j(A_{x_i}^{(k)}).$$

Da die Funktionen  $x_i \mapsto \mu_j(A_{x_i}^{(k)})$  nach Satz 1.90 messbar sind, folgt damit die Messbarkeit der Funktionen  $x_i \mapsto \int f_{x_i} d\mu_j$ . Schließlich gilt

$$\int \left( \int f_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \mu_j(A_{x_i}^{(k)}) d\mu_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_1 \otimes \mu_2(A^{(k)}) = \int f d\mu_1 \otimes \mu_2$$

unter Benutzung von Satz 1.91.

*Fall 2:  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$  ist messbar.*

In diesem Fall existiert eine monoton wachsende Folge  $(f_n)$  von Elementarfunktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

für alle  $(x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ . Dann ist für  $i = 1, 2$  offenbar auch  $((f_n)_{x_i})$  eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen  $f_{x_i}$  konvergiert. Damit erhalten wir durch mehrfache Anwendung des Satzes von Beppo Levi aus Fall 1, dass

$$\begin{aligned} \int f d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_1 \otimes \mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left( \int (f_n)_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i \\ &= \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n)_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i = \int \left( \int f_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i \end{aligned}$$

für  $i = 1, 2$ , wobei  $j := 3 - i$ .  $\square$

**Satz 1.95 (von Fubini)** Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$   $\sigma$ -endliche Maßräume und  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion bzgl.  $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ . Dann sind die Schnittfunktionen  $f_{x_1} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_{x_2} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  aus dem Satz von Tonelli für  $\mu_i$ -fast alle  $x_i \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  integrierbar. Ferner sind die so fast überall definierten Funktionen

$$g_1 : x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2, \quad g_2 : x_2 \mapsto \int f_{x_2} d\mu_1$$

(trivial auf  $\Omega_i$  fortgesetzt) integrierbar und mit der Notation  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$  gilt

$$\int f d\mu = \int \left( \int f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int f_{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

**Beweis:** Wie man leicht feststellt, gilt  $|f|_{x_i} = |f_{x_i}|$  und  $(f^\pm)_{x_i} = (f_{x_i})^\pm$  für  $i = 1, 2$ , sowie nach dem Satz von Tonelli

$$\int \left( \int |f_{x_1}| d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int |f|_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int |f| d\mu < \infty. \quad (1.10)$$

Folglich ist das Integral  $\int |f_{x_1}| d\mu_2$  für fast alle  $x_1 \in \Omega_1$  endlich, d.h. es gibt eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}_1$ , so dass  $f_{x_1}$  für alle  $x_1 \in \Omega_1 \setminus N$  integrierbar ist. Für diese  $x_1$  gilt nach Definition, dass

$$g_1(x_1) = \int f_{x_1} d\mu_2 = \int (f_{x_1})^+ d\mu_2 - \int (f_{x_1})^- d\mu_2.$$

Nach dem Satz von Tonelli ist die (auf ganz  $\Omega_1$  definierte) Funktion  $x_1 \mapsto \int (f_{x_1})^+ d\mu_2$  messbar und wegen (1.10) sogar integrierbar, denn

$$\int \left( \int (f_{x_1})^+ d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int (f^+)_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int f^+ d\mu < \infty.$$

Ein analoges Argument gilt für  $f^-$ . Damit ist die Funktion  $g_1 : x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2$  (trivial fortgesetzt auf ganz  $\Omega_1$ ) integrierbar und nach dem Satz von Tonelli gilt:

$$\begin{aligned} \int \left( \int f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 &= \int \left( \int (f_{x_1})^+ d\mu_2 \right) d\mu_1 - \int \left( \int (f_{x_1})^- d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f d\mu. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Integrierbarkeit von  $g_2$ .  $\square$

**Korollar 1.96** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  und sei  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar über  $A$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d\lambda^{n+m}(x, y) &= \int \left( \int_{A_x} f(x, y) d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x) \\ &= \int \left( \int_{A_y} f(x, y) d\lambda^n(x) \right) d\lambda^m(y), \end{aligned}$$

wenn wir die Variablen im  $\mathbb{R}^n$  mit  $x$  und die im  $\mathbb{R}^m$  mit  $y$  bezeichnen.

**Beweis:** Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_A f \, d\lambda^{n+m} &= \int f \chi_A \, d\lambda^{n+m} = \int \left( \int f(x, y) \chi_A(x, y) \, d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x) \\ &= \int \left( \int f(x, y) \chi_{A_x}(y) \, d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x) = \int \left( \int_{A_x} f(x, y) \, d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x),\end{aligned}$$

wobei wir die Gleichheit  $\chi_A(x, y) = \chi_{A_x}(y)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ausgenutzt haben. Die Formel für das Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge folgt analog.  $\square$

**Beispiel 1.97** 1) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 3xy^2$ . Dann gilt für  $Q = [1, 3] \times [0, 1]$ , dass

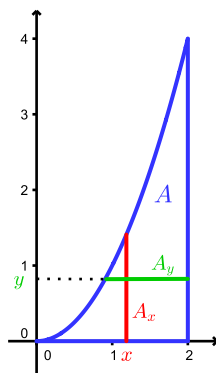
$$\begin{aligned}\int_Q f \, d\lambda^2 &= \int \left( \int_{Q_x} f(x, y) \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_1^3 \left( \int_0^1 3xy^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_1^3 \left( xy^3 \Big|_0^1 \right) dx = \int_1^3 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (9 - 1) = 4,\end{aligned}$$

denn wir erhalten  $Q_x = [0, 1]$  für  $x \in [1, 3]$  und  $Q_x = \emptyset$  sonst. Alternativ können wir auch das Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge berechnen und erhalten

$$\begin{aligned}\int_Q f \, d\lambda^2 &= \int \left( \int_{Q_y} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_0^1 \left( \int_1^3 3xy^2 \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{3}{2} x^2 y^2 \Big|_1^3 \right) dy = \int_0^1 12y^2 \, dy = 4y^3 \Big|_0^1 = 4.\end{aligned}$$

Obwohl die zu lösenden eindimensionalen Integrale unterschiedlich aussehen können, bekommen wir auf beide Arten und Weisen wie erwartet dasselbe Ergebnis.

- 2) Wir betrachten die Fläche  $A$  im ersten Quadranten, die durch die Geraden  $y = 0$  (also die  $x$ -Achse) und  $x = 2$ , sowie durch den Graphen der Funktion  $x \mapsto x^2$  begrenzt wird. Ist dann  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über  $A$ , so erhalten wir nach Fubini, dass



$$\begin{aligned}\int_A f(x, y) \, d\lambda^2(x, y) &= \int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) \, dx \, dy,\end{aligned}$$

wie Sie unschwer aus der nebenstehenden Skizze ablesen können.

## 1.8 Die $L_p(\mu)$ -Räume

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir uns Räume integrierbarer Funktionen, die insbesondere in der Funktionalanalysis eine wichtige Rolle spielen, etwas näher anschauen. Dazu definieren wir zunächst die Menge

$$\mathcal{L}_1(\mu) := \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ messbar und } \int |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Da eine messbare Funktion  $f$  genau dann integrierbar ist, wenn  $|f|$  integrierbar ist, ist dies gerade die Menge der integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$ . Auf  $\mathcal{L}_1(\mu)$  definieren wir nun die Funktion  $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}_1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\|f\|_1 := \int |f| d\mu.$$

Dann folgt mit Korollar 1.76, dass

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall.}$$

Unser Ziel ist es nun,  $\|\cdot\|_1$  zu einer Norm zu machen. Dazu definieren wir auf der Menge  $\mathcal{L}_1(\mu)$  die Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \text{ fast überall,}$$

und bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen durch

$$L_1(\mu) := L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim.$$

Dann erhalten wir eine Vektorraumstruktur auf  $L_1(\mu)$ , denn sind  $[f], [g] \in L_1(\mu)$  zwei Äquivalenzklassen, so wählen wir dazu zwei zugehörige Repräsentanten  $f$  und  $g$  aus, die überall endlich sind (integrierbare Funktionen sind fast überall endlich) und definieren

$$[f] + [g] := [f + g] \quad \text{und} \quad c \cdot [f] := [cf]$$

für  $c \in \mathbb{R}$ . Im Folgenden wollen wir allerdings ignorieren, dass es sich bei den Elementen von  $L_1(\mu)$  um Äquivalenzklassen handelt, schreiben einfach  $f$  statt  $[f]$  und behandeln  $f$  wie eine Funktion, indem wir einen Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse auswählen. (Wenn wir die Funktion integrieren, ist das unproblematisch, da je zwei Repräsentanten aus derselben Äquivalenzklasse fast überall gleich sind und daher dasselbe Integral haben. Vorsichtig müssen wir allerdings bei punktwisen Definitionen sein. So ist eine Definition wie “Sei  $f \in L_1(\mu)$  und  $M := \{x \mid f(x) \neq 0\}$ ” falsch, da  $M$  in diesem Fall nicht wohldefiniert ist.)

Nun ist  $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$  sogar ein normierter Vektorraum, denn für alle  $f, g \in L_1(\mu)$  gilt, dass

- i)  $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$  (genauer:  $[f] = [0]$ ),
- ii)  $\|cf\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ ,
- iii)  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ , wegen  $|f + g| \leq |f| + |g|$  und der Monotonie des Integrals.

Weiter zeigt sich, dass der normierte Raum  $L_1(\mu)$  sogar vollständig ist.

**Satz 1.98** *Der Raum  $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$  ist ein Banachraum.*

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass  $L_1(\mu)$  vollständig bzgl.  $\|\cdot\|_1$  ist. Dazu sei  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge in  $L_1(\mu)$ . Dann müssen wir zeigen, dass es eine Grenzfunktion  $f \in L_1(\mu)$  gibt, so dass  $(f_n)$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$  gegen  $f$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass alle  $f_n$  überall endlich sind. (Genauer gesagt wählen wir aus jeder Äquivalenzklasse  $[f_n]$  einen überall endlichen Repräsentanten aus.) Da  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  mit

$$\|f_n - f_m\|_1 < 2^{-k}$$

für alle  $n, m \geq n_k$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass die  $(n_k)$  eine streng monoton wachsende Folge bilden (wähle sonst  $\tilde{n}_0 := n_0$  und  $\tilde{n}_{k+1} := \max\{\tilde{n}_0, \dots, \tilde{n}_k, n_{k+1}\} + 1$ ). Dann erhalten wir durch  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Der Übersichtlichkeit halber benutzen wir die Abkürzung  $g_k := f_{n_k}$ . Weiter definieren wir die Funktionen  $s_n, s : \Omega : [0, \infty]$  durch

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \sum_{k=0}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)|, \\ s(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \end{aligned}$$

Dann sind alle  $s_n$  messbar, also auch  $s$  als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen. Außerdem ist die nichtnegative Funktionenfolge  $(s_n)$  monoton wachsend. Daher erhalten wir mit Korollar 1.78, dass

$$\int s \, d\mu = \int \sum_{k=0}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int |g_{k+1} - g_k| \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Das Integral von  $s$  ist also endlich, d.h.  $s$  ist integrierbar. Folglich ist  $s$  fast überall endlich, d.h. es gibt eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$ , so dass

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < \infty$$

für alle  $x \in \Omega \setminus N$ . Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen aus Analysis I gibt es dann zu jedem  $x \in \Omega \setminus N$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|g_n(x) - g_m(x)| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < \varepsilon.$$

Dies bedeutet aber, dass  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $x \in \Omega \setminus N$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  ist, also konvergiert. Definieren wir also die Funktionenfolge  $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$\tilde{g}_n(x) := \begin{cases} g_n(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus N, \\ 0 & \text{für } x \in N, \end{cases}$$

so ist  $\tilde{g}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  nach Teil 3 von Korollar 1.76 integrierbar und die Funktionenfolge  $(\tilde{g}_n)$  konvergiert auf ganz  $\Omega$  gegen eine nach Korollar 1.51 messbare Funktion  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n$ . Nach dem Satz von Lebesgue ist  $f$  sogar integrierbar, denn wegen

$$|\tilde{g}_n| \leq |g_n| = \left| g_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (g_{k+1} - g_k) \right| \leq |g_0| + s_{n-1} \leq |g_0| + s$$

ist die Funktion  $|g_0| + s$  eine integrierbare Majorante der Folge  $(\tilde{g}_n)$ . Da außerdem wegen  $|f| \leq |g_0| + s$  und

$$|f - \tilde{g}_n| \leq |f| + |\tilde{g}_n| \leq |f| + |g_0| + |s|$$

auch die Funktionenfolge  $(f - \tilde{g}_n)$  eine integrierbare Majorante hat, erhalten wir durch nochmalige Anwendung des Satzes von Lebesgue, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \tilde{g}_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - \tilde{g}_n| d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |f - \tilde{g}_n| d\mu = 0.$$

Da fast überall  $f_{n_k} = \tilde{g}_k$  gilt, folgt dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\|_1 = 0.$$

Dies bedeutet aber, dass  $f$  ein Häufungspunkt der Cauchy-Folge  $(f_n)$  ist, die somit gegen  $f$  konvergiert. Also ist  $L_1(\mu)$  vollständig.  $\square$

**Bemerkung 1.99** Der Beweis von Satz 1.98 zeigt insbesondere einen wichtigen Zusammenhang der beiden Konvergenzbegriffe *punktweise Konvergenz* und *Konvergenz bzgl.  $\|\cdot\|_1$* . Konvergiert nämlich  $(f_n)$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$  gegen  $f$ , so haben wir gezeigt, dass dann  $(f_n)$  eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  hat, die fast überall gegen  $f$  konvergiert.



Im Gegensatz zu Korollar 1.53 folgt aus der Integrierbarkeit zweier Funktionen nicht die Integrierbarkeit des Produktes der Funktionen, d.h. für  $f, g \in L_1(\mu)$  gilt i.A. *nicht*  $f \cdot g \in L_1(\mu)$ . Als Gegenbeispiel betrachte die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \chi_{[0,1]}(x).$$

Dann gilt nach Analysis I, dass

$$\int f \, d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} \, dx < \infty, \quad \text{aber} \quad \int f^2 \, d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \infty.$$

Aus diesem Grund betrachtet man für  $p \geq 1$  allgemeiner die Mengen

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ messbar und } \int |f|^p \, d\mu < \infty\},$$

sowie den dazugehörigen Vektorraum der Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation “*Gleichheit fast überall*”

$$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim.$$

Man kann dann zeigen, dass auch  $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Banach-Raum ist bzgl. der Norm

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Etwas Mühe macht hier der Nachweis der Dreiecksungleichung  $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ , die in diesem Spezialfall auch *Minkowski'sche Ungleichung* genannt wird und mit der *Hölderschen Ungleichung* bewiesen wird, die wie folgt lautet: Sind  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , sowie  $f \in L_p(\mu)$  und  $g \in L_q(\mu)$ , so gilt  $fg \in L_1(\mu)$  und

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Einen wichtigen Spezialfall erhalten wir für  $p = q = 2$ , denn dann gilt für  $f, g \in L_2(\mu)$ , dass  $fg \in L_1(\mu)$  und wie man leicht nachweist, ist durch

$$\langle f, g \rangle_{L_2} := \int fg \, d\mu$$

ein Skalarprodukt auf  $L_2(\mu)$  gegeben. Die zu diesem Skalarprodukt assoziierte Norm ist gerade die Norm  $\|\cdot\|_2$ . Der Banachraum  $L_2(\mu)$  ist daher ein *Hilbertraum*. (Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, der vollständig bzgl. der durch sein Skalarprodukt induzierten Norm ist.)



# Kapitel 2

## Der Transformationssatz

Ziel dieses Kapitels ist eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel für das Riemann-Integral, die wir in Analysis I in Satz 7.32 kennengelernt haben: Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

Grund für die Wichtigkeit dieser Regel bei der mehrdimensionalen Integrationstheorie ist die häufige Notwendigkeit der Anwendung von Koordinatentransformationen. Ist z.B. eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$K := K(0, 1) = \overline{U_1(0)} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

gegeben, so ist es in vielen Situationen zweckmäßig (vor allen Dingen dann, wenn die Funktion i.w. nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, wie z.B. die durch  $f(x, y) = x^2 + y^2$  gegebene Funktion) die Funktion in Polarkoordinaten zu betrachten, d.h. man setzt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{bmatrix} =: \Phi(\varrho, \phi)$$

und betrachtet statt  $f$  die Komposition  $f \circ \Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G = [0, 1] \times [0, 2\pi[$  und  $K = \Phi(G)$ . Die Integration wird dann relativ einfach, da der Integrationsbereich  $G$  nun ein Quader ist. Wie bei der Substitutionsregel wird man das Integral allerdings mit Hilfe eines Korrekturterms anpassen müssen:

$$\int_K f \, d\lambda^2 = \int_{\Phi(G)} f \, d\lambda^2 = \int_G (f \circ \Phi) \boxed{?} \, d\lambda^2.$$

Die Frage, die wir in diesem Kapitel beantworten wollen, ist daher die, was in der obigen Gleichung an der Stelle von  $\boxed{?}$  stehen muss. Im Vergleich mit der Substitutionsregel könnte man an die Ableitung  $D\Phi(\varrho, \phi)$  denken, doch dies ist leider eine lineare Abbildung bzw. eine  $2 \times 2$ -Matrix. Für  $\boxed{?}$  kommt dagegen nur eine skalare Größe in Frage.

## 2.1 Verzerrung Borelscher Mengen

Bevor wir uns der Frage zuwenden, wie eine Koordinatentransformation bzw. eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung das Maß einer Menge verändert, müssen wir zunächst untersuchen, unter welchen Bedingungen eine Abbildung messbare Mengen wieder in messbare Mengen transformiert, d.h. wann Bilder messbarer Mengen wieder messbar sind. Für die analoge Frage bzgl. *Urbildern* erhalten wir eine positive Antwort unter recht schwachen Voraussetzungen.

**Lemma 2.1** *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow V$  stetig. Dann gilt für alle  $B \subseteq V$ :*

$$B \in \mathcal{B}^n \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n.$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis mit Hilfe des Prinzips der guten Mengen. Sei also

$$\mathcal{G} := \{B \subseteq \mathbb{R}^n \mid f^{-1}(B \cap V) \in \mathcal{B}^n\}.$$

Wir zeigen im Folgenden:

- 1)  $\mathcal{G}$  enthält alle offenen Mengen.
- 2)  $\mathcal{G}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, dann gilt  $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{G}$ , da  $\mathcal{B}^n$  nach Bemerkung 1.86 von allen offenen Mengen erzeugt wird. Ist dann  $B \subseteq V$  eine Borel-Menge, so gilt  $B \cap V = B$  und daher  $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap V) \in \mathcal{B}^n$ .

1) Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist auch  $B \cap V$  offen und da  $f$  stetig ist, folgt damit, dass  $f^{-1}(B \cap V)$  offen in  $U$  ist, also bzgl. der Spurmetrik auf  $U$ . Dann gibt es aber  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit

$$f^{-1}(B \cap V) = T \cap U.$$

Damit ist  $f^{-1}(B \cap V)$  aber auch offen (in  $\mathbb{R}^n$ ) und damit gilt  $f^{-1}(B \cap V) \in \mathcal{B}^n$ .

- 2) Es gilt: i)  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{G}$ , denn  $f^{-1}(\mathbb{R}^n \cap V) = f^{-1}(V) = U$  ist offen, also eine Borel-Menge.  
 ii)  $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{G}$ , folgt sofort aus  $f^{-1}((A \setminus B) \cap V) = f^{-1}(A \cap V) \setminus f^{-1}(B \cap V)$ .  
 iii)  $A_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}$  folgt analog sofort aus

$$f^{-1}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \cap V\right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-1}(A_k \cap V).$$

Damit ist  $\mathcal{G}$  eine  $\sigma$ -Algebra.  $\square$

Für die Messbarkeit von *Urbildern* messbarer Mengen reicht also schon die Stetigkeit der Funktion. Für *Bilder* benötigen wir dagegen wesentlich stärkere Voraussetzungen. Für unsere Zwecke wird aber das folgende Korollar ausreichen, dass wir sofort aus dem vorhergehenden Lemma erhalten.

**Korollar 2.2** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus, d.h.  $\Phi$  ist bijektiv und  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  sind beide stetig stetig differenzierbar. Dann gilt für alle  $B \subseteq U$ :

$$B \in \mathcal{B}^n \Rightarrow \Phi(B) \in \mathcal{B}^n.$$

Im folgenden seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Wenn  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar ist, wie stark wird  $B$  dann durch  $\Phi$  „verzerrt“, d.h. in welcher Weise verändert sich das Maß beim Übergang von  $B$  zu  $\Phi(B)$ ? Da sich jede stetig differenzierbare Funktion durch lineare Abbildungen approximieren lässt, untersuchen wir zunächst den Fall, dass  $\Phi$  ein Vektorraumisomorphismus (also eine lineare und bijektive Abbildung) ist.

**Definition 2.3** Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraumisomorphismus. Dann heißt  $T$  elementar, falls er von einem der drei folgenden Typen ist:

- 1)  $T$  multipliziert eine Komponente mit  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , d.h. es gibt  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so dass für alle  $x = (x_1, \dots, x_n)$  gilt:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, cx_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

- 2)  $T$  vertauscht zwei Komponenten, d.h. es gibt  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i < j$ , so dass für alle  $x = (x_1, \dots, x_n)$  gilt:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

- 3)  $T$  addiert das Vielfache einer Komponente zu einer anderen, d.h. es gibt  $c \in \mathbb{R}$  und  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , so dass für alle  $x = (x_1, \dots, x_n)$  gilt:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + cx_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

**Bemerkung 2.4** Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass sich jeder Vektorraumisomorphismus  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  als Komposition von endlich vielen elementaren Isomorphismen darstellen lässt. (In der Linearen Algebra haben Sie dies auf Matrizen-Ebene bewiesen und gezeigt, dass sich jede invertierbare Matrix als Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen darstellen lässt. Dies lässt sich unmittelbar auf Isomorphismen übertragen, indem man darstellende Matrizen betrachtet.)

**Satz 2.5 (Verzerrung durch lineare Transformationen)** Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraumisomorphismus und  $A \in \mathcal{B}^n$ . Dann ist auch  $T(A) \in \mathcal{B}^n$  eine Borel-Menge und es gilt:

$$\lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A). \quad (2.1)$$

**Beweis:** Da  $T$  linear und bijektiv ist, ist auch  $T^{-1}$  linear und damit ist  $T$  insbesondere ein Diffeomorphismus. Damit ist  $T(A)$  nach Korollar 2.2 eine Borel-Menge. Für den weiteren Beweis betrachten wir zunächst Spezialfälle.

- i)  $T$  ist elementar vom Typ 1), d.h.  $T$  entspricht der Multiplikation einer Komponente mit  $c \neq 0$ . Dann werden durch

$$\mu_1(A) := \lambda^n(T(A)) \quad \text{und} \quad \mu_2(A) := |\det T| \cdot \lambda^n(A)$$

zwei Maße auf  $\mathcal{B}^n$  definiert, die auf den achsenparallelen Quadern übereinstimmen, denn die Abbildung  $T$  verändert das Volumen eines Quaders um den Faktor  $|c|$  und andererseits gilt  $\det T = c$ . Dann folgt aber mit Satz 1.41, dass  $\mu_1 = \mu_2$ , d.h. es gilt (2.1).

- ii)  $T$  ist elementar vom Typ 2), d.h.  $T$  vertauscht zwei Komponenten. Dann ist die darstellende Matrix von  $T$  eine Permutationsmatrix (die zu Grunde liegende Permutation ist sogar eine Transposition) und daher gilt  $|\det T| = 1$ . Damit folgt die Behauptung sofort aus Korollar 1.44.
- iii)  $T$  ist elementar vom Typ 3). O.b.d.A. seien  $i = 1$  und  $j = 2$  in der Notation von Definition 2.3, d.h. es gilt

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + cx_2, x_2, \dots, x_n)$$

für ein  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Sei nun  $Q$  ein beliebiger achsenparalleler Quader. Dann gilt unter Benutzung von  $x \in T(Q) \Leftrightarrow T^{-1}(x) \in Q$  und des Satzes von Tonelli, dass

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(Q)) &= \int \chi_{T(Q)}(x) \, d\lambda^n(x) = \int \chi_Q(T^{-1}(x)) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \chi_Q(x_1 - cx_2, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \left( \int \chi_Q(x_1 - cx_2, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^1(x_1) \right) \, d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Für das “innere” Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int \chi_Q(x_1 - cx_2, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^1(x_1) \\ &= \int \chi_{Q_{(x_2, \dots, x_n)}}(x_1 - cx_2) \, d\lambda^1(x_1) \\ &= \int \chi_{Q_{(x_2, \dots, x_n)} + cx_2}(x_1) \, d\lambda^1(x_1) \\ &= \lambda^1(Q_{(x_2, \dots, x_n)} + cx_2) \\ &= \lambda^1(Q_{(x_2, \dots, x_n)}) = \dots = \int \chi_Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^1(x_1), \end{aligned}$$

wobei wir im Schritt von der vorletzten Zeile zur letzten Zeile die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes ausgenutzt haben, siehe Korollar 1.43. Dann erhalten wir

aber aus (2.2) und mit dem Satz von Tonelli, dass

$$\begin{aligned}\lambda^n(T(Q)) &= \int \left( \int \chi_Q(x_1, x_2, \dots, x_n) d\lambda^1(x_1) \right) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\ &= \int \chi_Q(x) d\lambda^n(x) = \lambda^n(Q) = |\det T| \cdot \lambda^n(Q),\end{aligned}$$

da  $\det T = 1$  gilt. Mit dem gleichen Trick wie in i) folgt dann für alle  $A \in \mathcal{B}^n$ , dass

$$\lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A).$$

Die Behauptung folgt nun mit i)–iii) und dem Determinantenmultiplikationssatz aus der Linearen Algebra, da sich jeder Isomorphismus  $T$  nach Bemerkung 2.4 als endliche Komposition von elementaren Isomorphismen darstellen lässt.  $\square$

Im Folgenden wollen wir die Verzerrung von Borelschen Mengen unter bijektiven und stetig differenzierbaren Abbildungen untersuchen. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel.

**Lemma 2.6 (über lokale Würfelverzerrung)** *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Sei ferner  $x_0 \in U$  sowie  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge achsenparalleler (offener, halboffener<sup>1</sup> oder abgeschlossener) Würfel mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } W_k = 0$  und  $x_0 \in W_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = |\det D\Phi(x_0)|. \quad (2.3)$$

**Beweis:** Zunächst einmal erinnern wir daran, dass  $\Phi(W_k)$  nach Korollar 2.2 messbar ist, so dass die Aussage 2.3 zunächst einmal sinnvoll ist. Den weiteren Beweis führen wir dann in vier Schritten.

*Schritt 1: Rückführung auf den Fall  $D\Phi(x_0) = Id$ .*

Da  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $D\Phi(x)$  für alle  $x \in U$  invertierbar (vgl. Bemerkung 3.1 in Analysis II). Setze  $T := D\Phi(x_0)^{-1}$ . Dann gilt

$$\frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = \frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(T \circ \Phi(W_k))} \cdot \frac{\lambda^n(T \circ \Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = |\det D\Phi(x_0)| \cdot \frac{\lambda^n(T \circ \Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)}, \quad (2.4)$$

denn da  $T$  linear und invertierbar, also ein Vektorraumisomorphismus ist, gilt unter Benutzung von Satz 2.5, dass

$$\lambda^n(T \circ \Phi(W_k)) = |\det T| \cdot \lambda^n(\Phi(W_k)) = \frac{1}{|\det D\Phi(x_0)|} \cdot \lambda^n(\Phi(W_k)).$$

Da  $T$  linear ist, folgt außerdem  $D(T \circ \Phi)(x_0) = T \circ D\Phi(x_0) = Id$ . Können wir nun die Aussage für  $\tilde{\Phi} := T \circ \Phi$  beweisen, so folgt (2.3) wegen  $|\det D(T \circ \Phi)(x_0)| = 1$  sofort aus (2.4).

---

<sup>1</sup>Wir nennen einen Würfel bzw. Quader halboffen, wenn die zu Grunde liegenden Intervalle sämtlich halboffen sind, wobei es für jedes individuelle Intervall egal ist, ob es nach rechts oder nach links offen ist.

*Schritt 2:* In  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $\overline{U_\delta(x_0)} \subseteq U$ , so dass für alle  $x, y \in \overline{U_\delta(x_0)}$  gilt, dass

$$(1 - \varepsilon)\|x - y\|_\infty \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)\|x - y\|_\infty. \quad (2.5)$$

Die Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  (vgl. Teil 3) von Beispiel 1.2 aus Analysis II) bietet sich hier an, da “Kugeln” bzw.  $\varepsilon$ -Umgebungen um einen Punkt in diesem Fall gerade achsenparallele Würfel sind. Speziell ist

$$W(q, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - q\|_\infty \leq r\} = \overline{U_r(q)}$$

der abgeschlossene Würfel mit Mittelpunkt  $q$  und Kantenlänge  $2r$ .

Zum Beweis von (2.5) betrachten wir die Abbildung  $\Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \Phi(y + t(x - y))$ . Diese hat die Ableitung<sup>2</sup>

$$\Psi' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto D\Phi(y + t(x - y))(x - y).$$

Unter Ausnutzung von Definition 4.5 aus Analysis II über die komponentenweise Integration, des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I und der Tatsache, dass  $D\Phi(x_0) = Id$  gilt, erhalten wir für alle  $x, y \in U$ , dass

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \Phi(y)) - (x - y) &= \int_0^1 D\Phi(y + t(x - y))(x - y) dt - D\Phi(x_0)(x - y) \\ &= \int_0^1 (D\Phi(y + t(x - y)) - D\Phi(x_0))(x - y) dt. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $D\Phi$  in  $x_0$  gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|D\Phi(y + t(x - y)) - D\Phi(x_0)\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle  $x, y \in W(x_0, \delta) = \overline{U_\delta(x_0)}$  gilt. (Hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|_\infty$  die zur Maximumsnorm gehörige Operatornorm auf  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .) Somit folgt

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y) - (x - y)\|_\infty &\leq \int_0^1 \|D\Phi(y + t(x - y)) - D\Phi(x_0)\|_\infty \cdot \|x - y\|_\infty dt \\ &\leq \varepsilon \cdot \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich (2.5).

*Schritt 3:* Ist  $r$  hinreichend klein, so gilt für jeden abgeschlossenen Würfel  $W(q, r)$  mit  $W(q, r) \subseteq W(x_0, \delta)$ , dass

$$W(\Phi(q), (1 - \varepsilon)r) \subseteq \Phi(W(q, r)) \subseteq W(\Phi(q), (1 + \varepsilon)r). \quad (2.6)$$

---

<sup>2</sup>Überlegen Sie sich einmal, warum es an dieser Stelle unproblematisch ist, dass der Definitionsbereich der Funktion  $\Psi$  nicht offen ist.



Gilt  $W(q, r) \subseteq W(x_0, \delta)$ , so folgt aus Schritt 2 für alle  $x \in W(q, r)$ , dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(q)\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)\|x - q\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)r$$

und daher  $\Phi(x) \in W(\Phi(q), (1 + \varepsilon)r)$ , was die zweite Inklusion in (2.6) beweist.

Für den Nachweis der ersten Inklusion in (2.6) sei  $y \in W(\Phi(q), (1 - \varepsilon)r)$ . Ist  $\delta$  (und damit auch  $r$ ) hinreichend klein, so folgt aus dem Umkehrsatz aus Analysis II die eindeutige Existenz eines  $x \in W(x_0, \delta)$ , für das  $\Phi(x) = y$  gilt<sup>3</sup>. Damit folgt wegen

$$\|y - \Phi(q)\|_\infty = \|\Phi(x) - \Phi(q)\|_\infty \leq (1 - \varepsilon)r$$

mit Hilfe der linken Ungleichung in (2.5) in Schritt 2, dass

$$(1 - \varepsilon)\|x - q\|_\infty \leq \|\Phi(x) - \Phi(q)\|_\infty \leq (1 - \varepsilon)r,$$

woraus wir schließlich  $\|x - q\| \leq r$ , also  $y = \Phi(x) \in \Phi(W(q, r))$  erhalten. Damit haben wir also auch die erste Inklusion in (2.6) bewiesen.

*Schritt 4: Beweis der Aussage des Satzes.* Da ein Würfel  $W$  mit Kantenlänge  $\ell$  das Maß  $\lambda^n(W) = \ell^n$  hat, folgt aus Schritt 3, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle abgeschlossenen Würfel  $W(q, r) \subseteq W(x_0, \delta)$  gilt, dass

$$(1 - \varepsilon)^n (2r)^n \leq \lambda^n(\Phi(W(q, r))) \leq (1 + \varepsilon)^n (2r)^n.$$

Diese Abschätzungen gelten genauso auch für alle offenen Würfel  $W^\circ(q, r)$  und damit auch für alle halboffenen Würfel  $W$  mit  $W^\circ(q, r) \subseteq W \subseteq W(q, r)$ . Dies liefert die Abschätzungen

$$(1 - \varepsilon)^n \leq \frac{\lambda^n(\Phi(W))}{(2r)^n} = \frac{\lambda^n(\Phi(W))}{\lambda^n(W)} \leq (1 + \varepsilon)^n.$$

Damit erhalten wir schließlich durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = 1 = |\det D\Phi(x_0)|,$$

wobei wir hier unsere Vereinfachung aus Schritt 1 ausgenutzt haben.  $\square$

Das zweite Hilfsmittel, welches wir für den folgenden zentralen Satz benötigen, ist eine Verfeinerung von Satz 1.10, der ja besagt, dass eine offene Menge als Vereinigung abzählbar vieler achsenparalleler Quader dargestellt werden kann. Wenn wir allerdings die

---

<sup>3</sup>Dies untersuchen wir an dieser Stelle einmal etwas präziser: Wegen  $\det D\Phi(x_0) \neq 0$  gibt es offene Umgebungen  $\tilde{U}$  von  $x_0$  und  $\tilde{V}$  von  $\Phi(x_0)$ , so dass  $\Phi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  bijektiv ist. Ist  $\delta$  hinreichend klein gewählt, so gilt  $W(x_0, \delta) \subseteq \tilde{U}$  und  $W(\Phi(x_0), 2(1 + \varepsilon)\delta) \subseteq \tilde{V}$ , woraus wir dann mit  $\|\Phi(q) - \Phi(x_0)\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)\delta$  (siehe die rechte Ungleichung in (2.5)) erhalten, dass auch  $W(\Phi(q), (1 - \varepsilon)r) \subseteq W(\Phi(q), \delta) \subseteq \tilde{V}$  gilt.

$\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Borelschen Maßes ausnutzen wollen, benötigen wir eine disjunkte Vereinigung. Aus diesem Grund betrachten wir im Folgenden *nach rechts halboffene, achsenparallele Würfel*, d.h. Würfel der Form

$$\prod_{k=1}^n [a_i, a_i + \ell[ = [a_1, a_1 + \ell[ \times \cdots \times [a_n, a_n + \ell[,$$

wobei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $\ell \geq 0$ . Da wir außerdem Kompaktheitsargumente verwenden wollen, fordern wir außerdem noch, dass auch der Abschluss dieser Würfel in unserer offenen Menge enthalten ist.

**Lemma 2.7** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann gibt nach rechts halboffene, achsenparallele Würfel  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\overline{W_k} \subseteq U$ , so dass  $W_i \cap W_j = \emptyset$  für  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , und*

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k.$$

**Beweis:** Wir betrachten die Menge  $\mathcal{W}_1$  der nach rechts halboffenen Einheitswürfel, deren Ecken in  $\mathbb{Z}^n$  liegen:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \prod_{i=1}^n [m_i, m_i + 1[ \mid m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \right\}$$

Weiter bezeichnen wir für  $j \geq 1$  mit  $\mathcal{W}_{j+1}$  die Menge der nach rechts halboffenen, achsenparallelen Würfel der Kantenlänge  $2^{-j}$ , die man erhält, wenn man die Würfel aus  $\mathcal{W}_j$  in jeder Koordinatenrichtung halbiert. Weiter definieren wir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_1 := \{W \in \mathcal{W}_1 \mid \overline{W} \subseteq U\}$$

sowie für  $j \geq 1$

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{j+1} := \left\{ W \in \mathcal{W}_{j+1} \mid \overline{W} \subseteq U \text{ und } W \text{ ist keine Teilmenge eines Würfels aus } \widetilde{\mathcal{W}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{W}}_j \right\}.$$

Dann gilt

$$U = \bigcup \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{W}}_j \right) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in W \text{ für ein } W \in \mathcal{W}_j \text{ und ein } j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

denn ist  $x \in U$ , so gibt es wegen der Offenheit von  $U$  einen Index  $j$  und einen Würfel  $W \in \mathcal{W}_j$  mit  $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ . (Klar?) Weiter gilt nach Konstruktion von  $\widetilde{\mathcal{W}}_j$  entweder  $W \in \widetilde{\mathcal{W}}_j$  oder  $W$  ist schon in einem Würfel aus einer der Mengen  $\widetilde{\mathcal{W}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{W}}_{j-1}$  enthalten. Nach Konstruktion sind alle Würfel in  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{W}}_j$  paarweise disjunkt und außerdem enthält jedes  $\mathcal{W}_j$  nur abzählbar viele Würfel. Somit enthält auch  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{W}}_j$  nur abzählbar viele Würfel. Nach Konstruktion ist der Abschluss eines jeden dieser Würfel in  $U$  enthalten, womit dann die Behauptung des Lemmas bewiesen ist.  $\square$

**Satz 2.8 (über die Verzerrung Borelscher Mengen)** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sowie  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Dann gilt für jede Borel-Menge  $B \subseteq U$ , dass

$$\lambda^n(\Phi(B)) = \int_B |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Wir unterscheiden im Folgenden drei Fälle, wobei wir im ersten Fall annehmen, dass  $B$  ein spezieller Würfel ist, im zweiten Fall, dass  $B$  offen ist, und im dritten Fall, dass  $B$  eine beliebige Borel-Menge ist.

