TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 28.01.-01.02.2019

13. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(Konvergenz in L^p-Räumen, Bildmaß, Satz von Radon-Nikodym)

Themen der großen Übung am 21.01.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n \in L^1(\mu)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir vergleichen verschiedene Arten der Konvergenz der Funktionenfolge.

(i) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von beschränkter L^1-Variation (d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{L^1} < \infty$ gilt), dann konvergiert f_n μ-fast überall und in $L^1(\mu)$ gegen ein $f \in L^1(\mu)$.

(ii) Sei f_n gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergent, dann gilt:

- ist $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt $g \in L^1(\mu)$ und $f_n \to g$ in $L^1(\mu)$.
- ist μ nur σ-endlich, so gilt im Allgemeinen **nicht** $g \in L^1(\mu)$.

(iii) Im Allgemeinen folgt weder punktweise Konvergenz aus der Konvergenz in $L^1(\mu)$, noch umgekehrt die L^1-Konvergenz aus der punktweisen Konvergenz.

Wir betrachten die relative Entropie eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ν bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ:

$$H(\nu|\mu) := \int \log\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \mathrm{d}\nu = \int \log\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu$$

(sofern die Dichte $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ existiert; sonst $H(\nu|\mu) = \infty$) und zeigen, dass die Entropie nichtnegativ und die Funktion $H(\cdot|\mu)$ konvex ist.

Tutoriumsvorschläge

42. Aufgabe ⋆

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann die Ableitung f' Borel messbar ist.

43. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob das Dirac Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Dichte bezüglich des Lebesgue Maßes λ hat.

44. Aufgabe

Benutzen Sie die Young'sche Ungleichung, um die Hölder'sche Ungleichung zu zeigen.

Young'sche Ungleichung:
Für alle $x, y \in [0, \infty)$ und alle $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \le \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.

45. Aufgabe ⋆

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ ein messbarer Raum, sowie $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ eine $\mathcal{F}$-$\tilde{\mathcal{F}}$-messbare Abbildung. Zeigen Sie

(i) μ ist endlich genau dann, wenn $\mu \circ f^{-1}$ endlich ist.

(ii) Ist $\mu \circ f^{-1}$ σ-endlich, so ist auch μ σ-endlich.

(iii) Die Umkehrung von (ii) ist im Allgemeinen falsch.

Hausaufgaben

48. Aufgabe (6 Punkte)

Wir betrachten ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und definieren die zugehörige Momenten erzeugende Funktion $M(t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx}\, \mu(\mathrm{d}x) \in [0, \infty]$. Sei nun $I := \{t \in \mathbb{R} \mid M(t) < \infty\}$.

(i) Zeigen Sie, dass I ein Intervall ist und M auf I konvex. Zeigen Sie mit der Hölder'schen Ungleichung, dass auch $\log M$ auf I konvex ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $M(t)$ in jedem inneren Punkt $t \in I^\circ$ beliebig häufig differenzierbar ist mit

$$M^{(k)}(t) = \int x^k \mathrm{e}^{tx}\, \mu(\mathrm{d}x), \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

49. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten auf $\Omega := \mathbb{R}$ die (aus dem Kurztest bekannte) σ-Algebra

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ ist abzählbar, oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

Die Maße ν und μ seien auf $\mathcal{F}$ definiert durch

$$\nu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie Folgendes:

(i) ν ist absolutstetig bzgl. μ, also $\nu \ll \mu$.

(ii) ν besitzt keine Dichte bezüglich μ.

(iii) Widersprechen die Aussagen (i) und (ii) dem Satz von Radon-Nikodym?

50. Aufgabe (4 Punkte)

Seien μ, ν und ξ σ-endliche Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ mit der Eigenschaft $\mu, \nu \ll \xi$ und Dichten $f_\mu := \frac{d\mu}{d\xi}$ und $f_\nu := \frac{d\nu}{d\xi}$. Beweisen Sie:

(i) $f_\mu > 0$ gilt μ-fast überall,

(ii) Ist $\mu(A) \leq \xi(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}$, so gilt $f_\mu \leq 1$ μ-fast überall

(iii) Für alle $a, b \in [0, \infty)$ ist auch $a\mu + b\nu \ll \xi$ und es gilt $\frac{d(a\mu + b\nu)}{d\xi} = af_\mu + bf_\nu$.

51. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten die Kugelschale $S_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid r \leq \|x\| \leq R\}$, wobei $0 < r < R$ gelte. Ferner sei λ_4 das vierdimensionale Lebesgue-Maß. Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale:

$$\begin{aligned} A_{r,R} &= \int e^{-\|x\|^2} \mathbb{1}_{S_{r,R}}(x)\, \lambda_4(dx), \\ B_{r,R} &= \int \log(\|x\|) \mathbb{1}_{S_{r,R}}(x)\, \lambda_4(dx), \\ C_{r,R} &= \int x_i^2 e^{-\|x\|^2} \mathbb{1}_{S_{r,R}}(x)\, \lambda_4(dx), \qquad 1 \leq i \leq 4. \end{aligned}$$

Gesamtpunktzahl: 20