

# Skript Analysis

Vorlesungsausarbeitung von Christian Mehl

14. Oktober 2019

Diese Vorlesungsausarbeitung wurde in einigen Teilen von den Vorlesungsausarbeitungen Analysis I–II bzw. Analysis I–III von

- Dirk Ferus (TU Berlin),
- Günter Richter (U Bielefeld),
- Fredi Tröltzsch (TU Berlin),
- Harry Yserentant (TU Berlin),

beeinflusst sowie in anderen Teilen von den folgenden Büchern:

- Otto Forster: Analysis 1, 11. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- Otto Forster: Analysis 2, 10. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- Otto Forster: Analysis 3, 7. Auflage, Springer Spektrum, 2012.
- Martin Barner, Friedrich Flohr: Analysis I, 4. Auflage, De Gruyter, 2000.
- Martin Barner, Friedrich Flohr: Analysis II, 3. Auflage, De Gruyter, 1996.

Dieses Skript ist kein Lehrbuch, sondern ein ergänzendes Hilfsmittel zur Nachbereitung der Vorlesung und ersetzt nicht den Vorlesungsbesuch. Der Download dieses Skriptes ist nur für die eigene Nacharbeit der Vorlesung gestattet. Eine unerlaubte Vervielfältigung oder Verbreitung des gesamten Skriptes oder Teilen davon ist nicht gestattet. Dies gilt insbesondere für die Verbreitung in irgendeiner elektronischer Form.

Ich bedanke mich bei Anton Kolleck für das sorgfältige Korrekturlesen des Skripts und für viele hilfreiche Kommentare, die zur Verbesserung der Darstellung geführt haben. Weiter bedanke ich mich bei all den Studierenden (darunter insbesondere Tobias Paul und Oliver Hager), die mir zahlreiche Fehler in früheren Versionen des Skripts mitgeteilt haben, die in der vorliegenden Version korrigiert werden konnten. Trotzdem ist es jedoch nicht auszuschließen bzw. sogar höchstwahrscheinlich, dass dieses Skript immer noch viele Druck- und auch inhaltliche Fehler enthält. Sollten Sie solche finden bin ich für eine Benachrichtigung per Email dankbar ([mehl@math.tu-berlin.de](mailto:mehl@math.tu-berlin.de)).

Christian Mehl, 14. Oktober 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>III</b>	<b>Analysis III</b>	<b>393</b>
<b>1</b>	<b>Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>399</b>
1.1	Ringe, $\sigma$ -Algebren, Inhalte und Maße . . . . .	399
1.2	Existenz von Maßen nach Carathéodory . . . . .	405
1.3	Eindeutigkeit von Maßen . . . . .	414
1.4	Messbare Funktionen . . . . .	418
1.5	Das Lebesgue-Integral . . . . .	423
1.6	Die großen Konvergenzsätze . . . . .	432
1.7	Produktmaße . . . . .	437
1.8	Die $L_p(\mu)$ -Räume . . . . .	446
<b>2</b>	<b>Der Transformationssatz</b>	<b>451</b>
2.1	Verzerrung Borelscher Mengen . . . . .	452
2.2	Der Transformationssatz . . . . .	463
2.3	Der verfeinerte Transformationssatz . . . . .	467
<b>3</b>	<b>Die großen Integralsätze I</b>	<b>471</b>
3.1	Die Gramsche Determinante . . . . .	472
3.2	Integration über Untermannigfaltigkeiten I . . . . .	477
3.3	Atlanten und Zerlegungen der Eins . . . . .	480
3.4	Integration über Untermannigfaltigkeiten II . . . . .	485
3.5	Kompakta mit glattem Rand . . . . .	488
3.6	Der Integralsatz von Gauß . . . . .	493
<b>4</b>	<b>Die großen Integralsätze II</b>	<b>503</b>
4.1	Das vektorielle Kurvenintegral . . . . .	505
4.2	Existenz von Stammfunktionen . . . . .	510
4.3	Alternierende Multilinearformen . . . . .	517
4.4	Differentialformen . . . . .	524
4.5	Rücktransport von Differentialformen . . . . .	534
4.6	Integration von Differentialformen . . . . .	538
4.7	Der Integralsatz von Stokes . . . . .	545

<b>5</b>	<b>Grundlagen der komplexen Analysis</b>	<b>551</b>
5.1	Holomorphe Funktionen . . . . .	551
5.2	Der Integralsatz von Cauchy und Anwendungen . . . . .	555

**Teil III**

**Analysis III**

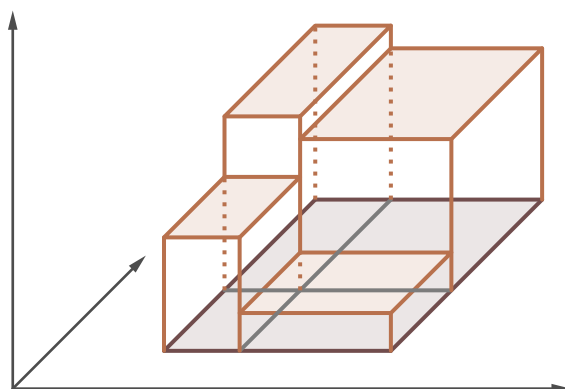


# Einführung

Nachdem wir in der Analysis II die Differentialrechnung auf Banachräume und damit insbesondere auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert haben, ist es jetzt unser Ziel, dies ebenfalls mit der Integrationstheorie zu tun. Unser Hauptziel ist dabei die Integration von Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dabei können wir uns im Bildraum auf den Fall  $m = 1$  beschränken, da wir das Integral komponentenweise definieren können (vgl. Definition 4.5 in Analysis II). Der eigentlich interessante Fall ist also der von Funktionen der Form  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Grundidee bei der Integration nach Riemann einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Zerlegung des Urbildraums in kleine Teilintervalle und Approximation der zu integrierenden Funktion durch Treppenfunktionen, die auf diesen Teilintervallen konstante Werte annehmen. Grundsätzlich ist diese Idee auch für Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  denkbar. Ist z.B.  $A$  ein Quader, so könnte man  $A$  in kleine Teilquader zerlegen und  $f$  auf  $A$  durch eine Treppenfunktion approximieren, die auf jedem dieser Teilquader konstante Werte annimmt. Abbildung 0.1 zeigt den Graph einer solchen Treppenfunktion  $T : R \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Rechteck  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bei einer Unterteilung in vier Teilrechtecke.

Abbildung 0.1: Graph einer Treppenfunktion  $T : R \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Rechteck  $R \subseteq \mathbb{R}^2$



Die Integrationstheorie nach Riemann hat allerdings einige gravierende Nachteile. Zum einen gibt es eine ganze Reihe von Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind, deren Integrale aber in einigen mathematischen Disziplinen (wie z.B. der Wahrscheinlichkeitstheorie) eine wichtige Rolle spielen. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist die *charakteristische Funktion*  $\chi_A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der Menge  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  der rationalen Zahlen im Intervall  $[0, 1]$ . Diese ist definiert durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus A. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, denn für ihr Ober- und Unterintegral erhalten wir die unterschiedlichen Werte

$$\int_0^1 \chi_A(x) \, dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \chi_A(x) \, dx = 0.$$

Ein zweiter Nachteil des Riemann-Integrals ist, dass wir die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung nur für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen bewiesen haben, obwohl es viele Beispiele für punktweise konvergente Funktionenfolgen gibt, bei denen sich ebenfalls Integration und Grenzwertbildung miteinander vertauschen lassen (siehe z.B. Teil 1) von Beispiel 8.1 aus Analysis I). Die Abschwächung der Forderung der gleichmäßigen Konvergenz für Funktionenfolgen in den Sätzen von Beppo Levi und Lebesgue ist eine der großen Errungenschaften in der *Integrationstheorie nach Lebesgue*.

Die Grundidee für diese Integrationstheorie ist sehr einfach. Im Gegensatz zur Theorie nach Riemann wird hier nicht der Urbildraum, sondern der Bildraum in Teilintervalle zerlegt. Die Rolle von Treppenfunktionen übernehmen nun die sogenannten *Elementarfunktionen*, die nur endlich viele Werte annehmen. Abbildung 0.2 illustriert die beiden unterschiedlichen Vorgehensweisen nach Riemann und Lebesgue.

Für eine Treppenfunktion berechnet sich das Integral einfach als Summe der Funktionswerte multipliziert mit dem jeweiligen Maß des zu Grunde liegenden Teilintervalls, also der Intervalllänge: Ist  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  und nimmt die Treppenfunktion  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Teilintervall  $]x_{i-1}, x_i[$  den konstanten Wert  $T(\xi_i)$  an, so gilt

$$\int_a^b T(x) \, dx = \sum_{i=1}^n T(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

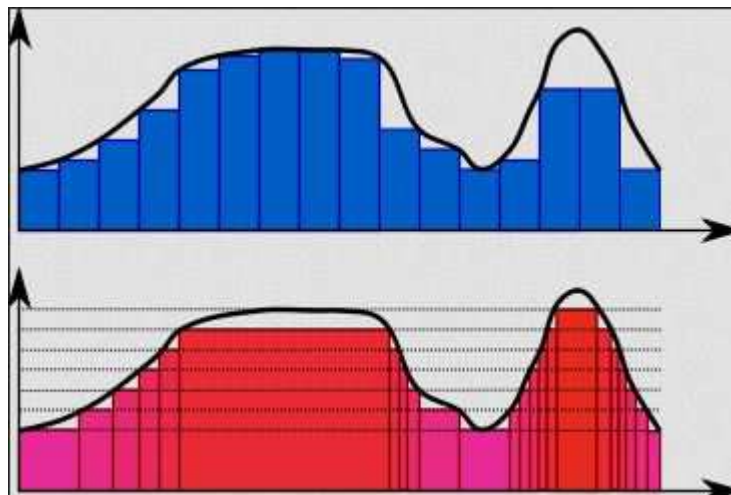
Für eine Elementarfunktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur endlich viele Werte  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  annimmt, erhalten wir analog ein Integral, wenn wir den jeweiligen Funktionswert  $\alpha_i$  mit dem Maß  $\mu(A_i)$  des Urbilds  $A_i := \{x \in [a, b] \mid f(x) = \alpha_i\}$  multiplizieren. Wir erhalten also das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Besteht dieses Urbild aus einer disjunkten Vereinigung von endlich vielen Intervallen, so wie in der Abbildung 0.2 angedeutet, so können wir dieses Maß  $\mu(A_i)$  einfach als Summe



Abbildung 0.2: Zerlegung nach Riemann (blau) und Lebesgue (rot)

Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemannvslebesgue.svg>

der Intervalllängen definieren. Insbesondere ist in diesem Fall die Elementarfunktion auch eine Treppenfunktion und wir erwarten daher für die Integrationstheorie nach Lebesgue, dass sie die Integrationstheorie nach Riemann als Spezialfall enthält und das neu definierte Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt, wenn beide Integrale existieren.

Neu ist allerdings jetzt, dass wir auch allgemeinere Mengen als Urbilder der Werte  $\alpha_i$  zulassen wollen. Betrachten wir z.B. noch einmal die charakteristische Funktion  $\chi_A$  der Menge  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , so nimmt diese nur zwei Werte an und ist daher eine Elementarfunktion. Es gilt  $(\chi_A)^{-1}(\{1\}) = A$  und  $(\chi_A)^{-1}(\{0\}) = [0, 1] \setminus A$ . Damit könnten wir jetzt auch das Integral dieser Funktion definieren durch

$$\int_a^b \chi_A(x) dx = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu([0, 1] \setminus A) = \mu(A),$$

wenn wir das *Maß* der Menge  $A$  und ihres Komplements  $[0, 1] \setminus A$  definiert haben. Diese Herangehensweise führt uns zu dem sogenannten *Inhaltsproblem*, nämlich der Definition eines Maßes bzw. Inhalts einer Menge, der den Begriff der Länge für uns bekannte Mengen wie Intervalle in  $\mathbb{R}$  bzw. den des Volumens für uns bekannte Mengen wie Quader, Kugeln etc. im  $\mathbb{R}^n$  auf beliebige Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert.

**Problem:** Finde eine Funktion  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty] := [0, \infty[ \cup \{\infty\}$  für die gilt:

- 1) **Normiertheit:** Für den Einheitswürfel  $W = [0, 1]^n$  gilt  $\mu(W) = 1$ .
- 2) **Bewegungsinvarianz:** Translation, Rotation und Spiegelung einer Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  verändern  $\mu(A)$  nicht.

3)  **$\sigma$ -Additivität:** Für alle  $A_k, k \in \mathbb{N}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  gilt

$$\mu \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

Dass wir den Wert  $\infty$  als Maß einer Menge zulassen wollen, ist unvermeidbar, da z.B. der gesamte  $\mathbb{R}^n$  keinen endlichen Volumeninhalt haben kann. Die Eigenschaften i) und ii) sind naheliegend und ebenso iii), wenn wir uns auf endliche Vereinigungen beschränken. Um einen stärkeren Integralbegriff zu erhalten, wollen wir hier allerdings auch abzählbare Vereinigungen zulassen.

Leider konnte Giuseppe Vitali 1905 beweisen, dass das Inhaltsproblem unlösbar ist: Es gibt keine Funktion  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ , die alle gewünschten Eigenschaften i)–iii) erfüllt. Wer nun meint, das die geforderte  $\sigma$ -Additivität der Übeltäter dafür ist, hat zum Teil recht, denn schwächt man die Bedingung iii) so ab, dass sie nur für endliche Vereinigungen erfüllt ist, so lassen sich zumindest Inhaltsfunktionen auf  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^2$  definieren. Felix Hausdorff zeigte jedoch 1914, dass das Inhaltsproblem unter diesen Bedingungen zumindest für  $n \geq 3$  unlösbar ist und da wir als Lebewesen in einem Raum existieren, von dem wir wissen, dass seine Dimension mindestens drei ist, ist das eine herbe Enttäuschung für uns. Abgesehen davon sind die so in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^2$  erhaltenen Inhalte nicht eindeutig bestimmt, so dass auch hier kein befriedigender Inhaltsbegriff erreicht wird.

Wir verzichten daher nicht auf die  $\sigma$ -Additivität als Eigenschaft, sondern drehen an einer anderen Schraube. Statt den Inhaltsbegriff für *alle* Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  zu definieren, werden wir uns mit einer hinreichend großen Menge von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  begnügen, der sogenannte *Borelschen  $\sigma$ -Algebra*. Damit erhalten wir dann auch einen Integrationsbegriff, der hinreichend flexibel für all unsere (mathematischen) Wünsche ist.

# Kapitel 1

## Maß- und Integrationstheorie

Da wir in der Einführung erfahren haben, dass das *Inhaltsproblem* für beliebige Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  unlösbar ist, müssen wir uns auf gewisse Teilmengen der Potenzmenge des  $\mathbb{R}^n$  einschränken, nämlich sogenannte  $\sigma$ -Algebren. Da dieses Konzept auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt wird, betrachten wir in diesem Kapitel als Ausgangspunkt stets eine allgemeine nichtleere Grundmenge  $\Omega$ .

### 1.1 Ringe, $\sigma$ -Algebren, Inhalte und Maße

Um in einem Mengensystem vernünftig Analysis betreiben zu können ist es sinnvoll zu fordern, dass dieses *stabil* gegenüber den klassischen Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz ist. Dabei gehen wir minimalistisch vor und lassen die *Durchschnittsstabilität* zunächst unter den Tisch fallen um sie dann aus den übrigen Eigenschaften zu folgern.

**Definition 1.1** Eine Menge  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt Ring über  $\Omega$ , falls gilt:

- i)  $\mathcal{R} \neq \emptyset$ .
- ii)  $\mathcal{R}$  ist vereinigungsstabil, d.h. für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \cup B \in \mathcal{R}$ .
- iii)  $\mathcal{R}$  ist differenzstabil, d.h. für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ .

**Beispiel 1.2** 1) Triviale Ringe über  $\Omega$  sind  $\{\emptyset\}$  und die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

- 2) Wir nennen eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  *elementargeometrisch*, falls  $A$  Vereinigung von endlich vielen achsenparallelen Quadern

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n$$

mit  $I_j \in \{[a_j, b_j], [a_j, b_j[, ]a_j, b_j], ]a_j, b_j[ \mid a_j, b_j \in \mathbb{R}\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist

$$\mathcal{R}_{EG}^n := \mathcal{R}_{EG} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist elementargeometrisch}\}$$

ein Ring über  $\mathbb{R}^n$ . (Übung.)

**Bemerkung 1.3** Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$ . Dann gilt:

- 1)  $\emptyset \in \mathcal{R}$ , denn  $\mathcal{R} \neq \emptyset$ , d.h. es gibt eine Menge  $A \in \mathcal{R}$ . Dann gilt auch  $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$ .
- 2)  $\mathcal{R}$  ist *durchschnittsstabil*, d.h. es gilt  $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$ . Dies folgt sofort aus  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ .
- 3) Der Name *Ring* für die hier definierten Mengensysteme hat tatsächlich etwas mit dem Begriff *Ring* aus der Algebra zu tun. Definieren wir nämlich auf Mengen die sogenannte Operation *symmetrische Differenz* durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

so ist  $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$  ein Ring im Sinne der Algebra mit Nullelement  $0 = \emptyset$  und Einselement  $1 = \Omega$ , falls  $\Omega \in \mathcal{R}$ .

Der Begriff des Ringes hat leider noch den Nachteil, dass er nicht allgemein genug ist. So können wir zwar jedem achsenparallelen Quader und auch jeder elementargeometrischen Menge leicht ein Volumen bzw. einen *Inhalt* zuordnen, der mit unserem geometrischen Grundverständnis übereinstimmt (in Beispiel 1.15 werden wir dies präzisieren), jedoch sind elementargeometrische Mengen noch viel zu speziell. Sie machen sich leicht klar, dass jede elementargeometrische Menge als Vereinigung endlich vieler Quader dargestellt werden kann. Objekte, wie z.B. Kugeln, Zylinder, Kegel und ihre Verallgemeinerungen im  $\mathbb{R}^n$  gehören dann gerade nicht zum Ring  $\mathcal{R}_{EG}$  und das ist natürlich eine erhebliche Einschränkung. Wir benötigen daher einen noch stärkeren Begriff.

**Definition 1.4** Ein Mengensystem  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ .
- ii)  $\mathcal{A}$  ist komplementstabil, d.h. mit der Notation  $A^c := \Omega \setminus A$  gilt:

$$A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}.$$

- iii)  $\mathcal{A}$  ist stabil bzgl. abzählbaren Vereinigungen, d.h. es gilt

$$A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

**Bemerkung 1.5** 1) Eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  über  $\Omega$  ist auch stabil bzgl. abzählbaren Durchschnitten, denn für  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gilt auch

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

- 2) Ein Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$  ist genau dann eine  $\sigma$ -Algebra, falls  $\Omega \in \mathcal{R}$  gilt und  $\mathcal{R}$  stabil bzgl. abzählbaren Vereinigungen ist. (Übung).

**Beispiel 1.6** Triviale  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$  sind  $\{\emptyset, \Omega\}$  und  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Natürlich gibt es auch noch etwas interessantere  $\sigma$ -Algebren, jedoch benötigen wir für deren Konstruktion noch die folgende zusätzliche Beobachtung.

**Bemerkung 1.7** 1) Beliebige Schnitte von  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$  sind wieder  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ , d.h. ist  $I$  eine Indexmenge und sind  $\mathcal{A}_i$ ,  $i \in I$ ,  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ , so auch

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap \{ \mathcal{A}_i \mid i \in I \}.$$

2) Ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , so gibt es eine kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , die alle Mengen aus  $\mathcal{E}$  enthält, nämlich

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \}.$$

Wir nennen  $\sigma(\mathcal{E})$  die *von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra*.

**Beispiel 1.8** Seien  $A \subseteq \Omega$  und  $\mathcal{E} = \{A\}$ . Dann ist  $\{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$  eine  $\sigma$ -Algebra und offenbar die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$ .

Die für uns wichtigste  $\sigma$ -Algebra ist die folgende.

**Definition 1.9** Die von den elementargeometrischen Mengen  $\mathcal{R}_{EG}^n$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}^n$  heißt Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}^n$  (kurz:  $\mathcal{B}$ , wenn klar ist, welches  $n$  gemeint ist) und ihre Elemente nennen wir Borel-Mengen.

Es gilt also  $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{R}_{EG}^n)$ . Wie genau sehen Borel-Mengen nun eigentlich aus? Eine äquivalente Charakterisierung anzugeben ist eine schwierige, wenn nicht unlösbare Aufgabe, aber wir können leicht zeigen, dass die Borelsche  $\sigma$ -Algebra viele wichtige Mengen enthält wie z.B. insbesondere alle offenen und abgeschlossenen Mengen.

**Satz 1.10** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann gibt es abzählbar viele abgeschlossene achsenparallele Würfel  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$ .

**Beweis:** Sei  $x \in A$ . Da  $A$  offen ist, gibt es  $\varepsilon_x > 0$  mit  $U_{\varepsilon}(x) \subseteq A$ . Wir wählen nun zu jedem  $x$  einen achsenparallelen Würfel  $W_x$  mit Mittelpunkt aus  $\mathbb{Q}^n$  und rationaler Kantenlänge, so dass  $x \in W_x \subseteq U_{\varepsilon}(x) \subseteq A$ . (Machen sie sich klar, dass so eine Wahl immer möglich ist.) Es gilt nun

$$A = \bigcup_{x \in A} W_x.$$

Da es nur abzählbar viele verschiedene Würfel dieser Art gibt, können wir diese Vereinigung als eine abzählbare Vereinigung schreiben.  $\square$

**Korollar 1.11** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen oder abgeschlossen. Dann ist  $A$  eine Borel-Menge.

Unser nächstes Ziel ist die Definition einer *Inhaltsfunktion* für unsere bereitgestellten Mengensysteme.

**Definition 1.12** Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$  und  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty] := [0, \infty[ \cup \{\infty\}$ .

- 1)  $\mu$  heißt *additiv* oder *Inhalt* auf  $\mathcal{R}$ , falls  $\mu(\emptyset) = 0$  und falls für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt, dass

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

- 2)  $\mu$  heißt  *$\sigma$ -additiv* oder *Prämaß* auf  $\mathcal{R}$ , falls  $\mu(\emptyset) = 0$  und falls für alle  $A_k \in \mathcal{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  gilt:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

- 3) Ein Prämaß  $\mu$  auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  heißt *Maß* auf  $\mathcal{A}$ .
- 4) Ein Maßraum ist ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  bestehend aus einer Menge  $\Omega$ , einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  über  $\Omega$  und einem Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$ .

Hier und im folgenden benutzen wir die Konventionen  $a + \infty := \infty$  und  $a < \infty$  für  $a \in [0, \infty[$ . Wir gehen darauf im Abschnitt 1.4 noch etwas genauer ein. Beachten Sie außerdem, dass bei der  $\sigma$ -Additivität vorausgesetzt wird, dass die abzählbare disjunkte Vereinigung der betrachteten Ringmengen selbst wieder im Ring enthalten ist. In  $\sigma$ -Algebren ist diese Bedingung automatisch erfüllt, in beliebigen Ringen jedoch nicht immer.

**Bemerkung 1.13** Jedes Prämaß (bzw. Maß)  $\mu$  ist auch ein Inhalt. Die Additivität für zwei disjunkte Mengen  $A, B$  erhalten wir aus der  $\sigma$ -Additivität, indem wir  $A_0 = A$ ,  $A_1 = B$  und  $A_k = \emptyset$  wählen für  $k \geq 2$ .

**Bemerkung 1.14** Sei  $\mu$  ein Inhalt auf dem Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$ , sowie  $A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$ , denn  $B = (A \cap B) \dot{\cup} (B \setminus A)$ .  
(Das Symbol  $\dot{\cup}$  bezeichnet eine disjunkte Vereinigung.)
- 2)  $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ , d.h. Inhalte sind *monoton*. Dies folgt wegen  $A \cap B = A$  und  $\mu(B \setminus A) \geq 0$  sofort aus 1).
- 3)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ . (Übung.)
- 4)  $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ , wobei Gleichheit gilt, wenn die  $A_i$  paarweise disjunkt sind. (Übung.)

**Beispiel 1.15** 1) Wir betrachten den Ring  $\mathcal{R}_{EG}$  der elementargeometrischen Mengen über  $\mathbb{R}^n$ . Für einen achsenparallelen Quader

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n$$

mit  $I_j \in \{[a_j, b_j], [a_j, b_j[, ]a_j, b_j], ]a_j, b_j[ \}$ ,  $a_j \leq b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  definieren wir

$$\lambda(Q) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Anschaulich ist dies gerade das klassische Volumen des  $n$ -dimensionalen Quaders  $Q$ . Zerfällt nun  $A \in \mathcal{R}_{EG}$  in  $m$  paarweise disjunkte Quader  $Q_1, \dots, Q_m$ , so setzen wir

$$\lambda(A) := \sum_{k=1}^m \lambda(Q_k).$$

Dadurch und mit  $\lambda(\emptyset) := 0$  wird ein Inhalt  $\lambda : \mathcal{R}_{EG} \rightarrow [0, \infty[$  definiert, den wir den *elementargeometrischen Inhalt* auf  $\mathcal{R}_{EG}$  nennen. Um einzusehen, dass dieser Inhalt wohldefiniert ist, müssen Sie sich klarmachen, dass man jede elementargeometrische Menge in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Quadern zerlegen kann und dass je zwei unterschiedliche Zerlegungen einer elementargeometrischen Menge  $A$  in paarweise disjunkte Quader den gleichen Inhalt für  $A$  liefern. (Übung.)

2) Die Abbildung  $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\mu(A) := \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Maß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ , das sogenannte *Zählmaß*, denn hierbei steht  $|A|$  für die *Kardinalität* der endlichen Menge  $A$ , also die Anzahl deren Elemente. Insbesondere ist also  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$  ein Maßraum.

Unser nächstes Ziel ist die Erweiterung des elementargeometrischen Inhalts auf dem Ring der elementargeometrischen Mengen zu einem Maß auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$ . Dazu werden wir im nächsten Abschnitt zeigen, dass sich jedes Prämaß auf einem Ring  $\mathcal{R}$  zu einem Maß auf der von diesem Ring erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  erweitern lässt. Um dieses allgemeine Resultat dann auf den für uns wichtigen Spezialfall anwenden zu können, benötigen wir dann das folgende Resultat.

**Satz 1.16** *Der elementargeometrische Inhalt  $\lambda$  auf  $\mathcal{R}_{EG}$  ist ein Prämaß auf  $\mathcal{R}_{EG}$ .*

**Beweis:** Seien  $A_k \in \mathcal{R}_{EG}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt, so dass  $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}_{EG}$ . Nach Definition von  $\lambda$  gilt  $\lambda(A) < \infty$ . Wir zeigen

$$\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k).$$

“ $\geq$ ”: Aus Teil 4) und 2) von Bemerkung 1.14 erhalten wir

$$\sum_{k=0}^m \lambda(A_k) = \lambda\left(\bigcup_{k=0}^m A_k\right) \leq \lambda(A)$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Durch Grenzübergang folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k) \leq \lambda(A),$$

denn wegen  $\lambda(A) < \infty$  ist die Folge  $(\sum_{k=0}^m \lambda(A_k))_{m \in \mathbb{N}}$  monoton und beschränkt und daher die zugehörige Reihe konvergent und ihre Summe ist kleiner oder gleich  $\lambda(A)$ .

“ $\leq$ ”: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir bemerken zunächst, dass  $A$  nach Voraussetzung elementargeometrisch und daher als Vereinigung endlich vieler Quader darstellbar und insbesondere beschränkt ist. Dann wählen wir offene Mengen  $G_k \supseteq A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und eine abgeschlossene Menge  $F \subseteq A$  mit den Eigenschaften  $F, G_k \in \mathcal{R}_{EG}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und

$$\lambda(G_k) \leq \lambda(A_k) + 2^{-k} \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \lambda(A) \leq \lambda(F) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Machen Sie sich klar, dass man solche Mengen leicht durch das Vergrößern bzw. Verkleinern der  $A_k$  bzw.  $A$  zu Grunde liegenden Quader erhalten kann. Mit  $A$  ist auch  $F$  beschränkt. Weiter gilt

$$F \subseteq A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k,$$

d.h.  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine offene Überdeckung von  $F$ . Dann gibt es aber wegen der Kompaktheit von  $F$  ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass schon

$$F \subseteq G_0 \cup \dots \cup G_m$$

gilt. Damit erhalten wir mit den Teilen 2) und 4) aus Bemerkung 1.14, dass

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\leq \lambda(F) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \lambda\left(\bigcup_{k=0}^m G_k\right) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{k=0}^m \lambda(G_k) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{k=0}^m \left(\lambda(A_k) + 2^{-k} \frac{\varepsilon}{3}\right) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \sum_{k=0}^m \lambda(A_k) + \sum_{k=0}^m 2^{-k} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k) + 2 \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, liefert der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  die gewünschte Ungleichung.  $\square$



## 1.2 Existenz von Maßen nach Carathéodory

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Menge  $\Omega$ , sowie einen Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$ , auf dem ein Prämaß  $\mu$  gegeben ist. Die Elemente von  $\mathcal{R}$  nennen wir *Elementarmengen*. Unser Ziel ist dann die Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  über  $\Omega$ . Um dies zu erreichen, benötigen wir allerdings noch eine technische Voraussetzung, nämlich, dass  $\mathcal{R}$  unsere Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  *ausschöpft*. Dies definieren wir für spätere Zwecke gleich ein bisschen allgemeiner.

**Definition 1.17** Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$  und  $\mu$  ein Prämaß auf  $\mathcal{R}$ .

- 1) Wir sagen  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  *schöpft*  $\Omega$  aus, falls es abzählbar viele Mengen  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$  gilt.
- 2) Sei  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$ . Wir sagen  $\mathcal{E}$  *schöpft*  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  aus, falls es abzählbar viele Mengen  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\mu(E_k) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$  gilt.

**Beispiel 1.18** Der Ring  $\mathcal{R}_{EG}$  schöpft den  $\mathbb{R}^n$  bzgl. des elementargeometrischen Inhalts  $\lambda$  aus, denn wir erhalten

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} [-k, k]^n \quad \text{und} \quad \lambda([-k, k]^n) = (2k)^n < \infty.$$

Die Hauptidee für die Konstruktion eines Maßes, das das gegebene Prämaß  $\mu$  auf eine  $\mathcal{R}$  enthaltende  $\sigma$ -Algebra fortsetzt, ist die folgende: Zunächst definieren wir eine Funktion  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ , das sogenannte *äußere Maß*, das diesen Namen zunächst eigentlich gar nicht verdient, da es kein Maß im Sinne von Definition 1.12 ist. Im Folgenden zeigen wir aber, dass es eingeschränkt auf eine gewisse  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  tatsächlich ein Maß ist.

**Definition 1.19 (Äußeres Maß)** Für eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  sei

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) \mid E_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \right\}.$$

Dann heißt die dadurch definierte Abbildung  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  das *äußere Maß* auf  $\Omega$ .

Beachten Sie, dass die Menge in Definition 1.19, über die das Infimum gebildet wird, nicht leer ist, da wir vorausgesetzt haben, dass  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  ausschöpft. Der Name *äußeres Maß* führt sich dann darauf zurück, dass wir  $\mu^*$  mit Hilfe des “inneren Maßes”  $\mu$  durch Approximation von Mengen  $A$  durch Vereinigungen von Elementarmengen von “außen” (d.h. durch Obermengen) definiert haben. Bevor wir einige wichtige Eigenschaften des äußeren Maßes zusammenstellen, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

**Lemma 1.20** Seien  $\tilde{\mathcal{R}}$  ein Ring über  $\Omega$ , sowie  $A_k \in \tilde{\mathcal{R}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $A \subseteq \Omega$ . Dann gilt:

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \implies \text{Es gibt } A'_k \in \tilde{\mathcal{R}}, k \in \mathbb{N}, \text{ paarweise disjunkt, so dass } A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k.$$

**Beweis:** Wir definieren die Mengen  $A'_0 := A_0$  und

$$A'_k := A_k \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{k-1})$$

für  $k \geq 1$ . Dann gilt  $A'_k \in \tilde{\mathcal{R}}$ ,  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k$  und die Mengen  $A'_k$  sind nach Konstruktion paarweise disjunkt.  $\square$

**Satz 1.21** Seien  $A, B, A_k \subseteq \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- 1)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
- 2)  $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , d.h. das äußere Maß  $\mu^*$  ist monoton.
- 3) Für alle  $E \in \mathcal{R}$  gilt  $\mu^*(E) = \mu(E)$ , d.h.  $\mu^*$  ist eine Fortsetzung von  $\mu$  auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ .
- 4)  $\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$ , d.h.  $\mu^*$  ist subadditiv.

**Beweis:**

1) und 2) folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des Inhalts  $\mu$ .

3) Wir zeigen  $\mu^*(E) = \mu(E)$  für alle  $E \in \mathcal{R}$ .

“ $\leq$ ”: ist klar, denn  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $E_0 = E$  und  $E_k = \emptyset$  für  $k \geq 1$  ist eine Überdeckung von  $E$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) = \mu(E)$ .

“ $\geq$ ”: Sei  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung von  $E$ . Setze  $E'_k := E_k \cap E \in \mathcal{R}$ . Dann gilt

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E'_k.$$

Wegen Lemma 1.20 können wir o.B.d.A annehmen, dass die Mengen  $E'_k$  paarweise disjunkt sind. Damit erhalten wir:

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E'_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E'_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k)$$

und da dies für alle Überdeckungen gilt, schließlich  $\mu(E) \leq \mu^*(E)$ .

- 4) Wir benutzen die Abkürzung  $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\mu^*(A_k) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, denn sonst ist die Abschätzung trivial. Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es nach Definition des Infimums Überdeckungen  $(E_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  von  $A_k$  bestehend aus Elementarmengen  $E_{k,\ell} \in \mathcal{R}$ , so dass

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mu(E_{k,\ell}) \leq \mu^*(A_k) + 2^{-k-1}\varepsilon.$$

Da nun  $(E_{k,\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Überdeckung von  $A$  aus Elementarmengen ist, erhalten wir

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu(E_{k,\ell}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \mu^*(A_k) + 2^{-k-1}\varepsilon \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Die gewünschte Ungleichung erhalten wir nun durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Ziel ist es nun, eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  zu finden, auf der das äußere Maß nicht nur subadditiv, sondern auch  $\sigma$ -additiv ist. Um die Mengen dieser  $\sigma$ -Algebra zu lokalisieren, benutzen wir eine geeignete Approximation durch Elementarmengen im Sinn einer geeigneten “Metrik”, des sogenannten *Abstandsmaßes*.

**Definition 1.22** Seien  $A, B \subseteq \Omega$ . Dann heißt

$$d(A, B) := \mu^*(A \triangle B)$$

das Abstandsmaß von  $A$  und  $B$ . (Hierbei bezeichnet  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  die symmetrische Differenz aus Bemerkung 1.3.)

**Bemerkung 1.23** Das Abstandsmaß erfüllt die folgenden Eigenschaften (Übung):

- i)  $d(A, A) = 0$ .
- ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .
- iii)  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ .
- iv)  $d(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2) \leq d(A_1, A_2) + d(B_1, B_2)$ .
- v)  $d(A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2) \leq d(A_1, A_2) + d(B_1, B_2)$ .
- vi)  $d(A_1 \setminus B_1, A_2 \setminus B_2) \leq d(A_1, A_2) + d(B_1, B_2)$ .

Die Eigenschaften i)–vi) des Abstandsmaßes folgen unmittelbar aus analogen Eigenschaften der symmetrischen Differenz. So beweist man z.B. iii), indem man zunächst mengentheoretisch nachweist, dass  $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$  gilt und folgert dann mit Hilfe der Monotonie und Subadditivität des äußeren Maßes:

$$d(A, B) = \mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B) = d(A, C) + d(C, B).$$

Analog zeigt man zunächst  $(A_1 \square B_1) \triangle (A_2 \square B_2) \subseteq (A_1 \triangle A_2) \cup (B_1 \triangle B_2)$ , wobei  $\square$  für eine der drei Operationen  $\cup$ ,  $\cap$  oder  $\setminus$  steht, und beweist dann damit die Bedingungen iv)–vi).

Die Bedingungen i)–iii) aus Bemerkung 1.23 besagen, dass sich  $d$  im wesentlichen wie eine Metrik verhält. Allerdings gibt es kleine Unterschiede, denn im Gegensatz zu einer echten Metrik ist  $d(A, B) = \infty$  möglich und außerdem auch  $d(A, B) = 0$  für  $A \neq B$ , da z.B. in  $\Omega = \mathbb{R}$  gilt, dass

$$d([0, 1], ]0, 1[) = \lambda^*(\{0, 1\}) = \lambda(\{0, 1\}) = \lambda([0, 1]) - \lambda(]0, 1[) = 1 - 1 = 0.$$

Wir könnten nun Aufwand betreiben und eine Teilmenge von Mengen endlichen äußeren Maßes zusammen mit einer Äquivalenzrelation  $A \sim B :\Leftrightarrow d(A, B) = 0$  betrachten, um auf der Menge der Äquivalenzklassen eine echte Metrik zu erhalten, aber das wäre vergebene Mühe, da wir im Folgenden mit den Eigenschaften i)–iii) auskommen und an keiner Stelle benötigen, dass  $d$  tatsächlich eine Metrik ist.

**Definition 1.24** Sei  $A \subseteq \Omega$ .

- 1)  $A$  heißt endlich messbar bzgl.  $\mu^*$  (kurz: endlich messbar), falls  $\mu^*(A) < \infty$  und falls es eine Folge  $(E_n)$  von Elementarmengen  $E_n \in \mathcal{R}$  gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, A) = 0.$$

Die Menge der endlich messbaren Teilmengen von  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .

- 2)  $A$  heißt messbar bzgl.  $\mu^*$ , falls  $A$  abzählbare Vereinigung von endlich messbaren Mengen bzgl.  $\mu^*$  ist. Die Menge der bzgl.  $\mu^*$  messbaren Teilmengen von  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ .

Im Gegensatz zur endlichen Messbarkeit verzichten wir bei der Messbarkeit nicht auf den Zusatz “bzgl.  $\mu^*$ ”, da wir den Begriff der Messbarkeit in den folgenden Kapiteln noch in anderen Zusammenhängen definieren und benutzen werden.

**Bemerkung 1.25** 1) Elementarmengen  $E \in \mathcal{R}$  mit  $\mu(E) < \infty$  sind endlich messbar.

- 2) Grob gesprochen ist die Menge der endlich messbaren Mengen der “Abschluss” der Menge der Elementarmengen endlichen äußeren Maßes bzgl. der “Topologie”, die durch die “Metrik” *Abstandsmaß* erzeugt wird.

Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass die Menge  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  der messbaren Mengen eine  $\sigma$ -Algebra ist, auf der das äußere Maß ein Maß ist. Dazu benötigen wir eine Serie von Lemmata.

**Lemma 1.26** Für alle  $A, B \subseteq \Omega$  mit  $\mu^*(A), \mu^*(B) < \infty$  gilt  $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B)$ .

**Beweis:** Zunächst stellen wir fest, dass

$$d(A, \emptyset) = \mu^*((A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A)) = \mu^*(A).$$

Damit erhalten wir  $\mu^*(A) \leq d(A, B) + d(B, \emptyset) = d(A, B) + \mu^*(B)$ , woraus die Ungleichung

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B)$$

folgt. Durch Rollentausch von  $A$  und  $B$  erhalten wir  $\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq d(B, A) = d(A, B)$  und damit die Behauptung.  $\square$

**Lemma 1.27** Die Menge  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  der endlich messbaren Mengen ist ein Ring und das äußere Maß  $\mu^*$  ist ein Inhalt auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .

**Beweis:** Seien  $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  beliebig. Dann gibt es nach Definition Folgen  $(A_n), (B_n)$  von Elementarmengen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B).$$

Wir zeigen nun die beiden Aussagen des Lemmas:

- 1)  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ist ein Ring:  $\mathcal{M}_{\mu^*} \neq \emptyset$  ist klar, da  $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Mit  $\mu^*(A), \mu^*(B) < \infty$  folgt dann  $\mu^*(A \cup B), \mu^*(A \setminus B) < \infty$ . Weiter gilt nach iv)–vi) von Bemerkung 1.23, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B) = 0, \quad (1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n \cap B_n, A \cap B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B) = 0, \quad (1.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n \setminus B_n, A \setminus B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B) = 0. \quad (1.3)$$

Da  $A_n \cup B_n$  und  $A_n \setminus B_n$  wieder Elementarmengen sind, erhalten wir daraus insbesondere  $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ , d.h.  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ist ein Ring.

- 2)  $\mu^*$  ist additiv auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ : Z.z. ist also  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$  für  $A \cap B = \emptyset$ . Da für Elementarmengen  $E$  gilt, dass  $\mu^*(E) = \mu(E)$ , erhalten wir mit Hilfe von Lemma 1.26, dass

$$|\mu(A_n) - \mu^*(A)| = |\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \leq d(A_n, A)$$

und daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu^*(A)$ . Analog erhalten wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu^*(B)$  und aus (1.1) und (1.2), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cup B_n) = \mu^*(A \cup B), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap B_n) = \mu^*(A \cap B).$$

Weiter gilt  $\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n)$  wegen Teil 3) von Bemerkung 1.14 und der Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  liefert

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A \cup B),$$

da  $\mu^*(A \cap B) = \mu^*(\emptyset) = 0$ .  $\square$

**Lemma 1.28** Seien  $A_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Insbesondere ist also  $\mu^*$  ein Prämaß auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .

**Beweis:** Da nach Lemma 1.27  $\mu^*$  additiv auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ist, erhalten wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\sum_{k=0}^n \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right)$$

wobei die Ungleichung aus der Monotonie des äußeren Maßes folgt. Der Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  liefert die Ungleichung

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

und die umgekehrte Ungleichung folgt sofort aus der Subadditivität des äußeren Maßes.  $\square$

Das nächste Lemma verdeutlicht, dass die Bezeichnung *endlich messbar* für die Mengen  $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  eine sinnvolle Benennung war.

**Lemma 1.29** *Ist  $A \subseteq \Omega$  messbar bzgl.  $\mu^*$  und  $\mu^*(A) < \infty$ , so ist  $A$  endlich messbar.*

**Beweis:** Sei  $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  messbar bzgl.  $\mu^*$  mit  $\mu^*(A) < \infty$ . Dann gibt es endlich messbare Mengen  $A_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ . Zu zeigen ist, dass es eine Folge  $(E_n)$  von Elementarmengen  $E_n \in \mathcal{R}$  gibt, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, A) = 0$  gilt.

Da  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ein Ring ist, können wir nach Lemma 1.20 o.B.d.A. annehmen, dass die Mengen  $A_k$  paarweise disjunkt sind. Wir definieren nun die Mengen  $B_n := A_0 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt wegen  $B_n \setminus A = \emptyset$  und Lemma 1.28, dass

$$d(B_n, A) = \mu^*(B_n \triangle A) = \mu^*(A \setminus B_n) = \mu^*\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Nach Voraussetzung ist  $\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$  endlich, d.h. diese Reihe ist konvergent. Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, A) = 0.$$

Da die Mengen  $B_n$  endlich messbar sind, gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von Elementarmengen  $(E_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ , so dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(E_{n,m}, B_n) = 0.$$

Insbesondere finden wir zu jedem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ein  $m_n \in \mathbb{N}$  mit  $d(E_{n,m_n}, B_n) \leq \frac{1}{n}$ . Setzen wir nun noch  $E_n := E_{n,m_n}$ , so erhalten wir eine Folge von Elementarmengen  $E_n \in \mathcal{R}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, B_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 0 = 0.$$

Folglich ist  $A$  endlich messbar, also  $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .  $\square$

**Satz 1.30** Die Menge  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  der bzgl.  $\mu^*$  messbaren Mengen  $A \subseteq \Omega$  ist eine  $\sigma$ -Algebra und das äußere Maß  $\mu^*$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  und damit ein Maß auf  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ .

**Beweis:** Wir weisen zunächst nach, dass  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

- i) “ $\Omega \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ”: Da  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  ausschöpft gibt es Elementarmengen  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(E_n) < \infty$  und

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Folglich ist  $\Omega$  messbar.

- ii) “ $A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*} \ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ”:

Zu  $A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  gibt es endlich messbare Mengen  $A_{k,n} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n}$ . Dann gilt aber

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n}$$

und dies ist eine abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen.

- iii) “ $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ”:

Zu  $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  gibt es nach Definition endlich messbare Mengen  $A_k, B_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k.$$

Nun gilt

$$A \setminus B = \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) \setminus B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \setminus B).$$

Wenn wir zeigen können, dass die Mengen  $A_k \setminus B$  endlich messbar sind, folgt also  $A \setminus B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ . Wegen

$$A_k \cap B = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} (A_k \cap B_{\ell})$$

folgt, dass  $A_k \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ , da die Mengen  $A_k \cap B_{\ell}$  endlich messbar sind. Außerdem gilt

$$\mu^*(A_k \cap B) \leq \mu^*(A_k) < \infty$$

und damit ist  $A_k \cap B$  nach Lemma 1.29 sogar endlich messbar. Dann sind aber auch die Mengen  $A_k \setminus B = A_k \setminus (A_k \cap B)$  endlich messbar, da die endlich messbaren Mengen nach Lemma 1.27 einen Ring bilden.

Es bleibt noch die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu^*$  auf  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  zu zeigen. Seien dazu die Mengen  $A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt. Dann gibt es zu jedem  $A_k$  nach Lemma 1.20 o.B.d.A. paarweise disjunkte endlich messbare Mengen  $A_{k,n} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n}$ . Daraus erhalten wir mit Lemma 1.28, dass

$$\mu^* \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \mu^* \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_{k,n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{k,n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k). \quad \square$$

Aus den bisherigen Erkenntnissen erhalten wir sofort das folgende Hauptresultat dieses Abschnitts. Dazu erinnern wir uns noch einmal daran, dass die bisherigen Resultate unter der Voraussetzung erzielt wurden, dass  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  ausschöpft. Damit unser Hauptresultat - wie es sich gehört - alleinstehend gültig ist, nehmen wir diese Voraussetzung noch einmal explizit in der Formulierung des Satzes mit auf.

**Satz 1.31 (Maßerweiterungssatz von Carathéodory)** *Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring über  $\Omega$  und sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $\mathcal{R}$ , so dass  $\mathcal{R}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu$  ausschöpft. Dann ist das äußere Maß  $\mu^*$  ein Maß auf der von  $\mathcal{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$ .*

**Beweis:** Der Satz folgt sofort aus Satz 1.30.  $\square$

**Korollar 1.32** *Sei  $\lambda$  der elementargeometrische Inhalt auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist das äußere Maß  $\lambda^*$*

- 1) *ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  der bzgl.  $\lambda^*$  messbaren Mengen (genannt Lebesgue-messbare Mengen), das sogenannte Lebesgue-Maß  $\lambda^n := \lambda := \lambda^*|_{\mathcal{A}_{\lambda^*}}$ ,*
- 2) *ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  der Borel-Mengen das sogenannte Lebesgue-Borelsche Maß  $\lambda^n := \lambda := \lambda^*|_{\mathcal{B}}$ .*

An diesem Punkt stellt sich natürlich die Frage, ob sich die beiden  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  und  $\mathcal{B}$  überhaupt unterscheiden. Dies ist tatsächlich der Fall und um den Unterschied illustrieren zu können, betrachten wir zunächst eine wichtige Klasse messbarer Mengen, die sogenannten *Nullmengen*.

**Definition 1.33** *Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum.*

- 1) *Eine Menge  $N \in \mathcal{A}$  heißt Nullmenge, falls  $\mu(N) = 0$ .*
- 2) *Eine Menge  $T \subseteq \Omega$  heißt vernachlässigbar, falls es eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$  gibt, so dass  $T \subseteq N$ .*
- 3)  *$\mu$  bzw.  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt vollständig, falls jede vernachlässigbare Menge eine Nullmenge ist, d.h. falls für alle  $N \in \mathcal{A}$  gilt:*

$$\mu(N) = 0 \text{ und } T \subseteq N \implies T \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(T) = 0.$$



**Beispiel 1.34** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ .

- 1) Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist  $\{x\} = [x_1, x_1] \times \dots \times [x_n, x_n]$  eine Nullmenge, denn  $\{x\} \in \mathcal{B}$  und

$$\lambda(\{x\}) = \prod_{k=1}^n (x_k - x_k) = 0.$$

- 2) Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  abzählbar. Dann gilt  $X \in \mathcal{B}$  und  $X$  ist eine Nullmenge, denn ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung der Elemente von  $X$ , so gilt  $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x_k\}$  und daher

$$\lambda(X) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\{x_k\}) = 0.$$

Insbesondere gilt also  $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{B}$  und  $\lambda(\mathbb{Q}^n) = 0$ .

- 3) Zur Übung können Sie noch zeigen, dass  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n$  für jedes  $m \in \{1, \dots, n-1\}$  eine Nullmenge ist. (Dies zeigt die Existenz von überabzählbaren Nullmengen für  $n > 1$ . Für  $n = 1$  ist die sogenannte Cantor-Menge eine überabzählbare Nullmenge (Übung).)

In einer Übung werden Sie zeigen, dass das Lebesgue-Borelsche Maß nicht vollständig ist. Damit unterscheidet es sich vom Lebesgue-Maß, denn es gilt der folgende Satz:

**Satz 1.35** Das äußere Maß  $\mu^*$  ist vollständig auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  der messbaren Mengen.

**Beweis:** Sei  $N \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  eine Nullmenge und  $\tilde{N} \subseteq N$ . Wegen  $\mu^*(N) = 0$  ist  $N$  nach Lemma 1.28 sogar endlich messbar und daher gibt es eine Folge  $(E_n)$  von Elementarmengen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, N) = 0.$$

Nun gilt  $d(E_n, \tilde{N}) \leq d(E_n, N) + d(N, \tilde{N}) = d(E_n, N)$ , da

$$d(N, \tilde{N}) = \mu^*(N \triangle \tilde{N}) = \mu^*(N \setminus \tilde{N}) \leq \mu^*(N) = 0.$$

Dann gilt aber auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(E_n, \tilde{N}) = 0$  und  $\tilde{N}$  ist endlich messbar (mit  $\mu^*(\tilde{N}) = 0$ ).  $\square$

**Bemerkung 1.36** Man kann zeigen, dass das Lebesgue-Maß auf  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  die Vervollständigung des Lebesgue-Borelschen Maßes ist, d.h. man kann zeigen, dass gilt:

$$\mathcal{A}_{\lambda} = \{A \subseteq \mathbb{R}^d \mid \text{es gibt } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ mit } \lambda(B_2 \setminus B_1) = 0 \text{ und } B_1 \subseteq A \subseteq B_2\}.$$

### 1.3 Eindeutigkeit von Maßen

Da die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\lambda^*}$  offenbar größer als die Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  ist, stellt sich natürlich die Frage, warum man die kleinere Menge überhaupt betrachtet. Grund dafür ist, dass die Mengen unserer  $\sigma$ -Algebren schwierig zu charakterisieren sind. Will man daher Eigenschaften für alle Mengen aus diesen  $\sigma$ -Algebren beweisen, gelingt dies meist nur über einen Umweg und hierbei benötigt man die wichtige Eigenschaft der Borelschen  $\sigma$ -Algebra, dass sie von den elementargeometrischen Mengen erzeugt wird. Die dahinterstehende Beweisidee ist das sogenannte *Prinzip der guten Menge*: Sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  und  $\sigma(\mathcal{E})$  die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Um zu beweisen, dass alle Mengen  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  eine Eigenschaft  $(*)$  haben, definieren wir die *Menge der guten Mengen*

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ hat die Eigenschaft } (*)\}$$

und zeigen dann

- i)  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$ .
- ii)  $\mathcal{G}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Dann gilt nämlich  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$  und damit haben auch alle Mengen aus  $\sigma(\mathcal{E})$  die gewünschte Eigenschaft. Beim Nachweis der Eigenschaft ii) gibt es manchmal Schwierigkeiten bei dem Beweis, dass eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{G}$  wieder zu  $\mathcal{G}$  gehört, wenn diese nicht paarweise disjunkt sind, da wir in diesem Fall die  $\sigma$ -Additivität eines Maßes nicht ausnutzen können. Aus diesem Grund benötigen wir den folgenden Begriff, der den der  $\sigma$ -Algebra abschwächt.

**Definition 1.37** Eine Menge  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt Dynkin-System, falls gilt:

- i)  $\Omega \in \mathcal{D}$ .
- ii)  $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$ .
- iii)  $A_k \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}, \text{ paarweise disjunkt} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$ .

**Bemerkung 1.38** 1) Jede  $\sigma$ -Algebra ist ein Dynkin-System, aber nicht umgekehrt. Betrachte z.B.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ . Dann ist

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \Omega\}$$

ein Dynkin-System, aber keine  $\sigma$ -Algebra, da  $\{1, 2, 4\} = \{1, 2\} \cup \{2, 4\} \notin \mathcal{D}$ .

- 2) Beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen sind wieder Dynkin-Systeme.
- 3) Zu jedem  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  gibt es ein kleinstes Dynkin-System  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ , nämlich

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \bigcap \{\mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ Dynkin-System mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  heißt das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System.

- 4) Wegen 1) folgt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ . Z.B. ist  $\mathcal{D}$  aus 1) das von  $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  erzeugte Dynkin-System, die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra ist dagegen  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ .

Unser nächstes Ziel ist es, einfache Kriterien dafür zu finden, dass ein Dynkin-System bereits eine  $\sigma$ -Algebra ist.