*Fall 1):*  $B$  ist ein nach rechts halboffener, achsenparalleler Würfel mit  $\bar{B} \subseteq U$ .  $B$  habe die Kantenlänge  $\ell$ . Zu jedem  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  unterteilen wir  $B$  in  $k^n$  paarweise disjunkte nach rechts halboffene, achsenparallele Würfel  $W_k^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, k^n$ , mit Kantenlänge  $\frac{\ell}{k}$ . Da  $\Phi$  bijektiv ist, ist das Bild  $\Phi(B)$  von  $B$  dann die Vereinigung der  $k^n$  paarweise disjunkten Mengen  $\Phi(W_k^{(j)})$ , und daher gilt

$$\lambda^n(\Phi(B)) = \lambda^n\left(\bigcup_{j=1}^{k^n} \Phi(W_k^{(j)})\right) = \sum_{j=1}^{k^n} \lambda^n(\Phi(W_k^{(j)})) = \sum_{j=1}^{k^n} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j)}))}{\lambda^n(W_k^{(j)})} \lambda^n(W_k^{(j)}). \quad (2.7)$$

Definieren wir dann die Funktionen  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , durch

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k^n} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j)}))}{\lambda^n(W_k^{(j)})} \chi_{W_k^{(j)}}(x)$$

für  $x \in \mathbb{R}^n$ , so folgt

$$\int f_k d\lambda^n = \lambda^n(\Phi(B)) \quad (2.8)$$

für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Betrachten wir nun die Funktionenfolge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  etwas genauer. Sei dazu  $x \in B$ . Dann gibt es genau einen Index  $j_k \in \{1, \dots, k^n\}$  mit  $x \in W_k^{(j_k)}$  und daher folgt

$$f_k(x) = \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j_k)}))}{\lambda^n(W_k^{(j_k)})} \cdot \chi_{W_k^{(j_k)}}(x) = \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j_k)}))}{\lambda^n(W_k^{(j_k)})}.$$

Offenbar erfüllt die (von  $x$  abhängige) Würfelreihe  $(W_k^{(j_k)})_{k \geq 1}$  die Voraussetzungen von Lemma 2.6, woraus wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = |\det D\Phi(x)|$$

für alle  $x \in B$  erhalten. Dann gilt aber für alle  $x \in U$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = |\det D\Phi(x)| \chi_B(x),$$

da ja  $f_k(x) = \chi_B(x) = 0$  für  $x \in U \setminus B$  gilt. Die Funktionenfolge  $(f_k)$  konvergiert also auf  $U$  punktweise gegen die Funktion  $x \mapsto |\det D\Phi(x)| \chi_B(x)$ . Falls wir nun eine integrierbare

Majorante für die Funktionen  $|f_k|$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , finden, so gilt nach dem Satz von Lebesgue (Satz 1.80), dass

$$\begin{aligned}\lambda^n(\Phi(B)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) d\lambda^n(x) = \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) d\lambda^n(x) = \int |\det D\Phi(x)| \chi_B(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int_B |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x),\end{aligned}$$

womit der Satz im Fall 1) bewiesen ist. (Den Satz von Lebesgue müssen wir hier bemühen, da die gegebene Funktionenfolge leider nicht monoton wachsend ist.) Die gesuchte integrierbare Majorante konstruieren wir wie folgt: Nach Voraussetzung gilt auch  $\overline{B} \subseteq U$ . Da  $\overline{B}$  kompakt und konvex ist, ist  $\Phi$  nach Analysis II Korollar 2.36 Lipschitz-stetig auf  $\overline{B}$ , d.h. es gibt  $L \geq 0$ , so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq L \cdot \|x - y\|_\infty$$

für alle  $x, y \in \overline{B}$  gilt. Mit der Bezeichnung  $q_k^{(j_k)}$  für den Mittelpunkt von  $W_k^{(j_k)}$  folgt hiermit

$$\Phi(W_k^{(j_k)}) \subseteq W(\Phi(q_k^{(j_k)}), L \frac{\ell}{k}),$$

woraus wir schließlich

$$\frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j_k)}))}{\lambda^n(W_k^{(j_k)})} \leq \frac{(2L)^n \left(\frac{\ell}{k}\right)^n}{\left(\frac{\ell}{k}\right)^n} = (2L)^n$$

erhalten. Damit folgt wegen

$$|f_k(x)| \leq \sum_{j=1}^{k^n} (2L)^n \chi_{W_k^{(j)}}(x) = (2L)^n \chi_B(x)$$

für alle  $x \in U$  und alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , dass  $(2L)^n \chi_B$  die gesuchte integrierbare Majorante ist.

*Fall 2): B ist offen.*

Nach Lemma 2.7 ist  $B$  die disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen nach rechts halboffenen, achsenparallelen Würfeln  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\overline{W_k} \subseteq B$ . Da  $\Phi$  bijektiv ist, gilt dann auch

$$\Phi(B) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi(W_k)$$

und mit Fall 1) und dem Satz von Beppo Levi (Satz 1.77) folgt

$$\begin{aligned}\lambda^n(\Phi(B)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n(\Phi(W_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{W_k} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int |\det D\Phi(x)| \cdot \chi_{W_k}(x) d\lambda^n(x) = \int \sum_{k=0}^{\infty} |\det D\Phi(x)| \cdot \chi_{W_k}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int |\det D\Phi(x)| \cdot \chi_B(x) d\lambda^n(x) = \int_B |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x),\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Gleichheit  $\chi_B = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{W_k}$  ausgenutzt haben.

Fall 3):  $B \subseteq U$  ist eine beliebige Borel-Menge.

In diesem Beweisschritt benötigen wir an einer Stelle die Endlichkeit des Maßes einer Menge. Daher betrachten wir zwei Teilfälle von Fall 3).

Fall 3a):  $\lambda^n(\Phi(U)) < \infty$ . Wir verwenden das Prinzip der guten Mengen. Sei

$$\mathcal{D} := \left\{ A \in \mathcal{B}^n \mid \lambda^n(\Phi(A \cap U)) = \int_{A \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \right\}. \quad (2.9)$$

Nach Fall 2) enthält  $\mathcal{D}$  alle offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$ , welche nach Bemerkung 1.86 ein (durchschnittsstabiles!) Erzeugendensystem von  $\mathcal{B}^n$  bilden. Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist:

- i)  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{D}$  ist klar, da  $U = \mathbb{R}^n \cap U$  offen ist.
- ii) Sei  $A \in \mathcal{D}$ . Dann gilt wegen der Bijektivität von  $\Phi$  und der Endlichkeit des Maßes von  $\Phi(A \cap U)$ , dass

$$\begin{aligned} \lambda^n(\Phi(A^c \cap U)) &= \lambda^n(\Phi(U \setminus (A \cap U))) = \lambda^n(\Phi(U) \setminus \Phi(A \cap U)) \\ &= \lambda^n(\Phi(U)) - \lambda^n(\Phi(A \cap U)) \\ &= \int_U |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) - \int_{A \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ &= \int_{A^c \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

woraus wir schließlich  $A^c \in \mathcal{D}$  erhalten.

- iii) Seien  $A_\ell \in \mathcal{D}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt und  $A = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell$ . Dann erhalten wir wegen der Bijektivität von  $\Phi$ , dass

$$\begin{aligned} \lambda^n\left(\Phi\left(\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell\right) \cap U\right)\right) &= \lambda^n\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty} \Phi(A_\ell \cap U)\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^n(\Phi(A_\ell \cap U)) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{A_\ell \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \int |\det D\Phi(x)| \chi_{A_\ell \cap U}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int \sum_{\ell=0}^{\infty} |\det D\Phi(x)| \chi_{A_\ell \cap U}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int |\det D\Phi(x)| \chi_{A \cap U}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int_{A \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile den Satz von Beppo Levi (Satz 1.77) benutzt haben.

Da  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist und alle offenen Mengen enthält, enthält  $\mathcal{D}$  auch das dadurch erzeugte Dynkin-System, welches wegen der Durchschnittsstabilität der Menge aller offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  nach Lemma 1.39 bereits eine  $\sigma$ -Algebra ist, die nach Bemerkung 1.86 gerade die Borelsche  $\sigma$ -Algebra ist. Es gilt also  $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{D}$ . Damit ist der Satz im Fall  $\lambda^n(\Phi(U)) < \infty$  bewiesen. (Für  $B \in \mathcal{B}^n$  mit  $B \subseteq U$  gilt einfach  $B \cap U = B$ .)

Fall 3b):  $\lambda^n(\Phi(U)) = \infty$ . In diesem Fall schöpfen wir  $U$  durch beschränkte offene Mengen aus. Dazu setzen wir

$$U_k := \{x \in U \mid \|x\| < k \text{ und } d(x, \partial U) > \tfrac{1}{k}\},$$

wobei wir mit  $d(x, T) := \inf \{\|x - t\| \mid t \in T\}$  den Abstand eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  von einer Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichnen. Dann ist  $U_k$  offen mit  $\overline{U_k} \subseteq U$  für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  (beides klar?) und außerdem gilt  $U_k \subseteq U_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , sowie

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Nun ist  $\overline{U_k}$  beschränkt und abgeschlossen, also kompakt und damit ist nach Satz 1.68 aus Analysis II auch  $\Phi(\overline{U_k})$  kompakt, woraus die Beschränktheit von  $\Phi(U_k)$  folgt. Insbesondere erhalten wir daraus  $\lambda^n(\Phi(U_k)) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum eigentlichen Beweis von Fall 3b). Sei also  $B \subseteq U$  eine Borel-Menge. Dann gilt auch  $B \cap U \in \mathcal{B}^n$  und wir erhalten wegen  $\chi_{\Phi(B \cap U)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{\Phi(B \cap U_k)}$  durch zweimalige Anwendung des Satzes von Beppo Levi, dass

$$\begin{aligned} \lambda^n(\Phi(B)) &= \lambda^n(\Phi(B \cap U)) = \int \chi_{\Phi(B \cap U)}(x) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{\Phi(B \cap U_k)}(x) \, d\lambda^n(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \chi_{\Phi(B \cap U_k)}(x) \, d\lambda^n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^n(\Phi(B \cap U_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \chi_{B \cap U_k}(x) |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{B \cap U_k}(x) |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \chi_{B \cap U}(x) |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int_{B \cap U} |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile den bereits bewiesenen Fall 3a) (bzw. die Gleichheit in (2.9) für  $A = B$ ) ausgenutzt haben.  $\square$

## 2.2 Der Transformationssatz

Nach den vorbereitenden Abschnitten 2.1 und 2.2 kommen wir nun zu dem eigentlichen Transformationssatz, den wir in unterschiedlichen Varianten formulieren und beweisen werden. Dabei möchten wir die starke Voraussetzung, dass unsere gegebene Transformation ein Diffeomorphismus ist, also eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion hat, etwas abschwächen, wofür wir das folgende Resultat benötigen.

**Satz 2.9 (Lemma von Sard)** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, sowie*

$$S := \{x \in U \mid \det D\Phi(x) = 0\}.$$

*Dann ist  $\Phi(S)$  eine Nullmenge, d.h. eine Borel-Menge, für die  $\lambda^n(\Phi(S)) = 0$  gilt.*

**Beweis:** Die Grundidee des Beweises ist, dass für  $x \in S$  und  $y \in S$  in der Nähe von  $x$  gilt, dass  $\Phi(y) \approx \Phi(x) + D\Phi(x)(y - x)$ . Die rechte Seite ist dabei wegen  $\det D\Phi(x) = 0$  in einer Hyperebene, also einem affinen Teilraum des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$  enthalten, und dieser ist eine Nullmenge. (Falls  $\text{Rang } D\Phi(x) < n - 1$  gilt, so ist die rechte Seite sogar in einem affinen Teilraum noch kleinerer Dimension enthalten, dieser ist aber wieder in einer Hyperebene enthalten und das reicht uns im Folgenden schon.)  $\Phi(y)$  ist also lokal in einer Menge mit beliebig kleinem Maß enthalten. Dann kann man  $\Phi(S)$  durch solche Mengen mit beliebig kleinem Maß überdecken. Damit durch diesen Überdeckungsprozess die "Kleinheit" nicht verloren geht, werden wir uns zunächst auf kompakte Mengen einschränken:

*Schritt 1:  $\Phi(S \cap Q)$  ist eine Nullmenge, wenn  $Q$  ein abgeschlossener Würfel mit (beliebiger) Kantenlänge  $\ell$  ist.*

Zunächst bemerken wir, dass  $\Phi(S \cap Q)$  kompakt, also als abgeschlossene Menge eine Borel-Menge ist. Dies folgt daraus, dass  $Q$  kompakt,  $S$  abgeschlossen und  $\Phi$  stetig ist. Weiter ist  $D\Phi$  auf der kompakten Menge  $Q$  gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass, wenn wir  $Q$  durch  $N^n$  abgeschlossene Würfel  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, N^n$  der Kantenlänge  $\ell/N$  überdecken, gilt:

$$\|D\Phi(x) - D\Phi(y)\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in Q_j, \quad j = 1, \dots, N^n.$$

Dann liefert der Schrankensatz angewendet auf die Hilfsfunktion  $g : y \mapsto \Phi(y) - D\Phi(x)(y)$ , dass für alle  $x, y \in Q_j$  und  $j = 1, \dots, N^n$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \|(\Phi(x) + D\Phi(x)(y - x)) - \Phi(y)\| &= \|g(x) - g(y)\| \leq \sup_{\xi \in \overline{xy}} \|Dg(\xi)\| \cdot \|x - y\| \\ &= \sup_{\xi \in \overline{xy}} \|D\Phi(\xi) - D\Phi(x)\| \cdot \|x - y\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \|x - y\| \leq \varepsilon \sqrt{n} \frac{\ell}{N}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei  $\overline{xy}$  die Verbindungsstrecke von  $x$  und  $y$  bezeichnet und  $\sqrt{n}\ell/N$  der Durchmesser von  $Q_j$  ist. Sei nun  $Q_j$ ,  $j \in \{1, \dots, N^n\}$  beliebig. Falls  $Q_j \cap S = \emptyset$ , so gilt trivialerweise

$\lambda^n(\Phi(Q_j \cap S)) = 0$ . Andernfalls wählen wir ein  $x \in Q_j \cap S$ . Dann gilt  $\det D\Phi(x) = 0$  und daher gibt es eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene  $H$ , so dass

$$\{\Phi(x) + D\Phi(x)(y-x) \mid y \in Q_j\} \subseteq H.$$

Daher folgt mit (2.10), dass  $\Phi(y)$  von der Hyperebene  $H$  maximal den Abstand  $\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$  hat. Außerdem ist  $\Phi$  als stetige Funktion auf der kompakten und konvexen Menge  $Q$  nach Korollar 2.36 aus Analysis II Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Konstante  $L \geq 0$ , so dass

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\| \leq L \cdot \|y - x\| \quad \text{für alle } x, y \in Q.$$

Damit erhalten wir für alle  $x, y \in Q_j$ , dass

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\| \leq L\sqrt{n}\frac{\ell}{N}.$$

Dies bedeutet, dass  $\Phi(y)$  in einer Kugel um  $\Phi(x)$  mit Radius  $L\sqrt{n}\ell/N$  enthalten ist. Der Schnitt dieser Kugel mit der Hyperebene  $H$  liefert eine  $(n-1)$ -dimensionale Kugel mit Radius  $L\sqrt{n}\ell/N$  und da  $\Phi(y)$  von  $H$  außerdem maximal den Abstand  $\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$  hat, liegt  $\Phi(y)$  in einem Zylinder mit einer  $(n-1)$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $L\sqrt{n}\ell/N$  als Basis und mit der Höhe  $2\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$ . (Wir erhalten hier den Faktor 2, weil der Zylinder jeweils bis zum Abstand  $\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$  aus der Hyperebene nach oben und nach unten hinausragt.) Folglich gilt für alle  $j = 1, \dots, N^n$  mit  $Q_j \cap S \neq \emptyset$ , dass

$$\lambda^n(\Phi(Q_j \cap S)) \leq \lambda^n(\Phi(Q_j)) \leq C\varepsilon \left(\frac{\ell}{N}\right)^n,$$

mit einer Konstanten  $C \geq 0$ , die nur von  $L$  und  $n$ , aber nicht von  $j$  abhängt. Damit erhalten wir schließlich

$$\lambda^n(\Phi(Q \cap S)) = \lambda^n\left(\bigcup_{j=1}^{N^n} \Phi(Q_j \cap S)\right) \leq \sum_{j=1}^{N^n} \lambda^n(\Phi(Q_j \cap S)) \leq N^n C\varepsilon \left(\frac{\ell}{N}\right)^n = C\varepsilon\ell^n.$$

Da dies für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $\lambda^n(\Phi(Q \cap S)) = 0$ .

*Schritt 2:* Wir zeigen nun die Behauptung des Satzes. Da  $U$  offen ist, gibt es nach Satz 1.10 abzählbar viele abgeschlossene Würfel  $Q_k$  mit  $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ . Dann ist aber auch  $\Phi(S) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi(Q_k \cap S)$  eine Borel-Menge und es gilt

$$\lambda^n(\Phi(S)) = \lambda^n\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi(Q_k \cap S)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n(\Phi(Q_k \cap S)) = 0$$

nach Schritt 1.  $\square$



Die erste Variante des Transformationssatzes bezieht sich auf das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen.

**Satz 2.10 (Transformationssatz für nichtnegative Funktionen)** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  bijektiv und stetig differenzierbar. Dann ist  $V$  eine Borel-Menge und für jede messbare<sup>4</sup> Funktion  $f : V \rightarrow [0, \infty[$  gilt, dass*

$$\int_V f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:

*Fall 1): Es gilt  $\det D\Phi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ . Dann ist  $\Phi$  nach dem Umkehrsatz (Satz 3.3 aus Analysis II) ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist  $V = \Phi(U)$  offen und damit eine Borel-Menge. Wir beweisen nun die Aussage des Satzes durch *maßtheoretische Induktion*:*

- i) Sei  $B \subseteq V$  eine Borel-Menge und  $f = \chi_B$ . Dann ist auch  $A := \Phi^{-1}(B)$  nach Lemma 2.1 eine Borel-Menge und wir erhalten aus Satz 2.8, dass

$$\begin{aligned} \int \chi_B(x) \, d\lambda^n(x) &= \lambda^n(B) = \lambda(\Phi(A)) = \int \chi_A(x) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \chi_B(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Integrals für nichtnegative Funktionen gilt die Behauptung dann auch für alle Elementarfunktionen, die ja Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen sind.

- ii) Sei  $f : V \rightarrow [0, \infty[$  messbar. Setzen wir  $f$  trivial auf  $\mathbb{R}^n$  fort, so gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Elementarfunktionen, so dass  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Mit Hilfe von i) und des Satzes von Beppo Levi erhalten wir

$$\begin{aligned} \int f(x) \, d\lambda^n(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) \, d\lambda^n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

womit der Satz im Fall 1) bewiesen ist.

---

<sup>4</sup>Wir nennen eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in \mathcal{B}$ , messbar, wenn ihre triviale Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^n$  messbar ist. Dies entspricht der Messbarkeit der Funktion  $f$  im Maßraum  $(V, \mathcal{B}_V, \lambda_V)$  mit  $\mathcal{B}_V = \{B \cap V \mid B \in \mathcal{B}\}$ , wenn  $\lambda_V$  die Einschränkung des Lebesgue-Borelschen Maßes auf  $\mathcal{B}_V$  bezeichnet.

Fall 2):  $S := \{x \in U \mid \det D\Phi(x) = 0\} \neq \emptyset$ .

Dann ist  $\Phi(S)$  nach dem Lemma von Sard (Satz 2.9) eine Nullmenge und insbesondere eine Borel-Menge. Da die Determinante und  $D\Phi$  stetig sind, ist  $S$  abgeschlossen und daher  $U \setminus S$  offen, also auch eine Borel-Menge. Da  $\det D\Phi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U \setminus S$  gilt, ist  $\Phi|_{U \setminus S}$  nach dem Umkehrsatz aus Analysis II ein Diffeomorphismus und damit  $\Phi(U \setminus S)$  offen, also eine Borel-Menge. Damit folgt schließlich, dass auch die Menge  $V = \Phi(U) = \Phi(S) \cup \Phi(U \setminus S)$  Borel-messbar ist. Unter Benutzung von Fall 1) und Satz 1.74 gilt:

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \, d\lambda^n(x) &= \int_{\Phi(U \setminus S)} f(x) \, d\lambda^n(x) + \int_{\Phi(S)} f(x) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int_{U \setminus S} f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass  $\det D\Phi(x) = 0$  auf  $S$  gilt.  $\square$

**Satz 2.11 (Transformationssatz)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  bijektiv und stetig differenzierbar, sowie  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann ist  $f$  genau dann integrierbar über  $V$ , wenn die Funktion  $x \mapsto f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)|$  integrierbar über  $U$  ist. In diesem Fall gilt

$$\int_V f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Der Satz folgt sofort durch Anwendung von Satz 2.10 auf  $f^+$  und  $f^-$ .  $\square$

**Bemerkung 2.12** An dieser Stelle vergleichen wir einmal den Transformationssatz mit der entsprechenden Substitutionsregel aus Analysis I. Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar, so gilt nach Satz 7.32 aus Analysis I, dass

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx.$$

Ist zusätzlich  $\varphi$  bijektiv, so sollte sich diese Regel als Spezialfall des Transformationssatzes ergeben. Aber müsste hier dann nicht  $|\varphi'(x)|$  statt  $\varphi'(x)$  stehen? Leiten wir vorsichtshalber die Substitutionsregel noch einmal aus dem Transformationssatz her! Dabei beschränken uns der Einfachheit halber aber auf den Fall  $\varphi'(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wegen der Stetigkeit von  $\varphi'$  gilt dann  $\varphi' > 0$  oder  $\varphi' < 0$  auf ganz  $[a, b]$ . Im Fall  $\varphi'(x) > 0$  sind die Formeln in der Substitutionsregel und im Transformationssatz identisch. Gilt dagegen  $\varphi'(x) < 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , so ist  $\varphi$  auf  $[a, b]$  streng monoton fallend und daher gilt  $\varphi([a, b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$ . Daher erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx &= - \int_a^b f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| \, dx = - \int_{[a, b]} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| \, d\lambda^1(x) \\ &= - \int_{\varphi([a, b])} f(x) \, d\lambda^1(x) = - \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Tatsächlich hatte also alles so seine Richtigkeit, denn die fehlenden Betragstriche waren in den “vertauschten Integralgrenzen” “versteckt”.

## 2.3 Der verfeinerte Transformationssatz

Bei vielen Anwendungen treffen wir leider noch auf eine kleine Schwierigkeit, wenn wir den Transformationssatz anwenden wollen. Wollen wir zum Beispiel eine Funktion auf der Kreisscheibe  $K(0, R) = \overline{U_R(0)}$  integrieren und dafür Polarkoordinaten verwenden, so ist der Definitionsbereich der Funktion

$$\Phi : [0, R] \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\varrho, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{bmatrix}$$

leider nicht offen und strenggenommen ist  $\Phi$  auch gar nicht bijektiv (alle Punkte  $(0, \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi[$  werden auf den Nullpunkt  $(0, 0)$  abgebildet). Schränkt man dagegen  $\Phi$  auf die Menge  $]0, R[ \times ]0, 2\pi[$  ein, so ist  $\Phi$  dann zwar injektiv und der Definitionsbereich offen, jedoch ist das Bild dann nicht mehr die volle Kreisscheibe  $K(0, R)$ . Allerdings fehlt dort nur eine Nullmenge, die bekanntlich unerheblich für die Berechnung von Integralen ist. Der folgende Satz zeigt uns nun, dass wir auch in solchen Situationen den Transformationssatz verwenden dürfen.

**Satz 2.13 (Verfeinerter Transformationssatz)** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, sowie  $G \subseteq U$  eine Borel-Menge. Ferner sei  $N \subseteq G$  eine Nullmenge, so dass  $G \setminus N$  offen und  $\Phi|_{G \setminus N}$  injektiv ist. Ist  $f : \Phi(G) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, dann ist auch  $x \mapsto f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)|$  integrierbar und es gilt*

$$\int_{\Phi(G)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_G f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Zunächst zeigen Sie, dass das Bild  $\Phi(N)$  eine Nullmenge ist. (Übung!) Wegen  $\Phi(G) \setminus \Phi(N) \subseteq \Phi(G \setminus N) \subseteq \Phi(G)$  erhalten wir dann aus der Monotonie des Integrals und Satz 1.74, dass

$$\int_{\Phi(G)} f^+(x) d\lambda^n(x) \geq \int_{\Phi(G \setminus N)} f^+(x) d\lambda^n(x) \geq \int_{\Phi(G) \setminus \Phi(N)} f^+(x) d\lambda^n(x) = \int_{\Phi(G)} f^+(x) d\lambda^n(x)$$

und daher die Gleichheit all dieser Integrale. Analog gilt dies für  $f^-$  und damit erhalten wir auch die Gleichheit aller entsprechenden Integrale über  $f$ . Dann folgt aber mit dem Transformationssatz und erneut mit Satz 1.74, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(G)} f(x) d\lambda^n(x) &= \int_{\Phi(G \setminus N)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_{G \setminus N} f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| d\lambda^n \\ &= \int_G f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| d\lambda^n. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 2.14** 1) Wir benutzen Polarkoordinaten, um das Trägheitsmoment  $\Theta$  der Kreisscheibe  $K := K_2(0, R) = \overline{U_R(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$  vom Radius  $R$  bei der Rotation um den Ursprung zu bestimmen. In der Physik lernt man, dass dieses durch das Integral

$$\Theta = \int_K \delta(x^2 + y^2) d\lambda^2(x, y)$$

gegeben ist, wenn wir davon ausgehen, dass die Massedichte  $\delta$  der Kreisscheibe konstant ist. Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\varrho, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{bmatrix}$$

ist stetig differenzierbar und wie wir in Beispiel 3.4 in Analysis II festgestellt haben, gilt  $\det D\Phi(\varrho, \varphi) = \varrho$  für alle  $(\varrho, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ . Betrachten wir

$$G := [0, R] \times [0, 2\pi] \quad \text{und} \quad N := \partial G = G \setminus (]0, R[ \times ]0, 2\pi[),$$

so ist  $G \setminus N$  offen und  $\Phi$  ist auf  $G \setminus N$  injektiv. Daher lässt sich der Transformationssatz anwenden und wir erhalten wegen  $\Phi(G) = K$  mit Hilfe des Satzes von Fubini (Satz 1.95), dass

$$\begin{aligned} \int_K \delta(x^2 + y^2) d\lambda^2(x, y) &= \int_G \delta(\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot |\det D\Phi(\varrho, \varphi)| d\lambda^2(\varrho, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \delta \varrho^3 d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} \delta \frac{1}{4} R^4 d\varphi = \frac{1}{2} \pi \delta R^4. \end{aligned}$$

Beachtet man dann noch, dass die Masse  $M$  der Kreisscheibe  $K$  bei konstanter Dichte  $\delta$  durch  $M = \delta \pi R^2$  gegeben ist, so erhält man die bekannte Formel  $\Theta = \frac{1}{2} M R^2$ .

- 2) Wir berechnen das bereits in Beispiel 1.93 bestimmte Volumen einer dreidimensionalen Kugel vom Radius  $R$ . Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Borelschen Maßes reicht es dabei, die Kugel  $K := K_3(0, R) \subseteq \mathbb{R}^3$  um den Ursprung zu betrachten. Wir verwenden dazu *Kugelkoordinaten*. Dazu betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Dies erinnert sehr an die Parametrisierung der Kugeloberfläche, die wir in Teil 4) von Beispiel 3.20 in Analysis II betrachtet haben. Tatsächlich steht hier  $\theta$  wieder für die *Poldistanz* (die *geographische Breite* wäre  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ) und  $\varphi$  für die *geographische Länge*. Als dritter Parameter ist hier noch der Abstand  $r$  vom Ursprung hinzugekommen. Nun gilt

$$D\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

und  $\det D\Phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$  für alle  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ . Betrachten wir nun die Menge  $G = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , dann ist  $\partial G$  eine Nullmenge und  $\Phi$  ist auf der offenen Menge  $G \setminus \partial G = ]0, R[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  injektiv. (An dieser Stelle erklärt sich, warum man für den Parameter  $\theta$  die Poldistanz und nicht die geographische Breite gewählt

hat. Dadurch, dass  $\theta$  auf das Intervall  $[0, \pi]$  eingeschränkt wird, gilt  $r^2 \sin \theta \geq 0$  für alle  $r \geq 0$  und alle  $\theta \in [0, \pi]$ . Für die geographische Breite hätte man dagegen das Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  verwenden müssen und diesen Vorteil verloren.) Wegen  $K = \Phi(G)$  erhalten wir nun für das Volumen unserer Kugel unter Anwendung des Transformationssatzes und des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned}\lambda^3(K) &= \int_K 1 \, d\lambda^3(x, y, z) = \int_G r^2 \sin \theta \, d\lambda^3(r, \theta, \varphi) \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R -r^2 \cos \theta \Big|_0^\pi \, dr = 4\pi \int_0^R r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

- 3) Wir lösen ein offenes Problem aus der Analysis I und zeigen auf elegante Weise

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir haben in Analysis I in Teil 2) von Beispiel 7.42 gezeigt, dass  $f : x \mapsto e^{-x^2}$  uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Da  $f$  nichtnegativ ist, ist  $f$  dann auch Lebesgue-integrierbar.) Wir konnten den Wert des Integrals in Analysis I aber nicht einfach ausrechnen, da sich die Stammfunktion von  $f$  nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lässt. Daher benutzen wir jetzt einen Trick. Es gilt:

$$\begin{aligned}I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right) e^{-y^2} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx \right) \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, d\lambda^2(x, y)\end{aligned}$$

Da der Integrand  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$  nur vom Abstand von  $(x, y)$  vom Ursprung abhängt, bieten sich an dieser Stelle Polarkoordinaten zur einfacheren Berechnung des Integrals an. Für jedes  $R > 0$  ist  $f$  auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $K(0, R)$  stetig, also messbar. Damit erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes für nichtnegative Funktionen und des Satzes von Tonelli sowie der Notation  $G_R := [0, R] \times [0, 2\pi]$ , dass

$$\begin{aligned}\int_{K(0, R)} e^{-(x^2+y^2)} \, d\lambda^2(x, y) &= \int_{G_R} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\lambda^2(\varrho, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-\varrho^2} \Big|_0^R \, d\varphi = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-R^2} \right).\end{aligned}$$

Definieren wir dann für  $k \in \mathbb{N}$  die Funktionen  $f_k := f \cdot \chi_{K(0, k)}$ , so ist  $(f_k)$  eine monoton wachsende Folge von messbaren Funktionen, die gegen  $f$  konvergiert. Der Satz von Beppo Levi (Satz 1.77) liefert uns schließlich

$$I^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\lambda^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-k^2} \right) = \pi.$$



# Kapitel 3

## Die großen Integralsätze I

Ziel in diesem und dem nächsten Kapitel ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

Diese Gleichung können wir wie folgt interpretieren: Das Integral der Ableitung der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a, b]$  hängt nur von den Werten ab, die die Funktion  $f$  auf dem Rand  $\{a, b\}$  des Intervalls annimmt. Eine vergleichbare Interpretation finden wir dann auch bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes, mit denen wir uns in diesem und dem folgenden Kapitel beschäftigen wollen. Das gegenwärtige Kapitel wird dem Satz von Gauß gewidmet sein, der in der “Ingenieurs-Version” meist wie folgt formuliert wird (wir unterlassen hier eine Auflistung aller notwendigen Voraussetzungen an den Integrationsbereich  $K$  und die Funktion  $f$ ): Ist  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Menge mit “geschlossener Oberfläche”  $\partial K$  (denken Sie z.B. an eine Kugel), so gilt

$$\int_K \operatorname{div} f \, d\lambda^3 =: \iiint_K \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial K} f \cdot dO. \quad (3.1)$$

Das Integral auf der linken Seite ist unser klassisches Lebesgue-Integral, das in den Natur- und Ingenieurwissenschaften gerne als Dreifachintegral geschrieben wird, um hervorzuheben, dass über eine Teilmenge des dreidimensionalen Raums integriert wird. Vergleichen wir dann den Satz von Gauß mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, so stellen wir fest, dass auch hier das Integral über die “Ableitung” (in diesem Fall ist damit die Divergenz  $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$  gemeint) nur von den Funktionswerten abhängt, die  $f$  auf dem Rand  $\partial K$  des Integrationsbereichs  $K$  annimmt. Dafür müssen wir aber zunächst dem Integral auf der rechten Seite in (3.1) einen Sinn geben. Fassen wir nämlich  $\partial K \subseteq \mathbb{R}^3$  naiv einfach nur als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  auf, so ist anschaulich klar, dass es sich hier um eine Nullmenge handelt und folglich wäre das Integral jeder Funktion über  $\partial K$  gleich Null. Daher werden wir davon Gebrauch machen, dass es sich bei  $\partial K$  (unter entsprechenden Voraussetzungen an  $K$ ) um eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  handelt.

### 3.1 Die Gramsche Determinante

Wie wir in der Einführung dieses Kapitels gesehen haben, benötigen wir für die Formulierung des klassischen Satzes von Gauß einen Integralbegriff für Funktionen, die auf einer “Fläche im Raum” bzw. zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  definiert sind. Dieses Problem betrachten wir gleich allgemeiner und betrachten eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$ . Wie schon in der Einführung dieses Kapitels bemerkt, macht das Integral  $\int_M f d\lambda^n$  in diesem Fall nicht besonders viel Sinn, da  $M$  im Fall  $k < n$  anschaulicherweise eine Nullmenge im  $n$ -dimensionalen Raum ist (ohne das wir dies explizit beweisen wollen).

Andererseits haben wir in Abschnitt 3.3 in der Analysis II erfahren, dass eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^k$  ist. Präziser gesagt gibt es zu jedem  $x \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$ , eine offene Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine Immersion  $\varphi : T \rightarrow U$ , so dass  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) = M \cap U$  ein Homöomorphismus ist. Die Abbildung  $\varphi$  ist dann eine sogenannte *Parameterdarstellung*, vgl. Definition 3.19 in Analysis II. Da wir uns auch anschaulich unter einer  $M$  ein “ $k$ -dimensionales Gebilde” vorstellen, liegt es nahe, diese Parameterdarstellung zu benutzen, um unsere Untermannigfaltigkeit  $M$  “in den  $\mathbb{R}^k$  zurückzuziehen”.

Dabei werden wir uns zunächst einmal den Spezialfall betrachten, dass unsere gegebene Funktion  $f$  nur auf dem Bild einer einzelnen Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von Null verschieden ist. Die Idee ist dann, das Integral von  $f$  über  $\varphi(T)$  durch das Integral der Verkettung  $f \circ \varphi$  über  $T$  zu definieren. Da  $T$  als offene Menge des  $\mathbb{R}^k$  keine Nullmenge bzgl.  $\lambda^k$  ist (klar?), erwarten wir auf diese Art einen sinnvollen Integralbegriff. Die entscheidende Frage ist dabei allerdings, wie sehr das “ $k$ -dimensionale Volumen” von  $T$  bei der Abbildung auf  $M$  durch die Parameterdarstellung  $\varphi$  “verzerrt” wird. Im Fall  $k = n$  liefert uns die Antwort der Transformationssatz, denn wir erhalten

$$\int_{\varphi(T)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_T f(\varphi(t)) \cdot |\det D\varphi(t)| d\lambda^n(t).$$

Für eine sinnvolle Definition des Integral von  $f$  über  $\varphi(T)$  vermuten wir daher im Fall  $k < n$  die Form

$$\int_T f(\varphi(t)) \cdot \boxed{?} d\lambda^k(t)$$

an, wobei wir uns natürlich noch überlegen müssen, was statt  $|\det D\varphi(t)|$  an die Stelle des Symbols  $\boxed{?}$  treten muss, das hier für eine “*Verzerrung*” durch die Parameterdarstellung  $\varphi$  steht. Schauen wir uns dazu einmal den Spezialfall an, dass  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto Ax$  eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,k}$  ist. Da  $\varphi$  als Parameterdarstellung einer Untermannigfaltigkeit eine Immersion ist, muss die Matrix  $A (= D\varphi(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}^k$  den vollen Rang  $k$  haben. Die Frage ist nun, wie stark  $\varphi$  das “Volumen einer Menge” verzerrt. Dazu betrachten wir den Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^k$ , der durch

$$W := \left\{ t \in \mathbb{R}^k \mid t = \sum_{i=1}^k t_i e_i, 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$



gegeben ist, wobei  $e_i$  natürlich den  $i$ -ten Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^k$  bezeichnet. Offenbar gilt

$$\text{vol}_k(W) := \lambda^k(W) = 1.$$

Wir interessieren uns nun für das Volumen des Bildes von  $W$  unter  $\varphi$ , also der Menge  $\varphi(W)$ . Diese ist ein *Parallelepiped* (das ist ein  $k$ -dimensionales Analogon eines Parallelogramms) und hat die Form

$$AW := \varphi(W) = \{A \cdot t \mid t \in W\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i A e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k\right\},$$

Da dieses Parallelepiped in dem  $k$ -dimensionalen Unterraum  $\varphi(\mathbb{R}^k)$  des  $\mathbb{R}^n$  enthalten ist, gilt  $\text{vol}_n(AW) := \lambda^n(AW) = 0$ . Das ist allerdings irrelevant, denn wir interessieren uns an dieser Stelle für das Volumen “ $\text{vol}_k(AW)$ ” von  $AW$  als “ $k$ -dimensionales Gebilde”, d.h. als Teilmenge des Vektorraums  $\varphi(\mathbb{R}^k)$ , den wir mit dem Vektorraum  $\mathbb{R}^k$  identifizieren können. Diese Aufgabe lösen wir wie folgt. Zunächst berechnen wir eine  $QR$ -Zerlegung

$$A = QR, \quad R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,k}$$

von  $A$ , d.h.  $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$  ist eine orthogonale Matrix und  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{k,k}$  ist eine obere Dreiecksmatrix, die in diesem Fall genau wie  $A$  den Rang  $k$  hat. Da  $Q$  orthogonal und damit ein Produkt von Rotationen und Spiegelungen ist (siehe Lineare Algebra), können wir davon ausgehen, dass das “ $k$ -dimensionale Volumen” von  $AW$  durch Multiplikation mit  $Q^\top$  nicht verändert wird. Dies liefert

$$\text{vol}_k(AW) = \text{vol}_k(Q^\top AW) = \text{vol}_k(RW).$$

wobei

$$RW = \{R \cdot t \mid t \in W\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i R e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

gilt. Da nun  $R e_i$  für alle  $i = 1, \dots, k$  die Form

$$R e_i = \begin{bmatrix} \tilde{R} e_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

hat, können wir die Menge  $RW \subseteq \mathbb{R}^n$  in kanonischer Weise mit der Menge

$$\tilde{R}W = \{\tilde{R} \cdot t \mid t \in W\} = \left\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^k \mid \tilde{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{R} e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k\right\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

identifizieren. Für diese können wir dann einfach das Volumen mit dem Lebesgue-Borelschen Maß  $\lambda^k$  auf  $\mathbb{R}^k$  bestimmen:

$$\text{vol}_k(\tilde{R}W) = \lambda^k(\tilde{R}W) = |\det \tilde{R}| \cdot \lambda^k(W) = |\det \tilde{R}|$$

Hierbei haben wir die Formel (2.1) über die Verzerrung Borelscher Mengen unter linearen Transformationen benutzt. Etwas unschön ist hier allerdings, dass wir in der gefundenen Formel  $\text{vol}_k(AW) = |\det \tilde{R}|$  die Matrix  $\tilde{R}$  aus der  $QR$ -Zerlegung von  $A$  stehen haben. Wegen  $\tilde{R}^\top \tilde{R} = R^\top R = R^\top Q^\top Q R = A^\top A$  und

$$\det(A^\top A) = \det(\tilde{R}^\top \tilde{R}) = \det(\tilde{R}^\top) \det(\tilde{R}) = \det(\tilde{R})^2$$

erhalten wir aber schließlich die nur von  $A$  abhängige Formel

$$\text{vol}_k(AW) = \sqrt{\det(A^\top A)},$$

wobei man  $\det(A^\top A)$  als die *Gramsche Determinante* der Matrix  $A$  bezeichnet. Betrachten wir die Matrix  $A^\top A$  einmal etwas genauer: Gilt  $A = [a_1 \ \dots \ a_k]$ , d.h. bezeichnen wir die Spalten von  $A$  mit  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ , so erhalten wir

$$A^\top A = \begin{bmatrix} a_1^\top a_1 & \dots & a_1^\top a_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^\top a_1 & \dots & a_k^\top a_k \end{bmatrix} = [a_i^\top a_j]_{i,j} = [\langle a_i, a_j \rangle]_{i,j},$$

d.h. die Einträge von  $A^\top A$  bestehen gerade aus Skalarprodukten der Spalten von  $A$ .

