

Teil II

Analysis II

5	Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen	119
5.1	Komplexe Zahlen	119
5.2	Sinus und Cosinus	126
5.3	Polarform komplexer Zahlen	133
6	Differentiation	137
6.1	Differenzierbarkeit	138
6.2	Differentiationsregeln	145
6.3	Lokale Extrema und der Mittelwertsatz	151
6.4	Höhere Ableitungen und Konvexität	160
6.5	Die Taylor-Formel	163
7	Integration	169
7.1	Treppenfunktionen	170
7.2	Das Riemann-Integral	173
7.3	Integrierbare Funktionen	177
7.4	Integration und Differentiation	179
7.5	Integrationsregeln	183
7.6	Uneigentliche Integrale	187
8	Konvergenz von Funktionenfolgen	195
8.1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	197
8.2	Potenzreihen	203
8.3	Analytische Funktionen	211
II	Analysis II	215
1	Topologische Grundlagen	217
1.1	Normen und Metriken	218
1.2	Offen- und Abgeschlossenheit	223
1.3	Konvergenz in metrischen Räumen	231
1.4	Stetigkeit	239
1.5	Kompaktheit	243
1.6	Zusammenhang	252
1.7	Normierte Räume und lineare Abbildungen	256
2	Mehrdimensionale Differentialrechnung	263
2.1	Richtungsableitung und Differenzierbarkeit	265
2.2	Partielle Differenzierbarkeit	272
2.3	Rechenregeln der Differentiation	277
2.4	Der Schrankensatz	285
2.5	Höhere Ableitungen	289
2.6	Satz von Taylor und lokale Extrema	298

2.7	Klassische Vektoranalysis	306
3	Die großen Sätze und Anwendungen	311
3.1	Der Umkehrsatz	312
3.2	Implizite Funktionen	319
3.3	Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	324
3.4	Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen	333
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	339
4.1	Elementare Lösungsmethoden	341
4.2	Der Satz von Picard-Lindelöf	343
4.3	Lineare Differentialgleichungen	348
4.4	Lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten	356
5	Fourieranalysis	365
5.1	Fourierpolynome	366
5.2	Fourierreihen in Hilberträumen	373
5.3	Regelfunktionen	378
5.4	Punktweise Konvergenz von Fourierreihen	381
5.5	Der Satz von Fejér	385

Kapitel 1

Topologische Grundlagen

In der *Analysis I* haben wir die *Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer Veränderlichen* betrachtet. Wesentliches Ziel der Vorlesungen *Analysis II* und *Analysis III* ist die Verallgemeinerung dieser Theorie auf Funktionen mehrerer Veränderlicher. Dabei liegt in der *Analysis II* der Schwerpunkt auf der *Differentiation* und in der *Analysis III* werden wir uns dann auf die *Integrationstheorie* konzentrieren.

Der grundlegende Begriff in der Analysis I war der der *Konvergenz von Folgen*. Aufbauend darauf, konnten wir die wichtigen Begriffe *Stetigkeit*, *Differenzierbarkeit* und *Integrierbarkeit*, sowie alle weiteren damit in Zusammenhang stehenden Konzepte einführen. Die Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ aus Analysis I lautete in rein formaler Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Vergleichen wir nun diese Definition mit der Definition der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen mit Hilfe der Supremumsnorm aus Abschnitt 8.1 der Analysis I! Dazu seien $K \neq \emptyset$ eine Menge, sowie $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon,$$

wobei $\|g\|_{\sup} = \sup \{g(x) \mid x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für $g : K \rightarrow \mathbb{R}$.

Die formale Ähnlichkeit dieser beiden Begriffe ist doch sehr offensichtlich. Der einzige Unterschied (abgesehen von der Tatsache, dass wir statt reeller Zahlen nun Funktionen betrachten) liegt darin, dass wir in der zweiten Definition den Betrag durch die Supremumsnorm ersetzt haben. Erinnern wir uns dann noch an die grundlegenden Eigenschaften des Betrages (Satz 1.13 aus Analysis I) und stellen wir fest, dass auch die Supremumsnorm dieselben Eigenschaften besitzt, so motiviert das die Definition der *Norm*, die wir im nächsten Abschnitt betrachten. Die Hauptrolle in diesem Kapitel spielt aber der Begriff der *Metrik*, der etwas schwächer ist, als der der Norm. Beide Begriffe erlauben uns dann die Verallgemeinerung der *Konvergenz* auf Folgen in beliebigen Mengen.

1.1 Normen und Metriken

Wie in der Einleitung angekündigt, verallgemeinern wir zunächst einmal den Begriff *Betrag* einer reellen Zahl auf beliebige Elemente eines \mathbb{K} -Vektorraums. Hier und im Folgenden steht \mathbb{K} dabei für einen der beiden Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition 1.1 Sei \mathcal{V} ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm auf \mathcal{V} , falls für alle $v, w \in \mathcal{V}$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- i) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (absolute Homogenität).
- iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).

Ein normierter Raum $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum \mathcal{V} zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ auf \mathcal{V} .

Im Folgenden schreiben wir meist \mathcal{V} statt $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ für einen normierten Raum und setzen voraus, dass die dort definierte Norm mit $\|\cdot\|$ bezeichnet wird. Beachten Sie, dass Normen immer reelle Werte annehmen, selbst wenn der zugrundeliegende Körper der Körper der komplexen Zahlen ist.

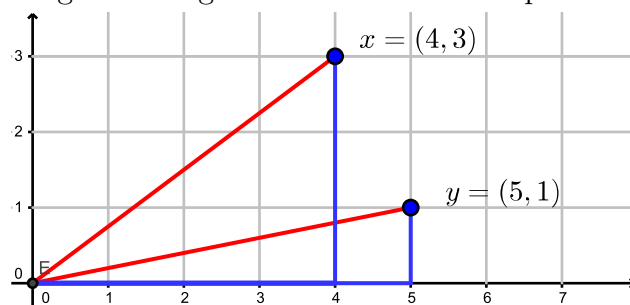
Beispiel 1.2 1) $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sind Normen auf \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} .

- 2) $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist eine Norm auf dem \mathbb{R}^n , die sogenannte *euklidische Norm*. (Dies weisen Sie in der Linearen Algebra nach.) Eine weitere Norm auf dem \mathbb{R}^n ist die sogenannte *Taxifahrer-* oder *Manhattan-Norm*, die durch

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist. Der Name dieser Norm erklärt sich leicht, wenn man die Norm von Vektoren mit ganzzahligen Einträgen betrachtet und interpretiert.

Die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ entspricht dann dem direkten Abstand zum Ursprung per “Luftlinie”, während die Norm $\|\cdot\|_1$ sich als der “Abstand” interpretieren lässt, der sich für einen Taxifahrer ergibt, der sich an das blockartige Straßennetz in Manhattan halten muss. Für die Elemente $x = (4, 3)$ und $y = (5, 1)$ des \mathbb{R}^2 erhalten wir z.B., dass



$$\|x\|_2 = 5, \quad \|x\|_1 = 7, \quad \|y\|_2 = \sqrt{26}, \quad \|y\|_1 = 6.$$

Interessanterweise gilt $\|x\|_2 < \|y\|_2$, aber $\|x\|_1 > \|y\|_1$, d.h. welcher der beiden Punkte einen “größeren Abstand” vom Ursprung hat, hängt von der betrachteten Norm ab. Allgemeiner kann man noch für $p \geq 1$ die sogenannte p -Norm auf dem \mathbb{R}^n betrachten, die für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

gegeben ist. Für die Spezialfälle $p = 2$ und $p = 1$ erhalten wir dann gerade wieder die euklidische bzw. die Manhattan-Norm, wodurch sich auch die oben gewählten Bezeichnungen dieser beiden Normen erklären. Während die Normeigenschaften i) und ii) leicht nachgewiesen können, ist der Nachweis der Dreiecksungleichung (Eigenschaft iii)) außer im Fall $p = 1$ relativ kompliziert, weshalb wir an dieser Stelle auf einen Nachweis verzichten und auf andere Veranstaltungen wie z.B. *Funktionalanalysis I* verweisen.

3) Eine weitere Norm auf dem \mathbb{R}^n erhalten wir durch

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (Übung), die sogenannte *Maximumsnorm*, die umgangssprachlich auch “Unendlich-Norm” genannt wird. Die Bezeichnung mit dem Index ∞ erklärt sich dadurch, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt (Übung):

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$$

Auch die Supremumsnorm ist eine Norm, allerdings nur unter gewissen Voraussetzungen, die wir etwas später in diesem Abschnitt präzisieren werden. Weitere Beispiele für Normen lernen Sie in der *Linearen Algebra* kennen.

So schön und hilfreich der Begriff der Norm auch ist - wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viel damit arbeiten - so einschränkend ist auch die Tatsache, dass wir in der Definition von einem Vektorraum ausgehen müssen. Tatsächlich machen die Forderungen ii) und iii) in der Definition der Norm nur dann Sinn, wenn in unserer Menge \mathcal{V} eine Addition und eine Skalarmultiplikation erklärt sind. In der Analysis I haben wir es jedoch auch häufig mit von \mathbb{R} verschiedenen Intervallen als Definitionsbereich einer Funktion zu tun gehabt. Dies sind zwar Teilmengen von Vektorräumen, aber eben selbst keine Vektorräume. Schauen wir uns aber noch einmal die Konvergenzdefinitionen aus der Einführung dieses Kapitels an, so stellen wir fest, dass wir eigentlich gar nicht die “Norm” von einzelnen Elementen benötigen, sondern nur den Begriff des *Abstands*, der für zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gerade durch $|x - y|$ gegeben ist. Dieser Begriff lässt sich problemlos auf beliebige Mengen verallgemeinern, ohne dass wir eine Vektorraumstruktur benötigen.

Definition 1.3 Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X , falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Ein metrischer Raum (X, d) ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik d auf X .

Bemerkung 1.4 Die Bedingung $d(x, y) \geq 0$ in i) hätten wir auch weglassen können, da sie aus den anderen Bedingungen folgt. Ist (X, d) nämlich ein metrischer Raum, so gilt für alle $x, y \in X$ dass

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Zeigen Sie analog, dass man auch die Bedingung $\|v\| \geq 0$ in der Definition der Norm weglassen könnte.

Beispiel 1.5 1) (\mathbb{R}, d) und (\mathbb{C}, d) jeweils mit $d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{K}$ sind metrische Räume. Dies weisen wir sogleich in allgemeinerer Form nach:

- 2) Sei \mathcal{V} ein normierter Raum. Dann wird durch $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf \mathcal{V} definiert, denn i) ist klar und außerdem gilt

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \cdot \|w - v\| = \|w - v\| = d(w, v)$$

für alle $v, w \in \mathcal{V}$, was ii) zeigt, und die Dreiecksungleichung iii) folgt aus

$$d(u, w) = \|u - w\| = \|u - v + v - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$$

für alle $u, v, w \in \mathcal{V}$. Im Folgenden betrachten wir daher normierte Räume als Spezialfälle von metrischen Räumen.

- 3) Speziell ist also der \mathbb{R}^n mit der durch die euklidische Norm induzierten Metrik d ein metrischer Raum. Wir bezeichnen d dann als die *Standardmetrik* auf dem \mathbb{R}^n .
- 4) Sei X eine Menge. Dann ist durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik d auf X gegeben. (Klar?) Diese heißt die *diskrete Metrik* auf X , da zwei voneinander verschiedene Elemente x, y bereits den “großen” Abstand Eins besitzen, sich also “diskret” im Sinne von “abgesondert” verhalten.

- 5) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist auch (Y, d_Y) mit

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

für alle $y_1, y_2 \in Y$ ein metrischer Raum. Es gilt offenbar $d_Y = d|_{Y \times Y}$. Wir nennen d_Y die *durch d induzierte Metrik* oder auch *Spurmetrik* auf Y .

Als nächstes wollen wir wie angekündigt in allgemeiner Form nachweisen, dass die Supremumsnorm tatsächlich eine Norm ist. In Kapitel 8 der Analysis I hatten wir schon angedeutet, dass die Supremumsnorm nur für beschränkte Funktionen endlich ist, dies müssen wir also voraussetzen. Tatsächlich lässt sich der Begriff der Beschränktheit in beliebigen metrischen Räumen definieren.

Definition 1.6 Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$.

- 1) $\text{diam}(A) := \sup \{d(a, \tilde{a}) \mid a, \tilde{a} \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für $A \neq \emptyset$ bzw. $\text{diam}(A) := 0$ für $A = \emptyset$ heißt der Durchmesser von A .
- 2) Die Menge A heißt beschränkt, falls $\text{diam}(A) < \infty$.

Beispiel 1.7 1) Sei \mathbb{R} mit der Standardmetrik versehen. Dann ist $]0, 1[$ beschränkt, denn offenbar gilt:

$$\text{diam}([0, 1]) = \sup \{|x - y| \mid x, y \in]0, 1[\} = 1.$$

- 2) Ist die Menge X mit der diskreten Metrik versehen, so ist jede Teilmenge von X beschränkt, denn offenbar gilt $\text{diam}(A) = 0$ oder $\text{diam}(A) = 1$ für alle $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Immer wenn wir uns bereits bekannte Begriffe auf metrische Räume erweitern, möchten wir natürlich, dass diese Begriffe für den metrischen Raum (\mathbb{R}, d) , wobei d die Standardmetrik ist, mit den aus der Analysis I bekannten Begriffen übereinstimmen. Als Generalvereinbarung nehmen wir dazu an, dass \mathbb{R} stets mit der Standardmetrik versehen ist, falls wir nicht ausdrücklich etwas anderes behaupten. Mit Hilfe des nächsten Satzes können wir dann in der Tat bestätigen, dass der für metrische Räume neu definierte Begriff der *Beschränktheit* für den Spezialfall \mathbb{R} Altbekanntes liefert.

Satz 1.8 Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ mit $A \neq \emptyset$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1) A ist beschränkt.
- 2) Es gibt $x \in X$ und $M \geq 0$, so dass $d(a, x) \leq M$ für alle $a \in A$ gilt.
- 3) Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $M_x \geq 0$, so dass $d(a, x) \leq M_x$ für alle $a \in A$ gilt.

Beweis: “1) \Rightarrow 2)”: Da $A \neq \emptyset$ gilt, existiert ein $x \in A$. Da A außerdem beschränkt ist, gilt $M := \text{diam}(A) < \infty$. Damit folgt $d(a, x) \leq M$ für alle $a \in A$.

“2) \Rightarrow 3)”: Wegen 2) gibt es ein $\tilde{x} \in X$ und $M \geq 0$ mit $d(a, \tilde{x}) \leq M$ für alle $a \in A$. Sei nun $x \in X$ beliebig und $M_x := M + d(x, \tilde{x}) \geq 0$. Dann gilt für alle $a \in A$, dass

$$d(a, x) \leq d(a, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, x) \leq M + d(x, \tilde{x}) = M_x.$$

“3) \Rightarrow 1)”: Wähle ein $x \in X$. Dann gibt es $M_x \geq 0$, so dass $d(a, x) \leq M_x$ für alle $a \in A$. Dann gilt für alle $a, \tilde{a} \in A$, dass

$$d(a, \tilde{a}) \leq d(a, x) + d(x, \tilde{a}) \leq 2M_x,$$

und damit folgt $\text{diam}(A) \leq 2M_x$. Folglich ist A beschränkt. \square

Bemerkung 1.9 Mit der Charakterisierung 3) aus Satz 1.8 erhalten wir, dass eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ genau dann beschränkt ist, wenn es ein $M \geq 0$ gibt, so dass

$$d(a, 0) = |a| \leq M$$

für alle $a \in A$ gilt. Dies ist offensichtlich äquivalent zur Beschränktheit aus Analysis I, siehe dort Definition 1.46.

Definition 1.10 Sei X eine beliebige Menge und (Y, d) ein metrischer Raum.

- 1) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt beschränkt, falls $f(X) \subseteq Y$ beschränkt ist.
- 2) $\mathcal{B}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ ist beschränkt}\}.$

Satz 1.11 Sei $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $X \neq \emptyset$ eine Menge. Dann wird durch

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup \{\|f(x)\| \mid x \in X\}$$

eine Norm $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ auf $\mathcal{B}(X, \mathcal{V})$ definiert.

Beweis: Für alle $f \in \mathcal{B}(X, \mathcal{V})$ gilt $\|f\|_{\text{sup}} < \infty$, denn da f beschränkt ist, gibt es nach Satz 1.8 ein $M \geq 0$ mit

$$\|f(x)\| = d(f(x), 0) \leq M$$

für alle $x \in X$ und es folgt $\|f\|_{\text{sup}} \leq M$. Die Normeigenschaften i) und ii) sind nun klar und iii) folgt, da für alle $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathcal{V})$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\text{sup}} &= \sup \{\|f(x) + g(x)\| \mid x \in X\} \\ &\leq \sup \{\|f(x)\| + \|g(x)\| \mid x \in X\} \\ &\leq \sup \{\|f(x)\| \mid x \in X\} + \sup \{\|g(x)\| \mid x \in X\} = \|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}}. \quad \square \end{aligned}$$

1.2 Offen- und Abgeschlossenheit

Bereits in der Analysis I spielten ϵ -Umgebungen eine wichtige Rolle, ebenso der Begriff *innerer Punkt* und die Unterscheidung von *offenen* und *abgeschlossenen* Intervallen. Diese Konzepte (wobei wir die letzten beiden losgelöst vom Begriff des Intervalls, der eine Ordnungsrelation voraussetzen würde, betrachten werden) lassen sich zusammen mit dem Begriff der *Konvergenz*, den wir im nächsten Abschnitt einführen, leicht auf beliebige metrische Räume verallgemeinern und gehören zu den elementaren Grundbegriffen der Topologie.

Definition 1.12 Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $T \subseteq X$.

- 1) Sei $\varepsilon > 0$. Dann heißt die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

eine ε -Umgebung von a (oder auch offene Kugel um a mit Radius ε).

- 2) T heißt Umgebung von a und a heißt innerer Punkt von T , falls es eine ε -Umgebung von a gibt, die noch ganz in T enthalten ist, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$, so dass

$$U_\varepsilon(a) \subseteq T.$$

- 3) T heißt offen falls jedes $x \in T$ ein innerer Punkt von T ist.

- 4) T heißt abgeschlossen, falls $X \setminus T$ (das Komplement von T in X) offen ist.

Da eine Menge X mit verschiedenen Metriken ausgestattet werden kann, erhalten wir natürlich auch für jede dieser Metriken einen neuen Offenheitsbegriff. Daher wäre es eigentlich genauer Teilmengen als *offen* bzw. *abgeschlossen bzgl. d* zu bezeichnen. Wir verzichten aber der Einfachheit halber auf diese Verschärfung, wenn es nicht unbedingt nötig ist.

Bemerkung 1.13 Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$, sowie $\delta, \varepsilon > 0$. Dann gilt:

- 1) $a \in U_\varepsilon(a)$
- 2) $\delta < \varepsilon \implies U_\delta(a) \subseteq U_\varepsilon(a)$.
- 3) Ist $U \subseteq X$ offen, so ist U eine Umgebung all ihrer Elemente. (Aus diesem Grund ist in der Topologie U die Standardbezeichnung für eine offene Menge.)

Beispiel 1.14 Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $\varepsilon > 0$.

- 1) X und \emptyset sind offenbar beide offen. Wegen $X = X \setminus \emptyset$ und $\emptyset = X \setminus X$ sind beide Mengen aber auch gleichzeitig abgeschlossen.

- 2) Sei $X = \mathbb{R}$. (Nach unserer Generalvereinbarung ist d dann als die Standardmetrik anzunehmen.) Dann gilt

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,$$

d.h. die Definition der ε -Umgebung ist kompatibel mit der bisherigen Definition aus Analysis I (siehe dort Definition 2.4). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann sind die Intervalle $]a, b[,]b, \infty[$ und $] - \infty, a[$ Beispiele für offene Mengen. Andererseits ist $[a, b]$ eine abgeschlossene Menge, denn die Menge

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] =] - \infty, a[\cup]b, \infty[$$

ist offen, da alle ihre Elemente innere Punkte sind. Die Menge $[0, 1[$ ist dagegen weder offen noch abgeschlossen. (Klar?)

- 3) ε -Umgebungen sind offen! Sei dazu $x \in U_\varepsilon(a)$ beliebig. Wir zeigen, dass x ein innerer Punkt von $U_\varepsilon(a)$ ist, indem wir eine δ -Umgebung von x konstruieren, die noch ganz in $U_\varepsilon(a)$ enthalten ist. Per Definition gilt $d(x, a) < \varepsilon$ und daher $\delta := \varepsilon - d(x, a) > 0$. Wir zeigen nun $U_\delta(x) \subseteq U_\varepsilon(a)$: Sei dazu $y \in U_\delta(x)$. Dann gilt

$$d(x, y) < \delta = \varepsilon - d(x, a)$$

und damit folgt

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varepsilon - d(x, a) = \varepsilon,$$

woraus wir wie gewünscht $y \in U_\varepsilon(a)$ erhalten.

- 4) Sei nun d die diskrete Metrik auf X und $T \subseteq X$ beliebig. Wegen $d(x, y) = 1$ für alle $y \in X \setminus \{x\}$ gilt

$$x \in \{x\} = U_1(x) \subseteq T$$

für alle $x \in T$. Folglich sind alle Punkte von T innere Punkte und T ist daher offen. Da T aber beliebig war, bedeutet dies, dass alle Teilmengen von X offen sind, insbesondere auch $X \setminus T$. Jede Teilmenge T von X ist also sowohl offen als auch abgeschlossen. Etwas eintönig, oder?

- 5) Sei $X = \mathbb{R}^2$. Wie sieht $U_1(0)$ aus, wenn wir \mathbb{R}^2 mit der Norm $\|\cdot\|_2$ (bzw. der dadurch gegebenen Metrik) betrachten? Wie sieht $U_1(0)$ für die Norm $\|\cdot\|_1$ aus?
- 6) Zum Schluss betrachten wir noch ein ausgefalleneres Beispiel. Sei $X = \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten reellen Funktionen auf $[a, b]$ zusammen mit der Supremumsnorm (bzw. der dadurch erzeugten Metrik). Dann ist die Menge

$$C([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. (In der Tat gilt $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. Dies folgt sofort aus Satz 4.31 bzw. Korollar 4.32 aus Analysis I.) Dazu zeigen wir, dass die Menge

$$T := \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) \setminus C([a, b], \mathbb{R})$$

offen ist. Sei also $f \in T$. Dann ist f beschränkt, aber nicht stetig, d.h. es gibt $x_0 \in [a, b]$, so dass f nicht stetig in x_0 ist. Dies wiederum bedeutet, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x_\delta \in [a, b]$ existiert, so dass

$$|x_\delta - x_0| < \delta \quad \text{und} \quad |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wir zeigen nun, dass $U_{\frac{1}{3}\varepsilon}(f) \subseteq T$ gilt. Sei also $g \in U_{\frac{1}{3}\varepsilon}(f)$ beliebig, d.h. es gilt $\|f - g\|_{\sup} < \frac{1}{3}\varepsilon$. Ferner gibt es zu jedem $\delta > 0$ das oben gewählte $x_\delta \in [a, b]$ mit $|x_\delta - x_0| < \delta$. Für dieses gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(x_\delta) - f(x_0)| \leq |f(x_\delta) - g(x_\delta)| + |g(x_\delta) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + |g(x_\delta) - g(x_0)|, \end{aligned}$$

woraus wir

$$|g(x_\delta) - g(x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{3} =: \tilde{\varepsilon}$$

erhalten. Folglich ist g nicht stetig in x_0 (klar?) und somit gilt $g \in T$. Damit haben wir $U_{\frac{1}{3}\varepsilon}(f) \subseteq T$ gezeigt, woraus folgt, dass jedes $f \in T$ ein innerer Punkt von T ist. Folglich ist T offen und daher $C([a, b], \mathbb{R})$ als Komplement von T abgeschlossen.

Bemerkung 1.15 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ offen. Dann gibt es zu jedem $x \in T$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq T$. Damit erhalten wir

$$T = \bigcup_{x \in T} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in T} U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq T \quad \text{und daher} \quad T = \bigcup_{x \in T} U_{\varepsilon_x}(x).$$

Eine offene Menge lässt sich also als Vereinigung von ε -Umgebungen darstellen.

Satz 1.16 Sei (X, d) ein metrischer Raum, I eine (Index-)Menge, sowie $U_i \subseteq X$, $i \in I$, offene Teilmengen von X . Dann gilt:

- 1) $\bigcup_{i \in I} U_i = \{x \in X \mid \text{es gibt } i \in I \text{ mit } x \in U_i\}$ ist offen.
- 2) Ist I endlich, dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i = \{x \in X \mid x \in U_i \text{ für alle } i \in I\}$ offen.

Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind also wieder offen.

Beweis: 1) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ beliebig. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq U_j$. Dann gilt aber auch

$$U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

d.h. x ist ein innerer Punkt von $\bigcup_{i \in I} U_i$. Da x beliebig war, ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

2) Sei $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ beliebig. Dann gilt $x \in U_i$ für alle $i \in I$ und wegen der Offenheit aller U_i gibt es zu jedem $i \in I$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i \in I\}$. Da I endlich ist, ist dieses Minimum wohldefiniert und daher $\varepsilon > 0$. Außerdem gilt

$$U_\varepsilon(x) \subseteq U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$$

für alle $i \in I$ und daher $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$. Folglich ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen. \square

Bemerkung 1.17 Die Bedingung der Endlichkeit von I ist wesentlich in Teil 2) von Satz 1.16. So ist z.B. der abzählbare Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

der offenen Intervalle $\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nicht mehr offen, sondern abgeschlossen.

Korollar 1.18 Seien (X, d) ein metrischer Raum, I eine (Index-)Menge, sowie $A_i \subseteq X$, $i \in I$, abgeschlossene Teilmengen von X . Dann gilt:

- 1) $\bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen.
- 2) Ist I endlich, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind also wieder abgeschlossen.

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt (Übung)

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Damit erhalten wir

$$\bigcap_{i \in I} A_i = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \right) \quad \text{und analog} \quad \bigcup_{i \in I} A_i = X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \right).$$

Daher folgt die Aussage sofort aus Satz 1.16. (Diese Beweisstrategie bezeichnet man als “Dualisierung”. Zum Konzept der *Dualität* verweisen wir auf die Vorlesung *Lineare Algebra*.) \square

Leider ist nicht jede Teilmenge eines metrischen Raum offen oder abgeschlossen. Unter Ausnutzung von Satz 1.16 und Korollar 1.18 lässt sich aber zu jeder Menge eine größte offene Teilmenge und kleinste abgeschlossene Obermenge definieren.

Definition 1.19 Sei (X, d) ein metrischen Raum und $T \subseteq X$.

- 1) $T^\circ := \bigcup \{U \subseteq X \mid U \subseteq T \text{ ist offen}\}$ heißt offener Kern oder Inneres von T .
- 2) $\bar{T} := \bigcap \{A \subseteq X \mid A \supseteq T \text{ ist abgeschlossen}\}$ heißt Abschluss von T .

Beispiel 1.20 Sei T eines der Intervalle $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ oder $[a, b]$, wobei $a < b$. Dann gilt offenbar

$$T^\circ =]a, b[\quad \text{und} \quad \bar{T} = [a, b].$$

Bemerkung 1.21 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$.

- 1) Nach Konstruktion gilt $T^\circ \subseteq T \subseteq \bar{T}$.
- 2) T° die größte offene Teilmenge von T , d.h. ist $U \subseteq T$ offen, so folgt $U \subseteq T^\circ$.
- 3) Analog ist \bar{T} die kleinste abgeschlossene Obermenge von T , d.h. ist $A \supseteq T$ abgeschlossen, so folgt $A \supseteq \bar{T}$.
- 4) T ist genau dann offen, wenn $T = T^\circ$ gilt.
- 5) T ist genau dann abgeschlossen, wenn $T = \bar{T}$ gilt.
- 6) Der Alternativname *Inneres* für den offenen Kern T° rührt daher, dass er mit der Menge der inneren Punkte von T übereinstimmt, d.h. es gilt

$$T^\circ = \{x \in T \mid x \text{ ist innerer Punkt von } T\}.$$

Dies scheint in Hinblick auf die Definition offener Mengen zunächst trivial, ist aber beweisbedürftig, da es hier um die inneren Punkte von T statt von T° geht:

“ \subseteq ”: Sei $x \in T^\circ$. Dann gibt es nach Definition von T° eine offene Menge $U \subseteq T$, so dass $x \in U$. Da U offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq T$. Folglich ist x ein innerer Punkt von T .

“ \supseteq ”: Ist umgekehrt $x \in T$ ein innerer Punkt von T , dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq T$ und daher gilt auch $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq T^\circ$.

Betrachten wir noch einmal die Intervalle in Beispiel 1.20, so erhalten wir als Differenzmenge von Abschluss und offenem Kern jeweils die Menge der Randpunkte $\bar{T} \setminus T^\circ = \{a, b\}$ des Intervalls. Diese Beobachtung nutzen wir, um auch diesen Begriff auf beliebige Mengen zu verallgemeinern

Definition 1.22 Sei (X, d) ein metrischen Raum und $T \subseteq X$. Dann heißt $\partial T := \bar{T} \setminus T^\circ$ der Rand von T und seine Elemente heißen Randpunkte von T .

Der folgende Satz liefert ein wichtiges Kriterium um zu entscheiden, wann ein Punkt ein Randpunkt einer Menge ist.

Satz 1.23 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$. Dann ist ∂T abgeschlossen und für alle $x \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) $x \in \partial T$, d.h. x ist ein Randpunkt von T .
- ii) Jede ε -Umgebung von x enthält sowohl Elemente aus T als auch aus $X \setminus T$, d.h. es gilt

$$U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus T) \neq \emptyset \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Beweis: Da sich $\partial T = \overline{T} \setminus T^\circ = \overline{T} \cap (X \setminus T^\circ)$ als Schnitt der abgeschlossenen Mengen \overline{T} und $X \setminus T^\circ$ darstellen lässt folgt mit Korollar 1.18 die Abgeschlossenheit von ∂T . Wir zeigen nun noch die Äquivalenz von *i*) und *ii*).