**Lemma 1.39** *Sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ein durchschnittsstabiles Dynkin-System. Dann ist  $\mathcal{D}$  eine  $\sigma$ -Algebra.*

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass  $\mathcal{D}$  abgeschlossen gegenüber beliebigen abzählbaren Vereinigungen ist.  $\mathcal{D}$  ist differenzstabil, denn sind  $A, B \in \mathcal{D}$ , so gilt auch  $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{D}$ . Seien nun  $A_k \in \mathcal{D}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Wir benutzen den Trick aus dem Beweis von Lemma 1.20, um daraus paarweise disjunkte Mengen zu machen: Setze

$$A'_0 := A_0, \quad A'_k = A_k \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{k-1}) = A_k \setminus (A'_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A'_{k-1})$$

Dann gilt  $A'_k \in \mathcal{D}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und daher

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k \in \mathcal{D}. \quad \square$$

**Satz 1.40** *Sei  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  durchschnittsstabil. Dann gilt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E})$ , d.h. das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System ist eine  $\sigma$ -Algebra.*

**Beweis:** Zu  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  definieren wir die Menge

$$\mathcal{D}(B) := \{D \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \mid D \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\}.$$

Dann reicht es, die beiden folgenden Eigenschaften zu zeigen:

i)  $\mathcal{D}(B)$  ist ein Dynkin-System.

ii)  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(B)$  für alle  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ ,

denn daraus folgt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathcal{D}(B)$  für alle  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ . Sind dann  $A, B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  beliebig, so folgt  $A \in \mathcal{D}(B)$  und daher  $A \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ . Folglich ist  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  durchschnittsstabil und damit nach Lemma 1.39 eine  $\sigma$ -Algebra.

Offenbar gilt  $\Omega \in \mathcal{D}(B)$ , wegen  $\Omega \cap B = B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ . Ist  $A \in \mathcal{D}(B)$ , also  $A \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ , so gilt

$$A^c \cap B = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap B) = (A^c \cup B^c) \cap B = (A \cap B)^c \cap B = \left((A \cap B) \dot{\cup} B^c\right)^c$$

und wegen  $A \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  folgt  $A^c \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  und damit  $A^c \in \mathcal{D}(B)$ . Sind ferner  $A_k \in \mathcal{D}(B)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt, so folgt

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap B) \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$$

und damit ist  $\mathcal{D}(B)$  auch abgeschlossen gegenüber disjunkten abzählbaren Vereinigungen, also insgesamt ein Dynkin-System, was i) beweist. Zum Beweis von ii) sei  $E \in \mathcal{E}$  beliebig. Da  $\mathcal{E}$  durchschnittsstabil ist, gilt  $\tilde{E} \cap E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  für alle  $\tilde{E} \in \mathcal{E}$ , also  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Da  $\mathcal{D}(E)$  nach i) ein Dynkin-System ist, gilt dann auch  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Wegen  $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$  gilt  $B \cap E \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ , also auch  $E \cap B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  bzw.  $E \in \mathcal{D}(B)$ . Da  $E$  beliebig war folgt ii).  $\square$

**Satz 1.41 (Eindeutigkeit von Maßen)** Sei  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  durchschnittsstabil, sowie  $\mu_1, \mu_2$  zwei Maße auf der von  $\mathcal{E}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$ . Ferner schöpfe  $\mathcal{E}$  die Menge  $\Omega$  bzgl.  $\mu_1$  aus, d.h. es gebe  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \quad \text{und} \quad \mu_1(E_k) < \infty.$$

Dann gilt: Stimmen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  auf  $\mathcal{E}$  überein, so sind sie schon gleich, d.h. es gilt

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2.$$

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten:

- 1) Für alle  $E \in \mathcal{E}$  mit  $\mu_1(E) < \infty$  und alle  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  gilt  $\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$ .

Wir zeigen dies mit dem Prinzip der guten Mengen. Sei dazu  $E \in \mathcal{E}$  mit  $\mu_1(E) < \infty$  fest. Setze dann

$$\mathcal{D}(E) := \{A \in \sigma(\mathcal{E}) \mid \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\}.$$

Dann ist  $\mathcal{D}(E)$  ein Dynkin-System, denn nach Voraussetzung gilt  $\Omega \in \mathcal{D}(E)$  und weiter erhalten wir aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \mu_1(A^c \cap E) + \mu_1(A \cap E) &= \mu_1((A^c \cap E) \cup (A \cap E)) = \mu_1(E) = \mu_2(E) \\ &= \mu_2((A^c \cap E) \cup (A \cap E)) = \mu_2(A^c \cap E) + \mu_2(A \cap E), \end{aligned}$$

dass  $A \in \mathcal{D}(E)$  genau dann gilt, wenn  $A^c \in \mathcal{D}(E)$ . Sind schließlich  $A_k \in \mathcal{D}(E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt, so gilt

$$\mu_1\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap E)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(A_k \cap E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_k \cap E) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap E)\right)$$

und daher  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}(E)$ . Weiter gilt  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(E)$ , denn da  $\mathcal{E}$  durchschnittsstabil ist, gilt für  $\tilde{E} \in \mathcal{E}$  beliebig auch  $\tilde{E} \cap E \in \mathcal{E}$  und daher

$$\mu_1(\tilde{E} \cap E) = \mu_2(\tilde{E} \cap E),$$

also  $\tilde{E} \in \mathcal{D}(E)$ . Damit folgt  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Nach Satz 1.40 gilt wegen der Durchschnittsstabilität von  $\mathcal{E}$  aber  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(E)$ . Dies beendet den Beweis von 1).

- 2) Es gilt  $\mu_1 = \mu_2$  auf ganz  $\sigma(\mathcal{E})$ .

Nach Voraussetzung gibt es Mengen  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\mu_1(E_k) < \infty$ , so dass  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ . Setze

$$F_0 := E_0 \quad \text{und} \quad F_k := E_k \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1}), \quad k \geq 1.$$

Dann ist  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$  eine disjunkte Vereinigung und für alle  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  gilt wegen 1):

$$\begin{aligned}\mu_1(A \cap F_0) &= \mu_1(A \cap E_0) = \mu_2(A \cap E_0) = \mu_2(A \cap F_0) \\ \mu_1(A \cap F_k) &= \mu_1\left((A \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1})) \cap E_k\right) \\ &= \mu_2\left((A \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1})) \cap E_k\right) = \mu_2(A \cap F_k),\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $A \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1}) \in \sigma(\mathcal{E})$  gilt. Damit erhalten wir für alle  $A \in \sigma(\mathcal{E})$ , dass

$$\begin{aligned}\mu_1(A) &= \mu_1\left(A \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k\right)\right) = \mu_1\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A \cap F_k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(A \cap F_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A \cap F_k) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A \cap F_k)\right) = \mu_2\left(A \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k\right)\right) = \mu_2(A). \quad \square\end{aligned}$$

**Korollar 1.42** Die Fortsetzung eines auf einem Ring  $\mathcal{R}$  über  $\Omega$  definierten Prämaßes  $\mu$  zu einem Maß auf die von  $\mathcal{R}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  ist eindeutig bestimmt.

Damit ist insbesondere das Lebesgue-Borelsche Maß  $\lambda$  auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  eindeutig bestimmt. Da die Menge der achsenparallelen Quader  $\mathcal{Q}$  ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem des Rings der elementargeometrischen Mengen ist, ist  $\lambda$  sogar bereits durch die Werte auf  $\mathcal{Q}$  eindeutig bestimmt.

**Korollar 1.43** Sei  $B \in \mathcal{B}^n$  und  $\tilde{B} := \{rx + q \mid x \in B\}$ , wobei  $r > 0$  und  $q \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\tilde{B} \in \mathcal{B}^n \quad \text{und} \quad \lambda(\tilde{B}) = r^n \lambda(B).$$

Insbesondere ist das Lebesgue-Borelsche Maß  $\lambda$  translationsinvariant.

**Beweis:**  $\tilde{B} \in \mathcal{B}$  ist klar oder eine Übung. Ferner werden durch

$$\mu_1(A) := \lambda(\{rx + q \mid x \in A\}), \quad \mu_2(A) := r^n \lambda(A)$$

zwei Maße auf  $\mathcal{B}$  definiert, die auf den achsenparallelen Quadern übereinstimmen. Dann folgt mit dem Eindeutigkeitssatz schon  $\mu_1 = \mu_2$ .  $\square$

**Korollar 1.44** Das Lebesgue-Borelsche Maß ist permutationsinvariant, d.h. ist  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine Permutationsmatrix, so gilt für alle  $B \in \mathcal{B}^n$ , dass

$$\lambda(\{Px \mid x \in B\}) = \lambda(B).$$

**Beweis:** Übung.  $\square$

## 1.4 Messbare Funktionen

Wir betrachten im Folgenden einen Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , die Mengen in  $\mathcal{A}$  nennen wir  $\mu$ -messbar bzw. kurz einfach nur *messbar*. (Dieser Begriff ist nicht zu verwechseln mit der Messbarkeit bzgl. des äußeren Maßes aus Definition 1.24, der nur von dem äußerem Maß, aber nicht von der betrachteten  $\sigma$ -Algebra abhängt.)

Unser späteres Ziel ist die Einführung des Integralbegriffs nach Lebesgue mit Hilfe der Approximation von Funktionen durch sogenannte *einfache Funktionen* oder *Elementarfunktionen*, d.h. Funktionen, die nur endlich viele Werte  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  annehmen. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so können wir  $f$  durch die Elementarfunktion

$$f_n(x) = \alpha_i \quad \text{für alle } x \text{ mit } \alpha_i \leq f(x) < \alpha_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

approximieren, wobei wir  $\alpha_{n+1} := \infty$  setzen. Unter der Annahme  $\alpha_1 \leq \inf f$  (dies können wir z.B. immer erreichen, wenn  $f$  eine nichtnegative Funktion ist und wir  $\alpha_1 := \inf f$  setzen) ist  $f_n$  auf ganz  $\Omega$  definiert und es gilt  $f_n \leq f$ . Wir können nun einfach ein Integral für  $f_n$  definieren vermöge

$$\int f_n d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \quad \text{mit } A_k = f_n^{-1}(\{\alpha_k\}) = \{x \mid \alpha_k \leq f(x) < \alpha_{k+1}\}.$$

Dies funktioniert allerdings nur, wenn die Mengen  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  messbar sind. Dies motiviert den Begriff der *messbaren Funktion*, wobei wir uns allerdings auf gewisse Grundmengen beschränken und dann hinterher mit Hilfe der Eigenschaften der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  nachweisen, dass dann auch die gewünschten Mengen  $A_k$  messbar sind.

Da wir es bei Maßen auch mit dem Wert  $\infty$  zu tun haben, ist es im Folgenden zweckmäßiger (und in weise Voraussicht auf Abschnitt 1.8 auch unabdingbar) nicht nur reellwertige Funktionen zu betrachten, sondern auch solche, die die Werte  $\infty$  und  $-\infty$  annehmen dürfen. Dazu erweitern wir die reellen Zahlen und definieren

$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

und verwenden beim Rechnen in  $\overline{\mathbb{R}}$  die folgenden Vereinbarungen: Sei  $a \in [-\infty, \infty]$ . Dann gilt per Konvention:

$$\begin{aligned} -\infty < a < \infty & \quad \text{für } a \neq -\infty, \infty, \\ a + \infty = \infty + a = \infty & \quad \text{für } a \neq -\infty, \\ a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty & \quad \text{für } a \neq \infty, \\ \infty \cdot a := a \cdot \infty := \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0, \\ 0 & \text{für } a = 0, \\ -\infty & \text{für } a < 0, \end{cases} \\ a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := -(a \cdot \infty). \end{aligned}$$

Undefiniert bleiben jedoch die Ausdrücke  $\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$  und auch die Division durch  $\infty$ ,  $-\infty$  bleibt strengstens verboten.

Unseren Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  können wir dann zu einem Maßraum  $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}, \lambda)$  erweitern. Sie rechnen leicht nach, dass durch

$$\overline{\mathcal{B}} := \{B \subseteq [-\infty, \infty] \mid B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}\} = \{B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, \infty\} \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert wird. Ebenso leicht zeigen Sie, dass wir  $\lambda$  durch die Definition

$$\lambda(B \cup \{\infty\}) := \lambda(B \cup \{-\infty\}) := \lambda(B \cup \{-\infty, \infty\}) := \lambda(B)$$

für alle  $B \in \mathcal{B}$  zu einem Maß auf  $\overline{\mathcal{B}}$  erweitern können.

Der Vorteil der Erweiterung der reellen Zahlen zeigt sich insbesondere bei der Erweiterung der Begriffe Infimum, Supremum und Konvergenz. Für jede nichtleere Teilmenge  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  existieren nun

$$\begin{aligned} \sup A &:= \text{kleinstes } c \in \overline{\mathbb{R}} \text{ mit } x \leq c \text{ für alle } x \in A, \\ \inf A &:= \text{größtes } c \in \overline{\mathbb{R}} \text{ mit } x \geq c \text{ für alle } x \in A. \end{aligned}$$

Seien weiter  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann erweitern wir die Definition der Konvergenz durch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &:\Leftrightarrow \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit} \\ &\quad a_n \in \mathbb{R} \text{ und } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty &:\Leftrightarrow \text{Zu jedem } c \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } c < a_n \text{ für alle } n \geq N, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty &:\Leftrightarrow \text{Zu jedem } c \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n < c \text{ für alle } n \geq N. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Fälle entsprechen im wesentlichen dem bisherigen Begriff der *bestimmten Divergenz gegen  $\pm\infty$* , wobei wir jetzt nur zusätzlich erlauben, dass auch schon einige der Folgenglieder die Werte  $\pm\infty$  annehmen dürfen.

Als eine wichtige Folgerung unserer Erweiterungen stellen wir fest, dass jetzt jede monotone Folge konvergiert. Ist nämlich  $(a_n)$  eine monoton wachsende und  $(b_n)$  eine monoton fallende Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n.$$

Dies hat weiter zur Folge, dass *Limes inferior* und *Limes superior* für jede Folge  $(a_n)$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  existieren:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k \quad (1.4)$$

Nach diesen Vorbereitungen fahren wir mit der Definition messbarer Funktionen fort.

**Definition 1.45** Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt messbar, falls für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f^{-1}(]c, \infty]) = \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \in \mathcal{A}.$$

**Beispiel 1.46** 1) Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in A^c = \Omega \setminus A \end{cases}$$

messbar, denn es gilt  $\emptyset, A, \Omega \in \mathcal{A}$ , sowie

$$(\chi_A)^{-1}(]c, \infty]) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } c \geq 1, \\ A & \text{für } 0 \leq c < 1, \\ \Omega & \text{für } c < 0. \end{cases}$$

2) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ . Dann sind stetige Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind messbar, denn da  $f$  nicht die Wert  $\infty, -\infty$  annimmt, ist

$$f^{-1}(]c, \infty]) = f^{-1}(]c, \infty[)$$

als stetiges Urbild einer offenen Menge selbst offen und daher eine Borel-Menge, also gilt  $f^{-1}(]c, \infty]) \in \mathcal{B}$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

**Satz 1.47** Sei  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $f$  ist messbar.
- 2)  $\{x \in \Omega \mid f(x) \geq c\}$  ist messbar für alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- 3)  $\{x \in \Omega \mid f(x) < c\}$  ist messbar für alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- 4)  $\{x \in \Omega \mid f(x) \leq c\}$  ist messbar für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Wir beweisen den Satz durch Ringschluss, indem wir die Eigenschaften der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  ausnutzen.

$$“1) \Rightarrow 2)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) > c - \frac{1}{n}\}.$$

$$“2) \Rightarrow 3)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) < c\} = \Omega \setminus \{x \mid f(x) \geq c\}.$$

$$“3) \Rightarrow 4)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) < c + \frac{1}{n}\}.$$

$$“4) \Rightarrow 1)” \text{ folgt aus } \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} = \Omega \setminus \{x \mid f(x) \leq c\}. \quad \square$$

**Korollar 1.48** Seien  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar und  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Dann sind die Mengen  $\{x \in \Omega \mid a < f(x) < b\}$ ,  $\{x \in \Omega \mid a \leq f(x) < b\}$ ,  $\{x \in \Omega \mid a < f(x) \leq b\}$  und  $\{x \in \Omega \mid a \leq f(x) \leq b\}$  messbar.



**Beweis:** Für  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  ist dies einer der Fälle aus dem Satz und für  $a, b \in \mathbb{R}$  folgt dies aus

$$\{x \in \Omega \mid a < f(x) < b\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \cap \{x \in \Omega \mid f(x) < b\}$$

bzw. aus analogen Identitäten für die anderen Mengen.  $\square$

Nachdem wir nun wissen, dass messbare Funktionen die für uns eingangs erwähnten, wichtigen Eigenschaften erfüllen, benötigen wir nun weitere Kriterien, um die Messbarkeit von Funktionen nachweisen zu können.

**Satz 1.49** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann gilt:

- 1)  $\max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  sind messbar.
- 2)  $f^+ := \max(f, 0)$  und  $f^- := -\min(f, 0)$  sind messbar.
- 3)  $|f| := f^+ + f^-$  ist messbar.

**Beweis:** 1) Für  $\max(f, g)$  folgt dies aus der Messbarkeit der Mengen

$$\{x \in \Omega \mid \max(f(x), g(x)) > c\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \cup \{x \in \Omega \mid g(x) > c\}$$

für alle  $c \in \mathbb{R}$ . Der Beweis für  $\min(f, g)$  ist analog.

2) Dies ist ein Spezialfall von 1).

3) Da für jedes  $x \in \Omega$  nur eine der beiden Größen  $f^+(x)$  und  $f^-(x)$  von Null verschieden sein kann, gilt

$$\{x \in \Omega \mid |f(x)| > c\} = \{x \in \Omega \mid f^+(x) > c\} \dot{\cup} \{x \in \Omega \mid f^-(x) > c\}.$$

Die Messbarkeit von  $|f|$  folgt damit aus der Messbarkeit von  $f^+$  und  $f^-$ .  $\square$

**Satz 1.50** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann sind die durch

$$\begin{aligned} \text{i) } g(x) &:= \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad h(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \\ \text{ii) } \tilde{g}(x) &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \tilde{h}(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \end{aligned}$$

definierten Funktionen  $g, \tilde{g}, h, \tilde{h} : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar.

**Beweis:** 1) Die Messbarkeit von  $g$  und  $h$  folgt aus der Messbarkeit der  $f_n$  wegen

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega \mid g(x) > c\} &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) > c\} \\ \text{und } \{x \in \Omega \mid h(x) < c\} &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) < c\}. \end{aligned}$$

2) ist wegen (1.4) ein Spezialfall von 1).  $\square$

**Korollar 1.51** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die punktweise gegen  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  konvergiert:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

Dann ist  $f$  messbar.

**Beweis:** Wegen  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  folgt dies sofort aus Satz 1.50.  $\square$

Für den folgenden Satz und das folgende Korollar müssen wir uns auf Funktionen beschränken, die nicht die Werte  $-\infty$  oder  $\infty$  annehmen, da wir den Begriff der Stetigkeit und dafür die Topologie auf  $\mathbb{R}$  benötigen.

**Satz 1.52** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist die Funktion  $h = F \circ (f, g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto F(f(x), g(x))$  messbar.

**Beweis:** Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig. Da  $F$  stetig ist und daher Urbilder offener Mengen offen unter  $F$  sind, ist die Menge

$$G_c := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid F(u, v) > c\} = F^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x > c\})$$

offen und daher nach Satz 1.10 eine Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen achsenparallelen Quadern:

$$G_c = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n \quad \text{mit} \quad Q_n = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a_n \leq u \leq b_n, c_n \leq v \leq d_n\}, \quad a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$$

Damit gilt

$$\{x \in \Omega \mid h(x) > c\} = \{x \in \Omega \mid (f(x), g(x)) \in G_c\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \Omega \mid (f(x), g(x)) \in Q_n\}.$$

Da wegen der Messbarkeit von  $f$  und  $g$  die Mengen

$$\{x \in \Omega \mid (f(x), g(x)) \in Q_n\} = \{x \in \Omega \mid a_n \leq f(x) \leq b_n\} \cap \{x \in \Omega \mid c_n \leq g(x) \leq d_n\}$$

nach Korollar 1.48 messbar sind, folgt die Messbarkeit der Menge  $\{x \in \Omega \mid h(x) > c\}$ . Da  $c$  beliebig war, ist  $h$  somit messbar.  $\square$

**Korollar 1.53** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\alpha \cdot f$  messbar.

**Bemerkung 1.54** Wir haben uns hier bei dem Begriff der Messbarkeit von Funktionen auf das Lebesgue-Borel-Maß im Bildraum beschränkt. Allgemeiner kann man auch Funktionen zwischen zwei Maßräumen  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$  betrachten und definiert diese dann als messbar, wenn Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind, d.h.,

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \text{ ist messbar} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \text{ für alle } A \in \mathcal{A}_2.$$

Zur Übung können Sie zeigen, dass eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann messbar im Sinn von Definition 1.45 ist, wenn Sie messbar im obigen Sinn als Funktion zwischen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  ist.

## 1.5 Das Lebesgue-Integral

Aus der Analysis I ist Ihnen bekannt, dass sich bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen stetiger Funktionen Grenzwertbildung und Integration miteinander vertauschen lassen (siehe Analysis I Satz 8.7). Eine wesentliche Beobachtung in der Integrationstheorie ist die Tatsache, dass sich die Forderung der gleichmäßigen Konvergenz durch die Forderung der *Monotonie* der Folge ersetzen lässt. Diesen Umstand, den wir im nächsten Abschnitt allgemein beweisen werden, werden wir schon jetzt antizipativ bei der Definition des *Lebesgue-Integrals* nutzen.

Im Folgenden sei der Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  gegeben. Wir beginnen mit der im vorigen Abschnitt angekündigten Definition der *Elementarfunktionen*, schränken uns dabei aber auf nichtnegative Funktionen ein. Grund dafür ist vor allem, dass wir bei der anschließenden Definition des Integrals nicht definierbare Ausdrücke wie  $-\infty + \infty$  vermeiden wollen, die z.B. in Summen der Form  $\alpha_1 \cdot \infty + \alpha_2 \cdot \infty$  mit  $\alpha_1 < 0$  und  $\alpha_2 > 0$  auftreten könnten.

**Definition 1.55** Eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Elementarfunktion* (auch einfache Funktion), falls  $f \geq 0$  gilt und  $f(\Omega)$  endlich ist, d.h. falls  $f$  nur endlich viele Werte annimmt, die zusätzlich alle nichtnegativ sind.

**Beispiel 1.56** Sei  $A \subseteq \Omega$ . Dann ist die *charakteristische Funktion*  $\chi_A : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  gegeben durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Da die Funktion  $\chi_A$  nur zwei verschiedene Werte annehmen kann, ist  $\chi_A$  offenbar genau dann eine Elementarfunktion, wenn sie messbar ist, was der Fall ist, wenn  $A$  messbar ist, also  $A \in \mathcal{A}$  gilt. Ein konkretes Beispiel für eine Elementarfunktion ist also die charakteristische Funktion  $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ , denn es gilt  $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$ .

**Definition 1.57** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  eine Elementarfunktion und seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  paarweise verschieden, so dass  $f(\Omega) \setminus \{0\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}.$$

mit  $A_k = f^{-1}(\{\alpha_k\})$ ,  $k = 1, \dots, n$  die *Normaldarstellung* von  $f$ .

Da eine Elementarfunktion nach Voraussetzung messbar ist, so sind nach Korollar 1.48 auch die Mengen  $A_k = f^{-1}(\{\alpha_k\}) = \{x \in \Omega \mid \alpha_k \leq f(x) \leq \alpha_k\}$  messbar. Dies ermöglicht uns die folgende Definition.

**Definition 1.58** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  eine Elementarfunktion mit der Normaldarstellung  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ . Dann heißt

$$\int f \, d\mu := \int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \in [0, \infty]$$

das Integral von  $f$  (über  $\Omega$ ).

**Beispiel 1.59** Sei  $A \subseteq \Omega$  messbar. Dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_A$  schon in Normaldarstellung und es gilt

$$\int \chi_A d\mu = \mu(A).$$

Diese Gleichung bleibt auch für  $A = \emptyset$  richtig, da dann die Normaldarstellung von  $\chi_\emptyset$  die leere Summe ist. Für den Spezialfall  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $A = \mathbb{Q}$  erhalten wir insbesondere

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

**Satz 1.60** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  Elementarfunktionen und  $\alpha \geq 0$ . Dann gilt:

1) (*“Linearität” des Integrals*):  $\alpha f$  und  $f + g$  sind Elementarfunktionen und es gilt

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu \quad \text{und} \quad \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

2) (*Monotonie des Integrals*): Für  $f \leq g$  gilt  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .

**Beweis:** Übung. (Nutzen sie die Normaldarstellungen von  $f$  und  $g$  und betrachten Sie eine gemeinsame Verfeinerung der zu Grunde liegenden Unterteilungen von  $\Omega$ .)  $\square$

Im nächsten Schritt wollen wir das Integral für eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  definieren. Die Idee ist dabei eine Folge von Elementarfunktionen betrachten, die gegen  $f$  konvergiert, und dann einfach  $\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$  zu setzen. Das Problem ist dabei nur die Frage der Wohldefiniertheit, weil es natürlich unterschiedliche Folgen von Elementarfunktionen geben kann, die punktweise gegen dieselbe Funktion  $f$  konvergieren. Leider zeigt das folgende Beispiel, dass die zugehörigen Folgen von Integralen unterschiedliche Limes besitzen können.

**Beispiel 1.61** Gegeben sei der Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , sowie für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  die Elementarfunktionen  $f_k, g_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  mit

$$f_k(x) = 0 \quad \text{und} \quad g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{für } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 0$ , aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\lambda = 0 \neq 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k d\lambda.$$

Von zentraler Bedeutung für die Integrationstheorie nach Lebesgue ist die Erkenntnis, dass sich **das Problem der Wohldefiniertheit lösen lässt, wenn man sich auf *monoton wachsende Folgen von Elementarfunktionen* beschränkt**. In der Tat ist dies der Grund für das beobachtete Scheitern im Beispiel 1.61, denn die dort betrachtete Funktionenfolge  $(g_n)$  ist nicht monoton. Der folgende Satz zeigt zunächst, dass sich jede nichtnegative messbare Funktion als Limes einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen darstellen lässt.

**Satz 1.62** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eine messbare Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Elementarfunktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ , die punktweise gegen  $f$  konvergiert, d.h. es gilt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

**Beweis:** Wir unterteilen das Intervall  $[0, \infty]$  in  $[0, n[$  und  $[n, \infty]$ , sowie das Intervall  $[0, n[$  in  $n2^n$  rechts-halboffene Intervalle der Länge  $2^{-n}$ . Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} A_{n,k} &:= \left\{ x \in \Omega \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad k = 1, \dots, n2^n, \\ B_n &:= \{ x \in \Omega \mid f(x) \geq n \}. \end{aligned}$$

Wegen der Messbarkeit von  $f$  sind diese Mengen messbar und daher ist

$$f_n := \left( \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} \right) + n \chi_{B_n}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Elementarfunktion in Normaldarstellung. Offenbar ist  $(f_n)$  monoton wachsend und  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .  $\square$

Vor der Definition des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen lösen wir nun das Problem der Wohldefiniertheit mithilfe des folgenden Satzes und des anschließenden Korollars.

**Satz 1.63** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  eine Elementarfunktion und  $(f_n)$  eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ . Dann gilt:

$$f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

**Beweis:** Für  $f = 0$  ist der Satz trivial, da dann  $\int f \, d\mu = 0$  gilt. Sei also  $f \neq 0$  und  $f(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  mit  $\alpha_1 < \dots < \alpha_m$ , sowie

$$A := \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}, \quad \alpha := \min \{f(x) \mid x \in A\}, \quad \beta := \alpha_m.$$

Dann gilt  $\alpha, \beta > 0$  (sowie  $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ). Sei  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \alpha$  beliebig und

$$A_n := \{x \in A \mid f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^m (\{x \in A \mid f_n(x) \geq \alpha_k - \varepsilon\} \cap \{x \in A \mid f(x) = \alpha_k\})$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind die  $A_n$  als Vereinigungen von Schnitten messbarer Mengen alle messbar und wegen der Monotonie der Folge  $(f_n)$  und der Eigenschaft  $f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  gilt

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Sei weiter  $B_0 = A_0$  und  $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$  für  $k \geq 1$ . Dann sind die  $B_k$  paarweise disjunkt und messbar und es gilt

$$A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k.$$

Damit erhalten wir insbesondere wegen der  $\sigma$ -Additivität des Maßes  $\mu$ , dass

$$\mu(A_n) = \sum_{k=0}^n \mu(B_k) \quad \text{und} \quad \mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k)$$

und daher  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ . Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle.

*Fall 1:*  $\mu(A) = \infty$ . In diesem Fall gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$ . Da nach Definition von  $A_n$  außerdem  $f_n \geq (f - \varepsilon)\chi_{A_n} \geq (\alpha - \varepsilon)\chi_{A_n}$  gilt, erhalten wir aus der Monotonie des Integrals

$$\int f_n \, d\mu \geq (\alpha - \varepsilon)\mu(A_n),$$

woraus wegen  $\alpha - \varepsilon > 0$  dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \infty$  folgt und die behauptete Ungleichung trivialerweise erfüllt ist.

*Fall 2:*  $\mu(A) < \infty$ . In diesem Fall gilt nach Konstruktion von  $A_n$ , dass

$$f_n + (\beta - \varepsilon)\chi_{A \setminus A_n} + \varepsilon\chi_A \geq (f - \varepsilon)\chi_{A_n} + (f - \varepsilon)\chi_{A \setminus A_n} + \varepsilon\chi_A = (f - \varepsilon)\chi_A + \varepsilon\chi_A = f.$$

Daher erhalten wir die Abschätzung

$$\int f_n \, d\mu + (\beta - \varepsilon)\mu(A \setminus A_n) + \varepsilon\mu(A) \geq \int f \, d\mu,$$

woraus wir wegen  $\mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  durch Grenzübergang die Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu + \varepsilon\mu(A) \geq \int f \, d\mu$$

erhalten. Da  $\varepsilon$  beliebig war und  $\mu(A)$  endlich ist, erhalten wir schließlich die im Satz behauptete Ungleichung.  $\square$

**Korollar 1.64** Seien  $(f_n), (g_n)$  zwei monoton wachsende Folgen von Elementarfunktionen  $f_n, g_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

**Beweis:** Setze  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . Dann gilt für  $m \in \mathbb{N}$  fest, dass

$$f_m \leq f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

Daher erhalten wir mit Satz 1.63, dass

$$\int f_m \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

Die andere Ungleichung beweisen wir analog durch Rollentausch von  $f_n$  und  $g_n$ .  $\square$

**Definition 1.65** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $(f_n)$  eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ . Dann heißt

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

das Integral von  $f$  über  $\Omega$ .

Dank Satz 1.62 ist garantiert, dass jede nichtnegative messbare Funktion ein Integral besitzt und wegen Korollar 1.64 ist dieses auch wohldefiniert.

**Satz 1.66** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $\alpha \geq 0$ . Dann sind auch  $f + g$  und  $\alpha f$  messbar und es gilt:

1) (“Linearität” des Integrals):

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu \quad \text{und} \quad \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

2) (Monotonie des Integrals): Aus  $f \leq g$  folgt  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ .

**Beweis:** Übung. (Nutzen Sie Korollar 1.51 und Satz 1.62 um die Messbarkeit von  $f + g$  und  $\alpha f$  zu zeigen und nutzen Sie dann die entsprechenden Eigenschaften des Integrals für Elementarfunktionen.)  $\square$

Wir kommen nun zur eigentlichen Definition des *Lebesgue-Integrals*. Dabei verzichten wir letztendlich auch auf die Nichtnegativität der betrachteten messbaren Funktionen.

**Definition 1.67 (Lebesgue-Integral)** Eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt integrierbar über  $\Omega$ , falls

$$\int f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall ist das Integral von  $f$  (über  $\Omega$ ) definiert durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

**Bemerkung 1.68** Für die Wohldefiniertheit des Integrals einer messbaren Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  reicht es bereits zu fordern, dass wenigstens eines der beiden Integrale  $\int f^+ \, d\mu$  und  $\int f^- \, d\mu$  endlich ist. In diesem Fall bezeichnet man eine Funktion als *quasiintegrierbar* und definiert auch für diese ein Integral durch

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}},$$

womit wir dann eine echte Fortsetzung des Integrals aus Definition 1.65 erhalten. Wir werden quasiintegrierbare Funktionen im Rahmen der Vorlesung allerdings nicht weiter untersuchen.

**Beispiel 1.69** Wir betrachten den Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ .

- 1) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1$ . Es gilt also  $f = \chi_{\mathbb{R}}$  und  $f$  ist insbesondere eine Elementarfunktion. Wegen

$$\int f^+ d\lambda = \int f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{R}) = \infty$$

ist  $f$  nicht integrierbar über  $\mathbb{R}$ .

- 2) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1]^2 \\ -2 & \text{für } x \in [0, 2]^2 \setminus [0, 1]^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar über  $\mathbb{R}^2$ , denn wie Sie leicht nachrechnen gilt  $\int f^+ d\lambda = \lambda^2([0, 1]^2) = 1$  und  $\int f^- d\lambda = 2 \cdot \lambda([0, 2]^2 \setminus [0, 1]^2) = 6$ . Somit erhalten wir  $\int f d\lambda = -5$ .

- 3) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{k^2} & \text{für } x \in [k-1, k[, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

ist integrierbar. Um dies zu zeigen, definieren wir uns eine Folge von Elementarfunktionen  $(f_n)$ , die monoton wachsend gegen  $f$  konvergiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x \geq n \\ f(x) & \text{für } x \in [0, n[ \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \lambda([k-1, k[) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

**Satz 1.70 (Monotonie des Integrals)** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar. Dann gilt:

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

**Beweis:** Falls  $f \leq g$ , so gilt auch  $f^+ \leq g^+$  und  $g^- \leq f^-$ , sowie

$$f^+ + g^- \leq f^- + g^+.$$

Aus der Monotonie und Linearität des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen erhalten wir damit

$$\int f^+ d\mu + \int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu.$$

Da wegen der Integrierbarkeit alle auftretenden Integrale endlich sind, gilt schließlich auch

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu. \quad \square$$



**Satz 1.71 (Linearität des Integrals)** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g$  und  $\alpha f$  integrierbar und es gilt:

$$1) \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \quad 2) \int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

**Beweis:**

1) Mit Fallunterscheidung zeigt man die folgende Gleichheit (Übung):

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Da alle hier auftretenden Funktionen nichtnegativ sind, gilt wegen der Linearität des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen, dass

$$\int (f + g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f + g)^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu.$$

In dieser Gleichheit sind alle auftretenden Integrale endlich, denn für  $f^\pm$  und  $g^\pm$  folgt das aus der Integrierbarkeit von  $f$  und  $g$  und für  $(f + g)^\pm$  wegen  $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+$  und  $(f + g)^- \leq f^- + g^-$  aus der Monotonie des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen. Folglich ist  $f + g$  integrierbar und wir erhalten

$$\int (f + g)^+ \, d\mu - \int (f + g)^- \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu$$

was äquivalent zur gewünschten Gleichung ist.

2) beweisen wir analog mit einer Fallunterscheidung für  $c \geq 0$  und  $c < 0$ .  $\square$

**Definition 1.72** Sei  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar, sowie  $A \in \mathcal{A}$ . Dann heißt  $f$  integrierbar über  $A$ , falls  $\chi_A f$  integrierbar über  $\Omega$  ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f \, d\mu := \int \chi_A f \, d\mu$$

das Integral von  $f$  über  $A$ .

**Bemerkung 1.73** Seien  $A, B \in \mathcal{A}$  disjunkt und  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar über  $A \cup B$ . Dann gilt  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$  und daher  $(\chi_{A \cup B} f)^\pm = (\chi_A f)^\pm + (\chi_B f)^\pm$ . Ausnutzen der Linearität für Integrale nichtnegativer messbarer Funktionen und anschließendes Zusammensetzen der endlichen Integrale liefert

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Speziell gilt, falls  $f$  auch integrierbar über  $\Omega$  ist, dass

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{\Omega \setminus A} f \, d\mu.$$

Wir kommen nun auf Nullmengen zurück, d.h. Mengen  $N \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(N) = 0$ .

**Satz 1.74** *Sei  $N \subseteq \Omega$  eine Nullmenge und  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann ist  $f$  integrierbar über  $N$  und es gilt*

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

**Beweis:** Wir beweisen den Satz durch *maßtheoretische Induktion*, d.h. in drei Schritten, indem wir zunächst Elementarfunktionen, dann nichtnegative messbare Funktionen und zum Schluss integrierbare Funktionen betrachten:

- 1)  *$f$  ist eine Elementarfunktion:* In diesem Fall gibt es  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  und disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  mit

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k},$$

woraus folgt, dass

$$\chi_N f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_N \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{N \cap A_k}$$

gilt. Da die Mengen  $N \cap A_k \in \mathcal{A}$  Nullmengen sind, folgt  $\int_N f \, d\mu = 0$ .

- 2)  *$f \geq 0$  ist messbar:* In diesem Fall gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_n)$  von Elementarfunktionen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ . Dann ist

$$\chi_N f = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_N f_n$$

Grenzwert der monoton wachsenden Folge  $(\chi_N f_n)$ , die ebenfalls aus Elementarfunktionen besteht. Mithilfe von 1) erhalten wir dann

$$\int_N f \, d\mu = \int \chi_N f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_N f_n \, d\mu = 0.$$

- 3)  *$f$  ist messbar:* Dieser Fall folgt aus 2) durch Betrachtung von  $f^+$  und  $f^-$ .  $\square$

Satz 1.74 besagt, dass die Werte einer messbaren Funktion, die sie auf einer Nullmenge annimmt keine Rolle bei der Integration spielen, da das Integral jeder beliebigen messbaren Funktion auf einer Nullmenge den Wert Null annimmt. Dies motiviert die folgende Ausdrucksweise:

**Definition 1.75** *Sei  $A(x)$  eine Aussage (genauer: eine Aussageform mit Variable  $x$ ). Wir sagen  $A(x)$  gilt fast überall oder  $A(x)$  gilt für fast alle  $x \in \Omega$ , falls es eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$  gibt, so dass  $A(x)$  für alle  $x \in \Omega \setminus N$  gilt.*

Im folgenden Korollar sammeln wir ein paar Aussagen über Integrale, die im Zusammenhang mit Nullmengen stehen. Teil 3) besagt insbesondere, dass wir integrierbare Funktionen auf einer Nullmenge geeignet abändern können, ohne dadurch den Wert des Integrals zu verändern.

**Korollar 1.76** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann gilt:

- 1) Ist  $f$  integrierbar, so ist  $f$  fast überall endlich, d.h. es gilt fast überall  $f(x) \in \mathbb{R}$ .
- 2) Sind  $f, g \geq 0$  oder sind  $f, g$  integrierbar, so gilt:

$$f = g \text{ fast überall} \implies \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

- 3) Sei  $N \in \mathcal{A}$  eine Nullmenge. Ist  $f \geq 0$  oder ist  $f$  integrierbar und gilt

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus N, \\ 0 & \text{falls } x \in N, \end{cases}$$

so ist auch  $\tilde{f}$  messbar bzw. integrierbar und es gilt  $\int f \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$ .

- 4) Ist  $f \geq 0$  und  $\int f \, d\mu = 0$ , so gilt fast überall  $f = 0$ .

**Beweis:** 1) Übung.

- 2) Sei  $N := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ . Dann ist  $N$  eine Nullmenge und es folgt:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega \setminus N} f \, d\mu + \int_N f \, d\mu = \int_{\Omega \setminus N} g \, d\mu + \int_N g \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

denn es gilt  $f = g$  auf  $\Omega \setminus N$  und andererseits

$$\int_N f \, d\mu = \int_N g \, d\mu = 0.$$

- 3) Es gilt

$$\tilde{f}^{-1}([c, \infty]) = \begin{cases} f^{-1}([c, \infty]) \setminus N & \text{falls } c > 0, \\ f^{-1}([c, \infty]) \cup N & \text{falls } c \leq 0. \end{cases}$$

Damit folgt die Messbarkeit von  $\tilde{f}$  aus der Messbarkeit von  $f$ . Der Rest folgt mit 2) angewendet auf  $f, \tilde{f}$  im Fall  $f \geq 0$  bzw. auf  $f^+, \tilde{f}^+$  und  $f^-, \tilde{f}^-$  im Fall, dass  $f$  integrierbar ist.

- 4) Sei  $N := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ . Wir zeigen, dass  $N$  eine Nullmenge ist. Setze

$$N_1 := \{x \in \Omega \mid 1 < f(x)\} \quad \text{und} \quad N_n := \left\{x \in \Omega \mid \frac{1}{n} < f(x) \leq \frac{1}{n-1}\right\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Dann ist  $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$  disjunkte Vereinigung der Mengen  $N_n$  und daher messbar. Angenommen  $\mu(N) \neq 0$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , so dass  $\mu(N_n) \neq 0$ . Dann erhalten wir aber einen Widerspruch aus

$$\int f \, d\mu \geq \int_{N_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(N_n) > 0. \quad \square$$

## 1.6 Die großen Konvergenzsätze

Bevor wir zeigen, dass jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auch Lebesgue-integrierbar ist und dass in diesem Fall beide Integralbegriffe übereinstimmen, werden wir zunächst auf die wichtigsten Vorzüge des Lebesgue-Integrals eingehen. Dazu erinnern wir uns noch einmal daran, dass wir in Analysis I den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen benötigten, um zu zeigen, dass auch die zugehörigen Integrale gegen das Integral der Grenzfunktion konvergierten (siehe Analysis I Satz 8.7). Mit Hilfe der Lebesgue-Theorie können wir die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz abschwächen und gehen daher im Folgenden immer davon aus, dass mit *Konvergenz* der Begriff der *punktweisen Konvergenz* gemeint ist, wenn wir von dem Grenzwert einer Funktionenfolge sprechen. Die ersten beiden Konvergenzsätze befassen sich mit dem Integral nichtnegativer messbarer Funktionen.

### Satz 1.77 (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levi, 1906)

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu.$$

**Beweis:** Sei  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Dann ist  $f$  messbar und wegen  $f_n \leq f$  folgt für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu. \quad (1.5)$$

Die Idee ist daher, eine monoton wachsende Folge  $(\tilde{f}_n)$  von Elementarfunktionen zu konstruieren mit der Eigenschaft

$$\tilde{f}_n \leq f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n = f. \quad (1.6)$$

Dann erhalten wir per Definition des Integrals und aus (1.5), dass

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{f}_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

womit der Satz bewiesen ist. Wir konstruieren die Folge  $(\tilde{f}_n)$ : Da  $f_n$  messbar ist, existiert eine monoton wachsende Folge  $(f_{n,m})$  von Elementarfunktionen mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n,m} = f_n$ . Setze

$$\tilde{f}_n := \max\{f_{0,n}, \dots, f_{n,n}\}.$$

Dann ist  $\tilde{f}_n$  eine Elementarfunktion und für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\tilde{f}_n := \max\{f_{0,n}, \dots, f_{n,n}\} \leq \max\{f_{0,n+1}, \dots, f_{n+1,n+1}\} = \tilde{f}_{n+1},$$

d.h.  $(\tilde{f}_n)$  ist monoton wachsend. Ist nun  $k \leq n$ , so gilt  $f_{k,n} \leq f_k \leq f_n$  und daher auch  $\tilde{f}_n \leq f_n$ . Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

Andererseits gilt für  $k \leq n$  nach Konstruktion  $f_{k,n} \leq \tilde{f}_n$  und daher

$$f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k,n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n,$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  woraus wir schließlich die andere Ungleichung

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n$$

erhalten. Die Folge  $(\tilde{f}_n)$  konvergiert also gegen  $f$ .  $\square$

**Korollar 1.78** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Dann gilt:

$$\int \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu$$

**Beweis:** Dies folgt leicht mithilfe von Satz 1.77, da die Partialsummenfolge  $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$  wegen der Nichtnegativität der Funktionen  $f_n$  eine monoton wachsende Funktionenfolge darstellt.  $\square$

**Satz 1.79 (Lemma von Fatou)** Sei  $(f_n)$  Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Dann gilt:

$$\int \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

**Beweis:** Betrachte die monoton wachsende Folge  $(g_n)$  mit  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . Dann gilt nach dem Satz von Beppo Levi, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \right) d\mu = \int \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu.$$

Sei  $k \geq n$ . Dann gilt  $g_n \leq f_k$  und daher

$$\int g_n d\mu \leq \int f_k d\mu$$

für alle  $k \geq n$ . Dann folgt aber auch

$$\int g_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k d\mu.$$

Durch Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir daraus schließlich

$$\int \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int f_k d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \quad \square$$

**Satz 1.80 (Satz von der majorisierten Konvergenz, Satz von Lebesgue, 1910)**

Sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die fast überall gegen eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Ferner sei  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so dass

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und fast alle  $x \in \Omega$  gilt. Dann ist auch  $f$  integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

**Beweis:** Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $(f_n)$  auf ganz  $\Omega$  gegen  $f$  konvergiert und dass  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in \Omega$  und  $g(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  gilt. Andernfalls ändern wir  $f_n$ ,  $f$  und  $g$  auf einer Nullmenge geeignet ab (vgl. Korollar 1.76). Dann gilt insbesondere

$$|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq g(x) < \infty$$

für alle  $x \in \Omega$ . Da  $|f|$  eine messbare nichtnegative Funktion ist, existiert das Integral  $\int |f| \, d\mu$ . Wegen  $f^+, f^- \leq |f| \leq g = |g|$  und der Integrierbarkeit von  $g$  folgt

$$\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty,$$

d.h.  $f$  ist integrierbar. Es bleibt noch die Gleichheit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

nachzuweisen. Dazu zeigen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu, \quad (1.7)$$

denn da “ $\liminf \leq \limsup$ ” immer gilt, folgt damit “ $\liminf = \limsup = \lim$ ” und damit die gewünschte Gleichheit.

Wegen  $|f|, |f_n| \leq g$  sind die Funktionen  $f + g$  und  $f_n + g$ ,  $n \in \mathbb{N}$  alle nichtnegativ. Anwendung des Lemmas von Fatou liefert dann

$$\int (f + g) \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g) \, d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n + g) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g) \, d\mu,$$

woraus durch Subtraktion von  $\int g \, d\mu$  die zweite Ungleichung in (1.7) folgt.

Analog liefert das Lemma von Fatou für die nichtnegativen Funktionen  $-f + g$  und  $-f_n + g$ , dass

$$-\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( -\int f_n \, d\mu \right) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu,$$

was die erste Ungleichung in (1.7) beweist.  $\square$

Die Funktion  $g$  aus dem Satz wird auch gerne *integrierbare Majorante* genannt. Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Lebesgue ist das folgende einfache Kriterium für die Integrierbarkeit einer Funktion.

**Korollar 1.81** Seien  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar und  $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar, so dass fast überall  $|f| \leq g$  gilt. Dann ist auch  $f$  integrierbar.

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue sind wir nun auch dazu in der Lage, die Riemann- und Lebesgue-Theorie zusammenzuführen.

**Satz 1.82** Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei Riemann-integrierbar. Setze  $f$  trivial auf  $\mathbb{R}$  fort durch  $f(x) := 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, so ist  $f$  Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Beweis:** Für eine Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es nach Satz 7.13 aus Analysis I zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  Treppenfunktionen  $\varphi_n, \psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_n(x) \, dx - \int_a^b \varphi_n(x) \, dx < \frac{1}{n}.$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) \, dx.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $(\varphi_n)$  monoton wachsend und  $(\psi_n)$  monoton fallend ist. (Andernfalls betrachte  $\tilde{\varphi}_n = \max\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  und  $\tilde{\psi}_n = \min\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ , dann gilt immer noch  $\tilde{\varphi}_n \leq f \leq \tilde{\psi}_n$  und  $\int \tilde{\psi}_n - \int \tilde{\varphi}_n \leq \int \psi_n - \int \varphi_n < \frac{1}{n}$ .) Setze  $\varphi_n$  und  $\psi_n$  trivial auf  $\mathbb{R}$  fort. Dann sind  $\varphi_n^+, \varphi_n^-, \psi_n^+, \psi_n^-$  Elementarfunktionen und es gilt

$$\int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \int \varphi_n \, d\lambda \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_n(x) \, dx = \int \psi_n \, d\lambda.$$

Außerdem existieren wegen der Monotonie  $\varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  und  $\psi := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$  und es gilt  $\varphi \leq f \leq \psi$ . Dann ist die messbare Funktion  $\psi - \varphi$  nichtnegativ und es folgt mit Hilfe des Lemmas von Fatou, dass

$$0 \leq \int (\psi - \varphi) \, d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\psi_n - \varphi_n) \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int \psi_n \, d\lambda - \int \varphi_n \, d\lambda \right) = 0.$$

Damit gilt nach Korollar 1.76 fast überall  $\varphi = \psi$ . Wegen  $\varphi \leq f \leq \psi$  gilt dann auch fast überall  $\varphi = f = \psi$ . Weiter gilt  $\varphi_0 \leq \varphi_n \leq \varphi \leq \psi \leq \psi_0$  und daher  $\varphi_n^+ \leq \psi_0^+$  und  $\varphi_n^- \leq \varphi_0^-$ , woraus wir

$$|\varphi_n| \leq \varphi_0^- + \psi_0^+ =: g$$

erhalten. Damit ist  $g$  als Elementarfunktion eine integrierbare Majorante der Folge  $(\varphi_n)$ . Somit ist  $\varphi$  (genauso wie  $f$ ) nach dem Satz von Lebesgue integrierbar und es gilt

$$\int f \, d\lambda = \int \varphi \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

**Beispiel 1.83** 1) Betrachte die Funktionenfolge  $(f_n)$  der durch die Vorschrift

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegebenen Funktionen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir wissen aus Analysis I Beispiel 8.1, dass diese Folge punktweise gegen die Funktion  $f = \chi_{\{1\}}$  konvergiert (bzw. fast überall gegen die Nullfunktion). Jedoch ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, so dass Satz 8.7 aus Analysis I nicht angewendet werden kann, um zu zeigen, dass sich Grenzwertbildung und Integration hier “vertauschen” lassen. Andererseits gilt  $|f_n| \leq \chi_{[0,1]}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2) Erlauben wir bei der Riemann-Theorie allerdings auch uneigentliche Integrale, so ergeben sich Unterschiede zur Lebesgue-Theorie. Betrachten wir z.B. die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} & \text{für } n-1 \leq x < n, \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Andererseits erhalten wir  $\int f^+ \, d\lambda = \infty = \int f^- \, d\lambda$ , d.h. das Lebesgue-Integral von  $f$  existiert nicht.

Da für Riemann-integrierbare Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  das Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen, verwenden wir im Folgenden die für das Riemann-Integral übliche Bezeichnung auch für das Lebesgue-Integral, d.h. wir schreiben

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{statt} \quad \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Insbesondere stehen uns nun zur Berechnung von Integralen alle Methoden aus Analysis I zur Verfügung wie z.B. der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 7.27 in Analysis I) für Integrale stetiger Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .



## 1.7 Produktmaße

Nachdem wir im letzten Kapitel gesehen haben, wie wir Integrale im Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  berechnen können, wenden wir uns nun dem Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$  für  $n > 1$  zu. Unser Ziel ist es, diesen Fall auf den Fall  $n = 1$  zurückzuführen. Dies gelingt uns mit Hilfe von sogenannten *Produktmaßen*, die auf *Produkt- $\sigma$ -Algebren* definiert sind. Im Folgenden seien jeweils  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  zwei Maßräume.

**Definition 1.84** Die von allen Mengen der Form  $A_1 \times A_2$ ,  $A_i \in \mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, 2$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega_1 \times \Omega_2$  heißt Produkt- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  und wird mit  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  bezeichnet.

Man beachte, dass im Allgemeinen  $\{A_1 \times A_2 \mid (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} \subsetneq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  gilt. Kennen wir jedoch hinreichend große Erzeugendensysteme von  $\mathcal{A}_i$ , so erhalten wir daraus in einfacher Weise ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

**Satz 1.85** Für  $i = 1, 2$  sei  $\mathcal{E}_i$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}_i$ , das  $\Omega_i$  ausschöpft, d.h. es gebe Folgen  $(E_i^{(k)})$  von Mengen  $E_i^{(k)} \in \mathcal{E}_i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit

$$\Omega_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_i^{(k)}.$$

Dann ist  $\mathcal{E} := \{E_1 \times E_2 \mid (E_1, E_2) \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2\}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , d.h. es gilt  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

**Beweis:** Die Inklusion  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  ist trivial, da  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Die andere Inklusion zeigen wir mit Hilfe des Prinzips der guten Mengen. Dazu sei

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A_1 \subseteq \Omega_1 \mid A_1 \times \Omega_2 \in \sigma(\mathcal{E})\}.$$

Dann ist (wie man unmittelbar nachweist)  $\tilde{\mathcal{A}}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Ferner gilt für alle  $E_1 \in \mathcal{E}_1$ , dass

$$E_1 \times \Omega_2 = E_1 \times \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} E_2^{(k)} \right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (E_1 \times E_2^{(k)}) \in \sigma(\mathcal{E})$$

und daher  $\mathcal{E}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ , sowie  $\mathcal{A}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ . Dadurch erhalten wir

$$A_1 \times \Omega_2 \in \sigma(\mathcal{E})$$

für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und analog zeigen wir  $\Omega_1 \times A_2 \in \sigma(\mathcal{E})$  für alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Dann gilt aber für alle  $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ , dass

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) \in \sigma(\mathcal{E})$$

und daher  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ .  $\square$

**Bemerkung 1.86** Für unsere Borelschen  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{B}^n$  über  $\mathbb{R}^n$  erhalten wir einige wichtige Folgerungen aus Satz 1.85:

- 1) Es gilt  $\mathcal{B}^{n_1} \otimes \mathcal{B}^{n_2} = \mathcal{B}^{n_1+n_2}$ , denn wählen wir als Erzeugendensysteme  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  die  $n_1$ - bzw.  $n_2$ -dimensionalen achsenparallelen Quader, so ist  $\mathcal{E}$  aus dem Satz gerade die Menge der  $(n_1 + n_2)$ -dimensionalen Quader.
- 2) Sind  $B_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$  und  $B_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$  Borel-Mengen, so ist auch  $B_1 \times B_2$  eine Borel-Menge.
- 3)  $\mathcal{B}^n$  wird von der Menge aller offenen Mengen erzeugt. Dies folgt daraus, dass  $\mathcal{B}^1$  schon von der Menge  $\{ ] - \infty, a[ \mid a \in \mathbb{R} \}$  erzeugt wird (Übung).

