Aufgabe 4

(a) Bezeichne $\Delta_y(t) := \sum a_i t^i \frac{d^i}{dt^i} y(t)$. Sei f_k definiert mit

$$f_k(t) := t^k, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Bestimme $P(k)$, sodass $P(k) f_k = \Delta_{f_k}$. Dazu setze für $y := f_k$ in (CE) ein.

$$\Delta_{f_k}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \frac{d^i}{dt^i} t^k = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i k(k-1)...(k-i+1) t^{k-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i k(k-1)...(k-i+1)}_{:=P(k)} t^k \tag{1}$$

Also $\Delta_{f_k}(t) = P(k) \cdot f_k(t)$ für alle $t > 0$ (t muss positiv sein, da beispielsweise $x^{0.5}$ für negative t Werte nicht definiert ist).

$$P(k) := \sum_{i=0}^{n} a_i k(k-1)...(k-i+1).$$

Beachte, dass insbesondere für $k < n$ und $k \in \mathbb{N}$ die Ableitungen $\frac{d^i}{dt^i} t^k$, die in Δ_{f_k} auftreten, verschwinden. Für $P(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i k(k-1) \cdot ... \cdot 0 \cdot ... \cdot (k-i+1) = \sum_{i=0}^{k} a_i k!$ verschwinden ebenfalls die Summanden. Daher gilt auch für $k < n$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit (1):

$$\Delta_{f_k}(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \frac{d^i}{dt^i} t^k = \sum_{i=0}^{k} a_i k(k-1)...(k-i+1) t^k = P(k) f_k(t) \quad \text{Summe endet bereits bei } k.$$

(b) Sei $P(k) = \prod_{i=1}^{n} (k - \lambda_i)$. Also ist $P(k) f_k(t) = \Delta_{f_k}(t) = 0$ für alle $t > 0$, falls $k \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Mit dem Ansatz $y(t) = t^k$ erhält man für passende k eine allgemeine Lösung:

$$\mathcal{L} = \{\sum_{i=1}^{n} c_i x^{\lambda_i} : c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}\}.$$

(c) 1.) Löse das homogene Problem. Betrachte $t^2 y''(t) - 2y(t) = 0$. Wie in den vorherigen Aufgaben beschrieben, verfolgen wir den Ansatz: $y(t) = t^k$. Dann ergibt sich durch Einsetzen in das homogene DGL:

$$t^2 k(k-1) t^{k-2} - 2t^k = 0 \iff (k^2 - k - 2) t^k = 0 \iff (k-2)(k+1) t^k.$$

Der Lösungsraum des homogenen DGL lautet

$$\mathcal{L}_{hom} = \{c_1 t^2 + \frac{c_2}{t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

2.) Löse das inhomogene Problem. Wir haben zwei linear unabhängige Lösungen u_1, u_2 (denn die Eigenvektoren u_1, u_2 zu den verschiedenen Eigenwerten $k_1 = 2, k_2 = -1$ sind linear unabhängig, wie aus der Linearen Algebra bekannt ist):

$$u_1(t) := t^2, u_2(t) := \frac{1}{t}, u_1'(t) = 2t, u_2'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Der Ansatz für eine allgemeine Lösung u des inhomogenen Problems ist

$$u_{allg}(t) = c_1(t) u_1(t) + c_2(t) u_2(t). \tag{2}$$

Gesucht sind die Funktionen c_1 und c_2. Löse dazu

$$W(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } W(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Mithilfe der Cramerschen Regel ergibt sich

$$\det W(t) = t^2 \frac{-1}{t^2} - 2t \frac{1}{t} = -3, \quad W^{-1}(t) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ -2t & t^2 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ -2t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2+t} \\ \frac{t^2}{t+1} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$c_1'(t) = \frac{1}{3(t^2+t)}$$
$$c_2'(t) = -\frac{t^2}{3(t+1)}$$

und somit

$$c_1(t) = \frac{1}{3} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s^2+s} ds = \frac{1}{3} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} ds = \frac{1}{3} (\ln|t| - \ln|t+1|) + const.$$
$$c_2(t) = -\frac{1}{3} \int_{t_0}^{t} \frac{s^2}{s+1} ds = -\frac{1}{3} \int_{t_0}^{t} s - 1 + \frac{1}{s+1} ds = -\frac{1}{3} (0.5t^2 - t + \ln|t+1|) + const.$$

Das heißt mit (2) ergibt sich

$$u_{allg}(t) = \frac{1}{3} t^2 (\ln|t| - \ln|t+1|) - \frac{1}{3t} (0.5t^2 - t + \ln|t+1|).$$

3.) Löse das Anfangswertproblem mit $y(1) = y'(1) = 1.5$. Bestimme die Konstanten C_1, C_2 aus:

$$u(1) = c_1(1)u_1(1) + c_2(1)u_2(1) + C_1 u_1(1) + C_2 u_2(1) = \frac{3}{2}$$
$$u'(1) = c_1(1)u_1'(1) + c_2(1)u_2'(1) + C_1 u_1'(1) + C_2 u_2'(1) = \frac{3}{2}$$

Die Ableitung von u' ergibt sich glücklicherweise aus (unter Verwendung der Produktregel):

$$u'(t) = u_1'(t)c_1(t) + u_2'(t)c_2(t) + \underbrace{u_1(t)c_1'(t) + u_2(t)c_2'(t)}_{=0 \text{ wegen } (3)}.$$

Es gilt

$$c_1(1) = \frac{1}{3} \ln 0.5 \qquad c_2(1) = -\frac{1}{3}(-0.5 + \ln 2) = \frac{1}{6} - \frac{\ln 2}{3}$$
$$u_1(1) = 1 = u_2(1) \qquad u_1'(1) = 2 \qquad u_2'(1) = -1$$

Für u ergibt sich

$$u(1) = \frac{1}{3} \ln 0.5 - \frac{1}{3}(-0.5 + \ln 2) + C_1 + C_2 = \frac{3}{2} \iff C_1 + C_2 = \frac{1}{3}(\ln(0.25) + 5)$$

und für u' ergibt sich

$$u'(1) = \frac{2}{3} \ln 0.5 + \frac{1}{3}(-0.5 + \ln 2) + 2C_1 - C_2 = \frac{3}{2} \iff 2C_1 - C_2 = \frac{1}{3}(5 - \ln 0.5).$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$3C_1 = \frac{1}{3}(10 + \ln 0.5) \implies C_1 = \frac{1}{9}(10 + \ln 0.5).$$

Also

$$\frac{2}{9}(10 + \ln 0.5) - \frac{1}{3}(5 - \ln 0.5) = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \ln 0.5 + \frac{1}{3} \ln 0.5 = \frac{5}{9}(1 + \ln 0.5) = C_2$$

Damit ist die Lösung

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t) + C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t).$$