Den Fall einer allgemeinen Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  unserer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  können wir nun auf diesen Spezialfall zurückführen, indem wir ausnutzen, dass  $\varphi$  lokal um  $t \in T$  durch ihre Ableitung

$$D\varphi(t) = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \ \dots \ \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t) \right] \in \mathbb{R}^{n,k}$$

approximiert werden kann. Diese Beobachtung führt uns zur folgenden Definition.

**Definition 3.1** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  eine Parameterdarstellung von  $M$ .

- 1) Die Abbildung  $G : T \rightarrow \mathbb{R}^{k,k}$ ,  $t \mapsto G(t) := D\varphi(t)^\top D\varphi(t) \in \mathbb{R}^{k,k}$  heißt Maßtensor (auch metrischer Tensor oder Gram-Matrix) von  $\varphi$ .
- 2) Die Abbildung  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \det(G(t))$  heißt Gramsche Determinante von  $\varphi$ .

**Bemerkung 3.2** Mit denselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Definition 3.1 erhalten wir:

- 1) Für alle  $t \in T$  gilt  $G(t) = \left[ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t) \right\rangle \right]_{i,j=1,\dots,k}$ .
- 2) Für den Spezialfall  $k = n$  gilt

$$g(t) = \det G(t) = \det(D\varphi(t)^\top D\varphi(t)) = |\det D\varphi(t)|^2$$

bzw. äquivalent dazu  $|\det D\varphi(t)| = \sqrt{g(t)}$ . In diesem Fall ist außerdem  $\varphi(T)$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  (klar?) und wir erhalten mit dem Transformationssatz:

$$\int_{\varphi(T)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_T f(\varphi(t)) |\det D\varphi(t)| d\lambda^n(t) = \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} d\lambda^n(t) \quad (3.2)$$

- 3) Die Matrix  $G(t)$  ist für alle  $t \in T$  positiv definit, denn für alle  $y \in \mathbb{R}^k$  gilt

$$y^\top G(t)y = y^\top D\varphi(t)^\top D\varphi(t)y = \|D\varphi(t)y\|_2^2 \geq 0$$

und aus  $\|D\varphi(t)y\|_2 = 0$  folgt  $D\varphi(t)y = 0$  sowie  $y = 0$ , da  $\varphi$  eine Immersion ist und daher  $D\varphi(t)$  vollen Rang hat. Insbesondere folgt damit  $g(t) > 0$  für alle  $t \in T$ .

**Beispiel 3.3** 1) Die offene Kreisscheibe  $U_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  ist als eine offene Menge eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ . Eine Parametrisierung, die alle Punkte von  $U_1(0)$  mit Ausnahme der nichtpositiven  $x$ -Achse abdeckt, ist durch

$$\varphi : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ , \quad (\varrho, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{bmatrix}$$

gegeben. Nun gilt für alle  $(\varrho, \phi) \in ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[$ , dass

$$D\varphi(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\varrho \sin \phi \\ \sin \phi & \varrho \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad G(\varrho, \phi) = D\varphi(\varrho, \phi)^\top D\varphi(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{bmatrix}.$$

Daher erhalten wir (wie zu erwarten war) für die Gramsche Determinante von  $\varphi$ , dass  $g(\varrho, \phi) = \det G(\varrho, \phi) = \varrho^2 = |\det D\varphi(\varrho, \phi)|^2$  für alle  $(\varrho, \phi) \in ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[$  gilt.

- 2) Wir betrachten die Sphäre  $S_R^2 := \partial K(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  vom Radius  $R > 0$  im  $\mathbb{R}^3$ . Wir wählen die Parametrisierung

$$\varphi : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{bmatrix}$$

(vgl. Beispiel 3.20 in Analysis II), die  $S_R^2$  mit Ausnahme des "Greenwich-Meridians" abdeckt. Wir erhalten für alle  $(\theta, \phi) \in ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$ , dass

$$D\varphi(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad G(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

womit wir die Gramsche Determinante  $g : (\theta, \phi) \mapsto \det G(\theta, \phi) = R^4 \sin^2 \theta$  erhalten.

Wenn wir mehrere Parametrisierungen einer Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  betrachten, dann können sich deren Bilder überlappen. Da unterschiedliche Parametrisierungen auch unterschiedliche Gramsche Determinanten haben können, stellt sich die Frage, wie diese miteinander in Zusammenhang gebracht werden können. Für die Beantwortung dieser Frage ist der folgende Satz wesentlich.

**Satz 3.4 (über Parametertransformationen)** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\varphi_j : T_j \rightarrow \varphi_j(T_j) \subseteq M$  zwei Parameterdarstellungen von  $M$ , so dass  $U := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2)$  nichtleer ist. Dann ist  $W_j := \varphi_j^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^k$  für  $j = 1, 2$  offen und  $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_2$  ist ein Diffeomorphismus.

Der Satz scheint auf den ersten Blick ganz klar zu sein, da ja  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  als Immersionen stetig differenzierbar sind. Leider ist uns an dieser Stelle aber nur die Stetigkeit der Umkehrfunktion  $\varphi_2^{-1}$  bekannt, so dass das Resultat damit beweisbedürftig ist.

**Beweis:** Sei  $j = 1$  oder  $j = 2$ . Nach Definition 3.19 ist  $\varphi_j$  ein Homöomorphismus (d.h. auch  $\varphi_j^{-1}$  ist stetig) und  $\varphi_j(T_j)$  ist offen in  $M$ . Dann ist aber auch  $U$  offen in  $M$  und aus der Stetigkeit von  $\varphi_j$  folgt die Offenheit von  $W_j$ . Sei nun  $t_1 \in W_1$  beliebig,  $a := \varphi_1(t_1) \in U$  und  $t_2 := \varphi_2^{-1}(a) \in W_2$ . Da  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist, gibt es nach Satz 3.22 aus Analysis II offene Mengen  $\tilde{U}, \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $a \in \tilde{U}$ , sowie einen Diffeomorphismus  $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ , so dass gilt:

$$\psi(M \cap \tilde{U}) = E_k \cap \tilde{V}, \quad \text{wobei } E_k := \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Setze nun  $\tilde{W}_j := \varphi_j^{-1}(M \cap \tilde{U})$ . Dann gilt

$$\psi \circ \varphi_1|_{\tilde{W}_1} = (g_1, \dots, g_k, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi_2|_{\tilde{W}_2} = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0)$$

wobei  $g = (g_1, \dots, g_k) : \tilde{W}_1 \rightarrow E_k \cap \tilde{V}$  und  $h = (h_1, \dots, h_k) : \tilde{W}_2 \rightarrow E_k \cap \tilde{V}$  stetig differenzierbare Funktionen sind (da sowohl  $\psi$  als auch  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  es sind). Hierbei identifizieren wir  $E_k$  mit dem  $\mathbb{R}^k$  und fassen auch  $E_k \cap \tilde{V}$  als eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^k$  auf.

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir für alle  $t \in \tilde{W}_1$ , dass

$$\begin{bmatrix} Dg(t) \\ 0 \end{bmatrix} = D(\psi \circ \varphi_1)(t) = D\psi(\varphi_1(t)) \cdot D\varphi_1(t)$$

und da  $D\psi(\varphi_1(t))$  invertierbar ist ( $\psi$  ist ein Diffeomorphismus, vgl. auch Bemerkung 3.1 aus Analysis II) und  $D\varphi_1(t)$  vollen Rang  $k$  hat, folgt, dass auch  $Dg(t)$  für alle  $t \in \tilde{W}_1$  Rang  $k$  hat, also invertierbar ist. Analog zeigen wir die Invertierbarkeit von  $Dh(t)$  für alle  $t \in \tilde{W}_2$ . Nach dem Umkehrsatz sind dann  $g$  und  $h$  lokal um  $\varphi_1^{-1}(a)$  bzw.  $\varphi_2^{-1}(a)$  Diffeomorphismen, o.B.d.A. auf ganz  $\tilde{W}_1$  bzw.  $\tilde{W}_2$  (andernfalls verkleinern wir  $\tilde{W}_j$  entsprechend). Dann gilt

$$\tau|_{\tilde{W}_1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{\tilde{W}_1} = \varphi_2^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1|_{\tilde{W}_1} = (\psi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\psi \circ \varphi_1)|_{\tilde{W}_1} = h^{-1} \circ g,$$

womit folgt, dass  $\tau$  auf ganz  $\tilde{W}_1$  ein Diffeomorphismus ist. Da aber  $t_1 \in W_1$  beliebig war, folgt, dass  $\tau$  schon auf ganz  $W_1$  ein Diffeomorphismus ist.  $\square$

**Korollar 3.5** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\varphi_j : T_j \rightarrow \varphi_j(T_j) \subseteq M$  zwei Parameterdarstellungen von  $M$ , so dass  $U := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2)$  nichtleer ist. Ferner seien  $g_1$  und  $g_2$  die Gramschen Determinanten von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , sowie  $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{\varphi_1^{-1}(U)} : \varphi_1^{-1}(U) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U)$  der Diffeomorphismus aus Satz 3.4. Dann gilt für alle  $t \in \varphi_1^{-1}(U)$ , dass

$$g_1(t) = |\det D\tau(t)|^2 g_2(\tau(t)).$$

**Beweis:** Wegen  $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau$  folgt mit der Kettenregel  $D\varphi_1(t) = D\varphi_2(\tau(t)) \circ D\tau(t)$  für alle  $t \in \varphi_1^{-1}(U)$ . Bezeichnet dann  $G_j$  den Maßtensor von  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$ , so gilt

$$G_1(t) = D\varphi_1(t)^\top D\varphi_1(t) = D\tau(t)^\top D\varphi_2(\tau(t))^\top D\varphi_2(\tau(t)) D\tau(t) = D\tau(t)^\top G_2(\tau(t)) D\tau(t).$$

Mit dem Determinantenmultiplikationssatz aus der Linearen Algebra folgt dann

$$g_1(t) = \det G_1(t) = |\det D\tau(t)|^2 \det G_2(\tau(t)) = |\det D\tau(t)|^2 g_2(\tau(t)). \quad \square$$

## 3.2 Integration über Untermannigfaltigkeiten I

Nach den Vorbereitungen des letzten Abschnitts kommen wir zur Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten für den Spezialfall von Funktionen, die nur auf dem Bild einer einzelnen Parameterdarstellung von Null verschieden sind.

**Definition 3.6** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  eine Parameterdarstellung von  $M$  mit Gramscher Determinante  $g$ . Ferner sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $f(x) = 0$  für alle  $x \in M \setminus \varphi(T)$ . Dann heißt  $f$  integrierbar über  $M$ , falls die Funktion  $t \mapsto f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)}$  integrierbar über  $T$  ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f(x) \, dS(x) := \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t) \quad (3.3)$$

das Integral von  $f$  über  $M$ .

**Bemerkung 3.7** 1) Das Integral (3.3) ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung. Dazu sei  $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{\varphi}(T) \subseteq M$  eine weitere Parameterdarstellung von  $M$  mit Gramscher Determinante  $\tilde{g}$ , so dass  $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) \cap \varphi(T) \neq \emptyset$  und  $f(x) = 0$  für alle  $x \in M \setminus \tilde{\varphi}(\tilde{T})$  gilt. O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) = \varphi(T)$  gilt. (Andernfalls verkleinern wir  $T$  und  $\tilde{T}$  entsprechend. Dies ändert nichts an den Voraussetzungen, da  $f$  nur auf der Menge  $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) \cap \varphi(T)$  von Null verschieden ist.) Bezeichnet dann  $\tau = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$  den Diffeomorphismus aus Satz 3.4, so folgt mit Hilfe des Transformationssatzes, dass

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{T}} f(\tilde{\varphi}(t)) \sqrt{\tilde{g}(t)} \, d\lambda^k(t) &= \int_{\tilde{T}} f(\varphi(\tau(t))) \cdot |\det D\tau(t)| \sqrt{g(\tau(t))} \, d\lambda^k(t) \\ &= \int_T f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t). \end{aligned}$$

2) Das Symbol  $dS$  bezeichnet man als *k-dimensionales Oberflächenelement*, wobei der Buchstabe “S” hier an den englischen Begriff *surface* erinnern soll. (Im deutschen Sprachraum (und dort insbesondere in den Ingenieurwissenschaften) wird dagegen auch gerne das Symbol  $dO$  verwendet.) Als Merkgregel verwenden wir im Folgenden die “Formel”  $dS(x) = \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t)$  die auch gerne durch “ $dS(x) = \sqrt{g(t)} \, dt$ ” abgekürzt wird.

**Beispiel 3.8** Wir berechnen das Trägheitsmoment der Kugeloberfläche vom Radius  $r > 0$ . Analog zu Teil 1) von Beispiel 2.14 lehrt uns die Physik, dass dieses durch das Integral

$$\Theta = \int_{S_R^2} f(x, y, z) \, dS(x, y, z)$$

gegeben ist, wobei  $S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  und  $f : S_R^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \delta x^2 + y^2$  gilt, wenn die Massendichte  $\delta$  der Kugeloberfläche als konstant angenommen wird und es sich

um eine Rotation um die  $z$ -Achse handelt. Wir wählen dann die aus Beispiel 3.3 bekannte Parameterdarstellung

$$\varphi : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{bmatrix}$$

mit der Gramschen Determinante  $g(\theta, \phi) = R^4 \sin^2 \theta$ . Eigentlich deckt diese Parameterdarstellung gar nicht die ganze Kugeloberfläche ab, es fehlt ja der “Greenwich-Meridians”, dies macht aber nichts, weil es sich dabei um eine “zweidimensionale Nullmenge” handelt. Präziser gesagt ist der Rand des Integrationsbereichs  $T := ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^2$  und spielt daher bei der Integration keine Rolle. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_{\varphi(T)} f(x, y, z) \, dS(x, y, z) = \int_T f(\varphi(\theta, \phi)) \sqrt{g(\theta, \phi)} \, d\lambda^2(\theta, \phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta(R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) R^2 \sin \theta \, d\lambda^2(\theta, \phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta R^4 \sin^3 \theta \, d\lambda^2(\theta, \phi) = \frac{8}{3} \pi \delta R^4. \end{aligned}$$

**Beispiel 3.9** *Kurvenintegrale*: Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve (d.h.  $\varphi$  ist stetig differenzierbar mit  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ ). Weiter sei  $\varphi : I \rightarrow \varphi(I)$  ein Homöomorphismus. Dann ist  $\varphi(I)$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit der globalen Parameterdarstellung  $\varphi$ . Wegen  $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^n$  erhalten wir den Maßtensor  $G$  und die Gramsche Determinante  $g$  von  $\varphi$  für alle  $t \in I$  als

$$G(t) = \varphi'(t)^\top \varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|^2 = g(t).$$

Für eine über  $\gamma := \varphi(I)$  integrierbare Funktion  $f$  gilt also

$$\int_\gamma f(x) \, dS(x) = \int_I f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, d\lambda^1(t).$$

Betrachten wir speziell die konstante Funktion  $f : x \mapsto 1$ , so definieren wir durch Integration über  $\gamma$  die sogenannte *Kurvenlänge* (oder auch *Bogenlänge*)  $L(\gamma)$  der Kurve:

$$L(\gamma) := \int_\gamma 1 \, dS(x) = \int_I \|\varphi'(t)\| \, d\lambda^1(t)$$

Als konkretes Beispiel berechnen wir den Umfang des Einheitskreises. Dazu betrachten wir die Parametrisierung

$$\varphi : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \text{mit der Ableitung } \varphi' : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Hier lassen wir zwar den Punkt  $(1, 0)$  aus, doch ein einzelner Punkt spielt natürlich für die Kurvenlänge keine Rolle (bzw. ist eine “Nullmenge”). Wegen  $\|\varphi'(t)\| = 1$  erhalten wir

$$L(\varphi(]0, 2\pi[)) = \int_{]0, 2\pi[} \|\varphi'(t)\| \, d\lambda^1(t) = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

Um zu illustrieren, dass die Kurvenlänge tatsächlich nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt, betrachten wir noch eine zweite Parametrisierung des Kreises:

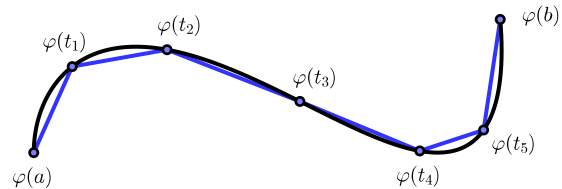
$$\psi : ]0, \sqrt{2\pi}[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \psi' : ]0, \sqrt{2\pi}[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} -2t \sin t^2 \\ 2t \cos t^2 \end{bmatrix}.$$

Machen sie sich klar, dass wir auch hier alle Punkte des Einheitskreises mit Ausnahme von  $(1, 0)$  durchlaufen. Hier gilt  $\|\psi'(t)\| = 2t$  für alle  $t \in ]0, \sqrt{2\pi}[$  und wir erhalten

$$L(\varphi(]0, \sqrt{2\pi}[)) = \int_{]0, \sqrt{2\pi}[} \|\psi'(t)\| d\lambda^1(t) = \int_0^{\sqrt{2\pi}} 2t dt = t^2 \Big|_0^{\sqrt{2\pi}} = 2\pi.$$

**Bemerkung 3.10** Die Kurvenlänge erhalten wir an dieser Stelle als eine Definition. Die Frage, ob diese Definition auch die *reale Welt* widerspiegelt, ist eine andere. Um Ihnen zu demonstrieren, dass unser Vorgehen sinnvoll war, betrachten wir an dieser Stelle auch eine stärker an der realen Welt orientierte Herleitung der Kurvenlänge. Ist  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Kurve, so können wir das Bild von  $\varphi$  durch Polygonzüge approximieren. Dazu betrachten wir eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  des Intervalls  $[a, b]$  und bestimmen die Länge

$$\sum_{j=1}^m \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| \quad (3.4)$$



des Polygonzugs, den wir durch Verbinden der Punkte  $\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_m)$  erhalten. (Vergleichen Sie dazu auch Bemerkung 5.42 aus Analysis I.) Das Ziel ist jetzt natürlich, durch Verfeinerungen der Intervallzerlegung immer genauere Approximationen an die Kurvenlänge zu erhalten. Beobachten wir dann, dass wir die Summe in (3.4) als

$$\sum_{j=1}^m \left\| \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\| \cdot (t_j - t_{j-1})$$

umschreiben können, so stellen wir fest, dass es sich bei dieser Darstellung um eine Riemannsche Summe handelt (vgl. Abschnitt 7.2 in Analysis I). Wählen wir die Unterteilungen immer feiner, so dass das Maximum der Abstände  $(t_j - t_{j-1})$  gegen Null geht, so geht die obige Summe in ein Integral über, während gleichzeitig, falls  $\varphi$  differenzierbar ist, der Differenzenquotient im Integranden gegen die Ableitung konvergiert:

$$\lim_{t_j \rightarrow t_{j-1}} \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \varphi'(t_{j-1})$$

Exakter nennt man eine stetige Kurve  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  *rektifizierbar*, falls es ein  $L \geq 0$  gibt, so dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für jede Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_n = b$  von  $[a, b]$  gilt:

$$\max \{t_j - t_{j-1} \mid j = 1, \dots, n\} < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| - L \right| < \varepsilon$$

Die Konstante  $L$  heißt dann *Bogenlänge* oder *Kurvenlänge* von  $\varphi$ . Man kann nun zeigen, dass (wie oben schon heuristisch angedeutet wurde) jede stetig differenzierbare Kurve  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar ist und dass für die Bogenlänge  $L$  von  $\varphi$  gilt:

$$L = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Dies entspricht genau der Definition der Kurvenlänge in Beispiel 3.9.

### 3.3 Atlanten und Zerlegungen der Eins

Im Folgenden wollen wir Definition 3.6 auf den Fall verallgemeinern, dass sich die gegebene Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  nicht durch eine einzige Parameterdarstellung überdecken lässt und die zu integrierende Funktion nicht nur auf dem Bild einer einzigen Parameterdarstellung von  $M$  von Null verschieden ist. Dabei werden wir uns allerdings auf Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  beschränken, die von endlich vielen Parameterdarstellungen “überdeckt” wird. (Allgemeiner kann man auch den Fall von abzählbar vielen Parameterdarstellungen erlauben. Wir begnügen uns hier mit dem einfacheren Fall, da dieser bereits alle im Folgenden vorkommenden Untermannigfaltigkeiten abdeckt.) Da Parameterdarstellungen bisweilen auch als *Karten* bezeichnet werden, werden wir in diesem Fall von Untermannigfaltigkeiten mit einem *endlichem Atlas* sprechen. Dies ist allerdings nicht ganz korrekt, da in der *Differentialgeometrie* gerade die Umkehrabbildungen von Parameterdarstellungen als Karten bezeichnet werden. Da wir im Folgenden aber stets mit Parameterdarstellungen statt Karten arbeiten, nutzen wir an dieser Stelle den Begriff *Atlas* auch für eine Menge von Parameterdarstellungen.

**Definition 3.11** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Ein Atlas von  $M$  ist eine Familie von Parameterdarstellungen  $(\varphi_i : T_i \rightarrow \varphi_i(T_i) \subseteq M)_{i \in I}$  mit

$$\bigcup_{i \in I} \varphi_i(T_i) = M.$$

Der Atlas heißt endlich, falls  $I$  nur endlich viele Elemente enthält.

Die Hauptidee für die Verallgemeinerung des Integrals ist Zerlegung von  $f$  in eine Summe von Funktionen, die jeweils nur auf dem Bild einer einzigen Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von Null verschieden sind. Wegen der Linearität des Integrals reicht es dann, jeden Summanden einzeln zu betrachten. In einigen Situationen ist die Funktion  $f\chi_{\varphi(T)}$  dafür geeignet. Ist allerdings  $f$  stetig oder sogar differenzierbar, so kann diese Eigenschaft beim Übergang zu  $f\chi_{\varphi(T)}$  verloren gehen. An dieser Stelle helfen uns sogenannte *Zerlegungen der Eins*.

Ist  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , so nennen wir eine Familie  $(\psi_i)_{i \in I}$  von Funktionen  $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$  eine *Zerlegung der Eins über  $X$* , falls für alle  $x \in X$  gilt, dass

$$\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1. \quad (3.5)$$

Die Zerlegung heißt *stetig* bzw. *glatt*, falls alle  $\psi_i$ ,  $i \in I$  stetig bzw. stetig differenzierbar sind. Die Gleichheit (3.5) ist übrigens der Grund dafür, warum wir an dieser Stelle auf eine exakte Definition von Zerlegungen der Eins verzichten wollen, denn hierfür müssten wir gewährleisten, dass der Ausdruck  $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$  auch im Fall beliebiger Indexmengen  $I$  stets wohldefiniert ist. In all unseren Beispielen wird dies allerdings der Fall sein, weil es dort zu jedem  $x \in X$  nur endlich viele Indizes  $i \in I$  geben wird, für die  $\psi_i(x) \neq 0$  gilt. Die



scheinbar unendliche Summe ist dann für jedes  $x \in X$  eine endliche Summe<sup>1</sup>. Im folgenden wollen wir Zerlegungen der Eins über dem  $\mathbb{R}^n$  konstruieren, führen aber vorher noch einen neuen Begriff ein.

**Definition 3.12** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt die Menge

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \subseteq X$$

der Träger von  $f$ .

Die Bezeichnung  $\text{supp}(f)$  leitet sich dabei von der englischen Bezeichnung *support* für Träger her.

**Bemerkung 3.13** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist die Menge  $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  offen in  $X$ . Damit folgt  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \partial \text{supp}(f)$ , also für alle  $x$  aus dem Rand des Trägers von  $f$ .

Ist speziell  $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so verwenden wir im Folgenden die zu Teil 3) von Bemerkung 6.45 aus Analysis I analogen Bezeichnungen  $C(U)$ ,  $C^k(U)$  und  $C^\infty(U)$  für die Menge der stetigen bzw.  $k$ -mal stetig differenzierbaren bzw. beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 3.14** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- 1)  $C_0(U) := \{f \in C(U) \mid \text{supp}(f) \subseteq U \text{ ist kompakt}\}.$
- 2)  $C_0^k(U) := C_0(U) \cap C^k(U) = \{f \in C_0(U) \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$
- 3)  $C_0^\infty(U) := C_0(U) \cap C^\infty(U) = \{f \in C_0(U) \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\}.$

**Beispiel 3.15** 1) *Stetige Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$* : Die Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$

Dann gilt offenbar  $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ . Um eine Zerlegung der Eins zu erhalten, benutzen wir für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $a \in \mathbb{R}$  die Bezeichnung  $\tau_a f$  für die “Verschiebung” von  $f$  um  $a$ , d.h. für die Funktion

$$\tau_a f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t - a).$$

---

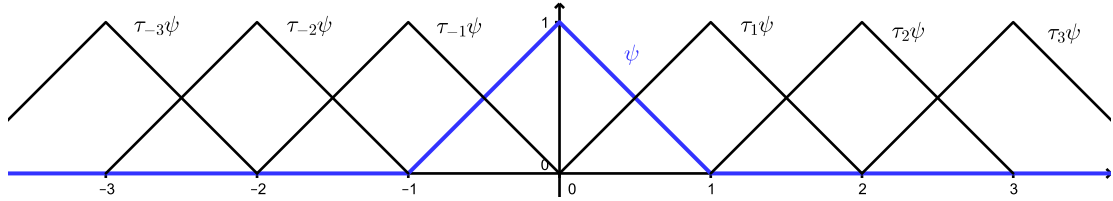
<sup>1</sup>Für alle, die es gerne präzise wissen möchten: Ist  $I$  eine Indexmenge und  $(a_i)_{i \in I}$  eine Familie reeller Zahlen, so dass es  $k \in \mathbb{N}$  und  $i_1, \dots, i_k \in I$  gibt mit  $a_{i_j} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, k$  und  $a_i = 0$  für alle  $i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ , so definieren wir

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{j=1}^k a_{i_j}.$$

Dann ist  $(\tau_k \psi)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine stetige (aber nicht differenzierbare) Zerlegung der 1 über  $\mathbb{R}$ , denn für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_k \psi)(x) = 1,$$

da in dieser scheinbar unendlichen Summe höchstens zwei verschiedene  $\tau_k$  einen von Null verschiedenen Wert annehmen und sich diese Werte jeweils zu Eins addieren. Die untenstehende Skizze veranschaulicht diesen Sachverhalt.



- 2) *Stetige Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$* : Hierzu betrachten wir die Funktion  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\phi(x) := \prod_{i=1}^n \psi(x_i) = \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdot \dots \cdot \psi(x_n)$$

für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $\psi$  wie in 1) gegeben ist. Für einen Punkt  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  definieren wir dann analog zu 1) die *Verschiebung um  $p$*  durch

$$\tau_p \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \phi(x - p) = \phi(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) = \prod_{i=1}^n (\tau_{p_i} \psi)(x_i).$$

Dann ist  $(\tau_p \phi)_{p \in \mathbb{Z}^n}$  eine stetige Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$ , denn für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt unter Benutzung von 1), dass

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} (\tau_p \phi)(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \left( \prod_{i=1}^n (\tau_{p_i} \psi)(x_i) \right) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{p_i \in \mathbb{Z}} (\tau_{p_i} \psi)(x_i) \right) = 1.$$

Dabei konnten wir in der zweiten Gleichheit das Distributivgesetz verwenden, weil für jedes feste  $x \in \mathbb{R}^n$  für jede Komponente höchstens zwei der Funktionen  $\tau_{k_i} \psi(x_i)$  von Null verschiedene Werte annehmen, die auftretenden Summen also nur endlich viele Summanden besitzen.

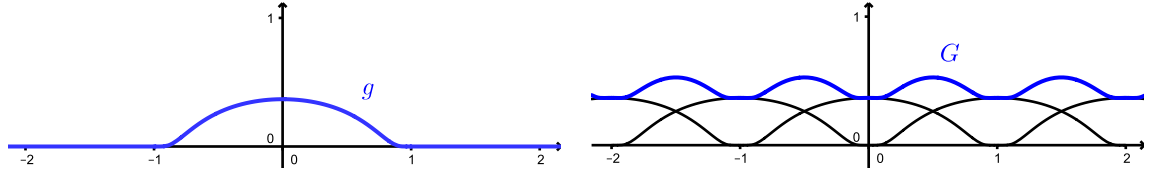
- 3) *Glatte Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$* : Hierzu betrachten wir die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{für } |t| < 1, \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Mit Bemerkung 6.56 aus Analysis I folgt leicht, dass  $g$  beliebig oft differenzierbar ist, d.h. es gilt  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Weiter betrachten wir die Funktion

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_k g)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t - k).$$

Dann gilt auch  $G \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Außerdem ist  $G$  auf ganz  $\mathbb{R}$  von Null verschieden und  $k$ -periodisch für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , d.h. es gilt  $G(t+k) = G(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$ .



Allerdings ist durch die Funktionen  $(\tau_k g)_{k \in \mathbb{Z}}$  noch keine Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$  gegeben, wie sie aus der obenstehenden Skizze erkennen können. Daher betrachten wir die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{g(t)}{G(t)}. \quad (3.6)$$

Dann gilt  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  und durch  $(\tau_k h)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist eine glatte (sogar *beliebig oft differenzierbare*) Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$  gegeben, denn für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_k h)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t-k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t)} = \frac{1}{G(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k) = 1.$$

Der Träger  $\text{supp}(g) = \text{supp}(h) = [-1, 1]$  der Funktionen  $g$  und  $h$  kann durch Stauchung oder Streckung beliebig angepasst werden. So hat die Funktion

$$t \mapsto g\left(\frac{t}{\varepsilon} - k\right)$$

den Träger  $[k\varepsilon - \varepsilon, k\varepsilon + \varepsilon]$ .

- 4) *Glatte Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$* : Für einen Punkt  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$  und  $\varepsilon > 0$  definieren wir die Funktion

$$\alpha_{p\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n h\left(\frac{x_i}{\varepsilon} - p_i\right), \quad (3.7)$$

wobei  $h$  wie in 3.6 gegeben ist. Dann gilt  $\alpha_{p\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\text{supp}(\alpha_{p\varepsilon}) = \prod_{i=1}^n [p_i\varepsilon - \varepsilon, p_i\varepsilon + \varepsilon].$$

Der Träger von  $\alpha_{p\varepsilon}$  ist also ein Würfel mit Mittelpunkt  $p$  und Kantenlänge  $2\varepsilon$ . Analog zur Rechnung in Teil 2) stellen Sie fest, dass

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{p\varepsilon}(x) = 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt, d.h. durch  $(\alpha_{p\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$  ist eine glatte Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$  gegeben.

Eine wichtige Anwendung von Funktionen mit kompaktem Träger findet sich in der folgenden wichtigen Formel, die die partielle Integration aus Analysis I verallgemeinert.

**Satz 3.16 (“Partielle Integration”)** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(U)$  und  $g, \varphi \in C_0^1(U)$  (d.h. sowohl  $g$  als auch  $\varphi$  haben einen kompakten Träger in  $U$ ). Dann gilt für  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x) = 0 \\ 2) \quad & \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) \, d\lambda^n(x) = - \int_U f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x) \end{aligned}$$

**Beweis:** 1) Sei o.B.d.A.  $U = \mathbb{R}^n$ . (Ansonsten setze  $\varphi$  trivial auf  $\mathbb{R}^n$  fort, dann hat  $\varphi$  immer noch einen kompakten Träger.) Weiter sei o.B.d.A.  $i = 1$ . (Die Behandlung der anderen Komponenten verläuft komplett analog.) Da  $\text{supp}(\varphi)$  kompakt, also beschränkt ist, gibt es  $R > 0$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]^n$ . Dann folgt aber mit dem Satz von Fubini, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, d\lambda^1(x_1) \right) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) = 0,$$

denn da  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  einen kompakten Träger in  $[-R, R]$  hat, folgt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für festes  $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , dass

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, d\lambda^1(x_1) = \int_{-R}^R \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, dx_1 = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{-R}^R = 0,$$

da eine stetige Funktion nach Bemerkung 3.13 auf dem Rand ihres Trägers (und damit erst recht auf dem Rand jeder Menge, die den Träger enthält) den Wert Null annimmt.

2) Mit  $g$  hat auch  $\psi := f \cdot g$  kompakten Träger und mit 1) und der Produktregel folgt

$$0 = \int_U \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \, d\lambda^n = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) \, d\lambda^n(x) + \int_U f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x),$$

woraus wir sofort die Behauptung erhalten.  $\square$

**Bemerkung 3.17** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sowie  $f \in C^2(U)$  und  $g \in C_0^2(U)$ . Dann gilt nach Satz 3.16 für alle  $i = 1, \dots, n$ , dass

$$\int_U \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \cdot g(x) \, d\lambda^n(x) = - \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x) = \int_U f(x) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x) \, d\lambda^n(x). \quad (3.8)$$

Erinnern wir uns dann daran, dass der *Laplace-Operator* durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

gegeben ist (vgl. Abschnitt 2.7 in Analysis II) und benutzen wir für den *Gradienten* von  $f$  (oder  $g$ ) das *Nabla-Symbol*  $\nabla f := \text{grad } f$ , so erhalten wir durch Summation von  $i = 1, \dots, n$  aus (3.8) die schöne und einprägsame Formel

$$\int_U \Delta f \cdot g \, d\lambda^n = - \int_U \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\lambda^n = \int_U f \cdot \Delta g \, d\lambda^n.$$

### 3.4 Integration über Untermannigfaltigkeiten II

Haben wir eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  mit einem endlichen Atlas  $(\varphi_i : T_i \rightarrow M)_{i=1,\dots,m}$  gegeben, so können wir die Mengen

$$U_1 := \varphi_1(T_1), \quad U_j := \varphi_j(T_j) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} U_i \right) = \varphi_j(T_j) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} (U_i \cap \varphi_j(T_j)) \right), \quad j = 2, \dots, m.$$

definieren und erhalten durch  $\alpha_j := \chi_{U_j}$  eine (nicht stetige) Zerlegung  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,m}$  der Eins über  $M$ . Wesentlich für die spätere Definition des Integrals über  $M$  ist die Eigenschaft dieser Zerlegung der Eins, dass die Funktionen  $\chi_{\varphi_j^{-1}(U_j)} : t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$  messbar sind, da die Mengen

$$\varphi_1^{-1}(U_1) = T_1 \quad \text{und} \quad \varphi_j^{-1}(U_j) = T_j \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} \varphi_j^{-1}(U_i \cap \varphi_j(T_j)) \right), \quad j = 2, \dots, m$$

messbar bzw. Borel-Mengen sind. (Klar?) Diese grundlegende Eigenschaft werden wir auch für andere Zerlegungen der Eins fordern.

**Definition 3.18** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit endlichem Atlas  $(\varphi_j : T_j \rightarrow M)_{j=1,\dots,m}$ . Eine Zerlegung  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,m}$  der Eins über  $M$  heißt dem Atlas  $(\varphi_j)_{j=1,\dots,m}$  untergeordnete lokal integrierbare Zerlegung der Eins, falls folgende Eigenschaften gelten:

- 1) Für alle  $x \in M$  gilt  $0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , und  $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1$ .
- 2)  $\alpha_j(x) = 0$  für alle  $x \in M \setminus \varphi_j(T_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .
- 3) Für jedes  $j = 1, \dots, m$  ist die Funktion  $T_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$  messbar.

Die Bezeichnung “lokal integrierbar” in Definition 3.18 rührt daher, dass eine beschränkte messbare Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, lokal integrierbar, d.h. integrierbar über jeder kompakten Teilmenge  $K \subseteq U$  sind. (Ist  $|f|$  auf  $U$  durch  $L \geq 0$  beschränkt, so ist  $L \cdot \chi_K$  eine integrierbare Majorante von  $f \chi_L$ .) Da die Funktionen  $\alpha_j$  beschränkt und messbar sind, sind sie also auch lokal integrierbar.

**Definition 3.19** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit endlichem Atlas. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar über  $M$ , falls es einen endlichen Atlas  $(\varphi_j : T_j \rightarrow M)_{j=1,\dots,m}$  von  $M$  mit untergeordneter lokal integrierbarer Zerlegung der Eins  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,m}$  gibt, so dass  $f \chi_{\varphi_j(T_j)}$  für jedes  $j = 1, \dots, m$  integrierbar über  $M$  ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f(x) \, dS(x) := \sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j(x) f(x) \, dS(x)$$

das Integral von  $f$  über  $M$ .