**Definition 1.87** Sei  $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ . Dann heißen die Mengen

$$A_{x_1} := \{x_2 \in \Omega_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \quad \text{und} \quad A_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}$$

der  $x_1$ -Schnitt bzw.  $x_2$ -Schnitt von  $A$ .

**Satz 1.88** Sei  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Dann gilt  $A_{x_1} \in \mathcal{A}_2$  und  $A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$  für alle  $x_1 \in \Omega_1$ ,  $x_2 \in \Omega_2$ .

**Beweis:** Wir beweisen nur die Aussage für  $x_2$ -Schnitte, der Beweis für  $x_1$ -Schnitte ist analog. Wir benutzen wieder das Prinzip der guten Mengen. Sei also  $x_2 \in \Omega_2$  fest. Setze

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A_{x_2} \in \mathcal{A}_1\}.$$

Dann ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra (Übung) und für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$  gilt:

$$(A_1 \times A_2)_{x_2} = \begin{cases} A_1 & \text{für } x_2 \in A_2, \\ \emptyset & \text{für } x_2 \notin A_2 \end{cases}$$

und daher  $(A_1 \times A_2)_{x_2} \in \mathcal{A}_1$ . Da  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  durch alle Mengen dieser Form erzeugt wird, erhalten wir  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$  und daher  $A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$  für alle  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .  $\square$

Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion eines Maßes  $\mu_1 \otimes \mu_2$  auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  mit der Eigenschaft

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Dazu benötigen wir zwei Funktionen, deren Messbarkeit wir im folgenden Satz nachweisen, sowie einen weiteren Begriff für Maßräume.

**Definition 1.89** Ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt  $\sigma$ -endlich, falls  $\Omega$  durch  $\mathcal{A}$  bzgl.  $\mu$  ausgeschöpft wird, d.h. wenn es Mengen  $\Omega^{(n)} \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass gilt:

$$\mu(\Omega^{(n)}) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)}$$

**Satz 1.90** Seien die Maßräume  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$   $\sigma$ -endlich und  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Dann sind die durch

$$s_A^{(1)}(x_1) := \mu_2(A_{x_1}) \quad \text{und} \quad s_A^{(2)}(x_2) := \mu_1(A_{x_2})$$

definierten Funktionen  $s_A^{(i)} : \Omega_i \rightarrow [0, \infty]$  messbar (genauer:  $\mathcal{A}_i$ -messbar).

**Beweis:** Wir zeigen nur die Messbarkeit von  $s_A := s_A^{(1)}$ , die Messbarkeit von  $s_A^{(2)}$  folgt analog. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

*Fall 1):*  $\mu_2(\Omega_2) < \infty$ . Wir nutzen wieder das Prinzip der guten Mengen. Sei

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid s_A \text{ ist messbar}\}.$$

Wir müssen also zeigen, dass  $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  gilt. Dazu zeigen wir zunächst, dass  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist:

i) Sei  $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ . Es gilt

$$s_\Omega(x_1) = \mu_2((\Omega_1 \times \Omega_2)_{x_1}) = \mu_2(\Omega_2).$$

Also ist  $s_\Omega(x_1)$  konstant und daher messbar. Daraus folgt  $\Omega \in \mathcal{D}$ .

ii) Sei  $A \in \mathcal{D}$ , d.h.  $s_A$  ist messbar. Dann gilt für  $x_1 \in \Omega_1$ , dass

$$s_\Omega(x_1) = \mu_2(\Omega_2) = \mu_2((\Omega \setminus A)_{x_1}) + \mu_2(A_{x_1}) = s_{\Omega \setminus A}(x_1) + s_A(x_1),$$

da  $\Omega_2 = \Omega_{x_1} = (\Omega \setminus A)_{x_1} \dot{\cup} A_{x_1}$ . Folglich ist  $s_{\Omega \setminus A} = \mu_2(\Omega_2) - s_A$  als Differenz einer konstanten Funktion und einer messbaren Funktion messbar, d.h. es gilt  $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$ .

iii) Seien  $A^{(k)} \in \mathcal{D}$  paarweise disjunkt und  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ . Dann gilt

$$s_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{x_1}^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1}^{(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{A^{(k)}}(x_1),$$

d.h.  $s_A$  ist punktweiser Grenzwert der messbaren Funktionen  $s_{A^{(k)}}$  und somit selbst messbar. Also gilt  $s_A \in \mathcal{D}$ .

$\mathcal{D}$  ist also ein Dynkin-System. Außerdem gilt für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ , dass

$$s_{A_1 \times A_2}(x_1) = \mu_2((A_1 \times A_2)_{x_1}) = \mu_2(A_2) \chi_{A_1}(x_1),$$

denn  $(A_1 \times A_2)_{x_1} = A_2$  falls  $x_1 \in A_1$  und  $(A_1 \times A_2)_{x_1} = \emptyset$  falls  $x_1 \notin A_1$ . Damit ist  $s_{A_1 \times A_2}$  als Produkt einer Konstanten und einer messbaren Funktion messbar. Somit enthält  $\mathcal{D}$  alle Mengen der Form  $A_1 \times A_2$  mit  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Da das System aus letzteren Mengen durchschnitts stabil ist, ist das davon erzeugte Dynkin-System  $\mathcal{D}_0$  nach Lemma 1.39 eine  $\sigma$ -Algebra und wir erhalten

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$$

wegen der Minimalität von  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  als  $\sigma$ -Algebra und von  $\mathcal{D}_0$  als Dynkin-System. Folglich gilt  $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , was zu zeigen war.

*Fall 2):*  $\mu_2(\Omega_2) = \infty$ . Da  $\Omega_2$   $\sigma$ -endlich ist, gibt es Mengen  $\Omega_2^{(k)}$  mit  $\mu_2(\Omega_2^{(k)}) < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\Omega_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_2^{(k)}.$$

Nach Lemma 1.20 können wir annehmen, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind. (Nach der Konstruktion im Beweis von Lemma 1.20 ändern sich zwar dann möglicherweise die Maße dieser Mengen, sie bleiben aber wegen der Monotonie des Maßes endlich, weil die neu konstruierten Mengen Teilmengen der jeweiligen ursprünglichen Mengen sind.) Damit erhalten wir für  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , dass

$$s_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A_{x_1} \cap \Omega_2^{(k)})\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1} \cap \Omega_2^{(k)}).$$

Da  $\mu_2^{(k)}$  mit  $\mu_2^{(k)}(B) := \mu_2(B \cap \Omega_2^{(k)})$  ein endliches Maß auf  $\Omega_2$  ist, sind die Funktionen  $x_1 \mapsto \mu_2^{(k)}(A_{x_1})$  nach Fall 1) alle messbar. Daher ist auch  $s_A$  als punktweiser Grenzwert dieser Funktionen messbar.  $\square$

Da wir im Folgenden mit Integralen über zwei verschiedenen Maßräumen zu tun haben, wollen wir unsere Notation etwas übersichtlicher gestalten, indem wir die Abhängigkeit einer Funktion  $f : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$  von der Variable  $x_i \in \Omega_i$  zum Ausdruck bringen wollen. Wir schreiben daher im Folgenden

$$\int f(x_i) d\mu_i(x_i) := \int f d\mu_i.$$

**Satz 1.91 (Produktmaß)** *Seien die Maßräume  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$   $\sigma$ -endlich. Dann gibt es genau ein Maß  $\mu$  (genannt Produktmaß  $\mu_1 \otimes \mu_2$ ) auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  mit der Eigenschaft*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad (1.8)$$

*für alle  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und alle  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Dieses Maß  $\mu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$  ist gegeben durch*

$$\mu(A) := \int \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2(x_2). \quad (1.9)$$

**Beweis:** 1) Die Eindeutigkeit des Maßes  $\mu$  folgt sofort aus (1.8) mit Hilfe von Satz 1.41, da die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  von allen Mengen der Form  $A_1 \times A_2$  erzeugt wird.

2) Wir zeigen nun, dass die durch die erste Gleichheit in (1.9) definierte Funktion  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  ist. Die Eigenschaft  $(\mu)(\emptyset) = 0$  ist trivial, seien also  $A^{(k)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt und  $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ . Dann sind auch die Schnitte  $A_{x_1}^{(k)}$  paarweise disjunkt und da  $\mu_2$  ein Maß ist, folgt:

$$\mu_2(A_{x_1}) = \mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{x_1}^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1}^{(k)}).$$

Damit erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi bzw. mit Korollar 1.78, dass

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{x_1}^{(k)}) d\mu_1(x_1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int \mu_2(A_{x_1}^{(k)}) d\mu_1(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A^{(k)}),\end{aligned}$$

d.h.  $\mu$  ist  $\sigma$ -additiv und daher ein Maß.

3) Als nächstes zeigen wir die Produkteigenschaft (1.8). Dazu sei  $A := A_1 \times A_2$  für  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $A_2 \in \mathcal{A}_2$  beliebig. Da  $A_{x_1} = \emptyset$  für  $x_1 \notin A_1$  gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int \mu_2(A_{x_1}) \chi_{A_1}(x_1) d\mu_1(x_1) = \int \mu_2(A_2) \chi_{A_1}(x_1) d\mu_1(x_1) \\ &= \mu_2(A_2) \int \chi_{A_1}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu_2(A_2) \cdot \mu_1(A_1).\end{aligned}$$

4) Analog zu 3) zeigen wir die Produkteigenschaft (1.8) für  $\int \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2(x_2)$ . Wegen der Eindeutigkeit beweist dies insbesondere die zweite Gleichheit in (1.9).  $\square$

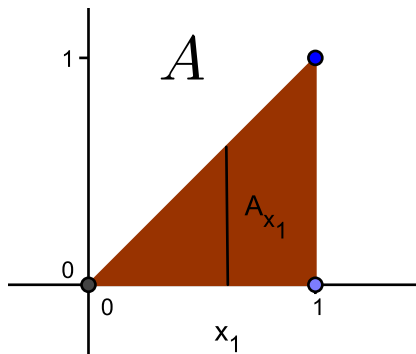
**Korollar 1.92** *Es gilt  $\lambda^{m+n} = \lambda^m \otimes \lambda^n$ . Bezeichnen wir die Variablen des  $\mathbb{R}^n$  mit  $x$  und die des  $\mathbb{R}^m$  mit  $y$ , so gilt speziell für  $A \in \mathcal{B}^{m+n}$ , dass*

$$\lambda^{m+n}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^m(A_x) d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(A_y) d\lambda^m(y).$$

**Beweis:** Dies folgt wegen  $\mathcal{B}^{m+n} = \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n$  sofort aus Satz 1.91, da  $\lambda^m \otimes \lambda^n$  die Produkteigenschaft (1.8) insbesondere für achsenparallele Quader erfüllt. Dadurch stimmt es auf den achsenparallelen Quadern im  $\mathbb{R}^{m+n}$  mit  $\lambda^{m+n}$  überein und wegen des Eindeutigkeitsatzes 1.41 folgt die Gleichheit der beiden Maße.  $\square$

**Beispiel 1.93** Wir benutzen Korollar 1.92 zur Inhaltsberechnung einiger Mengen des  $\mathbb{R}^n$ .

1) *Flächeninhalt eines Einheitsdreiecks:*



Wir betrachten das Einheitsdreieck  $A$  mit den Eckpunkten  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  und  $(0,1)$ . Für das Maß des  $x_1$ -Schnitts von  $A$  gilt:

$$\lambda^1(A_{x_1}) = \lambda^1([0, x_1]) = \begin{cases} x_1 & \text{für } x_1 \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$\lambda^2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(A_x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2) *Volumen der abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen Kugel vom Radius  $R$* 

Wir berechnen das Volumen der Kugel  $K_n(x_0, R) := K(x_0, R) := \overline{U_R(x_0)}$  um  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit Radius  $R > 0$ . Mit Hilfe von Korollar 1.43 erhalten wir

$$\lambda^n(K_n(x_0, R)) = R^n \lambda^n(K_n(0, 1)) = R^n \tau_n \quad \text{mit } \tau_n := \lambda^n(K_n(0, 1)).$$

Für  $n = 1$  erhalten wir

$$\tau_1 = \lambda^1(K_1(0, 1)) = \lambda^1([-1, 1]) = 2.$$

Für  $n \geq 1$  bestimmen wir nun eine Rekursionsformel. Dazu benötigen wir die  $x_{n+1}$ -Schnitte der  $(n+1)$ -dimensionalen Einheitskugel:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(0, 1)_{x_{n+1}} &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 \leq 1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 - x_{n+1}^2\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{für } |x_{n+1}| > 1, \\ K_n(0, r) & \text{für } |x_{n+1}| \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $r := \sqrt{1 - x_{n+1}^2}$ . Wegen  $\lambda^n(K_n(0, r)) = (1 - x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}} \tau_n$  erhalten wir damit mit der Substitution  $x_{n+1} = \cos t$ , dass

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^n(K_{n+1}(0, 1)_{x_{n+1}}) d\lambda^1(x_{n+1}) = \tau_n \int_{-1}^1 (1 - x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}} dx_{n+1} \\ &= \tau_n \int_{\pi}^0 (\sin t)^n (-\sin t) dt = \tau_n \int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1} dt. \end{aligned}$$

Mittels Induktion können Sie nun zeigen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\tau_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \quad \text{und} \quad \tau_{2n+1} = \left( \prod_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} \right) \pi^n.$$

Speziell gilt  $\tau_2 = \pi$ ,  $\tau_3 = \frac{4}{3}\pi$  bzw.  $\lambda^2(K_2(0, R)) = \pi R^2$  und  $\lambda^3(K_3(0, R)) = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

**Satz 1.94 (von Tonelli)** *Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume, sowie  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$  eine  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbare Funktion. Dann sind die Schnittfunktionen*

$$\begin{aligned} f_{x_2} : \Omega_1 &\rightarrow [0, \infty], & x_1 &\mapsto f(x_1, x_2) \\ \text{und } f_{x_1} : \Omega_2 &\rightarrow [0, \infty], & x_2 &\mapsto f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

*für alle  $x_i \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , messbar, sowie ebenso die Funktionen  $x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2$  und  $x_2 \mapsto \int f_{x_2} d\mu_1$  und mit der Notation  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$  gilt*

$$\int f d\mu = \int \left( \int f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int f_{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2$$

*bzw. in ausführlicherer Notation*

$$\int f(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2) = \int \left( \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int \left( \int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis mittels “maßtheoretischer Induktion”, wobei wir hier nach dem zweiten Schritt bereits fertig sind, da der Satz nur das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen behandelt.

*Fall 1:  $f$  ist eine Elementarfunktion.* In diesem Fall gibt es Skalare  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$  und Mengen  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  mit

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A^{(k)}}.$$

Offenbar gilt  $(\chi_{A^{(k)}})_{x_i} = \chi_{A_{x_i}^{(k)}}$  für alle  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  und daher folgt

$$f_{x_i} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_{x_i}^{(k)}}.$$

Damit ist  $f_{x_i}$  messbar für alle  $x_i \in \Omega_i$ , da alle Mengen  $A_{x_i}^{(k)}$  messbar sind. Weiter gilt für  $i = 1, 2$  und  $j = 3 - i$ , dass

$$\int f_{x_i} d\mu_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \chi_{A_{x_i}^{(k)}} d\mu_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_j(A_{x_i}^{(k)}).$$

Da die Funktionen  $x_i \mapsto \mu_j(A_{x_i}^{(k)})$  nach Satz 1.90 messbar sind, folgt damit die Messbarkeit der Funktionen  $x_i \mapsto \int f_{x_i} d\mu_j$ . Schließlich gilt

$$\int \left( \int f_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \mu_j(A_{x_i}^{(k)}) d\mu_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_1 \otimes \mu_2(A^{(k)}) = \int f d\mu_1 \otimes \mu_2$$

unter Benutzung von Satz 1.91.

*Fall 2:  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$  ist messbar.*

In diesem Fall existiert eine monoton wachsende Folge  $(f_n)$  von Elementarfunktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

für alle  $(x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ . Dann ist für  $i = 1, 2$  offenbar auch  $((f_n)_{x_i})$  eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen  $f_{x_i}$  konvergiert. Damit erhalten wir durch mehrfache Anwendung des Satzes von Beppo Levi aus Fall 1, dass

$$\begin{aligned} \int f d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_1 \otimes \mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left( \int (f_n)_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i \\ &= \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n)_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i = \int \left( \int f_{x_i} d\mu_j \right) d\mu_i \end{aligned}$$

für  $i = 1, 2$ , wobei  $j := 3 - i$ .  $\square$

**Satz 1.95 (von Fubini)** Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$   $\sigma$ -endliche Maßräume und  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion bzgl.  $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ . Dann sind die Schnittfunktionen  $f_{x_1} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_{x_2} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  aus dem Satz von Tonelli für  $\mu_i$ -fast alle  $x_i \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  integrierbar. Ferner sind die so fast überall definierten Funktionen

$$g_1 : x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2, \quad g_2 : x_2 \mapsto \int f_{x_2} d\mu_1$$

(trivial auf  $\Omega_i$  fortgesetzt) integrierbar und mit der Notation  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$  gilt

$$\int f d\mu = \int \left( \int f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int f_{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

**Beweis:** Wie man leicht feststellt, gilt  $|f|_{x_i} = |f_{x_i}|$  und  $(f^\pm)_{x_i} = (f_{x_i})^\pm$  für  $i = 1, 2$ , sowie nach dem Satz von Tonelli

$$\int \left( \int |f_{x_1}| d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int |f|_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int |f| d\mu < \infty. \quad (1.10)$$

Folglich ist das Integral  $\int |f_{x_1}| d\mu_2$  für fast alle  $x_1 \in \Omega_1$  endlich, d.h. es gibt eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}_1$ , so dass  $f_{x_1}$  für alle  $x_1 \in \Omega_1 \setminus N$  integrierbar ist. Für diese  $x_1$  gilt nach Definition, dass

$$g_1(x_1) = \int f_{x_1} d\mu_2 = \int (f_{x_1})^+ d\mu_2 - \int (f_{x_1})^- d\mu_2.$$

Nach dem Satz von Tonelli ist die (auf ganz  $\Omega_1$  definierte) Funktion  $x_1 \mapsto \int (f_{x_1})^+ d\mu_2$  messbar und wegen (1.10) sogar integrierbar, denn

$$\int \left( \int (f_{x_1})^+ d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int (f^+)_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int f^+ d\mu < \infty.$$

Ein analoges Argument gilt für  $f^-$ . Damit ist die Funktion  $g_1 : x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2$  (trivial fortgesetzt auf ganz  $\Omega_1$ ) integrierbar und nach dem Satz von Tonelli gilt:

$$\begin{aligned} \int \left( \int f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 &= \int \left( \int (f_{x_1})^+ d\mu_2 \right) d\mu_1 - \int \left( \int (f_{x_1})^- d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f d\mu. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Integrierbarkeit von  $g_2$ .  $\square$

**Korollar 1.96** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  und sei  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar über  $A$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d\lambda^{n+m}(x, y) &= \int \left( \int_{A_x} f(x, y) d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x) \\ &= \int \left( \int_{A_y} f(x, y) d\lambda^n(x) \right) d\lambda^m(y), \end{aligned}$$

wenn wir die Variablen im  $\mathbb{R}^n$  mit  $x$  und die im  $\mathbb{R}^m$  mit  $y$  bezeichnen.



**Beweis:** Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_A f \, d\lambda^{n+m} &= \int f \chi_A \, d\lambda^{n+m} = \int \left( \int f(x, y) \chi_A(x, y) \, d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x) \\ &= \int \left( \int f(x, y) \chi_{A_x}(y) \, d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x) = \int \left( \int_{A_x} f(x, y) \, d\lambda^m(y) \right) d\lambda^n(x),\end{aligned}$$

wobei wir die Gleichheit  $\chi_A(x, y) = \chi_{A_x}(y)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ausgenutzt haben. Die Formel für das Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge folgt analog.  $\square$

**Beispiel 1.97** 1) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 3xy^2$ . Dann gilt für  $Q = [1, 3] \times [0, 1]$ , dass

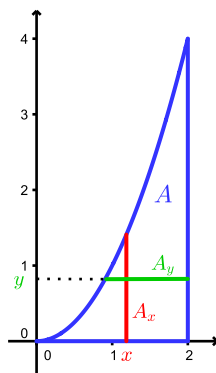
$$\begin{aligned}\int_Q f \, d\lambda^2 &= \int \left( \int_{Q_x} f(x, y) \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_1^3 \left( \int_0^1 3xy^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_1^3 \left( xy^3 \Big|_0^1 \right) dx = \int_1^3 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (9 - 1) = 4,\end{aligned}$$

denn wir erhalten  $Q_x = [0, 1]$  für  $x \in [1, 3]$  und  $Q_x = \emptyset$  sonst. Alternativ können wir auch das Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge berechnen und erhalten

$$\begin{aligned}\int_Q f \, d\lambda^2 &= \int \left( \int_{Q_y} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_0^1 \left( \int_1^3 3xy^2 \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{3}{2} x^2 y^2 \Big|_1^3 \right) dy = \int_0^1 12y^2 \, dy = 4y^3 \Big|_0^1 = 4.\end{aligned}$$

Obwohl die zu lösenden eindimensionalen Integrale unterschiedlich aussehen können, bekommen wir auf beide Arten und Weisen wie erwartet dasselbe Ergebnis.

- 2) Wir betrachten die Fläche  $A$  im ersten Quadranten, die durch die Geraden  $y = 0$  (also die  $x$ -Achse) und  $x = 2$ , sowie durch den Graphen der Funktion  $x \mapsto x^2$  begrenzt wird. Ist dann  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über  $A$ , so erhalten wir nach Fubini, dass



$$\begin{aligned}\int_A f(x, y) \, d\lambda^2(x, y) &= \int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) \, dx \, dy,\end{aligned}$$

wie Sie unschwer aus der nebenstehenden Skizze ablesen können.

## 1.8 Die $L_p(\mu)$ -Räume

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir uns Räume integrierbarer Funktionen, die insbesondere in der Funktionalanalysis eine wichtige Rolle spielen, etwas näher anschauen. Dazu definieren wir zunächst die Menge

$$\mathcal{L}_1(\mu) := \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ messbar und } \int |f| \, d\mu < \infty \right\}.$$

Da eine messbare Funktion  $f$  genau dann integrierbar ist, wenn  $|f|$  integrierbar ist, ist dies gerade die Menge der integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$ . Auf  $\mathcal{L}_1(\mu)$  definieren wir nun die Funktion  $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}_1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\|f\|_1 := \int |f| \, d\mu.$$

Dann folgt mit Korollar 1.76, dass

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall.}$$

Unser Ziel ist es nun,  $\|\cdot\|_1$  zu einer Norm zu machen. Dazu definieren wir auf der Menge  $\mathcal{L}_1(\mu)$  die Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \text{ fast überall,}$$

und bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen durch

$$L_1(\mu) := L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim.$$

Dann erhalten wir eine Vektorraumstruktur auf  $L_1(\mu)$ , denn sind  $[f], [g] \in L_1(\mu)$  zwei Äquivalenzklassen, so wählen wir dazu zwei zugehörige Repräsentanten  $f$  und  $g$  aus, die überall endlich sind (integrierbare Funktionen sind fast überall endlich) und definieren

$$[f] + [g] := [f + g] \quad \text{und} \quad c \cdot [f] := [cf]$$

für  $c \in \mathbb{R}$ . Im Folgenden wollen wir allerdings ignorieren, dass es sich bei den Elementen von  $L_1(\mu)$  um Äquivalenzklassen handelt, schreiben einfach  $f$  statt  $[f]$  und behandeln  $f$  wie eine Funktion, indem wir einen Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse auswählen. (Wenn wir die Funktion integrieren, ist das unproblematisch, da je zwei Repräsentanten aus derselben Äquivalenzklasse fast überall gleich sind und daher dasselbe Integral haben. Vorsichtig müssen wir allerdings bei punktwisen Definitionen sein. So ist eine Definition wie “Sei  $f \in L_1(\mu)$  und  $M := \{x \mid f(x) \neq 0\}$ ” falsch, da  $M$  in diesem Fall nicht wohldefiniert ist.)

Nun ist  $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$  sogar ein normierter Vektorraum, denn für alle  $f, g \in L_1(\mu)$  gilt, dass

- i)  $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$  (genauer:  $[f] = [0]$ ),
- ii)  $\|cf\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ ,
- iii)  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ , wegen  $|f + g| \leq |f| + |g|$  und der Monotonie des Integrals.

Weiter zeigt sich, dass der normierte Raum  $L_1(\mu)$  sogar vollständig ist.

**Satz 1.98** *Der Raum  $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$  ist ein Banachraum.*

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass  $L_1(\mu)$  vollständig bzgl.  $\|\cdot\|_1$  ist. Dazu sei  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge in  $L_1(\mu)$ . Dann müssen wir zeigen, dass es eine Grenzfunktion  $f \in L_1(\mu)$  gibt, so dass  $(f_n)$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$  gegen  $f$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass alle  $f_n$  überall endlich sind. (Genauer gesagt wählen wir aus jeder Äquivalenzklasse  $[f_n]$  einen überall endlichen Repräsentanten aus.) Da  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  mit

$$\|f_n - f_m\|_1 < 2^{-k}$$

für alle  $n, m \geq n_k$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass die  $(n_k)$  eine streng monoton wachsende Folge bilden (wähle sonst  $\tilde{n}_0 := n_0$  und  $\tilde{n}_{k+1} := \max\{\tilde{n}_0, \dots, \tilde{n}_k, n_{k+1}\} + 1$ ). Dann erhalten wir durch  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Der Übersichtlichkeit halber benutzen wir die Abkürzung  $g_k := f_{n_k}$ . Weiter definieren wir die Funktionen  $s_n, s : \Omega : [0, \infty]$  durch

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \sum_{k=0}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)|, \\ s(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \end{aligned}$$

Dann sind alle  $s_n$  messbar, also auch  $s$  als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen. Außerdem ist die nichtnegative Funktionenfolge  $(s_n)$  monoton wachsend. Daher erhalten wir mit Korollar 1.78, dass

$$\int s \, d\mu = \int \sum_{k=0}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int |g_{k+1} - g_k| \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Das Integral von  $s$  ist also endlich, d.h.  $s$  ist integrierbar. Folglich ist  $s$  fast überall endlich, d.h. es gibt eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$ , so dass

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < \infty$$

für alle  $x \in \Omega \setminus N$ . Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen aus Analysis I gibt es dann zu jedem  $x \in \Omega \setminus N$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|g_n(x) - g_m(x)| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < \varepsilon.$$

Dies bedeutet aber, dass  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $x \in \Omega \setminus N$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  ist, also konvergiert. Definieren wir also die Funktionenfolge  $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$\tilde{g}_n(x) := \begin{cases} g_n(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus N, \\ 0 & \text{für } x \in N, \end{cases}$$

so ist  $\tilde{g}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  nach Teil 3 von Korollar 1.76 integrierbar und die Funktionenfolge  $(\tilde{g}_n)$  konvergiert auf ganz  $\Omega$  gegen eine nach Korollar 1.51 messbare Funktion  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n$ . Nach dem Satz von Lebesgue ist  $f$  sogar integrierbar, denn wegen

$$|\tilde{g}_n| \leq |g_n| = \left| g_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (g_{k+1} - g_k) \right| \leq |g_0| + s_{n-1} \leq |g_0| + s$$

ist die Funktion  $|g_0| + s$  eine integrierbare Majorante der Folge  $(\tilde{g}_n)$ . Da außerdem wegen  $|f| \leq |g_0| + s$  und

$$|f - \tilde{g}_n| \leq |f| + |\tilde{g}_n| \leq |f| + |g_0| + |s|$$

auch die Funktionenfolge  $(f - \tilde{g}_n)$  eine integrierbare Majorante hat, erhalten wir durch nochmalige Anwendung des Satzes von Lebesgue, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \tilde{g}_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - \tilde{g}_n| d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |f - \tilde{g}_n| d\mu = 0.$$

Da fast überall  $f_{n_k} = \tilde{g}_k$  gilt, folgt dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\|_1 = 0.$$

Dies bedeutet aber, dass  $f$  ein Häufungspunkt der Cauchy-Folge  $(f_n)$  ist, die somit gegen  $f$  konvergiert. Also ist  $L_1(\mu)$  vollständig.  $\square$

**Bemerkung 1.99** Der Beweis von Satz 1.98 zeigt insbesondere einen wichtigen Zusammenhang der beiden Konvergenzbegriffe *punktweise Konvergenz* und *Konvergenz bzgl.  $\|\cdot\|_1$* . Konvergiert nämlich  $(f_n)$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$  gegen  $f$ , so haben wir gezeigt, dass dann  $(f_n)$  eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  hat, die fast überall gegen  $f$  konvergiert.

Im Gegensatz zu Korollar 1.53 folgt aus der Integrierbarkeit zweier Funktionen nicht die Integrierbarkeit des Produktes der Funktionen, d.h. für  $f, g \in L_1(\mu)$  gilt i.A. *nicht*  $f \cdot g \in L_1(\mu)$ . Als Gegenbeispiel betrachte die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \chi_{[0,1]}(x).$$

Dann gilt nach Analysis I, dass

$$\int f \, d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} \, dx < \infty, \quad \text{aber} \quad \int f^2 \, d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \infty.$$

Aus diesem Grund betrachtet man für  $p \geq 1$  allgemeiner die Mengen

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ messbar und } \int |f|^p \, d\mu < \infty\},$$

sowie den dazugehörigen Vektorraum der Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation “*Gleichheit fast überall*”

$$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim.$$

Man kann dann zeigen, dass auch  $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Banach-Raum ist bzgl. der Norm

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Etwas Mühe macht hier der Nachweis der Dreiecksungleichung  $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ , die in diesem Spezialfall auch *Minkowski'sche Ungleichung* genannt wird und mit der *Hölderschen Ungleichung* bewiesen wird, die wie folgt lautet: Sind  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , sowie  $f \in L_p(\mu)$  und  $g \in L_q(\mu)$ , so gilt  $fg \in L_1(\mu)$  und

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Einen wichtigen Spezialfall erhalten wir für  $p = q = 2$ , denn dann gilt für  $f, g \in L_2(\mu)$ , dass  $fg \in L_1(\mu)$  und wie man leicht nachweist, ist durch

$$\langle f, g \rangle_{L_2} := \int fg \, d\mu$$

ein Skalarprodukt auf  $L_2(\mu)$  gegeben. Die zu diesem Skalarprodukt assoziierte Norm ist gerade die Norm  $\|\cdot\|_2$ . Der Banachraum  $L_2(\mu)$  ist daher ein *Hilbertraum*. (Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, der vollständig bzgl. der durch sein Skalarprodukt induzierten Norm ist.)



# Kapitel 2

## Der Transformationssatz

Ziel dieses Kapitels ist eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel für das Riemann-Integral, die wir in Analysis I in Satz 7.32 kennengelernt haben: Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

Grund für die Wichtigkeit dieser Regel bei der mehrdimensionalen Integrationstheorie ist die häufige Notwendigkeit der Anwendung von Koordinatentransformationen. Ist z.B. eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$K := K(0, 1) = \overline{U_1(0)} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

gegeben, so ist es in vielen Situationen zweckmäßig (vor allen Dingen dann, wenn die Funktion i.w. nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, wie z.B. die durch  $f(x, y) = x^2 + y^2$  gegebene Funktion) die Funktion in Polarkoordinaten zu betrachten, d.h. man setzt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{bmatrix} =: \Phi(\varrho, \phi)$$

und betrachtet statt  $f$  die Komposition  $f \circ \Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G = [0, 1] \times [0, 2\pi[$  und  $K = \Phi(G)$ . Die Integration wird dann relativ einfach, da der Integrationsbereich  $G$  nun ein Quader ist. Wie bei der Substitutionsregel wird man das Integral allerdings mit Hilfe eines Korrekturterms anpassen müssen:

$$\int_K f \, d\lambda^2 = \int_{\Phi(G)} f \, d\lambda^2 = \int_G (f \circ \Phi) \boxed{?} \, d\lambda^2.$$

Die Frage, die wir in diesem Kapitel beantworten wollen, ist daher die, was in der obigen Gleichung an der Stelle von  $\boxed{?}$  stehen muss. Im Vergleich mit der Substitutionsregel könnte man an die Ableitung  $D\Phi(\varrho, \phi)$  denken, doch dies ist leider eine lineare Abbildung bzw. eine  $2 \times 2$ -Matrix. Für  $\boxed{?}$  kommt dagegen nur eine skalare Größe in Frage.

## 2.1 Verzerrung Borelscher Mengen

Bevor wir uns der Frage zuwenden, wie eine Koordinatentransformation bzw. eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung das Maß einer Menge verändert, müssen wir zunächst untersuchen, unter welchen Bedingungen eine Abbildung messbare Mengen wieder in messbare Mengen transformiert, d.h. wann Bilder messbarer Mengen wieder messbar sind. Für die analoge Frage bzgl. *Urbildern* erhalten wir eine positive Antwort unter recht schwachen Voraussetzungen.

**Lemma 2.1** *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow V$  stetig. Dann gilt für alle  $B \subseteq V$ :*

$$B \in \mathcal{B}^n \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n.$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis mit Hilfe des Prinzips der guten Mengen. Sei also

$$\mathcal{G} := \{B \subseteq \mathbb{R}^n \mid f^{-1}(B \cap V) \in \mathcal{B}^n\}.$$

Wir zeigen im Folgenden:

- 1)  $\mathcal{G}$  enthält alle offenen Mengen.
- 2)  $\mathcal{G}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, dann gilt  $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{G}$ , da  $\mathcal{B}^n$  nach Bemerkung 1.86 von allen offenen Mengen erzeugt wird. Ist dann  $B \subseteq V$  eine Borel-Menge, so gilt  $B \cap V = B$  und daher  $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap V) \in \mathcal{B}^n$ .

1) Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist auch  $B \cap V$  offen und da  $f$  stetig ist, folgt damit, dass  $f^{-1}(B \cap V)$  offen in  $U$  ist, also bzgl. der Spurmetrik auf  $U$ . Dann gibt es aber  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit

$$f^{-1}(B \cap V) = T \cap U.$$

Damit ist  $f^{-1}(B \cap V)$  aber auch offen (in  $\mathbb{R}^n$ ) und damit gilt  $f^{-1}(B \cap V) \in \mathcal{B}^n$ .

- 2) Es gilt: i)  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{G}$ , denn  $f^{-1}(\mathbb{R}^n \cap V) = f^{-1}(V) = U$  ist offen, also eine Borel-Menge.  
 ii)  $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{G}$ , folgt sofort aus  $f^{-1}((A \setminus B) \cap V) = f^{-1}(A \cap V) \setminus f^{-1}(B \cap V)$ .  
 iii)  $A_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}$  folgt analog sofort aus

$$f^{-1}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \cap V\right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-1}(A_k \cap V).$$

Damit ist  $\mathcal{G}$  eine  $\sigma$ -Algebra.  $\square$

Für die Messbarkeit von *Urbildern* messbarer Mengen reicht also schon die Stetigkeit der Funktion. Für *Bilder* benötigen wir dagegen wesentlich stärkere Voraussetzungen. Für unsere Zwecke wird aber das folgende Korollar ausreichen, dass wir sofort aus dem vorhergehenden Lemma erhalten.



**Korollar 2.2** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus, d.h.  $\Phi$  ist bijektiv und  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  sind beide stetig stetig differenzierbar. Dann gilt für alle  $B \subseteq U$ :

$$B \in \mathcal{B}^n \Rightarrow \Phi(B) \in \mathcal{B}^n.$$

Im folgenden seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Wenn  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar ist, wie stark wird  $B$  dann durch  $\Phi$  „verzerrt“, d.h. in welcher Weise verändert sich das Maß beim Übergang von  $B$  zu  $\Phi(B)$ ? Da sich jede stetig differenzierbare Funktion durch lineare Abbildungen approximieren lässt, untersuchen wir zunächst den Fall, dass  $\Phi$  ein Vektorraumisomorphismus (also eine lineare und bijektive Abbildung) ist.

**Definition 2.3** Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraumisomorphismus. Dann heißt  $T$  elementar, falls er von einem der drei folgenden Typen ist:

- 1)  $T$  multipliziert eine Komponente mit  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , d.h. es gibt  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so dass für alle  $x = (x_1, \dots, x_n)$  gilt:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, cx_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

- 2)  $T$  vertauscht zwei Komponenten, d.h. es gibt  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i < j$ , so dass für alle  $x = (x_1, \dots, x_n)$  gilt:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

- 3)  $T$  addiert das Vielfache einer Komponente zu einer anderen, d.h. es gibt  $c \in \mathbb{R}$  und  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , so dass für alle  $x = (x_1, \dots, x_n)$  gilt:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + cx_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

**Bemerkung 2.4** Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass sich jeder Vektorraumisomorphismus  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  als Komposition von endlich vielen elementaren Isomorphismen darstellen lässt. (In der Linearen Algebra haben Sie dies auf Matrizen-Ebene bewiesen und gezeigt, dass sich jede invertierbare Matrix als Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen darstellen lässt. Dies lässt sich unmittelbar auf Isomorphismen übertragen, indem man darstellende Matrizen betrachtet.)

**Satz 2.5 (Verzerrung durch lineare Transformationen)** Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraumisomorphismus und  $A \in \mathcal{B}^n$ . Dann ist auch  $T(A) \in \mathcal{B}^n$  eine Borel-Menge und es gilt:

$$\lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A). \quad (2.1)$$

**Beweis:** Da  $T$  linear und bijektiv ist, ist auch  $T^{-1}$  linear und damit ist  $T$  insbesondere ein Diffeomorphismus. Damit ist  $T(A)$  nach Korollar 2.2 eine Borel-Menge. Für den weiteren Beweis betrachten wir zunächst Spezialfälle.

- i)  $T$  ist elementar vom Typ 1), d.h.  $T$  entspricht der Multiplikation einer Komponente mit  $c \neq 0$ . Dann werden durch

$$\mu_1(A) := \lambda^n(T(A)) \quad \text{und} \quad \mu_2(A) := |\det T| \cdot \lambda^n(A)$$

zwei Maße auf  $\mathcal{B}^n$  definiert, die auf den achsenparallelen Quadern übereinstimmen, denn die Abbildung  $T$  verändert das Volumen eines Quaders um den Faktor  $|c|$  und andererseits gilt  $\det T = c$ . Dann folgt aber mit Satz 1.41, dass  $\mu_1 = \mu_2$ , d.h. es gilt (2.1).

- ii)  $T$  ist elementar vom Typ 2), d.h.  $T$  vertauscht zwei Komponenten. Dann ist die darstellende Matrix von  $T$  eine Permutationsmatrix (die zu Grunde liegende Permutation ist sogar eine Transposition) und daher gilt  $|\det T| = 1$ . Damit folgt die Behauptung sofort aus Korollar 1.44.
- iii)  $T$  ist elementar vom Typ 3). O.b.d.A. seien  $i = 1$  und  $j = 2$  in der Notation von Definition 2.3, d.h. es gilt

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + cx_2, x_2, \dots, x_n)$$

für ein  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Sei nun  $Q$  ein beliebiger achsenparalleler Quader. Dann gilt unter Benutzung von  $x \in T(Q) \Leftrightarrow T^{-1}(x) \in Q$  und des Satzes von Tonelli, dass

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(Q)) &= \int \chi_{T(Q)}(x) \, d\lambda^n(x) = \int \chi_Q(T^{-1}(x)) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \chi_Q(x_1 - cx_2, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \left( \int \chi_Q(x_1 - cx_2, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^1(x_1) \right) \, d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n). \quad (2.2) \end{aligned}$$

Für das “innere” Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int \chi_Q(x_1 - cx_2, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^1(x_1) \\ &= \int \chi_{Q_{(x_2, \dots, x_n)}}(x_1 - cx_2) \, d\lambda^1(x_1) \\ &= \int \chi_{Q_{(x_2, \dots, x_n)} + cx_2}(x_1) \, d\lambda^1(x_1) \\ &= \lambda^1(Q_{(x_2, \dots, x_n)} + cx_2) \\ &= \lambda^1(Q_{(x_2, \dots, x_n)}) = \dots = \int \chi_Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \, d\lambda^1(x_1), \end{aligned}$$

wobei wir im Schritt von der vorletzten Zeile zur letzten Zeile die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes ausgenutzt haben, siehe Korollar 1.43. Dann erhalten wir

aber aus (2.2) und mit dem Satz von Tonelli, dass

$$\begin{aligned}\lambda^n(T(Q)) &= \int \left( \int \chi_Q(x_1, x_2, \dots, x_n) d\lambda^1(x_1) \right) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\ &= \int \chi_Q(x) d\lambda^n(x) = \lambda^n(Q) = |\det T| \cdot \lambda^n(Q),\end{aligned}$$

da  $\det T = 1$  gilt. Mit dem gleichen Trick wie in i) folgt dann für alle  $A \in \mathcal{B}^n$ , dass

$$\lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A).$$

Die Behauptung folgt nun mit i)–iii) und dem Determinantenmultiplikationssatz aus der Linearen Algebra, da sich jeder Isomorphismus  $T$  nach Bemerkung 2.4 als endliche Komposition von elementaren Isomorphismen darstellen lässt.  $\square$

Im Folgenden wollen wir die Verzerrung von Borelschen Mengen unter bijektiven und stetig differenzierbaren Abbildungen untersuchen. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel.

**Lemma 2.6 (über lokale Würfelverzerrung)** *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Sei ferner  $x_0 \in U$  sowie  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge achsenparalleler (offener, halboffener<sup>1</sup> oder abgeschlossener) Würfel mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } W_k = 0$  und  $x_0 \in W_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = |\det D\Phi(x_0)|. \quad (2.3)$$

**Beweis:** Zunächst einmal erinnern wir daran, dass  $\Phi(W_k)$  nach Korollar 2.2 messbar ist, so dass die Aussage 2.3 zunächst einmal sinnvoll ist. Den weiteren Beweis führen wir dann in vier Schritten.

*Schritt 1: Rückführung auf den Fall  $D\Phi(x_0) = Id$ .*

Da  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $D\Phi(x)$  für alle  $x \in U$  invertierbar (vgl. Bemerkung 3.1 in Analysis II). Setze  $T := D\Phi(x_0)^{-1}$ . Dann gilt

$$\frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = \frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(T \circ \Phi(W_k))} \cdot \frac{\lambda^n(T \circ \Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = |\det D\Phi(x_0)| \cdot \frac{\lambda^n(T \circ \Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)}, \quad (2.4)$$

denn da  $T$  linear und invertierbar, also ein Vektorraumisomorphismus ist, gilt unter Benutzung von Satz 2.5, dass

$$\lambda^n(T \circ \Phi(W_k)) = |\det T| \cdot \lambda^n(\Phi(W_k)) = \frac{1}{|\det D\Phi(x_0)|} \cdot \lambda^n(\Phi(W_k)).$$

Da  $T$  linear ist, folgt außerdem  $D(T \circ \Phi)(x_0) = T \circ D\Phi(x_0) = Id$ . Können wir nun die Aussage für  $\tilde{\Phi} := T \circ \Phi$  beweisen, so folgt (2.3) wegen  $|\det D(T \circ \Phi)(x_0)| = 1$  sofort aus (2.4).

---

<sup>1</sup>Wir nennen einen Würfel bzw. Quader halboffen, wenn die zu Grunde liegenden Intervalle sämtlich halboffen sind, wobei es für jedes individuelle Intervall egal ist, ob es nach rechts oder nach links offen ist.

*Schritt 2:* In  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $\overline{U_\delta(x_0)} \subseteq U$ , so dass für alle  $x, y \in \overline{U_\delta(x_0)}$  gilt, dass

$$(1 - \varepsilon)\|x - y\|_\infty \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)\|x - y\|_\infty. \quad (2.5)$$

Die Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  (vgl. Teil 3) von Beispiel 1.2 aus Analysis II) bietet sich hier an, da “Kugeln” bzw.  $\varepsilon$ -Umgebungen um einen Punkt in diesem Fall gerade achsenparallele Würfel sind. Speziell ist

$$W(q, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - q\|_\infty \leq r\} = \overline{U_r(q)}$$

der abgeschlossene Würfel mit Mittelpunkt  $q$  und Kantenlänge  $2r$ .

Zum Beweis von (2.5) betrachten wir die Abbildung  $\Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \Phi(y + t(x - y))$ . Diese hat die Ableitung<sup>2</sup>

$$\Psi' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto D\Phi(y + t(x - y))(x - y).$$

Unter Ausnutzung von Definition 4.5 aus Analysis II über die komponentenweise Integration, des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I und der Tatsache, dass  $D\Phi(x_0) = Id$  gilt, erhalten wir für alle  $x, y \in U$ , dass

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \Phi(y)) - (x - y) &= \int_0^1 D\Phi(y + t(x - y))(x - y) dt - D\Phi(x_0)(x - y) \\ &= \int_0^1 (D\Phi(y + t(x - y)) - D\Phi(x_0))(x - y) dt. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $D\Phi$  in  $x_0$  gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|D\Phi(y + t(x - y)) - D\Phi(x_0)\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle  $x, y \in W(x_0, \delta) = \overline{U_\delta(x_0)}$  gilt. (Hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|_\infty$  die zur Maximumsnorm gehörige Operatornorm auf  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .) Somit folgt

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y) - (x - y)\|_\infty &\leq \int_0^1 \|D\Phi(y + t(x - y)) - D\Phi(x_0)\|_\infty \cdot \|x - y\|_\infty dt \\ &\leq \varepsilon \cdot \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich (2.5).

*Schritt 3:* Ist  $r$  hinreichend klein, so gilt für jeden abgeschlossenen Würfel  $W(q, r)$  mit  $W(q, r) \subseteq W(x_0, \delta)$ , dass

$$W(\Phi(q), (1 - \varepsilon)r) \subseteq \Phi(W(q, r)) \subseteq W(\Phi(q), (1 + \varepsilon)r). \quad (2.6)$$

---

<sup>2</sup>Überlegen Sie sich einmal, warum es an dieser Stelle unproblematisch ist, dass der Definitionsbereich der Funktion  $\Psi$  nicht offen ist.

Gilt  $W(q, r) \subseteq W(x_0, \delta)$ , so folgt aus Schritt 2 für alle  $x \in W(q, r)$ , dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(q)\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)\|x - q\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)r$$

und daher  $\Phi(x) \in W(\Phi(q), (1 + \varepsilon)r)$ , was die zweite Inklusion in (2.6) beweist.

Für den Nachweis der ersten Inklusion in (2.6) sei  $y \in W(\Phi(q), (1 - \varepsilon)r)$ . Ist  $\delta$  (und damit auch  $r$ ) hinreichend klein, so folgt aus dem Umkehrsatz aus Analysis II die eindeutige Existenz eines  $x \in W(x_0, \delta)$ , für das  $\Phi(x) = y$  gilt<sup>3</sup>. Damit folgt wegen

$$\|y - \Phi(q)\|_\infty = \|\Phi(x) - \Phi(q)\|_\infty \leq (1 - \varepsilon)r$$

mit Hilfe der linken Ungleichung in (2.5) in Schritt 2, dass

$$(1 - \varepsilon)\|x - q\|_\infty \leq \|\Phi(x) - \Phi(q)\|_\infty \leq (1 - \varepsilon)r,$$

woraus wir schließlich  $\|x - q\| \leq r$ , also  $y = \Phi(x) \in \Phi(W(q, r))$  erhalten. Damit haben wir also auch die erste Inklusion in (2.6) bewiesen.

*Schritt 4: Beweis der Aussage des Satzes.* Da ein Würfel  $W$  mit Kantenlänge  $\ell$  das Maß  $\lambda^n(W) = \ell^n$  hat, folgt aus Schritt 3, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle abgeschlossenen Würfel  $W(q, r) \subseteq W(x_0, \delta)$  gilt, dass

$$(1 - \varepsilon)^n (2r)^n \leq \lambda^n(\Phi(W(q, r))) \leq (1 + \varepsilon)^n (2r)^n.$$

Diese Abschätzungen gelten genauso auch für alle offenen Würfel  $W^\circ(q, r)$  und damit auch für alle halboffenen Würfel  $W$  mit  $W^\circ(q, r) \subseteq W \subseteq W(q, r)$ . Dies liefert die Abschätzungen

$$(1 - \varepsilon)^n \leq \frac{\lambda^n(\Phi(W))}{(2r)^n} = \frac{\lambda^n(\Phi(W))}{\lambda^n(W)} \leq (1 + \varepsilon)^n.$$

Damit erhalten wir schließlich durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = 1 = |\det D\Phi(x_0)|,$$

wobei wir hier unsere Vereinfachung aus Schritt 1 ausgenutzt haben.  $\square$

Das zweite Hilfsmittel, welches wir für den folgenden zentralen Satz benötigen, ist eine Verfeinerung von Satz 1.10, der ja besagt, dass eine offene Menge als Vereinigung abzählbar vieler achsenparalleler Quader dargestellt werden kann. Wenn wir allerdings die

---

<sup>3</sup>Dies untersuchen wir an dieser Stelle einmal etwas präziser: Wegen  $\det D\Phi(x_0) \neq 0$  gibt es offene Umgebungen  $\tilde{U}$  von  $x_0$  und  $\tilde{V}$  von  $\Phi(x_0)$ , so dass  $\Phi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  bijektiv ist. Ist  $\delta$  hinreichend klein gewählt, so gilt  $W(x_0, \delta) \subseteq \tilde{U}$  und  $W(\Phi(x_0), 2(1 + \varepsilon)\delta) \subseteq \tilde{V}$ , woraus wir dann mit  $\|\Phi(q) - \Phi(x_0)\|_\infty \leq (1 + \varepsilon)\delta$  (siehe die rechte Ungleichung in (2.5)) erhalten, dass auch  $W(\Phi(q), (1 - \varepsilon)r) \subseteq W(\Phi(q), \delta) \subseteq \tilde{V}$  gilt.

$\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Borelschen Maßes ausnutzen wollen, benötigen wir eine disjunkte Vereinigung. Aus diesem Grund betrachten wir im Folgenden *nach rechts halboffene, achsenparallele Würfel*, d.h. Würfel der Form

$$\prod_{k=1}^n [a_i, a_i + \ell[ = [a_1, a_1 + \ell[ \times \cdots \times [a_n, a_n + \ell[,$$

wobei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $\ell \geq 0$ . Da wir außerdem Kompaktheitsargumente verwenden wollen, fordern wir außerdem noch, dass auch der Abschluss dieser Würfel in unserer offenen Menge enthalten ist.

**Lemma 2.7** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann gibt nach rechts halboffene, achsenparallele Würfel  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\overline{W_k} \subseteq U$ , so dass  $W_i \cap W_j = \emptyset$  für  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , und*

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k.$$

**Beweis:** Wir betrachten die Menge  $\mathcal{W}_1$  der nach rechts halboffenen Einheitswürfel, deren Ecken in  $\mathbb{Z}^n$  liegen:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \prod_{i=1}^n [m_i, m_i + 1[ \mid m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \right\}$$

Weiter bezeichnen wir für  $j \geq 1$  mit  $\mathcal{W}_{j+1}$  die Menge der nach rechts halboffenen, achsenparallelen Würfel der Kantenlänge  $2^{-j}$ , die man erhält, wenn man die Würfel aus  $\mathcal{W}_j$  in jeder Koordinatenrichtung halbiert. Weiter definieren wir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_1 := \{W \in \mathcal{W}_1 \mid \overline{W} \subseteq U\}$$

sowie für  $j \geq 1$

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{j+1} := \left\{ W \in \mathcal{W}_{j+1} \mid \overline{W} \subseteq U \text{ und } W \text{ ist keine Teilmenge eines Würfels aus } \widetilde{\mathcal{W}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{W}}_j \right\}.$$

Dann gilt

$$U = \bigcup \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{W}}_j \right) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in W \text{ für ein } W \in \mathcal{W}_j \text{ und ein } j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

denn ist  $x \in U$ , so gibt es wegen der Offenheit von  $U$  einen Index  $j$  und einen Würfel  $W \in \mathcal{W}_j$  mit  $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ . (Klar?) Weiter gilt nach Konstruktion von  $\widetilde{\mathcal{W}}_j$  entweder  $W \in \widetilde{\mathcal{W}}_j$  oder  $W$  ist schon in einem Würfel aus einer der Mengen  $\widetilde{\mathcal{W}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{W}}_{j-1}$  enthalten. Nach Konstruktion sind alle Würfel in  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{W}}_j$  paarweise disjunkt und außerdem enthält jedes  $\mathcal{W}_j$  nur abzählbar viele Würfel. Somit enthält auch  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{W}}_j$  nur abzählbar viele Würfel. Nach Konstruktion ist der Abschluss eines jeden dieser Würfel in  $U$  enthalten, womit dann die Behauptung des Lemmas bewiesen ist.  $\square$

**Satz 2.8 (über die Verzerrung Borelscher Mengen)** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sowie  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Dann gilt für jede Borel-Menge  $B \subseteq U$ , dass

$$\lambda^n(\Phi(B)) = \int_B |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Wir unterscheiden im Folgenden drei Fälle, wobei wir im ersten Fall annehmen, dass  $B$  ein spezieller Würfel ist, im zweiten Fall, dass  $B$  offen ist, und im dritten Fall, dass  $B$  eine beliebige Borel-Menge ist.