“*i*) \Rightarrow *ii*)”: Sei $x \in \partial T = \overline{T} \setminus T^\circ$. Dann gilt $x \notin T^\circ$, d.h. x ist kein innerer Punkt von T . Daher gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass $U_\varepsilon(x) \not\subseteq T$. Dies bedeutet aber

$$U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus T) \neq \emptyset$$

für alle $\varepsilon > 0$. Wir zeigen nun noch, dass für alle $\varepsilon > 0$ auch $U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset$ gilt. Angenommen dies ist nicht der Fall, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap T = \emptyset$. Dann gilt $T \subseteq X \setminus U_\varepsilon(x)$ und da $X \setminus U_\varepsilon(x)$ abgeschlossen ist, folgt

$$\overline{T} \subseteq X \setminus U_\varepsilon(x).$$

Nun gilt aber $x \in \partial T \subseteq \overline{T}$ und daher folgt $x \in X \setminus U_\varepsilon(x)$ was im Widerspruch zu $x \in U_\varepsilon(x)$ steht. Folglich gilt $U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$.

“*ii*) \Leftarrow *i*)”: Z.z. ist $x \in \partial T$, d.h. $x \in \overline{T}$ und $x \notin T^\circ$.

“ $x \notin T^\circ$ ”: Nach Voraussetzung gilt für jedes $\varepsilon > 0$, dass $U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus T) \neq \emptyset$ was gleichbedeutend mit $U_\varepsilon(x) \not\subseteq T$ ist. Dann ist x aber kein innerer Punkt von T , d.h. $x \notin T^\circ$.

“ $x \in \overline{T}$ ”: Angenommen, es gilt $x \notin \overline{T}$, d.h. $x \in X \setminus \overline{T}$. Da \overline{T} abgeschlossen ist, ist $X \setminus \overline{T}$ offen und es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus \overline{T} \subseteq X \setminus T$. Dies steht aber im Widerspruch zu $U_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Folglich gilt $x \in \overline{T}$ und damit $x \in \partial T = \overline{T} \setminus T^\circ$. \square

Korollar 1.24 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$. Dann gilt:

- 1) $\partial T = \partial(X \setminus T)$.
- 2) $T^\circ = T \setminus \partial T$
- 3) $\overline{T} = T \cup \partial T$

Beweis: Übung. \square

Beispiel 1.25 1) Sei $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt (wie sie leicht nachprüfen) für alle $x \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} \overline{U_\varepsilon(x)} &= \{y \in \mathcal{V} \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\} \\ \partial U_\varepsilon(x) &= \{y \in \mathcal{V} \mid \|x - y\| = \varepsilon\} \\ \overline{U_\varepsilon(x)}^\circ &= \{y \in \mathcal{V} \mid \|x - y\| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

- 2) Überraschenderweise gilt die in 1) festgestellte Form von $\overline{U_\varepsilon(x)}$ nicht allgemein in metrischen Räumen. Ist z.B. d die diskrete Metrik auf \mathbb{R} , so erhalten wir

$$\{x\} = U_1(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < 1\} = \overline{U_1(x)},$$

da bzgl. der diskreten Metrik alle Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Andererseits gilt

$$\{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) \leq 1\} = \mathbb{R} \neq \overline{U_1(x)}.$$

- 3) Auch die Beobachtung $\overline{U_\varepsilon(x)}^\circ = U_\varepsilon(x)$ gilt i.A. nicht für beliebige offene Teilmengen, wie das Beispiel $]1, 2[\cup]2, 3[^\circ =]1, 3[$ zeigt. Stattdessen gilt im Allgemeinen nur die Inklusion $U \subseteq \overline{U}^\circ$. (Klar? Wenn nicht, Übung!)
- 4) Wir betrachten den \mathbb{R}^3 mit der euklidischen Norm und die Menge

$$T := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Dann gilt $\overline{T} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = \partial T$ und $\overline{T}^\circ = \emptyset$. (Klar?)

- 5) Es gilt $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ enthält jede Umgebung $U_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, sowohl rationale, als auch irrationale Zahlen. Es gilt also $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit ist x nach Satz 1.23 ein Randpunkt von \mathbb{Q} .

Teilmengen wie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, d.h. Teilmengen, deren Abschluss der gesamte zu Grunde liegende metrische Raum ist, spielen häufig eine wichtige Rolle und erhalten daher einen eigenen Namen.

Definition 1.26 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $D \subseteq X$. Dann heißt D dicht in X , falls $\overline{D} = X$.

Wir hatten bereits festgestellt, dass jede Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) mit Hilfe der durch d induzierten Metrik ebenfalls zu einem metrischen Raum befördert werden kann. Der folgende Satz liefert uns eine wichtige Charakterisierung des Begriffs der Offenheit in der induzierten Metrik.

Satz 1.27 Sei (X, d) ein metrischer Raum, sowie $T \subseteq X$ und sei d_T die durch d induzierte Metrik auf T . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) $V \subseteq T$ ist offen bzgl. d_T .
- ii) Es gibt eine bzgl. d offene Menge $U \subseteq X$, so dass $V = T \cap U$ gilt.

Beweis: Zur besseren Unterscheidung versehen wir im folgenden Beweis ε -Umgebungen mit einem Hochindex, der auf die zugrunde liegende Menge (und damit Metrik) hinweist. Ist dann $x \in T$ und $\varepsilon_x > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon_x}^T(x) &= \{y \in T \mid d_T(x, y) < \varepsilon_x\} = \{y \in T \mid d(x, y) < \varepsilon_x\} = T \cap \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon_x\} \\ &= T \cap U_{\varepsilon_x}^X(x), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichheit ausgenutzt haben, dass d auf $T \times T$ mit d_T übereinstimmt.

“ $i) \Rightarrow ii)$ ”: Sei $V \subseteq T$ offen bzgl. d_T . In Hinblick auf Bemerkung 1.15 finden wir zu jedem $x \in V$ ein $\varepsilon_x > 0$, so dass

$$V = \bigcup_{x \in V} U_{\varepsilon_x}^T(x) = \bigcup_{x \in V} (T \cap U_{\varepsilon_x}^X(x)) = T \cap \left(\bigcup_{x \in V} U_{\varepsilon_x}^X(x) \right)$$

und

$$U := \bigcup_{x \in V} U_{\varepsilon_x}^X(x) \subseteq X$$

ist nach Satz 1.16 offen bzgl. d .

“ $ii) \Rightarrow i)$ ”: folgt ähnlich. (Übung.) \square

Korollar 1.28 Sei (X, d) ein metrischer Raum, sowie $T \subseteq X$ und sei d_T die durch d induzierte Metrik auf T . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) $B \subseteq T$ ist abgeschlossen bzgl. d_T .
- 2) Es gibt eine bzgl. d abgeschlossene Menge $A \subseteq X$, so dass $B = T \cap A$.

Beweis: durch Dualisierung. \square

Bemerkung 1.29 Der Begriff des *metrischen Raums* lässt sich noch weiter abschwächen: Dazu beobachten wir, dass für einen metrischen Raum X das Mengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ der offenen Teilmengen von X nach Satz 1.16 abgeschlossen gegenüber beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten ist. Die Idee ist nun, statt einer Metrik auf X das Mengensystem \mathcal{T} als Grundlage für eine Definition zu verwenden: Eine Menge X zusammen mit einer Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt dann *Topologie* auf X , falls gilt:

- i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
- ii) $U_i \in \mathcal{T}, i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
- iii) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$

Die Elemente von \mathcal{T} nennt man dann *offene Mengen*. Es folgt, dass jeder metrischer Raum ein topologischer Raum ist, wenn man \mathcal{T} als die Menge der bzgl. der Metrik in X offenen Mengen wählt. Da sich fast alle in diesem Kapitel noch folgenden Begriffe wie *Konvergenz von Folgen*, *Stetigkeit von Abbildungen*, *Kompaktheit* und *Zusammenhang* (nicht aber *Cauchy-Folgen* oder *Vollständigkeit*) auf Eigenschaften, die über offene Mengen erklärt werden können, zurückführen lassen, ist es möglich diese Begriffe auch auf topologische Räume zu übertragen. (Für weitere Details verweisen wir auf die Vorlesung *Topologie*.) Der Begriff stellt eine echte Erweiterung des Begriffs des metrischen Raums dar, da es Topologien gibt, die nicht durch eine Metrik erzeugt werden können. Einfachstes Beispiel dafür sind die reellen Zahlen \mathbb{R} zusammen mit der *indiskreten Topologie* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, die - wie Sie leicht überprüfen - die Bedingungen i)–iii) erfüllt. Überlegen Sie sich, dass es keine Metrik auf \mathbb{R} geben kann, die dazu führt, dass nur die Mengen \emptyset und \mathbb{R} offen sind. (Untersuchen Sie dazu, wie ε -Umgebungen bzgl. einer solchen Metrik aussehen müssten!) Zusammenfassend erhalten wir die folgende Abstufung:

$$X \text{ ist normierter Raum} \implies X \text{ ist metrischer Raum} \implies X \text{ ist topologischer Raum,}$$

wobei die Rückrichtung jeweils i.A. nicht gilt.

1.3 Konvergenz in metrischen Räumen

Nach unseren Vorbereitungen können wir den Konvergenzbegriff in metrischen Räumen leicht auf den Konvergenzbegriff in den reellen Zahlen zurückführen.

Definition 1.30 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

- 1) (x_n) heißt konvergent gegen $a \in X$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0.$$

In diesem Fall heißt a Limes oder Grenzwert der Folge. Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (oder $x_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$).

- 2) (x_n) heißt konvergent, falls es ein $a \in X$ gibt, so dass (x_n) konvergent gegen a ist.

Bemerkung 1.31 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

- 1) Nach Definition der Konvergenz in den reellen Zahlen (Definition 2.3 in Analysis I) konvergiert (x_n) gegen $a \in X$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Anders ausgedrückt bedeutet dies: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle (zur Erinnerung: “fast alle” bedeutet “alle bis auf endlich viele”) Folgenglieder x_n in der ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$. Da jede Umgebung von a eine ε -Umgebung von a enthält, erhalten wir schließlich:

Die Folge (x_n) konvergiert genau dann gegen a , wenn in jeder Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

- 2) Eine wichtige Eigenschaft metrischer Räume ist die sogenannte *Hausdorff-Eigenschaft*: Zu je zwei Punkten $a, b \in X$, $a \neq b$ gibt es Umgebungen $U \subseteq X$ von a und $V \subseteq X$ von b mit $U \cap V = \emptyset$. Zum Nachweis betrachten wir $\varepsilon := \frac{1}{2}d(a, b)$ und setzen

$$U := U_\varepsilon(a) \quad \text{und} \quad V := U_\varepsilon(b).$$

Dann gilt für $x \in U \cap V$, dass

$$2\varepsilon = d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

was zu einem Widerspruch führt. Folglich gilt $U \cap V = \emptyset$.

(Im Gegensatz dazu ist die Hausdorff-Eigenschaft in topologischen Räumen i.A. nicht erfüllt. Betrachten Sie z.B. die indiskrete Topologie auf \mathbb{R} .)

- 3) Eine unmittelbare Folgerung aus der Hausdorff-Eigenschaft ist die Eindeutigkeit von Grenzwerten: Dazu sei (x_n) konvergent gegen $a \in X$ und sei $b \in X$ mit $b \neq a$. Dann gibt es Umgebungen $U \subseteq X$ von a und $V \subseteq X$ von b mit $U \cap V = \emptyset$. Nach 1) liegen fast alle Folgenglieder in U und daher können höchstens endlich viele Folgenglieder in V liegen. Damit ist b aber kein Grenzwert von (x_n) .

Beispiel 1.32 1) (*Komponentenweise Konvergenz im \mathbb{R}^n .*) Wir betrachten den \mathbb{R}^n mit der durch die p -Norm $\|\cdot\|_p$ induzierten Metrik, wobei $p \in [1, \infty[$ gelte. Ferner seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j \text{ für } j = 1, \dots, n,$$

denn “ \Rightarrow ” folgt sofort aus

$$|x_{kj} - a_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_{kj} - a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - a\|_p.$$

Gilt andererseits $x_{kj} \rightarrow a_j$ für $k \rightarrow \infty$ für $j = 1, \dots, n$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ beliebig und jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ ein $N_j \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_{kj} - a_j| < \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}}$$

für alle $k \geq N_j$. Wähle nun $N_\varepsilon := \max\{N_1, \dots, N_n\}$. Dann gilt für alle $k \geq N$, dass

$$d_p(x_k, a) = \left(\sum_{j=1}^n |x_{kj} - a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

- 2) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und seien $f_n, f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Dann konvergiert (f_n) genau dann bzgl. der Supremumsnorm gegen f (bzw. genauer bzgl. der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik), wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Für die Abgeschlossenheit einer Teilmenge eines metrischen Raums gibt es ein wichtiges Kriterium mit Hilfe von Folgen, die sogenannte *Folgenabgeschlossenheit*.

Satz 1.33 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) A ist abgeschlossen.
- ii) A ist folgenabgeschlossen, d.h. für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \in X$ gilt $x \in A$.

Beweis: “i) \Rightarrow ii)”: Sei A abgeschlossen und sei (a_n) eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, dass $a_n \in U_\varepsilon(x)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \tag{1.1}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle:

- a) Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A$. Dann ist x ein innerer Punkt von A und speziell gilt $x \in A$.
- b) Es gibt kein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A$. Dann gilt $U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$ und zusammen mit (1.1) folgt $x \in \partial A$. Da A abgeschlossen ist, gilt $\partial A \subseteq \overline{A} = A$ und daher $x \in A$.

“*ii*) \Rightarrow *i*)”: Z.z. ist $A = \overline{A} = A \cup \partial A$, d.h. $\partial A \subseteq A$. Sei also $x \in \partial A$. Dann gilt $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ ein $a_n \in U_{\varepsilon_n}(x) \cap A$. Dann ist (a_n) eine Folge in A und für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$. Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ und aus *ii*) folgt $x \in A$. \square

Beispiel 1.34 1) Sei \mathbb{R}^n mit der p -Norm $\|\cdot\|_p$ versehen und seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist auch $A_1 \times \dots \times A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ bzgl. $\|\cdot\|_p$ abgeschlossen. Dies folgt sofort aus Satz 1.33 und der komponentenweisen Konvergenz im \mathbb{R}^n . Speziell sind achsenparallele Quader abgeschlossene Teilmengen des \mathbb{R}^n , denn diese haben die Form

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

mit $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$.

- 2) Die Teilmenge $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach \mathbb{R} ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. (Dies hatten wir in Teil 6) von Beispiel 1.14 bereits direkt nachgewiesen.) Ist nämlich $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C([a, b], \mathbb{R})$, die gegen $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ konvergiert, so ist die Konvergenz nach Beispiel 1.32 gleichmäßig und nach Satz 8.6 aus Analysis I ist dann auch die Grenzfunktion f stetig. Somit ist $C([a, b], \mathbb{R})$ folgenabgeschlossen und daher nach Satz 1.33 auch abgeschlossen.

Eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen war deren *Vollständigkeit*. Auch dieses Konzept lässt sich auf metrische Räume verallgemeinern.

Definition 1.35 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- 1) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ gilt, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
- 2) (X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergent ist.
- 3) Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Genauso wie in Analysis I beweisen wir das folgende Resultat, das wir daher zu einer simplen Bemerkung degradieren.

Bemerkung 1.36 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist jede in (X, d) konvergente Folge eine Cauchy-Folge. (Übung.)

Beispiel 1.37 1) Sei $p \in [1, \infty[$. Wir zeigen: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum. Sei dazu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} für $j = 1, \dots, n$, denn für $j = 1, \dots, n$ gilt

$$|x_{kj} - x_{mj}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{mi}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - x_m\|_p.$$

Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} ist $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $j = 1, \dots, n$ konvergent, also auch $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nach Beispiel 1.32.

2) Wir zeigen: $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ ist ein Banachraum. Sei dazu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$. Dann gilt auch

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (1.2)$$

für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ und alle $x \in X$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} existiert daher

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

für alle $x \in X$. Dies definiert eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, die der punktweise Limes der Folge (f_n) ist. Damit sind wir aber noch nicht fertig, denn wir müssen einerseits noch zeigen, dass f beschränkt ist, also in $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ liegt, und andererseits, dass (f_n) bzgl. $\|\cdot\|_{\sup}$ gegen f konvergiert, d.h. dass die Konvergenz gleichmäßig ist. Seien also $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt wegen (1.2) für alle $n \geq N_\varepsilon$, dass

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Stetigkeit des Absolutbetrags $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ausgenutzt haben. Aus (1.3) folgt aber

$$\|f_n - f\|_{\sup} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Insbesondere folgt nun auch $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, denn für alle $n \geq N_\varepsilon$ und alle $x \in X$ gilt

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_{\sup} + \|f_n\|_{\sup} \leq \|f_n\|_{\sup} + \varepsilon$$

und daher $\|f\|_{\sup} < \infty$.

Dieses Beispiel lässt sich verallgemeinern: Ist $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ ein beliebiger normierter Raum, so ist $(\mathcal{B}(X, \mathcal{V}), \|\cdot\|_{\sup})$ genau dann vollständig, wenn $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ vollständig ist.

(Übung, allerdings benötigen sie hierzu ein Detail aus dem später folgenden Abschnitt 1.4. Welches?)

Der nachfolgende Satz ist relativ einfach zu beweisen, weshalb dies ebenfalls Ihnen überlassen bleibt.

Satz 1.38 Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$, sowie d_A die durch d induzierte Metrik auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) (A, d_A) ist vollständig.
- ii) A ist abgeschlossen (bzgl. d).

Beweis: Übung. \square

Einer der zentralen Sätze in der Analysis II ist der *Banachsche Fixpunktsatz* und das nicht nur deshalb, weil wir ihn später dazu benutzen werden, um zwei weitere, ebenso zentrale Sätze zu beweisen. Tatsächlich findet er in vielen Gebieten der Mathematik Anwendung, wenn es um die Existenz von Fixpunkten geht. Um zu verstehen, worum es dabei geht, schauen wir uns das folgende Beispiel an.

Beispiel 1.39 Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} mit $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \cos(x_n).$$

Die Befragung eines Taschenrechners ergibt die gerundeten Werte

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.540302305 \\ x_2 &= 0.857553215 \\ x_3 &= 0.654289790 \\ x_4 &= 0.793480358 \\ x_{10} &= 0.744237354 \\ x_{20} &= 0.739184399 \\ x_{40} &= 0.739085169 \end{aligned}$$

und lässt uns vermuten, dass diese Folge konvergent ist mit dem Grenzwert

$$x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.739\dots,$$

den wir natürlich noch genauer bestimmen müssten. Falls dies tatsächlich der Grenzwert unserer Folge (x_n) ist (bisher beruht unsere Vermutung nur auf Indizien, wir haben aber noch keinen Konvergenzbeweis geführt), so gilt wegen der Stetigkeit der Cosinusfunktion

$$\cos(x^*) = \cos\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$

Einen Punkt $x^* \in X$ mit der Eigenschaft $f(x^*) = x^*$ für eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ nennt man auch einen *Fixpunkt* der Funktion f . Wie aber können wir jetzt nachweisen, dass die Cosinusfunktion tatsächlich einen Fixpunkt hat? Eine nähere Untersuchung zeigt, dass die Einschränkung der Cosinusfunktion auf das Intervall $[0, 1]$ *kontrahierend* ist.

Definition 1.40 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sowie $f : X \rightarrow Y$.

- 1) f heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, falls für alle $x, \tilde{x} \in X$ gilt, dass

$$d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \leq L \cdot d_X(x, \tilde{x}).$$

- 2) f heißt Selbstabbildung, falls $Y = X$.

- 3) f heißt kontrahierend oder Kontraktion, falls f eine Lipschitz-stetige Selbstabbildung mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ ist.

Satz 1.41 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Dann gilt:

- 1) f hat genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$.
 2) Sei $x_0 \in X$. Dann konvergiert die durch $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x^* .

Der Satz liefert also nicht nur eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Fixpunkte einer Abbildung, sondern liefert uns auch gleich eine Berechnungsmöglichkeit mit Hilfe der in 2) definierten Folge. Für den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes benötigen wir aber noch das folgende Lemma.

Lemma 1.42 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} d(x_k, x_{k+1})$$

konvergent, so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $s_n := \sum_{k=0}^n d(x_k, x_{k+1})$ die n -te Partialsumme unserer Reihe. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &= s_{n+m-1} - s_{n-1} \\ &= |s_{n+m-1} - s_{n-1}|, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt folgt, da $d(x_k, x_{k+1}) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da (s_n) konvergiert, ist (s_n) insbesondere eine Cauchy-Folge und damit auch (x_n) . \square

Beweis (von Satz 1.41). Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit in 1). Seien also x^* und \tilde{x}^* zwei Fixpunkte von f , d.h. es gilt $f(x^*) = x^*$ und $f(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*$. Dann gilt

$$d(x^*, \tilde{x}^*) = d(f(x^*), f(\tilde{x}^*)) \leq L \cdot d(x^*, \tilde{x}^*).$$

Wegen $L < 1$ folgt $d(x^*, \tilde{x}^*) = 0$, d.h. $x^* = \tilde{x}^*$.

Für die Existenz in 1) beweisen wir 2) gleich mit. Sei also $x_0 \in X$ beliebig und (x_n) rekursiv definiert durch $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq L \cdot d(x_{n-1}, x_n).$$

Daraus erhalten wir per Induktion $d(x_n, x_{n+1}) \leq L^n d(x_0, x_1)$, woraus wegen $0 \leq L < 1$ folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (L^k \cdot d(x_0, x_1)) = d(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-L}.$$

Nach dem Majorantenkriterium ist die Reihe auf der linken Seite der obigen Ungleichung also konvergent und daher ist (x_n) nach Lemma 1.42 eine Cauchy-Folge in X und daher existiert

$$x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass x^* ein Fixpunkt von f ist. Dies folgt, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} d(f(x^*), x^*) &\leq d(f(x^*), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) = d(f(x^*), f(x_n)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq L \cdot d(x^*, x_n) + d(x_{n+1}, x^*). \end{aligned}$$

Per Grenzübergang erhalten wir daraus, da die linke Seite unabhängig von n ist, dass

$$d(f(x^*), x^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L \cdot d(x^*, x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x^*) = 0.$$

Also gilt $d(f(x^*), x^*) = 0$ und daher $f(x^*) = x^*$. \square

Beispiel 1.43 Wir kommen auf die Funktion aus Beispiel 1.39 zurück. Betrachten wir die Einschränkung $\cos : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (an dieser Stelle ist wichtig, dass wir eine Selbstabbildung haben - glücklicherweise ist der Cosinus auf dem Intervall $[0, 1]$ positiv), so ist dies eine Kontraktion, denn mit dem Schrankensatz (Korollar 6.30 bzw. Bemerkung 6.31 in Analysis I) folgt, dass

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq L \cdot |x - y|,$$

wobei

$$L := \sup_{\xi \in]0,1[} |\cos'(\xi)| = \sup_{\xi \in]0,1[} |\sin(\xi)| = \sin(1) < 1.$$

Folglich hat die Cosinusfunktion einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x^* \in [0, 1]$.

Bemerkung 1.44 Auf den ersten Blick wirkt das *Fixpunktproblem*, also das Problem einen Fixpunkt zu bestimmen, sehr speziell. Ist allerdings \mathcal{V} ein Vektorraum, so lässt sich für eine Selbstabbildung $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ die Gleichung

$$g(x) = y$$

schnell in ein Fixpunktproblem übersetzen, in dem man die neue Abbildung $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ mit

$$f(x) = x - g(x) + y$$

betrachtet. Offenbar ist x^* genau dann ein Fixpunkt von f , wenn $g(x^*) = y$ gilt.

Beispiel 1.45 Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass man die Lipschitz-Stetigkeit der Kontraktion f im Banachschen Fixpunktsatz nicht durch die schwächere Bedingung

$$d(f(x), f(\tilde{x})) < d(x, \tilde{x}) \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in X \quad (1.4)$$

ersetzen kann. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto x + e^{-x}$$

auf der abgeschlossenen Menge $[0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$, die somit nach Satz 1.38 ein vollständiger metrischer Raum ist. Dann erfüllt f die Bedingung (1.4), denn zu beliebigen $x, \tilde{x} \in [0, \infty[$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und \tilde{x} , so dass

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = |f'(\xi) \cdot (x - \tilde{x})| = (1 - e^{-\xi}) \cdot |x - \tilde{x}| < |x - \tilde{x}|$$

gilt. Allerdings hat f keinen Fixpunkt, denn die Gleichung $f(x) = x$ ist äquivalent zur Gleichung $e^{-x} = 0$ die keine Lösung besitzt.

Die Kontraktionsbedingung im Banachschen Fixpunktsatz lässt sich allerdings auf eine andere Weise abschwächen. Ist f selbst keine Kontraktion, so ist schon ausreichend, dass eine Potenz von f eine Kontraktion ist:

Satz 1.46 Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine Selbstabbildung. Ferner gebe es ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass f^m eine Kontraktion ist. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

Beweis: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf die Kontraktion f^m liefert einen eindeutigen Fixpunkt $x^* \in X$ von f^m . Dieser ist auch ein Fixpunkt von f , denn aus $f^m(x^*) = x^*$ und der Kontraktionseigenschaft von f^m folgt, wenn $L < 1$ die zu f^m gehörende Lipschitz-Konstante ist, dass

$$d(f(x^*), x^*) = d(f(f^m(x^*)), f^m(x^*)) = d(f^m(f(x^*)), f^m(x^*)) < L \cdot d(f(x^*), x^*)$$

was nur möglich ist, wenn $f(x^*) = x^*$ gilt. Weiter ist x^* als Fixpunkt von f auch eindeutig, denn ist $y \in X$ ein weiterer Fixpunkt von f , so folgt $y = f(y) = \dots = f^m(y)$ und somit $y = x^*$, da x^* als Fixpunkt von f^m eindeutig bestimmt ist. \square

1.4 Stetigkeit

Einer der zentralen Begriffe der Analysis I war der der Stetigkeit einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Auch diesen können wir leicht auf beliebige metrische Räume verallgemeinern.

Definition 1.47 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sowie $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- 1) f heißt stetig in $a \in X$, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

- 2) f heißt stetig, falls f in allen $a \in X$ stetig ist.

Beispiel 1.48 1) Konstante Abbildungen sind stetig. (Klar!)

- 2) Die Identität $Id_X : X \rightarrow X$ ist stetig. **Stopp!** Hier müssen wir aufpassen und präziser sein: Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann ist $Id_X : (X, d) \rightarrow (X, d)$ stetig. Ist die Menge X allerdings als Urbild- bzw. Bildraum mit unterschiedlichen Metriken versehen, so ist nicht von vornherein klar, ob die Identität noch stetig ist. Betrachten Sie z.B. $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$, wobei d die diskrete Metrik ist. Ist $Id_{\mathbb{R}}$ dann stetig?
- 3) Sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum und $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ mit der $\|\cdot\|_p$ -Norm versehen, wobei $p \geq 1$. Jede Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ können wir dann n Komponentenfunktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ zerlegen, wobei $f_i(x) = y_i$ gilt, genau dann wenn $f(x) = (y_1, \dots, y_n)$. Wir schreiben dafür

$$f = (f_1, \dots, f_n).$$

Aus der komponentenweisen Konvergenz im \mathbb{R}^n folgt sofort:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist stetig} \iff f_i : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig für } i = 1, \dots, n$$

- 4) Sei wieder \mathbb{R}^n mit der p -Norm $\|\cdot\|_p$ versehen. Dann ist die j -te kanonische Projektion $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ stetig, denn ist $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig und (x_k) mit $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ eine Folge, die gegen a konvergiert, so gilt auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_j(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j = \pi_j(a).$$

- 5) Die Addition $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ ist stetig (bzgl. der Standardmetriken). Sei dazu $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n = (x_{n1}, x_{n2}) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni} = a_i, \quad i = 1, 2.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|\alpha(x_n) - \alpha(a)| = |(x_{n1} + x_{n2}) - (a_1 + a_2)| \leq |x_{n1} - a_1| + |x_{n2} - a_2|.$$

Die rechte Seite geht gegen 0 für $n \rightarrow \infty$, woraus die Stetigkeit von α in a folgt.

Analog zeigen Sie, dass auch die Multiplikation $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ stetig ist.

- 6) Das Integral $I : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ ist stetig bzgl. der Standardmetriken. (Im Fall $C([a, b])$ meinen wir damit natürlich die durch die Supremumsnorm induzierte Metrik.) Ist nämlich (f_n) eine Folge in $C([a, b])$, die bzgl. der Supremumsnorm gegen $f \in C([a, b])$ konvergiert, so ist diese Konvergenz gleichmäßig und nach Analysis I Satz 8.7 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I(f).$$

- 7) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$. Dann ist die Abbildung

$$d(a, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(a, x)$$

stetig. Dazu sei $x \in X$ beliebig, sowie (x_n) eine Folge in X , die gegen x konvergiert. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leq d(a, x_n) + d(x_n, x) \implies d(a, x) - d(a, x_n) \leq d(x_n, x) \\ \text{und} \quad d(a, x_n) &\leq d(a, x) + d(x, x_n) \implies d(a, x_n) - d(a, x) \leq d(x_n, x), \end{aligned}$$

woraus wir $|d(a, x) - d(a, x_n)| \leq d(x_n, x)$ erhalten. Da (x_n) gegen x konvergiert, folgt daraus, dass $d(a, x_n)$ gegen $d(a, x)$ konvergiert. Also ist $d(a, \cdot)$ stetig in x und somit stetig, da $x \in X$ beliebig war.

- 8) Als wichtigen Spezialfall von 7) erhalten wir die *Stetigkeit der Norm* im folgenden Sinn. Ist $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist $\|\cdot\| = d(0, \cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Satz 1.49 Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen, sowie $a \in X$. Ist f stetig in a und g stetig in $f(a)$, dann ist $g \circ f$ stetig in a .