**Bemerkung 3.20** Das Integral von  $f$  über  $M$  aus Definition 3.19 ist wohldefiniert, denn bezeichnen wir die Gramsche Determinante der Parameterdarstellung  $\varphi_j$  mit  $g_j$ , so gilt:

- 1) Für jedes  $j = 1, \dots, m$  existiert das Integral

$$\int_M \alpha_j(x) f(x) dS(x) = \int_{T_j} \alpha_j(\varphi_j(t)) f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_j(t)} d\lambda^k(t),$$

denn nach Voraussetzung ist  $f\chi_{\varphi_j(T_j)}$  integrierbar über  $M$ , was bedeutet, dass die Funktion  $t \mapsto f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}$  integrierbar über  $T_j$  ist. Dann ist aber nach Korollar 1.81 auch die messbare Funktion  $t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}$  integrierbar, da für alle  $t \in T_j$  gilt:

$$|\alpha_j(\varphi_j(t))f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}| \leq |f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}|.$$

- 2) Das Integral hängt nicht von der Auswahl des Atlases oder der Zerlegung der Eins ab. Ist auch  $(\psi_i : U_i \rightarrow \psi_i(U_i))_{i=1, \dots, \ell}$  ein endlicher Atlas von  $M$  mit untergeordneter lokal integrierbarer Zerlegung der Eins  $(\beta_i)_{i=1, \dots, \ell}$ , so gilt für alle  $j, i$ , dass

$$\int_M \alpha_j(x) \beta_i(x) f(x) dS(x) = \int_{\varphi_j(T_j) \cap \psi_i(U_i)} \alpha_j(x) \beta_i(x) f(x) dS(x),$$

da  $\alpha_j$  auf  $M \setminus \varphi_j(T_j)$  und  $\beta_i$  auf  $M \setminus \psi_i(U_i)$  verschwindet. Ist nun  $\varphi_j(T_j) \cap \psi_i(U_i) = \emptyset$ , so ist das Integral gleich Null, andernfalls hängt es nach Bemerkung 3.7 nicht von der Wahl der Parameterdarstellung ab. (Sowohl  $\varphi_j$  als auch  $\psi_i$  sind globale Parameterdarstellungen der Untermannigfaltigkeit  $\varphi_j(T_j) \cap \psi_i(U_i)$  des  $\mathbb{R}^n$ .) Ferner gilt

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_j \beta_i \quad \text{und} \quad \beta_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_i,$$

woraus wir schließlich erhalten, dass

$$\sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j f dS = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \alpha_j \beta_i f dS = \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_i f dS = \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \beta_i f dS.$$

**Definition 3.21** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit endlichem Atlas und sei  $A \subseteq M$ .

- 1)  $A$  heißt integrierbar über  $M$ , falls  $\chi_A$  integrierbar über  $M$  ist. In diesem Fall heißt

$$\text{vol}_k(A) := \int_M \chi_A(x) dS(x)$$

das  $k$ -dimensionale Volumen (auch  $k$ -dimensionaler Flächeninhalt) von  $A$  bzgl.  $M$ .

- 2) Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar über  $A$ , falls  $f\chi_A$  integrierbar über  $M$  ist. In diesem Fall ist das Integral von  $f$  über  $A$  definiert durch

$$\int_A f(x) dS(x) := \int_M f(x) \chi_A(x) dS(x).$$

**Bemerkung 3.22** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 3.21 gilt

$$\text{vol}_k(A) = \int_A 1 \, dS(x).$$

Ist speziell  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve wie in Beispiel 3.9, so ist  $\text{vol}_1(\varphi(I))$  nichts anderes als die Kurvenlänge von  $\varphi$ .

**Beispiel 3.23** Wir berechnen die Oberfläche der Kugel  $S^2(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  und benutzen dazu die Parameterdarstellung  $\psi : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  aus Beispiel 3.3, für die wir die Gramsche Determinante als  $g : (\theta, \varphi) \mapsto R^4 \sin^2 \theta$  berechnet haben. Wie bereits festgestellt deckt  $\psi$  nicht den Nullmeridian ab, aber wie wir bereits in Beispiel 3.8 festgestellt haben, stellt dies kein Problem dar. Wir erhalten

$$\text{vol}_2(S^2(R)) = \int_{S^2(R)} 1 \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\varphi = 4\pi R^2.$$

Falls die Kugeloberfläche die konstante Dichte  $\delta$  hat, so erhalten wir  $M = 4\pi\delta R^2$  als deren Masse. Setzen wir dies in den Wert des Trägheitsmoments  $\Theta$  der Kugel aus Beispiel 3.8 ein, so erhalten wir die bekannte Formel  $\Theta = \frac{2}{3}MR^2$ .

Für spätere Zwecke betrachten wir an dieser Stelle noch einen wichtigen Spezialfall:

**Bemerkung 3.24** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist der Graph

$$M := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

nach Satz 3.22 aus Analysis II eine *Hyperfläche*, d.h. eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Diese hat sogar einen endlichen Atlas, denn wir erhalten eine globale Parameterdarstellung durch

$$\varphi : U \rightarrow M, \quad (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, f(t_1, \dots, t_{n-1})).$$

(Dass  $\varphi$  eine Immersion ist wird aus dem nächsten Schritt klar. Ist Ihnen auch klar, warum  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist? Wie sieht die Umkehrabbildung von  $\varphi$  aus?) Weiter gilt

$$D\varphi(t) = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ Df(t) \end{bmatrix} \text{ und } D\varphi(t)^\top D\varphi(t) = I_{n-1} + Df(t)^\top Df(t) = I_{n-1} + \text{grad } f(t) \text{ grad } f(t)^\top$$

für alle  $t \in U$ . Mit Hilfe der Formel  $\det(I_n + uv^\top) = 1 + u^\top v$  für  $u, v \in \mathbb{R}^n$  (diese Formel gilt sogar für beliebige Körper  $K$  und ist Ihnen entweder aus der Linearen Algebra bekannt oder eine Übungsaufgabe) folgt dann für die Gramsche Determinante  $g$  von  $\varphi$  für alle  $t \in U$ , dass

$$g(t) = 1 + \text{grad } f(t)^\top \text{ grad } f(t) = 1 + \|\text{grad } f(t)\|^2.$$

Damit erhalten wir für diesen Fall die Merkregel  $dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } f(t)\|^2} \, d\lambda^{n-1}(t)$ .

### 3.5 Kompakta mit glattem Rand

In der Einführung haben wir schon angedeutet, dass wir im Integralsatz von Gauß eine Menge  $A$  mit geschlossener Oberfläche betrachten wollen und dann einerseits über  $A$  und andererseits über die Oberfläche  $\partial A$  integrieren wollen. Nach unseren vorhergehenden Überlegungen, sollte es sich dann bei  $\partial A$  um eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  handeln, damit das Integral einer Funktion über  $\partial A$  definiert ist. Da wir für die korrekte Formulierung des Satzes von Gauß noch stärkere Eigenschaften der Oberfläche von  $A$  benötigen, ziehen wir uns auf sogenannte *Kompakta mit glattem Rand* zurück.

**Definition 3.25** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Wir sagen  $A$  hat einen glatten Rand (bzw.  $A$  ist ein Kompaktum mit glattem Rand), falls es zu jedem Randpunkt  $a \in \partial A$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $a$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass gilt:

- 1)  $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$
- 2)  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$

**Satz 3.26** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Definition 3.25 gilt

$$\partial A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}.$$

**Beweis:** “ $\subseteq$ ”: Diese Inklusion beweisen wir mit Kontraposition. Ist  $a \in U$  mit  $\psi(a) \neq 0$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $\psi$  eine Umgebung  $V \subseteq U$  von  $a$ , so dass entweder  $\psi(x) < 0$  für alle  $x \in V$  oder  $\psi(x) > 0$  für alle  $x \in V$  gilt. Im ersten Fall ist  $a$  ein innerer Punkt von  $A$ , im zweiten Fall liegt  $a$  außerhalb der abgeschlossenen Menge  $A$ . In beiden Fällen ist  $a$  also kein Randpunkt von  $A$ .

“ $\supseteq$ ”: Sei  $a \in U$ , so dass  $\psi(a) = 0$ . Zu zeigen ist, dass  $a$  ein Randpunkt von  $A$  ist, d.h., dass in jeder Umgebung von  $a$  sowohl Punkte aus  $A$  als auch aus  $\mathbb{R}^n \setminus A$  liegen. Setze dazu  $w := \text{grad } \psi(a)$ . Dann gilt nach Voraussetzung  $w \neq 0$ , sowie

$$\psi(a + tw) = \psi(a) + D\psi(a)(tw) + R(tw) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(tw)}{\|tw\|} = 0.$$

Wegen  $D\psi(a) = \text{grad } \psi(a)^\top = w^\top$  und  $w^\top w = \|w\|^2$  sowie  $\psi(a) = 0$  folgt daraus

$$\psi(a + tw) = t \cdot \|w\|^2 + R(tw) = t \left( \|w\|^2 + \|w\| \frac{R(tw)}{t\|w\|} \right).$$

Da der Quotient  $\frac{R(tw)}{t\|w\|}$  wegen der Differenzierbarkeit von  $\psi$  für  $t \rightarrow 0$  gegen Null geht, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $t$  mit  $0 < t < \varepsilon$  gilt:

$$\psi(a + tw) > 0 \quad \text{und} \quad \psi(a - tw) < 0$$

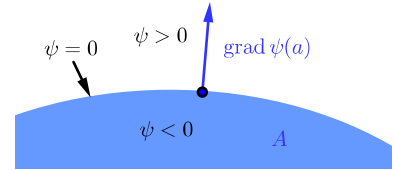
Letzteres ist aber äquivalent zu  $a + tw \notin A$  bzw.  $a - tw \in A$  für alle  $0 < t < \varepsilon$ , woraus folgt, dass  $a$  ein Randpunkt von  $A$  ist.  $\square$



**Bemerkung 3.27** Mit den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Definition 3.25 erhalten wir die nachstehenden Folgerungen aus Satz 3.26 und seinem Beweis:

- 1) Der Rand  $\partial A$  von  $A$  ist eine kompakte  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , also eine Hyperfläche. Dies folgt sofort aus Satz 3.22 in Analysis II.
- 2) Ist  $a \in \partial A$ , so ist  $\text{grad } \psi(a)$  ein Normalenvektor von  $\partial A$ , d.h. er “steht senkrecht” auf  $\partial A$ , also der Oberfläche von  $A$ . Dies folgt anschaulich aus Bemerkung 2.70 aus Analysis II, da  $\partial A \cap U$  gerade eine Niveaumenge von  $\psi$  zum Niveau 0 ist und der Gradient senkrecht auf den Niveaumengen steht bzw. formal aus Satz 3.29 aus Analysis II, da der Vektor  $\text{grad } \psi(a)$  eine Basis des eindimensionalen Normalenraums  $N_a(\partial A)$  bildet.
- 3) Zu jedem  $a \in A$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $a + t \text{grad } \psi(a) \notin A$  und  $a - t \text{grad } \psi(a) \in A$  für alle  $t$  mit  $0 < t < \varepsilon$  gilt. Zusammen mit 2) liefert uns dies die Erkenntnis, dass der (hinreichend klein skalierte) Vektor  $\text{grad } \psi(a)$  “aus  $A$  herauszeigt”, der (ebenso skalierte) Vektor  $-\text{grad } \psi(a)$  dagegen “in  $A$  hineinzeigt”.

Diese Tatsache ist übrigens der Grund dafür, warum wir in Definition 3.25 verlangt haben, dass  $\psi$  in  $A \cap U$  kleiner oder gleich Null sein soll. Außerhalb von  $A$  ist  $\psi$  dann positiv. In Bemerkung 2.70 in Analysis II haben wir festgestellt, dass der Gradient “in die Richtung des stärksten Anstiegs zeigt”. Da  $\psi$  nun (in  $U$ ) außerhalb von  $A$  positiv, aber innerhalb von  $A$  nicht-positiv ist, folgt, dass  $\text{grad } \psi(a)$  “aus  $A$  herauszeigt”.



Die Beobachtungen aus Bemerkung 3.27 werden wir im Folgenden etwas mehr formalisieren.

**Satz 3.28** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gibt es zu jedem  $a \in \partial A$  genau einen Vektor  $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$  mit den folgenden Eigenschaften.

- 1)  $\nu(a)$  ist ein Normalenvektor von  $\partial A$ , d.h.  $\nu(a) \in N_a(\partial A)$ .
- 2)  $\|\nu(a)\| = 1$ .
- 3) Es gibt  $\varepsilon > 0$ , so dass  $a + t\nu(a) \notin A$  für alle  $t$  mit  $0 < t < \varepsilon$  gilt.

Ferner ist die Abbildung  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a \mapsto \nu(a)$  stetig.

**Definition 3.29** Mit denselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Satz 3.28 heißt  $\nu(a)$  äußerer Normaleneinheitsvektor von  $A$  in  $a$ . Die Abbildung  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt äußeres Normaleneinheitsfeld auf  $A$ .

**Beweis** (von Satz 3.28). Die Existenz folgt sofort aus Bemerkung 3.27, denn ist  $a \in \partial A$  und sind  $U$  und  $\psi$  wie in Definition 3.25, so erfüllt

$$\nu(a) := \frac{\text{grad } \psi(a)}{\|\text{grad } \psi(a)\|} \quad (3.9)$$

die Bedingungen 1)–3) des Satzes. (In der Tat ist  $\nu(a)$  wohldefiniert, da nach Voraussetzung  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U \cap A$  gilt.) Für die Eindeutigkeit bemerken wir zunächst, dass der Normalenraum  $N_a(\partial A)$  eindimensional ist, da  $\partial A$  eine Hyperfläche, also eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Da  $\text{grad } \psi(a)$  eine Basis dieses Raumes bildet, gibt es zu jedem  $v \in N_a(\partial A)$  ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass

$$v = \alpha \text{grad } \psi(a)$$

gilt. Aus der Bedingung 2) folgt dann sofort

$$|\alpha| = \frac{1}{\text{grad } \psi(a)}.$$

Ist  $\alpha < 0$ , so gilt nach Bemerkung 3.27 für hinreichend kleine  $t > 0$ , dass

$$a + t \frac{v}{|\alpha|} = a - t \text{grad } \psi(a) \in A,$$

womit Bedingung 3) verletzt wäre. Somit folgt  $\alpha > 0$  und damit ist  $\alpha$  (und daher auch  $v$ ) durch 1)–3) schon eindeutig bestimmt.

Aus (3.9) folgt sofort die Stetigkeit der Abbildung  $\nu$  in  $a$ . Da  $a$  beliebig ist, ist  $\nu$  dann auch auf ganz  $\partial A$  stetig.  $\square$

**Beispiel 3.30** Wir betrachten die Kugel  $K := K(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  um den Nullpunkt mit Radius  $r > 0$ . Dann ist  $K$  ein Kompaktum mit glattem Rand, denn betrachten wir die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|^2 - r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - r^2,$$

so ist diese stetig differenzierbar, und es gilt

$$K = K(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) \leq 0\} \quad \text{und} \quad \partial K = S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\},$$

sowie  $\text{grad } \psi(x) = 2x \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Insbesondere gibt es also zu jedem Randpunkt  $a \in \partial K$  eine Umgebung, auf der der Gradient von  $\psi$  nicht verschwindet. Das äußere Normaleneinheitsfeld von  $K$  ist dann durch

$$\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad a \mapsto \nu(a) = \frac{2a}{\|2a\|} = \frac{a}{r}$$

gegeben, da für einen Randpunkt  $a \in \partial K$  natürlich  $\|a\| = r$  gilt.

Da es für Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  verschiedene Darstellungsmöglichkeiten gibt, ist es nicht verwunderlich, dass dies auch für Kompakta mit glattem Rand der Fall ist. Für spätere Zwecke betrachten wir daher an dieser Stelle eine solche alternative Darstellung.

**Satz 3.31** *Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1)  *$A$  ist ein Kompaktum mit glattem Rand.*
- 2) *Zu jedem  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \partial A$  gibt es (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten) eine offene Umgebung  $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  von  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  und ein Intervall  $] \alpha, \beta[$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U' \rightarrow ] \alpha, \beta[$ , so dass gilt:*

$$A \cap (U' \times ] \alpha, \beta[) = \{(x', x_n) \in U' \times ] \alpha, \beta[ \mid x_n \leq g(x')\} \quad (3.10)$$

oder

$$A \cap (U' \times ] \alpha, \beta[) = \{(x', x_n) \in U' \times ] \alpha, \beta[ \mid x_n \geq g(x')\} \quad (3.11)$$

In diesem Fall gilt zusätzlich

$$\partial A \cap (U' \times ] \alpha, \beta[) = \{(x', x_n) \in U' \times ] \alpha, \beta[ \mid x_n = g(x')\}.$$

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)”: Sei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \partial A$  beliebig. Dann gibt es nach Definition 3.25 eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $a$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$$

und  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ . Insbesondere ist mindestens eine Komponente von  $\text{grad } \psi(a)$  von Null verschieden. O.B.d.A. sei dies  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(a)$  (ansonsten nummerieren wir die Koordinaten um) und o.B.d.A. sei  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(a) > 0$ . (Der Fall  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(a) < 0$  verläuft i.w. analog.) Weiter können wir annehmen, dass

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) > 0 \quad (3.12)$$

für alle  $x \in U$  gilt, denn andernfalls verkleinern wir  $U$  entsprechend. (Dieses Argument benutzt die Stetigkeit von  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}$ .) Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen aus Analysis II (dort Satz 3.10) erfüllt und es existiert eine offene Umgebung  $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  von  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  und ein offenes Intervall  $] \alpha, \beta[$  mit  $a_n \in ] \alpha, \beta[$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U' \rightarrow ] \alpha, \beta[$ , so dass  $\tilde{U} := U' \times ] \alpha, \beta[ \subseteq U$  und

$$\partial A \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid \psi(x) = 0\} = \{(x', x_n) \in \tilde{U} \mid x_n = g(x')\}$$

gilt. Wegen (3.12) ist  $\psi$  in  $] \alpha, \beta[$  in  $x_n$ -Richtung streng monoton wachsend, d.h. für festes  $x' \in U'$  gilt  $x_n \leq g(x')$  genau dann, wenn  $\psi(x', x_n) \leq \psi(x', g(x')) = 0$  gilt. Daher folgt

$$A \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid \psi(x) \leq 0\} = \{(x', x_n) \in \tilde{U} \mid x_n \leq g(x')\}.$$

(Im Fall  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) < 0$  erhalten wir an dieser Stelle analog  $x_n \geq g(x')$  statt  $x_n \leq g(x')$ .)

“2)  $\Rightarrow$  1)”: Zu  $a \in \partial A$  seien  $U'$ ,  $]\alpha, \beta[$  und  $g$  wie in 2), wobei o.B.d.A. (3.10) erfüllt sei. Setze  $U := U' \times ]\alpha, \beta[$  und  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x', x_n) \mapsto x_n - g(x')$ . Dann erhalten wir

$$A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$$

und weiter gilt für alle  $x \in U$ , dass

$$\text{grad } \psi(x) = \begin{bmatrix} -\text{grad } g(x) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da  $a$  beliebig war, ist  $A$  also ein Kompaktum mit glattem Rand. Im Fall, dass (3.11) gilt, definieren wir analog  $\psi : (x', x_n) \mapsto g(x') - x_n$  und erhalten

$$\text{grad } \psi(x) = \begin{bmatrix} \text{grad } g(x) \\ -1 \end{bmatrix}.$$

für alle  $x \in U$ . Der Zusatz folgt in beiden Fällen sofort aus Satz 3.26.  $\square$

**Bemerkung 3.32** Anschaulich gesprochen bedeutet die Aussage von Satz 3.31, dass der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand lokal als Graph einer Funktion dargestellt werden kann, so dass das Kompaktum genau der Menge der Punkte, die “unterhalb” bzw. “oberhalb” des Graphs liegen, entspricht.

Mit den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 3.31 folgt weiter aus dem Beweis des Satzes, dass in der Darstellung 2) das äußere Normaleneinheitsfeld von  $A$  auf  $\partial A \cap U$  durch

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|^2}} \begin{bmatrix} -\text{grad } g \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist, falls (3.10) erfüllt ist, bzw. durch

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|^2}} \begin{bmatrix} \text{grad } g \\ -1 \end{bmatrix}$$

im Fall von (3.11). Mit Bemerkung 3.24 folgt weiter, dass das Oberflächenelement auf  $U$  dann die folgende Form hat:

$$dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } g(t)\|^2} d\lambda^{n-1}(t)$$

## 3.6 Der Integralsatz von Gauß

Wir kommen nun zum Höhepunkt dieses Kapitels, dem Satz von Gauß. Bevor wir diesen formulieren und beweisen werden, stellen wir zunächst einige Hilfsmittel bereit, die auch von unabhängigem Interesse sind.

**Satz 3.33 (Parameterabhängige Integrale)** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  messbar sowie  $f : U \times B \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar in der zweiten und stetig differenzierbar in der ersten Komponente, d.h.  $y \mapsto f(x, y)$  sei für alle  $x \in U$  integrierbar über  $B$  und  $x \mapsto f(x, y)$  sei für alle  $y \in B$  stetig differenzierbar. Ferner sei  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so dass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \right| \leq g(y)$$

für alle  $(x, y) \in U \times B$  gilt. Dann ist die Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \int_B f(x, y) d\lambda^m(y)$  stetig differenzierbar und für alle  $i = 1, \dots, n$  und alle  $x \in U$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_B f(x, y) d\lambda^m(y) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) d\lambda^m(y)$$

**Beweis:** Sei  $x \in U$  und sei  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Weiter sei o.B.d.A.  $i = 1$  (der Beweis für die anderen Komponenten verläuft analog). Betrachte die durch

$$f_k(y) := \frac{f(x + h_k e_1, y) - f(x, y)}{h_k}$$

gegebene Funktion  $f_k : B \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $e_1$  den ersten Standardbasisvektor im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Dann ist  $f_k$  integrierbar über  $B$  (da die Funktionen  $y \mapsto f(\tilde{x}, y)$  für jedes  $\tilde{x} \in U$  integrierbar sind) und offenbar gilt für alle  $y \in U$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y).$$

Weiter gilt unter Ausnutzung des Mittelwertsatzes (Satz 6.29 aus Analysis I):

$$f_k(y) = \frac{f(x_1 + h_k, x_2, \dots, x_n, y) - f(x, y)}{h_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n, y)$$

für ein  $\xi \in \mathbb{R}$  zwischen  $x_1$  und  $x_1 + h_k$ , woraus wir mit der Voraussetzung des Satzes  $|f_k(y)| \leq g(y)$  für alle  $y \in B$  erhalten. Damit ist  $g$  eine integrierbare Majorante und mit dem Satz von Lebesgue folgt die Integrierbarkeit der Funktionen  $f_k$  und der Grenzfunktion  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y)$ . Außerdem erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_k} \left( \int_B f(x + h_k e_1, y) d\lambda^m(y) - \int_B f(x, y) d\lambda^m(y) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(y) d\lambda^m(y) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Lebesgue angewendet haben. Da die Folge  $(h_k)$  beliebig war, folgt die partielle Differenzierbarkeit von  $F$  nach  $x_1$  sowie die Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y)$$

für alle  $x \in U$ . Nun ist die Funktion  $\frac{\partial F}{\partial x_1} : x \mapsto \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y)$  stetig, denn ist  $(\tilde{x}_k)$  eine Folge in  $U$  mit Grenzwert  $x$ , so folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_k, y) d\lambda^m(y) = \int_B \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_k, y) d\lambda^m(y) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y),$$

da  $f$  nach Voraussetzung stetig differenzierbar, die partiellen Ableitungen von  $f$  also stetig sind. Dann folgt mit Satz 2.18 aus Analysis II, dass auch  $F$  stetig differenzierbar ist.  $\square$

**Bemerkung 3.34** Haben wir mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 3.33 die Situation gegeben, dass  $|\frac{\partial f}{\partial x_i}| \leq M$  für alle  $(x, y) \in U \times B$  und ein  $M > 0$  gilt und  $B$  beschränkt ist, so kann für  $g$  einfach die konstante Funktion  $y \mapsto M$  gewählt werden, die wegen der Beschränktheit von  $B$  auch integrierbar ist. Die Existenz der Konstante  $M$  wiederum ist gewährleistet, wenn  $B$  offen und  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  stetig mit kompaktem Träger in  $U \times B$  ist, oder wenn (wie  $B$  auch)  $U$  beschränkt und  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  stetig auf  $\bar{U} \times \bar{B}$  ist. (Klar?)

**Satz 3.35 (Lemma von Lebesgue)** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es eine reelle Zahl  $\lambda > 0$ , so dass zu jeder Menge  $A \subseteq X$  mit  $\text{diam}(A) \leq \lambda$  und  $A \cap K \neq \emptyset$  ein  $i \in I$  existiert, so dass  $A \subseteq U_i$ . (Wir nennen  $\lambda$  eine Lebesgue'sche Zahl der Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$ .)

**Beweis:** Da  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$  ist, gibt es zu jedem  $x \in K$  ein  $i \in I$  und ein  $r_x > 0$ , so dass

$$U_{r_x}(x) \subseteq U_{2r_x}(x) \subseteq U_i$$

gilt. Offenbar ist  $(U_{r_x}(x))_{x \in K}$  eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $K$  und daher gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_m \in K$  mit

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_{r_{x_k}}(x_k).$$

Setze  $\lambda := \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_m}\}$ . Sei nun  $A \subseteq X$ , so dass  $A \cap K \neq \emptyset$  und  $\text{diam}(A) \leq \lambda$  gilt. Weiter sei  $a \in A \cap K$ . Dann gibt es ein  $k \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$a \in U_{r_{x_k}}(x_k) \subseteq U_{2r_{x_k}}(x_k) \subseteq U_i.$$

Wir zeigen  $A \subseteq U_{2r_{x_k}}(x_k)$  woraus wir dann auch  $A \subseteq U_i$  erhalten. Sei dazu  $x \in A$  beliebig. Dann gilt wegen  $\text{diam}(A) \leq \lambda \leq r_{x_k}$ , dass  $d(x, a) \leq r_{x_k}$ , woraus folgt, dass

$$d(x, x_k) \leq d(x, a) + d(a, x_k) < r_{x_k} + r_{x_k} = 2r_{x_k}$$

gilt, womit wir  $x \in U_{2r_{x_k}}(x_k)$  erhalten. Da  $x$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.36 (Integralsatz von Gauß)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $A \subseteq U$  ein Kompaktum mit glattem Rand und äußerem Normaleneinheitsfeld  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_A \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x). \quad (3.13)$$

**Beweis:** *Schritt 1: Lokalisierung.* In Hinblick auf Satz 3.31 gibt es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $A$ , so dass für jedes  $i \in I$  entweder  $U_i \subseteq A^\circ = A \setminus \partial A$  oder (ggf. nach Ummummerierung der Koordinaten)  $U_i = U' \times ]a, b[$  und

$$A \cap (U' \times ]a, b[) = \{(x', x_n) \in U' \times ]a, b[ \mid x_n \leq g(x') \text{ (bzw. } x_n \geq g(x'))\} \quad (3.14)$$

$$\partial A \cap (U' \times ]a, b[) = \{(x', x_n) \in U' \times ]a, b[ \mid x_n = g(x')\} \quad (3.15)$$

gilt, wobei  $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $g : U' \rightarrow ]a, b[$  stetig differenzierbar ist. (Wir unterdrücken in der Notation die Abhängigkeit von  $U'$ ,  $a$ ,  $b$  und  $g$  von  $i \in I$ .) Sei  $\lambda > 0$  eine Lebesgue'sche Zahl der Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  und setze  $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$ . Ist  $(\alpha_{p\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$  die glatte Zerlegung der Eins aus (3.7), so gilt

$$\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\alpha_{p\varepsilon})) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (2\varepsilon)^2} = 2\varepsilon\sqrt{n} = \lambda,$$

da der Träger von  $\alpha_{p\varepsilon}$  in einem Würfel der Kantenlänge  $2\varepsilon$  enthalten ist. Da  $A$  als kompakte Menge beschränkt ist, enthält die Menge

$$P := \{p \in \mathbb{Z}^n \mid \operatorname{supp}(\alpha_{p\varepsilon}) \cap A \neq \emptyset\}$$

nur endlich viele Elemente. Weiter folgt mit dem Lemma von Lebesgue (Satz 3.35), dass es zu jedem  $p \in P$  ein  $i \in I$  gibt, so dass  $\operatorname{supp}(\alpha_{p\varepsilon}) \subseteq U_i$  gilt. Da  $(\alpha_{p\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$  eine Zerlegung der Eins ist, gilt außerdem  $f\chi_A = \sum_{p \in P} \alpha_{p\varepsilon} f\chi_A$  und daher auch

$$\int_A \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \sum_{p \in P} \int_A \operatorname{div}(\alpha_{p\varepsilon} f) \, d\lambda^n \quad \text{und} \quad \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle \, dS = \sum_{p \in P} \int_{\partial A} \langle \alpha_{p\varepsilon} f, \nu \rangle \, dS.$$

Es reicht daher, den Satz für jedes einzelne  $\alpha_{p\varepsilon} f$  mit  $p \in P$  zu beweisen.

*Schritt 2: Beweis des lokalen Spezialfalls.* Sei nach Schritt 1 o.B.d.A.  $\operatorname{supp}(f) \subseteq U_i$ , wobei  $U_i \subseteq U$  offen ist, so dass (3.14)–(3.15) erfüllt sind (wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass  $x_n \leq g(x')$  in  $A \cap U_i$  gilt). Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:

*Fall 1:*  $U_i \subseteq A^\circ$ . In diesem Fall gilt

$$\int_A \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \int_{U_i} \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \sum_{j=1}^n \int_{U_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, d\lambda^n = 0 = \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle \, dS,$$

denn das Integral auf der linken Seite verschwindet nach Satz 3.16, da der Träger von  $f$  in  $U_i$  enthalten ist. Aus dem gleichen Grund verschwindet auch das Integral auf der rechten Seite, da  $f = 0$  auf dem Rand von  $A$  gilt.

Fall 2:  $U_i \cap \partial A \neq \emptyset$ . Wir zeigen

$$\int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n = \int_{\partial A} f_j \nu_j dS. \quad (3.16)$$

für  $j = 1, \dots, n$ . Dann erhalten wir durch

$$\int_A \operatorname{div} f d\lambda^n = \sum_{j=1}^n \int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n = \sum_{j=1}^n \int_{\partial A} f_j \nu_j dS = \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle dS$$

die Aussage des Satzes. Betrachten wir zunächst das Integral auf der linken Seite von (3.16). Mit Hilfe des Satzes von Fubini folgt unter Ausnutzung der Darstellung (3.14)–(3.15), dass

$$\int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) d\lambda^n(x) = \int_{U'} \left( \int_a^{g(x')} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n \right) d\lambda^{n-1}(x'). \quad (3.17)$$

Für die weitere Auswertung des Integrals benutzen wir, dass innerhalb  $U_i$  das Normaleneinheitsfeld  $\nu$  von  $A$  nach Bemerkung 3.32 die Form

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{bmatrix}$$

hat. Da sich die letzte Komponente von  $\nu$  deutlich von den anderen unterscheidet, nehmen wir eine weitere Fallunterscheidung vor.

Fall 2a):  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Wir definieren die Funktion

$$F : U_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x', z) \mapsto \int_a^z f_j(x', x_n) dx_n.$$

Dann folgt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bzw. Satz 3.33 und Bemerkung 3.34 (da  $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$  stetig ist und einen kompakten Träger in  $U_i$  hat) für alle  $(x', z) \in U_i$ , dass

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x', z) = f_j(x', z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x', z) = \int_a^z \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n.$$

Unter Ausnutzung der Kettenregel erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{g(x')} f_j(x', x_n) dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_j} (F(x', g(x'))) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial}{\partial z} F(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_j}(x', g(x')) + \frac{\partial F}{\partial z}(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') \\ &= \int_a^{g(x')} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n + f_j(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') \end{aligned}$$



Einsetzen in (3.17) liefert

$$\int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n = \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{g(x')} f_j(x', x_n) dx_n d\lambda^{n-1}(x') - \int_{U'} f_j(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') d\lambda^{n-1}(x'). \quad (3.18)$$

Da die Abbildung  $x' \mapsto \int_a^{g(x')} f_j(x', x_n) dx_n$  kompakten Träger in  $U'$  hat, folgt mit Satz 3.16, dass das erste Integral in (3.18) verschwindet. Wegen  $\nu_j(x', g(x')) = -\frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x')$  folgt damit:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n &= - \int_{U'} f_j(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') d\lambda^{n-1}(x') \\ &= - \int_{U'} f_j(x', g(x')) \cdot (-\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}) \nu_j(x', g(x')) d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{\partial A} f_j \nu_j dS, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gerade durch die Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten (Definition 3.6) folgt.

*Fall 2b):  $j = n$ .* In diesem Fall gilt  $\nu_n(x', g(x')) = \frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}}$ . Da die Funktion  $x_n \mapsto f_n(x', x_n)$  für jedes  $x' \in U'$  einen kompakten Träger in  $]a, b[$  hat, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

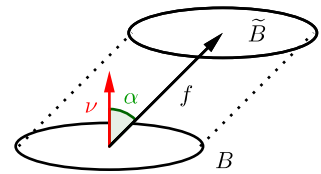
$$\int_a^{g(x')} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n = f_n(x', g(x')) - f_n(x', a) = f_n(x', g(x')).$$

Einsetzen in (3.17) liefert schließlich

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f_n}{\partial x_n} d\lambda^n &= \int_{U'} f_n(x', g(x')) d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{U'} f_n(x', g(x')) \cdot \nu_n(x', g(x')) \cdot (\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}) d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{\partial A} f_n \nu_n dS, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wieder mit Definition 3.6 folgt.  $\square$

**Bemerkung 3.37** Der so abstrakt anmutende Integralsatz von Gauß hat eine wunderschöne physikalische Interpretation, die wir an dieser Stelle einmal entwickeln wollen. Dazu fassen wir  $f$  als ein Strömungsfeld auf, d.h. als ein Vektorfeld, das die Geschwindigkeit einer Strömung beschreibt. Zunächst überlegen wir uns, wie viel “Flüssigkeit” pro Zeiteinheit durch eine ebene Fläche  $B$  strömt, wenn das Strömungsfeld  $f$  konstant ist. Unter diesen Voraussetzungen nehmen die Teilchen, die sich am Anfang genau in der Fläche  $B$  befanden, am Ende einer Zeiteinheit ihren Platz in einer “verschobenen” Fläche  $\tilde{B}$  ein. Die Flüssigkeitsmenge, die in dieser Zeit durch  $B$  geflossen ist, entspricht dann gerade dem Volumen des “schieben Zylinders” mit Boden  $B$  und Deckel  $\tilde{B}$ . Wählen wir nun die Zeiteinheit so, dass die



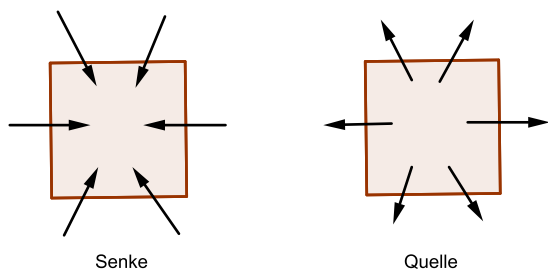
Länge des Weges, die ein einzelnes Teilchen in dieser Zeit zurückgelegt hat, genau der Länge (d.h. Norm) von  $f$  entspricht, so ist das Volumen des Schiefzylinders nach der Formel “Grundfläche mal Höhe” gerade durch  $V = B \cdot \|f\| \cdot \cos \alpha$  gegeben, wenn wir mit  $B$  auch den Flächeninhalt der Fläche  $B$  und mit  $\alpha$  den Winkel zwischen  $f$  und einem Normaleneinheitsvektor  $\nu$  der ebenen Fläche  $B$  bezeichnen. Da  $\nu$  die Norm Eins hat, erhalten wir mit der bekannten Formel für das Standardskalarprodukt aus der Linearen Algebra, dass

$$V = B \cdot \|f\| \cdot \cos \alpha = B \cdot \|f\| \cdot \|\nu\| \cdot \cos \alpha = B \cdot \langle f, \nu \rangle.$$

Ist dagegen  $B$  eine beliebige “glatte Fläche” (d.h. in diesem Fall eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ ) und  $f$  ein nicht-konstantes, aber stetiges Vektorfeld, so können wir  $B$  in viele kleine Teilflächenstücke  $\Delta B_i$  zerlegen, die alle nahezu eben sind. Sind diese hinreichend klein, so können wir wegen der Stetigkeit von  $f$  davon ausgehen, dass  $f$  auf jedem dieser Flächenstücke  $\Delta B_i$  nahezu konstant ist. Wir können daher den *Fluss durch B* durch eine Summe der Flüsse durch alle Flächenstücke  $\Delta B_i$  approximieren, welche dann bei immer feiner werdender Unterteilung in ein Integral übergeht:

$$\sum_i \langle f_i, \nu_i \rangle \Delta B_i \rightsquigarrow \int_B \langle f, \nu \rangle dS$$

Dieses Integral wird in den Anwendungen auch als *Flussintegral* bezeichnet und entspricht genau dem Integral auf der rechten Seite des Satzes von Gauß, wenn  $B = \partial A$  die Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers<sup>2</sup> ist. Da  $\nu$  das äußere Normaleneinheitsfeld von  $\partial A$  bezeichnet, entspricht der Wert dieses Integrals dem *Fluss* durch die Oberfläche von  $A$  nach außen. Wenden wir uns nun dem Integral auf der linken Seite im



Satz von Gauß zu. Betrachten wir einen Punkt  $x$  in unserer Strömung, so sagen wir, dass sich in  $x$  eine *Senke* befindet, wenn durch die Oberfläche jedes hinreichend kleinen Würfels um  $x$  mehr hineinfließt als heraus. Umgekehrt, also wenn durch jeden hinreichend kleinen Würfel um  $x$  mehr herausfließt als hinein, sprechen wir von einer *Quelle*. Dies versuchen wir einmal quantitativ zu erfassen, in dem wir die sogenannte *Quelldichte*, d.h. die “Quelle pro infinitesimaler Volumeneinheit” berechnen. Etwas ge-

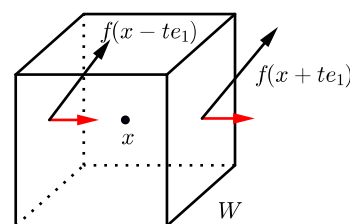
nauer ist dies der Grenzwert

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{“Strömungsbilanz durch } \Delta V \text{”}}{\Delta V}.$$

Um diesen Grenzwert zu bestimmen, betrachten wir einen kleinen Würfel  $W := W(x, t)$ , also den achsenparallelen Würfel mit Mittelpunkt  $x$  und Kantenlänge  $2t > 0$ . Um die weitere Herleitung im Folgenden zu vereinfachen nehmen wir an, dass die Strömungsrichtung von  $f$  auf ganz  $W$  und der Betrag von  $f$  auf den jeweiligen Seitenflächen von  $W$  nahezu konstant ist. Betrachten wir dann zunächst einmal die Bilanz der Strömungskomponente in  $x_1$ -Richtung, so erhalten wir nur einen Anteil durch die beiden Seitenflächen, die parallel zur  $x_2, x_3$ -Ebene liegen. Hier können wir dann unsere Überlegungen für den Fluss durch eine ebene Fläche  $B$  verwenden. Da der erste Standardbasisvektor  $e_1$  ein Normaleneinheitsvektor für die relevanten Würfelseiten ist, erhalten wir näherungsweise für die Strömungsbilanz in  $x_1$ -Richtung:

$$(2t)^2 \langle f(x + te_1), e_1 \rangle - (2t)^2 \langle f(x - te_1), e_1 \rangle = (2t)^2 (f_1(x + te_1) - f_1(x - te_1)),$$

wobei  $(2t)^2$  der Flächeninhalt einer Seitenfläche des Würfels ist und  $f_i$  die  $i$ -te Komponentenfunktion von  $f$  bezeichnet. Analog verfahren wir für die Strömungsbilanzen in die anderen beiden Richtungen und



<sup>2</sup>im geometrischen, nicht algebraischen Sinn

erhalten durch Summierung eine Approximation für die Gesamt-Strömungsbilanz:

$$(2t)^2 \sum_{i=1}^3 (f_i(x + te_i) - f_i(x - te_i))$$

Da das Volumen unseres Würfels  $W$  durch  $(2t)^3$  gegeben ist, erhalten wir schließlich die *Quelldichte* in  $x$  als

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t)^2 \sum_{i=1}^3 (f_i(x + te_i) - f_i(x - te_i))}{(2t)^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{f_i(x + te_i) - f_i(x)}{t} + \frac{f_i(x) - f_i(x - te_i)}{t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \right) = \operatorname{div} f(x). \end{aligned}$$

Die Quelldichte eines Strömungsfelds  $f$  ist demnach durch seine Divergenz gegeben, woher sich letztendlich auch der Name dieses Differentialoperators erklärt: *convergere* ist Lateinisch für “zusammenlaufen” und *divergere* analog für “auseinanderlaufen”. (Vergleichen Sie dies auch mit den Begriffen *Konvergenz* und *Divergenz* von Folgen.) Die *Gesamtquelle* von  $A$ , also die Menge von Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit in einem Körper  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  entsteht, erhalten wir bei konstanter Divergenz einfach durch Multiplikation mit dem Volumen von  $A$ , d.h.  $Q = \operatorname{vol}_3(A) \cdot \operatorname{div} f$ . Ist die Divergenz dagegen ortsabhängig, aber stetig, so zerlegen wir  $A$  in viele kleine Teilkörper  $\Delta A_i$  auf denen wir, wenn diese hinreichend klein sind, die Divergenz von  $f$  als nahezu konstant gleich  $\operatorname{div} f(x_i)$  für ein  $x_i \in \Delta A_i$  annehmen können. Damit erhalten wir eine Näherung für die Gesamtquelle durch eine Summe, die wieder einmal bei immer feiner werdender Unterteilung in ein Integral übergeht:

$$\sum_i \operatorname{div} f(x_i) \Delta A_i \rightsquigarrow \int_A \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x)$$

Somit erhalten wir die folgende Interpretation der Formel

$$\int_A \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$$

aus dem Satz von Gauß: Die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit in dem Körper  $A$  entsteht, fließt bei zeitunabhängiger Strömung auch pro Zeiteinheit durch seine Oberfläche  $\partial A$  wieder hinaus.