*Fall 1):*  $B$  ist ein nach rechts halboffener, achsenparalleler Würfel mit  $\bar{B} \subseteq U$ .  $B$  habe die Kantenlänge  $\ell$ . Zu jedem  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  unterteilen wir  $B$  in  $k^n$  paarweise disjunkte nach rechts halboffene, achsenparallele Würfel  $W_k^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, k^n$ , mit Kantenlänge  $\frac{\ell}{k}$ . Da  $\Phi$  bijektiv ist, ist das Bild  $\Phi(B)$  von  $B$  dann die Vereinigung der  $k^n$  paarweise disjunkten Mengen  $\Phi(W_k^{(j)})$ , und daher gilt

$$\lambda^n(\Phi(B)) = \lambda^n\left(\bigcup_{j=1}^{k^n} \Phi(W_k^{(j)})\right) = \sum_{j=1}^{k^n} \lambda^n(\Phi(W_k^{(j)})) = \sum_{j=1}^{k^n} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j)}))}{\lambda^n(W_k^{(j)})} \lambda^n(W_k^{(j)}). \quad (2.7)$$

Definieren wir dann die Funktionen  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , durch

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k^n} \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j)}))}{\lambda^n(W_k^{(j)})} \chi_{W_k^{(j)}}(x)$$

für  $x \in \mathbb{R}^n$ , so folgt

$$\int f_k d\lambda^n = \lambda^n(\Phi(B)) \quad (2.8)$$

für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Betrachten wir nun die Funktionenfolge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  etwas genauer. Sei dazu  $x \in B$ . Dann gibt es genau einen Index  $j_k \in \{1, \dots, k^n\}$  mit  $x \in W_k^{(j_k)}$  und daher folgt

$$f_k(x) = \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j_k)}))}{\lambda^n(W_k^{(j_k)})} \cdot \chi_{W_k^{(j_k)}}(x) = \frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j_k)}))}{\lambda^n(W_k^{(j_k)})}.$$

Offenbar erfüllt die (von  $x$  abhängige) Würfelreihe  $(W_k^{(j_k)})_{k \geq 1}$  die Voraussetzungen von Lemma 2.6, woraus wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = |\det D\Phi(x)|$$

für alle  $x \in B$  erhalten. Dann gilt aber für alle  $x \in U$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = |\det D\Phi(x)| \chi_B(x),$$

da ja  $f_k(x) = \chi_B(x) = 0$  für  $x \in U \setminus B$  gilt. Die Funktionenfolge  $(f_k)$  konvergiert also auf  $U$  punktweise gegen die Funktion  $x \mapsto |\det D\Phi(x)| \chi_B(x)$ . Falls wir nun eine integrierbare

Majorante für die Funktionen  $|f_k|$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , finden, so gilt nach dem Satz von Lebesgue (Satz 1.80), dass

$$\begin{aligned}\lambda^n(\Phi(B)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) d\lambda^n(x) = \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) d\lambda^n(x) = \int |\det D\Phi(x)| \chi_B(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int_B |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x),\end{aligned}$$

womit der Satz im Fall 1) bewiesen ist. (Den Satz von Lebesgue müssen wir hier bemühen, da die gegebene Funktionenfolge leider nicht monoton wachsend ist.) Die gesuchte integrierbare Majorante konstruieren wir wie folgt: Nach Voraussetzung gilt auch  $\overline{B} \subseteq U$ . Da  $\overline{B}$  kompakt und konvex ist, ist  $\Phi$  nach Analysis II Korollar 2.36 Lipschitz-stetig auf  $\overline{B}$ , d.h. es gibt  $L \geq 0$ , so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq L \cdot \|x - y\|_\infty$$

für alle  $x, y \in \overline{B}$  gilt. Mit der Bezeichnung  $q_k^{(j_k)}$  für den Mittelpunkt von  $W_k^{(j_k)}$  folgt hiermit

$$\Phi(W_k^{(j_k)}) \subseteq W(\Phi(q_k^{(j_k)}), L \frac{\ell}{k}),$$

woraus wir schließlich

$$\frac{\lambda^n(\Phi(W_k^{(j_k)}))}{\lambda^n(W_k^{(j_k)})} \leq \frac{(2L)^n \left(\frac{\ell}{k}\right)^n}{\left(\frac{\ell}{k}\right)^n} = (2L)^n$$

erhalten. Damit folgt wegen

$$|f_k(x)| \leq \sum_{j=1}^{k^n} (2L)^n \chi_{W_k^{(j)}}(x) = (2L)^n \chi_B(x)$$

für alle  $x \in U$  und alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , dass  $(2L)^n \chi_B$  die gesuchte integrierbare Majorante ist.

*Fall 2): B ist offen.*

Nach Lemma 2.7 ist  $B$  die disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen nach rechts halboffenen, achsenparallelen Würfeln  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\overline{W_k} \subseteq B$ . Da  $\Phi$  bijektiv ist, gilt dann auch

$$\Phi(B) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi(W_k)$$

und mit Fall 1) und dem Satz von Beppo Levi (Satz 1.77) folgt

$$\begin{aligned}\lambda^n(\Phi(B)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n(\Phi(W_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{W_k} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int |\det D\Phi(x)| \cdot \chi_{W_k}(x) d\lambda^n(x) = \int \sum_{k=0}^{\infty} |\det D\Phi(x)| \cdot \chi_{W_k}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int |\det D\Phi(x)| \cdot \chi_B(x) d\lambda^n(x) = \int_B |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x),\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Gleichheit  $\chi_B = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{W_k}$  ausgenutzt haben.



Fall 3):  $B \subseteq U$  ist eine beliebige Borel-Menge.

In diesem Beweisschritt benötigen wir an einer Stelle die Endlichkeit des Maßes einer Menge. Daher betrachten wir zwei Teilfälle von Fall 3).

Fall 3a):  $\lambda^n(\Phi(U)) < \infty$ . Wir verwenden das Prinzip der guten Mengen. Sei

$$\mathcal{D} := \left\{ A \in \mathcal{B}^n \mid \lambda^n(\Phi(A \cap U)) = \int_{A \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \right\}. \quad (2.9)$$

Nach Fall 2) enthält  $\mathcal{D}$  alle offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$ , welche nach Bemerkung 1.86 ein (durchschnittsstabiles!) Erzeugendensystem von  $\mathcal{B}^n$  bilden. Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist:

- i)  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{D}$  ist klar, da  $U = \mathbb{R}^n \cap U$  offen ist.
- ii) Sei  $A \in \mathcal{D}$ . Dann gilt wegen der Bijektivität von  $\Phi$  und der Endlichkeit des Maßes von  $\Phi(A \cap U)$ , dass

$$\begin{aligned} \lambda^n(\Phi(A^c \cap U)) &= \lambda^n(\Phi(U \setminus (A \cap U))) = \lambda^n(\Phi(U) \setminus \Phi(A \cap U)) \\ &= \lambda^n(\Phi(U)) - \lambda^n(\Phi(A \cap U)) \\ &= \int_U |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) - \int_{A \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ &= \int_{A^c \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

woraus wir schließlich  $A^c \in \mathcal{D}$  erhalten.

- iii) Seien  $A_\ell \in \mathcal{D}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt und  $A = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell$ . Dann erhalten wir wegen der Bijektivität von  $\Phi$ , dass

$$\begin{aligned} \lambda^n\left(\Phi\left(\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell\right) \cap U\right)\right) &= \lambda^n\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty} \Phi(A_\ell \cap U)\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^n(\Phi(A_\ell \cap U)) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{A_\ell \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \int |\det D\Phi(x)| \chi_{A_\ell \cap U}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int \sum_{\ell=0}^{\infty} |\det D\Phi(x)| \chi_{A_\ell \cap U}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int |\det D\Phi(x)| \chi_{A \cap U}(x) d\lambda^n(x) \\ &= \int_{A \cap U} |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile den Satz von Beppo Levi (Satz 1.77) benutzt haben.

Da  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist und alle offenen Mengen enthält, enthält  $\mathcal{D}$  auch das dadurch erzeugte Dynkin-System, welches wegen der Durchschnittsstabilität der Menge aller offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  nach Lemma 1.39 bereits eine  $\sigma$ -Algebra ist, die nach Bemerkung 1.86 gerade die Borelsche  $\sigma$ -Algebra ist. Es gilt also  $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{D}$ . Damit ist der Satz im Fall  $\lambda^n(\Phi(U)) < \infty$  bewiesen. (Für  $B \in \mathcal{B}^n$  mit  $B \subseteq U$  gilt einfach  $B \cap U = B$ .)

Fall 3b):  $\lambda^n(\Phi(U)) = \infty$ . In diesem Fall schöpfen wir  $U$  durch beschränkte offene Mengen aus. Dazu setzen wir

$$U_k := \{x \in U \mid \|x\| < k \text{ und } d(x, \partial U) > \tfrac{1}{k}\},$$

wobei wir mit  $d(x, T) := \inf \{\|x - t\| \mid t \in T\}$  den Abstand eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  von einer Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichnen. Dann ist  $U_k$  offen mit  $\overline{U_k} \subseteq U$  für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  (beides klar?) und außerdem gilt  $U_k \subseteq U_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , sowie

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Nun ist  $\overline{U_k}$  beschränkt und abgeschlossen, also kompakt und damit ist nach Satz 1.68 aus Analysis II auch  $\Phi(\overline{U_k})$  kompakt, woraus die Beschränktheit von  $\Phi(U_k)$  folgt. Insbesondere erhalten wir daraus  $\lambda^n(\Phi(U_k)) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum eigentlichen Beweis von Fall 3b). Sei also  $B \subseteq U$  eine Borel-Menge. Dann gilt auch  $B \cap U \in \mathcal{B}^n$  und wir erhalten wegen  $\chi_{\Phi(B \cap U)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{\Phi(B \cap U_k)}$  durch zweimalige Anwendung des Satzes von Beppo Levi, dass

$$\begin{aligned} \lambda^n(\Phi(B)) &= \lambda^n(\Phi(B \cap U)) = \int \chi_{\Phi(B \cap U)}(x) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{\Phi(B \cap U_k)}(x) \, d\lambda^n(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \chi_{\Phi(B \cap U_k)}(x) \, d\lambda^n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^n(\Phi(B \cap U_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \chi_{B \cap U_k}(x) |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{B \cap U_k}(x) |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \chi_{B \cap U}(x) |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int_{B \cap U} |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile den bereits bewiesenen Fall 3a) (bzw. die Gleichheit in (2.9) für  $A = B$ ) ausgenutzt haben.  $\square$

## 2.2 Der Transformationssatz

Nach den vorbereitenden Abschnitten 2.1 und 2.2 kommen wir nun zu dem eigentlichen Transformationssatz, den wir in unterschiedlichen Varianten formulieren und beweisen werden. Dabei möchten wir die starke Voraussetzung, dass unsere gegebene Transformation ein Diffeomorphismus ist, also eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion hat, etwas abschwächen, wofür wir das folgende Resultat benötigen.

**Satz 2.9 (Lemma von Sard)** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, sowie*

$$S := \{x \in U \mid \det D\Phi(x) = 0\}.$$

*Dann ist  $\Phi(S)$  eine Nullmenge, d.h. eine Borel-Menge, für die  $\lambda^n(\Phi(S)) = 0$  gilt.*

**Beweis:** Die Grundidee des Beweises ist, dass für  $x \in S$  und  $y \in S$  in der Nähe von  $x$  gilt, dass  $\Phi(y) \approx \Phi(x) + D\Phi(x)(y - x)$ . Die rechte Seite ist dabei wegen  $\det D\Phi(x) = 0$  in einer Hyperebene, also einem affinen Teilraum des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$  enthalten, und dieser ist eine Nullmenge. (Falls  $\text{Rang } D\Phi(x) < n - 1$  gilt, so ist die rechte Seite sogar in einem affinen Teilraum noch kleinerer Dimension enthalten, dieser ist aber wieder in einer Hyperebene enthalten und das reicht uns im Folgenden schon.)  $\Phi(y)$  ist also lokal in einer Menge mit beliebig kleinem Maß enthalten. Dann kann man  $\Phi(S)$  durch solche Mengen mit beliebig kleinem Maß überdecken. Damit durch diesen Überdeckungsprozess die "Kleinheit" nicht verloren geht, werden wir uns zunächst auf kompakte Mengen einschränken:

*Schritt 1:  $\Phi(S \cap Q)$  ist eine Nullmenge, wenn  $Q$  ein abgeschlossener Würfel mit (beliebiger) Kantenlänge  $\ell$  ist.*

Zunächst bemerken wir, dass  $\Phi(S \cap Q)$  kompakt, also als abgeschlossene Menge eine Borel-Menge ist. Dies folgt daraus, dass  $Q$  kompakt,  $S$  abgeschlossen und  $\Phi$  stetig ist. Weiter ist  $D\Phi$  auf der kompakten Menge  $Q$  gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass, wenn wir  $Q$  durch  $N^n$  abgeschlossene Würfel  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, N^n$  der Kantenlänge  $\ell/N$  überdecken, gilt:

$$\|D\Phi(x) - D\Phi(y)\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in Q_j, \quad j = 1, \dots, N^n.$$

Dann liefert der Schrankensatz angewendet auf die Hilfsfunktion  $g : y \mapsto \Phi(y) - D\Phi(x)(y)$ , dass für alle  $x, y \in Q_j$  und  $j = 1, \dots, N^n$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \|(\Phi(x) + D\Phi(x)(y - x)) - \Phi(y)\| &= \|g(x) - g(y)\| \leq \sup_{\xi \in \overline{xy}} \|Dg(\xi)\| \cdot \|x - y\| \\ &= \sup_{\xi \in \overline{xy}} \|D\Phi(\xi) - D\Phi(x)\| \cdot \|x - y\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \|x - y\| \leq \varepsilon \sqrt{n} \frac{\ell}{N}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei  $\overline{xy}$  die Verbindungsstrecke von  $x$  und  $y$  bezeichnet und  $\sqrt{n}\ell/N$  der Durchmesser von  $Q_j$  ist. Sei nun  $Q_j$ ,  $j \in \{1, \dots, N^n\}$  beliebig. Falls  $Q_j \cap S = \emptyset$ , so gilt trivialerweise

$\lambda^n(\Phi(Q_j \cap S)) = 0$ . Andernfalls wählen wir ein  $x \in Q_j \cap S$ . Dann gilt  $\det D\Phi(x) = 0$  und daher gibt es eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene  $H$ , so dass

$$\{\Phi(x) + D\Phi(x)(y-x) \mid y \in Q_j\} \subseteq H.$$

Daher folgt mit (2.10), dass  $\Phi(y)$  von der Hyperebene  $H$  maximal den Abstand  $\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$  hat. Außerdem ist  $\Phi$  als stetige Funktion auf der kompakten und konvexen Menge  $Q$  nach Korollar 2.36 aus Analysis II Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Konstante  $L \geq 0$ , so dass

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\| \leq L \cdot \|y - x\| \quad \text{für alle } x, y \in Q.$$

Damit erhalten wir für alle  $x, y \in Q_j$ , dass

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\| \leq L\sqrt{n}\frac{\ell}{N}.$$

Dies bedeutet, dass  $\Phi(y)$  in einer Kugel um  $\Phi(x)$  mit Radius  $L\sqrt{n}\ell/N$  enthalten ist. Der Schnitt dieser Kugel mit der Hyperebene  $H$  liefert eine  $(n-1)$ -dimensionale Kugel mit Radius  $L\sqrt{n}\ell/N$  und da  $\Phi(y)$  von  $H$  außerdem maximal den Abstand  $\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$  hat, liegt  $\Phi(y)$  in einem Zylinder mit einer  $(n-1)$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $L\sqrt{n}\ell/N$  als Basis und mit der Höhe  $2\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$ . (Wir erhalten hier den Faktor 2, weil der Zylinder jeweils bis zum Abstand  $\varepsilon\sqrt{n}\ell/N$  aus der Hyperebene nach oben und nach unten hinausragt.) Folglich gilt für alle  $j = 1, \dots, N^n$  mit  $Q_j \cap S \neq \emptyset$ , dass

$$\lambda^n(\Phi(Q_j \cap S)) \leq \lambda^n(\Phi(Q_j)) \leq C\varepsilon \left(\frac{\ell}{N}\right)^n,$$

mit einer Konstanten  $C \geq 0$ , die nur von  $L$  und  $n$ , aber nicht von  $j$  abhängt. Damit erhalten wir schließlich

$$\lambda^n(\Phi(Q \cap S)) = \lambda^n\left(\bigcup_{j=1}^{N^n} \Phi(Q_j \cap S)\right) \leq \sum_{j=1}^{N^n} \lambda^n(\Phi(Q_j \cap S)) \leq N^n C\varepsilon \left(\frac{\ell}{N}\right)^n = C\varepsilon\ell^n.$$

Da dies für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $\lambda^n(\Phi(Q \cap S)) = 0$ .

*Schritt 2:* Wir zeigen nun die Behauptung des Satzes. Da  $U$  offen ist, gibt es nach Satz 1.10 abzählbar viele abgeschlossene Würfel  $Q_k$  mit  $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ . Dann ist aber auch  $\Phi(S) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi(Q_k \cap S)$  eine Borel-Menge und es gilt

$$\lambda^n(\Phi(S)) = \lambda^n\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi(Q_k \cap S)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n(\Phi(Q_k \cap S)) = 0$$

nach Schritt 1.  $\square$

Die erste Variante des Transformationssatzes bezieht sich auf das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen.

**Satz 2.10 (Transformationssatz für nichtnegative Funktionen)** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  bijektiv und stetig differenzierbar. Dann ist  $V$  eine Borel-Menge und für jede messbare<sup>4</sup> Funktion  $f : V \rightarrow [0, \infty[$  gilt, dass*

$$\int_V f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:

*Fall 1): Es gilt  $\det D\Phi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ . Dann ist  $\Phi$  nach dem Umkehrsatz (Satz 3.3 aus Analysis II) ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist  $V = \Phi(U)$  offen und damit eine Borel-Menge. Wir beweisen nun die Aussage des Satzes durch *maßtheoretische Induktion*:*

- i) Sei  $B \subseteq V$  eine Borel-Menge und  $f = \chi_B$ . Dann ist auch  $A := \Phi^{-1}(B)$  nach Lemma 2.1 eine Borel-Menge und wir erhalten aus Satz 2.8, dass

$$\begin{aligned} \int \chi_B(x) \, d\lambda^n(x) &= \lambda^n(B) = \lambda(\Phi(A)) = \int \chi_A(x) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \chi_B(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Integrals für nichtnegative Funktionen gilt die Behauptung dann auch für alle Elementarfunktionen, die ja Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen sind.

- ii) Sei  $f : V \rightarrow [0, \infty[$  messbar. Setzen wir  $f$  trivial auf  $\mathbb{R}^n$  fort, so gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Elementarfunktionen, so dass  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Mit Hilfe von i) und des Satzes von Beppo Levi erhalten wir

$$\begin{aligned} \int f(x) \, d\lambda^n(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) \, d\lambda^n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

womit der Satz im Fall 1) bewiesen ist.

---

<sup>4</sup>Wir nennen eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in \mathcal{B}$ , messbar, wenn ihre triviale Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^n$  messbar ist. Dies entspricht der Messbarkeit der Funktion  $f$  im Maßraum  $(V, \mathcal{B}_V, \lambda_V)$  mit  $\mathcal{B}_V = \{B \cap V \mid B \in \mathcal{B}\}$ , wenn  $\lambda_V$  die Einschränkung des Lebesgue-Borelschen Maßes auf  $\mathcal{B}_V$  bezeichnet.

Fall 2):  $S := \{x \in U \mid \det D\Phi(x) = 0\} \neq \emptyset$ .

Dann ist  $\Phi(S)$  nach dem Lemma von Sard (Satz 2.9) eine Nullmenge und insbesondere eine Borel-Menge. Da die Determinante und  $D\Phi$  stetig sind, ist  $S$  abgeschlossen und daher  $U \setminus S$  offen, also auch eine Borel-Menge. Da  $\det D\Phi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U \setminus S$  gilt, ist  $\Phi|_{U \setminus S}$  nach dem Umkehrsatz aus Analysis II ein Diffeomorphismus und damit  $\Phi(U \setminus S)$  offen, also eine Borel-Menge. Damit folgt schließlich, dass auch die Menge  $V = \Phi(U) = \Phi(S) \cup \Phi(U \setminus S)$  Borel-messbar ist. Unter Benutzung von Fall 1) und Satz 1.74 gilt:

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \, d\lambda^n(x) &= \int_{\Phi(U \setminus S)} f(x) \, d\lambda^n(x) + \int_{\Phi(S)} f(x) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int_{U \setminus S} f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x) \\ &= \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass  $\det D\Phi(x) = 0$  auf  $S$  gilt.  $\square$

**Satz 2.11 (Transformationssatz)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  bijektiv und stetig differenzierbar, sowie  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann ist  $f$  genau dann integrierbar über  $V$ , wenn die Funktion  $x \mapsto f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)|$  integrierbar über  $U$  ist. In diesem Fall gilt

$$\int_V f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \, d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Der Satz folgt sofort durch Anwendung von Satz 2.10 auf  $f^+$  und  $f^-$ .  $\square$

**Bemerkung 2.12** An dieser Stelle vergleichen wir einmal den Transformationssatz mit der entsprechenden Substitutionsregel aus Analysis I. Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar, so gilt nach Satz 7.32 aus Analysis I, dass

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx.$$

Ist zusätzlich  $\varphi$  bijektiv, so sollte sich diese Regel als Spezialfall des Transformationssatzes ergeben. Aber müsste hier dann nicht  $|\varphi'(x)|$  statt  $\varphi'(x)$  stehen? Leiten wir vorsichtshalber die Substitutionsregel noch einmal aus dem Transformationssatz her! Dabei beschränken uns der Einfachheit halber aber auf den Fall  $\varphi'(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wegen der Stetigkeit von  $\varphi'$  gilt dann  $\varphi' > 0$  oder  $\varphi' < 0$  auf ganz  $[a, b]$ . Im Fall  $\varphi'(x) > 0$  sind die Formeln in der Substitutionsregel und im Transformationssatz identisch. Gilt dagegen  $\varphi'(x) < 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , so ist  $\varphi$  auf  $[a, b]$  streng monoton fallend und daher gilt  $\varphi([a, b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$ . Daher erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx &= - \int_a^b f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| \, dx = - \int_{[a, b]} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| \, d\lambda^1(x) \\ &= - \int_{\varphi([a, b])} f(x) \, d\lambda^1(x) = - \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Tatsächlich hatte also alles so seine Richtigkeit, denn die fehlenden Betragstriche waren in den “vertauschten Integralgrenzen” “versteckt”.

## 2.3 Der verfeinerte Transformationssatz

Bei vielen Anwendungen treffen wir leider noch auf eine kleine Schwierigkeit, wenn wir den Transformationssatz anwenden wollen. Wollen wir zum Beispiel eine Funktion auf der Kreisscheibe  $K(0, R) = \overline{U_R(0)}$  integrieren und dafür Polarkoordinaten verwenden, so ist der Definitionsbereich der Funktion

$$\Phi : [0, R] \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\varrho, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{bmatrix}$$

leider nicht offen und strenggenommen ist  $\Phi$  auch gar nicht bijektiv (alle Punkte  $(0, \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi[$  werden auf den Nullpunkt  $(0, 0)$  abgebildet). Schränkt man dagegen  $\Phi$  auf die Menge  $]0, R[ \times ]0, 2\pi[$  ein, so ist  $\Phi$  dann zwar injektiv und der Definitionsbereich offen, jedoch ist das Bild dann nicht mehr die volle Kreisscheibe  $K(0, R)$ . Allerdings fehlt dort nur eine Nullmenge, die bekanntlich unerheblich für die Berechnung von Integralen ist. Der folgende Satz zeigt uns nun, dass wir auch in solchen Situationen den Transformationssatz verwenden dürfen.

**Satz 2.13 (Verfeinerter Transformationssatz)** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, sowie  $G \subseteq U$  eine Borel-Menge. Ferner sei  $N \subseteq G$  eine Nullmenge, so dass  $G \setminus N$  offen und  $\Phi|_{G \setminus N}$  injektiv ist. Ist  $f : \Phi(G) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, dann ist auch  $x \mapsto f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)|$  integrierbar und es gilt*

$$\int_{\Phi(G)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_G f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Zunächst zeigen Sie, dass das Bild  $\Phi(N)$  eine Nullmenge ist. (Übung!) Wegen  $\Phi(G) \setminus \Phi(N) \subseteq \Phi(G \setminus N) \subseteq \Phi(G)$  erhalten wir dann aus der Monotonie des Integrals und Satz 1.74, dass

$$\int_{\Phi(G)} f^+(x) d\lambda^n(x) \geq \int_{\Phi(G \setminus N)} f^+(x) d\lambda^n(x) \geq \int_{\Phi(G) \setminus \Phi(N)} f^+(x) d\lambda^n(x) = \int_{\Phi(G)} f^+(x) d\lambda^n(x)$$

und daher die Gleichheit all dieser Integrale. Analog gilt dies für  $f^-$  und damit erhalten wir auch die Gleichheit aller entsprechenden Integrale über  $f$ . Dann folgt aber mit dem Transformationssatz und erneut mit Satz 1.74, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(G)} f(x) d\lambda^n(x) &= \int_{\Phi(G \setminus N)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_{G \setminus N} f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ &= \int_G f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| d\lambda^n(x). \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 2.14** 1) Wir benutzen Polarkoordinaten, um das Trägheitsmoment  $\Theta$  der Kreisscheibe  $K := K_2(0, R) = \overline{U_R(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$  vom Radius  $R$  bei der Rotation um den Ursprung zu bestimmen. In der Physik lernt man, dass dieses durch das Integral

$$\Theta = \int_K \delta(x^2 + y^2) d\lambda^2(x, y)$$

gegeben ist, wenn wir davon ausgehen, dass die Massedichte  $\delta$  der Kreisscheibe konstant ist. Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\varrho, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{bmatrix}$$

ist stetig differenzierbar und wie wir in Beispiel 3.4 in Analysis II festgestellt haben, gilt  $\det D\Phi(\varrho, \varphi) = \varrho$  für alle  $(\varrho, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ . Betrachten wir

$$G := [0, R] \times [0, 2\pi] \quad \text{und} \quad N := \partial G = G \setminus (]0, R[ \times ]0, 2\pi[),$$

so ist  $G \setminus N$  offen und  $\Phi$  ist auf  $G \setminus N$  injektiv. Daher lässt sich der Transformationssatz anwenden und wir erhalten wegen  $\Phi(G) = K$  mit Hilfe des Satzes von Fubini (Satz 1.95), dass

$$\begin{aligned} \int_K \delta(x^2 + y^2) d\lambda^2(x, y) &= \int_G \delta(\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot |\det D\Phi(\varrho, \varphi)| d\lambda^2(\varrho, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \delta \varrho^3 d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} \delta \frac{1}{4} R^4 d\varphi = \frac{1}{2} \pi \delta R^4. \end{aligned}$$

Beachtet man dann noch, dass die Masse  $M$  der Kreisscheibe  $K$  bei konstanter Dichte  $\delta$  durch  $M = \delta \pi R^2$  gegeben ist, so erhält man die bekannte Formel  $\Theta = \frac{1}{2} M R^2$ .

- 2) Wir berechnen das bereits in Beispiel 1.93 bestimmte Volumen einer dreidimensionalen Kugel vom Radius  $R$ . Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Borelschen Maßes reicht es dabei, die Kugel  $K := K_3(0, R) \subseteq \mathbb{R}^3$  um den Ursprung zu betrachten. Wir verwenden dazu *Kugelkoordinaten*. Dazu betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Dies erinnert sehr an die Parametrisierung der Kugeloberfläche, die wir in Teil 4) von Beispiel 3.20 in Analysis II betrachtet haben. Tatsächlich steht hier  $\theta$  wieder für die *Poldistanz* (die *geographische Breite* wäre  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ) und  $\varphi$  für die *geographische Länge*. Als dritter Parameter ist hier noch der Abstand  $r$  vom Ursprung hinzugekommen. Nun gilt

$$D\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

und  $\det D\Phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$  für alle  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ . Betrachten wir nun die Menge  $G = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , dann ist  $\partial G$  eine Nullmenge und  $\Phi$  ist auf der offenen Menge  $G \setminus \partial G = ]0, R[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  injektiv. (An dieser Stelle erklärt sich, warum man für den Parameter  $\theta$  die Poldistanz und nicht die geographische Breite gewählt



hat. Dadurch, dass  $\theta$  auf das Intervall  $[0, \pi]$  eingeschränkt wird, gilt  $r^2 \sin \theta \geq 0$  für alle  $r \geq 0$  und alle  $\theta \in [0, \pi]$ . Für die geographische Breite hätte man dagegen das Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  verwenden müssen und diesen Vorteil verloren.) Wegen  $K = \Phi(G)$  erhalten wir nun für das Volumen unserer Kugel unter Anwendung des Transformationssatzes und des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned}\lambda^3(K) &= \int_K 1 \, d\lambda^3(x, y, z) = \int_G r^2 \sin \theta \, d\lambda^3(r, \theta, \varphi) \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R -r^2 \cos \theta \Big|_0^\pi \, dr = 4\pi \int_0^R r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

- 3) Wir lösen ein offenes Problem aus der Analysis I und zeigen auf elegante Weise

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir haben in Analysis I in Teil 2) von Beispiel 7.42 gezeigt, dass  $f : x \mapsto e^{-x^2}$  uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Da  $f$  nichtnegativ ist, ist  $f$  dann auch Lebesgue-integrierbar.) Wir konnten den Wert des Integrals in Analysis I aber nicht einfach ausrechnen, da sich die Stammfunktion von  $f$  nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lässt. Daher benutzen wir jetzt einen Trick. Es gilt:

$$\begin{aligned}I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right) e^{-y^2} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx \right) \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, d\lambda^2(x, y)\end{aligned}$$

Da der Integrand  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$  nur vom Abstand von  $(x, y)$  vom Ursprung abhängt, bieten sich an dieser Stelle Polarkoordinaten zur einfacheren Berechnung des Integrals an. Für jedes  $R > 0$  ist  $f$  auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $K(0, R)$  stetig, also messbar. Damit erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes für nichtnegative Funktionen und des Satzes von Tonelli sowie der Notation  $G_R := [0, R] \times [0, 2\pi]$ , dass

$$\begin{aligned}\int_{K(0, R)} e^{-(x^2+y^2)} \, d\lambda^2(x, y) &= \int_{G_R} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\lambda^2(\varrho, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-\varrho^2} \Big|_0^R \, d\varphi = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-R^2} \right).\end{aligned}$$

Definieren wir dann für  $k \in \mathbb{N}$  die Funktionen  $f_k := f \cdot \chi_{K(0, k)}$ , so ist  $(f_k)$  eine monoton wachsende Folge von messbaren Funktionen, die gegen  $f$  konvergiert. Der Satz von Beppo Levi (Satz 1.77) liefert uns schließlich

$$I^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\lambda^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-k^2} \right) = \pi.$$



# Kapitel 3

## Die großen Integralsätze I

Ziel in diesem und dem nächsten Kapitel ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

Diese Gleichung können wir wie folgt interpretieren: Das Integral der Ableitung der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a, b]$  hängt nur von den Werten ab, die die Funktion  $f$  auf dem Rand  $\{a, b\}$  des Intervalls annimmt. Eine vergleichbare Interpretation finden wir dann auch bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes, mit denen wir uns in diesem und dem folgenden Kapitel beschäftigen wollen. Das gegenwärtige Kapitel wird dem Satz von Gauß gewidmet sein, der in der “Ingenieurs-Version” meist wie folgt formuliert wird (wir unterlassen hier eine Auflistung aller notwendigen Voraussetzungen an den Integrationsbereich  $K$  und die Funktion  $f$ ): Ist  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Menge mit “geschlossener Oberfläche”  $\partial K$  (denken Sie z.B. an eine Kugel), so gilt

$$\int_K \operatorname{div} f \, d\lambda^3 =: \iiint_K \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial K} f \cdot dO. \quad (3.1)$$

Das Integral auf der linken Seite ist unser klassisches Lebesgue-Integral, das in den Natur- und Ingenieurwissenschaften gerne als Dreifachintegral geschrieben wird, um hervorzuheben, dass über eine Teilmenge des dreidimensionalen Raums integriert wird. Vergleichen wir dann den Satz von Gauß mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, so stellen wir fest, dass auch hier das Integral über die “Ableitung” (in diesem Fall ist damit die Divergenz  $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$  gemeint) nur von den Funktionswerten abhängt, die  $f$  auf dem Rand  $\partial K$  des Integrationsbereichs  $K$  annimmt. Dafür müssen wir aber zunächst dem Integral auf der rechten Seite in (3.1) einen Sinn geben. Fassen wir nämlich  $\partial K \subseteq \mathbb{R}^3$  naiv einfach nur als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  auf, so ist anschaulich klar, dass es sich hier um eine Nullmenge handelt und folglich wäre das Integral jeder Funktion über  $\partial K$  gleich Null. Daher werden wir davon Gebrauch machen, dass es sich bei  $\partial K$  (unter entsprechenden Voraussetzungen an  $K$ ) um eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  handelt.

### 3.1 Die Gramsche Determinante

Wie wir in der Einführung dieses Kapitels gesehen haben, benötigen wir für die Formulierung des klassischen Satzes von Gauß einen Integralbegriff für Funktionen, die auf einer “Fläche im Raum” bzw. zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  definiert sind. Dieses Problem betrachten wir gleich allgemeiner und betrachten eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$ . Wie schon in der Einführung dieses Kapitels bemerkt, macht das Integral  $\int_M f d\lambda^n$  in diesem Fall nicht besonders viel Sinn, da  $M$  im Fall  $k < n$  anschaulicherweise eine Nullmenge im  $n$ -dimensionalen Raum ist (ohne das wir dies explizit beweisen wollen).

Andererseits haben wir in Abschnitt 3.3 in der Analysis II erfahren, dass eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^k$  ist. Präziser gesagt gibt es zu jedem  $x \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$ , eine offene Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine Immersion  $\varphi : T \rightarrow U$ , so dass  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) = M \cap U$  ein Homöomorphismus ist. Die Abbildung  $\varphi$  ist dann eine sogenannte *Parameterdarstellung*, vgl. Definition 3.19 in Analysis II. Da wir uns auch anschaulich unter einer  $M$  ein “ $k$ -dimensionales Gebilde” vorstellen, liegt es nahe, diese Parameterdarstellung zu benutzen, um unsere Untermannigfaltigkeit  $M$  “in den  $\mathbb{R}^k$  zurückzuziehen”.

Dabei werden wir uns zunächst einmal den Spezialfall betrachten, dass unsere gegebene Funktion  $f$  nur auf dem Bild einer einzelnen Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von Null verschieden ist. Die Idee ist dann, das Integral von  $f$  über  $\varphi(T)$  durch das Integral der Verkettung  $f \circ \varphi$  über  $T$  zu definieren. Da  $T$  als offene Menge des  $\mathbb{R}^k$  keine Nullmenge bzgl.  $\lambda^k$  ist (klar?), erwarten wir auf diese Art einen sinnvollen Integralbegriff. Die entscheidende Frage ist dabei allerdings, wie sehr das “ $k$ -dimensionale Volumen” von  $T$  bei der Abbildung auf  $M$  durch die Parameterdarstellung  $\varphi$  “verzerrt” wird. Im Fall  $k = n$  liefert uns die Antwort der Transformationssatz, denn wir erhalten

$$\int_{\varphi(T)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_T f(\varphi(t)) \cdot |\det D\varphi(t)| d\lambda^n(t).$$

Für eine sinnvolle Definition des Integral von  $f$  über  $\varphi(T)$  vermuten wir daher im Fall  $k < n$  die Form

$$\int_T f(\varphi(t)) \cdot \boxed{?} d\lambda^k(t)$$

an, wobei wir uns natürlich noch überlegen müssen, was statt  $|\det D\varphi(t)|$  an die Stelle des Symbols  $\boxed{?}$  treten muss, das hier für eine “*Verzerrung*” durch die Parameterdarstellung  $\varphi$  steht. Schauen wir uns dazu einmal den Spezialfall an, dass  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto Ax$  eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,k}$  ist. Da  $\varphi$  als Parameterdarstellung einer Untermannigfaltigkeit eine Immersion ist, muss die Matrix  $A (= D\varphi(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}^k$  den vollen Rang  $k$  haben. Die Frage ist nun, wie stark  $\varphi$  das “Volumen einer Menge” verzerrt. Dazu betrachten wir den Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^k$ , der durch

$$W := \left\{ t \in \mathbb{R}^k \mid t = \sum_{i=1}^k t_i e_i, 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

gegeben ist, wobei  $e_i$  natürlich den  $i$ -ten Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^k$  bezeichnet. Offenbar gilt

$$\text{vol}_k(W) := \lambda^k(W) = 1.$$

Wir interessieren uns nun für das Volumen des Bildes von  $W$  unter  $\varphi$ , also der Menge  $\varphi(W)$ . Diese ist ein *Parallelepiped* (das ist ein  $k$ -dimensionales Analogon eines Parallelogramms) und hat die Form

$$AW := \varphi(W) = \{A \cdot t \mid t \in W\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i A e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k\right\},$$

Da dieses Parallelepiped in dem  $k$ -dimensionalen Unterraum  $\varphi(\mathbb{R}^k)$  des  $\mathbb{R}^n$  enthalten ist, gilt  $\text{vol}_n(AW) := \lambda^n(AW) = 0$ . Das ist allerdings irrelevant, denn wir interessieren uns an dieser Stelle für das Volumen “ $\text{vol}_k(AW)$ ” von  $AW$  als “ $k$ -dimensionales Gebilde”, d.h. als Teilmenge des Vektorraums  $\varphi(\mathbb{R}^k)$ , den wir mit dem Vektorraum  $\mathbb{R}^k$  identifizieren können. Diese Aufgabe lösen wir wie folgt. Zunächst berechnen wir eine  $QR$ -Zerlegung

$$A = QR, \quad R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,k}$$

von  $A$ , d.h.  $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$  ist eine orthogonale Matrix und  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{k,k}$  ist eine obere Dreiecksmatrix, die in diesem Fall genau wie  $A$  den Rang  $k$  hat. Da  $Q$  orthogonal und damit ein Produkt von Rotationen und Spiegelungen ist (siehe Lineare Algebra), können wir davon ausgehen, dass das “ $k$ -dimensionale Volumen” von  $AW$  durch Multiplikation mit  $Q^\top$  nicht verändert wird. Dies liefert

$$\text{vol}_k(AW) = \text{vol}_k(Q^\top AW) = \text{vol}_k(RW).$$

wobei

$$RW = \{R \cdot t \mid t \in W\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i R e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

gilt. Da nun  $R e_i$  für alle  $i = 1, \dots, k$  die Form

$$R e_i = \begin{bmatrix} \tilde{R} e_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

hat, können wir die Menge  $RW \subseteq \mathbb{R}^n$  in kanonischer Weise mit der Menge

$$\tilde{R}W = \{\tilde{R} \cdot t \mid t \in W\} = \left\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^k \mid \tilde{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{R} e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k\right\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

identifizieren. Für diese können wir dann einfach das Volumen mit dem Lebesgue-Borelschen Maß  $\lambda^k$  auf  $\mathbb{R}^k$  bestimmen:

$$\text{vol}_k(\tilde{R}W) = \lambda^k(\tilde{R}W) = |\det \tilde{R}| \cdot \lambda^k(W) = |\det \tilde{R}|$$

Hierbei haben wir die Formel (2.1) über die Verzerrung Borelscher Mengen unter linearen Transformationen benutzt. Etwas unschön ist hier allerdings, dass wir in der gefundenen Formel  $\text{vol}_k(AW) = |\det \tilde{R}|$  die Matrix  $\tilde{R}$  aus der  $QR$ -Zerlegung von  $A$  stehen haben. Wegen  $\tilde{R}^\top \tilde{R} = R^\top R = R^\top Q^\top Q R = A^\top A$  und

$$\det(A^\top A) = \det(\tilde{R}^\top \tilde{R}) = \det(\tilde{R}^\top) \det(\tilde{R}) = \det(\tilde{R})^2$$

erhalten wir aber schließlich die nur von  $A$  abhängige Formel

$$\text{vol}_k(AW) = \sqrt{\det(A^\top A)},$$

wobei man  $\det(A^\top A)$  als die *Gramsche Determinante* der Matrix  $A$  bezeichnet. Betrachten wir die Matrix  $A^\top A$  einmal etwas genauer: Gilt  $A = [a_1 \ \dots \ a_k]$ , d.h. bezeichnen wir die Spalten von  $A$  mit  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ , so erhalten wir

$$A^\top A = \begin{bmatrix} a_1^\top a_1 & \dots & a_1^\top a_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^\top a_1 & \dots & a_k^\top a_k \end{bmatrix} = [a_i^\top a_j]_{i,j} = [\langle a_i, a_j \rangle]_{i,j},$$

d.h. die Einträge von  $A^\top A$  bestehen gerade aus Skalarprodukten der Spalten von  $A$ .

Den Fall einer allgemeinen Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  unserer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  können wir nun auf diesen Spezialfall zurückführen, indem wir ausnutzen, dass  $\varphi$  lokal um  $t \in T$  durch ihre Ableitung

$$D\varphi(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,k}$$

approximiert werden kann. Diese Beobachtung führt uns zur folgenden Definition.

**Definition 3.1** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  eine Parameterdarstellung von  $M$ .

- 1) Die Abbildung  $G : T \rightarrow \mathbb{R}^{k,k}$ ,  $t \mapsto G(t) := D\varphi(t)^\top D\varphi(t) \in \mathbb{R}^{k,k}$  heißt Maßtensor (auch metrischer Tensor oder Gram-Matrix) von  $\varphi$ .
- 2) Die Abbildung  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \det(G(t))$  heißt Gramsche Determinante von  $\varphi$ .

**Bemerkung 3.2** Mit denselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Definition 3.1 erhalten wir:

- 1) Für alle  $t \in T$  gilt  $G(t) = [\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t) \rangle]_{i,j=1,\dots,k}$ .
- 2) Für den Spezialfall  $k = n$  gilt

$$g(t) = \det G(t) = \det(D\varphi(t)^\top D\varphi(t)) = |\det D\varphi(t)|^2$$

bzw. äquivalent dazu  $|\det D\varphi(t)| = \sqrt{g(t)}$ . In diesem Fall ist außerdem  $\varphi(T)$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  (klar?) und wir erhalten mit dem Transformationssatz:

$$\int_{\varphi(T)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_T f(\varphi(t)) |\det D\varphi(t)| d\lambda^n(t) = \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} d\lambda^n(t) \quad (3.2)$$

- 3) Die Matrix  $G(t)$  ist für alle  $t \in T$  positiv definit, denn für alle  $y \in \mathbb{R}^k$  gilt

$$y^\top G(t)y = y^\top D\varphi(t)^\top D\varphi(t)y = \|D\varphi(t)y\|_2^2 \geq 0$$

und aus  $\|D\varphi(t)y\|_2 = 0$  folgt  $D\varphi(t)y = 0$  sowie  $y = 0$ , da  $\varphi$  eine Immersion ist und daher  $D\varphi(t)$  vollen Rang hat. Insbesondere folgt damit  $g(t) > 0$  für alle  $t \in T$ .

**Beispiel 3.3** 1) Die offene Kreisscheibe  $U_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  ist als eine offene Menge eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ . Eine Parametrisierung, die alle Punkte von  $U_1(0)$  mit Ausnahme der nichtpositiven  $x$ -Achse abdeckt, ist durch

$$\varphi : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ , \quad (\varrho, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{bmatrix}$$

gegeben. Nun gilt für alle  $(\varrho, \phi) \in ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[$ , dass

$$D\varphi(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\varrho \sin \phi \\ \sin \phi & \varrho \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad G(\varrho, \phi) = D\varphi(\varrho, \phi)^\top D\varphi(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{bmatrix}.$$

Daher erhalten wir (wie zu erwarten war) für die Gramsche Determinante von  $\varphi$ , dass  $g(\varrho, \phi) = \det G(\varrho, \phi) = \varrho^2 = |\det D\varphi(\varrho, \phi)|^2$  für alle  $(\varrho, \phi) \in ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[$  gilt.

- 2) Wir betrachten die Sphäre  $S_R^2 := \partial K(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  vom Radius  $R > 0$  im  $\mathbb{R}^3$ . Wir wählen die Parametrisierung

$$\varphi : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{bmatrix}$$

(vgl. Beispiel 3.20 in Analysis II), die  $S_R^2$  mit Ausnahme des "Greenwich-Meridians" abdeckt. Wir erhalten für alle  $(\theta, \phi) \in ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$ , dass

$$D\varphi(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad G(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

womit wir die Gramsche Determinante  $g : (\theta, \phi) \mapsto \det G(\theta, \phi) = R^4 \sin^2 \theta$  erhalten.

Wenn wir mehrere Parametrisierungen einer Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  betrachten, dann können sich deren Bilder überlappen. Da unterschiedliche Parametrisierungen auch unterschiedliche Gramsche Determinanten haben können, stellt sich die Frage, wie diese miteinander in Zusammenhang gebracht werden können. Für die Beantwortung dieser Frage ist der folgende Satz wesentlich.

**Satz 3.4 (über Parametertransformationen)** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\varphi_j : T_j \rightarrow \varphi_j(T_j) \subseteq M$  zwei Parameterdarstellungen von  $M$ , so dass  $U := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2)$  nichtleer ist. Dann ist  $W_j := \varphi_j^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^k$  für  $j = 1, 2$  offen und  $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_2$  ist ein Diffeomorphismus.

Der Satz scheint auf den ersten Blick ganz klar zu sein, da ja  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  als Immersionen stetig differenzierbar sind. Leider ist uns an dieser Stelle aber nur die Stetigkeit der Umkehrfunktion  $\varphi_2^{-1}$  bekannt, so dass das Resultat damit beweisbedürftig ist.

**Beweis:** Sei  $j = 1$  oder  $j = 2$ . Nach Definition 3.19 ist  $\varphi_j$  ein Homöomorphismus (d.h. auch  $\varphi_j^{-1}$  ist stetig) und  $\varphi_j(T_j)$  ist offen in  $M$ . Dann ist aber auch  $U$  offen in  $M$  und aus der Stetigkeit von  $\varphi_j$  folgt die Offenheit von  $W_j$ . Sei nun  $t_1 \in W_1$  beliebig,  $a := \varphi_1(t_1) \in U$  und  $t_2 := \varphi_2^{-1}(a) \in W_2$ . Da  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist, gibt es nach Satz 3.22 aus Analysis II offene Mengen  $\tilde{U}, \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $a \in \tilde{U}$ , sowie einen Diffeomorphismus  $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ , so dass gilt:

$$\psi(M \cap \tilde{U}) = E_k \cap \tilde{V}, \quad \text{wobei } E_k := \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Setze nun  $\tilde{W}_j := \varphi_j^{-1}(M \cap \tilde{U})$ . Dann gilt

$$\psi \circ \varphi_1|_{\tilde{W}_1} = (g_1, \dots, g_k, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi_2|_{\tilde{W}_2} = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0)$$

wobei  $g = (g_1, \dots, g_k) : \tilde{W}_1 \rightarrow E_k \cap \tilde{V}$  und  $h = (h_1, \dots, h_k) : \tilde{W}_2 \rightarrow E_k \cap \tilde{V}$  stetig differenzierbare Funktionen sind (da sowohl  $\psi$  als auch  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  es sind). Hierbei identifizieren wir  $E_k$  mit dem  $\mathbb{R}^k$  und fassen auch  $E_k \cap \tilde{V}$  als eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^k$  auf.

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir für alle  $t \in \tilde{W}_1$ , dass

$$\begin{bmatrix} Dg(t) \\ 0 \end{bmatrix} = D(\psi \circ \varphi_1)(t) = D\psi(\varphi_1(t)) \cdot D\varphi_1(t)$$

und da  $D\psi(\varphi_1(t))$  invertierbar ist ( $\psi$  ist ein Diffeomorphismus, vgl. auch Bemerkung 3.1 aus Analysis II) und  $D\varphi_1(t)$  vollen Rang  $k$  hat, folgt, dass auch  $Dg(t)$  für alle  $t \in \tilde{W}_1$  Rang  $k$  hat, also invertierbar ist. Analog zeigen wir die Invertierbarkeit von  $Dh(t)$  für alle  $t \in \tilde{W}_2$ . Nach dem Umkehrsatz sind dann  $g$  und  $h$  lokal um  $\varphi_1^{-1}(a)$  bzw.  $\varphi_2^{-1}(a)$  Diffeomorphismen, o.B.d.A. auf ganz  $\tilde{W}_1$  bzw.  $\tilde{W}_2$  (andernfalls verkleinern wir  $\tilde{W}_j$  entsprechend). Dann gilt

$$\tau|_{\tilde{W}_1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{\tilde{W}_1} = \varphi_2^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1|_{\tilde{W}_1} = (\psi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\psi \circ \varphi_1)|_{\tilde{W}_1} = h^{-1} \circ g,$$

womit folgt, dass  $\tau$  auf ganz  $\tilde{W}_1$  ein Diffeomorphismus ist. Da aber  $t_1 \in W_1$  beliebig war, folgt, dass  $\tau$  schon auf ganz  $W_1$  ein Diffeomorphismus ist.  $\square$

**Korollar 3.5** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\varphi_j : T_j \rightarrow \varphi_j(T_j) \subseteq M$  zwei Parameterdarstellungen von  $M$ , so dass  $U := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2)$  nichtleer ist. Ferner seien  $g_1$  und  $g_2$  die Gramschen Determinanten von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , sowie  $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{\varphi_1^{-1}(U)} : \varphi_1^{-1}(U) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U)$  der Diffeomorphismus aus Satz 3.4. Dann gilt für alle  $t \in \varphi_1^{-1}(U)$ , dass

$$g_1(t) = |\det D\tau(t)|^2 g_2(\tau(t)).$$

**Beweis:** Wegen  $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau$  folgt mit der Kettenregel  $D\varphi_1(t) = D\varphi_2(\tau(t)) \circ D\tau(t)$  für alle  $t \in \varphi_1^{-1}(U)$ . Bezeichnet dann  $G_j$  den Maßtensor von  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$ , so gilt

$$G_1(t) = D\varphi_1(t)^\top D\varphi_1(t) = D\tau(t)^\top D\varphi_2(\tau(t))^\top D\varphi_2(\tau(t)) D\tau(t) = D\tau(t)^\top G_2(\tau(t)) D\tau(t).$$

Mit dem Determinantenmultiplikationssatz aus der Linearen Algebra folgt dann

$$g_1(t) = \det G_1(t) = |\det D\tau(t)|^2 \det G_2(\tau(t)) = |\det D\tau(t)|^2 g_2(\tau(t)). \quad \square$$



## 3.2 Integration über Untermannigfaltigkeiten I

Nach den Vorbereitungen des letzten Abschnitts kommen wir zur Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten für den Spezialfall von Funktionen, die nur auf dem Bild einer einzelnen Parameterdarstellung von Null verschieden sind.

**Definition 3.6** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  eine Parameterdarstellung von  $M$  mit Gramscher Determinante  $g$ . Ferner sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $f(x) = 0$  für alle  $x \in M \setminus \varphi(T)$ . Dann heißt  $f$  integrierbar über  $M$ , falls die Funktion  $t \mapsto f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)}$  integrierbar über  $T$  ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f(x) \, dS(x) := \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t) \quad (3.3)$$

das Integral von  $f$  über  $M$ .

**Bemerkung 3.7** 1) Das Integral (3.3) ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung. Dazu sei  $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{\varphi}(T) \subseteq M$  eine weitere Parameterdarstellung von  $M$  mit Gramscher Determinante  $\tilde{g}$ , so dass  $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) \cap \varphi(T) \neq \emptyset$  und  $f(x) = 0$  für alle  $x \in M \setminus \tilde{\varphi}(\tilde{T})$  gilt. O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) = \varphi(T)$  gilt. (Andernfalls verkleinern wir  $T$  und  $\tilde{T}$  entsprechend. Dies ändert nichts an den Voraussetzungen, da  $f$  nur auf der Menge  $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) \cap \varphi(T)$  von Null verschieden ist.) Bezeichnet dann  $\tau = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$  den Diffeomorphismus aus Satz 3.4, so folgt mit Hilfe des Transformationssatzes, dass

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{T}} f(\tilde{\varphi}(t)) \sqrt{\tilde{g}(t)} \, d\lambda^k(t) &= \int_{\tilde{T}} f(\varphi(\tau(t))) \cdot |\det D\tau(t)| \sqrt{g(\tau(t))} \, d\lambda^k(t) \\ &= \int_T f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t). \end{aligned}$$

2) Das Symbol  $dS$  bezeichnet man als *k-dimensionales Oberflächenelement*, wobei der Buchstabe “S” hier an den englischen Begriff *surface* erinnern soll. (Im deutschen Sprachraum (und dort insbesondere in den Ingenieurwissenschaften) wird dagegen auch gerne das Symbol  $dO$  verwendet.) Als Merkgregel verwenden wir im Folgenden die “Formel”  $dS(x) = \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t)$  die auch gerne durch “ $dS(x) = \sqrt{g(t)} \, dt$ ” abgekürzt wird.