Beweis: wie in Analysis I (Übung). \square

Beispiel 1.50 1) Die Division $\delta : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ ist stetig, denn es gilt

$$\delta = \mu \circ (\pi_1, \text{inv} \circ \pi_2),$$

wobei μ die Multiplikation aus Teil 5) von Beispiel 1.48, π_1, π_2 die kanonischen Projektionen aus Teil 5) von Beispiel 1.48 und $\text{inv} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ die aus Analysis I als stetig bekannte *Inversion* ist. Die Stetigkeit der Abbildung $(\pi_1, \text{inv} \circ \pi_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, \frac{1}{y})$ folgt dabei aus der komponentenweisen Stetigkeit.

- 2) Sei (X, d) ein metrischer Raum, seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in X$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und λf stetig in a . Ist außerdem $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a .

(Für die Stetigkeit von $f + g$ folgt dies aus der Darstellung $f + g = \alpha \circ (f, g)$, wobei α die Addition aus Teil 5 von Beispiel 1.48 ist. Die Stetigkeit der anderen Abbildungen folgt analog.)

- 3) Sei $\mathbb{R}^{n,n}$ mit der *Frobeniusnorm* $\|\cdot\|_F$ versehen die für $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ durch

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \quad \left(\sum_{i,j=1}^n \text{ ist eine Abkürzung für } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \right)$$

gegeben ist und genau der euklidischen Norm entspricht, wenn man den Raum $\mathbb{R}^{n,n}$ mit dem dazu isomorphen Vektorraum \mathbb{R}^{n^2} identifiziert. Dann ist die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bzgl. Frobeniusnorm und Standardmetrik, denn für jede Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt die Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

wobei S_n die *symmetrische Gruppe*, d.h. die Menge aller Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ und $\operatorname{sgn}(\sigma)$ das *Signum* der Permutation $\sigma \in S_n$ ist. (Für die Einzelheiten verweisen wir auf die Vorlesung *Lineare Algebra*.) Die Determinante ist daher eine Komposition von Additionen, Multiplikationen und kanonischen Projektionen.

- 4) Auch die Matrixmultiplikation $\mu : \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^{m,\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{n,\ell}$, $(A, B) \mapsto A \cdot B$ und die Matrixinversion $\operatorname{inv} : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$, $A \mapsto A^{-1}$ sind stetig. Die Stetigkeit von μ folgt dabei direkt aus der Definition der Matrixmultiplikation und der Nachweis der Stetigkeit von inv ist eine Übung. Nutzen Sie z.B. die Darstellung

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A),$$

wobei $\operatorname{adj}(A)$ die Adjunkte der Matrix A bezeichnet (vgl. *Lineare Algebra*).

Als nächstes wenden wir uns äquivalenten Charakterisierungen der Stetigkeit zu.

Satz 1.51 (ε/δ -Kriterium) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und sei $a \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) f ist stetig in a .
- ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

- iii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a)).$$

Beweis: Der Beweis der Äquivalenz von i) und ii) verläuft analog zum Beweis des entsprechenden Satzes Satz 4.33 in Analysis I. (Übung: Übertragen Sie diesen Beweis in die neue Notation.) Die Aussage iii) ist nur eine Umformulierung von ii). \square

Satz 1.52 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sowie $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) f ist stetig.

ii) Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. für alle $V \subseteq Y$ gilt:

$$V \text{ offen} \implies f^{-1}(V) \subseteq X \text{ offen}$$

iii) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis: “i) \Rightarrow ii)”: Sei f stetig und $V \subseteq Y$ offen. Zu zeigen ist die Offenheit von $f^{-1}(V)$ in X . Sei also $x \in f^{-1}(V)$ beliebig. Dann gilt $f(x) \in V$ und wegen der Offenheit von V gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Wegen der Stetigkeit von f folgt nach Satz 1.51 die Existenz von $\delta > 0$ mit

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)) \subseteq V.$$

Damit erhalten wir aber $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$. Da x beliebig war, folgt hieraus die Offenheit von $f^{-1}(V)$.

“ii) \Rightarrow i)”: Sei $x \in X$ beliebig. Wir zeigen die Stetigkeit von f in x . Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist $U_\varepsilon(f(x))$ offen und mit ii) folgt die Offenheit von $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$. Da die letztere Menge x enthält, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))),$$

woraus wir $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ erhalten. Dies ist aber nach Satz 1.51 äquivalent zur Stetigkeit von f in x .

“i) \Leftrightarrow iii)” folgt durch Dualisierung aus “i) \Leftrightarrow ii)”, wobei wir $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ für alle $A \subseteq Y$ ausnutzen. \square

Beispiel 1.53 1) Die *Einheitssphäre* $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ im \mathbb{R}^n ist abgeschlossen, denn S^{n-1} ist das Urbild der abgeschlossenen Teilmenge $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2$.

Diese Aussage gilt sogar noch allgemeiner: Ist $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist die Menge $\{v \in \mathcal{V} \mid \|v\| = 1\}$ abgeschlossen.

2) Die Menge der invertierbaren Matrizen $GL_n(\mathbb{R})$ ist offen in $(\mathbb{R}^{n,n}, \|\cdot\|_F)$, denn es gilt

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

d.h. $GL_n(\mathbb{R})$ ist das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Abbildung \det . Die Offenheit der Menge der invertierbaren Matrizen ist von praktischer Bedeutung. Da zu jeder invertierbaren Matrix eine offene Umgebung existiert, die noch ganz in der Menge der invertierbaren Matrizen enthalten ist, bedeutet das, dass die Eigenschaft der Invertierbarkeit einer Matrix unter hinreichend kleinen Störungen (also wenn die Einträge der Matrix hinreichend kleine “Veränderungen” erfahren) erhalten bleibt. Überlegen Sie sich nun noch, dass $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^{n,n}$ gilt, d.h. dass $GL_n(\mathbb{R})$ dicht in $\mathbb{R}^{n,n}$ liegt!

1.5 Kompaktheit

In der Analysis I konnten wir beweisen, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wichtige Eigenschaften hat, wie u.a. die Existenz eines Maximums und eines Minimums (Satz 4.31), sowie die gleichmäßige Stetigkeit (Satz von Heine, Satz 4.38). Eine Analyse der zugehörigen Beweise zeigt, dass wir dabei i.w. nur die Folgenabgeschlossenheit von $[a, b]$ und den Satz von Bolzano-Weierstraß benutzt haben, der wiederum nur die Beschränktheit der Menge $[a, b]$ voraussetzt. Folglich lassen sich beide oben genannten Sätze auf Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ verallgemeinern, wobei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} ist. Da wir Beschränktheit und Abgeschlossenheit auch in beliebigen metrischen Räumen definieren können, stellt sich die Frage, ob wir als Urbildraum statt \mathbb{R} auch einen beliebigen metrischen Raum zulassen können, um den Satz vom Maximum und Minimum (und später auch den Satz von Heine) zu verallgemeinern. Leider ist dieser einfache Ansatz zum Scheitern verurteilt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.54 Sei $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei d die diskrete Metrik bezeichnet. Ist $V \subseteq \mathbb{R}$ offen bzgl. der Standardmetrik, dann ist $V = Id_{\mathbb{R}}^{-1}(V)$ auch offen bzgl. der diskreten Metrik (denn dort sind alle Teilmengen offen). Also sind Urbilder offener Mengen offen und $Id_{\mathbb{R}}$ ist nach Satz 1.52 stetig. (Erinnern Sie sich noch an Teil 2) von Beispiel 1.48? Hier sollten Sie herausgefunden haben, dass die Umkehrfunktion $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ überraschenderweise *nicht* stetig ist.) Nun ist die Menge \mathbb{R} bzgl. der diskreten Metrik auch beschränkt (da enthalten in $U_2(0)$) und abgeschlossen. Die Abbildung $Id_{\mathbb{R}}$ hat aber kein Maximum oder Minimum auf der bzgl. d beschränkten und abgeschlossenen Menge \mathbb{R} .

Wir benötigen also in metrischen Räumen eine stärkere Eigenschaft als nur Beschränktheit und Abgeschlossenheit, und dies ist die sogenannte *Kompaktheit*, die wir durch die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft* definieren werden. Diese Eigenschaft ist leider alles andere als intuitiv und benötigt den Begriff der *Familie*, der den der Folge verallgemeinert.

Definition 1.55 Sei I eine beliebige (Index)-Menge und Y eine weitere Menge. Eine Familie $(y_i)_{i \in I}$ in Y ist eine Abbildung $I \rightarrow Y$.

Definition 1.56 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

- 1) Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subseteq X$ heißt offene Überdeckung von A , falls

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

- 2) A heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h. ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , so gibt es eine endliche Teilmenge $E \subseteq I$, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i.$$

Beispiel 1.57 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- 1) Wir betrachten das offene Intervall $A]0, 1[\subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $(]0, \frac{2}{3}[,]\frac{1}{3}, 2[)$ eine offene Überdeckung von $]0, 1[$, denn

$$]0, \frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{3}, 2[.$$

Diese Überdeckung ist sogar endlich, da sie nur zwei Elemente (offene Mengen) enthält. Eine andere endliche offene Überdeckung ist natürlich auch $(]0, 1[)$. Allerdings ist $]0, 1[$ *nicht* kompakt, denn betrachten wir $U_n =]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so gilt

$$]0, 1[\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} U_n,$$

d.h. $(U_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ ist eine offene Überdeckung von $]0, 1[$. Ist allerdings $E \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ endlich und $m = \max E$, so gilt

$$]0, 1[\not\subseteq \bigcup_{n \in E} U_n =]\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}[.$$

Folglich enthält $(U_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ keine endliche Teilüberdeckung von $]0, 1[$.

- 2) Sei $A \subseteq X$ endlich. Dann ist A kompakt, denn ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , so wähle zu jedem $a \in A$ ein $i_a \in I$ mit $a \in U_{i_a}$. Dann ist $(U_{i_a})_{a \in A}$ eine endliche Teilüberdeckung der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$, denn

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_{i_a}.$$

- 3) Sei (a_n) eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $a \in X$. Dann ist die Menge

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

kompakt, denn ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , so existiert wegen $a \in A$ ein $j \in I$ mit $a \in U_j$. Wegen der Konvergenz von (a_n) gegen a liegen bereits fast alle Folgenglieder in U_j , d.h. es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_j$ für alle $n \geq N$. Wähle nun zu jedem $n < N$ ein $i_n \in I$ mit $a_n \in U_{i_n}$ für $n = 0, \dots, N$. Dann gilt

$$A \subseteq U_j \cup \left(\bigcup_{n < N} U_{i_n} \right)$$

und die Menge auf der rechten Seite der Inklusion ist eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$. Genauer gesagt ist $E := \{j, i_0, \dots, i_{N-1}\}$ die gesuchte endliche Teilmenge von I mit $A \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i$.

- 4) Sei X eine Menge und d die diskrete Metrik auf X . Dann sind die kompakten Teilmengen von X genau die endlichen Teilmengen von X . Aus Teil 1) wissen wir bereits, dass für jede beliebige Metrik gilt, dass endliche Teilmengen kompakt sind. Ist andererseits $A \subseteq X$ unendlich, so lässt sich aus der offenen Überdeckung

$$(U_1(a))_{a \in A}$$

keine endliche Teilüberdeckung von A auswählen, da jede Menge $U_1(a)$ genau aus dem einen Punkt a besteht. Also ist eine nicht endliche Teilmenge von X nicht kompakt und mit Kontraposition folgt, dass jede kompakte Teilmenge von X endlich ist.

Bemerkung 1.58 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq T \subseteq X$, sowie d_T die durch d induzierte Metrik auf T . Dann gilt (Übung):

$$A \text{ kompakt in } (X, d) \iff A \text{ kompakt in } (T, d_T)$$

So effektiv und nützlich sich die Definition der Kompaktheit im Folgenden erweisen wird, so schwierig ist es jedoch manchmal auf diese Art nachzuweisen, dass eine Menge tatsächlich kompakt ist. Glücklicherweise gibt es im \mathbb{R}^n mit der Standardmetrik eine viel einfachere Charakterisierung. Unser nächstes Ziel ist es daher zu zeigen, dass im \mathbb{R}^n eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie (wie eingangs angedeutet) beschränkt und abgeschlossen ist. Eine Richtung ist dabei relativ einfach zu zeigen und gilt sogar in beliebigen metrischen Räumen.

Satz 1.59 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A beschränkt und abgeschlossen.

Beweis: Wir zeige zunächst die Beschränktheit von A . Für $X = \emptyset = A$ ist das klar, sei also $X \neq \emptyset$. Wähle ein $x \in X$ und betrachte die offene Überdeckung $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ von A . (Dies ist in der Tat eine offene Überdeckung von A , denn ist $a \in A$, so ist $d(a, x) \in \mathbb{R}$ und mit dem Archimedischen Axiom (Satz 1.53 in Analysis I) folgt die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ mit $d(a, x) < n$. Dann gilt aber $a \in U_n(x)$.) Da A kompakt ist, hat diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt $E \subseteq \mathbb{N}$ endlich mit

$$A \subseteq \bigcup_{n \in E} U_n(x) = U_m(x)$$

mit $m = \max E$. Damit ist A nach Satz 1.8 aber beschränkt. (Klar?)

Für die Abgeschlossenheit von A weisen wir nach, dass $X \setminus A$ offen ist. Für $A = X$ ist dies klar, sei also $X \setminus A \neq \emptyset$ und $x \in X \setminus A$ beliebig. Zu jedem $a \in A$ definieren wir die offene Menge $U_a := U_{\varepsilon_a}(a)$ mit $\varepsilon_a := \frac{1}{2} d(a, x)$. Dann ist $(U_a)_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von A . Wegen der Kompaktheit von A existiert $E = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq A$ endlich, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{a \in E} U_a = \bigcup_{k=1}^m U_{\varepsilon_{a_k}}(a_k).$$

Sei nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{a_1}, \dots, \varepsilon_{a_m}\}$. Dann gilt $\varepsilon > 0$ und

$$U_\varepsilon(x) \cap U_{\varepsilon_{a_k}}(a_k) = \emptyset$$

für $k = 1, \dots, m$, da $\varepsilon \leq \varepsilon_{a_k} = \frac{1}{2} d(a_k, x)$ für $k = 1, \dots, m$. Damit folgt aber $U_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$, d.h. x ist ein innerer Punkt von $X \setminus A$. Also ist $X \setminus A$ offen und daher A abgeschlossen. \square

Bemerkung 1.60 Die Umkehrung von Satz 1.59 gilt natürlich nicht, denn dann hätten wir uns gar nicht erst die Mühe machen müssen den Begriff der *Kompaktheit* einzuführen. Ein Gegenbeispiel erhalten wir schnell für eine unendliche Menge X , die mit der diskreten Metrik versehen ist. Diese ist sowohl beschränkt und abgeschlossen, aber nach Teil 4) von Beispiel 1.57 nicht kompakt.

Der Nachweis dafür, dass eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n tatsächlich kompakt ist, ist alles andere als trivial. Wir benötigen dazu etliche Vorbereitungen.

Lemma 1.61 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.*

Beweis: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Wir nehmen noch die offene Menge $X \setminus A$ hinzu und erhalten so eine offene Überdeckung von K (bzw. sogar von X). Ganz formal wählen wir dazu einen Index $j \notin I$ und setzen $U_j := X \setminus A$ und $\tilde{I} := I \cup \{j\}$ und betrachten die offene Überdeckung $(U_i)_{i \in \tilde{I}}$. Wegen der Kompaktheit von K existiert nun eine endliche Teilmenge $E \subseteq I$, so dass

$$A \subseteq K \subseteq \left(\bigcup_{i \in E} U_i \right) \cup (X \setminus A).$$

(Klar? Wie drücken Sie das formal über die Menge \tilde{I} aus?) Wegen $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ gilt dann schon

$$A \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i$$

und $(U_i)_{i \in E}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$. Da letztere beliebig war, folgt die Kompaktheit von A . \square

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips, d.h. Satz 2.38 aus Analysis I.

Satz 1.62 (Schachtelungsprinzip) *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von X mit*

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0.$$

Dann existiert genau ein $x \in X$ mit $x \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien also $x, \tilde{x} \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$0 \leq d(x, \tilde{x}) \leq \text{diam}(A_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und da die rechte Seite dieser Ungleichung eine (reelle) Nullfolge ist, folgt mit dem “Sandwich-Prinzip” aus Analysis I, dass $d(x, \tilde{x}) = 0$, also $x = \tilde{x}$ gilt.

Für die Existenz wählen wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A_n$, was wegen $A_n \neq \emptyset$ möglich ist. Dann ist (a_n) eine Cauchy-Folge in X , denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(A_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Dann gilt aber für alle $n, m \geq N_\varepsilon$, dass

$$d(a_n, a_m) \leq \text{diam}(A_{N_\varepsilon}) < \varepsilon,$$

da $a_n, a_m \in A_{N_\varepsilon}$ wegen $A_n, A_m \subseteq A_{N_\varepsilon}$ gilt. Da X vollständig ist, hat die Cauchy-Folge (a_n) einen Grenzwert $x \in X$. Es bleibt z.z., dass $x \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachten wir die Teilfolge $(a_k)_{k \geq n}$, so ist dies wegen $a_k \in A_k \subseteq A_n$ für $k \geq n$ eine Teilfolge in A_n mit Grenzwert x . Wegen der Abgeschlossenheit von A_n gilt dann aber auch $x \in A_n$. \square

Lemma 1.63 Seien $r > 0$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist der Würfel

$$W = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + r] = [a_1, a_1 + r] \times \cdots \times [a_n, a_n + r] \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Beweis: Eine wichtige Grundidee im Beweis ist die Tatsache, dass sich jeder Würfel W mit Kantenlänge r wie im Satz als Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Würfeln halber Kantenlänge darstellen lässt, die wir *kanonische Teilwürfel* nennen wollen. Diese haben die Form

$$\prod_{i=1}^n \left[\alpha_i, \alpha_i + \frac{r}{2} \right], \quad \alpha_i \in \left\{ a_i, a_i + \frac{r}{2} \right\}.$$

Angenommen, W ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von W , die keine endliche Teilüberdeckung von W enthält. Wir konstruieren nun rekursiv eine Folge $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Würfel wie folgt:

$$W_0 := W.$$

Dann ist W_0 abgeschlossen nach Beispiel 1.34. Außerdem hat W_0 die Kantenlänge $r = \frac{r}{2^0}$ und keine endliche Teilfamilie von $(U_i)_{i \in I}$ überdeckt W_0 .

Sei nun W_k , $k \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, so dass W_k die Kantenlänge $\frac{r}{2^k}$ hat und keine endliche Teilfamilie von $(U_i)_{i \in I}$ den Würfel W_k überdeckt. Dann gibt es mindestens einen (der 2^n) kanonischen Teilwürfel von W_k , der von keiner endlichen Teilfamilie von $(U_i)_{i \in I}$ überdeckt wird. (Andernfalls erhielten wir eine endliche Teilüberdeckung von W_k .) Einen von diesen Würfeln wählen wir als W_{k+1} . Dieser hat die Kantenlänge $\frac{r}{2^{k+1}}$.

Diese Konstruktionsvorschrift liefert uns eine Folge $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nichtleerer abgeschlossener Würfel, so dass

$$W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_k \supseteq W_{k+1} \supseteq \cdots \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(W_k) = 0,$$

denn

$$\text{diam}(W_k) = \sqrt{\left(\frac{r}{2^k}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{r}{2^k}\right)^2} = \frac{r}{2^k} \sqrt{n}.$$

(Klar?) Mit Satz 1.62 folgt die Existenz von $x \in W = W_0$ mit

$$\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k.$$

Da $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von W ist, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, gibt es außerdem ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$. Dann gilt aber für jeden der Würfel W_k mit der Eigenschaft $\text{diam}(W_k) < \varepsilon$, dass $W_k \subseteq U_{i_0}$. Dann ist aber die einelementige Teilfamilie $(U_i)_{i=i_0}$ eine endliche Teilüberdeckung von W_k im Widerspruch zur Konstruktionsvorschrift der Würfelreihe $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Folglich war unsere Annahme falsch, d.h. W ist kompakt. \square

Satz 1.64 (von Heine-Borel) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist A genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: “ \Rightarrow ” folgt sofort aus Satz 1.59.

“ \Leftarrow ”: Sei A beschränkt und abgeschlossen. Wegen der Beschränktheit von A finden wir einen abgeschlossenen Würfel $W = I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $A \subseteq W$. Da der Würfel W nach Lemma 1.63 kompakt ist, folgt mit Lemma 1.61 aus der Abgeschlossenheit von A auch die Kompaktheit. \square

Beispiel 1.65 1) $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt. Ebenso $[0, 1] \cup [\sqrt{2}, \pi]$.

2) Die Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.

Der nächste Satz ist von zentraler Bedeutung für die Beweise der nachfolgenden Sätze über Existenz von Extremwerten und über gleichmäßige Stetigkeit.

Satz 1.66 Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt.

Beweis: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K) \subseteq Y$. Dann ist

$$(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$$

eine offene Überdeckung von $K \subseteq X$, denn wegen der Stetigkeit von f folgt nach Satz 1.52 für alle $i \in I$ aus der Offenheit von U_i auch die von $f^{-1}(U_i)$. Da K kompakt ist, gibt es $E \subseteq I$ endlich, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i \in E} f^{-1}(U_i).$$

Damit erhalten wir

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{i \in E} f^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i \in E} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i \in E} U_i,$$

d.h. $(U_i)_{i \in E}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$. Folglich ist $f(K)$ kompakt. \square

Satz 1.67 (“vom Maximum und Minimum”) Seien (X, d) ein nichtleerer, kompakter metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $\sup f, \inf f \in f(X)$, d.h. die Abbildung f nimmt auf X ihr Maximum und ihr Minimum an.

Beweis: Nach Satz 1.66 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, also nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen. Wegen der Beschränktheit gilt $s := \sup f = \sup f(X) \in \mathbb{R}$ und nach Analysis I Satz 1.50 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in f(X)$ mit

$$s - \frac{1}{n} < y_n \leq s.$$

Für die dadurch gegebene Folge (y_n) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = s = \sup f$ und wegen der Abgeschlossenheit von $f(X)$ folgt $\sup f \in f(X)$.

Analog zeigt man $\inf f \in f(X)$. \square

Als nächstes verallgemeinern wir den Satz von Heine aus Analysis I (dort Satz 4.38), wozu wir insbesondere den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit benötigen.

Definition 1.68 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt $f : X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, \tilde{x} \in X$ gilt:

$$d_X(x, \tilde{x}) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$$

Satz 1.69 (“von Heine”) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sowie $K \subseteq X$ kompakt und $f : K \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, existiert zu jedem $x \in K$ ein $\delta_x > 0$, so dass für alle $\tilde{x} \in K$ gilt:

$$d_X(x, \tilde{x}) < \delta_x \implies d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.5)$$

Setze $U_x := U_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)$. Dann ist $(U_x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K und da K kompakt ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in K$, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

Setze $\delta := \min \left\{ \frac{1}{2}\delta_{x_j} \mid j = 1, \dots, n \right\}$. Seien nun $x, \tilde{x} \in K$ mit $d_X(x, \tilde{x}) < \delta$. Wir zeigen, dass dann auch $d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$ gilt. Zu $x \in X$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in U_{x_j}$. Damit folgt

$$d_X(x, x_j) < \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_{x_j}$$

und daher $d_Y(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$ mit (1.5). Andererseits gilt

$$d_X(x_j, \tilde{x}) \leq d_X(x_j, x) + d_X(x, \tilde{x}) < \frac{\delta_{x_j}}{2} + \delta \leq \delta_{x_j}$$

und durch erneute Anwendung von (1.5) erhalten wir auch $d_Y(f(x_j), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{2}$, und hieraus schließlich

$$d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \leq d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), f(\tilde{x})) < \varepsilon.$$

Somit ist f gleichmäßig stetig. \square

In Analysis I hatten wir den Satz von Heine mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß bewiesen. Diesen Beweis hätten wir auch an dieser Stelle exakt übertragen können, da auch der Satz von Bolzano-Weierstraß eine Verallgemeinerung auf metrische Räume hat. Der Begriff der *Teilfolge* wird dabei komplett analog zur Analysis I definiert, weshalb wir uns hier eine ausführliche Definition sparen.

Satz 1.70 (“von Bolzano-Weierstraß”) *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A folgenkompakt, d.h. jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A hat eine in A konvergente Teilfolge (d.h. eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch wieder in A liegt).*

Beweis: Wenn (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert $a \in A$ hat, dann liegen in jeder offenen Umgebung von a fast alle Folgenglieder von (a_{n_k}) und damit unendlich viele Folgenglieder von (a_n) . Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer konvergenten Teilfolge ist daher: “Es gibt $a \in A$, so dass in jeder offenen Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.”

Angenommen, diese Bedingung ist nicht erfüllt. Dann gibt es zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung $U_a \subseteq X$, so dass $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_a\}$ endlich ist. Dann gilt aber

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a,$$

d.h. $(U_a)_{a \in A}$ ist eine offene Überdeckung von A und wegen der Kompaktheit von A gibt es $E \subseteq A$ endlich, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{a \in E} U_a.$$

Dann erhalten wir allerdings durch

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in A\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \bigcup_{a \in E} U_a\}$$

einen Widerspruch, da die Menge auf der rechten Seite nur endlich viele Elemente enthält. Folglich gibt es ein $a \in A$, so dass in jeder offenen Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen. Wir konstruieren nun eine Teilfolge, die gegen a konvergiert. Dazu wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig und zu jedem $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a) \quad \text{und} \quad n_k > n_{k-1}.$$

Dies ist möglich, da in $U_{\frac{1}{k}}(a)$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Nach Konstruktion gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \quad \square$$

In Satz 1.70 haben wir gezeigt, dass jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums folgenkompakt ist. Tatsächlich gilt sogar die Umkehrung, d.h. die Begriffe *Kompaktheit* und *Folgenkompaktheit* sind in metrischen Räumen äquivalent. (Der Beweis ist allerdings alles andere als einfach, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten.) In topologischen Räumen sind beide Begriffe (analog verallgemeinert) jedoch nicht mehr äquivalent, weshalb wir für die Definition der Kompaktheit die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft* verwendet haben.

Beachten Sie, dass wir in Satz 1.70 *nicht* die Vollständigkeit des zu Grunde liegenden metrischen Raums vorausgesetzt haben. Daher erhalten wir nun das folgende interessante Korollar.

Korollar 1.71 *Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist vollständig.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X . Dann hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x \in X$. Wie in Analysis I zeigen Sie nun, dass x dann schon der Grenzwert der Folge (x_n) sein muss (Übung). \square

Für spätere Zwecke (in der *Analysis III*) benötigen wir noch das folgende Resultat, für das wir zunächst den Abstand von Mengen in einem metrischen Raum definieren.

Definition 1.72 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq X$ zwei nichtleere Mengen. Dann heißt*

$$d(A, B) := \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

der Abstand von A und B .

Satz 1.73 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, K \subseteq X$ zwei nichtleere Mengen. Sind A, K disjunkt und ist A abgeschlossen und K kompakt, so gilt $d(A, K) > 0$.*

Beweis: Übung. \square

1.6 Zusammenhang

Unser nächstes Ziel ist eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes, für den wir in Korollar 4.32 in Analysis I die folgende prägnante Form gefunden haben:

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $f(I)$ ein Intervall.

Für die Definition des Begriffs *Intervall* haben wir allerdings die auf \mathbb{R} vorhandene Anordnung benutzt. Gibt es vielleicht andere Eigenschaften von Intervallen, die sich auf beliebige metrische Räume verallgemeinern lassen? Ja, denn Intervalle zeichnen sich anschaulich gesprochen dadurch aus, dass sie keine “*Lücken*” haben, so ist z.B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kein Intervall. Für diese spezielle Teilmenge stellen wir fest, dass sie sich wegen

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$$

in zwei disjunkte, nichtleere, offene Mengen zerlegen lässt. Auf dieser Beobachtung baut die folgende Definition auf.

Definition 1.74 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- 1) X heißt zusammenhängend, falls für alle offenen Teilmengen $U, V \subseteq X$ gilt:

$$U \cup V = X \text{ und } U \cap V = \emptyset \implies U = \emptyset \text{ oder } V = \emptyset.$$

- 2) Eine Teilmenge $T \subseteq X$ heißt zusammenhängend, falls (T, d_T) zusammenhängend ist, wobei d_T die durch d induzierte Metrik auf T bezeichnet.

Bemerkung 1.75 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist *nicht* zusammenhängend.
- 2) X lässt sich in zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen U, V zerlegen, d.h. es gilt $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$.
- 3) Es gibt eine nichttriviale Teilmenge $C \subseteq X$ (d.h. $C \neq \emptyset, X$), so dass C offen und abgeschlossen ist.

Dabei folgt “2) \Rightarrow 3)” daraus, dass U wie in 2) wegen $U = X \setminus V$ auch abgeschlossen ist. “3) \Rightarrow 2)” folgt, indem wir $U := C$ und $V := X \setminus C$ setzen.

Im englischen Sprachgebrauch bezeichnet man Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind üblicherweise mit dem Portmanteauwort “*clopen*” (entstanden aus “closed” und “open”).¹

¹Die deutsche Entsprechung “*abgeschlossen*” hat sich dagegen nicht durchgesetzt und daher sollte man auf die ernstgemeinte Verwendung dieses Begriffs lieber verzichten.

Beispiel 1.76 1) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenhängend. Doch Vorsicht! Dies ist nicht ganz so offensichtlich wie man zuerst vielleicht denken mag. Zwar gilt wie eingangs festgestellt

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[,$$

doch das entscheidende Argument an dieser Stelle ist, dass die beiden Intervalle $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$ nicht nur offen in \mathbb{R} , sondern auch offen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind. Z.B. ist dies für die Menge $]0, \infty[$ der Fall, weil

$$]0, \infty[=]0, \infty[\cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

als Spur einer offenen Menge in \mathbb{R} darstellbar ist. $]0, \infty[$ ist übrigens auch abgeschlossen (und daher “clopen”) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, denn es gilt auch

$$]0, \infty[= [0, \infty[\cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

d.h. $]0, \infty[$ ist auch die Spur der in \mathbb{R} abgeschlossenen Menge $[0, \infty[$.

2) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend, denn die Menge

$$C := \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] = \mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

ist in \mathbb{Q} sowohl offen als auch abgeschlossen.

Satz 1.77 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist I genau dann zusammenhängend, wenn I ein (möglicherweise unendliches) Intervall ist.

Beweis: Wir zeigen die äquivalente Aussage: “ I ist kein Intervall $\iff I$ ist nicht zusammenhängend.”

“ \Rightarrow ”: Sei I kein Intervall. Dann gibt es $a, b \in I$ und $c \in]a, b[$ mit $c \notin I$. Setze nun $U := I \cap]-\infty, c[$ und $V := I \cap]c, \infty[$. Dann sind U und V offen in I , nichtleer (da $a \in U$ und $b \in V$) und es gilt $U \cup V = I$ und $U \cap V = \emptyset$. Folglich ist I nicht zusammenhängend.

“ \Leftarrow ”: Sei I nicht zusammenhängend. Dann gibt es $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, so dass für die in I offenen Mengen $U_I := I \cap U$ und $V_I := I \cap V$ gilt:

$$U_I, V_I \neq \emptyset, \quad U_I \cap V_I = \emptyset, \quad I = U_I \cup V_I$$

Seien $a \in U_I$ und $b \in V_I$. O.B.d.A. sei $a < b$. (Ansonsten vertauschen wir die Rollen von U_I und V_I . Dabei ist gesichert, dass $a \neq b$, da $U_I \cap V_I = \emptyset$.) Setze

$$s := \sup \{x \in \mathbb{R} \mid [a, x] \subseteq U\}.$$

Dann gilt $a \leq s \leq b$, denn im Fall $s > b$ wäre $[a, b] \subseteq U$ woraus der Widerspruch $b \in U_I \cap V_I = \emptyset$ folgt.

Angenommen I ist ein Intervall. Dann folgt $s \in I$. Weiter gilt $s \notin U$, denn sonst würde $[a, s] \subseteq U$ gelten und es gäbe wegen der Offenheit von U ein $\varepsilon > 0$, so dass $[a, s + \varepsilon] \subseteq U$

im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von s gilt. Wegen $I = U_I \cup V_I$ und $U_I \subseteq U$ folgt $s \notin U$ aber $s \in V$. Da V offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(s) \subseteq V$. O.B.d.A. sei ε dabei so klein gewählt, dass $a < s - \frac{\varepsilon}{2} < s$. Da I ein Intervall ist, folgt $s - \frac{\varepsilon}{2} \in I$ und außerdem $s - \frac{\varepsilon}{2} \in U \cap V$ nach Definition von s , also auch $s - \frac{\varepsilon}{2} \in U_I \cap V_I = \emptyset$, woraus wir einen Widerspruch erhalten. Folglich ist I kein Intervall. \square

Satz 1.78 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis: Zunächst zeigen Sie zur Übung, dass $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn $f : X \rightarrow f(X)$ dies ist, wobei $f(X)$ dann natürlich mit der induzierten Metrik versehen ist. Dann können wir nämlich o.B.d.A. annehmen, dass f surjektiv ist, also $f(X) = Y$ gilt. Wir zeigen nun, dass es keine nichttriviale Teilmenge von Y gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Dann ist $Y = f(X)$ nach Bemerkung 1.75 zusammenhängend.

Sei also $C \subseteq Y$ sowohl offen als auch abgeschlossen. Wegen der Stetigkeit von f ist dann auch $f^{-1}(C)$ offen und da auch $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$ offen ist, ist $f^{-1}(C)$ auch abgeschlossen in X . Da X zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(C) = \emptyset$ oder $f^{-1}(C) = X$. Dann folgt wegen der Surjektivität von f , dass $C = f(f^{-1}(C)) = \emptyset$ oder $C = f(f^{-1}(C)) = Y$ (siehe Bemerkung 0.32 in Analysis I). Somit ist C eine triviale Teilmenge von Y und daher ist Y zusammenhängend. \square

Beispiel 1.79 Die Menge der invertierbaren Matrizen $GL_n(\mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend, denn da $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt, wäre andernfalls auch $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammenhängend. Alternativ betrachten wir die beiden Mengen

$$U := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \quad \text{und} \quad V := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}.$$

Diese sind als Urbilder der offener Mengen $]0, \infty[$ bzw. $] \infty, 0[$ offen und außerdem disjunkt, beide nichtleer und offenbar gilt $GL_n(\mathbb{R}) = U \cup V$.

Korollar 1.80 (“Zwischenwertsatz”) *Sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ferner seien $a, b \in X$ und $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(a) < c < f(b)$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = c$.*

Beweis: Nach Satz 1.78 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, also nach Satz 1.77 ein Intervall. Dann gilt aber $c \in [f(a), f(b)] \subseteq f(X)$. \square

Für viele Anwendungen ist der folgende anschauliche Begriff hilfreich, der den doch recht abstrakt definierten Begriff des Zusammenhangs verschärft.

Definition 1.81 *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

- 1) *Seien $x, y \in X$. Eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ heißt Weg von x nach y in X .*
- 2) *(X, d) heißt wegzusammenhängend, falls es zu je zwei Elementen $x, y \in X$ einen Weg von x nach y in X gibt.*

Satz 1.82 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist X wegzusammenhängend, dann ist X auch zusammenhängend.

Beweis: Sei X wegzusammenhängend. Angenommen, X ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere, disjunkte, offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $X = U \cup V$. Sei nun $u \in U$ und $v \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $f : [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = u$ und $f(1) = v$. Ferner ist $f([0, 1])$ nach Satz 1.78 zusammenhängend, da f stetig und $[0, 1]$ als Intervall zusammenhängend ist. Betrachte nun die in $f([0, 1])$ offenen Mengen

$$U_f := U \cap f([0, 1]) \quad \text{und} \quad V_f := V \cap f([0, 1]).$$

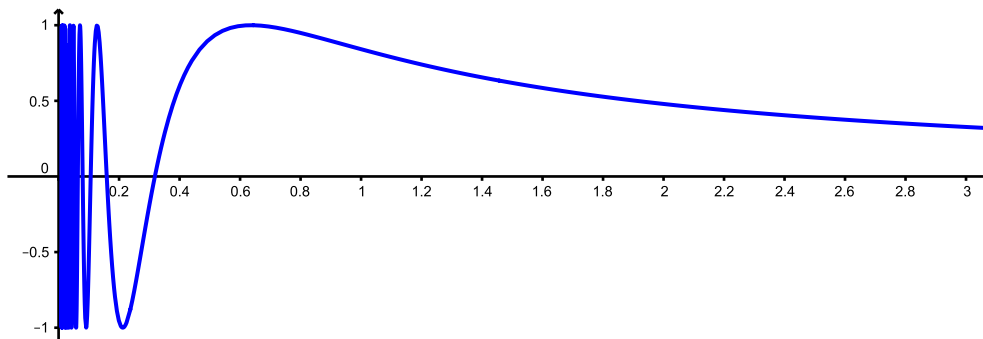
Dann sind U_f, V_f disjunkt und nichtleer (da $u \in U_f$ und $v \in V_f$) und außerdem gilt wegen $U \cup V = X$ auch $U_f \cup V_f = f([0, 1])$ im Widerspruch zum Zusammenhang von $f([0, 1])$. Folglich war die Annahme falsch, d.h. X ist zusammenhängend. \square

Beispiel 1.83 \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend und damit auch zusammenhängend, denn zu je zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto tx + (1 - t)y$ ein Weg von x nach y .

Bemerkung 1.84 Überraschenderweise gibt es Mengen, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind. Ein Standardbeispiel ist die durch

$$T = \left\{ (x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in]0, \infty[\right\} \cup \{ (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \}$$

gegebene Teilmenge des \mathbb{R}^2 (Übung). Dies ist einfach der Graph der Funktion $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ zusammen mit dem Abschnitt von -1 bis 1 auf der y -Achse.



Unter stärkeren Voraussetzungen lässt sich aber auch die Rückrichtung von Satz 1.82 beweisen. Dazu führen wir zunächst den folgenden Begriff ein.

Definition 1.85 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine nichtleere offene zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq X$ heißt Gebiet.

Satz 1.86 Sei \mathcal{V} ein normierter Raum und $G \subseteq \mathcal{V}$ ein Gebiet. Dann ist G wegzusammenhängend.

Beweis: Übung. Betrachten Sie $G(x) := \{y \in G \mid \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } G\}$ für ein beliebiges $x \in G$ und zeigen Sie, dass $G(x)$ sowohl offen, als auch abgeschlossen in G ist. \square

1.7 Normierte Räume und lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns etwas detaillierter mit normierten Räumen befassen. Insbesondere haben wir es also mit metrischen Räumen zu tun, die zusätzlich noch eine Vektorraumstruktur besitzen. In der Linearen Algebra haben Sie sich dann die zugehörigen strukturverträglichen Abbildungen studiert, d.h. die sogenannten *linearen Abbildungen*. Da diese im Folgenden auch bei uns eine zentrale Rolle spielen werden, wollen wir sie einmal etwas näher aus dem Blickwinkel der Analysis untersuchen. Zunächst aber erinnern wir an einige wichtige Grundkonzepte aus der Linearen Algebra: Dazu seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei \mathbb{R} -Vektorräume.

- 1) Eine Abbildung $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ heißt *linear*, falls für alle $v, \tilde{v} \in \mathcal{V}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v}) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

- 2) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann linear, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ gibt, so dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Sind allgemeiner V, W endlich-dimensionale \mathbb{R} -Vektorräume mit Basen \mathcal{B}_1 bzw. \mathcal{B}_2 , so hat jede lineare Abbildung $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ eine darstellende Matrix A bzgl. der Basen \mathcal{B}_1 von \mathcal{V} und \mathcal{B}_2 von \mathcal{W} . Diese bezeichnen wir mit

$$[f]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$$

oder kurz mit $[f]$, wenn klar ist, um welche Basen es sich handelt.

- 3) Gilt $\dim(\mathcal{V}) = n$, so gibt es einen *Isomorphismus* $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$, d.h. φ ist eine bijektive lineare Abbildung. (Insbesondere ist auch φ^{-1} wieder linear.)

Die naheliegende Frage, ob lineare Abbildungen grundsätzlich auch stetig sind, mag auf den ersten Blick trivial erscheinen. Betrachten wir z.B. eine Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$ und die dadurchgegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, so ist diese stetig, da die Komponentenfunktionen

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m$$

als Linearkombinationen von kanonischen Projektionen ganz offensichtlich stetig sind. Überraschenderweise gibt es jedoch lineare Abbildungen, die *nicht* stetig sind. Bevor wir dazu ein Gegenbeispiel präsentieren, werden wir zunächst einmal ein sehr praktisches und einfaches Kriterium zum Überprüfen der Stetigkeit linearer Abbildungen bereitstellen. Dabei zeigt sich u.a., dass wir die zusätzliche Struktur der Linearität dazu führt, dass die Stetigkeit einer linearen Abbildung in einem speziellen Punkt (z.B. 0) schon gleichbedeutend mit der Stetigkeit (sogar Lipschitz-Stetigkeit) der Abbildung auf dem gesamten Definitionsbereich ist.

Satz 1.87 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} normierte Räume und sei $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) f ist Lipschitz-stetig.
- 2) f ist gleichmäßig stetig.
- 3) f ist stetig.
- 4) f ist stetig in 0.

5) Es gibt eine Konstante $c \geq 0$, so dass $\|f(v)\| \leq c\|v\|$ für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt.

Beweis: Die Implikationen “1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)” sind trivial.

“4) \Rightarrow 5)”: Ist f stetig in 0, so gibt es nach dem ε/δ -Kriterium zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\|v\| < \delta \implies \|f(v)\| < 1 \quad (1.6)$$

(Beachten Sie, dass es sich dabei um zwei verschiedene Normen handelt, nämlich einmal die auf \mathcal{V} und einmal die auf \mathcal{W} .) Sei nun $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt

$$\left\| \frac{\delta}{2\|v\|} v \right\| = \frac{\delta}{2\|v\|} \|v\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

und daher folgt mit (1.6), dass

$$\|f(v)\| = \left\| \frac{2\|v\|}{\delta} f\left(\frac{\delta}{2\|v\|} v\right) \right\| = \frac{2\|v\|}{\delta} \cdot \|f\left(\frac{\delta}{2\|v\|} v\right)\| < \frac{2}{\delta} \|v\|$$

für alle $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ gilt. Dann gilt aber mit $c := \frac{2}{\delta}$, für alle $v \in \mathcal{V}$, dass $\|f(v)\| \leq c\|v\|$, denn für $v = 0$ ist diese Ungleichung trivial.

“5) \Rightarrow 1)”: Für alle $v, \tilde{v} \in \mathcal{V}$ gilt

$$\|f(v) - f(\tilde{v})\| = \|f(v - \tilde{v})\| \leq c \cdot \|v - \tilde{v}\|.$$

Somit ist f Lipschitz-stetig. (Wähle $L = c$ bzw. $L = 1$ falls $c = 0$). \square

Beispiel 1.88 Der Raum

$$C^1([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$$

ist ein Teilraum des Raums $C([0, 1])$ der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ und wird damit selbst zu einem normierten Raum (bzgl. der Supremumsnorm). Wir betrachten nun die Abbildung $D : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $f \mapsto f'$. (Die Abbildung D ist also nichts anderes als das Differenzieren von Funktionen.) Dann ist D linear, denn für alle $f, g \in C^1([0, 1])$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g) \quad \text{und} \quad D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda D(f).$$

Überraschenderweise ist D aber nicht stetig, denn dazu betrachten wir die Funktionen $f_n \in C^1([0, 1])$ mit $f_n : x \mapsto x^n$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|f_n\|_{\sup} = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 1 \quad \text{und} \quad \|D(f_n)\|_{\sup} = n,$$

da $f'_n(x) = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bzw. $f'_0(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt. Es gibt daher kein $c \geq 0$ mit

$$\|D(f)\|_{\sup} \leq c\|f\|_{\sup}$$

für alle $f \in C^1([0, 1])$.

Wie ist dies zu verstehen? Spätestens an dieser Stelle sollte man sich von der überholten Vorstellung trennen, dass unstetige Funktionen “Sprünge” aufweisen müssen. Im abstrakten Sinn bedeutet Stetigkeit, dass “konvergente Folgen auf konvergente Folgen abgebildet werden”. Die Tatsache, dass D unstetig ist, bedeutet für Funktionenfolgen (f_n) in $C^1([0, 1])$ einfach nur, dass aus $f_n \rightrightarrows f$ i.A. nicht $D(f_n) \rightrightarrows D(f)$ folgt, d.h. es gibt Funktionenfolgen (f_n) , die gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion f konvergieren, für die die Folge der Ableitungen (f'_n) aber nicht gleichmäßig gegen f' konvergiert. Dies hatten wir bereits in Analysis I in Beispiel 8.8 festgestellt.

(In der Übung werden sie allerdings lernen, dass das Differenzieren D durchaus stetig sein kann, wenn man eine geeignetere Norm auf $C^1([0, 1])$ betrachtet, nämlich die Norm $\|\cdot\|$ mit $\|f\| := \|f\|_{\sup} + \|f'\|_{\sup}$.)

Der folgende Satz zeigt, dass die unendlich-Dimensionalität des Urbildraums entscheidend für die Existenz unseres gerade betrachteten Gegenbeispiels war, denn ist der Urbildraum endlich-dimensional, so ist jede lineare Abbildung zwischen normierten Räumen stetig (und dies gilt unabhängig von der gewählten Norm).

Satz 1.89 *Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} normierte Räume und sei $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung. Gilt $\dim \mathcal{V} < \infty$, so ist f stetig.*

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

- 1) *Fall 1:* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ (mit der Standardnorm). In diesem Fall seien e_1, \dots, e_n die Standardbasisvektoren des \mathbb{R}^n . Dann gilt für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dass $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ und

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|f(e_j)\| \leq M \cdot \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

wobei $M := \max \{\|f(e_j)\| \mid j = 1, \dots, n\}$. Da $|x_j| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt, folgt mit $c := Mn$, dass

$$\|f(x)\| \leq Mn\|x\| = c\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Somit ist f stetig.

- 2) *Fall 2: \mathcal{V} ist ein beliebiger endlich-dimensionaler Vektorraum.* Sei $n := \dim \mathcal{V}$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$. Dieser ist nach Fall 1 stetig, ebenso wie die Komposition $f \circ \varphi$. Wir zeigen nun, dass die Umkehrabbildung φ^{-1} stetig ist, denn dann ist auch $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Dazu zeigen wir, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass

$$\|\varphi(x)\| \geq M\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

gilt, denn damit erhalten wir für alle $v \in \mathcal{V}$, dass

$$M \cdot \|\varphi^{-1}(v)\| \leq \|\varphi(\varphi^{-1}(v))\| = \|v\|,$$

d.h. für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt $\|\varphi^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{M}\|v\|$ und somit ist φ^{-1} stetig. Es bleibt also (1.7) zu zeigen. Dazu betrachten wir die Abbildung $\|\cdot\| \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|\varphi(x)\|$, die als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Folglich nimmt diese Abbildung auf der kompakten Menge $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ihr Minimum M in einem Punkt $x^* \in S^{n-1}$ an. Insbesondere gilt dann $M = \|\varphi(x^*)\| > 0$, denn $x^* \neq 0$ und da φ ein Isomorphismus ist, gilt dann auch $\varphi(x^*) \neq 0$. Damit erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dass

$$\|\varphi(x)\| = \left\| \varphi\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \cdot \left\| \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq M \cdot \|x\|,$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$ gilt. Damit haben wir (1.7) bewiesen, denn für $x = 0$ ist diese Ungleichung trivial. \square

Bemerkung 1.90 Der Trick aus dem Beweis von Satz 1.89 ist ein Standardtrick der Analysis. Wir können dieses Kompaktheitsargument gleich aufgreifen, um damit eine Norm auf dem Raum $L(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \{f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \mid f \text{ linear}\}$ zu definieren:

Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} normierte Räume, wobei $\dim \mathcal{V} < \infty$. Dann wird durch

$$\|f\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}$$

eine Norm auf $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ definiert, die sogenannte Operatornorm bzgl. der Normen in \mathcal{V} und \mathcal{W} .

In der Tat ist der obige Ausdruck wohldefiniert, denn wegen

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} = \sup_{\|\tilde{v}\|=1} \|f(\tilde{v})\|$$

können wir analog zum Beweis von Satz 1.89 zeigen, dass das Supremum angenommen wird, also ein Maximum und damit insbesondere endlich ist. Dies im Detail auszuführen und auch die Normeigenschaften nachzuweisen bleibt zu Übungszwecken Ihnen überlassen. Für spätere Zwecke halten wir aber noch fest, dass die Operatornorm (quasi per Definition) die folgende nützliche Eigenschaft hat. Für alle $f \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ und alle $v \in \mathcal{V}$ gilt

$$\|f(v)\| \leq \|f\| \cdot \|v\|.$$

Beachten Sie dabei, dass in dieser Ungleichung drei unterschiedliche Normen auftauchen.

Wie wir bereits an verschiedenen Stellen festgestellt haben, hängt die Stetigkeit einer Abbildung stark von den benutzten Metriken bzw. im Fall normierter Räume von den zu Grunde liegenden Normen ab. Wir werden daher im Folgenden versuchen, verschiedene Normen miteinander zu “vergleichen”.

Definition 1.91 Sei \mathcal{V} ein \mathbb{R} -Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf \mathcal{V} heißen äquivalent, falls es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt:

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1.$$

Wie Sie leicht feststellen, handelt es sich bei der Äquivalenz von Normen um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf einem Vektorraum \mathcal{V} .

Satz 1.92 Sei \mathcal{V} ein \mathbb{R} -Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf \mathcal{V} . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1) Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent.
- 2) Für alle $U \subseteq \mathcal{V}$ gilt: U ist genau dann offen bzgl. $\|\cdot\|_1$ wenn U offen bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist.
- 3) Die Abbildungen $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2)$ und $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1)$ sind stetig.

Beweis: “1) \Rightarrow 2)”: Gilt 1), so gibt es per Definition zwei positive Konstanten c, C , so dass $c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1$ für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt. Wir zeigen nun die in 2) behauptete Äquivalenz:

“ \Rightarrow ”: Sei $U \subseteq \mathcal{V}$ offen bzgl. $\|\cdot\|_1$ und sei $v \in U$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\{w \in \mathcal{V} \mid \|v - w\|_1 < \varepsilon\} \subseteq U$. Dann gilt aber auch

$$\{w \in \mathcal{V} \mid \|v - w\|_2 < c\varepsilon\} \subseteq U,$$

denn aus $\|v - w\|_2 < c\varepsilon$ folgt $\|v - w\|_1 \leq \frac{1}{c}\|v - w\|_2 < \frac{1}{c} \cdot c\varepsilon = \varepsilon$, also $w \in U$. Da v beliebig war folgt die Offenheit von U bzgl. $\|\cdot\|_2$.

“ \Leftarrow ”: folgt analog mit Hilfe der Ungleichung $\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$ für alle $v \in \mathcal{V}$.

“2) \Rightarrow 3)”: folgt sofort aus $Id_{\mathcal{V}}^{-1}(U) = U$ für alle $U \subseteq \mathcal{V}$ und dem Kriterium für Stetigkeit, dass Urbilder offener Mengen offen sind (Satz 1.52).

“3) \Rightarrow 1)”: Da $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2)$ und $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1)$ stetig sind, gibt es Konstanten $M_1, M_2 \geq 0$ mit

$$\|v\|_2 = \|Id_{\mathcal{V}}(v)\|_2 \leq M_1 \cdot \|v\|_1 \quad \text{und} \quad \|v\|_1 = \|Id_{\mathcal{V}}(v)\|_1 \leq M_2 \cdot \|v\|_2$$

für alle $v \in \mathcal{V}$. Dabei gilt insbesondere $M_1, M_2 > 0$, da $Id_{\mathcal{V}}$ nicht die Nullabbildung ist. Daher gilt für alle $v \in \mathcal{V}$, dass

$$\frac{1}{M_2}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq M_1\|v\|_1,$$

d.h. die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent. \square

Bemerkung 1.93 Aussage 2) in Satz 1.92 lässt sich dahingehend interpretieren, dass äquivalente Normen *diesselbe Topologie erzeugen*. Insbesondere sind alle *topologischen Eigenschaften*, d.h. Eigenschaften, die wir allein mit Hilfe von offenen Mengen beschreiben können (wie z.B. Konvergenz von Folgen, Stetigkeit von Abbildungen, Kompaktheit oder Zusammenhang von metrischen Räumen) unabhängig von der Art der speziellen Norm, da sich die offenen Mengen bei äquivalenten Normen nicht unterscheiden.

Unsere bisherigen Erkenntnisse haben weitreichende Konsequenzen für die Topologie endlich-dimensionaler normierter Räume.

Satz 1.94 Sei \mathcal{V} ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Dann gilt:

- 1) Alle Normen auf \mathcal{V} sind äquivalent.
- 2) \mathcal{V} ist bzgl. jeder Norm vollständig, d.h. ein Banachraum.

Beweis: 1) Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei beliebige Normen auf \mathcal{V} . Da \mathcal{V} endlich-dimensional ist, sind die Abbildungen $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2)$ und $Id_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{V}, \|\cdot\|_1)$ nach Satz 1.89 stetig und damit sind die beiden Normen nach Satz 1.92 äquivalent.

2) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathcal{V} und $n := \dim \mathcal{V}$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$ und nach Satz 1.89 ist neben φ auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, da linear. Folglich gibt es ein $c \geq 0$, so dass

$$\|\varphi^{-1}(v)\| \leq c \cdot \|v\|$$

für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt. Sei nun $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in \mathcal{V} und sei $x_k := \varphi^{-1}(v_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$, dass

$$\|x_k - x_\ell\| = \|\varphi^{-1}(v_k) - \varphi^{-1}(v_\ell)\| = \|\varphi^{-1}(v_k - v_\ell)\| \leq c \|v_k - v_\ell\|.$$

Daraus folgt, dass (x_k) eine Cauchy-Folge im \mathbb{R}^n ist. Da \mathbb{R}^n vollständig ist, ist diese konvergent. Setze $x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von φ , dass

$$\varphi(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k.$$

Also ist (v_k) konvergent. Dies beweist die Vollständigkeit von \mathcal{V} bzgl. der Norm $\|\cdot\|$. \square

Es ist also aus der Sicht der Analysis egal, ob wir auf dem \mathbb{R}^n die Standardnorm oder eine andere Norm betrachten. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf dem \mathbb{R}^n bleiben die topologischen Eigenschaften unverändert. Dies betrifft aber nur die qualitativen Aussagen, nicht die quantitativen. Aus Sicht der *Numerik* kann es daher vorteilhafter sein, je nach Anwendung oder Situation manchen Normen gegenüber anderen den Vorzug zu geben, z.B. weil dadurch Fehler einfacher oder besser abgeschätzt werden können.

Kapitel 2

Mehrdimensionale Differentialrechnung

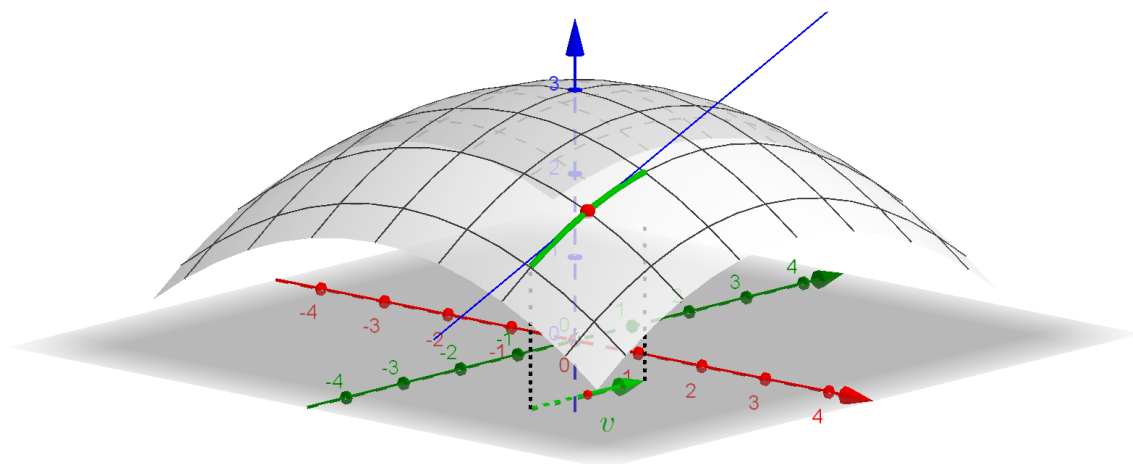
In der Analysis I hatten wir im Abschnitt 6.1 die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Häufungspunkt $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ mit Hilfe des Differentialquotienten definiert: f ist differenzierbar in x_0 , wenn der Grenzwert

$$\begin{aligned} f'(x_0) &:= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

existiert. Dieser Begriff lässt sich relativ einfach auf Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ verallgemeinern, wobei wir uns für den Moment auf den Spezialfall $m = 1$ zurückziehen wollen, also Funktionen der Form $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten und uns erst zu einem späteren Zeitpunkt überlegen werden, welche Voraussetzungen an den Definitionsbereich D zu stellen sind. Da wir nicht “durch Vektoren teilen” dürfen, benutzen wir die Darstellung des Differenzenquotienten mit $h \in \mathbb{R}$. Dann müssen wir den Ausdruck $x_0 + h$ allerdings anpassen, da dieser für $n > 1$ sonst nicht erklärt ist. Daher betrachten für ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Dieser Wert hat auch eine wunderbare, anschauliche Bedeutung. Er lässt sich als die Steigung der Funktion f in x_0 in Richtung v interpretieren, d.h. wenn man die Funktion f nur entlang der durch v gegebenen Geraden betrachtet. Etwas genauer gesagt können wir im Punkt $f(x_0)$ Tangenten “an unseren Graph anlegen”. Wählen wir dabei gerade die Tangente aus, die in Richtung des Vektors v zeigt, so ist die Steigung dieser Tangente durch den Grenzwert (2.1) gegeben. Die nachfolgende Graphik skizziert diese Interpretation für den Fall $n = 2$.



Leider wird an dieser Graphik auch schon der Nachteil des obigen Konzepts (das wir im Folgenden *Richtungsableitung* nennen werden) deutlich, denn im Gegensatz zum Fall $n = 1$ gibt es statt zwei Richtungen (die durch die “*Richtungsvektoren*” 1 oder -1 gegeben sind) unendlich viele Richtungen im Fall $n \geq 2$.

Andererseits hatten wir in der Analysis I in Satz 6.3 festgestellt, dass der Begriff der Differenzierbarkeit auch auf eine andere Art und Weise charakterisieren können, die auf der Interpretation der Ableitung als *lineare Approximation* an die gegebene Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ beruht: Die Funktion f ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in D$, wenn x_0 ein Häufungspunkt ist und ein Skalar $m \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $R : D \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $x \in D$ gilt, dass

$$f(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Der Skalar m ist dabei mit der Ableitung $f'(x_0)$ von f in x_0 identisch. Die Tangente an f in x_0 wird dann durch die Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ beschrieben und ist die gesuchte lineare Approximation. Auch dieses zweite Konzept lässt sich leicht auf Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in D$ verallgemeinern. Ziel ist dann eine Gleichheit der Form

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{?} \cdot (x - x_0) + R(x),$$

für alle $x \in D$ aufzustellen, wobei $R(x)$ ein Fehlerterm ist, der wieder “schneller als $x - x_0$ ” gegen 0 gehen soll. Was muss dann an der Stelle $\boxed{?}$ stehen, damit dies zu einer sinnvollen Definition der Differenzierbarkeit führt? Nun, $\boxed{?}$ soll eine “*lineare Approximation*” sein und einen Vektor des \mathbb{R}^n (nämlich $x - x_0$) auf einen Vektor des \mathbb{R}^m abbilden. Folglich sollte $\boxed{?}$ eine $m \times n$ -Matrix bzw. eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sein!