**Beispiel 3.38** 1) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Kompaktum mit glattem Rand und  $f = Id_{\mathbb{R}^n}$ . Dann gilt

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i}(x) = n$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Daher erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Gauß die folgende interessante Formel für das Volumen von  $A$ :

$$\operatorname{vol}_n(A) = \int_A 1 \, d\lambda^n = \frac{1}{n} \int_A \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle \, dS = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle \, dS(x)$$

Für den Spezialfall der Einheitskugel  $K_n := K(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  mit  $\partial K_n = S^{n-1}$  erhalten wir wegen  $\nu(x) = x$  und  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1$  für alle  $x \in S^{n-1}$ , dass

$$\operatorname{vol}_n(K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \langle x, x \rangle \, dS(x) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} 1 \, dS(x) = \frac{1}{n} \operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1}).$$

Da wir in Beispiel 1.93 schon eine Formel für das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel bestimmt haben, erhalten wir daraus nun auch leicht deren Oberfläche, ohne dass wir die Einheitssphäre mühsam parametrisieren müssen. Speziell für  $n = 3$  gilt (wie wir auch an anderer Stelle bereits erfahren haben):

$$\text{vol}_2(S^2) = 3 \cdot \text{vol}_3(K_3) = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

- 2) Wir leiten das aus der Physik bekannte *Archimedische Prinzip* her: Befindet sich ein Körper  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  unter Wasser, so wirkt durch den Wasserdruk (senkrecht) auf seine Oberfläche eine Kraft, die proportional zur Wassertiefe ist, also für  $x \in \partial A$  durch  $cx_3 \cdot \nu(x)$  gegeben ist, wobei  $c > 0$  eine Konstante ist. Hierbei setzen wir  $x_3 = 0$  für die Wasseroberfläche. Für Punkte  $x \in \partial A$  gilt  $x_3 < 0$ , so dass die Kraft in Richtung des Körpers wirkt, da sein Normaleinheitsfeld  $\nu$  nach außen zeigt. Der Körper erfährt dann eine Auftriebskraft  $F \in \mathbb{R}^3$ , die durch das Integral

$$F = \int_{\partial A} cx_3 \nu(x) \, dS(x)$$

gegeben ist. Da der Satz von Gauß nur für reellwertige Integrale anwendbar ist, betrachten wir die Komponenten von  $F = (F_1, F_2, F_3)$  einzeln. Für  $j \in \{1, 2, 3\}$  gilt:

$$\begin{aligned} F_j &= \int_{\partial A} cx_3 \nu_j(x) \, dS(x) = c \int_{\partial A} \langle x_3 e_j, \nu(x) \rangle \, dS(x) = c \int_A \text{div}(x_3 e_j) \, d\lambda^3(x) \\ &= c \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \, d\lambda^3(x) \end{aligned}$$

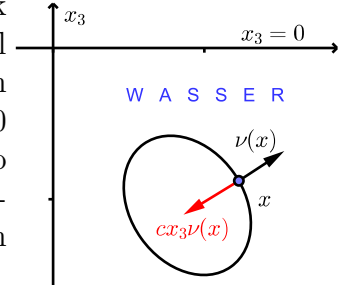
Daraus erhalten wir  $F_1 = F_2 = 0$  und  $F_3 = c \int_A 1 \, d\lambda^3(x) = c \text{vol}_3(A)$ . Der Körper  $A$  erfährt also eine nach oben (in Richtung der Wasseroberfläche) gerichtete Auftriebskraft, die proportional zum Volumen der verdrängten Flüssigkeit ist. Heureka!

**Bemerkung 3.39** Am Anfang dieses Kapitels hatten wir eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes für Differential- und Integralrechnung als Motivation genannt und auch einige Ähnlichkeiten zwischen diesem und dem Satz von Gauß aufgezeigt. Falls Ihnen das zu weit hergeholt erschien, so lassen Sie sich jetzt davon überzeugen, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als Spezialfall des Satzes von Gauß im Fall  $n = 1$  angesehen werden kann: In der Tat hat ein kompaktes Intervall  $A = [a, b]$  einen glatten Rand  $\partial A = \{a, b\}$ , denn für den Punkt  $b$  können wir z.B. das offene Intervall  $]a, b + 1[$  und die Abbildung  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x - b$  wählen. Dann gilt  $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$ , woraus folgt, dass

$$\nu(b) = \frac{\text{grad } \psi(b)}{\|\text{grad } \psi(b)\|} = 1$$

der Normalen-Einheitsvektor von  $\partial A$  in  $b$  ist. Analog erhalten wir  $\nu(a) = -1$ . Ist nun  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar (genauer benötigen wir hier, dass  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar auf einer offenen Menge  $U \supseteq [a, b]$  ist), so gilt  $\text{div } f = f'$  und daher lautet die Formel aus dem Satz von Gauß hier:

$$\int_a^b f'(x) \, dx = \int_{[a, b]} \text{div } f(x) \, d\lambda^1(x) = \int_{\partial[a, b]} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$$



Um das Integral auf der rechten Seite auswerten zu können, benötigen wir eine Parametrisierung des Randes  $\partial[a, b] = \{a, b\}$ , der eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^1$  ist. Für den Punkt  $b$  wählen wir die Parameterdarstellung  $\varphi_b : \mathbb{R}^0 \rightarrow \{b\}$ ,  $t \mapsto b$  mit der Ableitung  $D\varphi_b(0) : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $0 \mapsto 0$ . Dies ist zweifelsfrei eine lineare Abbildung, deren darstellende Matrix  $D\varphi_b(0)$  eine  $0 \times 1$ -Matrix ist. Analog wählen wir für den Punkt  $a$  die Parameterdarstellung  $\psi_a : 0 \mapsto a$ . Da die Mengen  $\psi_b(\mathbb{R}^0) = \{b\}$  und  $\psi_a(\mathbb{R}^0) = \{a\}$  disjunkt sind können wir hier zur Berechnung des Integrals über den Rand den Atlas  $(\psi_a, \psi_b)$  mit der trivialen Zerlegung der Eins betrachten und erhalten:

$$\int_{\partial[a, b]} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_{\{0\}} \langle f(b), \nu(b) \rangle \sqrt{D\psi_b(0)^\top D\psi_b(0)} d\lambda^0 + \int_{\{0\}} \langle f(a), \nu(a) \rangle \sqrt{D\psi_a(0)^\top D\psi_a(0)} d\lambda^0$$

Nun ist  $D\psi_b(0)^\top D\psi_b(0)$  die (eindeutig bestimmte)  $(0 \times 0)$ -Matrix, die als darstellende Matrix der Identität  $Id : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^0$  die Determinante 1 hat. Das Lebesgue-Maß  $\lambda^0$  auf dem  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  stimmt genau mit dem elementargeometrischen Inhalt  $\lambda^0$  aus Beispiel 1.15 überein, der in diesem Fall als leeres Produkt stets den Wert 1 annimmt. Es gilt also  $\lambda^0(\{0\}) = 1$ . Damit erhalten wir (ausnutzend, dass  $|f \circ \psi_b| : 0 \mapsto |f(b)|$  eine Elementarfunktion ist und entweder  $f \circ \psi_b = |f \circ \psi_b|^+$  oder  $f \circ \psi_b = |f \circ \psi_b|^-$  gilt), dass

$$\int_{\{0\}} \langle f(b), \nu(b) \rangle \sqrt{D\psi_b(0)^\top D\psi_b(0)} d\lambda^0 = \int_{\{0\}} f(b) \cdot \nu(b) \cdot 1 d\lambda^0 = f(b) \cdot \nu(b) \cdot \lambda^0(\{0\}) = f(b).$$

Analog erhalten wir für das zweite Integral den Wert  $-f(a)$ , da hier  $\nu(a) = -1$  gilt. Zusammenfassend ergibt sich also

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

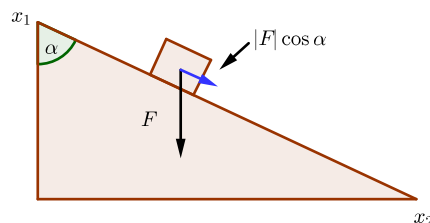
**Bemerkung 3.40** Der Integralsatz von Gauß gilt auch schon mit schwächeren Voraussetzungen, wie z.B. für Kompakta mit *abschnittsweise glattem Rand*. Ein Beispiel für eine solche Menge sind Quader, Kegel, Zylinder oder Pyramiden, also geometrische Körper mit (endlich vielen) Kanten. Wir verzichten an dieser Stelle auf weitere Ausführungen.



# Kapitel 4

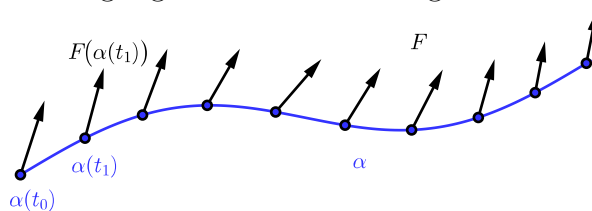
## Die großen Integralsätze II

Wie bereits im letzten Kapitel angedeutet, ist das Hauptthema in diesem Kapitel der Integralsatz von Stokes und auch in diesem Kapitel benötigen wir etliche Vorbereitungen, bevor wir in der Lage sind, ihn in der heute in der Mathematik üblichen Form zu präsentieren. Wir beginnen damit, eine weitere Art von *Kurvenintegralen* zu betrachten. In Abschnitt 3.3 hatten wir bereits das Integral von Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  über einer Untermannigfaltigkeit  $M$  kennengelernt und insbesondere den Spezialfall diskutiert, dass  $M$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Das resultierende Integral bezeichnet man dann in den physikalischen Anwendungen dann als *skalares Kurvenintegral* (auch *Kurvenintegral 1. Art*), da über eine reellwertige Funktion  $f$  integriert wird. Daneben gibt es noch das *vektorielle Kurvenintegral* (auch *Kurvenintegral 2. Art*), bei dem statt eines *Skalarfeldes* ein *Vektorfeld* integriert wird. Eine Anwendung ist dabei die Berechnung der verrichteten *Arbeit* bzw. des *Energiegewinns* bei der Bewegung einer Masse in einem Kraftfeld. Betrachten wir zum Beispiel eine Masse, die im Kraftfeld  $F$  der Erde eine schiefe Ebene herunterrutscht, so wird der Energiegewinn (bzw. die Arbeit)  $A$  nach der Formel “Kraft  $\times$  Weg” berechnet. Dabei ist allerdings nur die Komponente  $|F| \cos \alpha$  der Kraft in Wegrichtung von Belang und wir erhalten daher:



$$A = |F| \cos \alpha \cdot |x_2 - x_1| = \langle F, x_2 - x_1 \rangle.$$

Diese Formel gilt allerdings nur für konstante Kraftfelder (wie z.B. dem Gravitationsfeld der Erde, das wir für praktische Belange wie hier in der Tat als konstant betrachten können.) Wie erhalten wir die verrichtete Arbeit bei der Bewegung einer Masse entlang einer Kurve  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn das gegebene Kraftfeld  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ortsabhängig ist? (Denken Sie dabei z.B. an ein Segelschiff, das sich im Wind bewegt, wobei wir den Wind der Einfachheit halber nur als ortsabhängiges, aber in der Zeit konstantes Kraftfeld betrachten.)



Die Idee ist dann, eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  des Intervalls zu betrachten.

Nehmen wir weiter an, dass  $F$  stetig und  $\alpha$  stetig differenzierbar ist, so können wir für hinreichend feine Zerlegungen davon ausgehen, dass

- i)  $\alpha$  auf dem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  nahezu linear ist (genauer wäre affin linear),
- ii)  $F$  auf der Verbindungsstrecke zwischen  $\alpha(t_i)$  und  $\alpha(t_{i+1})$  nahezu konstant ist.

Somit erhalten wir die Arbeit  $A$  näherungsweise durch die Formel

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^m \left\langle F(\alpha(t_i)), \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \left\langle F(\alpha(t_i)), \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \sum_{i=1}^m \left\langle F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) \right\rangle \cdot \Delta t_i, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei wir die Abkürzung  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  eingeführt und außerdem benutzt haben, dass wir den Differenzenquotienten in (4.1) wegen der Differenzierbarkeit von  $\alpha$  durch die Ableitung  $\alpha'(t_i)$  approximieren bzw. ersetzen können. Wählen wir nun die Unterteilung immer feiner, so geht die obige Summe in das Integral

$$\int_{\alpha} F \cdot ds := \int_a^b \left\langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle dt$$

über, wobei das Integral auf der linken Seite die in den Ingenieurs- und Naturwissenschaften übliche Notation nutzt, in der das Symbol  $\cdot$  für das Skalarprodukt steht, das aus dem Vektorfeld  $F$  und dem *vektoriellen Kurvenelement*  $ds = \alpha'(t) dt$  gebildet wird. (Die Notation  $ds$  erklärt sich dadurch, dass in der Physik der *Weg* mit  $s$  für lateinisch “*spatium*” gekennzeichnet wird.)

Unser erstes Ziel wird sein, einen geeigneten Integranden für das vektorielle Kurvenintegral zu finden. Versuchen wir es mit dem Integral über Untermannigfaltigkeiten, so stoßen wir auf die gleichen ästhetischen Probleme wie beim Satz von Gauß, dass der Integrand nicht unabhängig vom Integrationsbereich ist. Daher wählen wir einen anderen Zugang mit Hilfe von sogenannten *Pfaffschen Formen* und später den allgemeineren *Differentialformen*. Damit lässt sich dann auch der Satz von Gauß umformulieren und wird zu einem Spezialfall des *Satzes von Stokes*, dessen elegante Formulierung durch ihre Einfachheit und Schönheit besticht: In unserer noch zu entwickelnden Notation lautet dieser

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$



## 4.1 Das vektorielle Kurvenintegral

Motiviert durch die physikalische Anwendung werden wir in diesem Abschnitt das Integral von Vektorfeldern über Kurven definieren. Damit die Existenz dieses Integrals gesichert ist, werden wir uns auf stetige Vektorfelder als Integranden beschränken. Für den Integrationsbereich können wir dann stückweise stetig differenzierbare Kurven erlauben.

**Definition 4.1** Eine Funktion  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt stückweise stetig differenzierbar, falls eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  von  $[a, b]$  existiert, so dass  $\alpha_j := \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar ist für  $j = 1, \dots, m$ .

Aus der stückweise stetigen Differenzierbarkeit folgt natürlich sofort die Stetigkeit der Funktion  $\alpha$ . Diese muss in den Zerlegungsstellen  $t_i$  allerdings nicht differenzierbar sein.

**Definition 4.2** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld.

- 1) Ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : [a, b] \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Kurve dann heißt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds := \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\alpha(t)) \alpha'_i(t) dt$$

das Integral von  $f$  entlang  $\alpha$ .

- 2) Ist  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  stückweise stetig differenzierbar und  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , so dass  $\alpha_j := \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar ist für  $j = 1, \dots, m$ , dann heißt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds := \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j} f \cdot ds$$

das Integral von  $f$  entlang  $\alpha$ .

Machen Sie sich klar, dass das Integral eines Vektorfeldes entlang einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve unabhängig von der gewählten Zerlegung und damit wohldefiniert ist.

**Beispiel 4.3** Seien  $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sowie  $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\tilde{\alpha} : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha} : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix}.$$

Dann erhalten wir die folgenden Kurvenintegrale:

$$\int_{\alpha} f \cdot ds = \int_0^{\pi} f_1(\alpha(t)) \alpha'_1(t) + f_2(\alpha(t)) \alpha'_2(t) dt = \int_0^{\pi} (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 dt = \int_0^{\pi} 1 dt = \pi,$$

$$\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot ds = \int_0^{\sqrt{\pi}} -\sin(t^2)(-2t \sin(t^2)) + \cos(t^2)2t \cos(t^2) dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t dt = \pi$$

Beachten Sie, dass  $\alpha([0, \pi]) = \tilde{\alpha}([0, \sqrt{\pi}])$  gilt, denn mit  $\psi : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto t^2$  gilt  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ . In beiden Fällen wird also dieselbe Raumkurve “durchlaufen”, nur mit “jeweils unterschiedlicher Geschwindigkeit”.

In Kapitel 3 haben wir festgestellt, dass das Integral von Funktionen über Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  nicht von der Wahl der jeweiligen Parameterdarstellung der Untermannigfaltigkeit abhängt. Beispiel 4.3 lässt vermuten, dass eine ähnliche Regel für das vektorielle Kurvenintegral gilt. Dies ist tatsächlich der Fall, jedoch ist die Sachlage ein wenig komplizierter als bei der Integration skalarer Funktionen, da wir eine Kurve in zwei unterschiedlichen Richtungen durchlaufen können: Vom “Anfang” zum “Ende” oder umgekehrt.

**Satz 4.4** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld und  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Kurve. Ferner sei  $\psi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar.

- 1) Gilt  $\psi(\tilde{a}) = a$  und  $\psi(\tilde{b}) = b$ , so folgt  $\int_{\alpha \circ \psi} f \cdot ds = \int_{\alpha} f \cdot ds$ .
- 2) Gilt  $\psi(\tilde{a}) = b$  und  $\psi(\tilde{b}) = a$ , so folgt  $\int_{\alpha \circ \psi} f \cdot ds = - \int_{\alpha} f \cdot ds$ .

**Beweis:** Mit  $\alpha$  ist auch  $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \psi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Kurve. Im Fall  $\psi(\tilde{a}) = a$  und  $\psi(\tilde{b}) = b$  erhalten wir dann, dass

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\alpha}} f \cdot ds &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle f(\tilde{\alpha}(t)), \tilde{\alpha}'(t) \rangle dt \\
 &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle f(\alpha(\psi(t))), \alpha'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \rangle dt \\
 &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle f(\alpha(\psi(t))), \alpha'(\psi(t)) \rangle \cdot \psi'(t) dt \\
 &= \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_{\alpha} f \cdot ds,
 \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile die Substitutionsregel aus Analysis I verwendet haben. Der Fall  $\psi(\tilde{a}) = b$  und  $\psi(\tilde{b}) = a$  verläuft komplett analog, wobei in der vierten Zeile im Integralzeichen abweichend  $b$  unten und  $a$  oben steht. Das Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt dann eine Änderung des Vorzeichens.  $\square$

Satz 4.4 hat eine wunderbare physikalische Interpretation. Denken wir wieder daran, dass wir mit dem Kurvenintegral die *Arbeit* berechnen, so ist das Vorzeichen der Arbeit davon abhängig, in welcher Richtung wir den Weg durchlaufen. Denken Sie dabei wieder an ein Schiff, das sich entlang einer Kurve im Wind bewegt. Fahren wir z.B. von  $A$  nach  $B$  “mit dem Wind”, so gewinnen wir Energie und können uns mit Hilfe von Segeln antreiben lassen. Fahren wir dagegen von  $B$  nach  $A$  gegen den Wind, so müssen wir Energie aufwenden um vorwärts zu kommen - das Vorzeichen hat sich geändert! Beachten Sie außerdem, dass Satz 4.4 keine Aussage für Funktionen  $\psi$  liefert, die die Endpunkte des Intervalls  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$  nicht wieder (injektiv) auf die Endpunkte des Intervalls  $[a, b]$  abbilden.

Einen wichtigen Spezialfall stellen *Gradientenfelder* dar, d.h. Vektorfelder, die dem Gradienten eines Skalarfelds entsprechen. In diesem Fall ist das Integral unabhängig vom eigentlichen Verlauf des Weges und hängt stattdessen nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Dies ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I.

**Satz 4.5 (Wegunabhängigkeit von Gradientenfeldern)** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, sowie  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig differenzierbares Skalarfeld und  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt*

$$\int_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

**Beweis:** Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\left\langle \operatorname{grad} F(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\alpha(t)) \alpha'_i(t) = (F \circ \alpha)'(t),$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel verwendet haben. Unter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds &= \int_a^b (F \circ \alpha)'(t) dt = (F \circ \alpha)(t) \Big|_a^b \\ &= F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)). \end{aligned}$$

Ist  $\alpha$  dagegen nur stückweise stetig differenzierbar, so existiert per Definition eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$ , so dass  $\alpha_j = \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar ist. Damit erhalten wir unter Verwendung des bereits bewiesenen Teils, dass

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds &= \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j} \operatorname{grad} F \cdot ds \\ &= \sum_{j=1}^m \left( F(\alpha(t_j)) - F(\alpha(t_{j-1})) \right) = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)). \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.6** Ein wichtiger Spezialfall bei Kurvenintegralen sind Integrale über *geschlossene Kurven*, d.h. Kurven  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  mit der Eigenschaft  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , also Kurven bei denen Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. In diesem Fall schreibt man für das Kurvenintegral auch gerne  $\oint_{\alpha} f \cdot ds$  statt  $\int_{\alpha} f \cdot ds$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 4.5 gilt dann also

$$\oint_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds = 0.$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, gilt die Wegunabhängigkeit des Integrals nicht für beliebige Vektorfelder.

**Beispiel 4.7** Betrachten wir die offene Menge  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , so ist

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Betrachten wir weiter für  $r > 0$  und  $\varphi \geq 0$  die Kurve  $\alpha : [0, \varphi] \rightarrow U$  mit

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha'(t) = \begin{bmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in [0, \varphi]$ , so gilt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds = \int_0^{\varphi} \frac{-r \sin t}{r^2} (-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2} (r \cos t) dt = \int_0^{\varphi} 1 dt = \varphi.$$

Ist speziell  $\varphi = 2\pi$ , so ist die Kurve geschlossen (es handelt sich dabei um den Kreisrand vom Radius  $r$ ), aber es gilt  $\oint_{\alpha} f \cdot ds = 2\pi \neq 0$ .

Auf Grund der Ähnlichkeit von Satz 4.5 zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I bietet sich eine Erweiterung des Begriff der Stammfunktion auf Vektorfelder an.

**Definition 4.8** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Ein Skalarfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$ , falls  $F$  stetig differenzierbar ist und  $f = \text{grad } F$  gilt.

**Bemerkung 4.9** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld und  $F, \tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Skalarfelder.

- 1) Offenbar ist  $F$  genau dann eine Stammfunktion von  $f$ , wenn für  $i = 1, \dots, n$  gilt, dass

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

- 2) Ist  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann ist auch  $F + c$  eine Stammfunktion von  $f$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante ist.
- 3) Ist  $U$  zusammenhängend und sind  $F, \tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  Stammfunktionen von  $f$ , dann folgt mit dem Konstanzkriterium aus Analysis II (siehe dort Korollar 2.33) aus

$$\text{grad}(F - \tilde{F}) = \text{grad } F - \text{grad } \tilde{F} = f - f = 0$$

die Existenz einer Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\tilde{F} = F + c$ .

**Beispiel 4.10** Sei  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Wir betrachten die Funktionen

$$f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|^3} \quad \text{und} \quad F : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{\|x\|}.$$

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , denn wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{-1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|^3} = f_i(x)$$

für  $i = 1, 2, 3$  und alle  $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ .

**Bemerkung 4.11** Beispiel 4.10 hat einen physikalischen Hintergrund, denn durch die speziellen Funktionen

$$E : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\|x\|^3} \quad \text{und} \quad u : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|x\|}$$

werden gerade das *elektrische Feld* bzw. das *elektrische Potential* einer Punktladung im Ursprung beschrieben, wobei  $Q$  für die elektrische Ladung in Coulomb steht und  $\epsilon_0$  eine Konstante (die sogenannte *elektrische Feldstärke* oder *Dielektrizitätskonstante*) ist. Wie wir eben festgestellt haben, gilt hier  $E = -\text{grad } u$ , d.h.  $u$  ist bis auf das Vorzeichen identisch mit der Stammfunktion von  $E$ . Da sich ähnliche Zusammenhänge gehäuft in der Physik finden lassen (also Situationen, in denen ein *Potential* und ein zugehöriges *Feld*, dass man als negatives Gradientenfeld des Potentials erhält, gegeben sind), bezeichnet man eine Funktion  $u$  mit  $f = -\text{grad } u$  als ein *Potential* von  $f$ . Eine Funktion  $F$  ist also genau dann eine Stammfunktion von  $f$ , wenn  $-F$  ein Potential von  $f$  ist.

Wie wir sehen ist es aus dem Blickwinkel physikalischer Anwendungen interessant und lohnend zu untersuchen, ob eine gegebenes Vektorfeld eine Stammfunktion besitzt.

**Bemerkung 4.12** 1) Wir betrachten den Fall  $n = 1$ . Ist dann  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, so ist ein stetiges Vektorfeld auf  $I$  eine gewöhnliche stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , welche nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I eine Stammfunktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt, nämlich

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt,$$

wobei  $a \in I$  beliebig gewählt werden kann. Im Fall  $n = 1$  besitzt also jedes stetige Vektorfeld eine Stammfunktion.

2) Ist  $n \geq 2$ , so muss dagegen nicht jedes stetige Vektorfeld eine Stammfunktion besitzen. Ein Gegenbeispiel erhalten wir für  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und das Vektorfeld

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.7. Gäbe es nämlich eine stetig differenzierbare Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } F = f$ , so wäre das Kurvenintegral von  $f$  wegunabhängig und insbesondere über eine geschlossene Kurve nach Bemerkung 4.6 gleich 0, was allerdings nicht der Fall ist, wie wir in Beispiel 4.7 gesehen haben.

## 4.2 Existenz von Stammfunktionen

Im Folgenden wollen wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Stammfunktion eines Vektorfeldes herleiten. Unser erstes Ziel ist zu zeigen, dass die Wegunabhängigkeit des Integrals bzw. das daraus gefolgerte Verschwinden des Integrals über geschlossenen Kurven unter milden Voraussetzungen an den Definitionsbereich  $U$  äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion ist. Dazu benötigen wir das folgende Lemma und erinnern dabei an Definition 1.87 aus Analysis II, dass ein Gebiet eine offene und zusammenhängende Teilmenge ist.

**Lemma 4.13** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Dann gibt es zu zwei Punkten  $p, q \in U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$ .*

**Beweis:** Da  $U$  nach Satz 1.88 aus Analysis II wegzusammenhängend ist, gibt es zu  $p, q \in U$  einen Weg von  $p$  nach  $q$ , d.h. eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = q$ . Da  $\gamma$  stetig ist, ist  $\gamma([0, 1]) \subseteq U$  kompakt. Da außerdem  $\mathbb{R}^n \setminus U$  abgeschlossen ist, gilt nach Satz 1.75 aus Analysis II, dass

$$d(\gamma([0, 1]), \mathbb{R}^n \setminus U) = \inf \left\{ \|w - x\| \mid w \in \gamma([0, 1]), x \in \mathbb{R}^n \setminus U \right\} > 0.$$

Daraus folgt die Existenz eines  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $t \in [0, 1]$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$  gilt, dass  $\|\gamma(t) - x\| \geq \varepsilon$ . Da ferner  $\gamma$  auf der kompakten Menge  $[0, 1]$  gleichmäßig stetig ist, gibt es eine (hinreichend feine) Zerlegung  $Z : 0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ , so dass

$$\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| < \varepsilon$$

für  $j = 1, \dots, m$  gilt. Definiere nun  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  als den *Polygonzug* mit den Eckpunkten  $\gamma(t_j)$ ,  $j = 0, \dots, m$ , d.h. für  $j = 1, \dots, m$  und  $\lambda \in [0, 1]$  setze

$$\alpha(\lambda t_j + (1 - \lambda)t_{j-1}) := \lambda \gamma(t_j) + (1 - \lambda) \gamma(t_{j-1}).$$

Dann ist  $\alpha$  stückweise stetig differenzierbar und es gilt  $\alpha([0, 1]) \subseteq U$ , da für alle  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, m$ , gilt:

$$\|\alpha(t) - \gamma(t_j)\| = \|(\lambda - 1) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\| \leq \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| < \varepsilon,$$

wobei  $\lambda \in [0, 1]$  so gewählt ist, dass  $t = \lambda t_j + (1 - \lambda)t_{j-1}$  gilt. Wegen  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$  erfüllt  $\alpha$  damit alle geforderten Eigenschaften.  $\square$

**Satz 4.14** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1)  $f$  besitzt eine Stammfunktion.
- 2) Für jede stückweise stetig differenzierbare, geschlossene Kurve  $\alpha$  in  $U$  gilt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds = 0.$$

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)”: Dies ist die Aussage von Bemerkung 4.6.

“2)  $\Rightarrow$  1)”: Wähle ein festes  $p_0 \in U$ . Dann gibt es zu jedem  $p \in U$  nach Lemma 4.13 eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\alpha_p : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\alpha_p(0) = p_0$  und  $\alpha_p(1) = p$ . Definiere

$$F(p) := \int_{p_0}^p f \cdot ds := \int_{\alpha_p} f \cdot ds.$$

Dann ist die Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto F(p)$  wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Kurve, denn ist auch  $\beta : [0, 1] \rightarrow U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit  $\beta(0) = p_0$  und  $\beta(1) = p$ , so ist

$$\gamma : [0, 2] \rightarrow U, \quad t \mapsto \begin{cases} \alpha_p(t) & \text{für } t \in [0, 1], \\ \beta(2-t) & \text{für } t \in ]1, 2] \end{cases}$$

eine stückweise stetig differenzierbare, geschlossene Kurve in  $U$ . Mit 2) folgt

$$0 = \int_{\gamma} f \cdot ds = \int_{\alpha_p} f \cdot ds - \int_{\beta} f \cdot ds \quad \text{bzw.} \quad \int_{\alpha_p} f \cdot ds = \int_{\beta} f \cdot ds.$$

Wir zeigen nun, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Dazu zeigen wir, dass  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt, falls  $f$  die Form  $(f_1, \dots, f_n)$  hat. Ist  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  hinreichend klein, so gilt

$$F(p + he_i) = \int_{p_0}^p f \cdot ds + \int_p^{p+he_i} f \cdot ds \quad \text{und daher} \quad F(p + he_i) - F(p) = \int_p^{p+he_i} f \cdot ds.$$

Zur Berechnung dieses Integrals betrachten wir die Kurve  $\beta : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $t \mapsto p + the_i$ . (Für hinreichend kleines  $h$  ist dies eine Kurve, die in  $U$  liegt.) Mit  $\beta'(t) = he_i$  bzw.  $\beta'_j(t) = h\delta_{ij}$  für  $t \in [0, 1]$  folgt

$$\langle f(\beta(t)), \beta'(t) \rangle = \sum_{j=1}^n f_j(\beta(t)) \beta'_j(t) = hf_i(\beta(t)),$$

woraus wir

$$F(p + he_i) - F(p) = \int_p^{p+he_i} f \cdot ds = \int_{\beta} f \cdot ds = h \int_0^1 f_i(p + the_i) dt$$

erhalten. Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f_i$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig stetig ist, gilt  $\|f_i(p + the_i) - f_i(p)\| \leq \varepsilon$  für hinreichend kleines  $h$  und alle  $t \in [0, 1]$ . Hieraus folgt, dass für jede Nullfolge  $(h_k)$  die durch  $(t \mapsto f_i(p + th_k e_i))$  gegebene Funktionenfolge auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen die konstante Funktion  $t \mapsto f_i(p)$  konvergiert. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(p + he_i) - F(p)) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f_i(p + the_i) dt = f_i(p)$$

für alle  $p \in U$ . Da die partiellen Ableitungen von  $F$  auf ganz  $U$  existieren und stetig sind (da alle  $f_i$  stetig sind), folgt die stetige Differenzierbarkeit von  $F$ . Außerdem folgt aus  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$ , dass  $\text{grad } F = f$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 4.15** Eine einfache notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion erhalten wir mithilfe des Satzes von Schwarz (Satz 2.50 aus Analysis II). Ist nämlich  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und  $f = (f_1, \dots, f_n) = \text{grad } F$ , so gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

**Definition 4.16** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $U$ . Wir sagen,  $f$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung, falls für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (4.2)$$

**Bemerkung 4.17** 1) Die Integrabilitätsbedingung besagt einfach nur, dass die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  für alle  $x \in U$  eine symmetrische Matrix ist.

- 2) Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall  $n = 3$ . Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und die Funktion  $f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  differenzierbar, so ist der Differentialoperator  $\text{rot}$  - die *Rotation* (vgl. Definition 2.71 aus Analysis II) - auf  $f$  anwendbar und liefert:

$$\text{rot } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Daher erfüllt  $f$  genau dann die Integrabilitätsbedingung, wenn  $\text{rot } f = 0$  gilt. (Da man die Rotation als Maß für die „*Verwirbelung*“ eines Vektorfeldes interpretieren kann, spricht man im Fall  $\text{rot } f = 0$  auch von einem *wirbelfreien Vektorfeld*.) Dieses ist die in den Natur- und Ingenieurwissenschaften verbreitetere Form der notwendigen Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion (bzw. eines Potentials).

- 3) Die Integrabilitätsbedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion. Dazu betrachten wir auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  wieder das Vektorfeld

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.7. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

d.h.  $f$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Wir wissen allerdings schon aus Teil 2) von Bemerkung 4.12, dass  $f$  keine Stammfunktion hat.

Der Grund für die Nichtexistenz einer Stammfunktion für das Vektorfeld aus Beispiel 4.7 ist überraschenderweise weniger in den Eigenschaften des Vektorfeldes selbst, als eher in der Beschaffenheit seines Definitionsbereichs zu suchen.



**Definition 4.18** Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1)  $X$  heißt sternförmig bzgl.  $p \in X$ , falls für jedes  $x \in X$  auch die Verbindungsstrecke  $\overline{px}$  in  $X$  liegt, d.h. falls für alle  $x \in X$  gilt:

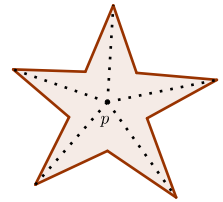
$$\overline{px} = \{(1-t)p + tx \mid t \in [0, 1]\} \subseteq X$$

- 2)  $X$  heißt sternförmig, falls es ein  $p \in X$  gibt, so dass  $X$  sternförmig bzgl.  $p$  ist.

**Bemerkung 4.19** Sternförmigkeit ist eine Abschwächung der Konvexität und eine Verschärfung des Wegzusammenhangs, denn offenbar gilt für jede Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$X \text{ konvex} \Rightarrow X \text{ sternförmig} \Rightarrow X \text{ wegzusammenhängend}$$

Der Terminologie erklärt sich dadurch, dass subjektiv von uns als “sternförmig” empfundene Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  die gewünschte Eigenschaft haben, wie sie leicht durch Betrachten der nebenstehenden Skizze feststellen können.



**Satz 4.20** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig sowie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Erfüllt  $f$  die Integrabilitätsbedingung, so hat  $f$  eine Stammfunktion.