**Beispiel 3.8** Wir berechnen das Trägheitsmoment der Kugeloberfläche vom Radius  $r > 0$ . Analog zu Teil 1) von Beispiel 2.14 lehrt uns die Physik, dass dieses durch das Integral

$$\Theta = \int_{S_R^2} f(x, y, z) \, dS(x, y, z)$$

gegeben ist, wobei  $S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  und  $f : S_R^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \delta x^2 + y^2$  gilt, wenn die Massendichte  $\delta$  der Kugeloberfläche als konstant angenommen wird und es sich

um eine Rotation um die  $z$ -Achse handelt. Wir wählen dann die aus Beispiel 3.3 bekannte Parameterdarstellung

$$\varphi : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{bmatrix}$$

mit der Gramschen Determinante  $g(\theta, \phi) = R^4 \sin^2 \theta$ . Eigentlich deckt diese Parameterdarstellung gar nicht die ganze Kugeloberfläche ab, es fehlt ja der “Greenwich-Meridians”, dies macht aber nichts, weil es sich dabei um eine “zweidimensionale Nullmenge” handelt. Präziser gesagt ist der Rand des Integrationsbereichs  $T := ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^2$  und spielt daher bei der Integration keine Rolle. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_{\varphi(T)} f(x, y, z) \, dS(x, y, z) = \int_T f(\varphi(\theta, \phi)) \sqrt{g(\theta, \phi)} \, d\lambda^2(\theta, \phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta(R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) R^2 \sin \theta \, d\lambda^2(\theta, \phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta R^4 \sin^3 \theta \, d\lambda^2(\theta, \phi) = \frac{8}{3} \pi \delta R^4. \end{aligned}$$

**Beispiel 3.9** *Kurvenintegrale*: Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve (d.h.  $\varphi$  ist stetig differenzierbar mit  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ ). Weiter sei  $\varphi : I \rightarrow \varphi(I)$  ein Homöomorphismus. Dann ist  $\varphi(I)$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit der globalen Parameterdarstellung  $\varphi$ . Wegen  $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^n$  erhalten wir den Maßtensor  $G$  und die Gramsche Determinante  $g$  von  $\varphi$  für alle  $t \in I$  als

$$G(t) = \varphi'(t)^\top \varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|^2 = g(t).$$

Für eine über  $\gamma := \varphi(I)$  integrierbare Funktion  $f$  gilt also

$$\int_\gamma f(x) \, dS(x) = \int_I f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, d\lambda^1(t).$$

Betrachten wir speziell die konstante Funktion  $f : x \mapsto 1$ , so definieren wir durch Integration über  $\gamma$  die sogenannte *Kurvenlänge* (oder auch *Bogenlänge*)  $L(\gamma)$  der Kurve:

$$L(\gamma) := \int_\gamma 1 \, dS(x) = \int_I \|\varphi'(t)\| \, d\lambda^1(t)$$

Als konkretes Beispiel berechnen wir den Umfang des Einheitskreises. Dazu betrachten wir die Parametrisierung

$$\varphi : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \text{mit der Ableitung } \varphi' : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Hier lassen wir zwar den Punkt  $(1, 0)$  aus, doch ein einzelner Punkt spielt natürlich für die Kurvenlänge keine Rolle (bzw. ist eine “Nullmenge”). Wegen  $\|\varphi'(t)\| = 1$  erhalten wir

$$L(\varphi(]0, 2\pi[)) = \int_{]0, 2\pi[} \|\varphi'(t)\| \, d\lambda^1(t) = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

Um zu illustrieren, dass die Kurvenlänge tatsächlich nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt, betrachten wir noch eine zweite Parametrisierung des Kreises:

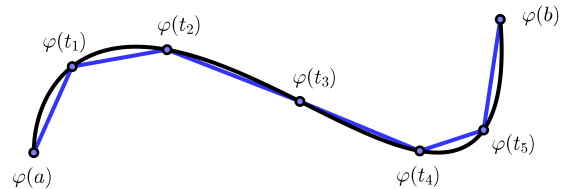
$$\psi : ]0, \sqrt{2\pi}[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \psi' : ]0, \sqrt{2\pi}[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} -2t \sin t^2 \\ 2t \cos t^2 \end{bmatrix}.$$

Machen sie sich klar, dass wir auch hier alle Punkte des Einheitskreises mit Ausnahme von  $(1, 0)$  durchlaufen. Hier gilt  $\|\psi'(t)\| = 2t$  für alle  $t \in ]0, \sqrt{2\pi}[$  und wir erhalten

$$L(\varphi(]0, \sqrt{2\pi}[)) = \int_{]0, \sqrt{2\pi}[} \|\psi'(t)\| d\lambda^1(t) = \int_0^{\sqrt{2\pi}} 2t dt = t^2 \Big|_0^{\sqrt{2\pi}} = 2\pi.$$

**Bemerkung 3.10** Die Kurvenlänge erhalten wir an dieser Stelle als eine Definition. Die Frage, ob diese Definition auch die *reale Welt* widerspiegelt, ist eine andere. Um Ihnen zu demonstrieren, dass unser Vorgehen sinnvoll war, betrachten wir an dieser Stelle auch eine stärker an der realen Welt orientierte Herleitung der Kurvenlänge. Ist  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Kurve, so können wir das Bild von  $\varphi$  durch Polygonzüge approximieren. Dazu betrachten wir eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  des Intervalls  $[a, b]$  und bestimmen die Länge

$$\sum_{j=1}^m \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| \quad (3.4)$$



des Polygonzugs, den wir durch Verbinden der Punkte  $\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_m)$  erhalten. (Vergleichen Sie dazu auch Bemerkung 5.42 aus Analysis I.) Das Ziel ist jetzt natürlich, durch Verfeinerungen der Intervallzerlegung immer genauere Approximationen an die Kurvenlänge zu erhalten. Beobachten wir dann, dass wir die Summe in (3.4) als

$$\sum_{j=1}^m \left\| \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\| \cdot (t_j - t_{j-1})$$

umschreiben können, so stellen wir fest, dass es sich bei dieser Darstellung um eine Riemannsche Summe handelt (vgl. Abschnitt 7.2 in Analysis I). Wählen wir die Unterteilungen immer feiner, so dass das Maximum der Abstände  $(t_j - t_{j-1})$  gegen Null geht, so geht die obige Summe in ein Integral über, während gleichzeitig, falls  $\varphi$  differenzierbar ist, der Differenzenquotient im Integranden gegen die Ableitung konvergiert:

$$\lim_{t_j \rightarrow t_{j-1}} \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \varphi'(t_{j-1})$$

Exakter nennt man eine stetige Kurve  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  *rektifizierbar*, falls es ein  $L \geq 0$  gibt, so dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für jede Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_n = b$  von  $[a, b]$  gilt:

$$\max \{t_j - t_{j-1} \mid j = 1, \dots, n\} < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| - L \right| < \varepsilon$$

Die Konstante  $L$  heißt dann *Bogenlänge* oder *Kurvenlänge* von  $\varphi$ . Man kann nun zeigen, dass (wie oben schon heuristisch angedeutet wurde) jede stetig differenzierbare Kurve  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar ist und dass für die Bogenlänge  $L$  von  $\varphi$  gilt:

$$L = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Dies entspricht genau der Definition der Kurvenlänge in Beispiel 3.9.

### 3.3 Atlanten und Zerlegungen der Eins

Im Folgenden wollen wir Definition 3.6 auf den Fall verallgemeinern, dass sich die gegebene Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  nicht durch eine einzige Parameterdarstellung überdecken lässt und die zu integrierende Funktion nicht nur auf dem Bild einer einzigen Parameterdarstellung von  $M$  von Null verschieden ist. Dabei werden wir uns allerdings auf Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  beschränken, die von endlich vielen Parameterdarstellungen “überdeckt” wird. (Allgemeiner kann man auch den Fall von abzählbar vielen Parameterdarstellungen erlauben. Wir begnügen uns hier mit dem einfacheren Fall, da dieser bereits alle im Folgenden vorkommenden Untermannigfaltigkeiten abdeckt.) Da Parameterdarstellungen bisweilen auch als *Karten* bezeichnet werden, werden wir in diesem Fall von Untermannigfaltigkeiten mit einem *endlichem Atlas* sprechen. Dies ist allerdings nicht ganz korrekt, da in der *Differentialgeometrie* gerade die Umkehrabbildungen von Parameterdarstellungen als Karten bezeichnet werden. Da wir im Folgenden aber stets mit Parameterdarstellungen statt Karten arbeiten, nutzen wir an dieser Stelle den Begriff *Atlas* auch für eine Menge von Parameterdarstellungen.

**Definition 3.11** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Ein Atlas von  $M$  ist eine Familie von Parameterdarstellungen  $(\varphi_i : T_i \rightarrow \varphi_i(T_i) \subseteq M)_{i \in I}$  mit

$$\bigcup_{i \in I} \varphi_i(T_i) = M.$$

Der Atlas heißt endlich, falls  $I$  nur endlich viele Elemente enthält.

Die Hauptidee für die Verallgemeinerung des Integrals ist Zerlegung von  $f$  in eine Summe von Funktionen, die jeweils nur auf dem Bild einer einzigen Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von Null verschieden sind. Wegen der Linearität des Integrals reicht es dann, jeden Summanden einzeln zu betrachten. In einigen Situationen ist die Funktion  $f\chi_{\varphi(T)}$  dafür geeignet. Ist allerdings  $f$  stetig oder sogar differenzierbar, so kann diese Eigenschaft beim Übergang zu  $f\chi_{\varphi(T)}$  verloren gehen. An dieser Stelle helfen uns sogenannte *Zerlegungen der Eins*.

Ist  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , so nennen wir eine Familie  $(\psi_i)_{i \in I}$  von Funktionen  $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$  eine *Zerlegung der Eins über  $X$* , falls für alle  $x \in X$  gilt, dass

$$\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1. \quad (3.5)$$

Die Zerlegung heißt *stetig* bzw. *glatt*, falls alle  $\psi_i$ ,  $i \in I$  stetig bzw. stetig differenzierbar sind. Die Gleichheit (3.5) ist übrigens der Grund dafür, warum wir an dieser Stelle auf eine exakte Definition von Zerlegungen der Eins verzichten wollen, denn hierfür müssten wir gewährleisten, dass der Ausdruck  $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$  auch im Fall beliebiger Indexmengen  $I$  stets wohldefiniert ist. In all unseren Beispielen wird dies allerdings der Fall sein, weil es dort zu jedem  $x \in X$  nur endlich viele Indizes  $i \in I$  geben wird, für die  $\psi_i(x) \neq 0$  gilt. Die

scheinbar unendliche Summe ist dann für jedes  $x \in X$  eine endliche Summe<sup>1</sup>. Im folgenden wollen wir Zerlegungen der Eins über dem  $\mathbb{R}^n$  konstruieren, führen aber vorher noch einen neuen Begriff ein.

**Definition 3.12** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt die Menge

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \subseteq X$$

der Träger von  $f$ .

Die Bezeichnung  $\text{supp}(f)$  leitet sich dabei von der englischen Bezeichnung *support* für Träger her.

**Bemerkung 3.13** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist die Menge  $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  offen in  $X$ . Damit folgt  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \partial \text{supp}(f)$ , also für alle  $x$  aus dem Rand des Trägers von  $f$ .

Ist speziell  $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so verwenden wir im Folgenden die zu Teil 3) von Bemerkung 6.45 aus Analysis I analogen Bezeichnungen  $C(U)$ ,  $C^k(U)$  und  $C^\infty(U)$  für die Menge der stetigen bzw.  $k$ -mal stetig differenzierbaren bzw. beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 3.14** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- 1)  $C_0(U) := \{f \in C(U) \mid \text{supp}(f) \subseteq U \text{ ist kompakt}\}.$
- 2)  $C_0^k(U) := C_0(U) \cap C^k(U) = \{f \in C_0(U) \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$
- 3)  $C_0^\infty(U) := C_0(U) \cap C^\infty(U) = \{f \in C_0(U) \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\}.$

**Beispiel 3.15** 1) *Stetige Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$* : Die Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$

Dann gilt offenbar  $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ . Um eine Zerlegung der Eins zu erhalten, benutzen wir für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $a \in \mathbb{R}$  die Bezeichnung  $\tau_a f$  für die “Verschiebung” von  $f$  um  $a$ , d.h. für die Funktion

$$\tau_a f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t - a).$$

---

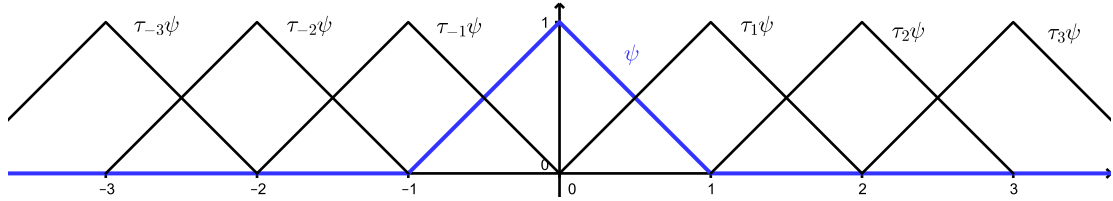
<sup>1</sup>Für alle, die es gerne präzise wissen möchten: Ist  $I$  eine Indexmenge und  $(a_i)_{i \in I}$  eine Familie reeller Zahlen, so dass es  $k \in \mathbb{N}$  und  $i_1, \dots, i_k \in I$  gibt mit  $a_{i_j} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, k$  und  $a_i = 0$  für alle  $i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ , so definieren wir

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{j=1}^k a_{i_j}.$$

Dann ist  $(\tau_k \psi)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine stetige (aber nicht differenzierbare) Zerlegung der 1 über  $\mathbb{R}$ , denn für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_k \psi)(x) = 1,$$

da in dieser scheinbar unendlichen Summe höchstens zwei verschiedene  $\tau_k$  einen von Null verschiedenen Wert annehmen und sich diese Werte jeweils zu Eins addieren. Die untenstehende Skizze veranschaulicht diesen Sachverhalt.



- 2) *Stetige Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$* : Hierzu betrachten wir die Funktion  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\phi(x) := \prod_{i=1}^n \psi(x_i) = \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdot \dots \cdot \psi(x_n)$$

für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $\psi$  wie in 1) gegeben ist. Für einen Punkt  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  definieren wir dann analog zu 1) die *Verschiebung um  $p$*  durch

$$\tau_p \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \phi(x - p) = \phi(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) = \prod_{i=1}^n (\tau_{p_i} \psi)(x_i).$$

Dann ist  $(\tau_p \phi)_{p \in \mathbb{Z}^n}$  eine stetige Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$ , denn für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt unter Benutzung von 1), dass

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} (\tau_p \phi)(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \left( \prod_{i=1}^n (\tau_{p_i} \psi)(x_i) \right) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{p_i \in \mathbb{Z}} (\tau_{p_i} \psi)(x_i) \right) = 1.$$

Dabei konnten wir in der zweiten Gleichheit das Distributivgesetz verwenden, weil für jedes feste  $x \in \mathbb{R}^n$  für jede Komponente höchstens zwei der Funktionen  $\tau_{k_i} \psi(x_i)$  von Null verschiedene Werte annehmen, die auftretenden Summen also nur endlich viele Summanden besitzen.

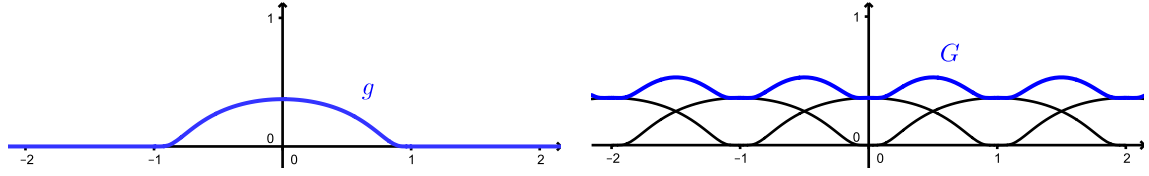
- 3) *Glatte Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$* : Hierzu betrachten wir die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{für } |t| < 1, \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Mit Bemerkung 6.56 aus Analysis I folgt leicht, dass  $g$  beliebig oft differenzierbar ist, d.h. es gilt  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Weiter betrachten wir die Funktion

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_k g)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t - k).$$

Dann gilt auch  $G \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Außerdem ist  $G$  auf ganz  $\mathbb{R}$  von Null verschieden und  $k$ -periodisch für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , d.h. es gilt  $G(t+k) = G(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$ .



Allerdings ist durch die Funktionen  $(\tau_k g)_{k \in \mathbb{Z}}$  noch keine Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$  gegeben, wie sie aus der obenstehenden Skizze erkennen können. Daher betrachten wir die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{g(t)}{G(t)}. \quad (3.6)$$

Dann gilt  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  und durch  $(\tau_k h)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist eine glatte (sogar *beliebig oft differenzierbare*) Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}$  gegeben, denn für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_k h)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t-k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t)} = \frac{1}{G(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k) = 1.$$

Der Träger  $\text{supp}(g) = \text{supp}(h) = [-1, 1]$  der Funktionen  $g$  und  $h$  kann durch Stauchung oder Streckung beliebig angepasst werden. So hat die Funktion

$$t \mapsto g\left(\frac{t}{\varepsilon} - k\right)$$

den Träger  $[k\varepsilon - \varepsilon, k\varepsilon + \varepsilon]$ .

- 4) *Glatte Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$* : Für einen Punkt  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$  und  $\varepsilon > 0$  definieren wir die Funktion

$$\alpha_{p\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n h\left(\frac{x_i}{\varepsilon} - p_i\right), \quad (3.7)$$

wobei  $h$  wie in 3.6 gegeben ist. Dann gilt  $\alpha_{p\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\text{supp}(\alpha_{p\varepsilon}) = \prod_{i=1}^n [p_i\varepsilon - \varepsilon, p_i\varepsilon + \varepsilon].$$

Der Träger von  $\alpha_{p\varepsilon}$  ist also ein Würfel mit Mittelpunkt  $p$  und Kantenlänge  $2\varepsilon$ . Analog zur Rechnung in Teil 2) stellen Sie fest, dass

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{p\varepsilon}(x) = 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt, d.h. durch  $(\alpha_{p\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$  ist eine glatte Zerlegung der Eins über  $\mathbb{R}^n$  gegeben.

Eine wichtige Anwendung von Funktionen mit kompaktem Träger findet sich in der folgenden wichtigen Formel, die die partielle Integration aus Analysis I verallgemeinert.

**Satz 3.16 (“Partielle Integration”)** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(U)$  und  $g, \varphi \in C_0^1(U)$  (d.h. sowohl  $g$  als auch  $\varphi$  haben einen kompakten Träger in  $U$ ). Dann gilt für  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x) = 0 \\ 2) \quad & \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) \, d\lambda^n(x) = - \int_U f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x) \end{aligned}$$

**Beweis:** 1) Sei o.B.d.A.  $U = \mathbb{R}^n$ . (Ansonsten setze  $\varphi$  trivial auf  $\mathbb{R}^n$  fort, dann hat  $\varphi$  immer noch einen kompakten Träger.) Weiter sei o.B.d.A.  $i = 1$ . (Die Behandlung der anderen Komponenten verläuft komplett analog.) Da  $\text{supp}(\varphi)$  kompakt, also beschränkt ist, gibt es  $R > 0$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]^n$ . Dann folgt aber mit dem Satz von Fubini, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, d\lambda^1(x_1) \right) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) = 0,$$

denn da  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  einen kompakten Träger in  $[-R, R]$  hat, folgt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für festes  $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , dass

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, d\lambda^1(x_1) = \int_{-R}^R \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, dx_1 = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{-R}^R = 0,$$

da eine stetige Funktion nach Bemerkung 3.13 auf dem Rand ihres Trägers (und damit erst recht auf dem Rand jeder Menge, die den Träger enthält) den Wert Null annimmt.

2) Mit  $g$  hat auch  $\psi := f \cdot g$  kompakten Träger und mit 1) und der Produktregel folgt

$$0 = \int_U \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \, d\lambda^n = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) \, d\lambda^n(x) + \int_U f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x),$$

woraus wir sofort die Behauptung erhalten.  $\square$

**Bemerkung 3.17** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sowie  $f \in C^2(U)$  und  $g \in C_0^2(U)$ . Dann gilt nach Satz 3.16 für alle  $i = 1, \dots, n$ , dass

$$\int_U \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \cdot g(x) \, d\lambda^n(x) = - \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, d\lambda^n(x) = \int_U f(x) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x) \, d\lambda^n(x). \quad (3.8)$$

Erinnern wir uns dann daran, dass der *Laplace-Operator* durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

gegeben ist (vgl. Abschnitt 2.7 in Analysis II) und benutzen wir für den *Gradienten* von  $f$  (oder  $g$ ) das *Nabla-Symbol*  $\nabla f := \text{grad } f$ , so erhalten wir durch Summation von  $i = 1, \dots, n$  aus (3.8) die schöne und einprägsame Formel

$$\int_U \Delta f \cdot g \, d\lambda^n = - \int_U \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\lambda^n = \int_U f \cdot \Delta g \, d\lambda^n.$$



### 3.4 Integration über Untermannigfaltigkeiten II

Haben wir eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  mit einem endlichen Atlas  $(\varphi_i : T_i \rightarrow M)_{i=1,\dots,m}$  gegeben, so können wir die Mengen

$$U_1 := \varphi_1(T_1), \quad U_j := \varphi_j(T_j) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} U_i \right) = \varphi_j(T_j) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} (U_i \cap \varphi_j(T_j)) \right), \quad j = 2, \dots, m.$$

definieren und erhalten durch  $\alpha_j := \chi_{U_j}$  eine (nicht stetige) Zerlegung  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,m}$  der Eins über  $M$ . Wesentlich für die spätere Definition des Integrals über  $M$  ist die Eigenschaft dieser Zerlegung der Eins, dass die Funktionen  $\chi_{\varphi_j^{-1}(U_j)} : t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$  messbar sind, da die Mengen

$$\varphi_1^{-1}(U_1) = T_1 \quad \text{und} \quad \varphi_j^{-1}(U_j) = T_j \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} \varphi_j^{-1}(U_i \cap \varphi_j(T_j)) \right), \quad j = 2, \dots, m$$

messbar bzw. Borel-Mengen sind. (Klar?) Diese grundlegende Eigenschaft werden wir auch für andere Zerlegungen der Eins fordern.

**Definition 3.18** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit endlichem Atlas  $(\varphi_j : T_j \rightarrow M)_{j=1,\dots,m}$ . Eine Zerlegung  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,m}$  der Eins über  $M$  heißt dem Atlas  $(\varphi_j)_{j=1,\dots,m}$  untergeordnete lokal integrierbare Zerlegung der Eins, falls folgende Eigenschaften gelten:

- 1) Für alle  $x \in M$  gilt  $0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , und  $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1$ .
- 2)  $\alpha_j(x) = 0$  für alle  $x \in M \setminus \varphi_j(T_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .
- 3) Für jedes  $j = 1, \dots, m$  ist die Funktion  $T_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$  messbar.

Die Bezeichnung “lokal integrierbar” in Definition 3.18 rührt daher, dass eine beschränkte messbare Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, lokal integrierbar, d.h. integrierbar über jeder kompakten Teilmenge  $K \subseteq U$  sind. (Ist  $|f|$  auf  $U$  durch  $L \geq 0$  beschränkt, so ist  $L \cdot \chi_K$  eine integrierbare Majorante von  $f \chi_L$ .) Da die Funktionen  $\alpha_j$  beschränkt und messbar sind, sind sie also auch lokal integrierbar.

**Definition 3.19** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit endlichem Atlas. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar über  $M$ , falls es einen endlichen Atlas  $(\varphi_j : T_j \rightarrow M)_{j=1,\dots,m}$  von  $M$  mit untergeordneter lokal integrierbarer Zerlegung der Eins  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,m}$  gibt, so dass  $f \chi_{\varphi_j(T_j)}$  für jedes  $j = 1, \dots, m$  integrierbar über  $M$  ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f(x) \, dS(x) := \sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j(x) f(x) \, dS(x)$$

das Integral von  $f$  über  $M$ .

**Bemerkung 3.20** Das Integral von  $f$  über  $M$  aus Definition 3.19 ist wohldefiniert, denn bezeichnen wir die Gramsche Determinante der Parameterdarstellung  $\varphi_j$  mit  $g_j$ , so gilt:

- 1) Für jedes  $j = 1, \dots, m$  existiert das Integral

$$\int_M \alpha_j(x) f(x) dS(x) = \int_{T_j} \alpha_j(\varphi_j(t)) f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_j(t)} d\lambda^k(t),$$

denn nach Voraussetzung ist  $f\chi_{\varphi_j(T_j)}$  integrierbar über  $M$ , was bedeutet, dass die Funktion  $t \mapsto f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}$  integrierbar über  $T_j$  ist. Dann ist aber nach Korollar 1.81 auch die messbare Funktion  $t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}$  integrierbar, da für alle  $t \in T_j$  gilt:

$$|\alpha_j(\varphi_j(t))f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}| \leq |f(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}|.$$

- 2) Das Integral hängt nicht von der Auswahl des Atlases oder der Zerlegung der Eins ab. Ist auch  $(\psi_i : U_i \rightarrow \psi_i(U_i))_{i=1, \dots, \ell}$  ein endlicher Atlas von  $M$  mit untergeordneter lokal integrierbarer Zerlegung der Eins  $(\beta_i)_{i=1, \dots, \ell}$ , so gilt für alle  $j, i$ , dass

$$\int_M \alpha_j(x) \beta_i(x) f(x) dS(x) = \int_{\varphi_j(T_j) \cap \psi_i(U_i)} \alpha_j(x) \beta_i(x) f(x) dS(x),$$

da  $\alpha_j$  auf  $M \setminus \varphi_j(T_j)$  und  $\beta_i$  auf  $M \setminus \psi_i(U_i)$  verschwindet. Ist nun  $\varphi_j(T_j) \cap \psi_i(U_i) = \emptyset$ , so ist das Integral gleich Null, andernfalls hängt es nach Bemerkung 3.7 nicht von der Wahl der Parameterdarstellung ab. (Sowohl  $\varphi_j$  als auch  $\psi_i$  sind globale Parameterdarstellungen der Untermannigfaltigkeit  $\varphi_j(T_j) \cap \psi_i(U_i)$  des  $\mathbb{R}^n$ .) Ferner gilt

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_j \beta_i \quad \text{und} \quad \beta_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_i,$$

woraus wir schließlich erhalten, dass

$$\sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j f dS = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \alpha_j \beta_i f dS = \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_i f dS = \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \beta_i f dS.$$

**Definition 3.21** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit endlichem Atlas und sei  $A \subseteq M$ .

- 1)  $A$  heißt integrierbar über  $M$ , falls  $\chi_A$  integrierbar über  $M$  ist. In diesem Fall heißt

$$\text{vol}_k(A) := \int_M \chi_A(x) dS(x)$$

das  $k$ -dimensionale Volumen (auch  $k$ -dimensionaler Flächeninhalt) von  $A$  bzgl.  $M$ .

- 2) Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar über  $A$ , falls  $f\chi_A$  integrierbar über  $M$  ist. In diesem Fall ist das Integral von  $f$  über  $A$  definiert durch

$$\int_A f(x) dS(x) := \int_M f(x) \chi_A(x) dS(x).$$

**Bemerkung 3.22** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 3.21 gilt

$$\text{vol}_k(A) = \int_A 1 \, dS(x).$$

Ist speziell  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve wie in Beispiel 3.9, so ist  $\text{vol}_1(\varphi(I))$  nichts anderes als die Kurvenlänge von  $\varphi$ .

**Beispiel 3.23** Wir berechnen die Oberfläche der Kugel  $S^2(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  und benutzen dazu die Parameterdarstellung  $\psi : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  aus Beispiel 3.3, für die wir die Gramsche Determinante als  $g : (\theta, \varphi) \mapsto R^4 \sin^2 \theta$  berechnet haben. Wie bereits festgestellt deckt  $\psi$  nicht den Nullmeridian ab, aber wie wir bereits in Beispiel 3.8 festgestellt haben, stellt dies kein Problem dar. Wir erhalten

$$\text{vol}_2(S^2(R)) = \int_{S^2(R)} 1 \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\varphi = 4\pi R^2.$$

Falls die Kugeloberfläche die konstante Dichte  $\delta$  hat, so erhalten wir  $M = 4\pi\delta R^2$  als deren Masse. Setzen wir dies in den Wert des Trägheitsmoments  $\Theta$  der Kugel aus Beispiel 3.8 ein, so erhalten wir die bekannte Formel  $\Theta = \frac{2}{5}MR^2$ .

Für spätere Zwecke betrachten wir an dieser Stelle noch einen wichtigen Spezialfall:

**Bemerkung 3.24** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist der Graph

$$M := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

nach Satz 3.22 aus Analysis II eine *Hyperfläche*, d.h. eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Diese hat sogar einen endlichen Atlas, denn wir erhalten eine globale Parameterdarstellung durch

$$\varphi : U \rightarrow M, \quad (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, f(t_1, \dots, t_{n-1})).$$

(Dass  $\varphi$  eine Immersion ist wird aus dem nächsten Schritt klar. Ist Ihnen auch klar, warum  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist? Wie sieht die Umkehrabbildung von  $\varphi$  aus?) Weiter gilt

$$D\varphi(t) = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ Df(t) \end{bmatrix} \text{ und } D\varphi(t)^\top D\varphi(t) = I_{n-1} + Df(t)^\top Df(t) = I_{n-1} + \text{grad } f(t) \text{grad } f(t)^\top$$

für alle  $t \in U$ . Mit Hilfe der Formel  $\det(I_n + uv^\top) = 1 + u^\top v$  für  $u, v \in \mathbb{R}^n$  (diese Formel gilt sogar für beliebige Körper  $K$  und ist Ihnen entweder aus der Linearen Algebra bekannt oder eine Übungsaufgabe) folgt dann für die Gramsche Determinante  $g$  von  $\varphi$  für alle  $t \in U$ , dass

$$g(t) = 1 + \text{grad } f(t)^\top \text{grad } f(t) = 1 + \|\text{grad } f(t)\|^2.$$

Damit erhalten wir für diesen Fall die Merkregel  $dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } f(t)\|^2} \, d\lambda^{n-1}(t)$ .

### 3.5 Kompakta mit glattem Rand

In der Einführung haben wir schon angedeutet, dass wir im Integralsatz von Gauß eine Menge  $A$  mit geschlossener Oberfläche betrachten wollen und dann einerseits über  $A$  und andererseits über die Oberfläche  $\partial A$  integrieren wollen. Nach unseren vorhergehenden Überlegungen, sollte es sich dann bei  $\partial A$  um eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  handeln, damit das Integral einer Funktion über  $\partial A$  definiert ist. Da wir für die korrekte Formulierung des Satzes von Gauß noch stärkere Eigenschaften der Oberfläche von  $A$  benötigen, ziehen wir uns auf sogenannte *Kompakta mit glattem Rand* zurück.

**Definition 3.25** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Wir sagen  $A$  hat einen glatten Rand (bzw.  $A$  ist ein Kompaktum mit glattem Rand), falls es zu jedem Randpunkt  $a \in \partial A$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $a$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass gilt:

- 1)  $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$
- 2)  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$

**Satz 3.26** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Definition 3.25 gilt

$$\partial A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}.$$

**Beweis:** “ $\subseteq$ ”: Diese Inklusion beweisen wir mit Kontraposition. Ist  $a \in U$  mit  $\psi(a) \neq 0$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $\psi$  eine Umgebung  $V \subseteq U$  von  $a$ , so dass entweder  $\psi(x) < 0$  für alle  $x \in V$  oder  $\psi(x) > 0$  für alle  $x \in V$  gilt. Im ersten Fall ist  $a$  ein innerer Punkt von  $A$ , im zweiten Fall liegt  $a$  außerhalb der abgeschlossenen Menge  $A$ . In beiden Fällen ist  $a$  also kein Randpunkt von  $A$ .

“ $\supseteq$ ”: Sei  $a \in U$ , so dass  $\psi(a) = 0$ . Zu zeigen ist, dass  $a$  ein Randpunkt von  $A$  ist, d.h., dass in jeder Umgebung von  $a$  sowohl Punkte aus  $A$  als auch aus  $\mathbb{R}^n \setminus A$  liegen. Setze dazu  $w := \text{grad } \psi(a)$ . Dann gilt nach Voraussetzung  $w \neq 0$ , sowie

$$\psi(a + tw) = \psi(a) + D\psi(a)(tw) + R(tw) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(tw)}{\|tw\|} = 0.$$

Wegen  $D\psi(a) = \text{grad } \psi(a)^\top = w^\top$  und  $w^\top w = \|w\|^2$  sowie  $\psi(a) = 0$  folgt daraus

$$\psi(a + tw) = t \cdot \|w\|^2 + R(tw) = t \left( \|w\|^2 + \|w\| \frac{R(tw)}{t\|w\|} \right).$$

Da der Quotient  $\frac{R(tw)}{t\|w\|}$  wegen der Differenzierbarkeit von  $\psi$  für  $t \rightarrow 0$  gegen Null geht, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $t$  mit  $0 < t < \varepsilon$  gilt:

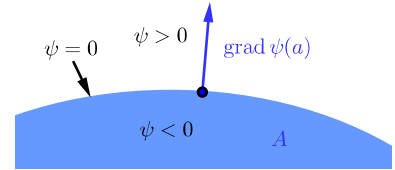
$$\psi(a + tw) > 0 \quad \text{und} \quad \psi(a - tw) < 0$$

Letzteres ist aber äquivalent zu  $a + tw \notin A$  bzw.  $a - tw \in A$  für alle  $0 < t < \varepsilon$ , woraus folgt, dass  $a$  ein Randpunkt von  $A$  ist.  $\square$

**Bemerkung 3.27** Mit den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Definition 3.25 erhalten wir die nachstehenden Folgerungen aus Satz 3.26 und seinem Beweis:

- 1) Der Rand  $\partial A$  von  $A$  ist eine kompakte  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , also eine Hyperfläche. Dies folgt sofort aus Satz 3.22 in Analysis II.
- 2) Ist  $a \in \partial A$ , so ist  $\text{grad } \psi(a)$  ein Normalenvektor von  $\partial A$ , d.h. er “steht senkrecht” auf  $\partial A$ , also der Oberfläche von  $A$ . Dies folgt anschaulich aus Bemerkung 2.70 aus Analysis II, da  $\partial A \cap U$  gerade eine Niveaumenge von  $\psi$  zum Niveau 0 ist und der Gradient senkrecht auf den Niveaumengen steht bzw. formal aus Satz 3.29 aus Analysis II, da der Vektor  $\text{grad } \psi(a)$  eine Basis des eindimensionalen Normalenraums  $N_a(\partial A)$  bildet.
- 3) Zu jedem  $a \in A$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $a + t \text{grad } \psi(a) \notin A$  und  $a - t \text{grad } \psi(a) \in A$  für alle  $t$  mit  $0 < t < \varepsilon$  gilt. Zusammen mit 2) liefert uns dies die Erkenntnis, dass der (hinreichend klein skalierte) Vektor  $\text{grad } \psi(a)$  “aus  $A$  herauszeigt”, der (ebenso skalierte) Vektor  $-\text{grad } \psi(a)$  dagegen “in  $A$  hineinzeigt”.

Diese Tatsache ist übrigens der Grund dafür, warum wir in Definition 3.25 verlangt haben, dass  $\psi$  in  $A \cap U$  kleiner oder gleich Null sein soll. Außerhalb von  $A$  ist  $\psi$  dann positiv. In Bemerkung 2.70 in Analysis II haben wir festgestellt, dass der Gradient “in die Richtung des stärksten Anstiegs zeigt”. Da  $\psi$  nun (in  $U$ ) außerhalb von  $A$  positiv, aber innerhalb von  $A$  nicht-positiv ist, folgt, dass  $\text{grad } \psi(a)$  “aus  $A$  herauszeigt”.



Die Beobachtungen aus Bemerkung 3.27 werden wir im Folgenden etwas mehr formalisieren.

**Satz 3.28** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gibt es zu jedem  $a \in \partial A$  genau einen Vektor  $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$  mit den folgenden Eigenschaften.

- 1)  $\nu(a)$  ist ein Normalenvektor von  $\partial A$ , d.h.  $\nu(a) \in N_a(\partial A)$ .
- 2)  $\|\nu(a)\| = 1$ .
- 3) Es gibt  $\varepsilon > 0$ , so dass  $a + t\nu(a) \notin A$  für alle  $t$  mit  $0 < t < \varepsilon$  gilt.

Ferner ist die Abbildung  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a \mapsto \nu(a)$  stetig.

**Definition 3.29** Mit denselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Satz 3.28 heißt  $\nu(a)$  äußerer Normaleneinheitsvektor von  $A$  in  $a$ . Die Abbildung  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt äußeres Normaleneinheitsfeld auf  $A$ .

**Beweis** (von Satz 3.28). Die Existenz folgt sofort aus Bemerkung 3.27, denn ist  $a \in \partial A$  und sind  $U$  und  $\psi$  wie in Definition 3.25, so erfüllt

$$\nu(a) := \frac{\text{grad } \psi(a)}{\|\text{grad } \psi(a)\|} \quad (3.9)$$

die Bedingungen 1)–3) des Satzes. (In der Tat ist  $\nu(a)$  wohldefiniert, da nach Voraussetzung  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U \cap A$  gilt.) Für die Eindeutigkeit bemerken wir zunächst, dass der Normalenraum  $N_a(\partial A)$  eindimensional ist, da  $\partial A$  eine Hyperfläche, also eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Da  $\text{grad } \psi(a)$  eine Basis dieses Raumes bildet, gibt es zu jedem  $v \in N_a(\partial A)$  ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass

$$v = \alpha \text{grad } \psi(a)$$

gilt. Aus der Bedingung 2) folgt dann sofort

$$|\alpha| = \frac{1}{\text{grad } \psi(a)}.$$

Ist  $\alpha < 0$ , so gilt nach Bemerkung 3.27 für hinreichend kleine  $t > 0$ , dass

$$a + t \frac{v}{|\alpha|} = a - t \text{grad } \psi(a) \in A,$$

womit Bedingung 3) verletzt wäre. Somit folgt  $\alpha > 0$  und damit ist  $\alpha$  (und daher auch  $v$ ) durch 1)–3) schon eindeutig bestimmt.

Aus (3.9) folgt sofort die Stetigkeit der Abbildung  $\nu$  in  $a$ . Da  $a$  beliebig ist, ist  $\nu$  dann auch auf ganz  $\partial A$  stetig.  $\square$

**Beispiel 3.30** Wir betrachten die Kugel  $K := K(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  um den Nullpunkt mit Radius  $r > 0$ . Dann ist  $K$  ein Kompaktum mit glattem Rand, denn betrachten wir die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|^2 - r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - r^2,$$

so ist diese stetig differenzierbar, und es gilt

$$K = K(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) \leq 0\} \quad \text{und} \quad \partial K = S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\},$$

sowie  $\text{grad } \psi(x) = 2x \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Insbesondere gibt es also zu jedem Randpunkt  $a \in \partial K$  eine Umgebung, auf der der Gradient von  $\psi$  nicht verschwindet. Das äußere Normaleneinheitsfeld von  $K$  ist dann durch

$$\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad a \mapsto \nu(a) = \frac{2a}{\|2a\|} = \frac{a}{r}$$

gegeben, da für einen Randpunkt  $a \in \partial K$  natürlich  $\|a\| = r$  gilt.

Da es für Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  verschiedene Darstellungsmöglichkeiten gibt, ist es nicht verwunderlich, dass dies auch für Kompakta mit glattem Rand der Fall ist. Für spätere Zwecke betrachten wir daher an dieser Stelle eine solche alternative Darstellung.

**Satz 3.31** *Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1)  *$A$  ist ein Kompaktum mit glattem Rand.*
- 2) *Zu jedem  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \partial A$  gibt es (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten) eine offene Umgebung  $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  von  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  und ein Intervall  $] \alpha, \beta[$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U' \rightarrow ] \alpha, \beta[$ , so dass gilt:*

$$A \cap (U' \times ] \alpha, \beta[) = \{(x', x_n) \in U' \times ] \alpha, \beta[ \mid x_n \leq g(x')\} \quad (3.10)$$

oder

$$A \cap (U' \times ] \alpha, \beta[) = \{(x', x_n) \in U' \times ] \alpha, \beta[ \mid x_n \geq g(x')\} \quad (3.11)$$

In diesem Fall gilt zusätzlich

$$\partial A \cap (U' \times ] \alpha, \beta[) = \{(x', x_n) \in U' \times ] \alpha, \beta[ \mid x_n = g(x')\}.$$

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)”: Sei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \partial A$  beliebig. Dann gibt es nach Definition 3.25 eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $a$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$$

und  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ . Insbesondere ist mindestens eine Komponente von  $\text{grad } \psi(a)$  von Null verschieden. O.B.d.A. sei dies  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(a)$  (ansonsten nummerieren wir die Koordinaten um) und o.B.d.A. sei  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(a) > 0$ . (Der Fall  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(a) < 0$  verläuft i.w. analog.) Weiter können wir annehmen, dass

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) > 0 \quad (3.12)$$

für alle  $x \in U$  gilt, denn andernfalls verkleinern wir  $U$  entsprechend. (Dieses Argument benutzt die Stetigkeit von  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}$ .) Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen aus Analysis II (dort Satz 3.10) erfüllt und es existiert eine offene Umgebung  $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  von  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  und ein offenes Intervall  $] \alpha, \beta[$  mit  $a_n \in ] \alpha, \beta[$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U' \rightarrow ] \alpha, \beta[$ , so dass  $\tilde{U} := U' \times ] \alpha, \beta[ \subseteq U$  und

$$\partial A \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid \psi(x) = 0\} = \{(x', x_n) \in \tilde{U} \mid x_n = g(x')\}$$

gilt. Wegen (3.12) ist  $\psi$  in  $] \alpha, \beta[$  in  $x_n$ -Richtung streng monoton wachsend, d.h. für festes  $x' \in U'$  gilt  $x_n \leq g(x')$  genau dann, wenn  $\psi(x', x_n) \leq \psi(x', g(x')) = 0$  gilt. Daher folgt

$$A \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid \psi(x) \leq 0\} = \{(x', x_n) \in \tilde{U} \mid x_n \leq g(x')\}.$$

(Im Fall  $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) < 0$  erhalten wir an dieser Stelle analog  $x_n \geq g(x')$  statt  $x_n \leq g(x')$ .)

“2)  $\Rightarrow$  1)”: Zu  $a \in \partial A$  seien  $U'$ ,  $]\alpha, \beta[$  und  $g$  wie in 2), wobei o.B.d.A. (3.10) erfüllt sei. Setze  $U := U' \times ]\alpha, \beta[$  und  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x', x_n) \mapsto x_n - g(x')$ . Dann erhalten wir

$$A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$$

und weiter gilt für alle  $x \in U$ , dass

$$\text{grad } \psi(x) = \begin{bmatrix} -\text{grad } g(x) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da  $a$  beliebig war, ist  $A$  also ein Kompaktum mit glattem Rand. Im Fall, dass (3.11) gilt, definieren wir analog  $\psi : (x', x_n) \mapsto g(x') - x_n$  und erhalten

$$\text{grad } \psi(x) = \begin{bmatrix} \text{grad } g(x) \\ -1 \end{bmatrix}.$$

für alle  $x \in U$ . Der Zusatz folgt in beiden Fällen sofort aus Satz 3.26.  $\square$

**Bemerkung 3.32** Anschaulich gesprochen bedeutet die Aussage von Satz 3.31, dass der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand lokal als Graph einer Funktion dargestellt werden kann, so dass das Kompaktum genau der Menge der Punkte, die “unterhalb” bzw. “oberhalb” des Graphs liegen, entspricht.

Mit den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 3.31 folgt weiter aus dem Beweis des Satzes, dass in der Darstellung 2) das äußere Normaleneinheitsfeld von  $A$  auf  $\partial A \cap U$  durch

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|^2}} \begin{bmatrix} -\text{grad } g \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist, falls (3.10) erfüllt ist, bzw. durch

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|^2}} \begin{bmatrix} \text{grad } g \\ -1 \end{bmatrix}$$

im Fall von (3.11). Mit Bemerkung 3.24 folgt weiter, dass das Oberflächenelement auf  $U$  dann die folgende Form hat:

$$dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } g(t)\|^2} d\lambda^{n-1}(t)$$



## 3.6 Der Integralsatz von Gauß

Wir kommen nun zum Höhepunkt dieses Kapitels, dem Satz von Gauß. Bevor wir diesen formulieren und beweisen werden, stellen wir zunächst einige Hilfsmittel bereit, die auch von unabhängigem Interesse sind.

**Satz 3.33 (Parameterabhängige Integrale)** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  messbar sowie  $f : U \times B \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar in der zweiten und stetig differenzierbar in der ersten Komponente, d.h.  $y \mapsto f(x, y)$  sei für alle  $x \in U$  integrierbar über  $B$  und  $x \mapsto f(x, y)$  sei für alle  $y \in B$  stetig differenzierbar. Ferner sei  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so dass*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \right| \leq g(y)$$

für alle  $(x, y) \in U \times B$  gilt. Dann ist die Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \int_B f(x, y) d\lambda^m(y)$  stetig differenzierbar und für alle  $i = 1, \dots, n$  und alle  $x \in U$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_B f(x, y) d\lambda^m(y) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) d\lambda^m(y)$$

**Beweis:** Sei  $x \in U$  und sei  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Weiter sei o.B.d.A.  $i = 1$  (der Beweis für die anderen Komponenten verläuft analog). Betrachte die durch

$$f_k(y) := \frac{f(x + h_k e_1, y) - f(x, y)}{h_k}$$

gegebene Funktion  $f_k : B \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $e_1$  den ersten Standardbasisvektor im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Dann ist  $f_k$  integrierbar über  $B$  (da die Funktionen  $y \mapsto f(\tilde{x}, y)$  für jedes  $\tilde{x} \in U$  integrierbar sind) und offenbar gilt für alle  $y \in U$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y).$$

Weiter gilt unter Ausnutzung des Mittelwertsatzes (Satz 6.29 aus Analysis I):

$$f_k(y) = \frac{f(x_1 + h_k, x_2, \dots, x_n, y) - f(x, y)}{h_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n, y)$$

für ein  $\xi \in \mathbb{R}$  zwischen  $x_1$  und  $x_1 + h_k$ , woraus wir mit der Voraussetzung des Satzes  $|f_k(y)| \leq g(y)$  für alle  $y \in B$  erhalten. Damit ist  $g$  eine integrierbare Majorante und mit dem Satz von Lebesgue folgt die Integrierbarkeit der Funktionen  $f_k$  und der Grenzfunktion  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y)$ . Außerdem erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_k} \left( \int_B f(x + h_k e_1, y) d\lambda^m(y) - \int_B f(x, y) d\lambda^m(y) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(y) d\lambda^m(y) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Lebesgue angewendet haben. Da die Folge  $(h_k)$  beliebig war, folgt die partielle Differenzierbarkeit von  $F$  nach  $x_1$  sowie die Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y)$$

für alle  $x \in U$ . Nun ist die Funktion  $\frac{\partial F}{\partial x_1} : x \mapsto \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y)$  stetig, denn ist  $(\tilde{x}_k)$  eine Folge in  $U$  mit Grenzwert  $x$ , so folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_k, y) d\lambda^m(y) = \int_B \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_k, y) d\lambda^m(y) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) d\lambda^m(y),$$

da  $f$  nach Voraussetzung stetig differenzierbar, die partiellen Ableitungen von  $f$  also stetig sind. Dann folgt mit Satz 2.18 aus Analysis II, dass auch  $F$  stetig differenzierbar ist.  $\square$

**Bemerkung 3.34** Haben wir mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 3.33 die Situation gegeben, dass  $|\frac{\partial f}{\partial x_i}| \leq M$  für alle  $(x, y) \in U \times B$  und ein  $M > 0$  gilt und  $B$  beschränkt ist, so kann für  $g$  einfach die konstante Funktion  $y \mapsto M$  gewählt werden, die wegen der Beschränktheit von  $B$  auch integrierbar ist. Die Existenz der Konstante  $M$  wiederum ist gewährleistet, wenn  $B$  offen und  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  stetig mit kompaktem Träger in  $U \times B$  ist, oder wenn (wie  $B$  auch)  $U$  beschränkt und  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  stetig auf  $\bar{U} \times \bar{B}$  ist. (Klar?)

**Satz 3.35 (Lemma von Lebesgue)** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es eine reelle Zahl  $\lambda > 0$ , so dass zu jeder Menge  $A \subseteq X$  mit  $\text{diam}(A) \leq \lambda$  und  $A \cap K \neq \emptyset$  ein  $i \in I$  existiert, so dass  $A \subseteq U_i$ . (Wir nennen  $\lambda$  eine Lebesgue'sche Zahl der Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$ .)

**Beweis:** Da  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$  ist, gibt es zu jedem  $x \in K$  ein  $i \in I$  und ein  $r_x > 0$ , so dass

$$U_{r_x}(x) \subseteq U_{2r_x}(x) \subseteq U_i$$

gilt. Offenbar ist  $(U_{r_x}(x))_{x \in K}$  eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $K$  und daher gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_m \in K$  mit

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_{r_{x_k}}(x_k).$$

Setze  $\lambda := \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_m}\}$ . Sei nun  $A \subseteq X$ , so dass  $A \cap K \neq \emptyset$  und  $\text{diam}(A) \leq \lambda$  gilt. Weiter sei  $a \in A \cap K$ . Dann gibt es ein  $k \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$a \in U_{r_{x_k}}(x_k) \subseteq U_{2r_{x_k}}(x_k) \subseteq U_i.$$

Wir zeigen  $A \subseteq U_{2r_{x_k}}(x_k)$  woraus wir dann auch  $A \subseteq U_i$  erhalten. Sei dazu  $x \in A$  beliebig. Dann gilt wegen  $\text{diam}(A) \leq \lambda \leq r_{x_k}$ , dass  $d(x, a) \leq r_{x_k}$ , woraus folgt, dass

$$d(x, x_k) \leq d(x, a) + d(a, x_k) < r_{x_k} + r_{x_k} = 2r_{x_k}$$

gilt, womit wir  $x \in U_{2r_{x_k}}(x_k)$  erhalten. Da  $x$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.36 (Integralsatz von Gauß)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $A \subseteq U$  ein Kompaktum mit glattem Rand und äußerem Normaleneinheitsfeld  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_A \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x). \quad (3.13)$$

**Beweis:** *Schritt 1: Lokalisierung.* In Hinblick auf Satz 3.31 gibt es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $A$ , so dass für jedes  $i \in I$  entweder  $U_i \subseteq A^\circ = A \setminus \partial A$  oder (ggf. nach Ummummerierung der Koordinaten)  $U_i = U' \times ]a, b[$  und

$$A \cap (U' \times ]a, b[) = \{(x', x_n) \in U' \times ]a, b[ \mid x_n \leq g(x') \text{ (bzw. } x_n \geq g(x'))\} \quad (3.14)$$

$$\partial A \cap (U' \times ]a, b[) = \{(x', x_n) \in U' \times ]a, b[ \mid x_n = g(x')\} \quad (3.15)$$

gilt, wobei  $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $g : U' \rightarrow ]a, b[$  stetig differenzierbar ist. (Wir unterdrücken in der Notation die Abhängigkeit von  $U'$ ,  $a$ ,  $b$  und  $g$  von  $i \in I$ .) Sei  $\lambda > 0$  eine Lebesgue'sche Zahl der Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  und setze  $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$ . Ist  $(\alpha_{p\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$  die glatte Zerlegung der Eins aus (3.7), so gilt

$$\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\alpha_{p\varepsilon})) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (2\varepsilon)^2} = 2\varepsilon\sqrt{n} = \lambda,$$

da der Träger von  $\alpha_{p\varepsilon}$  in einem Würfel der Kantenlänge  $2\varepsilon$  enthalten ist. Da  $A$  als kompakte Menge beschränkt ist, enthält die Menge

$$P := \{p \in \mathbb{Z}^n \mid \operatorname{supp}(\alpha_{p\varepsilon}) \cap A \neq \emptyset\}$$

nur endlich viele Elemente. Weiter folgt mit dem Lemma von Lebesgue (Satz 3.35), dass es zu jedem  $p \in P$  ein  $i \in I$  gibt, so dass  $\operatorname{supp}(\alpha_{p\varepsilon}) \subseteq U_i$  gilt. Da  $(\alpha_{p\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$  eine Zerlegung der Eins ist, gilt außerdem  $f\chi_A = \sum_{p \in P} \alpha_{p\varepsilon} f\chi_A$  und daher auch

$$\int_A \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \sum_{p \in P} \int_A \operatorname{div}(\alpha_{p\varepsilon} f) \, d\lambda^n \quad \text{und} \quad \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle \, dS = \sum_{p \in P} \int_{\partial A} \langle \alpha_{p\varepsilon} f, \nu \rangle \, dS.$$

Es reicht daher, den Satz für jedes einzelne  $\alpha_{p\varepsilon} f$  mit  $p \in P$  zu beweisen.

*Schritt 2: Beweis des lokalen Spezialfalls.* Sei nach Schritt 1 o.B.d.A.  $\operatorname{supp}(f) \subseteq U_i$ , wobei  $U_i \subseteq U$  offen ist, so dass (3.14)–(3.15) erfüllt sind (wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass  $x_n \leq g(x')$  in  $A \cap U_i$  gilt). Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:

*Fall 1:*  $U_i \subseteq A^\circ$ . In diesem Fall gilt

$$\int_A \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \int_{U_i} \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \sum_{j=1}^n \int_{U_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, d\lambda^n = 0 = \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle \, dS,$$

denn das Integral auf der linken Seite verschwindet nach Satz 3.16, da der Träger von  $f$  in  $U_i$  enthalten ist. Aus dem gleichen Grund verschwindet auch das Integral auf der rechten Seite, da  $f = 0$  auf dem Rand von  $A$  gilt.

Fall 2:  $U_i \cap \partial A \neq \emptyset$ . Wir zeigen

$$\int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n = \int_{\partial A} f_j \nu_j dS. \quad (3.16)$$

für  $j = 1, \dots, n$ . Dann erhalten wir durch

$$\int_A \operatorname{div} f d\lambda^n = \sum_{j=1}^n \int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n = \sum_{j=1}^n \int_{\partial A} f_j \nu_j dS = \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle dS$$

die Aussage des Satzes. Betrachten wir zunächst das Integral auf der linken Seite von (3.16). Mit Hilfe des Satzes von Fubini folgt unter Ausnutzung der Darstellung (3.14)–(3.15), dass

$$\int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) d\lambda^n(x) = \int_{U'} \left( \int_a^{g(x')} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n \right) d\lambda^{n-1}(x'). \quad (3.17)$$

Für die weitere Auswertung des Integrals benutzen wir, dass innerhalb  $U_i$  das Normaleneinheitsfeld  $\nu$  von  $A$  nach Bemerkung 3.32 die Form

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{bmatrix}$$

hat. Da sich die letzte Komponente von  $\nu$  deutlich von den anderen unterscheidet, nehmen wir eine weitere Fallunterscheidung vor.