Diese wesentliche Erkenntnis werden wir für die Definition der Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher im folgenden Abschnitt verwenden, wobei wir auch das Konzept der Richtungsableitung nicht aus den Augen verlieren wollen.

2.1 Richtungsableitung und Differenzierbarkeit

Im Folgenden definieren wir die Differenzierbarkeit gleich ein bisschen allgemeiner und gehen von zwei beliebigen endlich-dimensionalen Banachräumen \mathcal{V}, \mathcal{W} und einer Abbildung $f : U \rightarrow \mathcal{W}$, wobei $U \subseteq \mathcal{V}$ offen ist, aus. Die Offenheit von U stellt dabei sicher, dass wir uns einem beliebigen Punkt $x_0 \in U$ aus "beliebiger Richtung nähern" können (d.h. für $x_0 \in U$ und $v \in \mathcal{V}$ gilt auch $x_0 + hv \in U$ für $h \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinem Betrag) und daher Grenzwertbetrachtungen sinnvoll sind. Die beiden Banachräume \mathcal{V}, \mathcal{W} unterscheiden sich nach unseren Erkenntnissen aus Abschnitt 1.7 aus Sicht der Analysis eigentlich gar nicht von den Banachräumen \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m (wenn $\dim \mathcal{V} = n$ und $\dim \mathcal{W} = m$), also warum beschränken wir uns nicht gleich auf letztere? Durch die allgemeine Vorgehensweise bleiben wir flexibler, da wir dann auch Unterräume des \mathbb{R}^n wie z.B.

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$$

betrachten können. Würden wir die Differenzierbarkeit nur für Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, definieren, so hätten wir an dieser Stelle ein Problem, da $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^3$ keine offene Teilmenge des \mathbb{R}^3 ist (klar?). Wir könnten den zwei-dimensionalen Raum \mathcal{V} zwar mit \mathbb{R}^2 identifizieren, aber dann müssten wir unsere Ergebnisse immer mit Hilfe eines Vektorraumisomorphismus auf unser \mathcal{V} übertragen, was recht umständlich sein kann.

Für die Einführung der in der Einleitung angedeuteten zwei unterschiedlichen Differenzierbarkeitskonzepte benutzen wir *Grenzwerte von Funktionen*, auf deren explizite Einführung wir verzichten, da diese genau so definiert sind wie in Analysis I ("für jede Folge ...").

Definition 2.1 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei endlich-dimensionale Banachräume und $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ und $a \in U$. Existiert für $v \in \mathcal{V}$ der Grenzwert

$$\partial_v f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \in \mathcal{W} \quad (h \in \mathbb{R}),$$

so heißt dieser Richtungsableitung von f in a in Richtung v .

Beachten Sie, dass wir in Definition 2.1 auch Vektoren v zulassen, die nicht auf die Länge 1 normiert sind, und auch der Nullvektor ist erlaubt.

Beispiel 2.2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^2$ und $v = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Dann existiert für alle $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung von f in Richtung v , denn wegen

$$\frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \frac{(a_1 + 2h)(a_2 + h)^2 - a_1 a_2^2}{h} = 2a_1 a_2 + a_1 h + 2a_2^2 + 4h + 2h^2$$

erhalten wir

$$\partial_v f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = 2a_1 a_2 + 2a_2^2,$$

also z.B. speziell für $a = (3, -1)$ erhalten wir $\partial_v f(3, -1) = 4$. (Dieser Wert entspricht aber nicht der Steigung der Funktion in $(3, -1)$ in Richtung v , denn dazu hätten wir den Vektor v zuerst auf die Länge 1 normieren müssen. Welches Ergebnis hätten wir dann erhalten?)

Die nächste und für uns wichtigere Definition basiert auf der am Anfang des Kapitels wiederholten Interpretation der Ableitung als *lineare Approximation*.

Definition 2.3 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen und $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ eine Funktion. f heißt differenzierbar in $a \in U$ (auch: total differenzierbar in a), falls es eine lineare Abbildung $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ und eine Funktion $R : U \rightarrow \mathcal{W}$ gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt:

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{\|x - a\|} = 0 \quad (2.2)$$

In diesem Fall heißt $Df(a) := L$ Ableitung von f in a .

In Nachweisen und Untersuchungen schreiben wir im Folgenden kurz v statt $x - a$ in (2.2), ersetzen analog x durch $a + v$, d.h. wir schreiben

$$f(a + v) = f(a) + L(v) + R(a + v) \quad \text{und} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(a + v)}{\|v\|} = 0. \quad (2.3)$$

Diese Schreibweise erweist sich als praktischer, wenn wir die lineare Abbildung $L = Df(x)$ explizit bestimmen wollen.

Beispiel 2.4 Es seien $U = \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{W} = \mathbb{R}$, sowie $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^2$. Dann ist f in jedem $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Um dies zu zeigen, suchen wir eine lineare Abbildung L , so dass (2.3) für alle $v = (v_1, v_2)$ gilt. Dazu beobachten wir, dass in der Gleichung

$$\begin{aligned} f(a + v) &= (a_1 + v_1)(a_2 + v_2)^2 = (a_1 + v_1)(a_2^2 + 2a_2 v_2 + v_2^2) \\ &= f(a) + a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2 + a_1 v_2^2 + 2a_2 v_1 v_2 + v_1 v_2^2 \end{aligned}$$

der Term $a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2$ aufgefasst als Abbildung in $v = (v_1, v_2)$ eine lineare Abbildung ist. Wir setzen daher

$$L(v) := a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2 \quad \text{und} \quad R(a + v) := a_1 v_2^2 + 2a_2 v_1 v_2 + v_1 v_2^2$$

für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ und zeigen nun die gewünschte Grenzwerteigenschaft von R . Dazu seien (v_{1k}) und (v_{2k}) zwei Nullfolgen in \mathbb{R} . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|R(a_1 + v_{1k}, a_2 + v_{2k})|}{\|(v_{1k}, v_{2k})\|} &= \frac{|a_1 v_{2k}^2 + 2a_2 v_{1k} v_{2k} + v_{1k} v_{2k}^2|}{\sqrt{v_{1k}^2 + v_{2k}^2}} \\ &\leq \frac{|a_1 v_{2k}^2 + 2a_2 v_{1k} v_{2k} + v_{1k} v_{2k}^2|}{|v_{2k}|} \\ &= |a_1 v_{2k} + 2a_2 v_{1k} + v_{1k} v_{2k}| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da $v_{1k} \rightarrow 0$ und $v_{2k} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Die Ableitung $Df(a)$ von f in a ist also die lineare Abbildung $Df(a) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Df(a)(v_1, v_2) = a_2^2 v_1 + 2a_1 a_2 v_2 = \begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1 a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

also die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die durch die Matrix $\begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1 a_2 \end{bmatrix}$ dargestellt wird.

Diese Herleitung war sehr mühsam. Zum Glück werden wir im nächsten Abschnitt eine viel einfachere Methode kennenlernen, um Ableitungen zu berechnen.

Bemerkung 2.5 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei endlich-dimensionale Banachräume und $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ differenzierbar in $a \in U$.

- 1) Die Ableitung von f in a , also die lineare Abbildung $L = Df(a)$ aus Definition 2.3 ist eindeutig bestimmt, denn sind $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $a + hv \in U$, so gilt

$$f(a + hv) = f(a) + L(hv) + R(a + hv) = f(a) + h \cdot L(v) + R(a + hv).$$

Hieraus erhalten wir

$$L(v) = \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} - \frac{R(a + hv)}{h}.$$

Da die linke Seite unabhängig von h ist, existiert der Grenzwert auf der rechten Seite für $h \rightarrow 0$ und ist gleich $L(v)$. Damit erhalten wir

$$L(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \partial_v f(a),$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{R(a + hv)}{h} \right\| &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\|v\| \cdot \frac{\|R(a + hv)\|}{\|hv\|} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\|v\| \cdot \frac{\|R(a + hv)\|}{\|(a + hv) - a\|} \right) = 0 \end{aligned}$$

nach Definition der Differenzierbarkeit.

- 2) Wir haben im vorangegangenen Punkt eine wesentliche Erkenntnis über den Zusammenhang von Richtungsableitung und (totaler) Ableitung gewonnen: Ist f differenzierbar in a , so gilt

$$Df(a)(v) = \partial_v f(a) \quad (2.4)$$

für alle $v \in \mathcal{V}$. (Für $v \neq 0$ haben wir dies oben nachgewiesen, für $v = 0$ kommt auf beiden Seiten Null heraus und die Gleichheit wird offensichtlich.) Es gibt zwar unendlich viele verschiedene Richtungen, falls $\dim \mathcal{V} > 1$, aber mit Hilfe der Ableitung können wir die Richtungsableitung für jede beliebige Richtung ganz einfach berechnen. Die Schreibweise in (2.4) ist allerdings gewöhnungsbedürftig: Da $Df(a)$ eine lineare Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ ist, können wir als Argument natürlich Vektoren aus \mathcal{V} einsetzen und erhalten so ein Element $Df(a)(v)$ aus \mathcal{W} – die Richtungsableitung von f in a in Richtung v .

Vergleichen Sie dazu auch die Funktion f aus Beispiel 2.4. Für die Ableitung von f in der Stelle a hatten wir die durch die Matrix $\begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1a_2 \end{bmatrix}$ definierte lineare Abbildung $Df(a) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt. Einsetzen von $v = (2, 1)$ bestätigt dann

$$\partial_v f(a) = Df(a)(v) = \begin{bmatrix} a_2^2 & 2a_1a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2a_1a_2 + 2a_2^2,$$

was wir bereits in Beispiel 2.2 ausgerechnet hatten.

- 3) Die lineare Abbildung $Df(a) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ kann nach Wahl von Basen in \mathcal{V} und \mathcal{W} durch eine Matrix dargestellt werden. Diese bezeichnen wir mit $[Df(a)]$. Für den Spezialfall $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ und bei Wahl der Standardbasen bezeichnet man die darstellende Matrix

$$[Df(a)] \in \mathbb{R}^{m,n}$$

als *Jacobi-Matrix* (oder auch *Funktionalmatrix*) von f in a .

- 4) Betrachten wir nun den Spezialfall $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar in $a \in U$ im Sinn von Analysis I und gilt $f'(a) = m \in \mathbb{R}$, so gilt nach Satz 6.3 aus Analysis I für alle $x \in U$, dass

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + R(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0.$$

Damit ist f auch differenzierbar im Sinn von Definition 2.3 und die Ableitung von f in a ist die lineare Abbildung $Df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Df(a)(v) = m \cdot v = f'(a) \cdot v. \quad (2.5)$$

Als lineare Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R} lässt sich diese durch eine 1×1 -Matrix darstellen. Wählen wir die Standardbasis in \mathbb{R} (diese ist durch das Element 1 gegeben), so erhalten wir die *Jacobi-Matrix*

$$[Df(a)] = [f'(a)].$$

Auf diese Art und Weise erhalten wir die uns aus der Analysis I bekannte Ableitung als Spezialfall der jetzt neu definierten Ableitung. Hat man sich erst einmal ausgiebig genug mit dem neuen Ableitungsbegriff beschäftigt und diesen verstanden, so unterscheidet man im Fall $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$ nicht mehr zwischen $Df(a)$ und $f'(a)$ und identifiziert die beiden Begriffe. An dieser Stelle fehlt uns dazu aber noch die Erfahrung und daher unterscheiden wir konsequent zwischen der reellen Zahl $f'(a)$ und der linearen Abbildung $Df(a)$, deren Jacobi-Matrix genau die 1×1 -Matrix mit dem Element $f'(a)$ ist.

Es gibt noch einen zweiten subtilen Unterschied zwischen den Begriffen aus Analysis I und Analysis II. In Analysis I reichte es, dass a ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs D war. In Analysis II muss der Definitionsbereich U eine offene Menge sein. Da jeder Punkt einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ auch ein Häufungspunkt dieser Menge ist, ist der Begriff aus Analysis I im Spezialfall $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$ etwas allgemeiner.

- 5) Zu guter letzt sei noch bemerkt, dass sich die Definition der Differenzierbarkeit und der Ableitung noch auf den Fall unendlich-dimensionaler Banachräume \mathcal{V} und \mathcal{W} erweitern lässt. Dann fordert man allerdings noch die Stetigkeit der linearen Abbildung $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ aus Definition 2.3 und nennt das Ganze *Fréchet-Ableitung*. (Im endlich-dimensionalen Fall ist die Eigenschaft der Stetigkeit nach Satz 1.89 automatisch erfüllt und muss nicht extra gefordert werden.) Interessierte verweisen wir dazu auf die Vorlesungen aus dem Gebiet der *Funktionalanalysis*.

Neben der Bezeichnung $Df(a)$ für die Ableitung von f in a gibt es noch viele andere Schreibweisen. In der Mathematik ist die (uns aus Analysis I vertraute) Notation $f'(a)$ weit verbreitet, daneben gibt es auch die Schreibweisen $D_a f$ oder $df(a)$. Wir benutzen zur besseren Abgrenzung des neuen Begriffs zum Differenzierbarkeitsbegriff aus Analysis I durchgängig die Notation $Df(a)$ statt $f'(a)$.

Definition 2.6 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei endlich-dimensionale Banachräume und $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $f : U \rightarrow \mathcal{W}$. Dann heißt f differenzierbar (auch: total differenzierbar), falls f in allen $x \in U$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennen wir die Abbildung $Df : \mathcal{V} \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, $x \mapsto Df(x)$ Ableitung von f .

Beachten Sie, dass die Ableitung einen anderen Wertebereich als die ursprüngliche Funktion, da die Ableitung von f in x kein Element aus \mathcal{W} , sondern eine lineare Abbildung von \mathcal{V} nach \mathcal{W} ist.

Beispiel 2.7 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $f : U \rightarrow \mathcal{W}$.

- 1) Sei f konstant, d.h. es gibt $w \in \mathcal{W}$ mit $f(x) = w$ für alle $x \in U$. Dann ist f differenzierbar in jedem $x \in U$ und es gilt $Df(x) = 0 \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ für alle $x \in U$, denn für alle $v \in \mathcal{V}$ mit $x + v \in U$ erhalten wir

$$f(x + v) = w = f(x) = f(x) + 0(v) + R(x + v) \quad \text{mit } R = 0.$$

- 2) Sei $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ linear. Dann ist f differenzierbar und es gilt $Df(x) = f$ für alle $x \in \mathcal{V}$, denn aus der Linearität von f folgt für alle $v \in \mathcal{V}$, dass

$$f(x + v) = f(x) + f(v) = f(x) + f(v) + R(x)$$

mit $R = 0$. Die Ableitung einer linearen Funktion ist also an jeder Stelle gleich dieser ursprünglichen linearen Funktion, was auch interpretativ einleuchtend ist, da eine lineare Abbildung an jeder Stelle natürlich die beste lineare Approximation dieser Funktion ist.

Beachten Sie an dieser Stelle noch einmal den Unterschied zwischen der Ableitung $Df(x)$ an der Stelle x und der *Ableitungsfunktion* Df . Diese ist gegeben durch

$$Df : \mathcal{V} \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \quad x \mapsto Df(x) = f$$

und ist daher *konstant*. Da auch $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ein Banachraum ist (vgl. dazu Abschnitt 2.5), ist Df nach Teil 2) selbst differenzierbar und es gilt $D(Df) = 0$.

Dies ist eine einfache Verallgemeinerung eines uns sehr gut bekannten Spezialfalls. Ist nämlich $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear, dann gilt $f(x) = mx$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{R}$. Es gilt dann $f'(x) = m$ und $f''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beachten Sie, dass auch hier $Df(x) = f$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die darstellende Matrix dieser linearen Abbildung $Df(x)$ ist dann gerade

$$\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(x) \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 2.8 1) *Komponentenweise Differenzierbarkeit:* Wir betrachten den Spezialfall $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$. Ist dann $U \subseteq \mathcal{V}$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathcal{W}$, so ist f genau dann differenzierbar in $x \in U$, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar sind. In diesem Fall gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$:

$$Df(x)(v) = (Df_1(x)(v), \dots, Df_m(x)(v)) \in \mathbb{R}^m.$$

Dies folgt daraus, dass sich die Gleichung

$$f(x+v) = f(x) + L(v) + R(x+v)$$

mit einer linearen Funktion $L = (L_1, \dots, L_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und einer “Rest”-Funktion $R = (R_1, \dots, R_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ komponentenweise betrachten lässt:

$$f_i(x+v) = f_i(x) + L_i(v) + R_i(x+v), \quad i = 1, \dots, m.$$

Die oben behauptete Äquivalenz folgt dann sofort aus Grenzwertbetrachtungen für R und R_1, \dots, R_m unter Ausnutzung der komponentenweisen Konvergenz im \mathbb{R}^m (siehe Beispiel 1.32).

- 2) Ein Spezialfall von 1) sind Kurven. Dies sind für uns an dieser Stelle¹ Abbildungen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Ist I offen und ist φ differenzierbar, so gilt für alle $t \in I$ und alle $v \in \mathbb{R}$, dass

$$D\varphi(t)(v) = \begin{bmatrix} D\varphi_1(t)(v) \\ \vdots \\ D\varphi_m(t)(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \cdot v \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \cdot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \end{bmatrix} \cdot v,$$

wobei wir (2.5) ausnutzen konnten, da $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ reellwertige Funktionen einer Veränderlichen sind. Der Spaltenvektor bzw. die $m \times 1$ -Matrix

$$\varphi'(t) := \begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \end{bmatrix} = D\varphi(t)(1)$$

ist also die darstellende Matrix von $D\varphi(t)$ und hat als Vektor auch eine anschauliche physikalische Interpretation: Fassen wir unsere Kurve als Bahnkurve eines Teilchens im Raum in Abhängigkeit von der Zeit t auf, so entspricht $\varphi'(t)$ gerade dem Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zum Zeitpunkt t in der Position $\varphi(t)$. Für diesen Spezialfall verwenden wir im Folgenden stets die Bezeichnung $\varphi'(t)$ statt $[D\varphi(t)]$ für die darstellende Matrix der Ableitung. Und wir können sogar noch einen Schritt

¹Manche Lehrbücher sind hier strenger und bezeichnen nur das Bild von φ als Kurve und φ als *Parameterdarstellung*, vgl. dazu Abschnitt 3.3. Außerdem müssten wir noch weitere Voraussetzungen an φ stellen um zu garantieren, dass das Bild $\varphi(I)$ Ähnlichkeit mit dem hat, was wir uns von einer *Kurve* vorstellen.

weitergehen: Dadurch, dass wir in diesem Fall den Differenzierbarkeitsbegriff auf den aus Analysis I zurückführen konnten, können wir in diesem Spezialfall statt einem offenen Intervall I nun auch halboffene oder abgeschlossene Intervalle I als Definitionsbereich erlauben, denn für die Differenzierbarkeit in Analysis I reichte es zu fordern, dass der betreffende Punkt ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs ist.

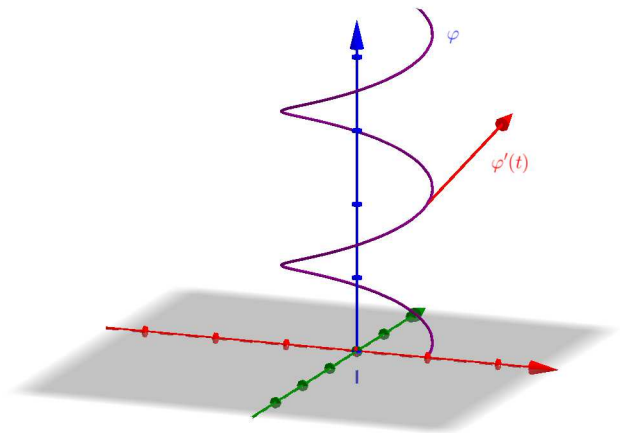
- 3) Die Beobachtungen aus 2) gelten analog für Funktionen $A = [a_{ij}]_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$ über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Da wir $\mathbb{R}^{m,n}$ mit dem $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ identifizieren können, ist die Differenzierbarkeit von A äquivalent zur der jedes einzelnen "Eintrags" $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$. Für die Jacobi-Matrix $[a'_{ij}(t)]_{i,j}$ der Ableitung $DA(t)$ schreiben wir kurz $A'(t)$.

Beispiel 2.9 Die Kurve $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}.$$

Dies ist eine Schraubenlinie, die sich im Abstand 1 um die z -Achse gegen den Uhrzeigersinn in die Höhe schraubt. Wir erhalten

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$



und stellen fest, dass dieser Vektor im Punkt $\varphi(t)$ tangential an der Kurve anliegt.

Satz 2.10 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen und $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ differenzierbar in $x \in U$. Dann ist f stetig in x .

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in U mit Grenzwert x . Da f in x differenzierbar ist, gibt es eine Funktion $R : U \rightarrow \mathcal{W}$ mit

$$f(x_n) = f(x) + Df(x)(x_n - x) + R(x_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(x_n)}{\|x_n - x\|} = 0.$$

Da $Df(x)$ linear und daher stetig ist, erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) + Df(x)(x_n - x) + R(x_n)) \\ &= f(x) + Df(x)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} R(x_n) = f(x) + 0 + 0. \end{aligned}$$

Folglich ist f stetig in x . \square

2.2 Partielle Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den Spezialfall $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$. Wie können wir die Ableitung $Df(x)$ einer differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathcal{W}$, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, $x \in U$, explizit berechnen? Dabei reicht es schon, die Jacobi-Matrix von f in x zu bestimmen, weil die lineare Abbildung $Df(x)$ dadurch eindeutig bestimmt ist. Wir betrachten dazu ein instruktives Beispiel.

Beispiel 2.11 Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$. Falls f differenzierbar ist, so gilt $Df(x) \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ für jedes $x \in \mathbb{R}^3$, d.h. die darstellende Matrix von $Df(x)$ hat die Form

$$A := [Df(x)] = [a_1 \ a_2 \ a_3] \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

Da wir die j -te Spalte (die hier nur aus einem Eintrag besteht) einer Matrix durch Multiplikation mit dem j -ten Einheitsvektor erhalten und das Einsetzen eines Vektors in die Ableitung $Df(x)$ gerade die Richtungsableitung von f in x in Richtung dieses Vektors ergibt (siehe (2.4)), erhalten wir

$$a_j = Ae_j = Df(x)(e_j) = \partial_{e_j} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}.$$

In unserem Fall gilt also speziell

$$a_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_1 + h)^2 x_2 + x_3 - (x_1^2 x_2 + x_3)}{h}.$$

Halten wir hier einmal für einen Moment inne und betrachten diesen Grenzwert genauer! Dieser entspricht nämlich exakt dem Grenzwert, den wir zu berechnen hätten, wenn wir die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$ bestimmen wollten, wobei $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ zwei Konstanten sind. Wenn wir die Situation auf diese Weise interpretieren, brauchen wir uns allerdings nicht die Mühe zu machen, den Grenzwert explizit über die obige Formel zu berechnen, sondern wir erhalten ihn ganz einfach mit Hilfe unserer Ableitungsregeln aus Analysis I:

$$g'(x_1) = 2x_1 x_2.$$

Damit folgt schließlich

$$a_1 = 2x_1 x_2.$$

Analog können wir mit den anderen Einträgen von A verfahren. Wir berechnen

$$\begin{aligned} a_2 &= \partial_{e_2} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^2(x_2 + h) + x_3 - (x_1^2 x_2 + x_3)}{h} = x_1^2 \\ \text{und } a_3 &= \partial_{e_3} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2 + (x_3 + h) - (x_1^2 x_2 + x_3)}{h} = 1, \end{aligned}$$

indem wir unsere Ableitungsregeln aus Analysis I auf die Funktionen $x_2 \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$ (mit $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ konstant) und $x_3 \mapsto x_1^2 x_2 + x_3$ (mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ konstant) anwenden. Somit erhalten wir schließlich *unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit von f* , dass

$$[Df(x)] = [2x_1 x_2 \ x_1^2 \ 1].$$

Auf Grund der Erkenntnisse des vorangegangenen Beispiels erhalten die Richtungsableitungen einer Funktion in Richtung der Einheitsvektoren einen eigenen Namen: Wir sprechen in diesem Fall von *partiellen Ableitungen*, da wir anschaulich gesprochen “alle Variablen bis auf eine festhalten” und als Konstanten betrachten, also nur “*teilweise*” ableiten.

Definition 2.12 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

- 1) Existiert in $x \in U$ die Richtungsableitung von f in Richtung des i -ten Standardbasisvektors $e_i \in \mathbb{R}^n$, so heißt f in x partiell nach x_i differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \partial_i f(x) := \partial_{e_i} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

i -te partielle Ableitung von f in $x \in U$.

- 2) f heißt partiell nach x_i differenzierbar, falls f in allen $x \in U$ partiell differenzierbar nach x_i ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

die i -te partielle Ableitung von f .

- 3) f heißt partiell differenzierbar, falls f nach allen x_i , $i = 1, \dots, n$ differenzierbar ist.
- 4) f heißt stetig partiell differenzierbar, falls f partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$, stetig sind.

Bemerkung 2.13 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x \in U$. Aus dem Zusammenhang zwischen Ableitung und Richtungsableitung erhalten wir sofort, dass f partiell differenzierbar in x ist. Die darstellende Matrix $[Df(x)] \in \mathbb{R}^{m,n}$ der Ableitung $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (also die Jacobi-Matrix von f in x) erhalten wir dann analog zur Vorgehensweise in Beispiel 2.11 wie folgt: Die i -te Spalte der Jacobi-Matrix ist gegeben durch

$$[Df(x)] \cdot e_i = Df(x)(e_i) = \partial_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Außerdem gilt bei komponentenweiser Betrachtung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)(e_i) = \begin{bmatrix} Df_1(x)(e_i) \\ \vdots \\ Df_m(x)(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{bmatrix}$$

Damit hat die Jacobi-Matrix die folgende Gestalt:

$$[Df(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]_{i,j}$$

Die Einträge der Jacobi-Matrix haben auch eine schöne anschauliche Bedeutung, wie wir aus Abschnitt 2.1 wissen. Da partielle Ableitungen nichts anderes als Richtungsableitungen sind, entspricht $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ der Steigung der i -ten Komponentenfunktion f_i in Richtung x_j .

Beispiel 2.14 1) Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \sin x \cos y \\ \sin x \sin y \\ \cos y \end{bmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Unter der Annahme, dass f differenzierbar ist (dies erhalten wir später aus Satz 2.16), gilt

$$\begin{bmatrix} Df(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \\ 0 & -\sin y \end{bmatrix}.$$

2) Wir hatten schon festgestellt, dass für eine in $x \in U$ differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, die klassische Ableitung $f'(x)$ gerade dem Eintrag der (1×1) -Jacobi Matrix $\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix}$ entspricht. Somit erhalten wir für diesen Spezialfall einfach

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = f'(x).$$

Bisher haben wir immer Differenzierbarkeit vorausgesetzt, bevor wir die Einträge der Jacobi-Matrix mit Hilfe der partiellen Ableitungen berechnet haben. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies notwendig war.

Beispiel 2.15 Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit²

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x^2 \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f partiell differenzierbar in $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

und analog erhalten wir $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Unser einziger Kandidat für die Jacobi-Matrix von f in $(0, 0)$ ist daher die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$. Allerdings ist f nicht differenzierbar in $(0, 0)$, denn f ist dort nicht einmal stetig. Dazu betrachten wir die Folge $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = (0, 0) \quad \text{aber} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

Damit stellen wir fest: *Aus der partiellen Differenzierbarkeit von f folgt i.A. nicht die Differenzierbarkeit von f .*

²Im Folgenden bezeichnen wir im Fall $n = 2$ oder $n = 3$ die Variablen der Einfachheit halber auch häufig mit x, y bzw. x, y, z statt x_1, x_2 bzw. x_1, x_2, x_3 .

Haben wir aber zusätzlich zur Existenz der partiellen Ableitungen noch eine weitere Eigenschaft, so erhalten wir auch die Differenzierbarkeit der untersuchten Funktion.

Satz 2.16 *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Ist f stetig partiell differenzierbar, dann ist f auch stetig differenzierbar und für alle $x \in U$ gilt*

$$\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Beweis: Da eine Funktion genau dann differenzierbar ist, wenn sie komponentenweise differenzierbar ist (Bemerkung 2.8), reicht es den Spezialfall $m = 1$ zu betrachten. Sei nun $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ beliebig. Definiere die Abbildung $F_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_x(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \cdot v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \quad (2.6)$$

für $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist F_x eine lineare Abbildung und der einzig mögliche Kandidat für die Ableitung von f an der Stelle x . Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Sie überzeugen sich leicht davon, dass dann für jedes $v = (v_1, \dots, v_n)$ mit $x + v \in U_\varepsilon(x)$ auch $(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) \in U_\varepsilon(x)$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Wir zeigen nun, dass f differenzierbar in x ist und $Df(x) = F_x$ gilt, indem wir zeigen dass

$$R(x+v) := \frac{f(x+v) - f(x) - F_x(v)}{\|v\|}, \quad x+v \in U_\varepsilon(x) \quad (2.7)$$

für $v \rightarrow 0$ gegen Null geht. Dazu beobachten wir, dass wir in der Summe

$$\begin{aligned} f(x+v) - f(x) &= f(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) \\ &\quad + f(x_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, x_2, x_3 + v_3, \dots, x_n + v_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + v_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + v_j, \dots, x_n + v_n) \right. \\ &\quad \left. - f(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) \right) \end{aligned}$$

wegen der partiellen Differenzierbarkeit von f auf jede der Funktionen

$$g_j : \overline{I(x_j, x_j + v_j)} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n)$$

für $j = 1, \dots, n$ den Mittelwertsatz (siehe Analysis I Satz 6.29) anwenden können. (Zur Erinnerung: In Analysis I hatten wir die Schreibweise $I(x_j, y_j) =]x_j, y_j[\cup]y_j, x_j[$ eingeführt.

