TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 17.-21.12.2018

9. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(Dynkin-Systeme, σ-Algebren, Maße)

Themen der großen Übung am 10.12.

Wir zeigen, dass eine höchstens abzählbare Summe von Maßen ein Maß ist und dass jedes Maß σ-subadditiv und monoton ist.

Sei $\Omega = \mathbb{Q}$ und $\mathcal{F}_0 := d(\{(a,b] : a < b, a, b \in [-\infty, \infty]\})$ (wobei hier natürlich die Menge $(a,b] := \{q \in \mathbb{Q} \mid a < q \leq b\} \subseteq \mathbb{Q}$ gemeint ist) und sei $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Dann beweisen wir:

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(ii) Das Zählmaß μ, definiert durch $\mu(A) = \#A$, ist σ-endlich auf $\mathcal{F}$, aber nicht auf $\mathcal{F}_0$.

(iii) Es gibt ein $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$, aber für keine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_0$ ist $\mu(A \triangle A_n) \to 0$.

(iv) Ist λ ein Maß mit $\lambda = 2\mu$, dann gilt $\lambda = \mu$ auf $\mathcal{F}_0$, aber nicht auf $\mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass jede im Sinn der Definition 2.1.5 Lebesgue-messbare Menge auch im Sinn der Definition 2.3.13 λ^*-messbar ist. (Die umgekehrte Richtung folgt aus Satz 2.3.17.)

Tutoriumsvorschläge

25. Aufgabe $\star$

Es sei $n > 2$ eine gerade Zahl und Ω eine Menge mit genau n Elementen. Zeigen Sie, dass das Teilmengensystem $\mathcal{F}$ aller Teilmengen mit gerader Kardinalität ein Dynkin-System ist, aber keine σ-Algebra.

26. Aufgabe

Zeigen Sie, dass jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.

27. Aufgabe

⋆

Wir wollen uns überlegen wie die Theorie der Reihen im Rahmen der Maßtheorie gefasst werden kann. Dazu gehen wir wie folgt vor:
Sei I eine beliebige Indexmenge und $x_i \in [0, \infty)$ für $i \in I$. Dann definieren wir die Summe

$$\sum_{i \in I} x_i := \sup \left\{ \sum_{i \in F} x_i \mid F \subseteq I \text{ endlich} \right\} \in [0, \infty].$$

(i) Zeigen Sie, dass für $I = \mathbb{N}$ die Definition mit der Reihendefinition aus der Analysis I übereinstimmt, d.h. für jede Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Zahlen aus $[0, \infty]$ gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für beliebiges (möglicherweise überabzählbares) I gilt: Wenn $\sum_{i \in I} x_i < \infty$, dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq I$ mit $x_i = 0$ für alle $i \in I \setminus A$.

(iii) Seien für alle $i, j \in \mathbb{N}$ Zahlen $x_{i,j} \in [0, \infty]$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_{i,j} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} x_{i,j}.$$

28. Aufgabe

Zeigen Sie, dass jede Teilmenge $M \subseteq \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x + d = 0\}$ von $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ eine Lebesgue Nullmenge ist.

Wir werden später sehen, dass das Lebesgue-Maß invariant unter Rotationen und Verschiebungen ist, d.h. obiges Resultat bedeutet also: Jede Teilmenge N einer affinen Hyperebene

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x = p + \sum_{i=1}^{d-1} s_i x_i, s_1, \ldots, s_{d-1} \in \mathbb{R}\}$$

(wobei $p \in \mathbb{R}^d$ und die x_i linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^d$ sind), ist eine Lebesgue Nullmenge.

Ankündigung:

- Der Test am 07.01. in der großen Übung wird sich inhaltlich mit den Übungsblättern 3-8 beschäftigen. Inhalt ist also Kapitel 1-2.2 des Skriptes.
- Wolfgang König steht für mündliche Prüfungen in der Zeit vom 18.2. bis 5.3.2019 **nicht** zur Verfügung. Empfohlener Prüfungszeitraum für Analysis 2 und 3 Prüfungen: Erste Aprilwoche 2019.

Hausaufgaben

31. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$. Definiere $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty[$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine Algebra und μ ein σ-endlicher Inhalt[1] auf $\mathcal{F}$ ist.

(ii) Ist μ σ-additiv?

(iii) Ist μ stetig in $\emptyset$?

(iv) Lässt sich μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{F})$ fortsetzen?

Hinweis: Wie üblich ist $\infty + a = \infty$ für alle $a \in [0, \infty]$.

32. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\overline{\mathcal{F}} := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{F}, N \subseteq \Omega \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge}\}$$

eine σ-Algebra ist.

(ii) Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}} &= \{A \triangle N \mid A \in \mathcal{F}, N \subseteq \Omega \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge}\} \\ &= \{A \subseteq \Omega \mid \text{es gibt } B \in \mathcal{F}, \text{ so dass } A \triangle B \text{ eine } \mu\text{-Nullmenge ist}\}. \end{aligned}$$

(iii) Sei weiter $\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ definiert durch $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ für alle $A \subseteq \mathcal{F}$ und alle Nullmengen $N \subseteq \Omega$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(\Omega, \overline{\mathcal{F}})$ ist, das μ fortsetzt.

Den Maßraum $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ nennt man die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

---

[1] Ein Inhalt μ heißt σ-endlich, wenn es eine disjunkte Zerlegung $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gibt mit $\mu(A_n) < \infty$.

33. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\mathcal{B}_d$ die Borel-σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^d$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{K}_d)$, wobei $\mathcal{K}_d$ die Menge der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ist.

(ii) Eine Menge heißt eine G_δ-Menge, wenn sie ein abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_d = \sigma\left(\{K \mid K \text{ ist kompakte } G_\delta\text{-Menge}\}\right)$ (d.h. $\mathcal{B}_d$ stimmt mit der sogenannten Baire-σ-Algebra überein).

Hinweis: Vielleicht ist es hilfreich, das Dokument zur Teilung der Eins (Woche 5.-11. November auf ISIS) zu lesen.

34. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei X eine nichtleere Menge.

(i) Sei $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein Inhalt mit $\mu(A) \in \{0,1\}$ für alle $A \subseteq X$ und $\mu(X) = 1$. Wir setzen $\mathfrak{U} := \{A \subseteq X \mid \mu(A) = 1\}$. Zeigen Sie:

  (a) $\emptyset \notin \mathfrak{U}$,

  (b) $A \in \mathfrak{U}, A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathfrak{U}$,

  (c) $A, B \in \mathfrak{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{U}$,

  (d) $A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathfrak{U}$ oder $A^c \in \mathfrak{U}$.

Eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{U}$ von $\mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften (a)-(c) nennt man *Filter* auf X; gilt zusätzlich (d), so nennt man $\mathfrak{U}$ *Ultrafilter*

(ii) Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf X, so ist $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, $\mu(A) := \begin{cases} 1, & A \in \mathfrak{U}, \\ 0, & \text{falls } A^c \in \mathfrak{U}, \end{cases}$ ein Inhalt. Weiter ist μ genau dann ein Maß, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{U}$ gilt $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$.

Gesamtpunktzahl: 20