Fall 2a):  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Wir definieren die Funktion

$$F : U_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x', z) \mapsto \int_a^z f_j(x', x_n) dx_n.$$

Dann folgt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bzw. Satz 3.33 und Bemerkung 3.34 (da  $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$  stetig ist und einen kompakten Träger in  $U_i$  hat) für alle  $(x', z) \in U_i$ , dass

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x', z) = f_j(x', z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x', z) = \int_a^z \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n.$$

Unter Ausnutzung der Kettenregel erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{g(x')} f_j(x', x_n) dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_j} (F(x', g(x'))) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial}{\partial z} F(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_j}(x', g(x')) + \frac{\partial F}{\partial z}(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') \\ &= \int_a^{g(x')} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n + f_j(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') \end{aligned}$$

Einsetzen in (3.17) liefert

$$\int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n = \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{g(x')} f_j(x', x_n) dx_n d\lambda^{n-1}(x') - \int_{U'} f_j(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') d\lambda^{n-1}(x'). \quad (3.18)$$

Da die Abbildung  $x' \mapsto \int_a^{g(x')} f_j(x', x_n) dx_n$  kompakten Träger in  $U'$  hat, folgt mit Satz 3.16, dass das erste Integral in (3.18) verschwindet. Wegen  $\nu_j(x', g(x')) = -\frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x')$  folgt damit:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\lambda^n &= - \int_{U'} f_j(x', g(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') d\lambda^{n-1}(x') \\ &= - \int_{U'} f_j(x', g(x')) \cdot (-\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}) \nu_j(x', g(x')) d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{\partial A} f_j \nu_j dS, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gerade durch die Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten (Definition 3.6) folgt.

*Fall 2b):  $j = n$ .* In diesem Fall gilt  $\nu_n(x', g(x')) = \frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}}$ . Da die Funktion  $x_n \mapsto f_n(x', x_n)$  für jedes  $x' \in U'$  einen kompakten Träger in  $]a, b[$  hat, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

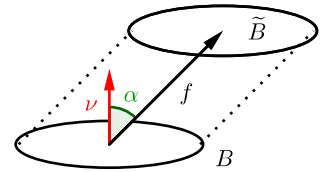
$$\int_a^{g(x')} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n = f_n(x', g(x')) - f_n(x', a) = f_n(x', g(x')).$$

Einsetzen in (3.17) liefert schließlich

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f_n}{\partial x_n} d\lambda^n &= \int_{U'} f_n(x', g(x')) d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{U'} f_n(x', g(x')) \cdot \nu_n(x', g(x')) \cdot (\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x')\|^2}) d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{\partial A} f_n \nu_n dS, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wieder mit Definition 3.6 folgt.  $\square$

**Bemerkung 3.37** Der so abstrakt anmutende Integralsatz von Gauß hat eine wunderschöne physikalische Interpretation, die wir an dieser Stelle einmal entwickeln wollen. Dazu fassen wir  $f$  als ein Strömungsfeld auf, d.h. als ein Vektorfeld, das die Geschwindigkeit einer Strömung beschreibt. Zunächst überlegen wir uns, wie viel “Flüssigkeit” pro Zeiteinheit durch eine ebene Fläche  $B$  strömt, wenn das Strömungsfeld  $f$  konstant ist. Unter diesen Voraussetzungen nehmen die Teilchen, die sich am Anfang genau in der Fläche  $B$  befanden, am Ende einer Zeiteinheit ihren Platz in einer “verschobenen” Fläche  $\tilde{B}$  ein. Die Flüssigkeitsmenge, die in dieser Zeit durch  $B$  geflossen ist, entspricht dann gerade dem Volumen des “schieben Zylinders” mit Boden  $B$  und Deckel  $\tilde{B}$ . Wählen wir nun die Zeiteinheit so, dass die



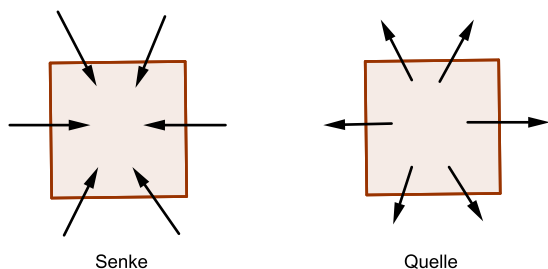
Länge des Weges, die ein einzelnes Teilchen in dieser Zeit zurückgelegt hat, genau der Länge (d.h. Norm) von  $f$  entspricht, so ist das Volumen des Schiefzylinders nach der Formel “Grundfläche mal Höhe” gerade durch  $V = B \cdot \|f\| \cdot \cos \alpha$  gegeben, wenn wir mit  $B$  auch den Flächeninhalt der Fläche  $B$  und mit  $\alpha$  den Winkel zwischen  $f$  und einem Normaleneinheitsvektor  $\nu$  der ebenen Fläche  $B$  bezeichnen. Da  $\nu$  die Norm Eins hat, erhalten wir mit der bekannten Formel für das Standardskalarprodukt aus der Linearen Algebra, dass

$$V = B \cdot \|f\| \cdot \cos \alpha = B \cdot \|f\| \cdot \|\nu\| \cdot \cos \alpha = B \cdot \langle f, \nu \rangle.$$

Ist dagegen  $B$  eine beliebige “glatte Fläche” (d.h. in diesem Fall eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ ) und  $f$  ein nicht-konstantes, aber stetiges Vektorfeld, so können wir  $B$  in viele kleine Teilflächenstücke  $\Delta B_i$  zerlegen, die alle nahezu eben sind. Sind diese hinreichend klein, so können wir wegen der Stetigkeit von  $f$  davon ausgehen, dass  $f$  auf jedem dieser Flächenstücke  $\Delta B_i$  nahezu konstant ist. Wir können daher den Fluss durch  $B$  durch eine Summe der Flüsse durch alle Flächenstücke  $\Delta B_i$  approximieren, welche dann bei immer feiner werdender Unterteilung in ein Integral übergeht:

$$\sum_i \langle f_i, \nu_i \rangle \Delta B_i \rightsquigarrow \int_B \langle f, \nu \rangle dS$$

Dieses Integral wird in den Anwendungen auch als *Flussintegral* bezeichnet und entspricht genau dem Integral auf der rechten Seite des Satzes von Gauß, wenn  $B = \partial A$  die Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers<sup>2</sup> ist. Da  $\nu$  das äußere Normaleneinheitsfeld von  $\partial A$  bezeichnet, entspricht der Wert dieses Integrals dem Fluss durch die Oberfläche von  $A$  nach außen. Wenden wir uns nun dem Integral auf der linken Seite im



Satz von Gauß zu. Betrachten wir einen Punkt  $x$  in unserer Strömung, so sagen wir, dass sich in  $x$  eine *Senke* befindet, wenn durch die Oberfläche jedes hinreichend kleinen Würfels um  $x$  mehr hineinfließt als heraus. Umgekehrt, also wenn durch jeden hinreichend kleinen Würfel um  $x$  mehr herausfließt als hinein, sprechen wir von einer *Quelle*. Dies versuchen wir einmal quantitativ zu erfassen, in dem wir die sogenannte *Quelldichte*, d.h. die “Quelle pro infinitesimaler Volumeneinheit” berechnen. Etwas ge-

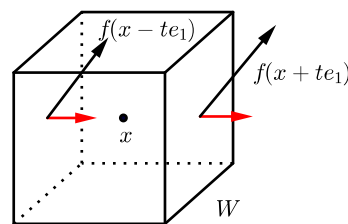
nauer ist dies der Grenzwert

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{“Strömungsbilanz durch } \Delta V\text{”}}{\Delta V}.$$

Um diesen Grenzwert zu bestimmen, betrachten wir einen kleinen Würfel  $W := W(x, t)$ , also den achsenparallelen Würfel mit Mittelpunkt  $x$  und Kantenlänge  $2t > 0$ . Um die weitere Herleitung im Folgenden zu vereinfachen nehmen wir an, dass die Strömungsrichtung von  $f$  auf ganz  $W$  und der Betrag von  $f$  auf den jeweiligen Seitenflächen von  $W$  nahezu konstant ist. Betrachten wir dann zunächst einmal die Bilanz der Strömungskomponente in  $x_1$ -Richtung, so erhalten wir nur einen Anteil durch die beiden Seitenflächen, die parallel zur  $x_2, x_3$ -Ebene liegen. Hier können wir dann unsere Überlegungen für den Fluss durch eine ebene Fläche  $B$  verwenden. Da der erste Standardbasisvektor  $e_1$  ein Normaleneinheitsvektor für die relevanten Würfelseiten ist, erhalten wir näherungsweise für die Strömungsbilanz in  $x_1$ -Richtung:

$$(2t)^2 \langle f(x + te_1), e_1 \rangle - (2t)^2 \langle f(x - te_1), e_1 \rangle = (2t)^2 (f_1(x + te_1) - f_1(x - te_1)),$$

wobei  $(2t)^2$  der Flächeninhalt einer Seitenfläche des Würfels ist und  $f_i$  die  $i$ -te Komponentenfunktion von  $f$  bezeichnet. Analog verfahren wir für die Strömungsbilanzen in die anderen beiden Richtungen und



<sup>2</sup>im geometrischen, nicht algebraischen Sinn

erhalten durch Summierung eine Approximation für die Gesamt-Strömungsbilanz:

$$(2t)^2 \sum_{i=1}^3 (f_i(x + te_i) - f_i(x - te_i))$$

Da das Volumen unseres Würfels  $W$  durch  $(2t)^3$  gegeben ist, erhalten wir schließlich die *Quelldichte* in  $x$  als

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t)^2 \sum_{i=1}^3 (f_i(x + te_i) - f_i(x - te_i))}{(2t)^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{f_i(x + te_i) - f_i(x)}{t} + \frac{f_i(x) - f_i(x - te_i)}{t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \right) = \operatorname{div} f(x). \end{aligned}$$

Die Quelldichte eines Strömungsfelds  $f$  ist demnach durch seine Divergenz gegeben, woher sich letztendlich auch der Name dieses Differentialoperators erklärt: *convergere* ist Lateinisch für “zusammenlaufen” und *divergere* analog für “auseinanderlaufen”. (Vergleichen Sie dies auch mit den Begriffen *Konvergenz* und *Divergenz* von Folgen.) Die *Gesamtquelle* von  $A$ , also die Menge von Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit in einem Körper  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  entsteht, erhalten wir bei konstanter Divergenz einfach durch Multiplikation mit dem Volumen von  $A$ , d.h.  $Q = \operatorname{vol}_3(A) \cdot \operatorname{div} f$ . Ist die Divergenz dagegen ortsabhängig, aber stetig, so zerlegen wir  $A$  in viele kleine Teilkörper  $\Delta A_i$  auf denen wir, wenn diese hinreichend klein sind, die Divergenz von  $f$  als nahezu konstant gleich  $\operatorname{div} f(x_i)$  für ein  $x_i \in \Delta A_i$  annehmen können. Damit erhalten wir eine Näherung für die Gesamtquelle durch eine Summe, die wieder einmal bei immer feiner werdender Unterteilung in ein Integral übergeht:

$$\sum_i \operatorname{div} f(x_i) \Delta A_i \rightsquigarrow \int_A \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x)$$

Somit erhalten wir die folgende Interpretation der Formel

$$\int_A \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$$

aus dem Satz von Gauß: Die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit in dem Körper  $A$  entsteht, fließt bei zeitunabhängiger Strömung auch pro Zeiteinheit durch seine Oberfläche  $\partial A$  wieder hinaus.

**Beispiel 3.38** 1) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Kompaktum mit glattem Rand und  $f = Id_{\mathbb{R}^n}$ . Dann gilt

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i}(x) = n$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Daher erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Gauß die folgende interessante Formel für das Volumen von  $A$ :

$$\operatorname{vol}_n(A) = \int_A 1 \, d\lambda^n = \frac{1}{n} \int_A \operatorname{div} f \, d\lambda^n = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle \, dS = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle \, dS(x)$$

Für den Spezialfall der Einheitskugel  $K_n := K(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  mit  $\partial K_n = S^{n-1}$  erhalten wir wegen  $\nu(x) = x$  und  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1$  für alle  $x \in S^{n-1}$ , dass

$$\operatorname{vol}_n(K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \langle x, x \rangle \, dS(x) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} 1 \, dS(x) = \frac{1}{n} \operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1}).$$

Da wir in Beispiel 1.93 schon eine Formel für das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel bestimmt haben, erhalten wir daraus nun auch leicht deren Oberfläche, ohne dass wir die Einheitssphäre mühsam parametrisieren müssen. Speziell für  $n = 3$  gilt (wie wir auch an anderer Stelle bereits erfahren haben):

$$\text{vol}_2(S^2) = 3 \cdot \text{vol}_3(K_3) = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

- 2) Wir leiten das aus der Physik bekannte *Archimedische Prinzip* her: Befindet sich ein Körper  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  unter Wasser, so wirkt durch den Wasserdruck (senkrecht) auf seine Oberfläche eine Kraft, die proportional zur Wassertiefe ist, also für  $x \in \partial A$  durch  $cx_3 \cdot \nu(x)$  gegeben ist, wobei  $c > 0$  eine Konstante ist. Hierbei setzen wir  $x_3 = 0$  für die Wasseroberfläche. Für Punkte  $x \in \partial A$  gilt  $x_3 < 0$ , so dass die Kraft in Richtung des Körpers wirkt, da sein Normaleinheitsfeld  $\nu$  nach außen zeigt. Der Körper erfährt dann eine Auftriebskraft  $F \in \mathbb{R}^3$ , die durch das Integral

$$F = \int_{\partial A} cx_3 \nu(x) \, dS(x)$$

gegeben ist. Da der Satz von Gauß nur für reellwertige Integrale anwendbar ist, betrachten wir die Komponenten von  $F = (F_1, F_2, F_3)$  einzeln. Für  $j \in \{1, 2, 3\}$  gilt:

$$\begin{aligned} F_j &= \int_{\partial A} cx_3 \nu_j(x) \, dS(x) = c \int_{\partial A} \langle x_3 e_j, \nu(x) \rangle \, dS(x) = c \int_A \text{div}(x_3 e_j) \, d\lambda^3(x) \\ &= c \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \, d\lambda^3(x) \end{aligned}$$

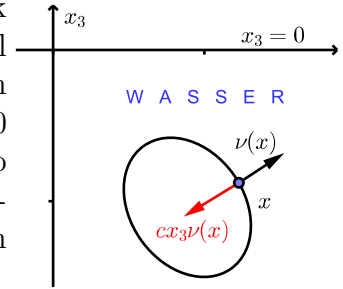
Daraus erhalten wir  $F_1 = F_2 = 0$  und  $F_3 = c \int_A 1 \, d\lambda^3(x) = c \text{vol}_3(A)$ . Der Körper  $A$  erfährt also eine nach oben (in Richtung der Wasseroberfläche) gerichtete Auftriebskraft, die proportional zum Volumen der verdrängten Flüssigkeit ist. Heureka!

**Bemerkung 3.39** Am Anfang dieses Kapitels hatten wir eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes für Differential- und Integralrechnung als Motivation genannt und auch einige Ähnlichkeiten zwischen diesem und dem Satz von Gauß aufgezeigt. Falls Ihnen das zu weit hergeholt erschien, so lassen Sie sich jetzt davon überzeugen, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als Spezialfall des Satzes von Gauß im Fall  $n = 1$  angesehen werden kann: In der Tat hat ein kompaktes Intervall  $A = [a, b]$  einen glatten Rand  $\partial A = \{a, b\}$ , denn für den Punkt  $b$  können wir z.B. das offene Intervall  $]a, b + 1[$  und die Abbildung  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x - b$  wählen. Dann gilt  $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$ , woraus folgt, dass

$$\nu(b) = \frac{\text{grad } \psi(b)}{\|\text{grad } \psi(b)\|} = 1$$

der Normalen-Einheitsvektor von  $\partial A$  in  $b$  ist. Analog erhalten wir  $\nu(a) = -1$ . Ist nun  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar (genauer benötigen wir hier, dass  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar auf einer offenen Menge  $U \supseteq [a, b]$  ist), so gilt  $\text{div } f = f'$  und daher lautet die Formel aus dem Satz von Gauß hier:

$$\int_a^b f'(x) \, dx = \int_{[a, b]} \text{div } f(x) \, d\lambda^1(x) = \int_{\partial[a, b]} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$$





Um das Integral auf der rechten Seite auswerten zu können, benötigen wir eine Parametrisierung des Randes  $\partial[a, b] = \{a, b\}$ , der eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^1$  ist. Für den Punkt  $b$  wählen wir die Parameterdarstellung  $\varphi_b : \mathbb{R}^0 \rightarrow \{b\}$ ,  $t \mapsto b$  mit der Ableitung  $D\varphi_b(0) : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $0 \mapsto 0$ . Dies ist zweifelsfrei eine lineare Abbildung, deren darstellende Matrix  $D\varphi_b(0)$  eine  $0 \times 1$ -Matrix ist. Analog wählen wir für den Punkt  $a$  die Parameterdarstellung  $\psi_a : 0 \mapsto a$ . Da die Mengen  $\psi_b(\mathbb{R}^0) = \{b\}$  und  $\psi_a(\mathbb{R}^0) = \{a\}$  disjunkt sind können wir hier zur Berechnung des Integrals über den Rand den Atlas  $(\psi_a, \psi_b)$  mit der trivialen Zerlegung der Eins betrachten und erhalten:

$$\int_{\partial[a,b]} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_{\{0\}} \langle f(b), \nu(b) \rangle \sqrt{D\psi_b(0)^\top D\psi_b(0)} d\lambda^0 + \int_{\{0\}} \langle f(a), \nu(a) \rangle \sqrt{D\psi_a(0)^\top D\psi_a(0)} d\lambda^0$$

Nun ist  $D\psi_b(0)^\top D\psi_b(0)$  die (eindeutig bestimmte)  $(0 \times 0)$ -Matrix, die als darstellende Matrix der Identität  $Id : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^0$  die Determinante 1 hat. Das Lebesgue-Maß  $\lambda^0$  auf dem  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  stimmt genau mit dem elementargeometrischen Inhalt  $\lambda^0$  aus Beispiel 1.15 überein, der in diesem Fall als leeres Produkt stets den Wert 1 annimmt. Es gilt also  $\lambda^0(\{0\}) = 1$ . Damit erhalten wir (ausnutzend, dass  $|f \circ \psi_b| : 0 \mapsto |f(b)|$  eine Elementarfunktion ist und entweder  $f \circ \psi_b = |f \circ \psi_b|^+$  oder  $f \circ \psi_b = |f \circ \psi_b|^-$  gilt), dass

$$\int_{\{0\}} \langle f(b), \nu(b) \rangle \sqrt{D\psi_b(0)^\top D\psi_b(0)} d\lambda^0 = \int_{\{0\}} f(b) \cdot \nu(b) \cdot 1 d\lambda^0 = f(b) \cdot \nu(b) \cdot \lambda^0(\{0\}) = f(b).$$

Analog erhalten wir für das zweite Integral den Wert  $-f(a)$ , da hier  $\nu(a) = -1$  gilt. Zusammenfassend ergibt sich also

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

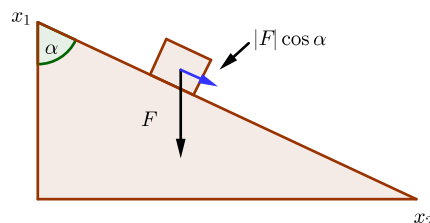
**Bemerkung 3.40** Der Integralsatz von Gauß gilt auch schon mit schwächeren Voraussetzungen, wie z.B. für Kompakta mit *abschnittsweise glattem Rand*. Ein Beispiel für eine solche Menge sind Quader, Kegel, Zylinder oder Pyramiden, also geometrische Körper mit (endlich vielen) Kanten. Wir verzichten an dieser Stelle auf weitere Ausführungen.



# Kapitel 4

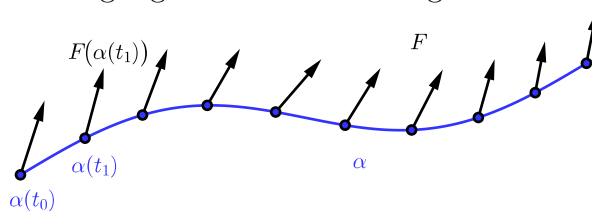
## Die großen Integralsätze II

Wie bereits im letzten Kapitel angedeutet, ist das Hauptthema in diesem Kapitel der Integralsatz von Stokes und auch in diesem Kapitel benötigen wir etliche Vorbereitungen, bevor wir in der Lage sind, ihn in der heute in der Mathematik üblichen Form zu präsentieren. Wir beginnen damit, eine weitere Art von *Kurvenintegralen* zu betrachten. In Abschnitt 3.3 hatten wir bereits das Integral von Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  über einer Untermannigfaltigkeit  $M$  kennengelernt und insbesondere den Spezialfall diskutiert, dass  $M$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Das resultierende Integral bezeichnet man dann in den physikalischen Anwendungen dann als *skalares Kurvenintegral* (auch *Kurvenintegral 1. Art*), da über eine reellwertige Funktion  $f$  integriert wird. Daneben gibt es noch das *vektorielle Kurvenintegral* (auch *Kurvenintegral 2. Art*), bei dem statt eines *Skalarfeldes* ein *Vektorfeld* integriert wird. Eine Anwendung ist dabei die Berechnung der verrichteten *Arbeit* bzw. des *Energiegewinns* bei der Bewegung einer Masse in einem Kraftfeld. Betrachten wir zum Beispiel eine Masse, die im Kraftfeld  $F$  der Erde eine schiefe Ebene herunterrutscht, so wird der Energiegewinn (bzw. die Arbeit)  $A$  nach der Formel “Kraft  $\times$  Weg” berechnet. Dabei ist allerdings nur die Komponente  $|F| \cos \alpha$  der Kraft in Wegrichtung von Belang und wir erhalten daher:



$$A = |F| \cos \alpha \cdot |x_2 - x_1| = \langle F, x_2 - x_1 \rangle.$$

Diese Formel gilt allerdings nur für konstante Kraftfelder (wie z.B. dem Gravitationsfeld der Erde, das wir für praktische Belange wie hier in der Tat als konstant betrachten können.) Wie erhalten wir die verrichtete Arbeit bei der Bewegung einer Masse entlang einer Kurve  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn das gegebene Kraftfeld  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ortsabhängig ist? (Denken Sie dabei z.B. an ein Segelschiff, das sich im Wind bewegt, wobei wir den Wind der Einfachheit halber nur als ortsabhängiges, aber in der Zeit konstantes Kraftfeld betrachten.) Die Idee ist dann, eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  des Intervalls zu betrachten.



Nehmen wir weiter an, dass  $F$  stetig und  $\alpha$  stetig differenzierbar ist, so können wir für hinreichend feine Zerlegungen davon ausgehen, dass

- i)  $\alpha$  auf dem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  nahezu linear ist (genauer wäre affin linear),
- ii)  $F$  auf der Verbindungsstrecke zwischen  $\alpha(t_i)$  und  $\alpha(t_{i+1})$  nahezu konstant ist.

Somit erhalten wir die Arbeit  $A$  näherungsweise durch die Formel

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^m \left\langle F(\alpha(t_i)), \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \left\langle F(\alpha(t_i)), \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \sum_{i=1}^m \left\langle F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) \right\rangle \cdot \Delta t_i, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei wir die Abkürzung  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  eingeführt und außerdem benutzt haben, dass wir den Differenzenquotienten in (4.1) wegen der Differenzierbarkeit von  $\alpha$  durch die Ableitung  $\alpha'(t_i)$  approximieren bzw. ersetzen können. Wählen wir nun die Unterteilung immer feiner, so geht die obige Summe in das Integral

$$\int_{\alpha} F \cdot ds := \int_a^b \left\langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle dt$$

über, wobei das Integral auf der linken Seite die in den Ingenieurs- und Naturwissenschaften übliche Notation nutzt, in der das Symbol  $\cdot$  für das Skalarprodukt steht, das aus dem Vektorfeld  $F$  und dem *vektoriellen Kurvenelement*  $ds = \alpha'(t) dt$  gebildet wird. (Die Notation  $ds$  erklärt sich dadurch, dass in der Physik der *Weg* mit  $s$  für lateinisch “*spatium*” gekennzeichnet wird.)

Unser erstes Ziel wird sein, einen geeigneten Integranden für das vektorielle Kurvenintegral zu finden. Versuchen wir es mit dem Integral über Untermannigfaltigkeiten, so stoßen wir auf die gleichen ästhetischen Probleme wie beim Satz von Gauß, dass der Integrand nicht unabhängig vom Integrationsbereich ist. Daher wählen wir einen anderen Zugang mit Hilfe von sogenannten *Pfaffschen Formen* und später den allgemeineren *Differentialformen*. Damit lässt sich dann auch der Satz von Gauß umformulieren und wird zu einem Spezialfall des *Satzes von Stokes*, dessen elegante Formulierung durch ihre Einfachheit und Schönheit besticht: In unserer noch zu entwickelnden Notation lautet dieser

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

## 4.1 Das vektorielle Kurvenintegral

Motiviert durch die physikalische Anwendung werden wir in diesem Abschnitt das Integral von Vektorfeldern über Kurven definieren. Damit die Existenz dieses Integrals gesichert ist, werden wir uns auf stetige Vektorfelder als Integranden beschränken. Für den Integrationsbereich können wir dann stückweise stetig differenzierbare Kurven erlauben.

**Definition 4.1** Eine Funktion  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt stückweise stetig differenzierbar, falls eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  von  $[a, b]$  existiert, so dass  $\alpha_j := \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar ist für  $j = 1, \dots, m$ .

Aus der stückweise stetigen Differenzierbarkeit folgt natürlich sofort die Stetigkeit der Funktion  $\alpha$ . Diese muss in den Zerlegungsstellen  $t_i$  allerdings nicht differenzierbar sein.

**Definition 4.2** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld.

- 1) Ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : [a, b] \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Kurve dann heißt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds := \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\alpha(t)) \alpha'_i(t) dt$$

das Integral von  $f$  entlang  $\alpha$ .

- 2) Ist  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  stückweise stetig differenzierbar und  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , so dass  $\alpha_j := \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar ist für  $j = 1, \dots, m$ , dann heißt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds := \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j} f \cdot ds$$

das Integral von  $f$  entlang  $\alpha$ .

Machen Sie sich klar, dass das Integral eines Vektorfeldes entlang einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve unabhängig von der gewählten Zerlegung und damit wohldefiniert ist.

**Beispiel 4.3** Seien  $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sowie  $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\tilde{\alpha} : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha} : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix}.$$

Dann erhalten wir die folgenden Kurvenintegrale:

$$\int_{\alpha} f \cdot ds = \int_0^{\pi} f_1(\alpha(t)) \alpha'_1(t) + f_2(\alpha(t)) \alpha'_2(t) dt = \int_0^{\pi} (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 dt = \int_0^{\pi} 1 dt = \pi,$$

$$\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot ds = \int_0^{\sqrt{\pi}} -\sin(t^2)(-2t \sin(t^2)) + \cos(t^2)2t \cos(t^2) dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t dt = \pi$$

Beachten Sie, dass  $\alpha([0, \pi]) = \tilde{\alpha}([0, \sqrt{\pi}])$  gilt, denn mit  $\psi : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto t^2$  gilt  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ . In beiden Fällen wird also dieselbe Raumkurve “durchlaufen”, nur mit “jeweils unterschiedlicher Geschwindigkeit”.

In Kapitel 3 haben wir festgestellt, dass das Integral von Funktionen über Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  nicht von der Wahl der jeweiligen Parameterdarstellung der Untermannigfaltigkeit abhängt. Beispiel 4.3 lässt vermuten, dass eine ähnliche Regel für das vektorielle Kurvenintegral gilt. Dies ist tatsächlich der Fall, jedoch ist die Sachlage ein wenig komplizierter als bei der Integration skalarer Funktionen, da wir eine Kurve in zwei unterschiedlichen Richtungen durchlaufen können: Vom “Anfang” zum “Ende” oder umgekehrt.

**Satz 4.4** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld und  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Kurve. Ferner sei  $\psi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar.

- 1) Gilt  $\psi(\tilde{a}) = a$  und  $\psi(\tilde{b}) = b$ , so folgt  $\int_{\alpha \circ \psi} f \cdot ds = \int_{\alpha} f \cdot ds$ .
- 2) Gilt  $\psi(\tilde{a}) = b$  und  $\psi(\tilde{b}) = a$ , so folgt  $\int_{\alpha \circ \psi} f \cdot ds = - \int_{\alpha} f \cdot ds$ .

**Beweis:** Mit  $\alpha$  ist auch  $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \psi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Kurve. Im Fall  $\psi(\tilde{a}) = a$  und  $\psi(\tilde{b}) = b$  erhalten wir dann, dass

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\alpha}} f \cdot ds &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle f(\tilde{\alpha}(t)), \tilde{\alpha}'(t) \rangle dt \\
 &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle f(\alpha(\psi(t))), \alpha'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \rangle dt \\
 &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle f(\alpha(\psi(t))), \alpha'(\psi(t)) \rangle \cdot \psi'(t) dt \\
 &= \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_{\alpha} f \cdot ds,
 \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile die Substitutionsregel aus Analysis I verwendet haben. Der Fall  $\psi(\tilde{a}) = b$  und  $\psi(\tilde{b}) = a$  verläuft komplett analog, wobei in der vierten Zeile im Integralzeichen abweichend  $b$  unten und  $a$  oben steht. Das Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt dann eine Änderung des Vorzeichens.  $\square$

Satz 4.4 hat eine wunderbare physikalische Interpretation. Denken wir wieder daran, dass wir mit dem Kurvenintegral die *Arbeit* berechnen, so ist das Vorzeichen der Arbeit davon abhängig, in welcher Richtung wir den Weg durchlaufen. Denken Sie dabei wieder an ein Schiff, dass sich entlang einer Kurve im Wind bewegt. Fahren wir z.B. von  $A$  nach  $B$  “mit dem Wind”, so gewinnen wir Energie und können uns mit Hilfe von Segeln antreiben lassen. Fahren wir dagegen von  $B$  nach  $A$  gegen den Wind, so müssen wir Energie aufwenden um vorwärts zu kommen - das Vorzeichen hat sich geändert! Beachten Sie außerdem, dass Satz 4.4 keine Aussage für Funktionen  $\psi$  liefert, die die Endpunkte des Intervalls  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$  nicht wieder (injektiv) auf die Endpunkte des Intervalls  $[a, b]$  abbilden.

Einen wichtigen Spezialfall stellen *Gradientenfelder* dar, d.h. Vektorfelder, die dem Gradienten eines Skalarfelds entsprechen. In diesem Fall ist das Integral unabhängig vom eigentlichen Verlauf des Weges und hängt stattdessen nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Dies ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I.

**Satz 4.5 (Wegunabhängigkeit von Gradientenfeldern)** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, sowie  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig differenzierbares Skalarfeld und  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt*

$$\int_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

**Beweis:** Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\left\langle \operatorname{grad} F(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\alpha(t)) \alpha'_i(t) = (F \circ \alpha)'(t),$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel verwendet haben. Unter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds &= \int_a^b (F \circ \alpha)'(t) dt = (F \circ \alpha)(t) \Big|_a^b \\ &= F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)). \end{aligned}$$

Ist  $\alpha$  dagegen nur stückweise stetig differenzierbar, so existiert per Definition eine Zerlegung  $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$ , so dass  $\alpha_j = \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar ist. Damit erhalten wir unter Verwendung des bereits bewiesenen Teils, dass

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds &= \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j} \operatorname{grad} F \cdot ds \\ &= \sum_{j=1}^m \left( F(\alpha(t_j)) - F(\alpha(t_{j-1})) \right) = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)). \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.6** Ein wichtiger Spezialfall bei Kurvenintegralen sind Integrale über *geschlossene Kurven*, d.h. Kurven  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  mit der Eigenschaft  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , also Kurven bei denen Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. In diesem Fall schreibt man für das Kurvenintegral auch gerne  $\oint_{\alpha} f \cdot ds$  statt  $\int_{\alpha} f \cdot ds$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 4.5 gilt dann also

$$\oint_{\alpha} \operatorname{grad} F \cdot ds = 0.$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, gilt die Wegunabhängigkeit des Integrals nicht für beliebige Vektorfelder.

**Beispiel 4.7** Betrachten wir die offene Menge  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , so ist

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Betrachten wir weiter für  $r > 0$  und  $\varphi \geq 0$  die Kurve  $\alpha : [0, \varphi] \rightarrow U$  mit

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha'(t) = \begin{bmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{bmatrix}$$

für alle  $t \in [0, \varphi]$ , so gilt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds = \int_0^{\varphi} \frac{-r \sin t}{r^2} (-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2} (r \cos t) dt = \int_0^{\varphi} 1 dt = \varphi.$$

Ist speziell  $\varphi = 2\pi$ , so ist die Kurve geschlossen (es handelt sich dabei um den Kreisrand vom Radius  $r$ ), aber es gilt  $\oint_{\alpha} f \cdot ds = 2\pi \neq 0$ .

Auf Grund der Ähnlichkeit von Satz 4.5 zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I bietet sich eine Erweiterung des Begriff der Stammfunktion auf Vektorfelder an.

**Definition 4.8** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Ein Skalarfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$ , falls  $F$  stetig differenzierbar ist und  $f = \text{grad } F$  gilt.

**Bemerkung 4.9** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld und  $F, \tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Skalarfelder.

- 1) Offenbar ist  $F$  genau dann eine Stammfunktion von  $f$ , wenn für  $i = 1, \dots, n$  gilt, dass

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

- 2) Ist  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann ist auch  $F + c$  eine Stammfunktion von  $f$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante ist.
- 3) Ist  $U$  zusammenhängend und sind  $F, \tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  Stammfunktionen von  $f$ , dann folgt mit dem Konstanzkriterium aus Analysis II (siehe dort Korollar 2.33) aus

$$\text{grad}(F - \tilde{F}) = \text{grad } F - \text{grad } \tilde{F} = f - f = 0$$

die Existenz einer Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\tilde{F} = F + c$ .



**Beispiel 4.10** Sei  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Wir betrachten die Funktionen

$$f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|^3} \quad \text{und} \quad F : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{\|x\|}.$$

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , denn wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{-1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|^3} = f_i(x)$$

für  $i = 1, 2, 3$  und alle  $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ .

**Bemerkung 4.11** Beispiel 4.10 hat einen physikalischen Hintergrund, denn durch die speziellen Funktionen

$$E : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\|x\|^3} \quad \text{und} \quad u : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|x\|}$$

werden gerade das *elektrische Feld* bzw. das *elektrische Potential* einer Punktladung im Ursprung beschrieben, wobei  $Q$  für die elektrische Ladung in Coulomb steht und  $\epsilon_0$  eine Konstante (die sogenannte *elektrische Feldstärke* oder *Dielektrizitätskonstante*) ist. Wie wir eben festgestellt haben, gilt hier  $E = -\text{grad } u$ , d.h.  $u$  ist bis auf das Vorzeichen identisch mit der Stammfunktion von  $E$ . Da sich ähnliche Zusammenhänge gehäuft in der Physik finden lassen (also Situationen, in denen ein *Potential* und ein zugehöriges *Feld*, dass man als negatives Gradientenfeld des Potentials erhält, gegeben sind), bezeichnet man eine Funktion  $u$  mit  $f = -\text{grad } u$  als ein *Potential* von  $f$ . Eine Funktion  $F$  ist also genau dann eine Stammfunktion von  $f$ , wenn  $-F$  ein Potential von  $f$  ist.

Wie wir sehen ist es aus dem Blickwinkel physikalischer Anwendungen interessant und lohnend zu untersuchen, ob eine gegebenes Vektorfeld eine Stammfunktion besitzt.

**Bemerkung 4.12** 1) Wir betrachten den Fall  $n = 1$ . Ist dann  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, so ist ein stetiges Vektorfeld auf  $I$  eine gewöhnliche stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , welche nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I eine Stammfunktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt, nämlich

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt,$$

wobei  $a \in I$  beliebig gewählt werden kann. Im Fall  $n = 1$  besitzt also jedes stetige Vektorfeld eine Stammfunktion.

- 2) Ist  $n \geq 2$ , so muss dagegen nicht jedes stetige Vektorfeld eine Stammfunktion besitzen. Ein Gegenbeispiel erhalten wir für  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und das Vektorfeld

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.7. Gäbe es nämlich eine stetig differenzierbare Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } F = f$ , so wäre das Kurvenintegral von  $f$  wegunabhängig und insbesondere über eine geschlossene Kurve nach Bemerkung 4.6 gleich 0, was allerdings nicht der Fall ist, wie wir in Beispiel 4.7 gesehen haben.

## 4.2 Existenz von Stammfunktionen

Im Folgenden wollen wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Stammfunktion eines Vektorfeldes herleiten. Unser erstes Ziel ist zu zeigen, dass die Wegunabhängigkeit des Integrals bzw. das daraus gefolgerte Verschwinden des Integrals über geschlossenen Kurven unter milden Voraussetzungen an den Definitionsbereich  $U$  äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion ist. Dazu benötigen wir das folgende Lemma und erinnern dabei an Definition 1.87 aus Analysis II, dass ein Gebiet eine offene und zusammenhängende Teilmenge ist.

**Lemma 4.13** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Dann gibt es zu zwei Punkten  $p, q \in U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$ .*

**Beweis:** Da  $U$  nach Satz 1.88 aus Analysis II wegzusammenhängend ist, gibt es zu  $p, q \in U$  einen Weg von  $p$  nach  $q$ , d.h. eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = q$ . Da  $\gamma$  stetig ist, ist  $\gamma([0, 1]) \subseteq U$  kompakt. Da außerdem  $\mathbb{R}^n \setminus U$  abgeschlossen ist, gilt nach Satz 1.75 aus Analysis II, dass

$$d(\gamma([0, 1]), \mathbb{R}^n \setminus U) = \inf \left\{ \|w - x\| \mid w \in \gamma([0, 1]), x \in \mathbb{R}^n \setminus U \right\} > 0.$$

Daraus folgt die Existenz eines  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $t \in [0, 1]$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$  gilt, dass  $\|\gamma(t) - x\| \geq \varepsilon$ . Da ferner  $\gamma$  auf der kompakten Menge  $[0, 1]$  gleichmäßig stetig ist, gibt es eine (hinreichend feine) Zerlegung  $Z : 0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ , so dass

$$\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| < \varepsilon$$

für  $j = 1, \dots, m$  gilt. Definiere nun  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  als den *Polygonzug* mit den Eckpunkten  $\gamma(t_j)$ ,  $j = 0, \dots, m$ , d.h. für  $j = 1, \dots, m$  und  $\lambda \in [0, 1]$  setze

$$\alpha(\lambda t_j + (1 - \lambda)t_{j-1}) := \lambda \gamma(t_j) + (1 - \lambda) \gamma(t_{j-1}).$$

Dann ist  $\alpha$  stückweise stetig differenzierbar und es gilt  $\alpha([0, 1]) \subseteq U$ , da für alle  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, m$ , gilt:

$$\|\alpha(t) - \gamma(t_j)\| = \|(\lambda - 1) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\| \leq \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| < \varepsilon,$$

wobei  $\lambda \in [0, 1]$  so gewählt ist, dass  $t = \lambda t_j + (1 - \lambda)t_{j-1}$  gilt. Wegen  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$  erfüllt  $\alpha$  damit alle geforderten Eigenschaften.  $\square$

**Satz 4.14** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1)  $f$  besitzt eine Stammfunktion.
- 2) Für jede stückweise stetig differenzierbare, geschlossene Kurve  $\alpha$  in  $U$  gilt

$$\int_{\alpha} f \cdot ds = 0.$$

**Beweis:** “1)  $\Rightarrow$  2)”: Dies ist die Aussage von Bemerkung 4.6.

“2)  $\Rightarrow$  1)”: Wähle ein festes  $p_0 \in U$ . Dann gibt es zu jedem  $p \in U$  nach Lemma 4.13 eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\alpha_p : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\alpha_p(0) = p_0$  und  $\alpha_p(1) = p$ . Definiere

$$F(p) := \int_{p_0}^p f \cdot ds := \int_{\alpha_p} f \cdot ds.$$

Dann ist die Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto F(p)$  wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Kurve, denn ist auch  $\beta : [0, 1] \rightarrow U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit  $\beta(0) = p_0$  und  $\beta(1) = p$ , so ist

$$\gamma : [0, 2] \rightarrow U, \quad t \mapsto \begin{cases} \alpha_p(t) & \text{für } t \in [0, 1], \\ \beta(2-t) & \text{für } t \in ]1, 2] \end{cases}$$

eine stückweise stetig differenzierbare, geschlossene Kurve in  $U$ . Mit 2) folgt

$$0 = \int_{\gamma} f \cdot ds = \int_{\alpha_p} f \cdot ds - \int_{\beta} f \cdot ds \quad \text{bzw.} \quad \int_{\alpha_p} f \cdot ds = \int_{\beta} f \cdot ds.$$

Wir zeigen nun, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Dazu zeigen wir, dass  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt, falls  $f$  die Form  $(f_1, \dots, f_n)$  hat. Ist  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  hinreichend klein, so gilt

$$F(p + he_i) = \int_{p_0}^p f \cdot ds + \int_p^{p+he_i} f \cdot ds \quad \text{und daher} \quad F(p + he_i) - F(p) = \int_p^{p+he_i} f \cdot ds.$$

Zur Berechnung dieses Integrals betrachten wir die Kurve  $\beta : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $t \mapsto p + the_i$ . (Für hinreichend kleines  $h$  ist dies eine Kurve, die in  $U$  liegt.) Mit  $\beta'(t) = he_i$  bzw.  $\beta'_j(t) = h\delta_{ij}$  für  $t \in [0, 1]$  folgt

$$\langle f(\beta(t)), \beta'(t) \rangle = \sum_{j=1}^n f_j(\beta(t)) \beta'_j(t) = hf_i(\beta(t)),$$

woraus wir

$$F(p + he_i) - F(p) = \int_p^{p+he_i} f \cdot ds = \int_{\beta} f \cdot ds = h \int_0^1 f_i(p + the_i) dt$$

erhalten. Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f_i$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig stetig ist, gilt  $\|f_i(p + the_i) - f_i(p)\| \leq \varepsilon$  für hinreichend kleines  $h$  und alle  $t \in [0, 1]$ . Hieraus folgt, dass für jede Nullfolge  $(h_k)$  die durch  $(t \mapsto f_i(p + th_k e_i))$  gegebene Funktionenfolge auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen die konstante Funktion  $t \mapsto f_i(p)$  konvergiert. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(p + he_i) - F(p)) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f_i(p + the_i) dt = f_i(p)$$

für alle  $p \in U$ . Da die partiellen Ableitungen von  $F$  auf ganz  $U$  existieren und stetig sind (da alle  $f_i$  stetig sind), folgt die stetige Differenzierbarkeit von  $F$ . Außerdem folgt aus  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$ , dass  $\text{grad } F = f$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 4.15** Eine einfache notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion erhalten wir mithilfe des Satzes von Schwarz (Satz 2.50 aus Analysis II). Ist nämlich  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und  $f = (f_1, \dots, f_n) = \text{grad } F$ , so gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

**Definition 4.16** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $U$ . Wir sagen,  $f$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung, falls für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (4.2)$$

**Bemerkung 4.17** 1) Die Integrabilitätsbedingung besagt einfach nur, dass die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  für alle  $x \in U$  eine symmetrische Matrix ist.

- 2) Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall  $n = 3$ . Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und die Funktion  $f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  differenzierbar, so ist der Differentialoperator  $\text{rot}$  - die *Rotation* (vgl. Definition 2.71 aus Analysis II) - auf  $f$  anwendbar und liefert:

$$\text{rot } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Daher erfüllt  $f$  genau dann die Integrabilitätsbedingung, wenn  $\text{rot } f = 0$  gilt. (Da man die Rotation als Maß für die „*Verwirbelung*“ eines Vektorfeldes interpretieren kann, spricht man im Fall  $\text{rot } f = 0$  auch von einem *wirbelfreien Vektorfeld*.) Dieses ist die in den Natur- und Ingenieurwissenschaften verbreitetere Form der notwendigen Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion (bzw. eines Potentials).

- 3) Die Integrabilitätsbedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion. Dazu betrachten wir auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  wieder das Vektorfeld

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.7. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

d.h.  $f$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Wir wissen allerdings schon aus Teil 2) von Bemerkung 4.12, dass  $f$  keine Stammfunktion hat.

Der Grund für die Nichtexistenz einer Stammfunktion für das Vektorfeld aus Beispiel 4.7 ist überraschenderweise weniger in den Eigenschaften des Vektorfeldes selbst, als eher in der Beschaffenheit seines Definitionsbereichs zu suchen.

**Definition 4.18** Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1)  $X$  heißt sternförmig bzgl.  $p \in X$ , falls für jedes  $x \in X$  auch die Verbindungsstrecke  $\overline{px}$  in  $X$  liegt, d.h. falls für alle  $x \in X$  gilt:

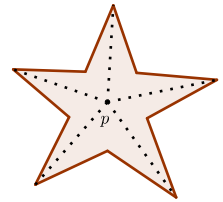
$$\overline{px} = \{(1-t)p + tx \mid t \in [0, 1]\} \subseteq X$$

- 2)  $X$  heißt sternförmig, falls es ein  $p \in X$  gibt, so dass  $X$  sternförmig bzgl.  $p$  ist.

**Bemerkung 4.19** Sternförmigkeit ist eine Abschwächung der Konvexität und eine Verschärfung des Wegzusammenhangs, denn offenbar gilt für jede Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$X \text{ konvex} \Rightarrow X \text{ sternförmig} \Rightarrow X \text{ wegzusammenhängend}$$

Der Terminologie erklärt sich dadurch, dass subjektiv von uns als “sternförmig” empfundene Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  die gewünschte Eigenschaft haben, wie sie leicht durch Betrachten der nebenstehenden Skizze feststellen können.



**Satz 4.20** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig sowie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Erfüllt  $f$  die Integrabilitätsbedingung, so hat  $f$  eine Stammfunktion.

**Beweis:** Sei  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Nach einer eventuellen Translation des Koordinatensystems können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $U$  sternförmig bzgl. des Nullpunkts  $p = 0$  ist. Wir definieren  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(tx) x_i dt.$$

(Wegen der Sternförmigkeit von  $U$  bzgl.  $p = 0$  gilt  $tx \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ , so dass  $F$  wohldefiniert ist.) Seien nun  $x \in U$  und  $t \in [0, 1]$  beliebig. Da  $f$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f_i(tx) x_i) = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) tx_i = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) tx_i & \text{für } i \neq j, \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(tx) tx_j + f_j(tx) & \text{für } i = j, \end{cases}$$

woraus wir mit Hilfe von Satz 3.33 (überlegen Sie sich im Detail, warum man ihn anwenden darf) erhalten, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \left( f_j(tx) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) tx_i \right) dt = \int_0^1 \left( f_j(tx) + t Df_j(tx)(x) \right) dt.$$

Definieren wir die Funktion  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $t \mapsto t \cdot f_j(tx)$ , dann folgt wegen

$$h'(t) = f_j(tx) + t \cdot Df_j(tx)(x)$$

für alle  $t \in [0, 1]$ , dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 h'(t) dt = h(1) - h(0) = f_j(x).$$

Da  $x \in U$  beliebig war, ist dies aber gleichbedeutend mit  $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$  für  $j = 1, \dots, n$ , woraus  $\text{grad } F = f$  folgt. Somit ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , denn wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist  $F$  stetig differenzierbar.  $\square$

**Bemerkung 4.21** Satz 4.20 liefert insbesondere eine konstruktive Methode zur Bestimmung einer Stammfunktion eines Vektorfeldes  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist die Existenz der Stammfunktion schon bekannt, so reicht es sogar, nur die Stetigkeit des Vektorfeldes  $f$  zu fordern. In diesem Fall müssen wir nur noch eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmen, so dass  $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$  für  $j = 1, \dots, n$  gilt. Ist  $U$  konvex und  $\omega$  stetig, so funktioniert das mit *schrittweiser Integration*. (Die Konvexität benötigen wir, um zu gewährleisten, dass achsenparallele Verbindungsstrecken zwischen Punkten auch ganz in  $U$  enthalten sind.) Wir illustrieren dieses Verfahren am Beispiel der Funktion

$$f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 + \cos y \cdot e^z \\ \sin y \cdot e^z - 2z \end{bmatrix}.$$

Sie überzeugen sich leicht davon, dass  $f$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Da der Definitionsbereich  $\mathbb{R}^3$  konvex (also auch sternförmig) ist, existiert eine Stammfunktion des Vektorfeldes  $f$ . Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat die Funktion  $x \mapsto f_1(x, y, z)$  für jedes  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$  eine Stammfunktion

$$F_1 : x \mapsto \int f_1(x, y, z) dx = x^3y + c_1,$$

die bis auf eine (natürlich von  $y$  und  $z$  abhängige) Konstante  $c_1$  eindeutig bestimmt ist. Folglich hat eine Stammfunktion  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  die Form  $(x, y, z) \mapsto x^3y + c_1(y, z)$ , wobei  $c_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine mit  $F$  ebenfalls stetig differenzierbare Funktion ist, die wir durch partielles Ableiten nach  $y$  und erneute Integration bestimmen können. Wegen

$$x^3 + \cos y \cdot e^z = f_2(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x^3 + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y, z)$$

erhalten wir nach Auflösen dieser Gleichung, dass  $\frac{\partial c_1}{\partial y}(y, z) = \cos y \cdot e^z$  gilt<sup>1</sup>. Anschließende Integration beider Seiten für jedes feste  $z \in \mathbb{R}$  liefert

$$c_1 : (y, z) \mapsto \int \cos y \cdot e^z dy = \sin y \cdot e^z + c_2,$$

<sup>1</sup>Machen Sie sich klar, dass die Integrabilitätsbedingung an dieser Stelle dafür sorgt, dass sich die Terme, die die Variable  $x$  enthalten, genau aufheben und so eine Funktion herauskommt, die nur von  $y$  und  $z$  abhängt. Damit erklärt sich schließlich auch der Name *Integrabilitätsbedingung*, denn nur wenn diese erfüllt ist, lässt sich das Verfahren sinnvoll zu Ende führen.

wobei die Konstante  $c_2$  von  $z$  abhängt. Folglich hat  $F$  die Form

$$(x, y, z) \mapsto x^3 y + \sin y \cdot e^z + c_2(z),$$

wobei  $c_2$  stetig differenzierbar ist. Wir leiten nun  $F$  partiell nach  $z$  ab und erhalten

$$\sin y \cdot e^z - 2z = f_3(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \sin y \cdot e^z + \frac{\partial c_2}{\partial z}(z)$$

bzw.  $\frac{\partial c_2}{\partial z}(z) = -2z$ . Ein letzter Integrationsschritt liefert uns schließlich

$$F(x, y, z) = x^3 y + \sin y \cdot e^z - z^2 + c,$$

wobei die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  nun wirklich eine Konstante ist.  $F$  ist dann die gesuchte Stammfunktion von  $\omega$ .

**Beispiel 4.22** Kommen wir ein letztes Mal auf unser auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definiertes Vektorfeld

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.7 zurück. Die Menge  $U$  ist nicht sternförmig (abgesehen davon, dass dies mit Kontraposition eine Folgerung aus Satz 4.20 ist: Ist Ihnen dies auch anschaulich klar?), wohl aber die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\},$$

die sogar konvex ist. Also hat  $f = (f_1, f_2) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Stammfunktion  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $V$ , da  $f$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt (vgl. Teil 2) von Bemerkung 4.17). Diese Stammfunktion können wir wegen der Konvexität von  $V$  wieder durch schrittweise Integration bestimmen können. Mit der Substitution  $t = \frac{y}{x}$  und  $dt = -\frac{y}{x^2} dx$  erhalten wir

$$\int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dx = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan t + c = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

wobei die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  wegen

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = f_2(x, y)$$

für alle  $(x, y) \in V$  schon gar nicht mehr von  $y$  abhängt. (Klar?) Eine Stammfunktion von  $\omega$  auf  $V$  ist also durch

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

gegeben. Andererseits ist auch die Menge  $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$  sternförmig, z.B. bzgl.  $p = (1, 0)$ , und daher hat  $\omega$  auch eine Stammfunktion auf  $W$ . Tatsächlich lässt sich die oben ermittelte Stammfunktion stetig differenzierbar auf  $W$  fortsetzen. Wir erhalten:

$$F : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } x \leq 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } x \leq 0, y < 0. \end{cases}$$

wobei der Nachweis der stetigen Differenzierbarkeit von  $F$  Ihnen überlassen bleibt.

**Bemerkung 4.23** Die noch relativ starke Eigenschaft der Sternförmigkeit des Definitionsbereiches  $U$  in Satz 4.20 lässt sich weiter abschwächen. Es reicht bereits zu fordern, dass  $U$  *einfach zusammenhängend* ist, d.h. dass  $U$  wegzusammenhängend ist und sich jede stetige geschlossene Kurve  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$  in  $U$  “zu einem Punkt zusammenziehen lässt”. Formal definiert man dies mit Hilfe einer *Homotopie*. Sind  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  zwei stetige Kurven mit  $\alpha(0) = \beta(0) =: p_0$  und  $\alpha(1) = \beta(1) =: p_1$ , so heißen diese *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  (genannt *Homotopie*) gibt, so für alle  $t, u \in [0, 1]$  gilt:

$$1) \quad A(0, t) = \alpha(t) \text{ und } A(1, t) = \beta(t)$$

$$2) \quad A(u, 0) = p_0 \text{ und } A(u, 1) = p_1$$

Für jedes feste  $u \in [0, 1]$  ist also  $\alpha_u : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto A(u, t)$  eine stetige Kurve in  $U$  mit Anfangspunkt  $p_0$  und Endpunkt  $p_1$ .