Mit $\overline{I(x_j, y_j)}$ meinen wir dann natürlich den Abschluss dieser Menge, also das entsprechende abgeschlossene Intervall.) Wegen

$$g'_j(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

erhalten wir daher zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ ein ξ_j zwischen x_j und $x_j + v_j$, so dass

$$f(x + v) - f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) \cdot h.$$

Setzen wir dies und (2.6) in (2.7) ein, so erhalten wir

$$R(x + v) = \sum_{j=1}^n \frac{v_j}{\|v\|} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right),$$

und wegen $|v_j| \leq \|v\|$ für alle $j = 1, \dots, n$ folgt daraus

$$|R(x + v)| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + v_{j+1}, \dots, x_n + v_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right|.$$

Da ξ_j jeweils zwischen x_j und $x_j + v_j$ liegt, geht dieser Ausdruck wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen für $v \rightarrow 0$ gegen Null. Folglich ist f differenzierbar in x mit $Df(x) = F_x$. Offenbar ist f sogar stetig differenzierbar. \square

Beispiel 2.17 Gegeben sei die Funktion $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ x^2y - y^2 \end{bmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Offensichtlich ist f partiell differenzierbar und wir erhalten die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2xy, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = x^2 - 2y.$$

Diese sind als Funktionen auf ganz \mathbb{R}^2 stetig und daher ist f nach Satz 2.16 differenzierbar und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$[Df(x, y)] = \begin{bmatrix} y & x \\ 2xy & x^2 - 2y \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 2.18 In den allermeisten Fällen hilft Satz 2.16 beim Nachweis der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Allerdings gibt es auch Funktionen, die zwar differenzierbar sind, deren partielle Ableitungen aber nicht stetig sind, wie z.B. (Übung) die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.3 Rechenregeln der Differentiation

Unser nächstes Ziel ist die Herleitung von Rechenregeln der Differentiation, so dass wir mit Hilfe von Ableitungen bereits bekannter Funktionen weitere Ableitungen berechnen können. Zentral ist dabei die Kettenregel.

Satz 2.19 (Kettenregel) *Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{U}$, $V \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $\varphi : U \rightarrow \mathcal{V}$, $f : V \rightarrow \mathcal{W}$ Abbildungen, so dass $\varphi(U) \subseteq V$ gilt. Ist φ differenzierbar in $t \in U$ und f differenzierbar in $\varphi(t)$, dann ist $f \circ \varphi$ differenzierbar in t und es gilt*

$$D(f \circ \varphi)(t) = Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t).$$

Beweis: Wegen der Differenzierbarkeit von φ in t und von f in $\varphi(t)$ gilt für alle $u \in \mathcal{U}$ und $v \in \mathcal{V}$ mit $t + u \in U$ und $\varphi(t) + v \in V$, dass

$$\begin{aligned} \varphi(t + u) &= \varphi(t) + D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t + u) \quad \text{und} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{R_\varphi(t + u)}{\|u\|} = 0, \\ f(\varphi(t) + v) &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(v) + R_f(\varphi(t) + v) \quad \text{und} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{R_f(\varphi(t) + v)}{\|v\|} = 0. \end{aligned}$$

Sei im Folgenden $u \in \mathcal{U}$ hinreichend klein (d.h. hinreichend klein in der Norm), so dass $t + u \in U$ gilt. Setzen wir dann

$$v := \varphi(t + u) - \varphi(t) = D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t + u), \quad (2.8)$$

so folgt, dass

$$\begin{aligned} f(\varphi(t + u)) &= f(\varphi(t) + \varphi(t + u) - \varphi(t)) = f(\varphi(t) + v) \\ &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(v) + R_f(\varphi(t) + v) \\ &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t + u)) + R_f(\varphi(t) + v) \\ &= f(\varphi(t)) + Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(u)) + Df(\varphi(t))(R_\varphi(t + u)) + R_f(\varphi(t) + v), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Linearität von $Df(\varphi(t))$ ausgenutzt haben. Nun ist $Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t)$ wegen

$$(Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t))(u) = Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(u))$$

die gewünschte Ableitung von $f \circ \varphi$ in x , wenn wir zeigen können, dass R mit

$$R(t + u) := Df(\varphi(t))(R_\varphi(t + u)) + R_f(\varphi(t) + v)$$

die Eigenschaft hat, dass

$$0 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{R(t + u)}{\|u\|} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{Df(\varphi(t))(R_\varphi(t + u))}{\|u\|} + \frac{R_f(\varphi(t) + v)}{\|u\|} \right). \quad (2.9)$$

Dazu schätzen wir die beiden Summanden auf der rechten Seite von 2.9 nacheinander ab. Da die linearen Abbildungen $Df(\varphi(t))$ und $D\varphi(t)$ nach Satz 1.89 stetig sind, existieren nach Satz 1.87 zwei Konstanten $c_1, c_2 \geq 0$, so dass

$$\|Df(\varphi(t))(\tilde{v})\| \leq c_1 \|\tilde{v}\| \quad \text{und} \quad \|D\varphi(t)(\tilde{u})\| \leq c_2 \|\tilde{u}\|$$

für alle $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ und alle $\tilde{v} \in \mathcal{V}$ gilt. Damit erhalten wir einerseits, dass

$$0 \leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|Df(\varphi(t))(R_\varphi(t+u))\|}{\|u\|} \leq c_1 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|R_\varphi(t+u)\|}{\|u\|} = 0.$$

Andererseits gilt wegen (2.8), dass

$$\|v\| = \|D\varphi(t)(u) + R_\varphi(t+u)\| \leq c_2 \cdot \|u\| + \|R_\varphi(t+u)\|,$$

woraus wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|R_f(\varphi(t)+v)\|}{\|u\|} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\|R_f(\varphi(t)+v)\|}{\|v\|} \cdot \frac{\|v\|}{\|u\|} \right) \\ &\leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|R_f(\varphi(t)+v)\|}{\|v\|} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \left(c_2 + \frac{\|R_\varphi(t+u)\|}{\|u\|} \right) = 0 \end{aligned}$$

erhalten, wobei wir für den ersten Grenzwert ausgenutzt haben, dass aus $u \rightarrow 0$ auch $v \rightarrow 0$ folgt. Damit haben wir (2.9) gezeigt. \square

Bemerkung 2.20 1) Mit denselben Bezeichnungen und unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 2.19 gilt

$$D(f \circ \varphi)(t) \in L(\mathcal{U}, \mathcal{W}), \quad Df(\varphi(t)) \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \quad \text{und} \quad D\varphi(t) \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V}).$$

Mit $k := \dim \mathcal{U}$, $n := \dim \mathcal{V}$ und $m := \dim \mathcal{W}$ und nach Wahl von Basen in \mathcal{U} , \mathcal{V} und \mathcal{W} gilt dann für die darstellenden Matrizen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D(f \circ \varphi)(t) \end{bmatrix}}_{m \times k} = \begin{bmatrix} Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Df(\varphi(t)) \end{bmatrix}}_{m \times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} D\varphi(t) \end{bmatrix}}_{n \times k},$$

denn wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, übersetzt sich die Komposition von linearen Abbildungen gerade in die Multiplikation der darstellenden Matrizen.

- 2) Im Folgenden seien $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$. Wie sehen dann die partiellen Ableitungen von $f \circ \varphi$ aus? Diese sind ja gerade die Einträge der Jacobi-Matrix. Um dies näher zu untersuchen bezeichnen wir zur besseren Unterscheidung die Variablen in $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$ mit t_1, \dots, t_k und die in $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ mit x_1, \dots, x_n . Dann erhalten wir die

partielle Ableitung der i -ten Komponentenfunktion von $f \circ \varphi$ in t , also den (i, j) -Eintrag von $[D(f \circ \varphi)(t)]$ durch Multiplikation der i -ten Zeile von $[Df(\varphi(t))]$ mit der j -ten Spalte von $D\varphi(t)$, d.h. es gilt

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)_i}{\partial t_j}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\varphi(t)) & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\varphi(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_j}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_j}(t) \end{bmatrix} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial g_\ell}{\partial t_j}(t).$$

3) Im Spezialfall $k = n = m = 1$ erhalten wir die Kettenregel aus Analysis I, denn

$$\begin{aligned} [(f \circ \varphi)'(t)] &= [D(f \circ \varphi)(t)] = [Df(\varphi(t))] \cdot [D\varphi(t)] \\ &= [f'(\varphi(t))] \cdot [\varphi'(t)] = [f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)], \end{aligned}$$

d.h. es gilt $(f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

4) In der Physik und in den Ingenieurwissenschaften stehen die beiden Funktionen f und $f \circ \varphi$ häufig für dieselbe physikalische Größe, die nur in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben wird. Z.B. kann die Temperatur T auf und über der Erdoberfläche statt in kartesischen Koordinaten in der Form $T(x_1, x_2, x_3)$ einfacher durch Abstand r vom Erdmittelpunkt, geographische Breite θ und Länge ϕ in der Form $T(r, \theta, \phi)$ angegeben werden. Die Abbildung φ übernimmt dann die Rolle einer *Koordinatentransformation*, die den *Kugelkoordinaten* (r, θ, ϕ) eines Punktes seine kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zuordnet. (Auf dieses spezielle Beispiel kommen wir etwas später noch einmal im Detail zurück.)

Daher nennt man die Komponentenfunktionen von φ bisweilen einfach x_1, \dots, x_n , lässt das jeweilige Argument weg und bezeichnet sowohl f als auch $f \circ \varphi$ mit f . Damit vereinfacht sich die Kettenregel für die partiellen Ableitungen zu der folgenden einprägsamen Formel:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_j} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial x_\ell}{\partial t_j}$$

Beispiel 2.21 Wir betrachten die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + \sin y \quad \text{und} \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ e^t \end{bmatrix},$$

sowie die Komposition $F = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos^2 t + \sin e^t$. Dann gilt

$$[Df(x)] = \begin{bmatrix} 2x & \cos y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [D\varphi(t)] = \begin{bmatrix} -\sin t \\ e^t \end{bmatrix},$$

woraus wir schließlich erhalten, dass

$$\begin{aligned} [DF(t)] &= [Df(\varphi(t))] \cdot [D\varphi(t)] = \begin{bmatrix} 2 \cos t & \cos e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ e^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \cos t \sin t + e^t \cos e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen und der in Physik/Ingenieurwissenschaften üblichen Vereinfachungen $x = \varphi_1(t) = \cos t$ und $y = \varphi_2(t) = e^t$ lautet die Rechnung

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2x(-\sin t) + \cos y \cdot e^t = -2 \sin t \cos t + e^t \cos e^t.$$

Mit Hilfe der Kettenregel lässt sich das Kriterium für Differenzierbarkeit aus Satz 2.16 auf beliebige endlich-dimensionale Banachräume verallgemeinern.

Satz 2.22 *Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen und $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ eine Abbildung. Existieren alle Richtungsableitungen von f auf ganz U und sind diese stetig, so ist f differenzierbar auf U .*

Beweis: Die Beweisidee ist die Rückführung auf den Fall $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ mit Hilfe von Isomorphismen $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$ und $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{W}$ mit Hilfe der Komposition

$$\tilde{f} := (\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi) : \Phi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

denn \tilde{f} ist genau dann differenzierbar, wenn f differenzierbar ist. Die Ausführung der Details dieses Beweises bleibt zur Übung Ihnen überlassen. \square

Als nächstes wollen wir die *Produktregel* aus Analysis I verallgemeinern. Dabei stoßen wir auf die kleine Schwierigkeit, dass es im Zusammenhang mit Funktionen mehrerer Veränderlicher recht viele unterschiedliche Produkte gibt, wie z.B. die Skalarmultiplikation, die Matrixmultiplikation, Skalarprodukte oder das Vektorprodukt. Um all diese unterschiedlichen Produkte unter einen Hut zu bekommen beobachten wir, dass ein *Produkt* in der Regel ein *Distributivgesetz* erfüllt und verträglich mit der Skalarmultiplikation ist. Dies führt dazu, dass wir ein Produkt als *bilineare Abbildung* im Sinn der Linearen Algebra auffassen können. Diesen Begriff führen wir an dieser Stelle als Spezialfall der noch allgemeineren *multilinearen Abbildungen* ein, da wir letztere im übernächsten Abschnitt ebenfalls benötigen werden.

Definition 2.23 *Seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, K ein Körper und $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k, \mathcal{W}$ (möglicherweise unendlich-dimensionale) Vektorräume über K . Ferner sei $\mu : \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{W}$.*

- 1) μ heißt *multilinear* bzw. *genauer k -linear*, falls μ in jeder Komponente linear ist, d.h. für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ ist jede der Abbildungen

$$\mu(v_1, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_k) : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{W}, \quad v \mapsto \mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

für feste $v_j \in \mathcal{V}_j$, $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k$ linear.

- 2) μ heißt *Multilinearform* bzw. *k -Linearform*, falls μ k -linear ist und $\mathcal{W} = K$ gilt.
- 3) μ heißt *bilinear*, falls μ 2-linear ist und Bilinearform, falls zusätzlich $\mathcal{W} = K$ gilt.

Ist zusätzlich $\mathcal{V}_1 = \dots = \mathcal{V}_k = \mathcal{V}$, so bezeichnen wir die Menge der k -linearen Abbildungen von \mathcal{V}^k nach \mathcal{W} mit $L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Bilinearformen kennen Sie aus der *Linearen Algebra II*, wo Sie üblicherweise auch allgemeine Körper K erlauben. Im Folgenden beschränken wir uns natürlich wieder auf den Spezialfall $K = \mathbb{R}$.

Beispiel 2.24 1) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear ist (wie jedes andere Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n auch).

2) Die Matrixmultiplikation $\mu : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{m,\ell}$, $(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist bilinear, denn für alle $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n,\ell}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\lambda A_1 + \mu A_2) \cdot B = \lambda A_1 \cdot B + \mu A_2 \cdot B \quad \text{und} \quad A \cdot (\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A \cdot B_1 + \mu A \cdot B_2.$$

3) Für jeden beliebigen \mathbb{R} -Vektorraum \mathcal{V} ist auch die Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ bilinear.

4) Das *Vektorprodukt* (auch *Kreuzprodukt*) $\times : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(v, w) \mapsto v \times w$ mit

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

ist ebenfalls bilinear, wie Sie leicht nachprüfen können

5) Die Determinante $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\det(x_1, \dots, x_n) := \det \left(\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \right)$$

ist multilinear bzw. genauer n -linear. (Auch dies wissen Sie aus der Linearen Algebra!)

Satz 2.25 (“Produktregel”) Seien $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{W}$ endlich-dimensionale Banachräume und sei $\mu : \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{W}$ bilinear. Dann ist μ differenzierbar und für alle $(x, \tilde{x}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ und alle $(v, \tilde{v}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ gilt

$$D\mu(x, \tilde{x})(v, \tilde{v}) = \mu(x, \tilde{v}) + \mu(v, \tilde{x}). \quad (2.10)$$

Beweis: Den Beweis führen wir in zwei Schritten:

Schritt 1: Es gibt ein $C \geq 0$, so dass für alle $v \in \mathcal{V}$ und alle $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ gilt, dass

$$\|\mu(v, \tilde{v})\| \leq C \cdot \|v\| \cdot \|\tilde{v}\|. \quad (2.11)$$

(Analog wie bei linearen Abbildungen kann man zeigen, dass diese Bedingung äquivalent zur Stetigkeit von bilinearen Abbildungen ist - bei endlich-dimensionalen Urbildräumen ist die Stetigkeit dann auch immer gegeben.) Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von \mathcal{V} und $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m)$ eine Basis von $\tilde{\mathcal{V}}$. Dann gibt es zu jedem $v \in \mathcal{V}$ und jedem $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{und} \quad \tilde{v} = \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{v}_j.$$

(Wir unterdrücken hier in der Notation die Abhängigkeit dieser Koeffizienten von v bzw. \tilde{v} .) Die Koordinatenprojektionen $v \mapsto \alpha_i$ und $\tilde{v} \mapsto \beta_j$ sind für jedes $i = 1, \dots, n$ bzw.

$j = 1, \dots, m$ linear, also nach Satz 1.89 stetig, und folglich existiert eine Konstante $c \geq 0$, so dass

$$|\alpha_i| \leq c\|v\| \quad \text{und} \quad |\beta_j| \leq c\|\tilde{v}\| \quad (2.12)$$

für alle $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ und alle $v \in \mathcal{V}$, $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ gilt. (Wir wählen diese Konstante als das Maximum von $n + m$ nach Satz 1.87 existierenden Konstanten.) Dann folgt

$$\begin{aligned} \|\mu(v, \tilde{v})\| &= \left\| \mu \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{v}_j \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \mu(v_i, \tilde{v}_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i| \cdot |\beta_j| \cdot \|\mu(v_i, \tilde{v}_j)\| \\ &\leq M \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i| \cdot |\beta_j|, \quad \text{wobei } M := \max_{i,j} \|\mu(v_i, \tilde{v}_j)\| \\ &\leq M n m c \cdot \|v\| \cdot \|\tilde{v}\|, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (2.12) ausgenutzt haben. Wähle also $C := M n m c$.

Schritt 2: μ ist differenzierbar und es gilt (2.10). Sei $(x, \tilde{x}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ beliebig. Wegen der Bilinearität von μ gilt dann für alle $(v, \tilde{v}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$, dass

$$\mu(x + v, \tilde{x} + \tilde{v}) = \mu(x, \tilde{x}) + \mu(x, \tilde{v}) + \mu(v, \tilde{x}) + \mu(v, \tilde{v}).$$

Da die Abbildung $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{W}$, $(v, \tilde{v}) \mapsto \mu(x, \tilde{v}) + \mu(v, \tilde{x})$ linear ist (klar?), reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{(v, \tilde{v}) \rightarrow 0} \frac{\mu(v, \tilde{v})}{\|(v, \tilde{v})\|} = 0$$

gilt. Doch halt! Was bedeutet eigentlich $\|(v, \tilde{v})\|$? Wir hatten nur vorausgesetzt, dass \mathcal{V} und $\tilde{\mathcal{V}}$ Banachräume sind, über den Vektorraum $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ haben wir nichts gesagt. Dies brauchten wir aber auch nicht, da $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ endlich-dimensional ist! Nach Satz 1.94 sind daher alle Normen auf $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ äquivalent und $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ ist bzgl. jeder dieser Normen ein Banachraum. Es ist also egal, mit welcher Norm wir den Vektorraum $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ versehen. Aus taktischen Gründen wählen wir die durch $\|(v, \tilde{v})\| := \|v\| + \|\tilde{v}\|$ für alle $(v, \tilde{v}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ gegebene Norm. (Zeigen Sie zur Übung, dass dies tatsächlich eine Norm auf $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ definiert.) Wegen $\|v\| \cdot \|\tilde{v}\| \leq (\|v\| + \|\tilde{v}\|)(\|v\| + \|\tilde{v}\|)$ und (2.11) erhalten wir damit

$$\frac{\|\mu(v, \tilde{v})\|}{\|(v, \tilde{v})\|} \leq \frac{C \cdot \|v\| \cdot \|\tilde{v}\|}{\|v\| + \|\tilde{v}\|} \leq \frac{C \cdot (\|v\| + \|\tilde{v}\|)(\|v\| + \|\tilde{v}\|)}{\|v\| + \|\tilde{v}\|} = C \cdot (\|v\| + \|\tilde{v}\|)$$

und daher

$$\lim_{(v, \tilde{v}) \rightarrow 0} \frac{\mu(v, \tilde{v})}{\|(v, \tilde{v})\|} = 0.$$

Somit ist μ differenzierbar und es gilt (2.10). \square

Beispiel 2.26 1) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$, $B : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,\ell}$ differenzierbar in $t \in I$. (Dann ist auch die Funktion $A \cdot B : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,\ell}$, $t \mapsto A(t) \cdot B(t)$ differenzierbar in t und es gilt³

$$(A \cdot B)'(t) = A'(t) \cdot B'(t) + A(t) \cdot B'(t).$$

Um dies zu zeigen, fassen wir das Produkt $A \cdot B$ als Verkettung $A \cdot B = \mu \circ (A, B)$ der Matrixmultiplikation $\mu : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{m,\ell}$ und der Funktion $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,\ell}$ mit $C(t) = (A(t), B(t))$, die wir natürlich ebenfalls wieder eintragsweise differenzieren können, wobei $C'(t) = (A'(t), B'(t))$ gilt. Mit Hilfe der Kettenregel und Satz 2.25 erhalten wir, dass für alle $t \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} (A \cdot B)'(t) &= (D(A \cdot B)(t))(1) = \left(D(\mu \circ C)(t) \right)(1) = \left(D\mu(C(t)) \right)(DC(t)(1)) \\ &= \left(D\mu(C(t)) \right)(C'(t)) = D\mu(A(t), B(t))(A'(t), B'(t)) \\ &= \mu(A(t), B'(t)) + \mu(A'(t), B(t)) = A'(t) \cdot B'(t) + A(t) \cdot B'(t). \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $m = n = \ell$ erhalten wir die in Analysis I in Satz 6.10 bewiesene Produktregel für reellwertige Funktionen einer Veränderlichen.

- 2) Analog zu 1) erhalten wir für in $t \in I$ differenzierbare Kurven $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall I , dass

$$(\langle \varphi, \psi \rangle)'(t) = \langle \varphi'(t), \psi(t) \rangle + \langle \varphi(t), \psi'(t) \rangle.$$

- 3) Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Die durch $(x, \tilde{x}) \mapsto x^\top A \tilde{x}$ gegebene Abbildung $\mu_A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist bilinear und somit nach Satz 2.25 differenzierbar. Ferner gilt für alle $(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und alle $(v, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, dass

$$D\mu_A(x, \tilde{x})(v, \tilde{v}) = \mu_A(x, \tilde{v}) + \mu_A(v, \tilde{x}) = x^\top A \tilde{v} + v^\top A \tilde{x}.$$

Die eigentliche Interpretation der Ableitung als *lineare Approximation* an die ursprüngliche Funktion lässt sich an diesem Beispiel noch einmal eindrucksvoll verdeutlichen. Betrachten wir die Gleichung

$$\mu_A(x + v, \tilde{x} + \tilde{v}) = (x + v)^\top A(\tilde{x} + \tilde{v}) = x^\top A \tilde{x} + x^\top A \tilde{v} + v^\top A \tilde{x} + v^\top A \tilde{v},$$

so ist der Term $\mu_A(v, \tilde{v}) = v^\top A \tilde{v}$ für den Fall, dass sowohl v als auch \tilde{v} klein in der Norm sind, vernachlässigbar klein gegenüber den anderen Termen. In der Nähe von (x, \tilde{x}) ist die Funktion μ_A also näherungsweise durch

$$\mu_A(x + v, \tilde{x} + \tilde{v}) \approx x^\top A \tilde{x} + x^\top A \tilde{v} + v^\top A \tilde{x} = \mu_A(x, \tilde{x}) + D\mu_A(x, \tilde{x})(v, \tilde{v})$$

gegeben.

³Wir erinnern hier an unsere Vereinbarung in Bemerkung 2.8, dass wir die Jacobi-Matrix der Ableitung von A in t in diesem Fall mit $A'(t)$ bezeichnen und dass wir diese einfach durch Ableiten der jeweiligen Komponentenfunktionen a_{ij} von A erhalten. Der Zusammenhang mit der Ableitung $DA(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m,n})$ ist dann durch $DA(t)(1) = A'(t)$ gegeben. (Klar? Wenn nicht, Übung!) Dies gilt natürlich analog für B .

- 4) Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ betrachten wir die Abbildung $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\top A x$. (Dies ist nichts anderes als die zu der durch die Matrix A gegebene Bilinearform gehörende *quadratische Form*, siehe *Lineare Algebra II*.) Dann ist q_A zwar nicht bilinear, aber es lässt sich als Komposition in der Form

$$q_A = \mu_A \circ \delta$$

schreiben, wobei μ_A die Bilinearform aus 1) und $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, x)$ die “*Verdopplungsfunktion*” ist. Letztere ist offensichtlich linear und daher gilt $D\delta(x) = \delta$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nach Teil 3) von Beispiel 2.7. Somit erhalten wir aus 3) und mit Hilfe der Kettenregel, dass für alle $x, v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$\begin{aligned} Dq_A(x)(v) &= \left(D\mu_A(\delta(x)) \circ D\delta(x) \right)(v) = \left(D\mu_A(\delta(x)) \circ \delta \right)(v) \\ &= \left(D\mu_A(\delta(x)) \right)(\delta(v)) = (D\mu_A(x, x))(v, v) \\ &\stackrel{3)}{=} \mu_A(x, v) + \mu_A(v, x) = x^\top A v + v^\top A x = x^\top A v + x^\top A^\top v \\ &= x^\top (A + A^\top) v. \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix von q_A in $x \in \mathbb{R}^n$ ist also $[Dq_A(x)] = x^\top (A + A^\top) \in \mathbb{R}^{1,n}$. (Diese hätten wir auch anders bestimmen können, indem wir einfach

$$q_A(x) = x^\top A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

ausmultipliziert und dann die partiellen Ableitungen $\frac{\partial q_A}{\partial x_i}$ bestimmt hätten. Übung: Zeigen Sie, dass wir so tatsächlich dasselbe Ergebnis erhalten.)

Ist nun speziell $A = A^\top$ eine symmetrische Matrix, so gilt $[Dq_A(x)] = 2x^\top A$. Ist noch spezieller $n = 1$, also $A = [a] \in \mathbb{R}^{1,1}$, so gilt einfach $q_A(x) = ax^2$ und $q'_A(x) = 2ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. in unserer neuen Differentiationstheorie:

$$[Dq_A(x)] = [2xa] = [q'_A(x)]$$

- 5) Nun sind Sie dran! Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $f, g : U \rightarrow \mathcal{W}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $f + g$ und λf differenzierbar sind mit $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$ und $D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x)$ für alle $x \in U$. Nutzen Sie dazu die Bilinearität der Skalarmultiplikation $m : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ und die Linearität der Addition $\alpha : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$.

Satz 2.25 lässt sich auf multilineare Abbildungen verallgemeinern:

Satz 2.27 Seien $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k, \mathcal{W}$ endlich-dimensionale Banachräume und $\mu : \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{W}$ sei k -linear. Dann ist μ differenzierbar und für alle $(x_1, \dots, x_k), (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k$ gilt

$$D\mu(x_1, \dots, x_k)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^k \mu(x_1, \dots, x_{j-1}, v_j, x_{j+1}, \dots, x_k).$$

Beweis: Übung. \square

2.4 Der Schrankensatz

Ein sowohl in der Analysis I als auch im Beweis von Satz 2.16 sehr hilfreicher Satz war der *Mittelwertsatz*: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(Unsere Voraussetzungen in Analysis I, siehe dort Satz 6.29, waren sogar noch etwas schwächer.) Lässt sich dieses Resultat auf differenzierbare Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen verallgemeinern? Da wir keine Division im \mathbb{R}^n zur Verfügung haben, müssten wir den Mittelwertsatz natürlich etwas anpassen, indem wir die Differenz $b - a$ auf die andere Seite bringen. Die Frage lautet also: Gibt es zu $a, b \in G$ ein ξ “zwischen” a und b (was dies genau bedeuten soll müssen wir uns natürlich noch überlegen), so dass

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a)$$

gilt? Leider ist die Antwort an dieser Stelle i.A. *nein*, selbst dann, wenn wir uns auf den Raum $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ einschränken. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ (dies ist die “*Schraubenkurve*” aus Beispiel 2.9) und $a = 0$, $b = 2\pi$ und alle $\xi \in [0, 2]$ gilt nämlich

$$Df(\xi)(2\pi - 0) = 2\pi(\sin \xi, -\cos \xi, 1) \neq (0, 0, 2\pi) = f(2\pi) - f(0).$$

Wir lassen uns von diesem Gegenbeispiel allerdings nicht entmutigen und versuchen stattdessen wichtige Folgerungen aus dem Mittelwertsatz zu verallgemeinern. Eine davon war der *Schrankensatz* (siehe Korollar 6.30 in Analysis I). Bevor wir auf dessen Verallgemeinerung näher eingehen, definieren wir zunächst einmal den oben angedeuteten Ausdruck “zwischen a und b ” für Vektoren mit Hilfe der sogenannten *Verbindungsstrecke*.

Definition 2.28 Sei \mathcal{V} ein Vektorraum und seien $a, b \in \mathcal{V}$. Dann heißt

$$\overline{ab} := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

die Verbindungsstrecke zwischen a und b .

Für den Beweis des folgenden Schrankensatzes benötigen wir ein kleines Hilfsresultat, das wir in Hinblick auf spätere Zwecke gleich ein bisschen allgemeiner formulieren.

Lemma 2.29 Seien X, Y zwei metrische Räume und $g_1, g_2 : X \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt:

- 1) Die Menge $\{x \in X \mid g_1(x) = g_2(x)\}$ ist abgeschlossen.
- 2) Gilt speziell $Y = \mathbb{R}$ (mit der Standardmetrik), so ist auch $\{x \in X \mid g_1(x) \leq g_2(x)\}$ abgeschlossen.

Beweis: Übung. \square

Satz 2.30 (Schranksatz) Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ differenzierbar. Ferner seien $a, b \in U$, so dass die Verbindungsstrecke \overline{ab} zwischen a und b in U enthalten ist. Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in \overline{ab}} \|Df(x)\| \cdot \|b - a\|,$$

wobei $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ mit der Operatornorm bzgl. der Normen in \mathcal{V} und \mathcal{W} versehen ist.