**Beweis:** Sei  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Nach einer eventuellen Translation des Koordinatensystems können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $U$  sternförmig bzgl. des Nullpunkts  $p = 0$  ist. Wir definieren  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(tx) x_i dt.$$

(Wegen der Sternförmigkeit von  $U$  bzgl.  $p = 0$  gilt  $tx \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ , so dass  $F$  wohldefiniert ist.) Seien nun  $x \in U$  und  $t \in [0, 1]$  beliebig. Da  $f$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f_i(tx) x_i) = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) tx_i = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) tx_i & \text{für } i \neq j, \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(tx) tx_j + f_j(tx) & \text{für } i = j, \end{cases}$$

woraus wir mit Hilfe von Satz 3.33 (überlegen Sie sich im Detail, warum man ihn anwenden darf) erhalten, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \left( f_j(tx) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) tx_i \right) dt = \int_0^1 \left( f_j(tx) + t Df_j(tx)(x) \right) dt.$$

Definieren wir die Funktion  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $t \mapsto t \cdot f_j(tx)$ , dann folgt wegen

$$h'(t) = f_j(tx) + t \cdot Df_j(tx)(x)$$

für alle  $t \in [0, 1]$ , dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 h'(t) dt = h(1) - h(0) = f_j(x).$$

Da  $x \in U$  beliebig war, ist dies aber gleichbedeutend mit  $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$  für  $j = 1, \dots, n$ , woraus  $\text{grad } F = f$  folgt. Somit ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , denn wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist  $F$  stetig differenzierbar.  $\square$

**Bemerkung 4.21** Satz 4.20 liefert insbesondere eine konstruktive Methode zur Bestimmung einer Stammfunktion eines Vektorfeldes  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist die Existenz der Stammfunktion schon bekannt, so reicht es sogar, nur die Stetigkeit des Vektorfeldes  $f$  zu fordern. In diesem Fall müssen wir nur noch eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmen, so dass  $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$  für  $j = 1, \dots, n$  gilt. Ist  $U$  konvex und  $\omega$  stetig, so funktioniert das mit *schrittweiser Integration*. (Die Konvexität benötigen wir, um zu gewährleisten, dass achsenparallele Verbindungsstrecken zwischen Punkten auch ganz in  $U$  enthalten sind.) Wir illustrieren dieses Verfahren am Beispiel der Funktion

$$f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 + \cos y \cdot e^z \\ \sin y \cdot e^z - 2z \end{bmatrix}.$$

Sie überzeugen sich leicht davon, dass  $f$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Da der Definitionsbereich  $\mathbb{R}^3$  konvex (also auch sternförmig) ist, existiert eine Stammfunktion des Vektorfeldes  $f$ . Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat die Funktion  $x \mapsto f_1(x, y, z)$  für jedes  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$  eine Stammfunktion

$$F_1 : x \mapsto \int f_1(x, y, z) dx = x^3y + c_1,$$

die bis auf eine (natürlich von  $y$  und  $z$  abhängige) Konstante  $c_1$  eindeutig bestimmt ist. Folglich hat eine Stammfunktion  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  die Form  $(x, y, z) \mapsto x^3y + c_1(y, z)$ , wobei  $c_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine mit  $F$  ebenfalls stetig differenzierbare Funktion ist, die wir durch partielles Ableiten nach  $y$  und erneute Integration bestimmen können. Wegen

$$x^3 + \cos y \cdot e^z = f_2(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x^3 + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y, z)$$

erhalten wir nach Auflösen dieser Gleichung, dass  $\frac{\partial c_1}{\partial y}(y, z) = \cos y \cdot e^z$  gilt<sup>1</sup>. Anschließende Integration beider Seiten für jedes feste  $z \in \mathbb{R}$  liefert

$$c_1 : (y, z) \mapsto \int \cos y \cdot e^z dy = \sin y \cdot e^z + c_2,$$

<sup>1</sup>Machen Sie sich klar, dass die Integrabilitätsbedingung an dieser Stelle dafür sorgt, dass sich die Terme, die die Variable  $x$  enthalten, genau aufheben und so eine Funktion herauskommt, die nur von  $y$  und  $z$  abhängt. Damit erklärt sich schließlich auch der Name *Integrabilitätsbedingung*, denn nur wenn diese erfüllt ist, lässt sich das Verfahren sinnvoll zu Ende führen.

wobei die Konstante  $c_2$  von  $z$  abhängt. Folglich hat  $F$  die Form

$$(x, y, z) \mapsto x^3 y + \sin y \cdot e^z + c_2(z),$$

wobei  $c_2$  stetig differenzierbar ist. Wir leiten nun  $F$  partiell nach  $z$  ab und erhalten

$$\sin y \cdot e^z - 2z = f_3(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \sin y \cdot e^z + \frac{\partial c_2}{\partial z}(z)$$

bzw.  $\frac{\partial c_2}{\partial z}(z) = -2z$ . Ein letzter Integrationsschritt liefert uns schließlich

$$F(x, y, z) = x^3 y + \sin y \cdot e^z - z^2 + c,$$

wobei die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  nun wirklich eine Konstante ist.  $F$  ist dann die gesuchte Stammfunktion von  $\omega$ .

**Beispiel 4.22** Kommen wir ein letztes Mal auf unser auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definiertes Vektorfeld

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.7 zurück. Die Menge  $U$  ist nicht sternförmig (abgesehen davon, dass dies mit Kontraposition eine Folgerung aus Satz 4.20 ist: Ist Ihnen dies auch anschaulich klar?), wohl aber die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\},$$

die sogar konvex ist. Also hat  $f = (f_1, f_2) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Stammfunktion  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $V$ , da  $f$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt (vgl. Teil 2) von Bemerkung 4.17). Diese Stammfunktion können wir wegen der Konvexität von  $V$  wieder durch schrittweise Integration bestimmen können. Mit der Substitution  $t = \frac{y}{x}$  und  $dt = -\frac{y}{x^2} dx$  erhalten wir

$$\int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dx = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan t + c = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

wobei die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  wegen

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = f_2(x, y)$$

für alle  $(x, y) \in V$  schon gar nicht mehr von  $y$  abhängt. (Klar?) Eine Stammfunktion von  $\omega$  auf  $V$  ist also durch

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

gegeben. Andererseits ist auch die Menge  $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$  sternförmig, z.B. bzgl.  $p = (1, 0)$ , und daher hat  $\omega$  auch eine Stammfunktion auf  $W$ . Tatsächlich lässt sich die oben ermittelte Stammfunktion stetig differenzierbar auf  $W$  fortsetzen. Wir erhalten:

$$F : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } x \leq 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } x \leq 0, y < 0. \end{cases}$$

wobei der Nachweis der stetigen Differenzierbarkeit von  $F$  Ihnen überlassen bleibt.

**Bemerkung 4.23** Die noch relativ starke Eigenschaft der Sternförmigkeit des Definitionsbereiches  $U$  in Satz 4.20 lässt sich weiter abschwächen. Es reicht bereits zu fordern, dass  $U$  *einfach zusammenhängend* ist, d.h. dass  $U$  wegzusammenhängend ist und sich jede stetige geschlossene Kurve  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$  in  $U$  “zu einem Punkt zusammenziehen lässt”. Formal definiert man dies mit Hilfe einer *Homotopie*. Sind  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  zwei stetige Kurven mit  $\alpha(0) = \beta(0) =: p_0$  und  $\alpha(1) = \beta(1) =: p_1$ , so heißen diese *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  (genannt *Homotopie*) gibt, so für alle  $t, u \in [0, 1]$  gilt:

$$1) \quad A(0, t) = \alpha(t) \text{ und } A(1, t) = \beta(t)$$

$$2) \quad A(u, 0) = p_0 \text{ und } A(u, 1) = p_1$$

Für jedes feste  $u \in [0, 1]$  ist also  $\alpha_u : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto A(u, t)$  eine stetige Kurve in  $U$  mit Anfangspunkt  $p_0$  und Endpunkt  $p_1$ .

Eine geschlossene stetige Kurve  $\alpha$  in  $U$  heißt *zusammenziehbar*, falls  $\alpha$  *nullhomotop*, d.h. homotop zur Kurve  $[0, 1] \rightarrow U, t \mapsto p_0$  ist, wenn  $p_0$  wieder den Anfangs- und Endpunkt von  $\alpha$  bezeichnet. Eine wegzusammenhängende Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt dann *einfach zusammenhängend*, falls jede geschlossene stetige Kurve in  $U$  zusammenziehbar ist. (Grob gesprochen bedeutet dies, dass  $U$  “keine Löcher” hat.)

An dieser Stelle der Vorlesung wären wir mit ein paar wenigen weiteren Vorbereitungen dazu in der Lage, die klassische Version des *Satzes von Stokes* zu formulieren. Dieser bringt das Flussintegral eines Vektorfeldes im  $\mathbb{R}^3$  in der folgende Art und Weise mit einem vektoriellen Kurvenintegral in Zusammenhang:

$$\int_A \langle \operatorname{rot}(f), \nu \rangle dS = \int_{\partial A} f \cdot ds.$$

Ohne zu sehr im Detail auf die Voraussetzungen eingehen zu wollen, halten wir kurz fest, dass  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  hier ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  eine kompakte *Fläche*, d.h. hier eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Für diese lässt sich unter weiteren Voraussetzungen wieder ein Normaleneinheitsfeld  $\nu$  definieren - nur macht bei einer beliebigen Fläche im Raum im Gegensatz zur Oberfläche eines Körpers der Begriff *äußeres Normaleneinheitsfeld* keinen Sinn mehr. Daher haben wir an dieser Stelle zwei Möglichkeiten für die Wahl von  $\nu$ . (Stellen Sie sich als Beispiel eine Fläche in der  $x, y$ -Ebene vor. Ein Normalenvektor kann dann entweder nach oben oder nach unten zeigen und es gibt per se erst einmal keinen Grund, eine Richtung der anderen vorzuziehen.) Weiter ist  $\partial A$  die *Randkurve* unserer Fläche  $A$ . (Stellen Sie sich dazu als Beispiel die “*nördliche Hemisphäre*” der Einheitssphäre als Beispiel vor. Die Randkurve ist in diesem Fall durch den “*Äquator*” gegeben.) Wichtig ist dann noch, dass die Kurve im *mathematisch positiven* Umlaufsinn durchlaufen wird. Dazu muss eine “*Rechte-Hand-Regel*” erfüllt sein: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung des Normaleneinheitsfeldes, so geben die übrigen Finger der rechten Hand die Umlaufrichtung der Kurve vor.

Der Grund dafür, warum wir den klassischen Satz von Stokes an dieser Stelle nicht ausführlich formulieren und beweisen ist der, dass wir ihn als Spezialfall des sehr viel allgemeineren *Satzes von Stokes* erhalten werden, der als Spezialfall dann auch den im Kapitel 3 behandelten Satz von Gauß enthält. Um diesen allgemeinen Satz formulieren und beweisen zu können, benötigen wir den sogenannten *Differentialformenkalkül*, den wir in den folgenden Abschnitten entwickeln wollen.

### 4.3 Alternierende Multilinearformen

Unser aktuelles Fernziel ist eine elegante Definition für das Integral eines Vektorfelds  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  über  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Diese Definition soll als Spezialfälle für  $k = 1$  das in Abschnitt 4.1 definierte vektorielle Kurvenintegral und für  $k = n - 1$  das in Abschnitt 3.5 betrachtete “*Flussintegral*”, d.h. das Integral auf der rechten Seite in der Formel (3.13) des Satzes von Gauß enthalten. Grundlage für die geplante Definition sind die sogenannten *Differentialformen*. Bevor wir diese im nächsten Abschnitt einführen können, benötigen wir zuerst etwas Hintergrundwissen über *alternierende Multilinearformen*.

Multilinearformen haben wir bereits in Definition 2.25 in Analysis II kennengelernt: Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , dann ist eine  $k$ -Linearform auf  $V$  eine Abbildung  $\mu : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ , die in jeder Komponente linear ist, d.h. für jedes  $j \in \{1, \dots, k\}$  und jedes  $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k) \in V^{k-1}$  ist die Abbildung

$$V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mu(v_1, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_k)$$

linear. Im Folgenden interessieren uns Multilinearformen, die noch die zusätzliche Eigenschaft der *Alterniertheit* besitzen.

**Definition 4.24** Sei  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

- 1) Eine  $k$ -Linearform  $\mu : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $V$  heißt alternierend, falls für alle  $v_1, \dots, v_k \in V$  gilt:

$$\text{es gibt } i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j \text{ mit } v_i = v_j \quad \Rightarrow \quad \mu(v_1, \dots, v_k) = 0$$

- 2)  $\Lambda^k V^* := \{ \mu : V^k \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ ist eine alternierende } k\text{-Linearform auf } V \}$ .

- 3)  $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$ .

**Beispiel 4.25** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

- 1) Jede Linearform  $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine alternierende 1-Linearform. Speziell gilt also  $\Lambda^1 V^* = L(V, \mathbb{R}) = V^*$ , wobei  $V^*$  das aus der Linearen Algebra bekannte Symbol für den *Dualraum* von  $V$  ist.
- 2) Die Determinante  $\det : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto \det \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$  ist eine alternierende  $n$ -Linearform.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Dass die Determinante hier auftaucht ist kein Zufall! In den Kapiteln 2 und 3 hatten wir bereits festgestellt, dass die Determinante eine wichtige Rolle dabei spielt, die Volumenverzerrung von Abbildungen zu beschreiben. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass eine Abbildung, die einer Matrix das Volumen des durch ihre Spalten aufgespannten Parallelepipeds zuordnet eine alternierende Multilinearform sein muss - vgl. Sie dazu z.B. die Ausführungen in Abschnitt 4.2 in meinem Skript *Lineare Algebra*. Dies ist letztendlich der Grund dafür, warum auch in den folgenden Kapiteln alternierende Multilinearformen der Schlüssel zum Erfolg sind.

Bevor wir uns ein weiteres Beispiel anschauen, halten wir zunächst eine wichtige Eigenschaft von alternierenden Multilinearformen fest. Dazu erinnern wir uns an einen wichtigen Begriff aus der Linearen Algebra. Bezeichnet  $S_k$  die Menge der Permutationen auf der Menge  $\{1, 2, \dots, k\}$ , so gibt es zu jeder Permutation  $\sigma \in S_k$  ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass sich  $\sigma$  als Komposition von  $m$  Transpositionen (d.h. Permutationen, die genau zwei Indizes miteinander vertauschen) darstellen lässt. Die Zahl  $\text{sign}(\sigma) := (-1)^m$  heißt dann das *Signum* oder *Vorzeichen* der Permutation  $\sigma$  und ist (im Gegensatz zu der Zahl  $m$ ) eindeutig bestimmt.

**Satz 4.26** *Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\mu : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  eine alternierende  $k$ -Linearform und  $\sigma \in S_k$  eine Permutation. Dann gilt für alle  $v_1, \dots, v_k \in V$ :*

- 1)  $\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \mu(v_1, \dots, v_k)$ .
- 2)  $\mu(v_1, \dots, v_k) = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_k$  sind linear abhängig.

**Beweis:** Der Beweis ist Ihnen i.w. aus der Linearen Algebra bekannt, wo Sie den Spezialfall der Determinante betrachtet haben. Sind nämlich  $v_1, \dots, v_k \in V$  und  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i < j$ , so folgt aus  $\mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i + v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) = 0$ , dass

$$\mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k) = -\mu(v_1, \dots, v_k),$$

d.h. die Aussage 1) stimmt für Transpositionen, da diese das Signum  $-1$  haben. Für beliebige Permutationen folgt dann die Aussage durch eine Zerlegung in Transpositionen. Der Beweis von 2) bleibt zu Übungszwecken Ihnen überlassen.  $\square$

**Beispiel 4.27** Sei  $\beta : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine alternierende Bilinearform (bzw. 2-Linearform). Wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, lassen sich Bilinearform durch Matrizen darstellen, d.h. es gibt eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $\beta(v, w) = v^\top M w$  für alle  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Da  $\beta$  alternierend ist, gilt

$$v^\top M w = \beta(v, w) = -\beta(w, v) = -w^\top M v = -(w^\top M v)^\top = -v^\top M^\top w,$$

für alle  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , woraus wir  $M^\top = -M$  erhalten, d.h.  $M$  ist eine schief-symmetrische Matrix. Analog lassen sich alternierende Bilinearformen  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nach Wahl einer Basis des endlich-dimensionalen Vektorraums  $V$  durch schief-symmetrische Matrizen darstellen. Ist andererseits  $S \in \mathbb{R}^n$  schief-symmetrisch, so ist die dadurch gegebene Bilinearform  $(v, w) \mapsto v^\top S w$  eine alternierende Bilinearform.

**Bemerkung 4.28** Offensichtlich ist  $\Lambda^k V^*$  ein Vektorraum. Doch was ist seine Dimension? Für den Spezialfall  $k = 1$  lässt sich diese Frage einfach beantworten, denn in diesem Fall gilt  $\Lambda^1 V^* = V^*$  und aus der Linearen Algebra wissen Sie, dass der Dualraum  $V^*$  dieselbe Dimension hat wie  $V$ . Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , so existiert dazu die sogenannte *duale Basis*  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  von  $V^*$ , die die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

**Beispiel 4.29** Wir betrachten die kanonischen Koordinatenprojektionen

$$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i$$

für  $i = 1, \dots, n$ . (Diese hatten wir in Beispiel 1.49 in Analysis II mit  $\pi_i$  bezeichnet, im Differentialformenkalkül benutzt man dafür jedoch aus Gründen, die erst später offensichtlich werden, die Schreibweise  $x_i$ .) Dann ist  $(x_1, \dots, x_n)$  die zur Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  duale Basis des  $(\mathbb{R}^n)^*$ , denn offenbar gilt für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , dass  $x_i(e_j) = \delta_{ij}$ .

Um nun auch Basen für die Vektorräume  $\Lambda^k V^*$  mit  $k > 1$  konstruieren zu können, führen wir eine neue Operation ein.

**Definition 4.30** Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ . Dann heißt die für  $v_1, \dots, v_k \in V$  durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det [\varphi_i(v_j)]_{i,j} = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{bmatrix}$$

gegebene Abbildung  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  das äußere Produkt oder Dachprodukt (auch Wedgeprodukt) von  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ .

**Beispiel 4.31** Sei  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i$  wieder die  $i$ -te Koordinatenprojektion. Dann gilt für alle  $p, q \in \mathbb{R}^n$  und alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , dass

$$(x_i \wedge x_j)(p, q) = \det \begin{bmatrix} x_i(p) & x_i(q) \\ x_j(p) & x_j(q) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} p_i & q_i \\ p_j & q_j \end{bmatrix} = p_i q_j - p_j q_i.$$

Offenbar ist  $x_i \wedge x_j$  eine alternierende Bilinearform, denn im Fall  $i < j$  erhalten wir durch

$$M := \begin{matrix} & & i & & j & \\ & & & & & \\ i & & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ j & & -1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{matrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

die darstellende Matrix von  $x_i \wedge x_j$ , denn für alle  $p, q \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$(x_i \wedge x_j)(p, q) = p^\top M q.$$

(Wie sieht die darstellende Matrix im Fall  $i > j$  aus?) Das Dachprodukt macht in diesem Fall also aus den beiden Linearformen  $x_i$  und  $x_j$  eine Bilinearform.

**Bemerkung 4.32** Die Beobachtung im vorstehenden Beispiel war kein Zufall: Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ . Dann folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Determinante, dass  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  eine alternierende  $k$ -Linearform ist. Somit ist das Dachprodukt eine Abbildung  $(V^*)^k \rightarrow \Lambda^k V^*$ , die ferner die folgenden Eigenschaften hat:

- 1) Das Dachprodukt ist eine  $k$ -lineare Abbildung, d.h. für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\tilde{\varphi} \in V^*$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge (\alpha\varphi_i + \beta\tilde{\varphi}) \wedge \dots \wedge \varphi_k = \alpha(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i \wedge \dots \wedge \varphi_k) + \beta(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi} \wedge \dots \wedge \varphi_k)$$

- 2) Das Dachprodukt ist *alternierend*, d.h. gilt  $\varphi_i = \varphi_j$  für  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i \neq j$ , so folgt  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = 0$ .

- 3) Als Folgerung aus 2) (vergleichen Sie dies mit Satz 4.26) erhalten wir für jede Permutation  $\sigma \in S_k$ , dass

$$\varphi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\sigma(k)} = \text{sign}(\sigma) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k).$$

- 4) Als weitere Folgerung aus 1) und 2) erhalten wir unmittelbar:  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$  sind genau dann linear abhängig, wenn  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = 0$ .

**Satz 4.33** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  eine Basis von  $V^*$ . Dann bilden die alternierenden  $k$ -Linearformen

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (4.3)$$

eine Basis von  $\Lambda^k V^*$ . Insbesondere gilt  $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ .

**Beweis:** Für  $k > n$  gilt  $\Lambda^k V^* = \{0\}$  (klar? Wenn nicht: Übung) und die leere Familie ist eine Basis von  $\{0\}$ , daher ist in diesem Fall nichts zu zeigen. Sei also  $k \leq n$  und sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine zu  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  duale Basis von  $V$ , d.h. es gelte

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Seien nun  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  und  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ . Dann gilt

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.4)$$

denn die Matrix  $[\varphi_{i_j}(e_j)]_{i,j}$  ist im Fall  $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$  gerade die Einheitsmatrix, in allen anderen Fällen hat sie jedoch mindestens eine Nullspalte. (Klar?) Hiermit folgt insbesondere die lineare Unabhängigkeit der  $k$ -Linearformen in (4.3). Um zu zeigen, dass



sie auch ein Erzeugendensystem bilden, betrachte ein beliebiges  $\mu \in \Lambda^k V^*$ . Setzen wir  $c_{i_1, \dots, i_k} := \mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  für  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , so zeigen wir

$$\mu = \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}),$$

indem wir zeigen, dass beide Seiten auf einer Basis des  $V^k$  übereinstimmen. Eine solche erhalten wir durch alle Vektoren  $(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k})$  mit  $\ell_1, \dots, \ell_k \in \{1, \dots, n\}$ . Sei also  $(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \{1, \dots, n\}^k$  beliebig. Falls es  $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$  gibt, so dass  $\ell_i = \ell_j$  gilt, so folgt wegen der Alterniertheit der  $k$ -Linearformen, dass

$$\mu(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}) = 0 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}).$$

Andernfalls gibt es eine Permutation  $\sigma \in S_k$ , so dass  $1 \leq \ell_{\sigma(1)} < \dots < \ell_{\sigma(k)} = n$  gilt. Mit der Abkürzung  $j_i := \ell_{\sigma(i)}$  erhalten wir unter Benutzung von Satz 4.26 und (4.4), dass

$$\begin{aligned} \mu(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}) &= \text{sign}(\sigma^{-1}) \cdot \mu(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \text{sign}(\sigma^{-1}) \cdot c_{j_1, \dots, j_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{sign}(\sigma^{-1}) c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}). \end{aligned}$$

Somit bilden die  $k$ -Linearformen aus (4.3) auch ein Erzeugendensystem und daher eine Basis von  $\Lambda^k V^*$ . Die Aussage über die Dimension ist nun eine einfache kombinatorische Folgerung.  $\square$

**Beispiel 4.34** Sei  $V = \mathbb{R}^n$ . Dann bilden nach Beispiel 4.29 die kanonischen Koordinatenprojektionen  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis des  $(\mathbb{R}^n)^*$  (nämlich die zur Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  duale Basis). Folglich ist durch die  $k$ -Linearformen

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis des Raums  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  gegeben. Für den Spezialfall  $k = n - 1$  führen wir eine neue Notation ein, den “Auslassungsoperator”  $\widehat{\phantom{x}}$ . Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in (\mathbb{R}^n)^*$ , so nutzen wir die Notation

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge \dots \wedge \varphi_m := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{i-1} \wedge \varphi_{i+1} \wedge \dots \wedge \varphi_m,$$

d.h. der “Hut”  $\widehat{\phantom{x}}$  deutet an, dass die betreffende Linearform im Dachprodukt “ausgelassen” wird. Wir erlauben dann auch selbsterklärende Schreibweisen wie z.B.

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi_j} \wedge \dots \wedge \varphi_m.$$

Eine Basis von  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$  ist somit durch die  $(n - 1)$ -Linearformen

$$x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_i} \wedge \dots \wedge x_n$$

gegeben. Insbesondere gilt  $\dim \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^* = n$ .

**Bemerkung 4.35** Es gilt  $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^b)^* = \binom{n}{n} = 1$ . Da die Determinante  $\det$  eine alternierende  $n$ -Linearform ist, ist sie schon eine Basis von  $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$ . Dies passt zu der aus der Linearen Algebra bekannten Tatsache, dass die Determinante durch die Eigenschaften der  $n$ -Linearität, der Alterniertheit und der Normiertheit (d.h.  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ , wenn  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet) bereits eindeutig bestimmt ist. Insbesondere erhalten wir damit für die Determinante die neue Darstellung  $\det = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ .

Das Dachprodukt haben wir so definiert, dass es aus  $k$  Linearformen eine alternierende  $k$ -Linearform macht. Diese Definition können wir nun erweitern und erhalten ein Dachprodukt, dass aus zwei alternierenden  $k$ - bzw.  $\ell$ -Formen eine alternierende  $(k + \ell)$ -Form macht.

**Satz 4.36** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^\ell V^* \rightarrow \Lambda^{k+\ell} V^*, \quad (\mu, \varrho) \mapsto \mu \wedge \varrho,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- 1)  $\wedge$  ist in jeder Komponente linear, d.h. für alle  $\mu, \tilde{\mu} \in \Lambda^k V^*$  und alle  $\varrho, \tilde{\varrho} \in \Lambda^\ell V^*$  und  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $(\mu + \tilde{\mu}) \wedge \varrho = \mu \wedge \varrho + \tilde{\mu} \wedge \varrho$  und  $\mu \wedge (\varrho + \tilde{\varrho}) = \mu \wedge \varrho + \mu \wedge \tilde{\varrho}$   
b)  $(c\mu) \wedge \varrho = c(\mu \wedge \varrho) = \mu \wedge (c\varrho)$

- 2) Für alle  $\psi_1, \dots, \psi_{k+\ell} \in V^*$  gilt:

$$(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) \wedge (\psi_{k+1} \wedge \dots \wedge \psi_{k+\ell}) = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{k+\ell}$$

**Beweis:** *Existenz:* Im Fall  $k = 0$  gilt  $\Lambda^k V^* = \mathbb{R}$ . Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \in \Lambda^\ell V^*$  setzen wir dann einfach  $a \wedge \varrho := a\varrho$ . Analog verfahren wir im Fall  $\ell = 0$ . Sei also im Folgenden  $k, \ell \neq 0$  und sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  eine Basis von  $V^*$ . Dann gibt es zu  $\mu \in \Lambda^k V^*$  und  $\varrho \in \Lambda^\ell V^*$  nach Satz 4.33 Koeffizienten  $a_{i_1, \dots, i_k}, b_{j_1, \dots, j_\ell} \in \mathbb{R}$  für alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  und alle  $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n$ , so dass

$$\mu = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}) \quad \text{und} \quad \varrho = \sum_{j_1 < \dots < j_\ell} b_{j_1, \dots, j_\ell} (\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_\ell}).$$

Dann definieren wir:

$$\mu \wedge \varrho := \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_\ell}} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot b_{j_1, \dots, j_\ell} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_\ell})$$

Dann erfüllt das Produkt die gewünschten Eigenschaften, wobei man 2) unter Benutzung von 1) zeigt, indem man die Linearformen  $\psi_i$  in der Basis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  darstellt. (Der Nachweis ist sehr einfach (im Englischen würde man hier den Begriff “straightforward” benutzen), allerdings notationstechnisch sehr aufwändig, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten.) Der Nachweis der Eindeutigkeit bleibt Ihnen zur Übung überlassen.  $\square$

**Bemerkung 4.37** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und seien  $\mu_1 \in \Lambda^k V^*$ ,  $\mu_2 \in \Lambda^\ell V^*$  und  $\mu_3 \in \Lambda^m V^*$ . Dann gilt:

- 1)  $(\mu_1 \wedge \mu_2) \wedge \mu_3 = \mu_1 \wedge (\mu_2 \wedge \mu_3)$
- 2)  $\mu_1 \wedge \mu_2 = (-1)^{k\ell}(\mu_2 \wedge \mu_1)$
- 3) Ist speziell  $k$  ungerade, so gilt  $\mu_1 \wedge \mu_1 = 0$ .

Dabei zeigt man 1) leicht (aber wieder recht mühsam) mit Hilfe von Satz 4.36, während 2) nach einer Darstellung der  $k$ -Linearformen in Basen wie in (4.3) aus der Tatsache folgt, dass die Permutation  $(1, \dots, k + \ell) \mapsto (k + 1, \dots, k + \ell, 1, \dots, k)$  das Signum  $(-1)^{k\ell}$  hat. Schließlich ist 3) eine unmittelbare Folgerung aus 2). (Man beachte dabei, dass *Alterniertheit* des Dachprodukts in Bemerkung 4.32 nur für Linearformen, also für den Fall  $k = 1$  festgestellt wurde!)

Für spätere Zwecke formulieren und beweisen wir noch den folgenden Satz:

**Satz 4.38** Seien  $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{k,k}$  eine Matrix,  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$  und

$$\psi_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \varphi_j \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

Dann gilt  $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = (\det A) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)$ .

**Beweis:** Falls die  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  linear abhängig sind, ist nichts zu beweisen. Seien also  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  linear unabhängig. Unter Ausnutzung der Linearität in jeder Komponente gilt:

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k &= \left( \sum_{j_1=1}^k a_{1,j_1} \varphi_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j_k=1}^k a_{k,j_k} \varphi_{j_k} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^k (a_{1,j_1} \cdot \dots \cdot a_{k,j_k}) \cdot (\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}) \end{aligned}$$

In der letzten Summe verschwinden alle Summanden, in denen im Dachprodukt ein  $\varphi_{j_i}$  mehrfach vorkommt. In den von Null verschiedenen Summanden dagegen, müssen die Indizes  $j_1, \dots, j_k$  paarweise verschieden sein. Daher lässt sich die Summe wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k &= \sum_{\sigma \in S_k} (a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{k,\sigma(k)}) \cdot (\varphi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{k,\sigma(k)}) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \\ &= (\det A) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Satz 4.26 und im letzten Schritt die Leibniz-Formel für die Determinante angewendet haben.  $\square$

## 4.4 Differentialformen

Wie angekündigt definieren wir in diesem Abschnitt die *Differentialformen*, die sich als die natürlichen Integranden für spezielle Integrale über einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit entpuppen.

**Definition 4.39** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann heißt eine Abbildung  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  eine Differentialform  $k$ -ter Ordnung (auch  $k$ -ten Grades auf  $U$  bzw. kurz eine  $k$ -Form auf  $U$ ). Die Menge aller  $k$ -formen auf  $U$  bezeichnen wir mit  $\Omega_k(U)$ .

Im Spezialfall  $k = 1$  spricht man auch von *Pfaffschen Formen*.

**Beispiel 4.40** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

- 1) Wegen  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}$  ist eine 0-Form auf  $U$  eine Funktion  $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$ .
- 2) Sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann ist die Ableitung<sup>3</sup>  $dF(p)$  von  $F$  in  $p \in U$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ , also ein Element des Dualraums  $(\mathbb{R}^n)^*$  des  $\mathbb{R}^n$ . Wie wir aus der Analysis II wissen hat die Ableitung  $dF$  von  $F$  die Form

$$dF : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*.$$

Somit ist  $dF$  ein Beispiel für eine 1-Form bzw. Pfaffsche Form auf  $U$ .

- 3) Betrachten wir für  $i = 1, \dots, n$  wieder die kanonischen Koordinatenprojektionen  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}, p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i$ , so sind diese als lineare Funktionen differenzierbar. Folglich sind deren Ableitungen  $dx_1, \dots, dx_n$  spezielle Beispiele für 1-Formen bzw. Pfaffsche Formen auf  $U$ . Wir erinnern an dieser Stelle an eine wichtige Eigenschaft von Ableitungen linearer Funktionen: Wie sie aus der Analysis II wissen, gilt

$$dx_i(p) = x_i$$

für alle  $p \in U$ , d.h. die Ableitung der linearen Funktion  $x_i$  an einer beliebigen Stelle  $p$  ist wieder die lineare Abbildung  $x_i$ . Insbesondere ist  $dx_i$  also konstant.

**Definition 4.41** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $\omega, \tilde{\omega} : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  zwei  $k$ -Formen auf  $U$ , sowie  $\varrho : U \rightarrow \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)^*$  eine  $\ell$ -Form und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1) Die  $k$ -Formen  $f\omega$  und  $\omega + \tilde{\omega}$  auf  $U$  sind gegeben durch

$$(f\omega)(p) := f(p)\omega(p) \quad \text{und} \quad (\omega + \tilde{\omega})(p) := \omega(p) + \tilde{\omega}(p) \quad \text{für alle } p \in U.$$

- 2) Die  $(k + \ell)$ -Form  $\omega \wedge \varrho$  auf  $U$  ist gegeben durch

$$(\omega \wedge \varrho)(p) := \omega(p) \wedge \varrho(p) \quad \text{für alle } p \in U.$$

---

<sup>3</sup>Wir passen uns im Folgenden der ausgeklügelten Notation im Differentialformenkalkül an und schreiben in diesem Kapitel die Ableitung  $DF$  einer differenzierbaren Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  konsequent mit einem kleinen  $d$ , also  $dF$  statt  $DF$ .

**Bemerkung 4.42** Die Eigenschaften des Dachprodukts  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \times \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)^*$  aus Bemerkung 4.37 übertragen sich unmittelbar auf das punktweise in Definition 4.41 eingeführte Dachprodukt für Differentialformen. Insbesondere gilt also für jede  $k$ -Form  $\omega$  und jede  $\ell$ -Form  $\varrho$  auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , dass  $\omega \wedge \varrho = (-1)^{k\ell} \varrho \wedge \omega$ . Für den Spezialfall der 1-Formen  $dx_i$  auf  $U$  (also den Ableitungen der Koordinatenprojektionen), erhalten wir für alle  $i, j = 1, \dots, n$  die wichtigen Formeln

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad \text{und} \quad dx_i \wedge dx_i = 0 \quad (4.5)$$

bzw. im letzten Fall allgemeiner

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0 \quad (4.6)$$

falls es  $j, \ell \in \{1, \dots, k\}$  gibt mit  $j \neq \ell$  und  $i_j = i_\ell$ .

Beispiele für 1-Formen haben wir in den Ableitungen differenzierbarer Funktionen gefunden. Aber wie genau sehen jetzt  $k$ -Formen im Fall  $k > 1$  aus? Um diese geeignet darstellen zu können erinnern wir uns daran, dass einerseits durch die Dachprodukte

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

der kanonischen Koordinatenprojektionen eine Basis des  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  gegeben ist. Ist andererseits  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so gilt wegen der Linearität für alle  $p \in U$ , dass  $dx_i(p) = x_i$ , und somit

$$dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

für alle  $p \in U$ . Diese simple Beobachtung erweist sich als wichtiger Schlüssel im Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 4.43** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann gibt es zu jeder  $k$ -Form  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  auf  $U$  eindeutig bestimmte Funktionen  $f_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , so dass

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (4.7)$$

wobei  $dx_i$  die Ableitung der  $i$ -ten Koordinatenprojektion  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. genauer die Einschränkung von  $dx_i$  auf  $U$  bezeichnet. (Die Form (4.7) heißt die Normaldarstellung der  $k$ -Form  $\omega$ .)

**Beweis:** Wie wir soeben festgestellt haben, bilden für beliebiges  $p \in U$  die  $k$ -Linearformen

$$dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ . Daher gibt es zu jedem  $p \in U$  wegen  $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  eindeutig bestimmte (von  $p$  abhängige) Koeffizienten  $\alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(p)} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , so dass

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(p)} dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p).$$

Definiere nun  $f_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $p \mapsto f_{i_1, \dots, i_k}(p) := \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(p)}$ . Dann gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad \square$$

**Bemerkung 4.44** Wir betrachten Satz 4.43 für die wichtigen Spezialfälle  $k \in \{1, n-1, n\}$  einmal etwas genauer: Dazu seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  eine  $k$ -Form auf  $U$ .

- 1) Im Fall  $k = 1$  gilt  $\dim \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = n$  und es gibt eindeutig bestimmte Funktionen  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so dass

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i.$$

Formal erinnert diese Darstellung an ein Skalarprodukt. Daher betrachtet man das Vektorfeld  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert  $ds := (dx_1, \dots, dx_n)$  und benutzt die abkürzende Schreibweise

$$f \cdot ds := \sum_{i=1}^n f_i dx_i = \omega,$$

wobei der etwas dicker geschriebene Punkt an ein Skalarprodukt erinnern soll.

- 2) Für den Fall  $k = n-1$  erinnern wir an den in Beispiel 4.34 eingeführten *Auslassungsoperator*, den wir ganz analog auf der Ebene der Differentialformen verwenden werden. Nach Satz 4.33 gilt  $\dim \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n}{n-1} = n$  und eine Basis dieses Raums ist für beliebiges  $p \in U$  durch die  $(n-1)$ -Linearformen

$$(-1)^{i-1} (dx_1(p) \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i(p)} \wedge \dots \wedge dx_n(p)), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

gegeben. Das Vorzeichen  $(-1)^{i-1}$  hätten wir dabei eigentlich gar nicht benötigt (vgl. Sie dies mit der in Beispiel 4.34 genannten Basis des Raums  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$ ), es wird sich aber im Folgenden als nützlich für eine einfachere Notation erweisen. Setzen wir nun  $dS_i := (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ , so hat unser  $\omega$  die Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dS_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld ist. Da auch diese Darstellung formal wieder an ein Skalarprodukt erinnert, definieren wir die beiden Abkürzungen  $dS := (dS_1, \dots, dS_n)$  und

$$f \cdot dS := \sum_{i=1}^n f_i dS_i = \omega.$$

Die hier und in 1) gewählten Notationen  $ds$  und  $dS$  werden sich vollständig erklären, wenn wir zu den Integralen von Differentialformen kommen. Um eine naheliegende Frage dabei vorab zu klären: Ja, die Bezeichnungen haben tatsächlich etwas mit den in Abschnitt 4.1 bzw. Kapitel 3 definierten Bogenelement  $ds$  bzw. Oberflächenelement  $dS$  zu tun.

- 3) Der Fall  $k = n$  ist schließlich sehr einfach. In diesem Fall gibt es eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n =: f dV,$$

wobei wir hier die Abkürzung  $dV := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  verwendet haben, die wir *Volumenelement* nennen werden.