Eine geschlossene stetige Kurve  $\alpha$  in  $U$  heißt *zusammenziehbar*, falls  $\alpha$  *nullhomotop*, d.h. homotop zur Kurve  $[0, 1] \rightarrow U, t \mapsto p_0$  ist, wenn  $p_0$  wieder den Anfangs- und Endpunkt von  $\alpha$  bezeichnet. Eine wegzusammenhängende Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt dann *einfach zusammenhängend*, falls jede geschlossene stetige Kurve in  $U$  zusammenziehbar ist. (Grob gesprochen bedeutet dies, dass  $U$  “keine Löcher” hat.)

An dieser Stelle der Vorlesung wären wir mit ein paar wenigen weiteren Vorbereitungen dazu in der Lage, die klassische Version des *Satzes von Stokes* zu formulieren. Dieser bringt das Flussintegral eines Vektorfeldes im  $\mathbb{R}^3$  in der folgende Art und Weise mit einem vektoriellen Kurvenintegral in Zusammenhang:

$$\int_A \langle \operatorname{rot}(f), \nu \rangle dS = \int_{\partial A} f \cdot ds.$$

Ohne zu sehr im Detail auf die Voraussetzungen eingehen zu wollen, halten wir kurz fest, dass  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  hier ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  eine kompakte *Fläche*, d.h. hier eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Für diese lässt sich unter weiteren Voraussetzungen wieder ein Normaleneinheitsfeld  $\nu$  definieren - nur macht bei einer beliebigen Fläche im Raum im Gegensatz zur Oberfläche eines Körpers der Begriff *äußeres Normaleneinheitsfeld* keinen Sinn mehr. Daher haben wir an dieser Stelle zwei Möglichkeiten für die Wahl von  $\nu$ . (Stellen Sie sich als Beispiel eine Fläche in der  $x, y$ -Ebene vor. Ein Normalenvektor kann dann entweder nach oben oder nach unten zeigen und es gibt per se erst einmal keinen Grund, eine Richtung der anderen vorzuziehen.) Weiter ist  $\partial A$  die *Randkurve* unserer Fläche  $A$ . (Stellen Sie sich dazu als Beispiel die “*nördliche Hemisphäre*” der Einheitssphäre als Beispiel vor. Die Randkurve ist in diesem Fall durch den “*Äquator*” gegeben.) Wichtig ist dann noch, dass die Kurve im *mathematisch positiven* Umlaufsinn durchlaufen wird. Dazu muss eine “*Rechte-Hand-Regel*” erfüllt sein: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung des Normaleneinheitsfeldes, so geben die übrigen Finger der rechten Hand die Umlaufrichtung der Kurve vor.

Der Grund dafür, warum wir den klassischen Satz von Stokes an dieser Stelle nicht ausführlich formulieren und beweisen ist der, dass wir ihn als Spezialfall des sehr viel allgemeineren *Satzes von Stokes* erhalten werden, der als Spezialfall dann auch den im Kapitel 3 behandelten Satz von Gauß enthält. Um diesen allgemeinen Satz formulieren und beweisen zu können, benötigen wir den sogenannten *Differentialformenkalkül*, den wir in den folgenden Abschnitten entwickeln wollen.



### 4.3 Alternierende Multilinearformen

Unser aktuelles Fernziel ist eine elegante Definition für das Integral eines Vektorfelds  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  über  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Diese Definition soll als Spezialfälle für  $k = 1$  das in Abschnitt 4.1 definierte vektorielle Kurvenintegral und für  $k = n - 1$  das in Abschnitt 3.5 betrachtete “*Flussintegral*”, d.h. das Integral auf der rechten Seite in der Formel (3.13) des Satzes von Gauß enthalten. Grundlage für die geplante Definition sind die sogenannten *Differentialformen*. Bevor wir diese im nächsten Abschnitt einführen können, benötigen wir zuerst etwas Hintergrundwissen über *alternierende Multilinearformen*.

Multilinearformen haben wir bereits in Definition 2.25 in Analysis II kennengelernt: Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , dann ist eine  $k$ -Linearform auf  $V$  eine Abbildung  $\mu : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ , die in jeder Komponente linear ist, d.h. für jedes  $j \in \{1, \dots, k\}$  und jedes  $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k) \in V^{k-1}$  ist die Abbildung

$$V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mu(v_1, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_k)$$

linear. Im Folgenden interessieren uns Multilinearformen, die noch die zusätzliche Eigenschaft der *Alterniertheit* besitzen.

**Definition 4.24** Sei  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

- 1) Eine  $k$ -Linearform  $\mu : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $V$  heißt alternierend, falls für alle  $v_1, \dots, v_k \in V$  gilt:

$$\text{es gibt } i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j \text{ mit } v_i = v_j \quad \Rightarrow \quad \mu(v_1, \dots, v_k) = 0$$

- 2)  $\Lambda^k V^* := \{ \mu : V^k \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ ist eine alternierende } k\text{-Linearform auf } V \}$ .

- 3)  $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$ .

**Beispiel 4.25** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

- 1) Jede Linearform  $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine alternierende 1-Linearform. Speziell gilt also  $\Lambda^1 V^* = L(V, \mathbb{R}) = V^*$ , wobei  $V^*$  das aus der Linearen Algebra bekannte Symbol für den *Dualraum* von  $V$  ist.
- 2) Die Determinante  $\det : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto \det \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$  ist eine alternierende  $n$ -Linearform.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Dass die Determinante hier auftaucht ist kein Zufall! In den Kapiteln 2 und 3 hatten wir bereits festgestellt, dass die Determinante eine wichtige Rolle dabei spielt, die Volumenverzerrung von Abbildungen zu beschreiben. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass eine Abbildung, die einer Matrix das Volumen des durch ihre Spalten aufgespannten Parallelepipeds zuordnet eine alternierende Multilinearform sein muss - vgl. Sie dazu z.B. die Ausführungen in Abschnitt 4.2 in meinem Skript *Lineare Algebra*. Dies ist letztendlich der Grund dafür, warum auch in den folgenden Kapiteln alternierende Multilinearformen der Schlüssel zum Erfolg sind.

Bevor wir uns ein weiteres Beispiel anschauen, halten wir zunächst eine wichtige Eigenschaft von alternierenden Multilinearformen fest. Dazu erinnern wir uns an einen wichtigen Begriff aus der Linearen Algebra. Bezeichnet  $S_k$  die Menge der Permutationen auf der Menge  $\{1, 2, \dots, k\}$ , so gibt es zu jeder Permutation  $\sigma \in S_k$  ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass sich  $\sigma$  als Komposition von  $m$  Transpositionen (d.h. Permutationen, die genau zwei Indizes miteinander vertauschen) darstellen lässt. Die Zahl  $\text{sign}(\sigma) := (-1)^m$  heißt dann das *Signum* oder *Vorzeichen* der Permutation  $\sigma$  und ist (im Gegensatz zu der Zahl  $m$ ) eindeutig bestimmt.

**Satz 4.26** *Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\mu : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  eine alternierende  $k$ -Linearform und  $\sigma \in S_k$  eine Permutation. Dann gilt für alle  $v_1, \dots, v_k \in V$ :*

- 1)  $\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \mu(v_1, \dots, v_k)$ .
- 2)  $\mu(v_1, \dots, v_k) = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_k$  sind linear abhängig.

**Beweis:** Der Beweis ist Ihnen i.w. aus der Linearen Algebra bekannt, wo Sie den Spezialfall der Determinante betrachtet haben. Sind nämlich  $v_1, \dots, v_k \in V$  und  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i < j$ , so folgt aus  $\mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i + v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) = 0$ , dass

$$\mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k) = -\mu(v_1, \dots, v_k),$$

d.h. die Aussage 1) stimmt für Transpositionen, da diese das Signum  $-1$  haben. Für beliebige Permutationen folgt dann die Aussage durch eine Zerlegung in Transpositionen. Der Beweis von 2) bleibt zu Übungszwecken Ihnen überlassen.  $\square$

**Beispiel 4.27** Sei  $\beta : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine alternierende Bilinearform (bzw. 2-Linearform). Wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, lassen sich Bilinearform durch Matrizen darstellen, d.h. es gibt eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $\beta(v, w) = v^\top M w$  für alle  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Da  $\beta$  alternierend ist, gilt

$$v^\top M w = \beta(v, w) = -\beta(w, v) = -w^\top M v = -(w^\top M v)^\top = -v^\top M^\top w,$$

für alle  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , woraus wir  $M^\top = -M$  erhalten, d.h.  $M$  ist eine schief-symmetrische Matrix. Analog lassen sich alternierende Bilinearformen  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nach Wahl einer Basis des endlich-dimensionalen Vektorraums  $V$  durch schief-symmetrische Matrizen darstellen. Ist andererseits  $S \in \mathbb{R}^n$  schief-symmetrisch, so ist die dadurch gegebene Bilinearform  $(v, w) \mapsto v^\top S w$  eine alternierende Bilinearform.

**Bemerkung 4.28** Offensichtlich ist  $\Lambda^k V^*$  ein Vektorraum. Doch was ist seine Dimension? Für den Spezialfall  $k = 1$  lässt sich diese Frage einfach beantworten, denn in diesem Fall gilt  $\Lambda^1 V^* = V^*$  und aus der Linearen Algebra wissen Sie, dass der Dualraum  $V^*$  dieselbe Dimension hat wie  $V$ . Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , so existiert dazu die sogenannte *duale Basis*  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  von  $V^*$ , die die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

**Beispiel 4.29** Wir betrachten die kanonischen Koordinatenprojektionen

$$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i$$

für  $i = 1, \dots, n$ . (Diese hatten wir in Beispiel 1.49 in Analysis II mit  $\pi_i$  bezeichnet, im Differentialformenkalkül benutzt man dafür jedoch aus Gründen, die erst später offensichtlich werden, die Schreibweise  $x_i$ .) Dann ist  $(x_1, \dots, x_n)$  die zur Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  duale Basis des  $(\mathbb{R}^n)^*$ , denn offenbar gilt für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , dass  $x_i(e_j) = \delta_{ij}$ .

Um nun auch Basen für die Vektorräume  $\Lambda^k V^*$  mit  $k > 1$  konstruieren zu können, führen wir eine neue Operation ein.

**Definition 4.30** Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ . Dann heißt die für  $v_1, \dots, v_k \in V$  durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det [\varphi_i(v_j)]_{i,j} = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{bmatrix}$$

gegebene Abbildung  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  das äußere Produkt oder Dachprodukt (auch Wedgeprodukt) von  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ .

**Beispiel 4.31** Sei  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i$  wieder die  $i$ -te Koordinatenprojektion. Dann gilt für alle  $p, q \in \mathbb{R}^n$  und alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , dass

$$(x_i \wedge x_j)(p, q) = \det \begin{bmatrix} x_i(p) & x_i(q) \\ x_j(p) & x_j(q) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} p_i & q_i \\ p_j & q_j \end{bmatrix} = p_i q_j - p_j q_i.$$

Offenbar ist  $x_i \wedge x_j$  eine alternierende Bilinearform, denn im Fall  $i < j$  erhalten wir durch

$$M := \begin{matrix} & & i & & j & \\ & & & & & \\ i & & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ j & & & \ddots & & \\ & & -1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{matrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

die darstellende Matrix von  $x_i \wedge x_j$ , denn für alle  $p, q \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$(x_i \wedge x_j)(p, q) = p^\top M q.$$

(Wie sieht die darstellende Matrix im Fall  $i > j$  aus?) Das Dachprodukt macht in diesem Fall also aus den beiden Linearformen  $x_i$  und  $x_j$  eine Bilinearform.

**Bemerkung 4.32** Die Beobachtung im vorstehenden Beispiel war kein Zufall: Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ . Dann folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Determinante, dass  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  eine alternierende  $k$ -Linearform ist. Somit ist das Dachprodukt eine Abbildung  $(V^*)^k \rightarrow \Lambda^k V^*$ , die ferner die folgenden Eigenschaften hat:

- 1) Das Dachprodukt ist eine  $k$ -lineare Abbildung, d.h. für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\tilde{\varphi} \in V^*$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge (\alpha\varphi_i + \beta\tilde{\varphi}) \wedge \dots \wedge \varphi_k = \alpha(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i \wedge \dots \wedge \varphi_k) + \beta(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi} \wedge \dots \wedge \varphi_k)$$

- 2) Das Dachprodukt ist *alternierend*, d.h. gilt  $\varphi_i = \varphi_j$  für  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i \neq j$ , so folgt  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = 0$ .

- 3) Als Folgerung aus 2) (vergleichen Sie dies mit Satz 4.26) erhalten wir für jede Permutation  $\sigma \in S_k$ , dass

$$\varphi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\sigma(k)} = \text{sign}(\sigma) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k).$$

- 4) Als weitere Folgerung aus 1) und 2) erhalten wir unmittelbar:  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$  sind genau dann linear abhängig, wenn  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = 0$ .

**Satz 4.33** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  eine Basis von  $V^*$ . Dann bilden die alternierenden  $k$ -Linearformen

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (4.3)$$

eine Basis von  $\Lambda^k V^*$ . Insbesondere gilt  $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ .

**Beweis:** Für  $k > n$  gilt  $\Lambda^k V^* = \{0\}$  (klar? Wenn nicht: Übung) und die leere Familie ist eine Basis von  $\{0\}$ , daher ist in diesem Fall nichts zu zeigen. Sei also  $k \leq n$  und sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine zu  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  duale Basis von  $V$ , d.h. es gelte

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Seien nun  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  und  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ . Dann gilt

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.4)$$

denn die Matrix  $[\varphi_i(e_j)]_{i,j}$  ist im Fall  $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$  gerade die Einheitsmatrix, in allen anderen Fällen hat sie jedoch mindestens eine Nullspalte. (Klar?) Hiermit folgt insbesondere die lineare Unabhängigkeit der  $k$ -Linearformen in (4.3). Um zu zeigen, dass

sie auch ein Erzeugendensystem bilden, betrachte ein beliebiges  $\mu \in \Lambda^k V^*$ . Setzen wir  $c_{i_1, \dots, i_k} := \mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  für  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , so zeigen wir

$$\mu = \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}),$$

indem wir zeigen, dass beide Seiten auf einer Basis des  $V^k$  übereinstimmen. Eine solche erhalten wir durch alle Vektoren  $(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k})$  mit  $\ell_1, \dots, \ell_k \in \{1, \dots, n\}$ . Sei also  $(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \{1, \dots, n\}^k$  beliebig. Falls es  $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$  gibt, so dass  $\ell_i = \ell_j$  gilt, so folgt wegen der Alterniertheit der  $k$ -Linearformen, dass

$$\mu(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}) = 0 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}).$$

Andernfalls gibt es eine Permutation  $\sigma \in S_k$ , so dass  $1 \leq \ell_{\sigma(1)} < \dots < \ell_{\sigma(k)} = n$  gilt. Mit der Abkürzung  $j_i := \ell_{\sigma(i)}$  erhalten wir unter Benutzung von Satz 4.26 und (4.4), dass

$$\begin{aligned} \mu(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}) &= \text{sign}(\sigma^{-1}) \cdot \mu(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \text{sign}(\sigma^{-1}) \cdot c_{j_1, \dots, j_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{sign}(\sigma^{-1}) c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_k}). \end{aligned}$$

Somit bilden die  $k$ -Linearformen aus (4.3) auch ein Erzeugendensystem und daher eine Basis von  $\Lambda^k V^*$ . Die Aussage über die Dimension ist nun eine einfache kombinatorische Folgerung.  $\square$

**Beispiel 4.34** Sei  $V = \mathbb{R}^n$ . Dann bilden nach Beispiel 4.29 die kanonischen Koordinatenprojektionen  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis des  $(\mathbb{R}^n)^*$  (nämlich die zur Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  duale Basis). Folglich ist durch die  $k$ -Linearformen

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis des Raums  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  gegeben. Für den Spezialfall  $k = n - 1$  führen wir eine neue Notation ein, den “Auslassungsoperator”  $\widehat{\phantom{x}}$ . Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in (\mathbb{R}^n)^*$ , so nutzen wir die Notation

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge \dots \wedge \varphi_m := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{i-1} \wedge \varphi_{i+1} \wedge \dots \wedge \varphi_m,$$

d.h. der “Hut”  $\widehat{\phantom{x}}$  deutet an, dass die betreffende Linearform im Dachprodukt “ausgelassen” wird. Wir erlauben dann auch selbsterklärende Schreibweisen wie z.B.

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi_j} \wedge \dots \wedge \varphi_m.$$

Eine Basis von  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$  ist somit durch die  $(n - 1)$ -Linearformen

$$x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_i} \wedge \dots \wedge x_n$$

gegeben. Insbesondere gilt  $\dim \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^* = n$ .

**Bemerkung 4.35** Es gilt  $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^b)^* = \binom{n}{n} = 1$ . Da die Determinante  $\det$  eine alternierende  $n$ -Linearform ist, ist sie schon eine Basis von  $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$ . Dies passt zu der aus der Linearen Algebra bekannten Tatsache, dass die Determinante durch die Eigenschaften der  $n$ -Linearität, der Alterniertheit und der Normiertheit (d.h.  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ , wenn  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet) bereits eindeutig bestimmt ist. Insbesondere erhalten wir damit für die Determinante die neue Darstellung  $\det = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ .

Das Dachprodukt haben wir so definiert, dass es aus  $k$  Linearformen eine alternierende  $k$ -Linearform macht. Diese Definition können wir nun erweitern und erhalten ein Dachprodukt, dass aus zwei alternierenden  $k$ - bzw.  $\ell$ -Formen eine alternierende  $(k + \ell)$ -Form macht.

**Satz 4.36** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^\ell V^* \rightarrow \Lambda^{k+\ell} V^*, \quad (\mu, \varrho) \mapsto \mu \wedge \varrho,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- 1)  $\wedge$  ist in jeder Komponente linear, d.h. für alle  $\mu, \tilde{\mu} \in \Lambda^k V^*$  und alle  $\varrho, \tilde{\varrho} \in \Lambda^\ell V^*$  und  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $(\mu + \tilde{\mu}) \wedge \varrho = \mu \wedge \varrho + \tilde{\mu} \wedge \varrho$  und  $\mu \wedge (\varrho + \tilde{\varrho}) = \mu \wedge \varrho + \mu \wedge \tilde{\varrho}$   
b)  $(c\mu) \wedge \varrho = c(\mu \wedge \varrho) = \mu \wedge (c\varrho)$

- 2) Für alle  $\psi_1, \dots, \psi_{k+\ell} \in V^*$  gilt:

$$(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) \wedge (\psi_{k+1} \wedge \dots \wedge \psi_{k+\ell}) = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{k+\ell}$$

**Beweis:** *Existenz:* Im Fall  $k = 0$  gilt  $\Lambda^k V^* = \mathbb{R}$ . Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \in \Lambda^\ell V^*$  setzen wir dann einfach  $a \wedge \varrho := a\varrho$ . Analog verfahren wir im Fall  $\ell = 0$ . Sei also im Folgenden  $k, \ell \neq 0$  und sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  eine Basis von  $V^*$ . Dann gibt es zu  $\mu \in \Lambda^k V^*$  und  $\varrho \in \Lambda^\ell V^*$  nach Satz 4.33 Koeffizienten  $a_{i_1, \dots, i_k}, b_{j_1, \dots, j_\ell} \in \mathbb{R}$  für alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  und alle  $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n$ , so dass

$$\mu = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}) \quad \text{und} \quad \varrho = \sum_{j_1 < \dots < j_\ell} b_{j_1, \dots, j_\ell} (\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_\ell}).$$

Dann definieren wir:

$$\mu \wedge \varrho := \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_\ell}} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot b_{j_1, \dots, j_\ell} (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_\ell})$$

Dann erfüllt das Produkt die gewünschten Eigenschaften, wobei man 2) unter Benutzung von 1) zeigt, indem man die Linearformen  $\psi_i$  in der Basis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  darstellt. (Der Nachweis ist sehr einfach (im Englischen würde man hier den Begriff “straightforward” benutzen), allerdings notationstechnisch sehr aufwändig, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten.) Der Nachweis der Eindeutigkeit bleibt Ihnen zur Übung überlassen.  $\square$

**Bemerkung 4.37** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und seien  $\mu_1 \in \Lambda^k V^*$ ,  $\mu_2 \in \Lambda^\ell V^*$  und  $\mu_3 \in \Lambda^m V^*$ . Dann gilt:

- 1)  $(\mu_1 \wedge \mu_2) \wedge \mu_3 = \mu_1 \wedge (\mu_2 \wedge \mu_3)$
- 2)  $\mu_1 \wedge \mu_2 = (-1)^{k\ell}(\mu_2 \wedge \mu_1)$
- 3) Ist speziell  $k$  ungerade, so gilt  $\mu_1 \wedge \mu_1 = 0$ .

Dabei zeigt man 1) leicht (aber wieder recht mühsam) mit Hilfe von Satz 4.36, während 2) nach einer Darstellung der  $k$ -Linearformen in Basen wie in (4.3) aus der Tatsache folgt, dass die Permutation  $(1, \dots, k + \ell) \mapsto (k + 1, \dots, k + \ell, 1, \dots, k)$  das Signum  $(-1)^{k\ell}$  hat. Schließlich ist 3) eine unmittelbare Folgerung aus 2). (Man beachte dabei, dass *Alterniertheit* des Dachprodukts in Bemerkung 4.32 nur für Linearformen, also für den Fall  $k = 1$  festgestellt wurde!)

Für spätere Zwecke formulieren und beweisen wir noch den folgenden Satz:

**Satz 4.38** Seien  $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{k,k}$  eine Matrix,  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$  und

$$\psi_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \varphi_j \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

Dann gilt  $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = (\det A) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)$ .

**Beweis:** Falls die  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  linear abhängig sind, ist nichts zu beweisen. Seien also  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  linear unabhängig. Unter Ausnutzung der Linearität in jeder Komponente gilt:

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k &= \left( \sum_{j_1=1}^k a_{1,j_1} \varphi_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j_k=1}^k a_{k,j_k} \varphi_{j_k} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^k (a_{1,j_1} \cdot \dots \cdot a_{k,j_k}) \cdot (\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}) \end{aligned}$$

In der letzten Summe verschwinden alle Summanden, in denen im Dachprodukt ein  $\varphi_{j_i}$  mehrfach vorkommt. In den von Null verschiedenen Summanden dagegen, müssen die Indizes  $j_1, \dots, j_k$  paarweise verschieden sein. Daher lässt sich die Summe wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k &= \sum_{\sigma \in S_k} (a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{k,\sigma(k)}) \cdot (\varphi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{k,\sigma(k)}) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \\ &= (\det A) \cdot (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Satz 4.26 und im letzten Schritt die Leibniz-Formel für die Determinante angewendet haben.  $\square$

## 4.4 Differentialformen

Wie angekündigt definieren wir in diesem Abschnitt die *Differentialformen*, die sich als die natürlichen Integranden für spezielle Integrale über einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit entpuppen.

**Definition 4.39** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann heißt eine Abbildung  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  eine Differentialform  $k$ -ter Ordnung (auch  $k$ -ten Grades auf  $U$  bzw. kurz eine  $k$ -Form auf  $U$ ). Die Menge aller  $k$ -Formen auf  $U$  bezeichnen wir mit  $\Omega_k(U)$ .

Im Spezialfall  $k = 1$  spricht man auch von *Pfaffschen Formen*.

**Beispiel 4.40** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

- 1) Wegen  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}$  ist eine 0-Form auf  $U$  eine Funktion  $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$ .
- 2) Sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann ist die Ableitung<sup>3</sup>  $dF(p)$  von  $F$  in  $p \in U$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ , also ein Element des Dualraums  $(\mathbb{R}^n)^*$  des  $\mathbb{R}^n$ . Wie wir aus der Analysis II wissen hat die Ableitung  $dF$  von  $F$  die Form

$$dF : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*.$$

Somit ist  $dF$  ein Beispiel für eine 1-Form bzw. Pfaffsche Form auf  $U$ .

- 3) Betrachten wir für  $i = 1, \dots, n$  wieder die kanonischen Koordinatenprojektionen  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}, p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i$ , so sind diese als lineare Funktionen differenzierbar. Folglich sind deren Ableitungen  $dx_1, \dots, dx_n$  spezielle Beispiele für 1-Formen bzw. Pfaffsche Formen auf  $U$ . Wir erinnern an dieser Stelle an eine wichtige Eigenschaft von Ableitungen linearer Funktionen: Wie sie aus der Analysis II wissen, gilt

$$dx_i(p) = x_i$$

für alle  $p \in U$ , d.h. die Ableitung der linearen Funktion  $x_i$  an einer beliebigen Stelle  $p$  ist wieder die lineare Abbildung  $x_i$ . Insbesondere ist  $dx_i$  also konstant.

**Definition 4.41** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $\omega, \tilde{\omega} : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  zwei  $k$ -Formen auf  $U$ , sowie  $\varrho : U \rightarrow \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)^*$  eine  $\ell$ -Form und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1) Die  $k$ -Formen  $f\omega$  und  $\omega + \tilde{\omega}$  auf  $U$  sind gegeben durch

$$(f\omega)(p) := f(p)\omega(p) \quad \text{und} \quad (\omega + \tilde{\omega})(p) := \omega(p) + \tilde{\omega}(p) \quad \text{für alle } p \in U.$$

- 2) Die  $(k + \ell)$ -Form  $\omega \wedge \varrho$  auf  $U$  ist gegeben durch

$$(\omega \wedge \varrho)(p) := \omega(p) \wedge \varrho(p) \quad \text{für alle } p \in U.$$

---

<sup>3</sup>Wir passen uns im Folgenden der ausgeklügelten Notation im Differentialformenkalkül an und schreiben in diesem Kapitel die Ableitung  $DF$  einer differenzierbaren Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  konsequent mit einem kleinen  $d$ , also  $dF$  statt  $DF$ .



**Bemerkung 4.42** Die Eigenschaften des Dachprodukts  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \times \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)^*$  aus Bemerkung 4.37 übertragen sich unmittelbar auf das punktweise in Definition 4.41 eingeführte Dachprodukt für Differentialformen. Insbesondere gilt also für jede  $k$ -Form  $\omega$  und jede  $\ell$ -Form  $\varrho$  auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , dass  $\omega \wedge \varrho = (-1)^{k\ell} \varrho \wedge \omega$ . Für den Spezialfall der 1-Formen  $dx_i$  auf  $U$  (also den Ableitungen der Koordinatenprojektionen), erhalten wir für alle  $i, j = 1, \dots, n$  die wichtigen Formeln

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad \text{und} \quad dx_i \wedge dx_i = 0 \quad (4.5)$$

bzw. im letzten Fall allgemeiner

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0 \quad (4.6)$$

falls es  $j, \ell \in \{1, \dots, k\}$  gibt mit  $j \neq \ell$  und  $i_j = i_\ell$ .

Beispiele für 1-Formen haben wir in den Ableitungen differenzierbarer Funktionen gefunden. Aber wie genau sehen jetzt  $k$ -Formen im Fall  $k > 1$  aus? Um diese geeignet darstellen zu können erinnern wir uns daran, dass einerseits durch die Dachprodukte

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

der kanonischen Koordinatenprojektionen eine Basis des  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  gegeben ist. Ist andererseits  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so gilt wegen der Linearität für alle  $p \in U$ , dass  $dx_i(p) = x_i$ , und somit

$$dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

für alle  $p \in U$ . Diese simple Beobachtung erweist sich als wichtiger Schlüssel im Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 4.43** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann gibt es zu jeder  $k$ -Form  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  auf  $U$  eindeutig bestimmte Funktionen  $f_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , so dass

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (4.7)$$

wobei  $dx_i$  die Ableitung der  $i$ -ten Koordinatenprojektion  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. genauer die Einschränkung von  $dx_i$  auf  $U$  bezeichnet. (Die Form (4.7) heißt die Normaldarstellung der  $k$ -Form  $\omega$ .)

**Beweis:** Wie wir soeben festgestellt haben, bilden für beliebiges  $p \in U$  die  $k$ -Linearformen

$$dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ . Daher gibt es zu jedem  $p \in U$  wegen  $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  eindeutig bestimmte (von  $p$  abhängige) Koeffizienten  $\alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(p)} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , so dass

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(p)} dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p).$$

Definiere nun  $f_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $p \mapsto f_{i_1, \dots, i_k}(p) := \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(p)}$ . Dann gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad \square$$

**Bemerkung 4.44** Wir betrachten Satz 4.43 für die wichtigen Spezialfälle  $k \in \{1, n-1, n\}$  einmal etwas genauer: Dazu seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  eine  $k$ -Form auf  $U$ .

- 1) Im Fall  $k = 1$  gilt  $\dim \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = n$  und es gibt eindeutig bestimmte Funktionen  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so dass

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i.$$

Formal erinnert diese Darstellung an ein Skalarprodukt. Daher betrachtet man das Vektorfeld  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert  $ds := (dx_1, \dots, dx_n)$  und benutzt die abkürzende Schreibweise

$$f \cdot ds := \sum_{i=1}^n f_i dx_i = \omega,$$

wobei der etwas dicker geschriebene Punkt an ein Skalarprodukt erinnern soll.

- 2) Für den Fall  $k = n-1$  erinnern wir an den in Beispiel 4.34 eingeführten *Auslassungsoperator*, den wir ganz analog auf der Ebene der Differentialformen verwenden werden. Nach Satz 4.33 gilt  $\dim \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n}{n-1} = n$  und eine Basis dieses Raums ist für beliebiges  $p \in U$  durch die  $(n-1)$ -Linearformen

$$(-1)^{i-1} (dx_1(p) \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i(p)} \wedge \dots \wedge dx_n(p)), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

gegeben. Das Vorzeichen  $(-1)^{i-1}$  hätten wir dabei eigentlich gar nicht benötigt (vgl. Sie dies mit der in Beispiel 4.34 genannten Basis des Raums  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$ ), es wird sich aber im Folgenden als nützlich für eine einfachere Notation erweisen. Setzen wir nun  $dS_i := (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ , so hat unser  $\omega$  die Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dS_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld ist. Da auch diese Darstellung formal wieder an ein Skalarprodukt erinnert, definieren wir die beiden Abkürzungen  $dS := (dS_1, \dots, dS_n)$  und

$$f \cdot dS := \sum_{i=1}^n f_i dS_i = \omega.$$

Die hier und in 1) gewählten Notationen  $ds$  und  $dS$  werden sich vollständig erklären, wenn wir zu den Integralen von Differentialformen kommen. Um eine naheliegende Frage dabei vorab zu klären: Ja, die Bezeichnungen haben tatsächlich etwas mit den in Abschnitt 4.1 bzw. Kapitel 3 definierten Bogenelement  $ds$  bzw. Oberflächenelement  $dS$  zu tun.

- 3) Der Fall  $k = n$  ist schließlich sehr einfach. In diesem Fall gibt es eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n =: f dV,$$

wobei wir hier die Abkürzung  $dV := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  verwendet haben, die wir *Volumenelement* nennen werden.

**Beispiel 4.45** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i,$$

denn ist  $p \in U$  beliebig, so gilt wegen  $dx_i(p)(v) = x_i(v) = v_i$  für alle  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) dx_i(p) \right) (v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) dx_i(p)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) v_i = dF(p)(v).$$

Daraus erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) dx_i(p) = dF(p)$$

für alle  $p \in U$ , womit schließlich die Behauptung folgt.

Mit Hilfe der Normaldarstellung können wir nun eine Operation definieren, die aus einer  $k$ -Form eine  $(k+1)$ -Form macht, die sogenannte *äußere Ableitung*.

**Definition 4.46** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  eine  $k$ -Form auf  $U$  in Normaldarstellung.

- 1)  $\omega$  heißt stetig, falls alle  $f_{i_1, \dots, i_k}$  stetig sind.
- 2)  $\omega$  heißt  $m$ -mal (stetig) differenzierbar, falls alle  $f_{i_1, \dots, i_k}$   $m$ -mal (stetig) differenzierbar sind.
- 3) Ist  $\omega$  differenzierbar und  $k \geq 1$ , dann heißt die  $(k+1)$ -Form

$$d\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

die äußere Ableitung (auch Cartan-Ableitung) bzw. kurz Ableitung von  $\omega$ .

Für eine differenzierbare 0-Form  $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die äußere Ableitung von  $\omega$  als ihr totales Differential  $df : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ .

**Beispiel 4.47** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine differenzierbare  $k$ -Form auf  $U$ .

- 1) Sei  $k = 1$  und  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  die Normaldarstellung von  $\omega$ . Da nach Beispiel 4.45 für  $i = 1, \dots, n$  gilt, dass  $df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ , erhalten wir für die äußere Ableitung von  $\omega$ , dass

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{i < j} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Formeln (4.5) für eine Vereinfachung ausgenutzt haben.

- 2) Sei  $k = n - 1$  und die Normaldarstellung von  $\omega$  sei durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dS_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

gegeben, wobei wir hier die Notation  $dS_i$  aus Teil 2) von Bemerkung 4.44 benutzt haben. Für die äußere Ableitung von  $\omega$  erhalten wir dann (wieder unter Benutzung von Beispiel 4.45) die  $n$ -Form

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} df_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

wobei wir für die Vereinfachung wieder die Formeln (4.5)–(4.6) benutzt haben. An dieser Stelle sehen wir ein, warum es geschickt war, in der in Teil 2) von Bemerkung 4.44 angegebenen Basis von  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$  den Faktor  $(-1)^{i-1}$  einzuführen: In der Normaldarstellung von  $d\omega$  müssen wir uns nun nicht mehr damit herumplagen. Wenn wir dort nun noch  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  ausklammern und uns an die Definition  $\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  erinnern, erhalten wir schließlich

$$d\omega = \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

**Bemerkung 4.48** Dass im vorangegangenen Beispiel plötzlich einer unserer klassischen Differentialoperatoren aufgetaucht ist, ist kein Zufall, sondern ein Vorzug der ausgeklügelten Notation des Differentialformenkalküls. Dazu betrachten wir den Fall  $n = 3$  einmal genauer. Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $\omega_k$  eine  $k$ -Form auf  $U$  für  $k = 0, 1, 2, 3$ , so gibt es Skalarfelder  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  und Vektorfelder  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass

$$\begin{aligned}\omega_0 &= f, \\ \omega_1 &= v \cdot ds = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3, \\ \omega_2 &= w \cdot dS = w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_3 \wedge dx_1 + w_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ \text{und } \omega_3 &= g dV = g dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

Beachten Sie hier, dass wir das nach (4.8) geforderte negative Vorzeichen von  $-dx_1 \wedge dx_3$  durch Permutation zu  $dx_3 \wedge dx_1$  “wegzaubern” konnten. Sind nun  $\omega_0, \omega_1$  und  $\omega_2$  differenzierbar, so erhalten wir unter Benutzung von Beispiel 4.47 für die äußeren Ableitungen:

$$\begin{aligned}d\omega_0 &= df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \text{grad}(f) \cdot ds \\ d\omega_1 &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \text{rot}(v) \cdot dS \\ d\omega_2 &= \text{div}(w) dV\end{aligned}$$

Damit erhalten wir also alle drei klassischen Differentialoperatoren als äußere Ableitungen von Differentialformen auf offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  zurück. (Frage an Sie: Wir haben uns hier nicht weiter mit  $d\omega_3$  beschäftigt. Warum wohl nicht?)

Wir untersuchen im Folgenden die Eigenschaften unserer äußeren Ableitung.

**Satz 4.49** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega, \tilde{\omega}$  differenzierbare  $k$ -Formen auf  $U$ ,  $\varrho$  eine differenzierbare  $\ell$ -Form auf  $U$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $d(\alpha\omega + \beta\tilde{\omega}) = \alpha d\omega + \beta d\tilde{\omega}$  (Linearität der Ableitung)
- 2)  $d(\omega \wedge \varrho) = (d\omega) \wedge \varrho + (-1)^k \omega \wedge (d\varrho)$  (“Produktregel”)

**Beweis:** 1) ist trivial bzw. folgt sofort aus der Definition der äußeren Ableitung. Für 2) reicht es wegen 1) den Spezialfall

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \text{und} \quad \varrho = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

zu betrachten, wobei  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind und  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  sowie  $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n$  gilt. Wegen  $d(fg) = gdf + fdg$  (dies ist eine Konsequenz der

Produktregel aus Analysis II) folgt

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \varrho) &= d\left((f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell})\right) \\
&= d(fg dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}) \\
&= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\
&= (gdf) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\
&\quad + (fdg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\
&= (df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}) \\
&\quad + (-1)^k (f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}) \\
&= (d\omega) \wedge \varrho + (-1)^k \omega \wedge (d\varrho),
\end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen  $(-1)^k$  durch das  $k$ -malige Anwenden einer Transposition entstanden ist, die notwendig war um  $dg$  geeignet zu “verschieben”.  $\square$

Die nächste Eigenschaft der äußeren Ableitung ist von entscheidender Bedeutung.

**Satz 4.50** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine zweimal differenzierbare  $k$ -Form auf  $U$ . Dann gilt  $d(d\omega) = 0$ .*

**Beweis:** Wegen der Linearität der äußeren Ableitung reicht es wieder, den Spezialfall

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

mit einer zweimal differenzierbaren Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zu betrachten. Dann erhalten wir  $d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  und mit der Abkürzung  $\varrho := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  gilt:

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d(df \wedge \varrho) = d\left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge \varrho\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge \varrho\right) \\
&= \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \wedge \varrho = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\right) \wedge dx_j \wedge \varrho \\
&= \left(\sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j\right) \wedge \varrho,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt das “Assoziativgesetz” für das Dachprodukt und die Formeln (4.5) ausgenutzt haben. Nach dem Satz von Schwarz (siehe Satz 2.50 in Analysis II) verschwindet der Ausdruck in der Klammer und es folgt  $d(d\omega) = 0$ .  $\square$

**Bemerkung 4.51** Mit Satz 4.49 und Satz 4.50 folgt mit der Notation aus Satz 4.49 (und entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) die Rechenregel  $d(\omega \wedge d\varrho) = d\omega \wedge d\varrho$ .

Es mag auf den ersten Blick eigenartig anmuten, dass die zweite äußere Ableitung immer verschwindet, aber die Eigenschaft “ $d^2 = 0$ ” ist tatsächlich wesentlich für unsere weiteren Betrachtungen.

**Beispiel 4.52** Sind  $\omega_0$  und  $\omega_1$  zweimal differenzierbar und wie in Bemerkung 4.48, so gilt mit der dortigen Bezeichnung

$$0 = d(d\omega_0) = (\operatorname{rot} \operatorname{grad} f) \cdot dS \quad \text{und} \quad 0 = d(d\omega_1) = (\operatorname{div} \operatorname{rot} v) dV.$$

Für ein zweimal differenzierbares Skalarfeld  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und ein zweimal differenzierbares Vektorfeld  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  gilt also  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$  bzw.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$ .

**Definition 4.53** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- 1) Eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  heißt geschlossen, falls  $d\omega = 0$ .
- 2) Eine stetige  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  heißt exakt, falls es eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\varrho$  auf  $U$  gibt, so dass  $\omega = d\varrho$ .

Der Grund für die Bezeichnung “geschlossen” beruht auf tieferen Erkenntnissen der Differentialgeometrie bzw. der Algebraischen Topologie und ist daher im Rahmen dieses Skripts leider nicht begreifbar zu machen. Ebenso wenig ist an dieser Stelle der Name “Exaktheit” erklärbar. Für Algebra-Experten sei allerdings vermerkt, dass der Begriff etwas mit “exakten Sequenzen” zu tun hat.

**Beispiel 4.54** Ist  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  eine stetig differenzierbare 1-Form bzw. Pfaffsche Form auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , dann ist  $\omega$  in Hinblick auf Teil 1) von Beispiel 4.47 genau dann geschlossen, wenn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt, d.h. genau dann, wenn das Vektorfeld  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Ist  $\omega$  andererseits exakt und  $F$  eine 0-Form mit  $dF = \omega$ , so ist  $F$  per Definition einfach nur eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dF = \omega$  bzw.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Also ist  $\omega$  genau dann exakt, wenn  $\operatorname{grad} F = f$  gilt, d.h. wenn  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Wir können somit unsere Erkenntnisse aus Abschnitt 4.2 (siehe dort Bemerkung 4.15 und Satz 4.20) wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} \omega \text{ exakt} &\implies \omega \text{ geschlossen} \\ \omega \text{ geschlossen und } U \text{ sternförmig} &\implies \omega \text{ exakt} \end{aligned}$$

Die letzten beiden Beobachtungen gelten nicht nur für 1-Formen, sondern sogar allgemein für  $k$ -Formen:

**Bemerkung 4.55** Geschlossenheit ist eine notwendige Bedingung für Exaktheit. Ist nämlich  $\omega$  eine differenzierbare exakte  $k$ -Form, so gibt es eine (dann zweimal) differenzierbare  $k-1$  Form  $\varrho$  mit  $\omega = d\varrho$ . Es folgt  $d\omega = d(d\varrho) = 0$ .

**Satz 4.56 (Lemma von Poincaré)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig und  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $U$ , wobei  $k \geq 1$ . Ist  $\omega$  stetig differenzierbar und geschlossen, dann ist  $\omega$  exakt.

Der Beweis benutzt ähnliche Ideen und Vorgehensweisen wie der Beweis von Satz 4.20, auch wenn dies auf den ersten Blick vielleicht nicht offensichtlich ist. Weiter ist der Beweis sehr technisch und liefert keine wesentlichen neuen Erkenntnisse, weshalb wir in der Vorlesung auf seine Darstellung verzichten, ihn der Vollständigkeit halber aber im Kleingedruckten nachliefern wollen.

**Beweis:** Nach einer eventuellen Translation des Koordinatensystems können wir annehmen, dass  $U$  sternförmig bzgl. des Nullpunkts ist. Für  $p \in U$  gilt dann auch  $tp \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Unser Ziel ist, zu jedem  $k \geq 1$  und jeder stetigen  $k$ -Form auf  $U$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $T_k\omega$  zu definieren, so dass

$$\omega = d(T_k\omega) + T_{k+1}(d\omega) \quad (4.9)$$

gilt, wenn  $\omega$  stetig differenzierbar ist. Ist  $\omega$  zusätzlich geschlossen, so gilt wegen  $d\omega = 0$ , dass  $\omega = d(T_k\omega)$  und damit ist  $\omega$  exakt.

*Schritt 1:* Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere die Funktion

$$I_k(f) : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_0^1 t^{k-1} f(tp) \, dt.$$

Falls  $f$  stetig differenzierbar ist, so gilt mit Satz 3.33 (überlegen Sie sich wieder im Detail, warum man ihn anwenden darf):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} I_k(f)(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 t^{k-1} f(tp) \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} (t^{k-1} f(tp)) \, dt = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tp) \, dt = I_{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p) \quad (4.10)$$

Hieraus erhalten wir

$$f = I_k(f) + \sum_{j=1}^n x_j I_{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \quad (4.11)$$

denn für alle  $p = (p_1, \dots, p_n) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in U$  gilt:

$$\begin{aligned} f(p) &= t^k f(tp) \Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t^k f(tp)) \, dt = \int_0^1 k t^{k-1} f(tp) \, dt + \int_0^1 \sum_{j=1}^n t^k \frac{\partial}{\partial x_j} f(tp) x_j(p) \, dt \\ &= k I_k(f)(p) + \sum_{j=1}^n x_j(p) I_{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p), \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(tp)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(tp) \cdot \frac{\partial (tx_j)}{\partial t}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(tp) x_j(p)$$

gilt. Für eine stetige  $k$ -Form  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  setzen wir nun

$$T_k\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} I_k(f_{i_1, \dots, i_k}) x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

*Schritt 2: Nachweis der Eigenschaft (4.9).* Wegen der Linearität aller beteiligten Ausdrücke reicht es, den Spezialfall  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  zu betrachten. Dann gilt einerseits wegen

$$d(I_k(f)x_{i_\ell}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (I_k(f)x_{i_\ell}) dx_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_{i_\ell}}{\partial x_j} dx_j = dx_{i_\ell},$$



dass

$$\begin{aligned}
d(T_k \omega) &= \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (I_k(f) x_{i_\ell}) dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{\ell=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial x_j} I_k(f) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} I_k(f) dx_{i_\ell} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\stackrel{(4.10)}{=} - \sum_{\ell=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^\ell I_{k+1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + k I_k(f) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(d\omega) &= T_{k+1}(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = T_{k+1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n I_{k+1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell I_{k+1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.
\end{aligned}$$

Addition der beiden so erhaltenen Gleichungen liefert, da sich die Terme mit den Doppelsummen gegenseitig aufheben, dass

$$d(T_k \omega) + T_{k+1}(d\omega) = k I_k(f) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{j=1}^n I_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \omega,$$

wobei wir in der letzten Zeile (4.11) verwendet haben. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 4.57** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und seien  $v, w : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar.

- 1) Gilt  $\operatorname{rot}(v) = 0$ , so bedeutet dies unter der Benutzung der Schreibweise aus Bemerkung 4.48, dass die 1-Form  $\omega = v \cdot ds$  geschlossen ist, da  $d\omega = \operatorname{rot}(v) \cdot dS = 0$  gilt. Ist nun  $U$  sternförmig, so besagt das Lemma von Poincaré (wie zuvor auch Satz 4.20), dass  $\omega$  exakt ist, d.h. es gibt eine 0-Form  $\varrho$  auf  $U$  mit  $d\varrho = \omega$ . Diese hat aber die einfache Form  $\varrho = f$  für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und für diese gilt dann  $v = \operatorname{grad} f$ , d.h.  $f$  ist eine Stammfunktion von  $v$  bzw.  $-f$  ein Potential von  $v$ .
- 2) Gilt  $\operatorname{div}(w) = 0$ , so folgt analog, dass die 2-Form  $\omega = w \cdot dS$  geschlossen ist, denn es gilt  $d\omega = \operatorname{div}(w) dV = 0$ . Ist  $U$  sternförmig, so ist  $\omega$  nach dem Lemma von Poincaré auch exakt und es gibt eine 1-Form  $\varrho = v \cdot ds$  mit einem zweimal stetig differenzierbaren Vektorfeld  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass  $d\varrho = \omega$  gilt. Wegen  $d\varrho = \operatorname{rot} v \cdot dS$  folgt daraus  $w = \operatorname{rot} v$ . Wegen der formalen Analogie zu Teil 1) nennt man ein solches Vektorfeld  $v$  ein *Vektorpotential* von  $w$ . Vektorpotentiale spielen in der Elektrodynamik bei der Behandlung der sogenannten *Maxwell-Gleichungen* eine wichtige Rolle.
- 3) Die Voraussetzungen im Lemma von Poincaré lassen sich abschwächen, siehe dazu Satz 4.64 im nächsten Abschnitt.

## 4.5 Rücktransport von Differentialformen

Die Einführung von Differentialformen hatte das Ziel, geeignete Integranden für die Definition von speziellen Integralen über Untermannigfaltigkeiten bereitzustellen. Für den Fall von  $n$ -Formen ist die Definition eines Integrals sehr einfach und naheliegend.

**Definition 4.58** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  eine  $n$ -Form auf  $U$ , sowie  $A \in \mathcal{B}^n$  mit  $A \subseteq U$ . Dann heißt  $\omega$  integrierbar über  $A$ , falls  $f$  integrierbar über  $A$  ist und

$$\int_A \omega := \int_A f(x) d\lambda^n(x)$$

heißt Integral von  $\omega$  über  $A$ .

**Bemerkung 4.59** Ist mit denselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Definition 4.58  $\omega$  eine stetige  $n$ -Form und  $A$  kompakt, so ist  $\omega$  integrierbar über  $A$ . (Klar?)

Mit Definition 4.58 haben wir den Fall von  $n$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  (nämlich offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ) abgedeckt. Ist nun  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $V$ , so ist es naheliegend das Integral von  $\omega$  über einer Teilmenge  $A \subseteq M$  einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq V$  des  $\mathbb{R}^n$  mit Hilfe von Parameterdarstellungen  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  zu definieren. Um dazu die analoge Konstruktion wie in Definition 4.58 nutzen zu können, ist es notwendig, aus der  $k$ -Form auf  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine passende  $k$ -Form auf  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  zu machen. Dies geschieht mit dem sogenannten *Rücktransport von Differentialformen*, den wir im Folgenden gleich etwas allgemeiner definieren.

**Definition 4.60** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, sei  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \rightarrow V$  stetig differenzierbar und sei

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

eine  $k$ -Form auf  $V$  mit  $k \geq 1$ . Dann heißt die durch

$$\varphi^* \omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} (f_{i_1, \dots, i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

gegebene  $k$ -Form  $\varphi^* \omega$  auf  $U$  der Rücktransport von  $\omega$  bzgl.  $\varphi$ . Den Rücktransport für eine 0-Form  $\omega = f : V \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir als  $\varphi^* \omega := f \circ \varphi$ .

**Beispiel 4.61** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Definition 4.60 berechnen wir die Rücktransporte von  $\omega$  bzgl.  $\varphi$  in den Spezialfällen  $k = 1$  und  $k = m$ . Bezeichnen wir die Variablen (und kanonischen Koordinatenprojektionen) im  $\mathbb{R}^m$  zur besseren Unterscheidung mit  $t_1, \dots, t_m$ , so gilt

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j.$$

1) *Fall*  $k = 1$ : In diesem Fall gilt  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  und wir erhalten per Definition, dass

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) d\varphi_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^m g_j dt_j,$$

wobei die Koeffizientenfunktionen  $g_j$  durch

$$g_j := \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j},$$

für  $j = 1, \dots, m$  gegeben sind. Setzen wir  $f = (f_1, \dots, f_n)$  und  $g = (g_1, \dots, g_m)$ , so erhalten wir

$$g = (g_1, \dots, g_m) = (f_1 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi) \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{bmatrix} = (f \circ \varphi) \cdot D\varphi.$$

2) *Fall*  $k = m$ . Mit Satz 4.38 folgt

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_m} (f_{i_1, \dots, i_m} \circ \varphi) (d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_m}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_m} (f_{i_1, \dots, i_m} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})}{\partial(t_1, \dots, t_m)} (dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m). \end{aligned}$$

Ist noch spezieller  $k = m = n$ , so hat  $\omega$  die Form  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  und die Formel vereinfacht sich zu

$$\varphi^* \omega = ((f \circ \varphi) \det D\varphi) (dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n).$$

**Bemerkung 4.62** Sie zeigen leicht die folgenden Rechenregeln für den Rücktransport: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Definition 4.60 seien zusätzlich  $\tilde{\omega}$  eine  $k$ -Form auf  $V$ ,  $\varrho$  eine  $\ell$ -Form auf  $V$ ,  $T \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $\psi : T \rightarrow U$  stetig differenzierbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1)  $\varphi^*(\alpha\omega + \beta\tilde{\omega}) = \alpha\varphi^*(\omega) + \beta\varphi^*(\tilde{\omega})$
- 2)  $\varphi^*(\omega \wedge \varrho) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\varrho$
- 3)  $\psi^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ \psi)^*\omega$

Der Rücktransport ist also linear und verträglich mit Dachprodukt und Komposition. Der nächste Satz liefert uns auch die Verträglichkeit mit der äußeren Ableitung.

**Satz 4.63** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  zweimal differenzierbar, sowie  $\omega$  eine differenzierbare  $k$ -Form auf  $V$ . Dann gilt

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

**Beweis:** Sei zunächst  $k = 0$ . Dann gilt  $\omega = f$  für eine differenzierbare Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  und wir erhalten unter Ausnutzung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \varphi^*(df) &= \varphi^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right) d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t_j} dt_j = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*f) \end{aligned}$$

Ist dagegen  $k > 0$ , so können wir in Hinblick auf Bemerkung 4.62 o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $\omega$  die Form  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  hat. Da

$$\varphi^*(dx_i) = d(\varphi^*x_i) = d(x_i \circ \varphi) = d\varphi_i$$

wegen des bereits bewiesenen Falls  $k = 0$  gilt, erhalten wir unter Benutzung von Bemerkung 4.51 (hier geht ein, dass  $\varphi$  zweimal differenzierbar ist), dass

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= d((f \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) \\ &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} \\ &= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dx_{i_k}) \\ &= \varphi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \varphi^*(d\omega), \end{aligned}$$

wobei wir den bereits bewiesenen Fall  $k = 0$  auch für die Gleichheit  $d(f \circ \varphi) = \varphi^*(df)$  noch einmal ausgenutzt haben.  $\square$

Als direkte Anwendung erhalten wir die bereits am Ende von Abschnitt 4.5 versprochene Abschwächung der Voraussetzungen im Lemma von Poincaré.

**Satz 4.64** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $C^2$ -diffeomorph zu einer sternförmigen Menge  $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  (d.h. es gibt einen Diffeomorphismus  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ , der zweimal stetig differenzierbar mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist) und sei  $k \geq 1$ . Dann ist jede stetig differenzierbare, geschlossene  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  exakt.

**Beweis:** Sei  $\psi := \varphi^{-1}$ . Dann ist  $\psi^*\omega$  eine geschlossene  $k$ -Form auf der sternförmigen Menge  $\tilde{U}$ , denn nach Satz 4.63 gilt

$$d(\psi^*\omega) = \psi^*(d\omega) = 0.$$

Aus dem Lemma von Poincaré (Satz 4.56) folgt die Existenz einer  $(k-1)$ -Form  $\varrho$  mit  $\psi^*\omega = d\varrho$ . Erneute Anwendung von Satz 4.63 liefert

$$\omega = (\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega) = \varphi^*(d\varrho) = d(\varphi^*\varrho),$$

woraus die Exaktheit von  $\omega$  folgt.  $\square$

**Bemerkung 4.65** Satz 4.64 gilt natürlich auch für den Fall Pfaffscher Formen und verallgemeinert damit Satz 4.20, allerdings ist diese Aussage schwächer, als die in Bemerkung 4.23 getroffene. Jede Menge, die diffeomorph zu einer sternförmigen Menge ist, ist nämlich auch einfach zusammenhängend, die Umkehrung gilt jedoch nicht, da z.B. die Einheitskugel  $S^{n-1}$  für  $n \geq 3$  einfach zusammenhängend, aber nicht diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.