Beweis: Sei $M := \sup_{x \in \overline{ab}} \|Df(x)\|$. Falls $M = \infty$, so ist die Aussage trivial. Daher nehmen wir an, dass $M < \infty$ gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \left\{ t \in [0, 1] \mid \|f(a + t(b - a)) - f(a)\| \leq t(M + \varepsilon)\|b - a\| \right\}.$$

Wenn wir $1 \in \mathcal{T}_\varepsilon$ zeigen können, dann gilt $\|f(b) - f(a)\| \leq (M + \varepsilon)\|b - a\|$ und da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daraus

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|,$$

womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $1 \in \mathcal{T}_\varepsilon$ gilt. Den Nachweis führen wir in zwei Schritten, indem wir zuerst $\sup \mathcal{T}_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$ und dann $\sup \mathcal{T}_\varepsilon = 1$ zeigen.

Schritt 1: $\sup \mathcal{T}_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$: Offenbar gilt $0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$, d.h. \mathcal{T}_ε ist nichtleer. Außerdem ist \mathcal{T}_ε beschränkt und daher existiert $s := \sup \mathcal{T}_\varepsilon \in [0, 1]$. Folglich gibt es nach Lemma 4.30 aus Analysis I eine Folge (t_n) in \mathcal{T}_ε mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$. Nach Lemma 2.29 ist \mathcal{T}_ε abgeschlossen und daher folgt $s \in \mathcal{T}_\varepsilon$.

Schritt 2: $s = \sup \mathcal{T}_\varepsilon = 1$. Angenommen $s < 1$. Dann gibt es wegen der Differenzierbarkeit von f zu $x_0 := a + s(b - a)$ eine Funktion $R : U \rightarrow \mathcal{W}$, so dass für alle $x = a + t(b - a)$ mit $t \in [0, 1]$ gilt, dass

$$\begin{aligned} f(a + t(b - a)) &= f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R(x) \\ &= f(a + s(b - a)) + Df(x_0)((t - s)(b - a)) + R(a + t(b - a)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

und

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|} = \lim_{t \rightarrow s} \frac{R(a + t(b - a))}{|t - s| \cdot \|b - a\|}.$$

Folglich gibt es zu unserem bereits gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle t mit $s < t < s + \delta$ gilt, dass

$$\|R(a + t(b - a))\| < \varepsilon \cdot |t - s| \cdot \|b - a\|.$$

Damit erhalten wir aus (2.13), dass

$$\begin{aligned} \|f(a + t(b - a)) - f(a + s(b - a))\| &\leq \|Df(x_0)\| \cdot |t - s| \cdot \|b - a\| + \varepsilon \cdot |t - s| \cdot \|b - a\| \\ &\leq (M + \varepsilon) \cdot (t - s) \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

(Wegen $t > s$ konnten wir $|t - s|$ durch $(t - s)$ ersetzen.) Hieraus folgt andererseits, dass

$$\begin{aligned} & \|f(a + t(b - a)) - f(a)\| \\ & \leq \|f(a + t(b - a)) - f(a + s(b - a))\| + \|f(a + s(b - a)) - f(a)\| \\ & \leq (M + \varepsilon) \cdot (t - s) \cdot \|b - a\| + (M + \varepsilon)s \cdot \|b - a\| \\ & \leq (M + \varepsilon)t\|b - a\|, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt $s \in \mathcal{T}_\varepsilon$ ausgenutzt haben. Aus der letzten Ungleichung folgt $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$, was wegen $s < t$ im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von $s = \sup \mathcal{T}_\varepsilon$ steht. Also war unsere Annahme falsch und es gilt $s = \sup \mathcal{T}_\varepsilon = 1$, womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Korollar 2.31 (Konstanzkriterium) *Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, sei $G \subseteq \mathcal{V}$ ein Gebiet (d.h. G ist offen und zusammenhängend) und sei $f : G \rightarrow \mathcal{W}$ differenzierbar. Falls $Df(x) = 0$ für alle $x \in G$ gilt, so ist f konstant.*

Beweis: Sei $x_0 \in G$ beliebig gewählt und $U := \{x \in G \mid f(x) = f(x_0)\}$. Wir zeigen, dass U sowohl offen, als auch abgeschlossen in G ist. Wegen des Zusammenhangs von G folgt dann $U = G$, da U wegen $x_0 \in U$ nicht leer ist.

i) U ist abgeschlossen: Dies folgt sofort aus Lemma 2.29.

ii) U ist offen: Sei $a \in U$ beliebig. Wegen der Offenheit von G gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(a) \subseteq G$. Wir zeigen, dass auch $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ gilt. Dazu sei $b \in U_\varepsilon(a)$ beliebig. Dann gilt auch für die Verbindungsstrecke zwischen a und b , dass $\overline{ab} \subseteq U_\varepsilon(a)$. (Klar?) Mit dem Schrankensatz erhalten wir dann

$$\|f(b) - f(x_0)\| = \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in \overline{ab}} \|Df(x)\| \cdot \|b - a\| = 0$$

und daher $f(b) = f(x_0)$, woraus wiederum $b \in U$ folgt. Da b beliebig war, folgt $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ und da a beliebig war, folgt die Offenheit von U . \square

Der folgende neue Begriff liefert uns Teilmengen, die aus offensichtlichen Gründen für die Verwendung des Schrankensatzes hervorragende Definitionsbereiche liefern.

Definition 2.32 *Sei \mathcal{V} ein Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subseteq \mathcal{V}$ heißt konvex, falls K zu je zwei Punkten aus K auch deren Verbindungsstrecke enthält, d.h. wenn für alle $a, b \in K$ gilt, dass $\overline{ab} \subseteq K$.*

Beispiel 2.33 1) Ist \mathcal{V} ein normierter Raum und $a \in \mathcal{V}$, dann ist $U_\varepsilon(a)$ konvex. (Dies hatten wir im Beweis von Korollar 2.31 bereits benutzt.) Ebenso ist $\overline{U_\varepsilon(a)}$ konvex.

2) Im \mathbb{R}^n sind (offene oder abgeschlossene) Kugeln und Quader konvex. Nicht konvex ist dagegen die Teilmenge $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. (Klar?)

Die Vokabel “konvex” haben wir in der Analysis I auch schon für Funktionen kennengelernt. Tatsächlich gibt es einen Zusammenhang zwischen beiden Begriffen. Man kann nämlich zeigen (Übung), dass eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, genau dann konvex ist, wenn ihr *Epigraph*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y\}$$

eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist. Doch zurück zu unseren Banachräumen. Eine weitere Folgerung aus dem Schrankensatz besagt, dass stetig differenzierbare Funktionen auf kompakten konvexen Mengen nicht nur stetig, sondern sogar Lipschitz-stetig sind.

Korollar 2.34 *Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ stetig differenzierbar, sowie $K \subseteq U$ kompakt und konvex. Dann ist f Lipschitz-stetig auf K , d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $x, y \in K$ gilt:*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

Beweis: Da $Df : U \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ stetig ist, ist auch die Komposition aus Operatornorm und Df , also die Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|Df(x)\|$ stetig und nimmt daher, da K kompakt ist, dort nach Satz 1.67 ihr Maximum (und Minimum) an, d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass $\|Df(x)\| \leq L$ für alle $x \in K$ gilt. Mit dem Schrankensatz erhalten wir daraus wegen der Konvexität von K , dass $\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$ für alle $x, y \in K$ gilt. \square

Im Folgenden wollen wir hin und wieder einmal den Banachschen Fixpunktsatz anwenden und dazu benötigen wir ein einfaches Kriterium dafür, wann eine Abbildung eine Kontraktion, also Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ ist. Analog zum Beweis von Korollar 2.34 erhalten wir das folgende Resultat:

Korollar 2.35 *Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen und konvex, sowie $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ differenzierbar. Falls es eine Konstante $L < 1$ gibt, so dass $\|Df(x)\| \leq L$ für alle $x \in U$ gilt, so ist f eine Kontraktion.*

Auf die Kompaktheit einer Teilmenge K von U (und die Stetigkeit der Ableitung Df) haben wir hier verzichten können, da wir diese Eigenschaft im Beweis von Korollar 2.34 nur benötigt haben, um die Beschränktheit von Df beweisen zu können. Diese haben wir hier allerdings schon vorausgesetzt.

Für den Spezialfall $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ schaffen wir es allerdings, den *Mittelwertsatz* in der eingangs beschriebenen Form zu beweisen. Dies bleibt zu Übungszwecken wieder einmal Ihnen überlassen.

Satz 2.36 *Seien \mathcal{V} ein endlich-dimensionaler Banachraum, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner seien $a, b \in U$, so dass die Verbindungsstrecke \overline{ab} zwischen a und b in U enthalten ist. Dann gibt es ein $\xi \in \overline{ab}$ mit $\xi \neq a, b$, so dass*

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a).$$

Beweis: Übung. (Sie dürfen dazu schon die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.6 benutzen!) \square

2.5 Höhere Ableitungen

Der doch recht abstrakte und gewöhnungsbedürftige Begriff der Ableitung in endlich-dimensionalen Banachräumen V, W bringt leider noch weitere Tücken mit sich. Betrachten wir nämlich eine differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow W$, $U \subseteq V$ offen, so ist die Ableitung eine Funktion $Df : U \rightarrow L(V, W)$ mit dem Bildbereich $L(V, W)$, da ja $Df(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ eine lineare Abbildung von V nach W ist. Nun ist auch $L(V, W)$ ein endlich-dimensionaler Banachraum, denn wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, gilt $\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ und als Norm bietet sich die Operatornorm

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, \quad f \in L(V, W)$$

an. Daher macht es Sinn, auch die Ableitung Df auf Differenzierbarkeit zu untersuchen. Ist Df in $x \in U$ differenzierbar, so ist $D(Df)(x)$ eine lineare Abbildung von V nach $L(V, W)$. Wir können daher zweimal hintereinander Elemente aus V einsetzen und erhalten

$$\underbrace{\underbrace{D(Df)(x)}_{\in L(V, L(V, W))}}_{\in L(V, W)}(v_1)(v_2) \in W$$

für alle $v_1, v_2 \in V$. Ist Df nun in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so ist die Ableitung von Df die Funktion

$$D(Df) : G \rightarrow L(V, L(V, W)),$$

und ist diese wiederum differenzierbar in $x \in U$, so gilt

$$D(D(Df))(x) \in L(V, L(V, L(V, W))).$$

Dies wird sehr schnell unübersichtlich und wir sollten uns daher ein besseres Konzept für höhere Ableitungen überlegen. Das folgende instruktive Beispiel wird uns dabei helfen.

Beispiel 2.37 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und sei $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x^\top Ax$. Dann ist q nach Teil 4) von Beispiel 2.26 differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $Dq(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die durch

$$[Dq(x)] = x^\top A$$

dargestellte lineare Abbildung. Nun ist die Ableitung $Dq : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ offensichtlich linear⁴, da die Zuordnung $x \mapsto x^\top A$ linear ist. Daher ist Dq differenzierbar und es gilt $D(Dq)(x) = Dq$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nach Teil 3) von Beispiel 2.7. Da andererseits $D(Dq)(x)$

⁴**Warnung!** Dies ist ein absoluter Ausnahmefall! Erinnern Sie sich an dieser Stelle daran, dass zwar für eine differenzierbare Funktion $Df(x)$ an jeder Stelle x eine lineare Abbildung ist, wohingegen die Ableitung $Df : x \mapsto Df(x)$ i.A. *nicht* linear ist!

formal eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist, können wir zweimal hintereinander Vektoren aus V einsetzen und erhalten für alle $v_1, v_2 \in V$, dass

$$D(Dq)(x)(v_1)(v_2) = Dq(v_1)(v_2) = v_1^\top A v_2.$$

An dieser Stelle können wir aber auch statt des “Nacheinandereinsetzens” von v_1 und v_2 gleich die Zuordnung $(v_1, v_2) \mapsto v_1^\top A v_2$ betrachten. Dies ist eine bilineare Abbildung, die durch die Matrix A dargestellt wird.

Die letzte Erkenntnis im obigen Beispiel ist die wesentliche Idee bei der Einführung höherer Ableitungen: Statt als lineare Abbildung von \mathcal{V} nach $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ interpretieren wir die zweite Ableitung einfach als bilineare Abbildung von $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ nach \mathcal{W} . Der wichtige theoretische Hintergrund dazu ist die Tatsache, dass $L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W}))$ gilt, d.h. beide Mengen sind als Vektorräume isomorph. Dazu betrachten wir den *kanonischen Isomorphismus* $\Phi_2 : L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W})) \rightarrow L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, wobei $\tilde{\varphi} := \Phi_2(\varphi) \in L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ für $\varphi \in L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W}))$ durch

$$\tilde{\varphi}(v_1, v_2) := \varphi(v_1)(v_2)$$

für alle $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ gegeben ist. (Nachweis: Übung!) Allgemeiner gilt

$$L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong L(\mathcal{V}, L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})),$$

wie man mit Hilfe des Isomorphismus

$$\Phi_k : L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow L(\mathcal{V}, L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})), \quad \Phi_k(\varphi)(v_1)(v_2, \dots, v_k) := \varphi(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

einsieht. (Wieder eine Übung!) Damit erhalten wir dann z.B.

$$L^3(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong L(\mathcal{V}, L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})) \cong L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, L(\mathcal{V}, \mathcal{W}))),$$

denn natürlich gilt $L^1(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Per Induktion folgt damit auch

$$\dim L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V})^k \cdot \dim \mathcal{W}. \quad (2.14)$$

Definition 2.38 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, sowie $f : U \rightarrow \mathcal{W}$. Dann definieren wir induktiv:

- 1) Ist f bereits $(k-1)$ -mal differenzierbar und ist die $(k-1)$ -te Ableitung

$$D^{k-1}f : U \rightarrow L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$$

differenzierbar in $x \in U$, so heißt f k -mal differenzierbar in x und die k -te Ableitung $D^k f(x) \in L^k(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ von f in x ist gegeben durch

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) := D(D^{k-1}f)(x)(v_1)(v_2, \dots, v_k), \quad v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{V}.$$

- 2) Ist f in allen $x \in U$ k -mal differenzierbar, so heißt f k -mal differenzierbar.
- 3) Ist f k -mal differenzierbar und $D^k f$ stetig, so heißt f k -mal stetig differenzierbar.

Bemerkung 2.39 Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 2.38 gilt

$$\underbrace{\underbrace{D(D^{k-1}f)(x)}_{\in L(\mathcal{V}, L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W}))}}_{\in L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W})}(v_1)(v_2, \dots, v_k) \in \mathcal{W},$$

d.h. $D^k f(x)$ ist tatsächlich eine Abbildung von \mathcal{V}^k nach \mathcal{W} . Nach unseren Vorbemerkungen vor Definition 2.38 ist klar, dass diese Abbildung k -linear ist.

Beispiel 2.40 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und sei wieder $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x^\top Ax$ die schon in Beispiel 2.37 betrachtete Abbildung. Dann ist q zweimal differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Dq(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto x^\top Av$$

und $D^2q(x) : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, \tilde{v}) \mapsto v^\top A \tilde{v}.$

Da die zweite Ableitung D^2q nicht mehr explizit von x abhängt ist sie konstant, also ist q sogar dreimal differenzierbar mit $D^3q(x) = 0 \in L^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Wie schon bei der ersten Ableitung gibt es auch bei den höheren Ableitungen einen Zusammenhang mit Richtungsableitungen.

Satz 2.41 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Vektorräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, und $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ sei k -mal differenzierbar in $x \in U$. Dann gilt für alle $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$, dass

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = \partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f(x) := \partial_{v_1} \left(\partial_{v_2} \dots (\partial_{v_k} f) \dots \right)(x).$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage per Induktion nach k .

“ $k = 1$ ”: Laut Bemerkung 2.5 (siehe Formel (2.4)) gilt $Df(x)(v_1) = \partial_{v_1} f(x)$.

“ $k - 1 \Rightarrow k$ ”: Seien $v_2, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ beliebig, aber fest. Wir betrachten den “Einsetzungshomomorphismus”

$$\Psi : L^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{W}, \quad \varphi \mapsto \varphi(v_2, \dots, v_k).$$

Dieser ist offensichtlich linear (klar?) und daher differenzierbar. Außerdem gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$(\Psi \circ D^{k-1}f)(x) = \Psi(D^{k-1}f(x)) = D^{k-1}f(x)(v_2, \dots, v_k) = \partial_{v_2} \dots \partial_{v_k} f(x). \quad (2.15)$$

Da $D^{k-1}f$ in $x \in U$ differenzierbar ist, ist auch $\Psi \circ D^{k-1}f$ differenzierbar in x und für die Ableitung $D(\Psi \circ D^{k-1}f)(x) \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel (beachten Sie dabei die Linearität von Ψ) für alle $v_1 \in \mathcal{V}$, dass

$$\begin{aligned} D(\Psi \circ D^{k-1}f)(x)(v_1) &= \left(D\Psi(D^{k-1}f(x)) \circ D(D^{k-1}f)(x) \right)(v_1) \\ &= \Psi(D(D^{k-1}f)(x))(v_1) \\ &= D(D^{k-1}f)(x)(v_1)(v_2, \dots, v_k) \\ &= D^k f(x)(v_1, v_2, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit Hilfe des bereits bewiesenen Induktionsanfangs für $k = 1$, dass

$$D(\Psi \circ D^{k-1}f)(x)(v_1) = \partial_{v_1}((\Psi \circ D^{k-1}f))(x) = \partial_{v_1}(\partial_{v_2} \dots \partial_{v_k} f)(x),$$

wobei wir im letzten Schritt (2.15) benutzt haben. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Definition 2.42 Seien \mathcal{W} ein endlich-dimensionaler Banachraum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ eine Abbildung, sowie $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ (nicht notwendigerweise paarweise verschieden). Existiert der Ausdruck

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) := \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f(x) \in \mathcal{W}, \quad (2.16)$$

so heißt dieser k -te partielle Ableitung (auch partielle Ableitung k -ter Ordnung) von f in x nach x_{j_1}, \dots, x_{j_k} . (Wir erinnern uns dabei daran, dass ∂_j eine Abkürzung für ∂_{e_j} , also die Richtungsableitung in Richtung des j -ten Standardbasisvektors ist.)

Mit Definition 2.42 haben wir jetzt nicht nur partielle Ableitungen höherer Ordnung eingeführt, sondern auch den Begriff der partiellen Ableitung erster Ordnung auf beliebige Bildräume \mathcal{W} verallgemeinert.

Bemerkung 2.43 Seien \mathcal{W} ein endlich-dimensionaler Banachraum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, sowie $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ eine Abbildung.

- 1) Sind einige der Indizes j_i in (2.16) identisch, so fassen wir diese in der Schreibweise zusammen wie z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x) := \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x).$$

- 2) Mi Hilfe von Satz 2.16 und Satz 2.41 lässt sich zeigen (Übung):

Existieren alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung von f und sind diese stetig, so ist f k -mal (stetig) differenzierbar.

- 3) Sei f zweimal differenzierbar in x , sowie $v = (v_1, \dots, v_n), \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D^2 f(x)(v, \tilde{v}) &= D^2 f(x) \left(\sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \tilde{v}_j D^2 f(x)(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \tilde{v}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

da ja $D^2 f(x)(e_i, e_j) = \partial_i(\partial_j f(x))$ nach Satz 2.41 gilt.

Die erste Ableitung $Df(x)$ können wir als lineare Abbildung aus $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ nach Wahl von Basen jeweils durch eine Matrix darstellen. Bei der zweiten Ableitung ist das nicht mehr so leicht, denn $D^2f(x)$ ist nun eine bilineare Abbildung aus $L^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Allerdings haben Sie in der Linearen Algebra gelernt, dass man *Bilinearformen* (d.h. wenn der Bildraum \mathcal{W} ein Körper ist) durch Matrizen darstellen kann. Gilt also speziell $\mathcal{W} = \mathbb{R}$, so sind die zweiten partiellen Ableitungen von f in x reellwertig und (2.17) lässt sich in “Matrix/Vektor-Schreibweise” darstellen:

$$D^2f(x)(v, \tilde{v}) = v^\top H_f(x) \tilde{v},$$

wobei

$$H_f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

die sogenannte *Hesse-Matrix* von f in x ist. Aus der Sicht der Linearen Algebra ist dies gerade die darstellende Matrix der Bilinearform $D^2f(x) \in L^2(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. Vergessen Sie dabei an dieser Stelle nicht, dass es sich hier um zwei grundlegend verschiedene Darstellungsmethoden durch Matrizen handelt! Beachten Sie dazu, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} [Df(x)] &\in \mathbb{R}^{1,n} \quad \text{und} \quad Df(x)(v) = [Df(x)] \cdot v \\ H_f(x) &\in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{und} \quad D^2f(x)(v, \tilde{v}) = v^\top \cdot H_f(x) \cdot \tilde{v} \end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung hört die anschauliche Darstellung durch Matrizen dann auch leider schon auf. Zwar können auch höhere Ableitungen dargestellt werden, jedoch benötigt man hierzu *Tensoren höherer Stufen*. Z.B. lebt die dritte Ableitung $D^3f(x) \in L^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (falls f in x dreimal differenzierbar ist) bereits in einem Vektorraum der Dimension n^3 und für eine Darstellung benötigen wir dann schon einen sogenannten “*dreistufigen Tensor*”, denn Sie sich (grob gesprochen) als “*würfelförmige Matrix*” vorstellen könnten. (Analog betrachtet man Vektoren als *einstufige* und Matrizen als *zweistufige Tensoren*). Wir werden uns allerdings an dieser Stelle nicht weiter damit beschäftigen, sondern verweisen auf Spezialvorlesungen, die sich mit der Theorie von Tensoren beschäftigen.

Beispiel 2.44 1) Gegeben Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin x \sin y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos x \sin y, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin x \cos y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\sin x \sin y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \cos x \cos y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \cos x \cos y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\sin x \sin y. \end{aligned}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen von f existieren auf ganz \mathbb{R}^2 und sind stetig, daher ist f zweimal differenzierbar und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{bmatrix} Df(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{bmatrix}, \quad H_f(x) = \begin{bmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{bmatrix}.$$

- 2) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^T A x$ wie in Beispiel 2.40. Die lineare Abbildung $Dq(x)$ wird durch die Matrix $x^T A \in \mathbb{R}^{1,n}$ dargestellt und die bilineare Abbildung $D^2q(x)$ hat für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.
- 3) Wir betrachten die euklidische Norm $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ im \mathbb{R}^n . (Der Buchstabe “r” soll hier an “Radius” im Sinn von “Abstand vom Ursprung” erinnern.) Dann ist r in $x = 0$ nicht differenzierbar, da für beliebiges $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegen

$$\frac{\|0 + hv\|}{h} = \|v\| \cdot \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \|v\| & \text{für } h > 0, \\ -\|v\| & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

die Richtungsableitung von r in Richtung v nicht existiert. In jedem $x \in U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist r allerdings differenzierbar, denn wegen $r(x) = \|x\| = \sqrt{x^T x}$ lässt sich r als Komposition $r = f \circ q$ schreiben, wobei $q : x \mapsto x^T x$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t}$ die Wurfelfunktion bezeichnet. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir für alle $x \in U$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$ unter Ausnutzung von Teil 4) von Beispiel 2.26, dass

$$Dr(x)(v) = (Df(q(x)) \circ Dq(x))(v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \end{bmatrix} \cdot (2x^T I_n v) = \frac{x^T}{\|x\|} v.$$

Die darstellende Matrix von $Dr(x)$ ist also

$$\begin{bmatrix} Dr(x) \end{bmatrix} = \frac{x^T}{\|x\|}$$

für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Damit erhalten wir insbesondere

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{x^T}{\|x\|} e_j = \frac{x_j}{\|x\|}.$$

(Dies hätten wir natürlich auch durch direktes partielles Ableiten der Funktion $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ herausfinden können. Überprüfen Sie das!) Mit Hilfe der Quotientenregel (aus Analysis I) erhalten wir dann für die zweiten partiellen Ableitungen für alle $x \in U$, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j}{\|x\|} \right) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_j \right) \cdot r(x) - x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} r(x)}{r(x)^2} \\ &= \frac{\delta_{ij} r(x) - x_j \frac{x_i}{r(x)}}{r(x)^2} = \frac{\delta_{ij} \|x\|^2 - x_i x_j}{\|x\|^3}, \end{aligned}$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet, also

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen existieren für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ auf ganz U und sind dort stetig. Also ist f auf der offenen Menge U zweimal differenzierbar und für alle $x \in U$ gilt

$$H_f(x) = \frac{1}{\|x\|^3} \begin{bmatrix} x_2^2 + \dots + x_n^2 & -x_1 x_2 & \dots & -x_1 x_n \\ -x_2 x_1 & x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x_{n-1} x_n \\ -x_n x_1 & \dots & -x_n x_{n-1} & x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \end{bmatrix}.$$

Fällt Ihnen etwas auf? In allen bisherigen Beispielen erhielten wir als Hesse-Matrix eine symmetrische Matrix. Ist das immer so? D.h. gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad (2.18)$$

für alle i, j und alle x ? Im Allgemeinen leider nicht!

Beispiel 2.45 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann gilt (Übung)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Allerdings stellt man auch fest (Übung), dass f zwar differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar in $(0, 0)$ ist.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass (2.18) erfüllt ist, wenn $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ zweimal differenzierbar ist. (Hierbei sind natürlich \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, sowie $U \subseteq \mathcal{V}$ offen.) Wegen der linearen Approximationseigenschaft der Ableitung gilt für in $x \in U$ differenzierbares $g : U \rightarrow \mathcal{W}$ und kleine $u, v \in \mathcal{V}$, dass $g(x + u) - g(x) \approx Dg(x)(u)$. Wenden wir diese Eigenschaft sowohl auf Df als auch auf f an, so erhalten wir für $x \in U$, $u, v \in \mathcal{V}$ und betragskleine $h \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} h^2 D^2 f(x)(u, v) &= D^2 f(x)(hu, hv) = D(Df)(x)(hu)(hv) \\ &\approx (Df(x + hu) - Df(x))(hv) = Df(x + hu)(hv) - Df(x)(hv) \\ &\approx f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x). \end{aligned}$$

Das folgende Lemma besagt, dass diese Approximation für hinreichend kleines $|h|$ beliebig genau wird.

Lemma 2.46 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, sei $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, und sei $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ zweimal differenzierbar in $x \in U$. Dann gilt für alle $u, v \in \mathcal{V}$, dass

$$D^2 f(x)(u, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x)}{h^2}.$$

Beweis: Sei o.B.d.A. $\mathcal{W} = \mathbb{R}$. (Andernfalls wählen wir eine Basis w_1, \dots, w_m von \mathcal{W} und schreiben f in der Form $\sum_{i=1}^m f_i w_i$ mit $f_i : G \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, die in x zweimal differenzierbar sind.) Ferner seien o.B.d.A. $u, v \in \mathcal{V}$ so klein, dass $x + u + tv, x + tv \in U$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Wir definieren $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := f(x + u + tv) - f(x + tv), \quad t \in [0, 1].$$

Da f zweimal differenzierbar in x ist, ist f per Definition auch differenzierbar (in ganz U) und somit ist auch F differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 6.29 aus Analysis I) existiert ein $\tau \in]0, 1[$, so dass

$$\begin{aligned} & f(x+u+v) - f(x+v) - f(x+u) + f(x) \\ &= F(1) - F(0) = F'(\tau) \cdot (1-0) = DF(\tau)(1) \\ &= (Df(x+u+\tau v) \circ (v \cdot Id_{\mathbb{R}}))(1) - (Df(x+\tau v) \circ (v \cdot Id_{\mathbb{R}}))(1), \\ &= Df(x+u+\tau v)(v) - Df(x+\tau v)(v) \\ &= (Df(x+u+\tau v) - Df(x))(v) - (Df(x+\tau v) - Df(x))(v). \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten zur dritten Zeile die Kettenregel benutzt haben, sowie, dass die Ableitung der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto w + tv$ für $w \in \mathbb{R}^n$ durch $v \cdot Id_{\mathbb{R}}$ gegeben ist. (Klar?) Da $Df : U \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ in $x \in U$ differenzierbar ist, gibt es eine Funktion $R : U \rightarrow L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ mit

$$Df(y) = Df(x) + (D(Df)(x))(y-x) + R(y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{R(y)}{\|y-x\|} = 0. \quad (2.19)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & f(x+u+v) - f(x+v) - f(x+u) + f(x) \\ &= (D(Df)(x)(u+\tau v) + R(x+u+\tau v))(v) - (D(Df)(x)(\tau v) + R(x+\tau v))(v) \\ &= D^2f(x)(u+\tau v, v) - D^2f(x)(\tau v, v) + (R(x+u+\tau v) - R(x+\tau v))(v) \\ &= D^2f(x)(u, v) + \tilde{R}(u, v)(v), \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei wir im letzten Schritt die Bilinearität von $D^2f(x)$ ausgenutzt und die Abkürzung

$$\tilde{R}(u, v) := R(x+u+\tau v) - R(x+\tau v)$$

eingeführt haben. Wegen (2.19) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für alle $y \in U$ gilt:

$$\|y-x\| < \delta_\varepsilon \quad \implies \quad \frac{\|R(y)\|}{\|y-x\|} < \varepsilon,$$

wobei $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ mit der Operatornorm versehen ist. Sind dann u, v so klein gewählt, dass $\|u+v\| < \delta_\varepsilon$, so gilt auch $\|u+\tau v\|, \|\tau v\| < \delta_\varepsilon$ und daher

$$\begin{aligned} \|R(x+u+\tau v)\| &< \varepsilon\|u+\tau v\| \leq \varepsilon(\|u\| + \|v\|) \\ \text{und} \quad \|R(x+\tau v)\| &< \varepsilon\|\tau v\| \leq \varepsilon(\|u\| + \|v\|). \end{aligned}$$

Beachten wir dann noch, dass für die Operatornorm auf $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ nach Bemerkung 1.90 für alle $y \in U$ gilt, dass $\|R(y)(v)\| \leq \|R(y)\| \cdot \|v\|$, so erhalten wir

$$\|\tilde{R}(u, v)(v)\| \leq \|R(x+u+\tau v)\| \cdot \|v\| + \|R(x+\tau v)\| \cdot \|v\| < 2\varepsilon(\|u\| + \|v\|) \cdot \|v\|. \quad (2.21)$$

Seien nun $u, v \in \mathcal{V}$ im Gegensatz zu den vorherigen Abschätzungen beliebig, aber fest gewählt. Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $t_0 \in [0, 1]$, so dass $\|t_0 u\| + \|t_0 v\| < \delta_\varepsilon$. Daher gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq t_0$, dass

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x)}{h^2} - D^2 f(x)(u, v) \right\| \\
 = & \left\| \frac{f(x + hu + hv) - f(x + hu) - f(x + hv) + f(x) - D^2 f(x)(hu, hv)}{h^2} \right\| \\
 \stackrel{(2.20)}{=} & \frac{\|\tilde{R}(hu, hv)(hv)\|}{|h|^2} \stackrel{(2.21)}{<} 2\varepsilon \frac{(\|hu\| + \|hv\|) \cdot \|hv\|}{|h|^2} = 2\varepsilon (\|u\| + \|v\|) \cdot \|v\|.
 \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung. \square

Satz 2.47 (von Schwarz) Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen und $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ zweimal differenzierbar in $x \in U$. Dann ist $D^2 f(x)$ eine symmetrische Bilinearform, d.h. für alle $u, v \in \mathcal{V}$ gilt

$$D^2 f(x)(u, v) = D^2 f(x)(v, u).$$

Beweis: Der Satz folgt sofort aus Lemma 2.46, denn der dort betrachtete Grenzwert ist symmetrisch in u und v (d.h. er ändert sich nicht, wenn man u und v vertauscht). \square

Bemerkung 2.48 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume und $U \subseteq \mathcal{V}$ offen. Ist $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ zweimal differenzierbar in $x \in U$, so folgt mit Satz 2.47 und Satz 2.41, dass für alle $v_i, v_j \in \mathcal{V}$ gilt, dass $\partial_{v_i} \partial_{v_j} f(x) = \partial_{v_j} \partial_{v_i} f(x)$. Ist f sogar k -mal differenzierbar in $x \in U$, so erhalten wir daraus per Induktion (und erneut mit Satz 2.41), dass für alle $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ gilt, dass

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = D^k f(x)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

wobei $\sigma \in S_k$ eine beliebige Permutation ist.