**Beispiel 4.45** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i,$$

denn ist  $p \in U$  beliebig, so gilt wegen  $dx_i(p)(v) = x_i(v) = v_i$  für alle  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) dx_i(p) \right) (v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) dx_i(p)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) v_i = dF(p)(v).$$

Daraus erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) dx_i(p) = dF(p)$$

für alle  $p \in U$ , womit schließlich die Behauptung folgt.

Mit Hilfe der Normaldarstellung können wir nun eine Operation definieren, die aus einer  $k$ -Form eine  $(k+1)$ -Form macht, die sogenannte *äußere Ableitung*.

**Definition 4.46** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  eine  $k$ -Form auf  $U$  in Normaldarstellung.

- 1)  $\omega$  heißt stetig, falls alle  $f_{i_1, \dots, i_k}$  stetig sind.
- 2)  $\omega$  heißt  $m$ -mal (stetig) differenzierbar, falls alle  $f_{i_1, \dots, i_k}$   $m$ -mal (stetig) differenzierbar sind.
- 3) Ist  $\omega$  differenzierbar und  $k \geq 1$ , dann heißt die  $(k+1)$ -Form

$$d\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

die äußere Ableitung (auch Cartan-Ableitung) bzw. kurz Ableitung von  $\omega$ .

Für eine differenzierbare 0-Form  $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die äußere Ableitung von  $\omega$  als ihr totales Differential  $df : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ .

**Beispiel 4.47** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine differenzierbare  $k$ -Form auf  $U$ .

- 1) Sei  $k = 1$  und  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  die Normaldarstellung von  $\omega$ . Da nach Beispiel 4.45 für  $i = 1, \dots, n$  gilt, dass  $df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ , erhalten wir für die äußere Ableitung von  $\omega$ , dass

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{i < j} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Formeln (4.5) für eine Vereinfachung ausgenutzt haben.

- 2) Sei  $k = n - 1$  und die Normaldarstellung von  $\omega$  sei durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dS_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

gegeben, wobei wir hier die Notation  $dS_i$  aus Teil 2) von Bemerkung 4.44 benutzt haben. Für die äußere Ableitung von  $\omega$  erhalten wir dann (wieder unter Benutzung von Beispiel 4.45) die  $n$ -Form

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} df_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

wobei wir für die Vereinfachung wieder die Formeln (4.5)–(4.6) benutzt haben. An dieser Stelle sehen wir ein, warum es geschickt war, in der in Teil 2) von Bemerkung 4.44 angegebenen Basis von  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$  den Faktor  $(-1)^{i-1}$  einzuführen: In der Normaldarstellung von  $d\omega$  müssen wir uns nun nicht mehr damit herumplagen. Wenn wir dort nun noch  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  ausklammern und uns an die Definition  $\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  erinnern, erhalten wir schließlich

$$d\omega = \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$



**Bemerkung 4.48** Dass im vorangegangenen Beispiel plötzlich einer unserer klassischen Differentialoperatoren aufgetaucht ist, ist kein Zufall, sondern ein Vorzug der ausgeklügelten Notation des Differentialformenkalküls. Dazu betrachten wir den Fall  $n = 3$  einmal genauer. Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $\omega_k$  eine  $k$ -Form auf  $U$  für  $k = 0, 1, 2, 3$ , so gibt es Skalarfelder  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  und Vektorfelder  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass

$$\begin{aligned}\omega_0 &= f, \\ \omega_1 &= v \cdot ds = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3, \\ \omega_2 &= w \cdot dS = w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_3 \wedge dx_1 + w_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ \text{und } \omega_3 &= g dV = g dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

Beachten Sie hier, dass wir das nach (4.8) geforderte negative Vorzeichen von  $-dx_1 \wedge dx_3$  durch Permutation zu  $dx_3 \wedge dx_1$  “wegzaubern” konnten. Sind nun  $\omega_0, \omega_1$  und  $\omega_2$  differenzierbar, so erhalten wir unter Benutzung von Beispiel 4.47 für die äußeren Ableitungen:

$$\begin{aligned}d\omega_0 &= df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \text{grad}(f) \cdot ds \\ d\omega_1 &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \text{rot}(v) \cdot dS \\ d\omega_2 &= \text{div}(w) dV\end{aligned}$$

Damit erhalten wir also alle drei klassischen Differentialoperatoren als äußere Ableitungen von Differentialformen auf offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  zurück. (Frage an Sie: Wir haben uns hier nicht weiter mit  $d\omega_3$  beschäftigt. Warum wohl nicht?)

Wir untersuchen im Folgenden die Eigenschaften unserer äußeren Ableitung.

**Satz 4.49** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega, \tilde{\omega}$  differenzierbare  $k$ -Formen auf  $U$ ,  $\varrho$  eine differenzierbare  $\ell$ -Form auf  $U$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $d(\alpha\omega + \beta\tilde{\omega}) = \alpha d\omega + \beta d\tilde{\omega}$  (Linearität der Ableitung)
- 2)  $d(\omega \wedge \varrho) = (d\omega) \wedge \varrho + (-1)^k \omega \wedge (d\varrho)$  (“Produktregel”)

**Beweis:** 1) ist trivial bzw. folgt sofort aus der Definition der äußeren Ableitung. Für 2) reicht es wegen 1) den Spezialfall

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \text{und} \quad \varrho = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

zu betrachten, wobei  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind und  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  sowie  $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n$  gilt. Wegen  $d(fg) = gdf + fdg$  (dies ist eine Konsequenz der

Produktregel aus Analysis II) folgt

$$\begin{aligned}
 d(\omega \wedge \varrho) &= d\left((f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell})\right) \\
 &= d(fg dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}) \\
 &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\
 &= (gdf) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\
 &\quad + (fdg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\
 &= (df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}) \\
 &\quad + (-1)^k (f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}) \\
 &= (d\omega) \wedge \varrho + (-1)^k \omega \wedge (d\varrho),
 \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen  $(-1)^k$  durch das  $k$ -malige Anwenden einer Transposition entstanden ist, die notwendig war um  $dg$  geeignet zu “verschieben”.  $\square$

Die nächste Eigenschaft der äußeren Ableitung ist von entscheidender Bedeutung.

**Satz 4.50** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine zweimal differenzierbare  $k$ -Form auf  $U$ . Dann gilt  $d(d\omega) = 0$ .

**Beweis:** Wegen der Linearität der äußeren Ableitung reicht es wieder, den Spezialfall

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

mit einer zweimal differenzierbaren Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zu betrachten. Dann erhalten wir  $d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  und mit der Abkürzung  $\varrho := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 d(d\omega) &= d(df \wedge \varrho) = d\left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge \varrho\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge \varrho\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \wedge \varrho = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\right) \wedge dx_j \wedge \varrho \\
 &= \left(\sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j\right) \wedge \varrho,
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt das “Assoziativgesetz” für das Dachprodukt und die Formeln (4.5) ausgenutzt haben. Nach dem Satz von Schwarz (siehe Satz 2.50 in Analysis II) verschwindet der Ausdruck in der Klammer und es folgt  $d(d\omega) = 0$ .  $\square$

**Bemerkung 4.51** Mit Satz 4.49 und Satz 4.50 folgt mit der Notation aus Satz 4.49 (und entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) die Rechenregel  $d(\omega \wedge d\varrho) = d\omega \wedge d\varrho$ .

Es mag auf den ersten Blick eigenartig anmuten, dass die zweite äußere Ableitung immer verschwindet, aber die Eigenschaft “ $d^2 = 0$ ” ist tatsächlich wesentlich für unsere weiteren Betrachtungen.

**Beispiel 4.52** Sind  $\omega_0$  und  $\omega_1$  zweimal differenzierbar und wie in Bemerkung 4.48, so gilt mit der dortigen Bezeichnung

$$0 = d(d\omega_0) = (\operatorname{rot} \operatorname{grad} f) \cdot dS \quad \text{und} \quad 0 = d(d\omega_1) = (\operatorname{div} \operatorname{rot} v) dV.$$

Für ein zweimal differenzierbares Skalarfeld  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und ein zweimal differenzierbares Vektorfeld  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  gilt also  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$  bzw.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$ .

**Definition 4.53** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- 1) Eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  heißt geschlossen, falls  $d\omega = 0$ .
- 2) Eine stetige  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  heißt exakt, falls es eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\varrho$  auf  $U$  gibt, so dass  $\omega = d\varrho$ .

Der Grund für die Bezeichnung “geschlossen” beruht auf tieferen Erkenntnissen der Differentialgeometrie bzw. der Algebraischen Topologie und ist daher im Rahmen dieses Skripts leider nicht begreifbar zu machen. Ebenso wenig ist an dieser Stelle der Name “Exaktheit” erklärbar. Für Algebra-Experten sei allerdings vermerkt, dass der Begriff etwas mit “exakten Sequenzen” zu tun hat.

**Beispiel 4.54** Ist  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  eine stetig differenzierbare 1-Form bzw. Pfaffsche Form auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , dann ist  $\omega$  in Hinblick auf Teil 1) von Beispiel 4.47 genau dann geschlossen, wenn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt, d.h. genau dann, wenn das Vektorfeld  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Ist  $\omega$  andererseits exakt und  $F$  eine 0-Form mit  $dF = \omega$ , so ist  $F$  per Definition einfach nur eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dF = \omega$  bzw.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Also ist  $\omega$  genau dann exakt, wenn  $\operatorname{grad} F = f$  gilt, d.h. wenn  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Wir können somit unsere Erkenntnisse aus Abschnitt 4.2 (siehe dort Bemerkung 4.15 und Satz 4.20) wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} \omega \text{ exakt} &\implies \omega \text{ geschlossen} \\ \omega \text{ geschlossen und } U \text{ sternförmig} &\implies \omega \text{ exakt} \end{aligned}$$

Die letzten beiden Beobachtungen gelten nicht nur für 1-Formen, sondern sogar allgemein für  $k$ -Formen:

**Bemerkung 4.55** Geschlossenheit ist eine notwendige Bedingung für Exaktheit. Ist nämlich  $\omega$  eine differenzierbare exakte  $k$ -Form, so gibt es eine (dann zweimal) differenzierbare  $k-1$  Form  $\varrho$  mit  $\omega = d\varrho$ . Es folgt  $d\omega = d(d\varrho) = 0$ .

**Satz 4.56 (Lemma von Poincaré)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig und  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $U$ , wobei  $k \geq 1$ . Ist  $\omega$  stetig differenzierbar und geschlossen, dann ist  $\omega$  exakt.

Der Beweis benutzt ähnliche Ideen und Vorgehensweisen wie der Beweis von Satz 4.20, auch wenn dies auf den ersten Blick vielleicht nicht offensichtlich ist. Weiter ist der Beweis sehr technisch und liefert keine wesentlichen neuen Erkenntnisse, weshalb wir in der Vorlesung auf seine Darstellung verzichten, ihn der Vollständigkeit halber aber im Kleingedruckten nachliefern wollen.

**Beweis:** Nach einer eventuellen Translation des Koordinatensystems können wir annehmen, dass  $U$  sternförmig bzgl. des Nullpunkts ist. Für  $p \in U$  gilt dann auch  $tp \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Unser Ziel ist, zu jedem  $k \geq 1$  und jeder stetigen  $k$ -Form auf  $U$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $T_k\omega$  zu definieren, so dass

$$\omega = d(T_k\omega) + T_{k+1}(d\omega) \quad (4.9)$$

gilt, wenn  $\omega$  stetig differenzierbar ist. Ist  $\omega$  zusätzlich geschlossen, so gilt wegen  $d\omega = 0$ , dass  $\omega = d(T_k\omega)$  und damit ist  $\omega$  exakt.

*Schritt 1:* Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere die Funktion

$$I_k(f) : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_0^1 t^{k-1} f(tp) \, dt.$$

Falls  $f$  stetig differenzierbar ist, so gilt mit Satz 3.33 (überlegen Sie sich wieder im Detail, warum man ihn anwenden darf):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} I_k(f)(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 t^{k-1} f(tp) \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} (t^{k-1} f(tp)) \, dt = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tp) \, dt = I_{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p) \quad (4.10)$$

Hieraus erhalten wir

$$f = I_k(f) + \sum_{j=1}^n x_j I_{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \quad (4.11)$$

denn für alle  $p = (p_1, \dots, p_n) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in U$  gilt:

$$\begin{aligned} f(p) &= t^k f(tp) \Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t^k f(tp)) \, dt = \int_0^1 k t^{k-1} f(tp) \, dt + \int_0^1 \sum_{j=1}^n t^k \frac{\partial}{\partial x_j} f(tp) x_j(p) \, dt \\ &= k I_k(f)(p) + \sum_{j=1}^n x_j(p) I_{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p), \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(tp)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(tp) \cdot \frac{\partial (tx_j)}{\partial t}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(tp) x_j(p)$$

gilt. Für eine stetige  $k$ -Form  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  setzen wir nun

$$T_k\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} I_k(f_{i_1, \dots, i_k}) x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

*Schritt 2: Nachweis der Eigenschaft (4.9).* Wegen der Linearität aller beteiligten Ausdrücke reicht es, den Spezialfall  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  zu betrachten. Dann gilt einerseits wegen

$$d(I_k(f)x_{i_\ell}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (I_k(f)x_{i_\ell}) dx_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_{i_\ell}}{\partial x_j} dx_j = dx_{i_\ell},$$

dass

$$\begin{aligned}
 d(T_k \omega) &= \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (I_k(f) x_{i_\ell}) dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &= \sum_{\ell=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial x_j} I_k(f) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &\quad + \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} I_k(f) dx_{i_\ell} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &\stackrel{(4.10)}{=} - \sum_{\ell=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^\ell I_{k+1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &\quad + k I_k(f) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 T_{k+1}(d\omega) &= T_{k+1}(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = T_{k+1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n I_{k+1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell I_{k+1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.
 \end{aligned}$$

Addition der beiden so erhaltenen Gleichungen liefert, da sich die Terme mit den Doppelsummen gegenseitig aufheben, dass

$$d(T_k \omega) + T_{k+1}(d\omega) = k I_k(f) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{j=1}^n I_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \omega,$$

wobei wir in der letzten Zeile (4.11) verwendet haben. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 4.57** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und seien  $v, w : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar.

- 1) Gilt  $\operatorname{rot}(v) = 0$ , so bedeutet dies unter der Benutzung der Schreibweise aus Bemerkung 4.48, dass die 1-Form  $\omega = v \cdot ds$  geschlossen ist, da  $d\omega = \operatorname{rot}(v) \cdot dS = 0$  gilt. Ist nun  $U$  sternförmig, so besagt das Lemma von Poincaré (wie zuvor auch Satz 4.20), dass  $\omega$  exakt ist, d.h. es gibt eine 0-Form  $\varrho$  auf  $U$  mit  $d\varrho = \omega$ . Diese hat aber die einfache Form  $\varrho = f$  für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und für diese gilt dann  $v = \operatorname{grad} f$ , d.h.  $f$  ist eine Stammfunktion von  $v$  bzw.  $-f$  ein Potential von  $v$ .
- 2) Gilt  $\operatorname{div}(w) = 0$ , so folgt analog, dass die 2-Form  $\omega = w \cdot dS$  geschlossen ist, denn es gilt  $d\omega = \operatorname{div}(w) dV = 0$ . Ist  $U$  sternförmig, so ist  $\omega$  nach dem Lemma von Poincaré auch exakt und es gibt eine 1-Form  $\varrho = v \cdot ds$  mit einem zweimal stetig differenzierbaren Vektorfeld  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass  $d\varrho = \omega$  gilt. Wegen  $d\varrho = \operatorname{rot} v \cdot dS$  folgt daraus  $w = \operatorname{rot} v$ . Wegen der formalen Analogie zu Teil 1) nennt man ein solches Vektorfeld  $v$  ein *Vektorpotential* von  $w$ . Vektorpotentiale spielen in der Elektrodynamik bei der Behandlung der sogenannten *Maxwell-Gleichungen* eine wichtige Rolle.
- 3) Die Voraussetzungen im Lemma von Poincaré lassen sich abschwächen, siehe dazu Satz 4.64 im nächsten Abschnitt.

## 4.5 Rücktransport von Differentialformen

Die Einführung von Differentialformen hatte das Ziel, geeignete Integranden für die Definition von speziellen Integralen über Untermannigfaltigkeiten bereitzustellen. Für den Fall von  $n$ -Formen ist die Definition eines Integrals sehr einfach und naheliegend.

**Definition 4.58** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  eine  $n$ -Form auf  $U$ , sowie  $A \in \mathcal{B}^n$  mit  $A \subseteq U$ . Dann heißt  $\omega$  integrierbar über  $A$ , falls  $f$  integrierbar über  $A$  ist und

$$\int_A \omega := \int_A f(x) d\lambda^n(x)$$

heißt Integral von  $\omega$  über  $A$ .

**Bemerkung 4.59** Ist mit denselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Definition 4.58  $\omega$  eine stetige  $n$ -Form und  $A$  kompakt, so ist  $\omega$  integrierbar über  $A$ . (Klar?)

Mit Definition 4.58 haben wir den Fall von  $n$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  (nämlich offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ) abgedeckt. Ist nun  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $V$ , so ist es naheliegend das Integral von  $\omega$  über einer Teilmenge  $A \subseteq M$  einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq V$  des  $\mathbb{R}^n$  mit Hilfe von Parameterdarstellungen  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  zu definieren. Um dazu die analoge Konstruktion wie in Definition 4.58 nutzen zu können, ist es notwendig, aus der  $k$ -Form auf  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine passende  $k$ -Form auf  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  zu machen. Dies geschieht mit dem sogenannten *Rücktransport von Differentialformen*, den wir im Folgenden gleich etwas allgemeiner definieren.

**Definition 4.60** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, sei  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \rightarrow V$  stetig differenzierbar und sei

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

eine  $k$ -Form auf  $V$  mit  $k \geq 1$ . Dann heißt die durch

$$\varphi^* \omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} (f_{i_1, \dots, i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

gegebene  $k$ -Form  $\varphi^* \omega$  auf  $U$  der Rücktransport von  $\omega$  bzgl.  $\varphi$ . Den Rücktransport für eine 0-Form  $\omega = f : V \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir als  $\varphi^* \omega := f \circ \varphi$ .

**Beispiel 4.61** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Definition 4.60 berechnen wir die Rücktransporte von  $\omega$  bzgl.  $\varphi$  in den Spezialfällen  $k = 1$  und  $k = m$ . Bezeichnen wir die Variablen (und kanonischen Koordinatenprojektionen) im  $\mathbb{R}^m$  zur besseren Unterscheidung mit  $t_1, \dots, t_m$ , so gilt

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j.$$

1) *Fall*  $k = 1$ : In diesem Fall gilt  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  und wir erhalten per Definition, dass

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) d\varphi_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^m g_j dt_j,$$

wobei die Koeffizientenfunktionen  $g_j$  durch

$$g_j := \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j},$$

für  $j = 1, \dots, m$  gegeben sind. Setzen wir  $f = (f_1, \dots, f_n)$  und  $g = (g_1, \dots, g_m)$ , so erhalten wir

$$g = (g_1, \dots, g_m) = (f_1 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi) \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{bmatrix} = (f \circ \varphi) \cdot D\varphi.$$

2) *Fall*  $k = m$ . Mit Satz 4.38 folgt

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_m} (f_{i_1, \dots, i_m} \circ \varphi) (d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_m}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_m} (f_{i_1, \dots, i_m} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})}{\partial(t_1, \dots, t_m)} (dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m). \end{aligned}$$

Ist noch spezieller  $k = m = n$ , so hat  $\omega$  die Form  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  und die Formel vereinfacht sich zu

$$\varphi^* \omega = ((f \circ \varphi) \det D\varphi) (dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n).$$

**Bemerkung 4.62** Sie zeigen leicht die folgenden Rechenregeln für den Rücktransport: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Definition 4.60 seien zusätzlich  $\tilde{\omega}$  eine  $k$ -Form auf  $V$ ,  $\varrho$  eine  $\ell$ -Form auf  $V$ ,  $T \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $\psi : T \rightarrow U$  stetig differenzierbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $\varphi^*(\alpha\omega + \beta\tilde{\omega}) = \alpha\varphi^*(\omega) + \beta\varphi^*(\tilde{\omega})$
- 2)  $\varphi^*(\omega \wedge \varrho) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\varrho$
- 3)  $\psi^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ \psi)^*\omega$

Der Rücktransport ist also linear und verträglich mit Dachprodukt und Komposition. Der nächste Satz liefert uns auch die Verträglichkeit mit der äußeren Ableitung.

**Satz 4.63** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  zweimal differenzierbar, sowie  $\omega$  eine differenzierbare  $k$ -Form auf  $V$ . Dann gilt

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

**Beweis:** Sei zunächst  $k = 0$ . Dann gilt  $\omega = f$  für eine differenzierbare Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  und wir erhalten unter Ausnutzung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \varphi^*(df) &= \varphi^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right) d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t_j} dt_j = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*f) \end{aligned}$$

Ist dagegen  $k > 0$ , so können wir in Hinblick auf Bemerkung 4.62 o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $\omega$  die Form  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  hat. Da

$$\varphi^*(dx_i) = d(\varphi^*x_i) = d(x_i \circ \varphi) = d\varphi_i$$

wegen des bereits bewiesenen Falls  $k = 0$  gilt, erhalten wir unter Benutzung von Bemerkung 4.51 (hier geht ein, dass  $\varphi$  zweimal differenzierbar ist), dass

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= d((f \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) \\ &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} \\ &= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dx_{i_k}) \\ &= \varphi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \varphi^*(d\omega), \end{aligned}$$

wobei wir den bereits bewiesenen Fall  $k = 0$  auch für die Gleichheit  $d(f \circ \varphi) = \varphi^*(df)$  noch einmal ausgenutzt haben.  $\square$

Als direkte Anwendung erhalten wir die bereits am Ende von Abschnitt 4.5 versprochene Abschwächung der Voraussetzungen im Lemma von Poincaré.

**Satz 4.64** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $C^2$ -diffeomorph zu einer sternförmigen Menge  $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  (d.h. es gibt einen Diffeomorphismus  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ , der zweimal stetig differenzierbar mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist) und sei  $k \geq 1$ . Dann ist jede stetig differenzierbare, geschlossene  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  exakt.

**Beweis:** Sei  $\psi := \varphi^{-1}$ . Dann ist  $\psi^*\omega$  eine geschlossene  $k$ -Form auf der sternförmigen Menge  $\tilde{U}$ , denn nach Satz 4.63 gilt

$$d(\psi^*\omega) = \psi^*(d\omega) = 0.$$

Aus dem Lemma von Poincaré (Satz 4.56) folgt die Existenz einer  $(k-1)$ -Form  $\varrho$  mit  $\psi^*\omega = d\varrho$ . Erneute Anwendung von Satz 4.63 liefert

$$\omega = (\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega) = \varphi^*(d\varrho) = d(\varphi^*\varrho),$$

woraus die Exaktheit von  $\omega$  folgt.  $\square$



**Bemerkung 4.65** Satz 4.64 gilt natürlich auch für den Fall Pfaffscher Formen und verallgemeinert damit Satz 4.20, allerdings ist diese Aussage schwächer, als die in Bemerkung 4.23 getroffene. Jede Menge, die diffeomorph zu einer sternförmigen Menge ist, ist nämlich auch einfach zusammenhängend, die Umkehrung gilt jedoch nicht, da z.B. die Einheitskugel  $S^{n-1}$  für  $n \geq 3$  einfach zusammenhängend, aber nicht diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.

Weiter gilt nach Ausführungen von Stefan Born (siehe Skript Analysis III von Dirk Ferus), dass jede offene sternförmige Menge schon diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist, so dass wir in Satz 4.64 auch einfach  $\tilde{U} = \mathbb{R}^n$  hätten setzen können.

Bei der Integration von Vektorfeldern über Kurven haben wir bereits festgestellt, dass das Integral einer zwar nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt, wohl aber von der Richtung, in der die Kurve durchlaufen wird. Einen ähnlichen “Vorzeicheneffekt” finden wir auch beim Integral von  $n$ -Formen.

**Definition 4.66** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus.

- 1)  $\varphi$  heißt orientierungstreu, falls  $\det D\varphi(x) > 0$  für alle  $x \in U$  gilt;
- 2)  $\varphi$  heißt orientierungsumkehrend, falls  $\det D\varphi(x) < 0$  für alle  $x \in U$  gilt.

**Bemerkung 4.67** Sei  $\varphi$  wie in Definition 4.66 und  $U$  zusammenhängend. Da  $D\varphi(x)$  nach Bemerkung 3.1 aus Analysis II für alle  $x \in U$  invertierbar und  $\det \circ D\varphi$  stetig ist, gilt entweder  $\det D\varphi(x) > 0$  für alle  $x \in U$  oder  $\det D\varphi(x) < 0$  für alle  $x \in U$ . (Ansonsten hätte  $\det \circ D\varphi$  nach dem Zwischenwertsatz (Korollar 1.82 aus Analysis II) Nullstellen.)

**Satz 4.68** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus,  $\omega$  eine stetige  $n$ -Form auf  $V$  und  $A \subseteq U$  kompakt. Dann gilt

- 1)  $\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega$ , falls  $\varphi$  orientierungstreu ist,
- 2)  $\int_{\varphi(A)} \omega = - \int_A \varphi^* \omega$ , falls  $\varphi$  orientierungsumkehrend ist.

**Beweis:**  $\omega$  habe die Form  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Dann gilt nach Teil 2) von Beispiel 4.61, dass

$$\varphi^* \omega = ((f \circ \varphi) \det D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Da nach dem Transformationssatz

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_{\varphi(A)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| d\lambda^n(x)$$

gilt, folgt die Behauptung des Satzes aus der Gleichheit.

$$\int_A \varphi^* \omega = \int_A f(\varphi(x)) \cdot \det D\varphi(x) d\lambda^n(x). \quad \square$$

## 4.6 Integration von Differentialformen

In Hinblick auf Satz 4.68 ist damit zu rechnen, dass sich Integrale von  $k$ -Formen je nach Wahl von Parameterdarstellung der betrachteten Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  zumindest um ein Vorzeichen unterscheiden können. Dieses Vorzeichen können wir mit Hilfe einer sogenannten *Orientierung* auf  $M$  kontrollieren.

**Definition 4.69** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

- 1) Seien  $\varphi_i : T_i \rightarrow \varphi_i(T_i) \subseteq M$ ,  $i = 1, 2$  zwei Parameterdarstellungen von  $M$  und sei  $U := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2)$ . Dann heißen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gleich orientiert, falls  $V = \emptyset$  oder falls der Diffeomorphismus  $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U)$  aus Satz 3.4 orientierungstreu ist.
- 2) Ein Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$  heißt orientiert, falls je zwei Parameterdarstellungen aus  $\mathcal{A}$  gleich orientiert sind.
- 3)  $M$  heißt orientierbar, wenn es einen orientierten Atlas auf  $M$  gibt. In diesem Fall ist eine Orientierung  $\sigma$  auf  $M$  eine Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 : \Longleftrightarrow \varphi_1, \varphi_2 \text{ sind gleich orientiert für alle } \varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2 \quad (4.12)$$

auf der Menge aller orientierten Atlanten von  $M$ .

- 4) Eine orientierte Untermannigfaltigkeit  $(\widetilde{M}, \sigma)$  des  $\mathbb{R}^n$  ist eine orientierbare Untermannigfaltigkeit  $\widetilde{M}$  des  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit einer Orientierung  $\sigma$  auf  $\widetilde{M}$ .
- 5) Eine Parameterdarstellung  $\varphi$  einer orientierten Untermannigfaltigkeit  $(\widetilde{M}, \sigma)$  heißt positiv orientiert bzgl.  $\sigma$ , falls es einen Atlas  $\mathcal{A} \in \sigma$  gibt mit  $\varphi \in \mathcal{A}$ .

Im Folgenden schreiben wir meist nur  $M$  statt  $(M, \sigma)$  für eine orientierte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 4.70** Aus Zeitgründen schenken wir uns an dieser Stelle die genauen Details und Nachweise und machen uns nur anhand der Anschauung klar, dass die Relation in (4.12) tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Wenn es eine Orientierung  $\sigma$  auf einer Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  gibt (d.h. wenn es mindestens einen orientierten Atlas gibt), dann gibt es auch eine zweite “*entgegengesetzte*” Orientierung, die wir mit  $-\sigma$  bezeichnen. Für alle Atlanten  $\mathcal{A}_1 \in \sigma$  und  $\mathcal{A}_2 \in -\sigma$  und alle Parameterdarstellungen  $\varphi_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $\varphi_2 \in \mathcal{A}_2$  gilt dann (wenn sich deren Bilder überschneiden), dass der Diffeomorphismus  $\tau$  aus Satz 3.4 orientierungsumkehrend ist. Wir nennen eine Parameterdarstellung dann *negativ orientiert* bzgl.  $\sigma$ , wenn sie positiv orientiert bzgl.  $-\sigma$  ist.

**Beispiel 4.71** 1) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $\mathcal{A} = \{Id_U\}$  ein orientierter Atlas auf  $U$  und damit ist  $U$  orientierbar. Die dadurch gegebene Orientierung nennen wir die *kanonische Orientierung* auf  $U$ .

- 2) Die Einheitssphäre  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist orientierbar, denn der Atlas  $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  mit

$$\begin{aligned}\varphi_1 : ]-\pi, \pi[ &\rightarrow S^1 \setminus \{(-1, 0)\}, & t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \\ \varphi_2 : ]0, 2\pi[ &\rightarrow S^1 \setminus \{(1, 0)\}, & t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ist ein orientierter Atlas, da für  $\tau : ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \rightarrow ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  mit

$$\tau : t \mapsto \begin{cases} t + 2\pi & \text{für } t \in ]-\pi, 0[ \\ t & \text{für } t \in ]0, \pi[ \end{cases}$$

gilt  $\varphi_2 \circ \tau = \varphi_1$  auf  $]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ , d.h.  $\tau$  ist der entsprechende Diffeomorphismus aus Satz 3.4. Offenbar gilt  $\det D\tau(t) = 1 > 0$  für alle  $t \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ .

- 3) Es gibt Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ , die nicht orientierbar sind, wie z.B. das berühmte *Möbiusband* (Übung).

Nach dieser kleinen Exkursion, bei der Sie hoffentlich nicht die Orientierung verloren haben, sind wir dazu bereit, das Integral für  $k$ -Formen zu definieren. Wir verzichten dabei der Einfachheit halber auf die größtmögliche Allgemeinheit und beschränken uns auf kompakte Mengen und stetige Differentialformen, damit wir uns keine Sorgen über die Integrierbarkeit der zu Grunde liegenden Koeffizientenfunktionen machen zu müssen.

**Definition 4.72** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  eine stetige  $k$ -Form auf  $U$ ,  $M \subseteq U$  eine orientierbare  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit Orientierung  $\sigma$  sowie  $A \subseteq M$  kompakt.

- 1) Wenn es eine bzgl.  $\sigma$  positiv orientierte Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  gibt, so dass  $A \subseteq \varphi(T)$ , so heißt

$$\int_{(A, \sigma)} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega$$

das Integral von  $\omega$  über  $A$  bzgl.  $\sigma$ .

- 2) Hat  $M$  einen endlichen, positiv orientierten Atlas  $(\varphi_j)_{j=1, \dots, m}$  und ist  $(\alpha_j)_{j=1, \dots, m}$  eine dem Atlas untergeordnete lokal integrierbare Zerlegung der Eins, so heißt

$$\int_{(A, \sigma)} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \varphi_j^* \omega$$

mit  $A_j := A \cap \text{supp}(\alpha_j)$  das Integral von  $\omega$  über  $A$  bzgl.  $\sigma$ .

Wenn klar ist, welche Orientierung auf  $M$  gemeint ist, so schreiben wir auch kurz

$$\int_A \omega := \int_{(A, \sigma)} \omega$$

**Bemerkung 4.73** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 4.72 gilt:

- 1) Das Integral von  $\omega$  ist wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Wahl der Parameterdarstellungen oder der Zerlegung der Eins ab. Ist nämlich  $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \subseteq M$  eine weitere bzgl.  $\sigma$  positiv orientierte Parameterdarstellung mit  $A \subseteq \tilde{\varphi}(\tilde{T})$  (dabei können wir o.B.d.A.  $\varphi(T) = \tilde{\varphi}(\tilde{T})$  annehmen), dann ist der Diffeomorphismus  $\tau := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : T \rightarrow \tilde{T}$  orientierungstreu und mit Satz 4.68 folgt

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} (\tilde{\varphi} \circ \tau)^* \omega = \int_{\tau^{-1}(\tilde{\varphi}^{-1}(A))} \tau^* (\tilde{\varphi}^* \omega) = \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} \tilde{\varphi}^* \omega.$$

Die Unabhängigkeit des Integrals von  $\omega$  von der gewählten Zerlegung der Eins folgt analog zum Nachweis in Bemerkung 3.20.

- 2) Für das Integral von  $\omega$  bzgl. der entgegengesetzten Orientierung erhalten wir:

$$\int_{(A, -\sigma)} \omega = - \int_{(A, \sigma)} \omega$$

**Beispiel 4.74** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $M \subseteq U$  eine orientierbare eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  eine stetige 1-Form (also Pfaffsche Form) auf  $U$ , sowie  $\varphi : I \rightarrow \varphi(I) \subseteq M$  eine positiv orientierte Parameterdarstellung von  $M$  (d.h. insbesondere, dass  $\varphi$  eine stetig differenzierbare reguläre Kurve ist). Sei nun  $[a, b] \subseteq I$  und  $A := \varphi(I) \subseteq \varphi(I) \subseteq M$ . Dann ist  $A$  kompakt und mit Teil 1) von Beispiel 4.61 (im Fall  $m = 1$ )

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \varphi'_i dt.$$

Damit erhalten wir

$$\int_A \omega = \int_{[a, b]} \varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt.$$

Dies ist aber gerade das Integral aus Definition 4.2, d.h. unser neu definiertes Integral enthält als Spezialfall im Fall von 1-Formen das bereits im Abschnitt 4.1 definierte vektorielle Kurvenintegral.

Als nächstes wollen wir uns den Spezialfall des Integrals von  $(n-1)$ -Formen anschauen. Dazu benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

**Definition 4.75** Eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt positiv orientiert, falls

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} > 0$$

gilt. Andernfalls heißt die Basis negativ orientiert.

**Beispiel 4.76** Die Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  ist positiv orientiert, da

$$\det \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} = \det I_n = 1$$

gilt. Für Basen  $(v_1, v_2, v_3)$  des  $\mathbb{R}^3$  nennen wir hier noch (ohne Beweis) eine schöne anschauliche Merkregel, die sogenannte *Rechte-Hand-Regel*. Ist die Basis so beschaffen, dass die Richtungen von  $v_1, v_2, v_3$  in dieser Reihenfolge “annähernd” durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger wiedergegeben werden, so ist die Basis positiv orientiert. Wird diese Rolle stattdessen von der linken Hand übernommen, so ist die Basis negativ orientiert.

**Definition 4.77** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche, d.h. eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

- 1) Ein Normaleneinheitsfeld von  $M$  ist eine stetige Abbildung  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass für alle  $a \in M$  gilt:

$$\nu(a) \in N_a(M) \quad \text{und} \quad \|\nu(a)\| = 1.$$

- 2) Ist  $\sigma$  eine Orientierung auf  $M$  und  $\nu$  ein Normaleneinheitsfeld, so heißt  $\nu$  positiv orientiert bzgl.  $\sigma$ , falls es zu jedem  $a \in M$  eine positiv orientierte Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  und ein  $t_0 \in T$  mit  $a = \varphi(t_0)$  gibt, so dass

$$\left( \nu(\varphi(t_0)), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t_0) \right)$$

eine positiv orientierte Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Bemerkung 4.78** Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Definition 4.77 gelten die folgenden Aussagen (Übung):

- 1) Die Definition der positiven Orientiertheit eines Normaleneinheitsfeldes hängt nicht von der Wahl der Parameterdarstellung ab.
- 2) Besitzt  $M$  eine Orientierung  $\sigma$ , so existiert genau ein positiv orientiertes Normaleneinheitsfeld.
- 3) Besitzt  $M$  ein Normaleneinheitsfeld  $\nu$  (dies ist nach Satz 3.28 der Fall, wenn  $M$  der glatte Rand einer kompakten Menge ist), so ist  $M$  orientierbar und es gibt genau eine Orientierung  $\sigma$  auf  $M$ , so dass  $\nu$  positiv orientiert bzgl.  $\sigma$  ist. Diese nennen wir die *durch  $\nu$  induzierte Orientierung auf  $M$* .
- 4) Ist  $M = \partial A$  der glatte Rand einer kompakten Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , so hat  $\partial A$  nach Satz 3.28 ein (stetiges) äußeres Normaleneinheitsfeld. Die dadurch induzierte Orientierung nennen wir die *kanonische Orientierung auf  $\partial A$* .
- 5) Ist  $M$  zusammenhängend,  $\sigma$  eine Orientierung auf  $M$  und  $\nu$  ein Normaleneinheitsfeld auf  $M$ , so ist entweder  $\nu$  oder  $-\nu$  positiv orientiert bzgl.  $\sigma$ .

**Beispiel 4.79** 1) Sei  $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  die Einheitssphäre mit der kanonischen Orientierung als Rand der Einheitskugel. Dann ist die Parameterdarstellung

$$\varphi : T \rightarrow \psi(T) \subseteq M, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

mit  $T = ]0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi[$  positiv orientiert, denn wegen  $\nu(x) = x$  für alle  $x \in S^2$  folgt für alle  $(\theta, \phi) \in T$ , dass

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \nu(\varphi(\theta, \phi)) & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, \phi) & \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sin \theta > 0. \end{aligned}$$

2) Seien  $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend),  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, sowie  $g : T \rightarrow I$  stetig differenzierbar. Dann ist

$$M = \{(x', x_n) \in T \times I \mid x_n = g(x')\}$$

eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und nach Bemerkung 3.32 sind

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \nu_2 = -\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} \operatorname{grad} g \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normaleneinheitsfelder auf  $M$ . Insbesondere ist  $M$  orientierbar. Sei nun  $\sigma$  die durch die (globale) Parameterdarstellung

$$\varphi : T \rightarrow \varphi(T) = M, \quad (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, g(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

gegebene Orientierung auf  $M$ . Dann gilt (Übung)

$$\det \begin{bmatrix} \nu(\varphi(t)) & \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad}(g(t))\|^2},$$

d.h.  $\varphi$  ist positiv orientiert bzgl.  $\nu_1$ , falls  $n$  ungerade ist, und positiv orientiert bzgl.  $\nu_2$ , falls  $n$  gerade ist.