Weiter gilt nach Ausführungen von Stefan Born (siehe Skript Analysis III von Dirk Ferus), dass jede offene sternförmige Menge schon diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist, so dass wir in Satz 4.64 auch einfach  $\tilde{U} = \mathbb{R}^n$  hätten setzen können.

Bei der Integration von Vektorfeldern über Kurven haben wir bereits festgestellt, dass das Integral einer zwar nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt, wohl aber von der Richtung, in der die Kurve durchlaufen wird. Einen ähnlichen “Vorzeicheneffekt” finden wir auch beim Integral von  $n$ -Formen.

**Definition 4.66** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus.

- 1)  $\varphi$  heißt orientierungstreu, falls  $\det D\varphi(x) > 0$  für alle  $x \in U$  gilt;
- 2)  $\varphi$  heißt orientierungsumkehrend, falls  $\det D\varphi(x) < 0$  für alle  $x \in U$  gilt.

**Bemerkung 4.67** Sei  $\varphi$  wie in Definition 4.66 und  $U$  zusammenhängend. Da  $D\varphi(x)$  nach Bemerkung 3.1 aus Analysis II für alle  $x \in U$  invertierbar und  $\det \circ D\varphi$  stetig ist, gilt entweder  $\det D\varphi(x) > 0$  für alle  $x \in U$  oder  $\det D\varphi(x) < 0$  für alle  $x \in U$ . (Ansonsten hätte  $\det \circ D\varphi$  nach dem Zwischenwertsatz (Korollar 1.82 aus Analysis II) Nullstellen.)

**Satz 4.68** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus,  $\omega$  eine stetige  $n$ -Form auf  $V$  und  $A \subseteq U$  kompakt. Dann gilt

- 1)  $\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega$ , falls  $\varphi$  orientierungstreu ist,
- 2)  $\int_{\varphi(A)} \omega = - \int_A \varphi^* \omega$ , falls  $\varphi$  orientierungsumkehrend ist.

**Beweis:**  $\omega$  habe die Form  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Dann gilt nach Teil 2) von Beispiel 4.61, dass

$$\varphi^* \omega = ((f \circ \varphi) \det D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Da nach dem Transformationssatz

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_{\varphi(A)} f(x) d\lambda^n(x) = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| d\lambda^n(x)$$

gilt, folgt die Behauptung des Satzes aus der Gleichheit.

$$\int_A \varphi^* \omega = \int_A f(\varphi(x)) \cdot \det D\varphi(x) d\lambda^n(x). \quad \square$$

## 4.6 Integration von Differentialformen

In Hinblick auf Satz 4.68 ist damit zu rechnen, dass sich Integrale von  $k$ -Formen je nach Wahl von Parameterdarstellung der betrachteten Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  zumindest um ein Vorzeichen unterscheiden können. Dieses Vorzeichen können wir mit Hilfe einer sogenannten *Orientierung* auf  $M$  kontrollieren.

**Definition 4.69** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

- 1) Seien  $\varphi_i : T_i \rightarrow \varphi_i(T_i) \subseteq M$ ,  $i = 1, 2$  zwei Parameterdarstellungen von  $M$  und sei  $U := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2)$ . Dann heißen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gleich orientiert, falls  $V = \emptyset$  oder falls der Diffeomorphismus  $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U)$  aus Satz 3.4 orientierungstreu ist.
- 2) Ein Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$  heißt orientiert, falls je zwei Parameterdarstellungen aus  $\mathcal{A}$  gleich orientiert sind.
- 3)  $M$  heißt orientierbar, wenn es einen orientierten Atlas auf  $M$  gibt. In diesem Fall ist eine Orientierung  $\sigma$  auf  $M$  eine Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 : \Longleftrightarrow \varphi_1, \varphi_2 \text{ sind gleich orientiert für alle } \varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2 \quad (4.12)$$

auf der Menge aller orientierten Atlanten von  $M$ .

- 4) Eine orientierte Untermannigfaltigkeit  $(\widetilde{M}, \sigma)$  des  $\mathbb{R}^n$  ist eine orientierbare Untermannigfaltigkeit  $\widetilde{M}$  des  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit einer Orientierung  $\sigma$  auf  $\widetilde{M}$ .
- 5) Eine Parameterdarstellung  $\varphi$  einer orientierten Untermannigfaltigkeit  $(\widetilde{M}, \sigma)$  heißt positiv orientiert bzgl.  $\sigma$ , falls es einen Atlas  $\mathcal{A} \in \sigma$  gibt mit  $\varphi \in \mathcal{A}$ .

Im Folgenden schreiben wir meist nur  $M$  statt  $(M, \sigma)$  für eine orientierte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 4.70** Aus Zeitgründen schenken wir uns an dieser Stelle die genauen Details und Nachweise und machen uns nur anhand der Anschauung klar, dass die Relation in (4.12) tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Wenn es eine Orientierung  $\sigma$  auf einer Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  gibt (d.h. wenn es mindestens einen orientierten Atlas gibt), dann gibt es auch eine zweite “*entgegengesetzte*” Orientierung, die wir mit  $-\sigma$  bezeichnen. Für alle Atlanten  $\mathcal{A}_1 \in \sigma$  und  $\mathcal{A}_2 \in -\sigma$  und alle Parameterdarstellungen  $\varphi_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $\varphi_2 \in \mathcal{A}_2$  gilt dann (wenn sich deren Bilder überschneiden), dass der Diffeomorphismus  $\tau$  aus Satz 3.4 orientierungsumkehrend ist. Wir nennen eine Parameterdarstellung dann *negativ orientiert* bzgl.  $\sigma$ , wenn sie positiv orientiert bzgl.  $-\sigma$  ist.

**Beispiel 4.71** 1) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $\mathcal{A} = \{Id_U\}$  ein orientierter Atlas auf  $U$  und damit ist  $U$  orientierbar. Die dadurch gegebene Orientierung nennen wir die *kanonische Orientierung* auf  $U$ .

- 2) Die Einheitssphäre  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist orientierbar, denn der Atlas  $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  mit

$$\begin{aligned}\varphi_1 : ]-\pi, \pi[ &\rightarrow S^1 \setminus \{(-1, 0)\}, & t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \\ \varphi_2 : ]0, 2\pi[ &\rightarrow S^1 \setminus \{(1, 0)\}, & t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ist ein orientierter Atlas, da für  $\tau : ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \rightarrow ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  mit

$$\tau : t \mapsto \begin{cases} t + 2\pi & \text{für } t \in ]-\pi, 0[ \\ t & \text{für } t \in ]0, \pi[ \end{cases}$$

gilt  $\varphi_2 \circ \tau = \varphi_1$  auf  $]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ , d.h.  $\tau$  ist der entsprechende Diffeomorphismus aus Satz 3.4. Offenbar gilt  $\det D\tau(t) = 1 > 0$  für alle  $t \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ .

- 3) Es gibt Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ , die nicht orientierbar sind, wie z.B. das berühmte *Möbiusband* (Übung).

Nach dieser kleinen Exkursion, bei der Sie hoffentlich nicht die Orientierung verloren haben, sind wir dazu bereit, das Integral für  $k$ -Formen zu definieren. Wir verzichten dabei der Einfachheit halber auf die größtmögliche Allgemeinheit und beschränken uns auf kompakte Mengen und stetige Differentialformen, damit wir uns keine Sorgen über die Integrierbarkeit der zu Grunde liegenden Koeffizientenfunktionen machen zu müssen.

**Definition 4.72** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  eine stetige  $k$ -Form auf  $U$ ,  $M \subseteq U$  eine orientierbare  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit Orientierung  $\sigma$  sowie  $A \subseteq M$  kompakt.

- 1) Wenn es eine bzgl.  $\sigma$  positiv orientierte Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  gibt, so dass  $A \subseteq \varphi(T)$ , so heißt

$$\int_{(A, \sigma)} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega$$

das Integral von  $\omega$  über  $A$  bzgl.  $\sigma$ .

- 2) Hat  $M$  einen endlichen, positiv orientierten Atlas  $(\varphi_j)_{j=1, \dots, m}$  und ist  $(\alpha_j)_{j=1, \dots, m}$  eine dem Atlas untergeordnete lokal integrierbare Zerlegung der Eins, so heißt

$$\int_{(A, \sigma)} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \varphi_j^* \omega$$

mit  $A_j := A \cap \text{supp}(\alpha_j)$  das Integral von  $\omega$  über  $A$  bzgl.  $\sigma$ .

Wenn klar ist, welche Orientierung auf  $M$  gemeint ist, so schreiben wir auch kurz

$$\int_A \omega := \int_{(A,\sigma)} \omega$$

**Bemerkung 4.73** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 4.72 gilt:

- 1) Das Integral von  $\omega$  ist wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Wahl der Parameterdarstellungen oder der Zerlegung der Eins ab. Ist nämlich  $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \subseteq M$  eine weitere bzgl.  $\sigma$  positiv orientierte Parameterdarstellung mit  $A \subseteq \tilde{\varphi}(\tilde{T})$  (dabei können wir o.B.d.A.  $\varphi(T) = \tilde{\varphi}(\tilde{T})$  annehmen), dann ist der Diffeomorphismus  $\tau := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : T \rightarrow \tilde{T}$  orientierungstreu und mit Satz 4.68 folgt

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} (\tilde{\varphi} \circ \tau)^* \omega = \int_{\tau^{-1}(\tilde{\varphi}^{-1}(A))} \tau^* (\tilde{\varphi}^* \omega) = \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} \tilde{\varphi}^* \omega.$$

Die Unabhängigkeit des Integrals von  $\omega$  von der gewählten Zerlegung der Eins folgt analog zum Nachweis in Bemerkung 3.20.

- 2) Für das Integral von  $\omega$  bzgl. der entgegengesetzten Orientierung erhalten wir:

$$\int_{(A,-\sigma)} \omega = - \int_{(A,\sigma)} \omega$$

**Beispiel 4.74** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $M \subseteq U$  eine orientierbare eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  eine stetige 1-Form (also Pfaffsche Form) auf  $U$ , sowie  $\varphi : I \rightarrow \varphi(I) \subseteq M$  eine positiv orientierte Parameterdarstellung von  $M$  (d.h. insbesondere, dass  $\varphi$  eine stetig differenzierbare reguläre Kurve ist). Sei nun  $[a, b] \subseteq I$  und  $A := \varphi(I) \subseteq \varphi(I) \subseteq M$ . Dann ist  $A$  kompakt und mit Teil 1) von Beispiel 4.61 (im Fall  $m = 1$ )

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \varphi'_i dt.$$

Damit erhalten wir

$$\int_A \omega = \int_{[a,b]} \varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt.$$

Dies ist aber gerade das Integral aus Definition 4.2, d.h. unser neu definiertes Integral enthält als Spezialfall im Fall von 1-Formen das bereits im Abschnitt 4.1 definierte vektorielle Kurvenintegral.

Als nächstes wollen wir uns den Spezialfall des Integrals von  $(n-1)$ -Formen anschauen. Dazu benötigen wir ein paar Vorbereitungen.



**Definition 4.75** Eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt positiv orientiert, falls

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} > 0$$

gilt. Andernfalls heißt die Basis negativ orientiert.

**Beispiel 4.76** Die Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  ist positiv orientiert, da

$$\det \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} = \det I_n = 1$$

gilt. Für Basen  $(v_1, v_2, v_3)$  des  $\mathbb{R}^3$  nennen wir hier noch (ohne Beweis) eine schöne anschauliche Merkregel, die sogenannte *Rechte-Hand-Regel*. Ist die Basis so beschaffen, dass die Richtungen von  $v_1, v_2, v_3$  in dieser Reihenfolge “annähernd” durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger wiedergegeben werden, so ist die Basis positiv orientiert. Wird diese Rolle stattdessen von der linken Hand übernommen, so ist die Basis negativ orientiert.

**Definition 4.77** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche, d.h. eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

- 1) Ein Normaleneinheitsfeld von  $M$  ist eine stetige Abbildung  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass für alle  $a \in M$  gilt:

$$\nu(a) \in N_a(M) \quad \text{und} \quad \|\nu(a)\| = 1.$$

- 2) Ist  $\sigma$  eine Orientierung auf  $M$  und  $\nu$  ein Normaleneinheitsfeld, so heißt  $\nu$  positiv orientiert bzgl.  $\sigma$ , falls es zu jedem  $a \in M$  eine positiv orientierte Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  und ein  $t_0 \in T$  mit  $a = \varphi(t_0)$  gibt, so dass

$$\left( \nu(\varphi(t_0)), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t_0) \right)$$

eine positiv orientierte Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Bemerkung 4.78** Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Definition 4.77 gelten die folgenden Aussagen (Übung):

- 1) Die Definition der positiven Orientiertheit eines Normaleneinheitsfeldes hängt nicht von der Wahl der Parameterdarstellung ab.
- 2) Besitzt  $M$  eine Orientierung  $\sigma$ , so existiert genau ein positiv orientiertes Normaleneinheitsfeld.
- 3) Besitzt  $M$  ein Normaleneinheitsfeld  $\nu$  (dies ist nach Satz 3.28 der Fall, wenn  $M$  der glatte Rand einer kompakten Menge ist), so ist  $M$  orientierbar und es gibt genau eine Orientierung  $\sigma$  auf  $M$ , so dass  $\nu$  positiv orientiert bzgl.  $\sigma$  ist. Diese nennen wir die *durch  $\nu$  induzierte Orientierung auf  $M$* .
- 4) Ist  $M = \partial A$  der glatte Rand einer kompakten Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , so hat  $\partial A$  nach Satz 3.28 ein (stetiges) äußeres Normaleneinheitsfeld. Die dadurch induzierte Orientierung nennen wir die *kanonische Orientierung auf  $\partial A$* .
- 5) Ist  $M$  zusammenhängend,  $\sigma$  eine Orientierung auf  $M$  und  $\nu$  ein Normaleneinheitsfeld auf  $M$ , so ist entweder  $\nu$  oder  $-\nu$  positiv orientiert bzgl.  $\sigma$ .

**Beispiel 4.79** 1) Sei  $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  die Einheitssphäre mit der kanonischen Orientierung als Rand der Einheitskugel. Dann ist die Parameterdarstellung

$$\varphi : T \rightarrow \psi(T) \subseteq M, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

mit  $T = ]0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi[$  positiv orientiert, denn wegen  $\nu(x) = x$  für alle  $x \in S^2$  folgt für alle  $(\theta, \phi) \in T$ , dass

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \nu(\varphi(\theta, \phi)) & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, \phi) & \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sin \theta > 0. \end{aligned}$$

2) Seien  $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend),  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, sowie  $g : T \rightarrow I$  stetig differenzierbar. Dann ist

$$M = \{(x', x_n) \in T \times I \mid x_n = g(x')\}$$

eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und nach Bemerkung 3.32 sind

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \nu_2 = -\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} \operatorname{grad} g \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normaleneinheitsfelder auf  $M$ . Insbesondere ist  $M$  orientierbar. Sei nun  $\sigma$  die durch die (globale) Parameterdarstellung

$$\varphi : T \rightarrow \varphi(T) = M, \quad (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, g(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

gegebene Orientierung auf  $M$ . Dann gilt (Übung)

$$\det \begin{bmatrix} \nu(\varphi(t)) & \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad}(g(t))\|^2},$$

d.h.  $\varphi$  ist positiv orientiert bzgl.  $\nu_1$ , falls  $n$  ungerade ist, und positiv orientiert bzgl.  $\nu_2$ , falls  $n$  gerade ist.

Für die Formulierung des nächsten Satzes erinnern wir an die Notation

$$dS_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n, \quad i = 1, \dots, n$$

aus Teil 2) von Bemerkung 4.44.

**Satz 4.80** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dS_i$  eine stetige  $(n-1)$ -Form auf  $U$  und  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Ferner sei  $M \subseteq U$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  (also eine Hyperfläche) mit Normaleneinheitsfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  und der dadurch induzierten Orientierung  $\sigma$ . Dann gilt für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq M$ , dass

$$\int_K \omega = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $K \cap \text{supp}(f)$  in einer offenen, zusammenhängenden Menge enthalten, in der  $M$  sich als Graph einer Funktion darstellen lässt. (Andernfalls multiplizieren wir  $f$  bzw.  $\omega$  mit einer geeigneten Zerlegung der Eins und betrachten die entsprechenden Summanden einzeln. Überlegen Sie sich, dass in diese Argumentation auch das Lemma von Lebesgue eingeht.) Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass  $U = T \times I$  gilt, wobei  $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  ein Gebiet und  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist, sowie dass eine stetig differenzierbare Funktion  $g : T \rightarrow I$  existiert, so dass

$$M = \{(x', x_n) \in T \times I \mid x_n = g(x')\}$$

gilt (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten). Für das Normaleneinheitsfeld  $\nu$  gilt dann  $\nu = \eta \nu_1$  mit  $\nu_1$  wie in Beispiel 4.79 und  $\eta \in \{+1, -1\}$ . Demnach ist die Parameterdarstellung

$$\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M, \quad (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, g(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

nach Beispiel 4.79 positiv orientiert, falls  $\eta(-1)^{n-1} > 0$  und andernfalls negativ orientiert. Für die Berechnung von  $\int_K \omega$  bemerken wir zunächst, dass für  $i = 1, \dots, n-1$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \varphi^*(f_i dS_i) &= (-1)^{i-1} (f_i \circ \varphi) d\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\varphi_i} \wedge \dots \wedge d\varphi_n \\ &= (-1)^{i-1} (f_i \circ \varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \wedge dg \\ &= (-1)^{i-1} (f_i \circ \varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \wedge \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t_j} dt_j \right) \\ &= (-1)^n (f_i \circ \varphi) \frac{\partial g}{\partial t_i} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaften des Dachprodukts benutzt haben, um festzustellen, dass nur der Summand für  $i = j$  übrig bleibt und wir  $n-i-1$  Vertauschungen benötigen, um  $dt_i$  und die ausgelassene Stelle  $\widehat{dt_i}$  zu tauschen. Für  $i = n$  erhalten wir dagegen

$$\varphi^*(f_n dS_n) = (-1)^{n-1} (f_n \circ \varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi^* \omega = (-1)^{n-1} \left( - \sum_{i=1}^{n-1} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial g}{\partial t_i} + f_n \circ \varphi \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}.$$

Setzen wir

$$F := - \sum_{i=1}^{n-1} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial g}{\partial t_i} + f_n \circ \varphi,$$

so erhalten wir schließlich unter Berücksichtigung der Orientierung von  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\eta$ , dass

$$\int_K \omega = \eta(-1)^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \omega = \eta \int_{\varphi^{-1}(K)} F(t) \, d\lambda^{n-1}(t).$$

Andererseits erhalten wir mithilfe von Bemerkung 3.24 und unter Benutzung von

$$\nu = \eta\nu_1 = \eta \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}} \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{bmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned} \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x) &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t)) \right\rangle \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(t)\|^2} \, d\lambda^{n-1}(t) \\ &= \eta \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle f(\varphi(t)), \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} g(t) \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \, d\lambda^{n-1}(t) \\ &= \eta \int_{\varphi^{-1}(K)} F(t) \, d\lambda^{n-1}(t), \end{aligned}$$

woraus die Aussage des Satzes folgt.  $\square$

Aus dem Satz folgt also, dass wir das Integral auf der rechten Seite in der Formel im Satz von Gauß (siehe Satz 3.36) durch ein Integral über eine geeignete  $(n-1)$ -Form ersetzen können. Dabei erklärt sich an dieser Stelle insbesondere unsere Wahl für die Notation  $dS = (dS_1, \dots, dS_n)$ , denn so ergibt sich mit der Schreibweise  $\omega = f \cdot dS$  (die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 4.80 verwendend) die schöne und einprägsame Formel

$$\int_K f \cdot dS = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x).$$

## 4.7 Der Integralsatz von Stokes

Ähnlich wie der Satz von Gauß wird auch der Satz von Stokes einen Integrationsbereich mit einem “glatten Rand” voraussetzen, wobei wir hier allerdings von einer kompakten Untermannigfaltigkeit ausgehen wollen. Hierzu müssen wir erst einmal den Begriff des Randes der Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit präzisieren.

**Definition 4.81** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $A \subseteq M$ .

- 1) Ein Punkt  $p \in M$  heißt Randpunkt von  $A$  relativ  $M$ , falls für jede offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $p$  gilt:

$$A \cap U \neq \emptyset \neq (M \setminus A) \cap U$$

- 2)  $\partial A := \partial_M A := \{p \in M \mid p \text{ Randpunkt von } A \text{ relativ } M\}$  heißt Rand von  $A$  relativ  $M$ .

**Bemerkung 4.82** Seien  $A$  und  $M$  wie in Definition 4.81.

- 1) Offenbar gilt  $\partial_M A \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n} A$ , aber im Allgemeinen gilt keine Gleichheit. Insofern ist die Notation  $\partial A$  mit Vorsicht zu genießen und sollte nur verwendet werden, wenn klar ist, ob der Rand relativ einer (echten) Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  gemeint ist oder der klassische Rand  $\partial_{\mathbb{R}^n} A$ .
- 2) Ist die Dimension von  $M$  kleiner als  $n$ , dann gilt sogar  $A \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n} A$ . (Klar?)
- 3) Ist  $A$  kompakt, so gilt  $\partial_M A \subseteq A$ .

**Beispiel 4.83** Sei  $M = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$  und

$$A := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in M \mid x_3 \geq 0\}$$

die “nördliche Hemisphäre”. Dann ist der Rand von  $A$  relativ  $M$  gerade durch den “Äquator”  $\partial_M A = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in M \mid x_3 = 0\}$  gegeben.

**Definition 4.84** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $A \subseteq M$  kompakt. Wir sagen,  $A$  hat einen glatten Rand (relativ  $M$ ), falls es zu jedem  $a \in \partial A$  eine Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von  $M$  mit  $a \in T$  gibt, so dass für den Halbraum  $H_k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}$  gilt:

- 1)  $\varphi(H_k \cap T) = A \cap \varphi(T)$
- 2)  $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial A \cap \varphi(T)$ .

Eine Parameterdarstellung mit den Eigenschaften 1) und 2) heißt randadaptiert bzgl.  $A$ .

**Bemerkung 4.85** 1) Setzen wir  $M = \mathbb{R}^n$ , so stimmt der Begriff des glatten Randes relativ  $M$  mit dem des glatten Randes aus Definition 3.25 überein. (Als die dort verlangte Funktion  $\psi$  eignet sich die erste Komponente der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  der randadaptierten Parameterdarstellung aus Definition 4.84.)

- 2) Sind  $A$  und  $M$  wie in Definition 4.84, so existiert ein Atlas von  $M$  bestehend aus randadaptierten Parameterdarstellungen bzgl.  $A$ . (Klar? Für den Fall  $\partial A \cap \varphi(T) = \emptyset$  gilt dann natürlich auch  $\partial H_k \cap T = \emptyset$ .)

**Satz 4.86** *Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  sowie  $A \subseteq M$  kompakt mit glattem Rand. Dann ist  $\partial A$  eine kompakte  $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .*

**Beweis:** Da  $A$  kompakt ist, gilt  $\partial A \subseteq A$ . Sei nun  $a \in \partial A$ . Dann gibt es per Definition eine randadaptierte Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq M$  von  $M$  (mit  $T \subseteq \mathbb{R}^k$ ), so dass  $a \in \varphi(T)$ . Wir definieren die Abbildung

$$\beta : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial H_k, \quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \dots, t_{k-1}) \quad (4.13)$$

und setzen  $T_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap T) \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$  und  $U_0 := \partial A \cap \varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\beta$  stetig und daher  $T_0$  offen, da  $\partial H_k \cap T$  offen in  $\partial H_k$  ist, und  $U_0$  ist offen in  $\partial A$ , da  $\varphi$  ein Homöomorphismus und daher  $\varphi(T)$  offen in  $M$  ist. Definiere nun

$$\psi := \varphi \circ \beta : T_0 \rightarrow U_0 \subseteq \partial A, \quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto \varphi(0, t_1, \dots, t_{k-1}). \quad (4.14)$$

Da  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist und  $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial A \cap \varphi(T) = U_0$  gilt, folgt, dass auch  $\psi$  ein Homöomorphismus ist, denn ist  $z \in U_0$  so gibt es genau ein  $(0, t_1, \dots, t_{k-1}) \in \partial H_k \cap T$  mit  $z = \varphi(0, t_1, \dots, t_{k-1})$ , woraus wir dann  $\psi^{-1}(z) = (t_1, \dots, t_{k-1})$  erhalten. Bezeichnen wir  $t = (t_1, \dots, t_{k-1})$  und  $u = (0, t)$ , so gilt

$$\text{Rang } D\psi(t) = \text{Rang } \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(u_2, \dots, u_k)}(u) = k-1$$

für alle  $t \in T_0$ , denn  $D\psi(t)$  entspricht gerade der Matrix, die man erhält, wenn man die erste Spalte der  $(n \times k)$ -Matrix  $D\varphi(0, t)$  entfernt. (Da  $\varphi$  eine Immersion ist, hat  $D\varphi(0, t)$  den Rang  $k$ .) Damit ist  $\psi$  eine Immersion und ein Homöomorphismus, also eine Parameterdarstellung der  $(k-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit von  $\partial A$ . Die Kompaktheit von  $\partial A$  folgt sofort, da  $\partial A$  eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $A$  ist.  $\square$

**Definition 4.87** *Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 4.86 und seinem Beweis nennen wir  $\psi$  in (4.14) die durch  $\varphi$  induzierte Parameterdarstellung von  $\partial A$ .*

**Bemerkung 4.88** Ist  $M$  eine orientierte Untermannigfaltigkeit und  $A \subseteq M$  kompakt mit glattem Rand, so lässt sich zeigen (wir verzichten hier auf einen Beweis), dass es einen Atlas von  $M$  aus positiv orientierten, bzgl.  $A$  randadaptierten Parameterdarstellungen gibt. Die dadurch induzierten Parameterdarstellungen auf  $\partial A$  sind dann alle gleich orientiert, womit auf  $\partial A$  eine Orientierung gegeben wird, die sogenannte *induzierte Orientierung* auf  $\partial A$ .

**Satz 4.89 (Integralsatz von Stokes)** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $M \subseteq U$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit  $k \geq 2$ ) des  $\mathbb{R}^n$ , sowie  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form auf  $U$ . Dann gilt für jede kompakte Menge  $A \subseteq M$  mit glattem Rand, dass

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

wobei  $\partial A$  die induzierte Orientierung trägt.

**Beweis:** Wir beweisen den Satz nur für den Spezialfall, dass  $M$  einen Atlas  $\mathcal{A}$  bestehend aus positiv orientierten, bzgl.  $A$  randadaptierten Parameterdarstellungen hat, die alle zweimal differenzierbar sind. Der allgemeine Fall lässt sich durch Approximation darauf zurückführen, wir verzichten jedoch hier auf die Details.

Analog zum Beweis von Satz von Gauß zeigt man unter Anwendung des Lemmas von Lebesgue (Satz 3.35) und mit Hilfe der glatten Zerlegung der Eins aus (3.7) in Teil 4) von Beispiel 3.15, dass es ausreicht den Fall zu betrachten, so dass es eine einzelne Parameterdarstellung  $\varphi: \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T}) \subseteq M$  gibt mit

$$M \cap \text{supp}(\omega) \subseteq \varphi(\tilde{T}),$$

wobei der Träger  $\text{supp}(\omega)$  von  $\omega$  kompakt ist. Hierbei definieren wir

$$\text{supp}(\omega) = \bigcup_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \text{supp}(f_{i_1, \dots, i_{k-1}}),$$

falls  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} f_{i_1, \dots, i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$  gilt. Betrachten wir dann die rücktransportierte  $(k-1)$ -Form  $\varphi^*\omega$  in  $\tilde{T}$ , so hat auch diese einen kompakten Träger, da für jede der Koeffizientenfunktionen  $f_{i_1, \dots, i_{k-1}}$  gilt, dass  $\text{supp}(f_{i_1, \dots, i_{k-1}} \circ \varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\text{supp}(f_{i_1, \dots, i_{k-1}}))$ . Daher kann  $\varphi^*\omega$  trivial auf eine auf ganz  $\mathbb{R}^k$  definierte stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\tilde{\omega}$  fortgesetzt werden. Wegen der zweimaligen Differenzierbarkeit von  $\varphi$  gilt dann dank Satz 4.63, dass

$$\int_A d\omega = \int_{H_k \cap \tilde{T}} \varphi^*(d\omega) = \int_{H_k \cap \tilde{T}} d(\varphi^*\omega) = \int_{H_k} d\tilde{\omega},$$

wobei  $H_k$  wieder den Halbraum aus Definition 4.84 bezeichnet und wir ausgenutzt haben, dass  $\varphi$  randadaptiert bzgl.  $A$  ist. Ist andererseits  $\psi = \varphi \circ \beta$  die durch  $\varphi$  induzierte Parameterdarstellung von  $\partial A$  aus (4.14) mit  $\beta$  wie in (4.13), so gilt

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{T_0} \psi^*\omega = \int_{T_0} \beta^*\varphi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\tilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}.$$

Der Satz ist also bewiesen, wenn wir die Gleichheit

$$\int_{\partial H_k} \tilde{\omega} = \int_{H_k} d\tilde{\omega}$$

für die stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\tilde{\omega}$  zeigen können. Da  $\tilde{\omega}$  eine  $(k-1)$ -Form im  $\mathbb{R}^k$  ist, gibt es Koeffizientenfunktionen  $f_1, \dots, f_k$  mit

$$\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^k f_j dS_j = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k,$$

woraus wir

$$\beta^* \tilde{\omega} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (f_j \circ \beta) d\beta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\beta_j} \wedge \dots \wedge d\beta_k = (f_1 \circ \beta) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1}$$

erhalten, da wegen  $\beta : (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \dots, t_{k-1})$  insbesondere  $\beta_1 = 0$  gilt und daher in der obigen Summe nur der Summand für  $j = 1$  übrig bleibt. Damit folgt

$$\int_{\partial H_k} \tilde{\omega} = \int_{\beta^{-1}(\partial H_k)} \beta^* \tilde{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1}) d\lambda^{k-1}(t_1, \dots, t_{k-1}). \quad (4.15)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

Da mit  $\tilde{\omega}$  auch  $f = (f_1, \dots, f_k)$  kompakten Träger hat, gilt für jedes  $(x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$  nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I, dass

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 = f_1(0, x_2, \dots, x_k).$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_k) d\lambda^k(x) &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 d\lambda^{k-1}(x_2, \dots, x_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) d\lambda^{k-1}(x_2, \dots, x_k) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Andererseits gilt für jedes  $j = 2, \dots, k$ , dass

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) d\lambda^k(x) = \int_{]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{k-2}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) dx_j \right) d\lambda^{k-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) = 0, \quad (4.17)$$

da  $f$  einen kompakten Träger hat. Aus (4.16) und (4.17) zusammen folgt

$$\int_{H_k} d\tilde{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) d\lambda^{k-1}(x_2, \dots, x_k) = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega},$$

wobei die letzte Gleichheit durch (4.15) gegeben ist.  $\square$



**Korollar 4.90** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form in  $U$ . Dann gilt für jede orientierte, kompakte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq U$  des  $\mathbb{R}^n$ , dass

$$\int_M d\omega = 0.$$

**Beweis:** Dies folgt sofort aus dem Satz von Stokes, da  $\partial_M M = \emptyset$ .  $\square$

**Beispiel 4.91** Im Folgenden betrachten wir zwei wichtige Spezialfälle des Integralsatzes von Stokes, dessen Voraussetzungen und Bezeichnungen wir im Folgenden übernehmen.

- 1) *Fall  $k = n$ :* In diesem Fall ist schon  $U$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und wir können daher  $M = U$  setzen. Ist dann  $A \subseteq U$  ein Kompaktum mit glattem Rand, so lässt sich zeigen (Übung), dass die durch die kanonische Orientierung auf  $U$  induzierte Orientierung auf  $\partial A$  gerade so ist, dass das äußere Normaleneinheitsfeld  $\nu$  auf  $\partial A$  positiv orientiert ist. Hat nun  $\omega$  die Form

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

so folgt mit  $f = (f_1, \dots, f_n)$  nach Satz 4.80 und dem Satz von Stokes, dass

$$\int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x),$$

wobei wir für die letzte Gleichheit ausgenutzt haben, dass  $d\omega = \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  nach Beispiel 4.47 gilt. Der *Satz von Gauß* ist also ein Spezialfall von Satz 4.89.

- 2) *Fall  $k = 2$  und  $n = 3$ : Klassischer Satz von Stokes:* Hier ist also  $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Diese habe die durch ein Normaleneinheitsfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebene Orientierung. Dann definiert die dadurch induzierte Orientierung auf  $\partial A$  ein “*Tangenten-Einheitsfeld*”  $\tau : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass  $\nu$  und  $\tau$  zusammen die “*Rechte-Hand-Regel*” erfüllen: Dieses können Sie wie folgt anschaulich vorstellen: Der Rand  $\partial A$  ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , den sie sich als eine Randkurve vorstellen können. Durch das Tangenteneinheitsfeld wird dann die Richtung vorgegeben, in der diese Kurve bei der Parametrisierung durchlaufen werden soll. Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Normaleneinheitsvektors, so zeigen die übrigen Finger der rechten Hand die Umlaufrichtung der Randkurve an.

Gilt nun  $\omega = f \cdot ds = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$  mit  $f = (f_1, f_2, f_3)$ , so folgt mit Beispiel 4.48, dass  $d\omega = \operatorname{rot}(f) \cdot dS$ . Mit dem Satz von Stokes erhalten wir dann

$$\int_{\partial A} f \cdot ds = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A \operatorname{rot}(f) \cdot dS = \int_A \langle \operatorname{rot}(f), \nu \rangle dS,$$

wobei wir im letzten Schritt wieder Satz 4.80 benutzt haben. Dies ist der Satz von Stokes in seiner klassischen Form, wie er auch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften gelehrt wird.



# Kapitel 5

## Grundlagen der komplexen Analysis

In Kapitel 6 der Analysis I haben wir schon erwähnt, dass sich die Definition der Differenzierbarkeit von reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen direkt auf den Fall komplexer Zahlen übertragen lässt und haben dies insbesondere dafür benutzt, um so ganz einfach die Differenzierbarkeit der Sinus- und Cosinusfunktion aus der Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion zu folgern. Interessanterweise ist die Eigenschaft der Differenzierbarkeit komplexer Funktionen eine sehr starke Eigenschaft, die sehr viele Folgerungen mit sich bringt. Die Grundlagen der sich daraus ergebenden Theorie wollen wir am Ende des Zyklus *Analysis I-III* einmal kurz vorstellen und unter anderem den in Analysis I versprochenen Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra* (Satz 5.43 in Analysis I) nachliefern.

### 5.1 Holomorphe Funktionen

In Analysis I hatten wir Differenzierbarkeit für komplexe Funktionen nur dann betrachtet, wenn der Definitionsbereich eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  oder gleich ganz  $\mathbb{C}$  war, da uns der Begriff der Offenheit aus Analysis II an dieser Stelle noch nicht bekannt war. Daher holen wir die Definition nun noch einmal für den allgemeinen Fall nach:

**Definition 5.1** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

- 1) Die Funktion  $f$  heißt komplex differenzierbar in  $z_0 \in U$ , falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt  $f'(z_0)$  die Ableitung von  $f$  in  $z_0$ .

- 2) Die Funktion  $f$  heißt holomorph, falls  $f$  in allen  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar ist.

Der Grund dafür, dass wir hier nicht einfach von *Differenzierbarkeit*, sondern von *komplexer Differenzierbarkeit* und *Holomorphie* sprechen ist der, dass wir die Menge der komplexen Zahlen auch mit dem  $\mathbb{R}^2$  identifizieren können, wo uns der Differenzierbarkeitsbegriff aus Analysis II zur Verfügung steht. Interessanterweise unterscheidet sich dieser von dem Begriff aus Definition 5.1, was wir im Folgenden näher untersuchen wollen.

**Bemerkung 5.2** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

- 1) Genau wie in Satz 6.3 aus Analysis I können wir zeigen:  $f$  ist genau dann komplex differenzierbar in  $z_0 \in U$ , wenn es eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und eine Abbildung  $R : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so dass für alle  $z \in U$  gilt:

$$f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + R(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0$$

Diese lineare Abbildung  $L$  ist dann natürlich durch  $L : z \mapsto f'(z_0) \cdot z$  gegeben.

- 2) Identifizieren wir  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  und  $U$  mit einer (ebenfalls offenen) Teilmenge  $U_r$  des  $\mathbb{R}^2$ , so gibt es Funktionen  $u, v : U_r \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben dafür im Folgenden kurz  $f = u + iv$ . Ist nun  $f$  aufgefasst als die Abbildung  $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  im Sinn von Analysis II (wir werden das im Folgenden zur besseren Unterscheidung als *reelle Differenzierbarkeit* bezeichnen), so gilt

$$Df(z_0) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid L \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\}$$

$$\text{und} \quad \begin{bmatrix} Df(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}.$$

Sie ahnen vielleicht schon den entscheidenden Unterschied: Die Abbildung  $Df(z_0)$  ist aufgefasst als Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  im Allgemeinen nur  $\mathbb{R}$ -linear, aber nicht  $\mathbb{C}$ -linear.

- 3) Eine Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist offenbar genau dann  $\mathbb{C}$ -linear, wenn sie ein Vielfaches der Identität ist, d.h. wenn es  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt:

$$L(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y).$$

Fassen wir  $L$  als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf, so gilt

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

- 4) Die Abbildung  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist genau dann  $\mathbb{R}$ -linear, wenn es Koeffizienten  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit 3), so stellen wir fest, dass  $L$  wiederum aufgefasst als Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann  $\mathbb{C}$ -linear ist, wenn  $a = d$  und  $b = -c$  gilt.

Unseren Beobachtungen fassen wir im folgenden Satz zusammen:

**Satz 5.3** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $f$  ist holomorph.
- 2)  $u, v$  sind reell differenzierbar und erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Beweis:** Der Beweis folgt direkt aus Bemerkung 5.2 oder ist eine Übung.  $\square$

**Beispiel 5.4** 1) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph, denn wie wir in Analysis I gezeigt (nun ja, *angedeutet*) haben, ist  $\exp$  in allen  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar mit  $\exp'(z) = \exp(z)$ . Sind  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $z = x + iy$ , so gilt

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Setzen wir also  $u : (x, y) \rightarrow e^x \cos y$  und  $v : (x, y) \mapsto e^x \sin y$ , so gilt in der Tat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Somit erfüllen  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

- 2) Die komplexe Konjugation  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  ist nicht holomorph, denn wegen  $f(x + iy) = x - iy$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt mit  $u : (x, y) \rightarrow x$  und  $v : (x, y) \rightarrow -y$ , dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also nicht erfüllt. Es kommt sogar noch schlimmer: Tatsächlich ist  $f$  nicht nur nicht holomorph, sondern sogar in keinem einzigen  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar. (Klar? Wenn nicht: Übung!) Andererseits ist  $f$  reell differenzierbar, denn  $f$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und daher gilt  $Df(z_0) = f$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ . (Wie sieht die darstellende Matrix von  $Df(z_0)$  aus?)

**Bemerkung 5.5** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und sind  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so sind, wie wir schon in Kapitel 6 von Analysis I angedeutet haben, auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  gilt) holomorph und es gelten die Linearität der Ableitung, sowie Produkt- und Quotientenregel und für Kompositionen holomorpher Funktionen natürlich auch die Kettenregel.

Als nächstes wenden wir uns Integralen komplexer Funktionen zu. Für stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir einfach

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) dx.$$

Ist dagegen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  definiert, so betrachten wir Kurvenintegrale.

**Definition 5.6** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve (d.h. wenn man  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert). Dann heißt

$$\int_{\alpha} f(z) dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

das Integral von  $f$  entlang  $\alpha$ .

**Beispiel 5.7** Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$  und die Kurve  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto e^{it}$ , die den Einheitskreis entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft. Dann gilt

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

**Bemerkung 5.8** Das Integral aus Definition 5.6 erinnert stark an das Kurvenintegral über Vektorfelder aus Kapitel 4, auch wenn dort statt der komplexen Multiplikation das Skalarprodukt von Funktion und Ableitung der Kurve ausgewertet wurde. Daher ist es nicht verwunderlich, dass wir auch dieses Integral mit Hilfe von Pfaffschen Formen ausdrücken können. Bezeichnen wir die Koordinatenprojektionen in  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  mit  $x$  und  $y$  und betrachten wir formal die komplexe Pfaffsche Form  $dz := dx + idy$ , so gilt für eine komplexe Funktion  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen, dass

$$f dz = (u + iv)(dx + idy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy).$$

Integration der beiden Pfaffschen Formen auf der rechten Seite über eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 : [a, b] \rightarrow U$  liefert

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} (u dx - v dy) &= \int_a^b u(\alpha(t)) \alpha'_1(t) - v(\alpha(t)) \alpha'_2(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \left( \left( u(\alpha(t)) + iv(\alpha(t)) \right) \cdot \left( \alpha'_1(t) + i\alpha'_2(t) \right) \right) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \left( f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \right) dt \end{aligned}$$

und analog

$$\int_{\alpha} (v dx + u dy) = \int_a^b \operatorname{Im} \left( f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \right) dt.$$

Damit erhalten wir die nützliche Formel

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\alpha} (u dx - v dy) + i \int_{\alpha} (v dx + u dy). \quad (5.1)$$

## 5.2 Der Integralsatz von Cauchy und Anwendungen

Der Cauchysche Integralsatz ist einer der wichtigsten Sätze der komplexen Analysis. In seiner allgemeinsten Form besagt er, dass das Integral einer auf einer einfach zusammenhängenden, offenen Menge holomorphen Funktion über eine geschlossene, rektifizierbare Kurve stets gleich Null ist (vgl. Sie zu den genannten Begriffen die Bemerkungen 4.23 und 3.10). Wir formulieren den Satz an dieser Stelle jedoch mit deutlich stärkeren Voraussetzungen, damit wir ihn mit Hilfe des Satzes von Stokes beweisen können. In der Vorlesung *Komplexe Analysis* können Sie dagegen einen Beweis kennenlernen, der ohne den Umweg über Differentialformen auskommt und sich daher mit schwächeren Voraussetzungen begnügen kann.

**Satz 5.9 (Integralsatz von Cauchy)** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $K \subseteq U$  kompakt mit glattem Rand und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:*

$$\int_{\partial K} f(z) \, dz = 0.$$

**Beweis:** Wir beweisen den Satz nur für den Fall, dass  $f'$  stetig ist. (Dies ist keine wirkliche Einschränkung, da holomorphe Funktionen bereits beliebig oft differenzierbar sind, wie wir im Folgenden auch sehen werden. In der Vorlesung *Komplexen Analysis* werden Sie den Integralsatz von Cauchy dann auch ohne die Voraussetzung der Stetigkeit von  $f'$  beweisen und können diese stattdessen folgern.) Ist dann  $f = u + iv$ , so folgt mit (5.1) und dem Satz von Stokes (Satz 4.89), dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z) \, dz &= \int_{\partial K} (u \, dx - v \, dy) + i \int_{\partial K} (v \, dx + u \, dy) \\ &= \int_K (du \wedge dx - dv \wedge dy) + i \int_K (dv \wedge dx + du \wedge dy) \\ &= \int_K \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge dx - \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \wedge dy \right) \\ &\quad + i \int_K \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge dy \right) \\ &= \int_K \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy \right) + i \int_K \left( -\frac{\partial v}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial u}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Formeln (4.5) benutzt haben und der letzte Schritt daraus folgt, dass  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen.  $\square$

Beachten Sie, dass Beispiel 5.7 nicht im Widerspruch zum Integralsatz von Cauchy steht, da die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  nur auf der offenen Menge  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph ist (die Ableitung ist die Funktion  $z \mapsto -\frac{1}{z^2}$ ), die nicht die gesamte kompakte Einheitskreisscheibe enthält. Der Integralsatz von Cauchy ist in diesem Fall also nicht anwendbar.

**Bemerkung 5.10** Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $K := K(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}$ .

- 1) Die Menge  $K$  ist kompakt in  $M = \mathbb{C}$  und hat dort einen glatten Rand. Nach eventueller Translation des Koordinatensystems können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $a = 0$  gilt. Ist dann  $z_0 = Re^{i\theta} \in \partial K$  und  $U := ]-R, \infty[ \times ]\theta - \pi, \theta + \pi[$ , so ist

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (r, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} (r+R) \cos \phi \\ (r+R) \sin \phi \end{bmatrix}$$

eine bzgl. der kanonischen Orientierung positiv orientierte Parameterdarstellung von  $M$  mit  $z_0 \in \varphi(U)$ , da

$$\det D\varphi(r, \phi) = r + R > 0$$

für alle  $(r, \phi) \in U$  gilt. Ferner ist  $\varphi$  randadaptiert bzgl.  $K$ , denn offenbar gilt

$$\varphi(H_2 \cap U) = K \cap \varphi(U) \quad \text{und} \quad \varphi(\partial H_2 \cap U) = \partial K \cap \varphi(U),$$

wobei  $H_2 := ]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ . Die durch  $\varphi$  auf  $\partial K$  induzierte Parameterdarstellung ist

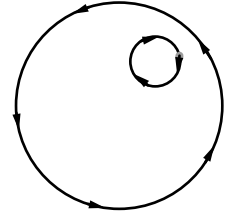
$$\psi : ]\theta - \pi, \theta + \pi[ \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \begin{bmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{bmatrix} = Re^{i\phi}.$$

Folglich wird die Randkurve  $\partial K$  entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen, welches man auch als den *mathematisch positiven Umlaufsinn*<sup>1</sup> bezeichnet.

- 2) Sei nun  $z_0 \in K^\circ$  fest und sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $K(z_0, \varepsilon) = \overline{U_\varepsilon(z_0)} \subseteq K^\circ$  gilt. Dann ist auch die Menge  $K_\varepsilon := K \setminus U_\varepsilon(z_0)$  kompakt mit glattem Rand

$$\partial K_\varepsilon = \partial K \cup \partial K(z_0, \varepsilon).$$

Die induzierte Orientierung auf  $\partial K_\varepsilon$  ist dann so, dass der “innere Rand”  $\partial K(z_0, \varepsilon)$  mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. (Übung.)



Der nächste Satz besagt, dass holomorphe Funktionen eine sehr spezielle Form haben. Dies ist eine Tatsache, die weitreichende Konsequenzen zur Folge hat.

**Satz 5.11 (Integralformel von Cauchy)** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $a \in U$  und  $R > 0$ , so dass  $K := K(a, R) \subseteq U$ . Dann gilt für alle  $z_0 \in K^\circ$ , dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

wobei  $\partial K$  die bzgl. der kanonischen Orientierung auf  $U$  induzierte Orientierung trägt.

<sup>1</sup>Die Mehrheit aller Uhren mit Zeiger auf unserer Erde dreht sich aus mathematischer Perspektive leider in die falsche Richtung.



**Beweis:** Sei  $z_0 \in K^\circ$  und seien  $\varepsilon$  und  $K_\varepsilon$  so wie in Teil 2) von Bemerkung 5.10. Dann gilt  $K_\varepsilon \subseteq U \setminus \{z_0\}$ . Wir parametrisieren den Rand von  $K_\varepsilon$  mit Hilfe der Kurven

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K, \varphi \mapsto a + Re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \alpha_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K(z_0, \varepsilon), \varphi \mapsto z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}.$$

Beachten Sie, dass nach unseren Beobachtungen in Bemerkung 5.10 die Kurve  $\alpha$  positiv orientiert, die Kurve  $\alpha_\varepsilon$  jedoch negativ orientiert bzgl. der Orientierung auf  $\partial K_\varepsilon$  ist. Da die Funktion  $z \mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$  holomorph in  $U \setminus \{z_0\}$  ist, erhalten wir mit dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_\alpha \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

wobei das Vorzeichen des letzten Integrals der negativen Orientierung der Kurve  $\alpha_\varepsilon$  geschuldet ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \int_\alpha \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} \cdot i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Da das Integral auf der linken Seite unabhängig von  $\varepsilon$  ist, können wir auf der rechten Seite den Grenzwert für  $\varepsilon \rightarrow 0$  betrachten. Dabei können wir den Satz von Lebesgue (Satz 1.80) anwenden, denn da  $f$  stetig und daher auf der kompakten Menge  $K(z_0, \varepsilon)$  durch eine Konstante  $c > 0$  beschränkt ist, ist  $c\chi_{[0,2\pi]}$  eine integrierbare Majorante. Somit erhalten wir

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi i f(z_0).$$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Die erste Konsequenz aus der Integralformel von Cauchy ist die Folgerung, dass eine holomorphe Funktion bereits analytisch ist, sich also in jedem Punkt lokal durch eine Potenzreihe darstellen lässt. Insbesondere sind holomorphe Funktionen bereits beliebig oft differenzierbar. Dies ist ein erheblicher Unterschied zur Theorie reellwertiger Funktionen.

**Korollar 5.12** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $a \in U$ . Ferner sei  $R > 0$ , so dass  $K := \overline{U_R(a)} \subseteq U$  gilt. Dann gilt für alle  $z \in U_R(a)$ , dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta.$$

**Beweis:** O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $a = 0$  gilt. Sei  $z \in U_R(a)$ . Dann gilt nach der Integralformel von Cauchy, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Ferner gilt für  $\zeta \in \mathbb{C}$  mit  $|\zeta| = R$  wegen  $|z| < R$ , dass

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Wegen  $|\frac{z}{\zeta}| < 1$  konvergiert diese Reihe für festes  $z$  nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß (Satz 8.12 in Analysis I) gleichmäßig auf  $\partial K$ . Daher folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(\zeta) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) z^k. \quad \square$$

Zum Abschluss dieses Kapitels und des gesamten Zyklus *Analysis I-III* steuern wir noch einmal auf einen kleinen Höhepunkt zu: Wir bringen nun den in Kapitel 5 der Analysis I versprochenen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (siehe Satz 5.43 in Analysis I), den wir jetzt als einfaches Korollar aus dem folgenden Satz von Liouville erhalten.

**Definition 5.13** Eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ganze Funktion.

**Satz 5.14 (von Liouville)** Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

**Beweis:** Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt. Dann gibt es ein  $c \geq 0$  mit  $|f(z)| \leq c$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Sei  $a \in \mathbb{C}$  beliebig. Da  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert ist, lässt sich  $f$  nach Korollar 5.12 auf einer beliebig großen Kreisscheibe  $K := K(a, r)$ ,  $r > 0$  um  $a$  als eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  darstellen. Da man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf (siehe Satz 8.22 in Analysis I, dieser gilt auch für komplexe Funktionen - wir hatten ihn damals jedoch nur für reellwertige Funktionen formuliert, da wir den Begriff der Holomorphie noch nicht zur Verfügung hatten), erhalten wir

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1}.$$

Einsetzen von  $a$  liefert mit der Formel für die Koeffizienten  $c_k$  aus Korollar 5.12 (wenn wir den Rand  $\partial K$  durch die Kurve  $[0, 2\pi]$ ,  $\varphi \mapsto a + re^{i\varphi}$  parametrisieren)

$$f'(a) = c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\varphi})}{(re^{i\varphi})^2} \cdot rie^{i\varphi} d\varphi.$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a + re^{i\varphi})|}{r} d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c}{r} d\varphi = \frac{c}{r}.$$

Da  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert und holomorph ist, gilt diese Abschätzung für alle  $r > 0$ , woraus  $f'(a) = 0$  folgt. Da  $a$  beliebig war und  $\mathbb{C}$  zusammenhängend ist, folgt daraus die Konstanz von  $f$ .  $\square$

**Bemerkung 5.15** Der Satz von Liouville hat eine bemerkenswerte Konsequenz für die Funktionen

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

die die analytischen Fortsetzungen von der Sinus- und Kosinusfunktion auf die komplexen Zahlen darstellen. Da beide Funktionen offenbar nicht konstant sind, folgt, dass sie unbeschränkt sein müssen! Dies sieht man auch leicht direkt ein, denn z.B. erhalten wir mit Hilfe der auch in  $\mathbb{C}$  gültigen Formel

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

wenn wir im folgenden Grenzwert  $x \in \mathbb{R}$  betrachten, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\sin(ix)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |e^{-x} - e^x| = \infty.$$

**Korollar 5.16 (Fundamentalsatz der Algebra)** Sei  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht-konstante Polynomfunktion. Dann hat  $p$  eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:** Sei  $p = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  und o.B.d.A. sei  $a_n = 1$ . (Andernfalls betrachten wir  $\frac{1}{a_n}p$ .) Dann gilt

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right|.$$

Wegen

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n-1}}{|z|} + \cdots + \frac{a_0}{|z|^n} \right) = 0$$

existiert ein  $R > 0$ , so dass

$$|p(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}$$

für alle  $z$  mit  $|z| > R$  gilt.

Angenommen,  $p$  hat keine Nullstelle, d.h. es gilt  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist die Funktion  $f = \frac{1}{p}$  holomorph und auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert, also eine ganze Funktion. Außerdem gilt

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|z|^n} \leq \frac{2}{R^n}$$

für alle  $z$  mit  $|z| > R$ . Da außerdem die Funktion  $|f|$  stetig ist und daher ihr Maximum auf der kompakten Menge  $\{z \mid |z| \leq R\}$  annimmt, folgt, dass  $f$  beschränkt ist. Dann folgt aber mit dem Satz von Liouville die Konstanz der Funktion  $f$ . Mit Kontraposition erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Nachdem uns die Lineare Algebra an so vielen Stellen beim Aufbau der Analysis weitergeholfen hat, können wir uns an dieser Stelle mit diesem schönen und kurzen Beweis eines zentralen Satzes der (Linearen) Algebra endlich revanchieren und beenden damit den Vorlesungszyklus Analysis I-III.