Für die Formulierung des nächsten Satzes erinnern wir an die Notation

$$dS_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n, \quad i = 1, \dots, n$$

aus Teil 2) von Bemerkung 4.44.

**Satz 4.80** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dS_i$  eine stetige  $(n-1)$ -Form auf  $U$  und  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Ferner sei  $M \subseteq U$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  (also eine Hyperfläche) mit Normaleneinheitsfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  und der dadurch induzierten Orientierung  $\sigma$ . Dann gilt für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq M$ , dass

$$\int_K \omega = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $K \cap \text{supp}(f)$  in einer offenen, zusammenhängenden Menge enthalten, in der  $M$  sich als Graph einer Funktion darstellen lässt. (Andernfalls multiplizieren wir  $f$  bzw.  $\omega$  mit einer geeigneten Zerlegung der Eins und betrachten die entsprechenden Summanden einzeln. Überlegen Sie sich, dass in diese Argumentation auch das Lemma von Lebesgue eingeht.) Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass  $U = T \times I$  gilt, wobei  $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  ein Gebiet und  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist, sowie dass eine stetig differenzierbare Funktion  $g : T \rightarrow I$  existiert, so dass

$$M = \{(x', x_n) \in T \times I \mid x_n = g(x')\}$$

gilt (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten). Für das Normaleneinheitsfeld  $\nu$  gilt dann  $\nu = \eta \nu_1$  mit  $\nu_1$  wie in Beispiel 4.79 und  $\eta \in \{+1, -1\}$ . Demnach ist die Parameterdarstellung

$$\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M, \quad (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, g(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

nach Beispiel 4.79 positiv orientiert, falls  $\eta(-1)^{n-1} > 0$  und andernfalls negativ orientiert. Für die Berechnung von  $\int_K \omega$  bemerken wir zunächst, dass für  $i = 1, \dots, n-1$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \varphi^*(f_i dS_i) &= (-1)^{i-1} (f_i \circ \varphi) d\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\varphi_i} \wedge \dots \wedge d\varphi_n \\ &= (-1)^{i-1} (f_i \circ \varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \wedge dg \\ &= (-1)^{i-1} (f_i \circ \varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \wedge \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t_j} dt_j \right) \\ &= (-1)^n (f_i \circ \varphi) \frac{\partial g}{\partial t_i} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaften des Dachprodukts benutzt haben, um festzustellen, dass nur der Summand für  $i = j$  übrig bleibt und wir  $n-i-1$  Vertauschungen benötigen, um  $dt_i$  und die ausgelassene Stelle  $\widehat{dt_i}$  zu tauschen. Für  $i = n$  erhalten wir dagegen

$$\varphi^*(f_n dS_n) = (-1)^{n-1} (f_n \circ \varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi^* \omega = (-1)^{n-1} \left( - \sum_{i=1}^{n-1} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial g}{\partial t_i} + f_n \circ \varphi \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}.$$

Setzen wir

$$F := - \sum_{i=1}^{n-1} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial g}{\partial t_i} + f_n \circ \varphi,$$

so erhalten wir schließlich unter Berücksichtigung der Orientierung von  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\eta$ , dass

$$\int_K \omega = \eta(-1)^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \omega = \eta \int_{\varphi^{-1}(K)} F(t) \, d\lambda^{n-1}(t).$$

Andererseits erhalten wir mithilfe von Bemerkung 3.24 und unter Benutzung von

$$\nu = \eta\nu_1 = \eta \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{bmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned} \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x) &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t)) \right\rangle \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(t)\|^2} \, d\lambda^{n-1}(t) \\ &= \eta \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle f(\varphi(t)), \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g(t) \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \, d\lambda^{n-1}(t) \\ &= \eta \int_{\varphi^{-1}(K)} F(t) \, d\lambda^{n-1}(t), \end{aligned}$$

woraus die Aussage des Satzes folgt.  $\square$

Aus dem Satz folgt also, dass wir das Integral auf der rechten Seite in der Formel im Satz von Gauß (siehe Satz 3.36) durch ein Integral über eine geeignete  $(n-1)$ -Form ersetzen können. Dabei erklärt sich an dieser Stelle insbesondere unsere Wahl für die Notation  $dS = (dS_1, \dots, dS_n)$ , denn so ergibt sich mit der Schreibweise  $\omega = f \cdot dS$  (die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 4.80 verwendend) die schöne und einprägsame Formel

$$\int_K f \cdot dS = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x).$$



## 4.7 Der Integralsatz von Stokes

Ähnlich wie der Satz von Gauß wird auch der Satz von Stokes einen Integrationsbereich mit einem “glatten Rand” voraussetzen, wobei wir hier allerdings von einer kompakten Untermannigfaltigkeit ausgehen wollen. Hierzu müssen wir erst einmal den Begriff des Randes der Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit präzisieren.

**Definition 4.81** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $A \subseteq M$ .

- 1) Ein Punkt  $p \in M$  heißt Randpunkt von  $A$  relativ  $M$ , falls für jede offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $p$  gilt:

$$A \cap U \neq \emptyset \neq (M \setminus A) \cap U$$

- 2)  $\partial A := \partial_M A := \{p \in M \mid p \text{ Randpunkt von } A \text{ relativ } M\}$  heißt Rand von  $A$  relativ  $M$ .

**Bemerkung 4.82** Seien  $A$  und  $M$  wie in Definition 4.81.

- 1) Offenbar gilt  $\partial_M A \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n} A$ , aber im Allgemeinen gilt keine Gleichheit. Insofern ist die Notation  $\partial A$  mit Vorsicht zu genießen und sollte nur verwendet werden, wenn klar ist, ob der Rand relativ einer (echten) Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  gemeint ist oder der klassische Rand  $\partial_{\mathbb{R}^n} A$ .
- 2) Ist die Dimension von  $M$  kleiner als  $n$ , dann gilt sogar  $A \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n} A$ . (Klar?)
- 3) Ist  $A$  kompakt, so gilt  $\partial_M A \subseteq A$ .

**Beispiel 4.83** Sei  $M = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$  und

$$A := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in M \mid x_3 \geq 0\}$$

die “nördliche Hemisphäre”. Dann ist der Rand von  $A$  relativ  $M$  gerade durch den “Äquator”  $\partial_M A = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in M \mid x_3 = 0\}$  gegeben.

**Definition 4.84** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $A \subseteq M$  kompakt. Wir sagen,  $A$  hat einen glatten Rand (relativ  $M$ ), falls es zu jedem  $a \in \partial A$  eine Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von  $M$  mit  $a \in T$  gibt, so dass für den Halbraum  $H_k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}$  gilt:

- 1)  $\varphi(H_k \cap T) = A \cap \varphi(T)$
- 2)  $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial A \cap \varphi(T)$ .

Eine Parameterdarstellung mit den Eigenschaften 1) und 2) heißt randadaptiert bzgl.  $A$ .

**Bemerkung 4.85** 1) Setzen wir  $M = \mathbb{R}^n$ , so stimmt der Begriff des glatten Randes relativ  $M$  mit dem des glatten Randes aus Definition 3.25 überein. (Als die dort verlangte Funktion  $\psi$  eignet sich die erste Komponente der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  der randadaptierten Parameterdarstellung aus Definition 4.84.)

- 2) Sind  $A$  und  $M$  wie in Definition 4.84, so existiert ein Atlas von  $M$  bestehend aus randadaptierten Parameterdarstellungen bzgl.  $A$ . (Klar? Für den Fall  $\partial A \cap \varphi(T) = \emptyset$  gilt dann natürlich auch  $\partial H_k \cap T = \emptyset$ .)

**Satz 4.86** *Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  sowie  $A \subseteq M$  kompakt mit glattem Rand. Dann ist  $\partial A$  eine kompakte  $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .*

**Beweis:** Da  $A$  kompakt ist, gilt  $\partial A \subseteq A$ . Sei nun  $a \in \partial A$ . Dann gibt es per Definition eine randadaptierte Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von  $M$  (mit  $T \subseteq \mathbb{R}^k$ ), so dass  $a \in \varphi(T)$ . Wir definieren die Abbildung

$$\beta : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial H_k, \quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \dots, t_{k-1}) \quad (4.13)$$

und setzen  $T_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap T) \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$  und  $U_0 := \partial A \cap \varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\beta$  stetig und daher  $T_0$  offen, da  $\partial H_k \cap T$  offen in  $\partial H_k$  ist, und  $U_0$  ist offen in  $\partial A$ , da  $\varphi$  ein Homöomorphismus und daher  $\varphi(T)$  offen in  $M$  ist. Definiere nun

$$\psi := \varphi \circ \beta : T_0 \rightarrow U_0 \subseteq \partial A, \quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto \varphi(0, t_1, \dots, t_{k-1}). \quad (4.14)$$

Da  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist und  $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial A \cap \varphi(T) = U_0$  gilt, folgt, dass auch  $\psi$  ein Homöomorphismus ist, denn ist  $z \in U_0$  so gibt es genau ein  $(0, t_1, \dots, t_{k-1}) \in \partial H_k \cap T$  mit  $z = \varphi(0, t_1, \dots, t_{k-1})$ , woraus wir dann  $\psi^{-1}(z) = (t_1, \dots, t_{k-1})$  erhalten. Bezeichnen wir  $t = (t_1, \dots, t_{k-1})$  und  $u = (0, t)$ , so gilt

$$\text{Rang } D\psi(t) = \text{Rang } \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(u_2, \dots, u_k)}(u) = k-1$$

für alle  $t \in T_0$ , denn  $D\psi(t)$  entspricht gerade der Matrix, die man erhält, wenn man die erste Spalte der  $(n \times k)$ -Matrix  $D\varphi(0, t)$  entfernt. (Da  $\varphi$  eine Immersion ist, hat  $D\varphi(0, t)$  den Rang  $k$ .) Damit ist  $\psi$  eine Immersion und ein Homöomorphismus, also eine Parameterdarstellung der  $(k-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit von  $\partial A$ . Die Kompaktheit von  $\partial A$  folgt sofort, da  $\partial A$  eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $A$  ist.  $\square$

**Definition 4.87** *Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 4.86 und seinem Beweis nennen wir  $\psi$  in (4.14) die durch  $\varphi$  induzierte Parameterdarstellung von  $\partial A$ .*

**Bemerkung 4.88** Ist  $M$  eine orientierte Untermannigfaltigkeit und  $A \subseteq M$  kompakt mit glattem Rand, so lässt sich zeigen (wir verzichten hier auf einen Beweis), dass es einen Atlas von  $M$  aus positiv orientierten, bzgl.  $A$  randadaptierten Parameterdarstellungen gibt. Die dadurch induzierten Parameterdarstellungen auf  $\partial A$  sind dann alle gleich orientiert, womit auf  $\partial A$  eine Orientierung gegeben wird, die sogenannte *induzierte Orientierung* auf  $\partial A$ .

**Satz 4.89 (Integralsatz von Stokes)** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $M \subseteq U$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit  $k \geq 2$ ) des  $\mathbb{R}^n$ , sowie  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form auf  $U$ . Dann gilt für jede kompakte Menge  $A \subseteq M$  mit glattem Rand, dass

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

wobei  $\partial A$  die induzierte Orientierung trägt.

**Beweis:** Wir beweisen den Satz nur für den Spezialfall, dass  $M$  einen Atlas  $\mathcal{A}$  bestehend aus positiv orientierten, bzgl.  $A$  randadaptierten Parameterdarstellungen hat, die alle zweimal differenzierbar sind. Der allgemeine Fall lässt sich durch Approximation darauf zurückführen, wir verzichten jedoch hier auf die Details.

Analog zum Beweis von Satz von Gauß zeigt man unter Anwendung des Lemmas von Lebesgue (Satz 3.35) und mit Hilfe der glatten Zerlegung der Eins aus (3.7) in Teil 4) von Beispiel 3.15, dass es ausreicht den Fall zu betrachten, so dass es eine einzelne Parameterdarstellung  $\varphi: \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T}) \subseteq M$  gibt mit

$$M \cap \text{supp}(\omega) \subseteq \varphi(\tilde{T}),$$

wobei der Träger  $\text{supp}(\omega)$  von  $\omega$  kompakt ist. Hierbei definieren wir

$$\text{supp}(\omega) = \bigcup_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \text{supp}(f_{i_1, \dots, i_{k-1}}),$$

falls  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} f_{i_1, \dots, i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$  gilt. Betrachten wir dann die rücktransportierte  $(k-1)$ -Form  $\varphi^*\omega$  in  $\tilde{T}$ , so hat auch diese einen kompakten Träger, da für jede der Koeffizientenfunktionen  $f_{i_1, \dots, i_{k-1}}$  gilt, dass  $\text{supp}(f_{i_1, \dots, i_{k-1}} \circ \varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\text{supp}(f_{i_1, \dots, i_{k-1}}))$ . Daher kann  $\varphi^*\omega$  trivial auf eine auf ganz  $\mathbb{R}^k$  definierte stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\tilde{\omega}$  fortgesetzt werden. Wegen der zweimaligen Differenzierbarkeit von  $\varphi$  gilt dann dank Satz 4.63, dass

$$\int_A d\omega = \int_{H_k \cap \tilde{T}} \varphi^*(d\omega) = \int_{H_k \cap \tilde{T}} d(\varphi^*\omega) = \int_{H_k} d\tilde{\omega},$$

wobei  $H_k$  wieder den Halbraum aus Definition 4.84 bezeichnet und wir ausgenutzt haben, dass  $\varphi$  randadaptiert bzgl.  $A$  ist. Ist andererseits  $\psi = \varphi \circ \beta$  die durch  $\varphi$  induzierte Parameterdarstellung von  $\partial A$  aus (4.14) mit  $\beta$  wie in (4.13), so gilt

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{T_0} \psi^*\omega = \int_{T_0} \beta^*\varphi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\tilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}.$$

Der Satz ist also bewiesen, wenn wir die Gleichheit

$$\int_{\partial H_k} \tilde{\omega} = \int_{H_k} d\tilde{\omega}$$

für die stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\tilde{\omega}$  zeigen können. Da  $\tilde{\omega}$  eine  $(k-1)$ -Form im  $\mathbb{R}^k$  ist, gibt es Koeffizientenfunktionen  $f_1, \dots, f_k$  mit

$$\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^k f_j dS_j = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k,$$

woraus wir

$$\beta^* \tilde{\omega} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (f_j \circ \beta) d\beta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\beta_j} \wedge \dots \wedge d\beta_k = (f_1 \circ \beta) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1}$$

erhalten, da wegen  $\beta : (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \dots, t_{k-1})$  insbesondere  $\beta_1 = 0$  gilt und daher in der obigen Summe nur der Summand für  $j = 1$  übrig bleibt. Damit folgt

$$\int_{\partial H_k} \tilde{\omega} = \int_{\beta^{-1}(\partial H_k)} \beta^* \tilde{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1}) d\lambda^{k-1}(t_1, \dots, t_{k-1}). \quad (4.15)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

Da mit  $\tilde{\omega}$  auch  $f = (f_1, \dots, f_k)$  kompakten Träger hat, gilt für jedes  $(x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$  nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I, dass

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 = f_1(0, x_2, \dots, x_k).$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_k) d\lambda^k(x) &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 d\lambda^{k-1}(x_2, \dots, x_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) d\lambda^{k-1}(x_2, \dots, x_k) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Andererseits gilt für jedes  $j = 2, \dots, k$ , dass

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) d\lambda^k(x) = \int_{]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{k-2}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) dx_j \right) d\lambda^{k-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) = 0, \quad (4.17)$$

da  $f$  einen kompakten Träger hat. Aus (4.16) und (4.17) zusammen folgt

$$\int_{H_k} d\tilde{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) d\lambda^{k-1}(x_2, \dots, x_k) = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega},$$

wobei die letzte Gleichheit durch (4.15) gegeben ist.  $\square$

**Korollar 4.90** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form in  $U$ . Dann gilt für jede orientierte, kompakte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq U$  des  $\mathbb{R}^n$ , dass

$$\int_M d\omega = 0.$$

**Beweis:** Dies folgt sofort aus dem Satz von Stokes, da  $\partial_M M = \emptyset$ .  $\square$

**Beispiel 4.91** Im Folgenden betrachten wir zwei wichtige Spezialfälle des Integralsatzes von Stokes, dessen Voraussetzungen und Bezeichnungen wir im Folgenden übernehmen.

- 1) *Fall  $k = n$ :* In diesem Fall ist schon  $U$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und wir können daher  $M = U$  setzen. Ist dann  $A \subseteq U$  ein Kompaktum mit glattem Rand, so lässt sich zeigen (Übung), dass die durch die kanonische Orientierung auf  $U$  induzierte Orientierung auf  $\partial A$  gerade so ist, dass das äußere Normaleneinheitsfeld  $\nu$  auf  $\partial A$  positiv orientiert ist. Hat nun  $\omega$  die Form

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

so folgt mit  $f = (f_1, \dots, f_n)$  nach Satz 4.80 und dem Satz von Stokes, dass

$$\int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x),$$

wobei wir für die letzte Gleichheit ausgenutzt haben, dass  $d\omega = \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  nach Beispiel 4.47 gilt. Der *Satz von Gauß* ist also ein Spezialfall von Satz 4.89.

- 2) *Fall  $k = 2$  und  $n = 3$ : Klassischer Satz von Stokes:* Hier ist also  $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Diese habe die durch ein Normaleneinheitsfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebene Orientierung. Dann definiert die dadurch induzierte Orientierung auf  $\partial A$  ein “*Tangenten-Einheitsfeld*”  $\tau : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass  $\nu$  und  $\tau$  zusammen die “*Rechte-Hand-Regel*” erfüllen: Dieses können Sie wie folgt anschaulich vorstellen: Der Rand  $\partial A$  ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , den sie sich als eine Randkurve vorstellen können. Durch das Tangenteneinheitsfeld wird dann die Richtung vorgegeben, in der diese Kurve bei der Parametrisierung durchlaufen werden soll. Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Normaleneinheitsvektors, so zeigen die übrigen Finger der rechten Hand die Umlaufrichtung der Randkurve an.

Gilt nun  $\omega = f \cdot ds = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$  mit  $f = (f_1, f_2, f_3)$ , so folgt mit Beispiel 4.48, dass  $d\omega = \operatorname{rot}(f) \cdot dS$ . Mit dem Satz von Stokes erhalten wir dann

$$\int_{\partial A} f \cdot ds = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A \operatorname{rot}(f) \cdot dS = \int_A \langle \operatorname{rot}(f), \nu \rangle dS,$$

wobei wir im letzten Schritt wieder Satz 4.80 benutzt haben. Dies ist der Satz von Stokes in seiner klassischen Form, wie er auch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften gelehrt wird.



# Kapitel 5

## Grundlagen der komplexen Analysis

In Kapitel 6 der Analysis I haben wir schon erwähnt, dass sich die Definition der Differenzierbarkeit von reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen direkt auf den Fall komplexer Zahlen übertragen lässt und haben dies insbesondere dafür benutzt, um so ganz einfach die Differenzierbarkeit der Sinus- und Cosinusfunktion aus der Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion zu folgern. Interessanterweise ist die Eigenschaft der Differenzierbarkeit komplexer Funktionen eine sehr starke Eigenschaft, die sehr viele Folgerungen mit sich bringt. Die Grundlagen der sich daraus ergebenden Theorie wollen wir am Ende des Zyklus *Analysis I-III* einmal kurz vorstellen und unter anderem den in Analysis I versprochenen Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra* (Satz 5.43 in Analysis I) nachliefern.

### 5.1 Holomorphe Funktionen

In Analysis I hatten wir Differenzierbarkeit für komplexe Funktionen nur dann betrachtet, wenn der Definitionsbereich eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  oder gleich ganz  $\mathbb{C}$  war, da uns der Begriff der Offenheit aus Analysis II an dieser Stelle noch nicht bekannt war. Daher holen wir die Definition nun noch einmal für den allgemeinen Fall nach:

**Definition 5.1** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

- 1) Die Funktion  $f$  heißt komplex differenzierbar in  $z_0 \in U$ , falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt  $f'(z_0)$  die Ableitung von  $f$  in  $z_0$ .

- 2) Die Funktion  $f$  heißt holomorph, falls  $f$  in allen  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar ist.

Der Grund dafür, dass wir hier nicht einfach von *Differenzierbarkeit*, sondern von *komplexer Differenzierbarkeit* und *Holomorphie* sprechen ist der, dass wir die Menge der komplexen Zahlen auch mit dem  $\mathbb{R}^2$  identifizieren können, wo uns der Differenzierbarkeitsbegriff aus Analysis II zur Verfügung steht. Interessanterweise unterscheidet sich dieser von dem Begriff aus Definition 5.1, was wir im Folgenden näher untersuchen wollen.

**Bemerkung 5.2** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

- 1) Genau wie in Satz 6.3 aus Analysis I können wir zeigen:  $f$  ist genau dann komplex differenzierbar in  $z_0 \in U$ , wenn es eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und eine Abbildung  $R : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so dass für alle  $z \in U$  gilt:

$$f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + R(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0$$

Diese lineare Abbildung  $L$  ist dann natürlich durch  $L : z \mapsto f'(z_0) \cdot z$  gegeben.

- 2) Identifizieren wir  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  und  $U$  mit einer (ebenfalls offenen) Teilmenge  $U_r$  des  $\mathbb{R}^2$ , so gibt es Funktionen  $u, v : U_r \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben dafür im Folgenden kurz  $f = u + iv$ . Ist nun  $f$  aufgefasst als die Abbildung  $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  im Sinn von Analysis II (wir werden das im Folgenden zur besseren Unterscheidung als *reelle Differenzierbarkeit* bezeichnen), so gilt

$$Df(z_0) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid L \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\}$$

$$\text{und} \quad \begin{bmatrix} Df(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}.$$

Sie ahnen vielleicht schon den entscheidenden Unterschied: Die Abbildung  $Df(z_0)$  ist aufgefasst als Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  im Allgemeinen nur  $\mathbb{R}$ -linear, aber nicht  $\mathbb{C}$ -linear.

- 3) Eine Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist offenbar genau dann  $\mathbb{C}$ -linear, wenn sie ein Vielfaches der Identität ist, d.h. wenn es  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt:

$$L(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y).$$

Fassen wir  $L$  als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf, so gilt

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

- 4) Die Abbildung  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist genau dann  $\mathbb{R}$ -linear, wenn es Koeffizienten  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit 3), so stellen wir fest, dass  $L$  wiederum aufgefasst als Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann  $\mathbb{C}$ -linear ist, wenn  $a = d$  und  $b = -c$  gilt.



Unseren Beobachtungen fassen wir im folgenden Satz zusammen:

**Satz 5.3** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $f$  ist holomorph.
- 2)  $u, v$  sind reell differenzierbar und erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Beweis:** Der Beweis folgt direkt aus Bemerkung 5.2 oder ist eine Übung.  $\square$

**Beispiel 5.4** 1) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph, denn wie wir in Analysis I gezeigt (nun ja, *angedeutet*) haben, ist  $\exp$  in allen  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar mit  $\exp'(z) = \exp(z)$ . Sind  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $z = x + iy$ , so gilt

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Setzen wir also  $u : (x, y) \rightarrow e^x \cos y$  und  $v : (x, y) \mapsto e^x \sin y$ , so gilt in der Tat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Somit erfüllen  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

- 2) Die komplexe Konjugation  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  ist nicht holomorph, denn wegen  $f(x + iy) = x - iy$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt mit  $u : (x, y) \rightarrow x$  und  $v : (x, y) \rightarrow -y$ , dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also nicht erfüllt. Es kommt sogar noch schlimmer: Tatsächlich ist  $f$  nicht nur nicht holomorph, sondern sogar in keinem einzigen  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar. (Klar? Wenn nicht: Übung!) Andererseits ist  $f$  reell differenzierbar, denn  $f$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und daher gilt  $Df(z_0) = f$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ . (Wie sieht die darstellende Matrix von  $Df(z_0)$  aus?)

**Bemerkung 5.5** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und sind  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so sind, wie wir schon in Kapitel 6 von Analysis I angedeutet haben, auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  gilt) holomorph und es gelten die Linearität der Ableitung, sowie Produkt- und Quotientenregel und für Kompositionen holomorpher Funktionen natürlich auch die Kettenregel.

Als nächstes wenden wir uns Integralen komplexer Funktionen zu. Für stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir einfach

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) dx.$$

Ist dagegen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  definiert, so betrachten wir Kurvenintegrale.

**Definition 5.6** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve (d.h. wenn man  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert). Dann heißt

$$\int_{\alpha} f(z) dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

das Integral von  $f$  entlang  $\alpha$ .

**Beispiel 5.7** Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$  und die Kurve  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto e^{it}$ , die den Einheitskreis entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft. Dann gilt

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

**Bemerkung 5.8** Das Integral aus Definition 5.6 erinnert stark an das Kurvenintegral über Vektorfelder aus Kapitel 4, auch wenn dort statt der komplexen Multiplikation das Skalarprodukt von Funktion und Ableitung der Kurve ausgewertet wurde. Daher ist es nicht verwunderlich, dass wir auch dieses Integral mit Hilfe von Pfaffschen Formen ausdrücken können. Bezeichnen wir die Koordinatenprojektionen in  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  mit  $x$  und  $y$  und betrachten wir formal die komplexe Pfaffsche Form  $dz := dx + idy$ , so gilt für eine komplexe Funktion  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen, dass

$$f dz = (u + iv)(dx + idy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy).$$

Integration der beiden Pfaffschen Formen auf der rechten Seite über eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 : [a, b] \rightarrow U$  liefert

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} (u dx - v dy) &= \int_a^b u(\alpha(t)) \alpha'_1(t) - v(\alpha(t)) \alpha'_2(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \left( \left( u(\alpha(t)) + iv(\alpha(t)) \right) \cdot \left( \alpha'_1(t) + i\alpha'_2(t) \right) \right) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \left( f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \right) dt \end{aligned}$$

und analog

$$\int_{\alpha} (v dx + u dy) = \int_a^b \operatorname{Im} \left( f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \right) dt.$$

Damit erhalten wir die nützliche Formel

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\alpha} (u dx - v dy) + i \int_{\alpha} (v dx + u dy). \quad (5.1)$$

## 5.2 Der Integralsatz von Cauchy und Anwendungen

Der Cauchysche Integralsatz ist einer der wichtigsten Sätze der komplexen Analysis. In seiner allgemeinsten Form besagt er, dass das Integral einer auf einer einfach zusammenhängenden, offenen Menge holomorphen Funktion über eine geschlossene, rektifizierbare Kurve stets gleich Null ist (vgl. Sie zu den genannten Begriffen die Bemerkungen 4.23 und 3.10). Wir formulieren den Satz an dieser Stelle jedoch mit deutlich stärkeren Voraussetzungen, damit wir ihn mit Hilfe des Satzes von Stokes beweisen können. In der Vorlesung *Komplexe Analysis* können Sie dagegen einen Beweis kennenlernen, der ohne den Umweg über Differentialformen auskommt und sich daher mit schwächeren Voraussetzungen begnügen kann.

**Satz 5.9 (Integralsatz von Cauchy)** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $K \subseteq U$  kompakt mit glattem Rand und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:*

$$\int_{\partial K} f(z) \, dz = 0.$$

**Beweis:** Wir beweisen den Satz nur für den Fall, dass  $f'$  stetig ist. (Dies ist keine wirkliche Einschränkung, da holomorphe Funktionen bereits beliebig oft differenzierbar sind, wie wir im Folgenden auch sehen werden. In der Vorlesung *Komplexen Analysis* werden Sie den Integralsatz von Cauchy dann auch ohne die Voraussetzung der Stetigkeit von  $f'$  beweisen und können diese stattdessen folgern.) Ist dann  $f = u + iv$ , so folgt mit (5.1) und dem Satz von Stokes (Satz 4.89), dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z) \, dz &= \int_{\partial K} (u \, dx - v \, dy) + i \int_{\partial K} (v \, dx + u \, dy) \\ &= \int_K (du \wedge dx - dv \wedge dy) + i \int_K (dv \wedge dx + du \wedge dy) \\ &= \int_K \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge dx - \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \wedge dy \right) \\ &\quad + i \int_K \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge dy \right) \\ &= \int_K \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy \right) + i \int_K \left( -\frac{\partial v}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial u}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Formeln (4.5) benutzt haben und der letzte Schritt daraus folgt, dass  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen.  $\square$

Beachten Sie, dass Beispiel 5.7 nicht im Widerspruch zum Integralsatz von Cauchy steht, da die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  nur auf der offenen Menge  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph ist (die Ableitung ist die Funktion  $z \mapsto -\frac{1}{z^2}$ ), die nicht die gesamte kompakte Einheitskreisscheibe enthält. Der Integralsatz von Cauchy ist in diesem Fall also nicht anwendbar.

**Bemerkung 5.10** Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $K := K(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}$ .

- 1) Die Menge  $K$  ist kompakt in  $M = \mathbb{C}$  und hat dort einen glatten Rand. Nach eventueller Translation des Koordinatensystems können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $a = 0$  gilt. Ist dann  $z_0 = Re^{i\theta} \in \partial K$  und  $U := ] - R, \infty[ \times ]\theta - \pi, \theta + \pi[$ , so ist

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (r, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} (r + R) \cos \phi \\ (r + R) \sin \phi \end{bmatrix}$$

eine bzgl. der kanonischen Orientierung positiv orientierte Parameterdarstellung von  $M$  mit  $z_0 \in \varphi(U)$ , da

$$\det D\varphi(r, \phi) = r + R > 0$$

für alle  $(r, \phi) \in U$  gilt. Ferner ist  $\varphi$  randadaptiert bzgl.  $K$ , denn offenbar gilt

$$\varphi(H_2 \cap U) = K \cap \varphi(U) \quad \text{und} \quad \varphi(\partial H_2 \cap U) = \partial K \cap \varphi(U),$$

wobei  $H_2 := ] - \infty, 0] \times \mathbb{R}$ . Die durch  $\varphi$  auf  $\partial K$  induzierte Parameterdarstellung ist

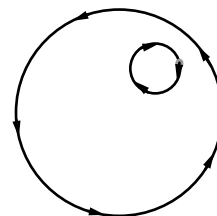
$$\psi : ]\theta - \pi, \theta + \pi[ \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \begin{bmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{bmatrix} = Re^{i\phi}.$$

Folglich wird die Randkurve  $\partial K$  entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen, welches man auch als den *mathematisch positiven Umlaufsinn*<sup>1</sup> bezeichnet.

- 2) Sei nun  $z_0 \in K^\circ$  fest und sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $K(z_0, \varepsilon) = \overline{U_\varepsilon(z_0)} \subseteq K^\circ$  gilt. Dann ist auch die Menge  $K_\varepsilon := K \setminus U_\varepsilon(z_0)$  kompakt mit glattem Rand

$$\partial K_\varepsilon = \partial K \cup \partial K(z_0, \varepsilon).$$

Die induzierte Orientierung auf  $\partial K_\varepsilon$  ist dann so, dass der “innere Rand”  $\partial K(z_0, \varepsilon)$  mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. (Übung.)



Der nächste Satz besagt, dass holomorphe Funktionen eine sehr spezielle Form haben. Dies ist eine Tatsache, die weitreichende Konsequenzen zur Folge hat.

**Satz 5.11 (Integralformel von Cauchy)** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $a \in U$  und  $R > 0$ , so dass  $K := K(a, R) \subseteq U$ . Dann gilt für alle  $z_0 \in K^\circ$ , dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

wobei  $\partial K$  die bzgl. der kanonischen Orientierung auf  $U$  induzierte Orientierung trägt.

<sup>1</sup>Die Mehrheit aller Uhren mit Zeiger auf unserer Erde dreht sich aus mathematischer Perspektive leider in die falsche Richtung.

**Beweis:** Sei  $z_0 \in K^\circ$  und seien  $\varepsilon$  und  $K_\varepsilon$  so wie in Teil 2) von Bemerkung 5.10. Dann gilt  $K_\varepsilon \subseteq U \setminus \{z_0\}$ . Wir parametrisieren den Rand von  $K_\varepsilon$  mit Hilfe der Kurven

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K, \varphi \mapsto a + Re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \alpha_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K(z_0, \varepsilon), \varphi \mapsto z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}.$$

Beachten Sie, dass nach unseren Beobachtungen in Bemerkung 5.10 die Kurve  $\alpha$  positiv orientiert, die Kurve  $\alpha_\varepsilon$  jedoch negativ orientiert bzgl. der Orientierung auf  $\partial K_\varepsilon$  ist. Da die Funktion  $z \mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$  holomorph in  $U \setminus \{z_0\}$  ist, erhalten wir mit dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_\alpha \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

wobei das Vorzeichen des letzten Integrals der negativen Orientierung der Kurve  $\alpha_\varepsilon$  geschuldet ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \int_\alpha \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} \cdot i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Da das Integral auf der linken Seite unabhängig von  $\varepsilon$  ist, können wir auf der rechten Seite den Grenzwert für  $\varepsilon \rightarrow 0$  betrachten. Dabei können wir den Satz von Lebesgue (Satz 1.80) anwenden, denn da  $f$  stetig und daher auf der kompakten Menge  $K(z_0, \varepsilon)$  durch eine Konstante  $c > 0$  beschränkt ist, ist  $c\chi_{[0,2\pi]}$  eine integrierbare Majorante. Somit erhalten wir

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi i f(z_0).$$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Die erste Konsequenz aus der Integralformel von Cauchy ist die Folgerung, dass eine holomorphe Funktion bereits analytisch ist, sich also in jedem Punkt lokal durch eine Potenzreihe darstellen lässt. Insbesondere sind holomorphe Funktionen bereits beliebig oft differenzierbar. Dies ist ein erheblicher Unterschied zur Theorie reellwertiger Funktionen.

**Korollar 5.12** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $a \in U$ . Ferner sei  $R > 0$ , so dass  $K := \overline{U_R(a)} \subseteq U$  gilt. Dann gilt für alle  $z \in U_R(a)$ , dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta.$$

**Beweis:** O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $a = 0$  gilt. Sei  $z \in U_R(a)$ . Dann gilt nach der Integralformel von Cauchy, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Ferner gilt für  $\zeta \in \mathbb{C}$  mit  $|\zeta| = R$  wegen  $|z| < R$ , dass

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Wegen  $|\frac{z}{\zeta}| < 1$  konvergiert diese Reihe für festes  $z$  nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß (Satz 8.12 in Analysis I) gleichmäßig auf  $\partial K$ . Daher folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(\zeta) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) z^k. \quad \square$$

Zum Abschluss dieses Kapitels und des gesamten Zyklus *Analysis I-III* steuern wir noch einmal auf einen kleinen Höhepunkt zu: Wir bringen nun den in Kapitel 5 der Analysis I versprochenen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (siehe Satz 5.43 in Analysis I), den wir jetzt als einfaches Korollar aus dem folgenden Satz von Liouville erhalten.

**Definition 5.13** Eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ganze Funktion.

**Satz 5.14 (von Liouville)** Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

**Beweis:** Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt. Dann gibt es ein  $c \geq 0$  mit  $|f(z)| \leq c$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Sei  $a \in \mathbb{C}$  beliebig. Da  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert ist, lässt sich  $f$  nach Korollar 5.12 auf einer beliebig großen Kreisscheibe  $K := K(a, r)$ ,  $r > 0$  um  $a$  als eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  darstellen. Da man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf (siehe Satz 8.22 in Analysis I, dieser gilt auch für komplexe Funktionen - wir hatten ihn damals jedoch nur für reellwertige Funktionen formuliert, da wir den Begriff der Holomorphie noch nicht zur Verfügung hatten), erhalten wir

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1}.$$

Einsetzen von  $a$  liefert mit der Formel für die Koeffizienten  $c_k$  aus Korollar 5.12 (wenn wir den Rand  $\partial K$  durch die Kurve  $[0, 2\pi]$ ,  $\varphi \mapsto a + re^{i\varphi}$  parametrisieren)

$$f'(a) = c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\varphi})}{(re^{i\varphi})^2} \cdot rie^{i\varphi} d\varphi.$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a + re^{i\varphi})|}{r} d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c}{r} d\varphi = \frac{c}{r}.$$

Da  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert und holomorph ist, gilt diese Abschätzung für alle  $r > 0$ , woraus  $f'(a) = 0$  folgt. Da  $a$  beliebig war und  $\mathbb{C}$  zusammenhängend ist, folgt daraus die Konstanz von  $f$ .  $\square$

**Bemerkung 5.15** Der Satz von Liouville hat eine bemerkenswerte Konsequenz für die Funktionen

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

die die analytischen Fortsetzungen von der Sinus- und Kosinusfunktion auf die komplexen Zahlen darstellen. Da beide Funktionen offenbar nicht konstant sind, folgt, dass sie unbeschränkt sein müssen! Dies sieht man auch leicht direkt ein, denn z.B. erhalten wir mit Hilfe der auch in  $\mathbb{C}$  gültigen Formel

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

wenn wir im folgenden Grenzwert  $x \in \mathbb{R}$  betrachten, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\sin(ix)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |e^{-x} - e^x| = \infty.$$

**Korollar 5.16 (Fundamentalsatz der Algebra)** Sei  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht-konstante Polynomfunktion. Dann hat  $p$  eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:** Sei  $p = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  und o.B.d.A. sei  $a_n = 1$ . (Andernfalls betrachten wir  $\frac{1}{a_n}p$ .) Dann gilt

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right|.$$

Wegen

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n-1}}{|z|} + \cdots + \frac{a_0}{|z|^n} \right) = 0$$

existiert ein  $R > 0$ , so dass

$$|p(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}$$

für alle  $z$  mit  $|z| > R$  gilt.

Angenommen,  $p$  hat keine Nullstelle, d.h. es gilt  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist die Funktion  $f = \frac{1}{p}$  holomorph und auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert, also eine ganze Funktion. Außerdem gilt

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|z|^n} \leq \frac{2}{R^n}$$

für alle  $z$  mit  $|z| > R$ . Da außerdem die Funktion  $|f|$  stetig ist und daher ihr Maximum auf der kompakten Menge  $\{z \mid |z| \leq R\}$  annimmt, folgt, dass  $f$  beschränkt ist. Dann folgt aber mit dem Satz von Liouville die Konstanz der Funktion  $f$ . Mit Kontraposition erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Nachdem uns die Lineare Algebra an so vielen Stellen beim Aufbau der Analysis weitergeholfen hat, können wir uns an dieser Stelle mit diesem schönen und kurzen Beweis eines zentralen Satzes der (Linearen) Algebra endlich revanchieren und beenden damit den Vorlesungszyklus Analysis I-III.