Korollar 2.49 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $x \in U$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Insbesondere ist die Hesse-Matrix $H_f(x) \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch.

Bemerkung 2.50 In der Literatur findet man das obige Korollar häufig mit der Voraussetzung, dass die zweiten partiellen Ableitungen von f auf ganz U existieren und stetig sein müssen. Wir sind an dieser Stelle der Vorgehensweise im Skript von D. Ferus gefolgt und haben gezeigt, dass zweimalige Differenzierbarkeit von f im betrachteten Punkt bereits hinreichend ist.

2.6 Satz von Taylor und lokale Extrema

Wie in Analysis I werden wir mit Hilfe des Satzes von Taylor, den wir gleich auf Funktionen zwischen endlich-dimensionalen Banachräumen verallgemeinern werden, Kriterien für die Existenz von lokalen Extremstellen herleiten.

Satz 2.51 (Taylorformel) *Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlich-dimensionale Banachräume, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathcal{W}$ sei k -mal differenzierbar. Dann gilt:*

1) Für alle $x \in U$ gilt

$$f(x) = \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x_0) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{j\text{-mal}} \right) + R(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0.$$

2) Ist f sogar $(k+1)$ -mal differenzierbar, $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ und gilt für $x \in U$ auch $\overline{xx_0} \subseteq U$, so gibt es ein $\xi \in \overline{xx_0}$, so dass für $R(x)$ aus 1) gilt, dass

$$R(x) = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(\xi) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{k+1\text{-mal}}.$$

Beweis: Der Beweis von 2) ist relativ einfach und kann sogar unabhängig von Teil 1) geführt werden. Wir setzen dazu $v := x - x_0$ und betrachten die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + tv)$. Mit f ist auch g eine $(k+1)$ -mal differenzierbare Funktion, und es gilt

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \partial_v f(x_0)$$

und analog $g^{(j)}(0) = \partial_v^j f(x_0) := \partial_v \dots \partial_v f(x_0)$ (wobei hier ∂_v insgesamt j -mal auf $f(x_0)$ angewendet wird.) Mit Hilfe der Taylorformel aus Analysis I (dort Satz 6.53) folgt die Existenz eines $\tau \in [0, 1]$ (sogar $\tau \in]0, 1[$), so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= g(1) = \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)(1-0)^j \right) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\tau)(1-0)^{k+1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \partial_v^j f(x_0) \right) + \frac{1}{(k+1)!} \partial_v^{k+1} f(x_0 + \tau v) \\ &= \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) \right) + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(\xi)(x - x_0, \dots, x - x_0), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 2.41 und die Abkürzung $\xi := x_0 + \tau v$ benutzt haben.

Der Beweis von Teil 1) ist dagegen überraschend kompliziert und wir verzichten in der Vorlesung darauf, liefern ihn allerdings der Vollständigkeit halber im “Kleingedruckten” nach.

Den **Beweis von 1)** führen wir in mehreren Schritten, wobei wir nur den Fall $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ betrachten. Der allgemeine Fall lässt sich darauf durch Wahl einer Basis zurückführen. An die Stelle der im Folgenden betrachteten kanonischen Koordinatenprojektionen π_j treten dann die Vektoren der zu der gewählten Basis dualen Basis des $L(\mathcal{V}, \mathbb{R})$.

- (i) Wir betrachten die kanonischen Koordinatenprojektionen $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ (vgl. Beispiel 1.48). Diese sind offensichtlich linear und daher differenzierbar mit $D\pi_j(x) = \pi_j$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit lässt sich jeder Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ in der folgenden Form schreiben:

$$v = \sum_{j=1}^n v_j e_j = \sum_{j=1}^n \pi_j(v) e_j = \sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) e_j$$

Damit erhalten wir für alle $x \in U$ wegen der Linearität von $Df(x)$, dass

$$Df(x)(v) = Df(x) \left(\sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) e_j \right) = \sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) \cdot Df(x)(e_j) = \sum_{j=1}^n D\pi_j(x)(v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Dies schreibt man auch in der Form

$$Df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot D\pi_j, \quad (2.22)$$

mit der Definition

$$(g \cdot D\pi_j)(x)(v) := (g(x) \cdot D\pi_j(x))(v) := D\pi_j(x)(v) \cdot g(x) = v_j \cdot g(x) \quad (2.23)$$

für $x \in U$, $v \in \mathcal{V}$ und eine Funktion $g : U \rightarrow \mathcal{W}$ (wie z.B. $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ eine ist). Dann zeigt man, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \cdot D\pi_j) = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot D\pi_j \quad (2.24)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, falls g differenzierbar ist. (Übung. Beachten Sie dabei, dass $D\pi_j$ als Ableitung einer linearen Funktion eine konstante Funktion ist.)

- (ii) Wir zeigen, dass für alle $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in U$ gilt, dass

$$D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = \left(D^{k-1}(Df)(x)(v_2, \dots, v_k) \right)(v_1). \quad (2.25)$$

Dazu sei $v_i = (v_{1i}, \dots, v_{ni})$ für $i = 1, \dots, n$. Dann erhalten wir mit Satz 2.41 und (2.22)–(2.24), dass

$$\begin{aligned} & \left(D^{k-1}(Df)(x)(v_2, \dots, v_k) \right)(v_1) \\ &= \left(\sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} D^{k-1}(Df)(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \right)(v_1) \\ &= \left(\sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot D\pi_j \right)(x) \right)(v_1) \\ &= \left(\sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{j=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \cdot D\pi_j(x) \right)(v_1) \\ &= \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{j=1}^n v_{i_2,2} \cdots v_{i_k,k} \cdot v_{j1} D^k f(x)(e_{i_2}, \dots, e_{i_k}, e_j) \\ &= D^k f(x)(v_2, \dots, v_k, v_1). \end{aligned}$$

Der Rest folgt dann aus dem Satz von Schwarz.

(iii) Wir zeigen nun die Taylorformel per Induktion nach k .

“ $k = 1$ ”: Dies ist einfach nur die Definition der Differenzierbarkeit.

“ $k - 1 \Rightarrow k$ ”: Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die $k - 1$ mal differenzierbare Funktion Df an und erhalten

$$Df(x) = \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} D^j(Df)(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) \right) + \tilde{R}(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{R}(x)}{\|x - x_0\|^{k-1}} = 0.$$

Weiter betrachten wir die Restfunktion

$$R(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x_0) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{j\text{-mal}}$$

und berechnen deren Ableitung. (In der Tat ist $R(x)$ differenzierbar, da f es ist und die nachfolgende Summe aus k -linearen Abbildungen besteht, die nach der verallgemeinerten Produktregel aus Bemerkung 2.27 differenzierbar sind. Beachten Sie dabei, dass wir hier von den Ableitungen von $D^j f(x_0)$ und nicht von $D^j f$ sprechen, da x_0 fest gewählt ist.) Da der Summand für $j = 0$ konstant $f(x_0)$ ist, fällt er beim Differenzieren weg und wir erhalten für alle $x \in U$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$ unter Benutzung der verallgemeinerten Produktregel aus Bemerkung 2.27 und dem Satz von Schwarz, dass

$$\begin{aligned} DR(x)(v) &= Df(x)(v) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} j D^j f(x_0)(v, \underbrace{x - x_0, \dots, x - x_0}_{(j-1)\text{-mal}}) \\ &= Df(x)(v) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} \left(D^{j-1}(Df)(x_0) \underbrace{(x - x_0, \dots, x - x_0)}_{(j-1)\text{-mal}} \right)(v), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (2.25) aus (ii) benutzt haben. Folglich gilt

$$DR(x) = Df(x) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} (D^{j-1}(Df)(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) = \tilde{R}(x).$$

Aus der Grenzwerteigenschaft von $\tilde{R}(x)$ folgt nun, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(x_0) \subseteq U$ und so dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt, dass

$$\|\tilde{R}(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - x_0\|^{k-1}.$$

Dann folgt aber mit Hilfe des Schrankensatzes für alle $x \in U_\delta(x_0)$, dass

$$\|R(x)\| = \|R(x) - R(x_0)\| \leq \sup_{y \in U_\delta(x_0)} \|DR(y)\| \cdot \|x - x_0\| \leq \varepsilon \cdot \|x - x_0\|^k.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hiermit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0. \quad (2.26)$$

Die eigentliche Schwierigkeit im Beweis lag übrigens nicht in der möglichen Mehrdimensionalität von \mathcal{W} . Auch im Fall $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ hätte ein Ansatz wie im Beweis von 2) nur zu Aussagen über Grenzwerte der Form $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + hv)}{\|hv\|^k}$ geführt, woraus sich (2.26) nicht ohne weiteres folgern lässt. \square

Im Folgenden beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen. Für diese können wir analog zur Vorgehensweise in Analysis I lokale Extremwerte einführen.

Definition 2.52 Sei \mathcal{V} ein endlich-dimensionaler Banachraum, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$.

- 1) Wir sagen f hat ein lokales Maximum in x_0 , falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U \cap U_\varepsilon(x_0)$ gilt.
- 2) Wir sagen f hat ein striktes lokales Maximum in x_0 , falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in U \cap U_\varepsilon(x_0)$ mit $x \neq x_0$ gilt.
- 3) Wir sagen f hat ein (striktes) lokales Minimum in x_0 , falls $-f$ ein (striktes) lokales Maximum in x_0 hat.

In der Analysis I hatten wir die Taylorformel benutzt um Kriterien für die Existenz von lokalen Extremstellen herzuleiten. Wir benutzen diese Idee auch hier und betrachten eine k -mal differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen. Gilt dann für ein $x_0 \in U$, dass $Df(x_0) = 0, \dots, D^{k-1}f(x_0) = 0$, so folgt für $x \in U$, welches hinreichend nahe an x_0 liegt, dass

$$f(x) - f(x_0) \approx \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0).$$

Falls nun die rechte Seite immer dasselbe Vorzeichen hat, können wir Aussagen über die Existenz von lokalen Extrema treffen. Es bietet sich daher an dieser Stelle eine nähere Untersuchung k -linearer Abbildungen an, von denen $D^k f(x_0)$ bekanntlich eine ist.

Definition 2.53 Sei \mathcal{V} ein normierter Raum und $\mu \in L^k(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ eine k -Linearform auf \mathcal{V} .

- 1) μ heißt symmetrisch, falls für alle $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ und alle Permutationen $\sigma \in S_k$ gilt, dass $\mu(v_1, \dots, v_k) = \mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$.
- 2) μ heißt positiv definit, falls für alle $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ gilt, dass $\mu(v, \dots, v) > 0$.
- 3) μ heißt positiv semidefinit, falls für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt, dass $\mu(v, \dots, v) \geq 0$.
- 4) μ heißt negativ (semi)definit, falls $-\mu$ positiv (semi)definit ist.
- 5) μ heißt indefinit, falls es $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ gibt mit $\mu(v_1, \dots, v_1) > 0 > \mu(v_2, \dots, v_2)$.

Lemma 2.54 Sei \mathcal{V} ein normierter Raum und sei $\mu \in L^k(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ eine symmetrische k -Linearform auf \mathcal{V} .

- 1) Falls $\mu(v, \dots, v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt, so folgt $\mu = 0$.
- 2) Ist k ungerade, so ist entweder μ indefinit oder $\mu = 0$.

Beweis: Wir beweisen 1) per Induktion nach k .

“ $k = 1$ ”: Dieser Fall ist trivial.

“ $k - 1 \Rightarrow k$ ”: Seien $v, w \in \mathcal{V}$ und $t \in \mathbb{R}$. Da μ eine symmetrische k -Linearform ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(v + tw, \dots, v + tw) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu(\underbrace{v, \dots, v}_{j\text{-mal}}, tw, \dots, tw) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu(\underbrace{v, \dots, v}_{j\text{-mal}}, w, \dots, w) t^{k-j}. \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck eine Polynomfunktion in t ist, folgt, dass alle Koeffizienten des Polynoms Null sind. Speziell gilt für alle $v, w \in \mathcal{V}$, dass $\mu(v, \dots, v, w) = 0$. Sei nun $w \in \mathcal{V}$ beliebig, aber fest gewählt. Dann wird durch

$$\mu(\cdot, \dots, \cdot, w) : \mathcal{V}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, \dots, v_{k-1}) \mapsto \mu(v_1, \dots, v_{k-1}, w)$$

eine symmetrische $(k - 1)$ -Linearform auf \mathcal{V} definiert. Nach Induktionsvoraussetzung ist diese dann die Nullabbildung, d.h. für alle $v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathcal{V}$ gilt $\mu(v_1, \dots, v_{k-1}, w) = 0$. Da w beliebig war, folgt $\mu = 0$.

2) Sei $\mu \neq 0$. Dann gibt es wegen 1) ein $v \in \mathcal{V}$ mit $\mu(v, \dots, v) \neq 0$. Da k ungerade ist gilt dann

$$\mu(-v, \dots, -v) = (-1)^k \mu(v, \dots, v),$$

woraus sofort folgt, dass μ indefinit ist. \square

Satz 2.55 Sei \mathcal{V} ein endlich-dimensionaler Banachraum, sei $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei k -mal differenzierbar und sei $x_0 \in U$, so dass

$$Df(x_0) = 0, \dots, D^{k-1}f(x_0) = 0, \quad \text{aber } D^k f(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- 1) Ist $D^k f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.
- 2) Ist $D^k f(x_0)$ positiv definit, so hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.
- 3) Ist $D^k f(x_0)$ indefinit, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.

Beweis: Sei o.B.d.A. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$. (Der allgemeine Fall folgt wieder analog durch Rückführung auf diesen Spezialfall mittels Wahl einer Basis in \mathcal{V} .) Da f k -mal differenzierbar ist, gibt es nach der Taylorformel aus Satz 2.51 eine Funktion $R : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in U$ gilt, dass

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) + R(x), \quad \text{wobei } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0. \quad (2.27)$$

Nach Bemerkung 2.27 ist $\mu := D^k f(x_0)$ als k -Linearform differenzierbar, also insbesondere stetig und daher nimmt die ebenfalls stetige Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto Df(x_0)(v, \dots, v)$ auf der kompakten Menge $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit

$$m = \min_{v \in S^{n-1}} \mu(v, \dots, v) \quad \text{und} \quad M = \max_{v \in S^{n-1}} \mu(v, \dots, v).$$

Wegen $\mu\left(\frac{v}{\|v\|}, \dots, \frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|^k} \mu(v, \dots, v)$ für alle $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ erhalten wir daraus

$$m\|v\|^k \leq \mu(v, \dots, v) \leq M\|v\|^k. \quad (2.28)$$

für alle $v \in \mathcal{V}$ (denn für $v = 0$ ist (2.28) trivialerweise ebenfalls erfüllt). Ferner gibt es wegen der Grenzwerteigenschaft von R zu $\varepsilon = \frac{1}{2k!} \min\{|m|, |M|\}$ ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(x_0) \subseteq U$ und so dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$, gilt, dass

$$|R(x)| \leq \varepsilon \cdot \|x - x_0\|^k. \quad (2.29)$$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum eigentlichen Beweis.

1) Sei $D^k f(x_0)$ negativ definit. Dann gilt für M aus (2.28), dass $M < 0$. Weiter folgt dann mit Hilfe von (2.27)–(2.29) und unter Ausnutzung von $|M| = -M$, dass

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) + R(x) \\ &\leq \frac{M}{k!} \|x - x_0\|^k + \frac{|M|}{2k!} \|x - x_0\|^k = \frac{M}{2k!} \|x - x_0\|^k \leq 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt. Wegen $M < 0$ gilt dabei $f(x) = f(x_0)$ nur im Fall $x = x_0$, so dass f in x_0 ein striktes lokales Maximum hat.

2) folgt analog bzw. durch Betrachten von $-f$.

3) Sei $D^k f(x_0)$ indefinit. Dann gilt für m und M aus (2.28), dass $m < 0 < M$. Insbesondere gibt es $v, \tilde{v} \in S^{n-1}$ mit $D^k f(x_0)(v, \dots, v) = m$ und $D^k f(x_0)(\tilde{v}, \dots, \tilde{v}) = M$. Damit folgt für alle $t \in]0, \delta[$, dass $x_0 + tv \in U_\delta(x_0)$ und

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv) - f(x_0) &= \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(tv, \dots, tv) + R(x_0 + tv) \\ &\leq \frac{m}{k!} \|tv\|^k - \frac{m}{2k!} \|tv\|^k = \frac{mt^k}{2k!} < 0. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für alle $t \in]0, \delta[$, dass $f(x_0 + t\tilde{v}) - f(x_0) > 0$ und es folgt, dass f kein lokales Extremum in x_0 hat. \square

Bemerkung 2.56 Beachten Sie, dass es hier im Gegensatz zum entsprechenden Resultat aus Analysis I (siehe dort Satz 6.57) einen Fall gibt, in dem der Satz keine Aussage liefert. Ist $D^k f(x_0)$ nämlich nur positiv oder negativ semidefinit, aber nicht definit, so trifft keiner der drei Fälle des Satzes zu. Tatsächlich kann man für diesen Fall Beispiele von Funktionen finden, die lokale Extrema besitzen und auch solche, die kein lokales Extremum besitzen. (Übung). Im Fall $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ kommt dieser Ausnahmefall nicht vor, da dort $D^k f(x_0)$ genau dann semidefinit, aber nicht definit ist, wenn $f^{(k)}(x_0) = 0$ gilt.

Es fehlt noch die Verallgemeinerung des *notwendigen Kriteriums* für die Existenz von Extremstellen aus Analysis I. Dieses erhalten wir unmittelbar als Folgerung aus Satz 2.55.

Korollar 2.57 Sei \mathcal{V} ein endlich-dimensionaler Banachraum, sei $U \subseteq \mathcal{V}$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so gilt $Df(x_0) = 0$.

Beweis: Ist $Df(x_0) \neq 0$, so ist $Df(x_0)$ nach Lemma 2.54 indefinit und f hat nach Satz 2.55 kein lokales Extremum in x_0 . Daraus folgt unmittelbar die Aussage mit Kontraposition. \square

Beispiel 2.58 Wir betrachten die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ und $f_2 : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Wir bestimmen zunächst die *kritischen Punkte* von f_1 und f_2 , das sind Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die die Ableitung Null ist. Hier gilt

$$Df_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Df_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \end{bmatrix}.$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und daher ist $(0, 0)$ in beiden Fällen der einzige kritische Punkt. Weiter erhalten wir für die Hesse-Matrizen von f_1 bzw. f_2 für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dass

$$H_{f_1}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_{f_2}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wegen $D^2f_i(x, y)(v_1, v_2) = v_1^\top H_{f_i}(x, y)v_2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ ist $D^2f_i(x, y)$ genau dann positiv definit, negativ definit oder indefinit, wenn $H_{f_i}(x, y)$ positiv definit, negativ definit bzw. indefinit ist und aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass wir diese Eigenschaft an den Eigenwerten der Hesse-Matrix ablesen können. Es folgt, dass $H_{f_1}(0, 0)$ positiv definit ist, d.h. f_1 hat in $(0, 0)$ ein striktes lokales Minimum. Andererseits ist $H_{f_2}(0, 0)$ indefinit und daher hat f_2 *kein* lokales Extremum in $(0, 0)$. Solche Punkte (d.h. kritische Punkte, an denen kein lokales Extremum vorliegt) nennt man *Sattelpunkte*. Der Name erklärt sich aus der Skizze des Graphen von f_2 in Abbildung 2.1.

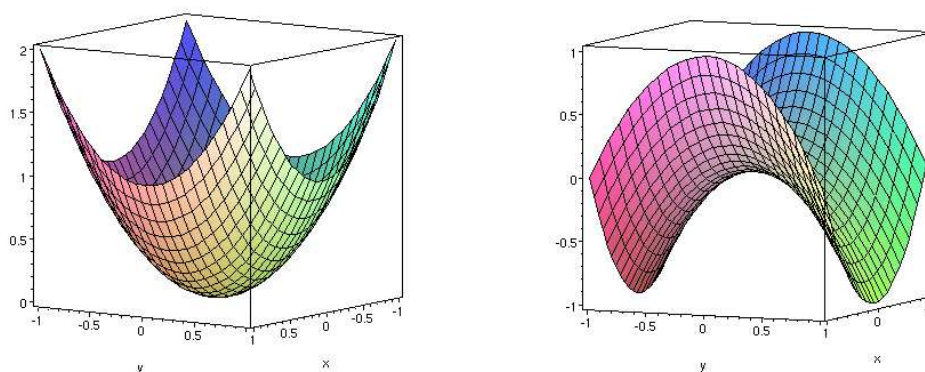


Abbildung 2.1: Graphen der Funktionen f_1 (links) und f_2 (rechts) aus Beispiel 2.58

Wie im letzten Beispiel angedeutet, kann man anhand der Eigenwerte der Hesse-Matrix entscheiden, ob diese positiv oder negativ definit bzw. semidefinit oder indefinit ist. (Beachten Sie dazu das bekannte Resultat aus der linearen Algebra, das besagt, dass Eigenwerte von reellen symmetrischen Matrizen, sowie auch von komplexen Hermiteschen Matrizen, stets reell sind, so dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau n Eigenwerte hat, ggf. mehrfach gezählt mit algebraischen Vielfachheiten.) Der Vollständigkeit halber zitieren wir hier die entsprechenden Resultate aus der Linearen Algebra. Falls die Größe n der betrachteten Matrix nicht zu groß ist, ist das sogenannte *Hauptminorenkriterium* für die Überprüfung der Definitheit der Matrix allerdings viel einfacher als die Berechnung aller Eigenwerte und daher vorzuziehen.

Satz 2.59 Sei $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) A ist positiv definit.
- 2) Alle Eigenwerte von A sind positiv.
- 3) (**Hauptminorenkriterium.**) Für $k = 1, \dots, n$ sei

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k,k}.$$

Dann gilt

$$\det A_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Die Determinante $\det A_k$ der Hauptabschnittsmatrix A_k von A heißt auch *führender k -ter Hauptminor* von A . Durch Anwenden des Satzes auf die Matrix $-A$ erhalten wir unmittelbar die folgende Charakterisierung negativ definiter symmetrischer Matrizen.

Satz 2.60 Sei $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) A ist negativ definit.
- 2) Alle Eigenwerte von A sind negativ.
- 3) (**Hauptminorenkriterium.**) Für $k = 1, \dots, n$ sei

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k,k}.$$

Dann gilt

$$(-1)^k \det A_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Für die Semidefinitheit einer symmetrischen Matrix gilt leider keine naheliegende Analogie des Hauptminorenkriteriums, weswegen wir uns hier auf eine Charakterisierung über die Eigenwerte beschränken.

Satz 2.61 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Dann gilt:

- 1) A ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.
- 2) A ist genau dann negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A nicht-positiv sind.
- 3) A ist genau dann indefinit, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

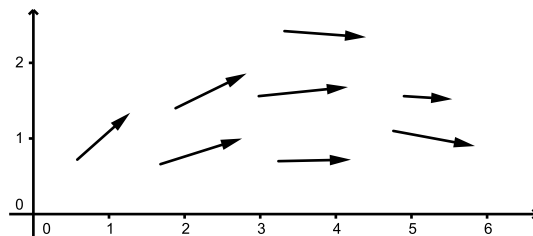
2.7 Klassische Vektoranalysis

In diesem Abschnitt gehen wir kurz auf die *klassische Vektoranalysis* ein, wie Sie in den Ingenieurs- und Naturwissenschaften gelehrt wird. Insbesondere lernen wir die klassischen Differentialoperatoren *Gradient*, *Divergenz* und *Rotation* kennen. Zunächst aber führen wir *Skalar-* und *Vektorfelder* ein.

Definition 2.62 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

- 1) Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Skalarfeld.
- 2) Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld.

Der Name *Vektorfeld* rührt daher, dass wir uns eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $G \subseteq \mathbb{R}^n$ so vorstellen können, dass jedem Punkt des Raums ein Vektor zugeordnet wird. Im Spezialfall $n = 2$ können wir dann Vektorfelder visualisieren, indem wir in jedem Punkt x der Ebene (bzw. von $G \subseteq \mathbb{R}^2$) den Vektor $f(x)$ einzeichnen. Diese sehen dann aus wie Ähren auf einem Getreidefeld. Da es sich aber um Vektoren und nicht um Weizen handelt, nennen wir es eben Vektorfeld. Klassische Vektorfelder sind z.B. Geschwindigkeitsfelder einer Strömung. Der Vektor $f(x)$ stellt dann die Geschwindigkeit einer Strömung im Punkt x dar, die durch Richtung und Betrag (Länge des Vektors) gegeben ist. Bevor wir Skalarfelder visualisieren, führen wir den Begriff der *Niveaumenge* ein.

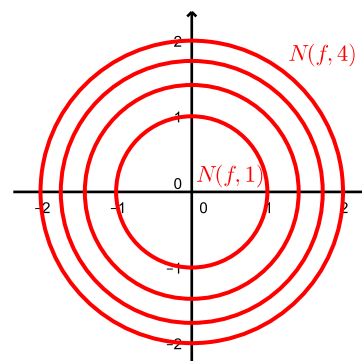


Definition 2.63 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$N(f, c) := \{x \in G \mid f(x) = c\}$$

die Niveaumenge von f zum Niveau c .

Niveaumengen liefern eine neue Möglichkeit für die graphische Darstellung von Skalarfeldern $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Erinnern Sie sich dazu an die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ aus Beispiel 2.58. Diese hatten wir dort durch ihren dreidimensionalen Graph $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ dargestellt. Interpretieren wir nun $f(x, y)$ als „Höhe“, so können wir f auch mit Hilfe von „Höhenlinien“ (so wie sie es von Landkarten gewöhnt sind) darstellen, indem wir im Definitionsbereich \mathbb{R}^2 zu einem $c \in \mathbb{R}$ alle Punkte einzeichnen, für die f den Funktionswert c annimmt - dies ist gerade die Niveaumenge $N(f, c)$. In der nebenstehenden Graphik sehen Sie die Niveaumengen (in diesem Spezialfall spricht man aus naheliegenden Gründen auch von *Niveaulinien*) von f zu den Niveaus $c = 1, 2, 3, 4$.



Wir wenden uns nun den *klassischen Differentialoperatoren* der Vektoranalysis zu. Der erste und für uns im folgenden Verlauf auch wichtigste ist der sogenannte *Gradient*.

Definition 2.64 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld.

1) Sei $x \in U$. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Gradient von f in x .

2) Das Vektorfeld $\operatorname{grad} f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$ heißt der Gradient von f .

Bemerkung 2.65 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld. Wenn wir den \mathbb{R}^n (wie in der Linearen Algebra üblich) mit dem Raum $\mathbb{R}^{n,1}$ der $n \times 1$ Matrizen identifizieren, gilt

$$\begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} = (\operatorname{grad} f(x))^\top.$$

Speziell gilt dann für alle $v \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = \begin{bmatrix} Df(x) \end{bmatrix} \cdot v = Df(x)(v) = \partial_v f(x), \quad (2.30)$$

wobei hier und im Folgenden $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^n bezeichnet.

Der Gradient unterscheidet sich also nicht besonders von der Ableitung von f . Der Grund dafür, dass er einen eigenen Namen erhält, liegt an seinen Eigenschaften als klassischer Vektor, den wir uns mit einer “*Richtung*” verbunden denken können.

Bemerkung 2.66 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld. Ferner sei $x \in U$, so dass $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$.

1) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt unter Ausnutzung von (2.30) und der aus der Linearen Algebra bekannten Formel für das Skalarprodukt, dass

$$\partial_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = \|v\| \cdot \|\operatorname{grad} f(x)\| \cdot \cos \phi,$$

wobei $\phi \in [0, \pi]$ den Winkel zwischen v und $\operatorname{grad} f(x)$ bezeichnet. Beschränken wir uns nun auf Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$, so wird $\partial_v f(x)$ maximal für $\phi = 0$, d.h. wenn $v = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|}$ gilt. Da wir die Richtungsableitung in Richtung von normierten Vektoren als Steigung der Funktion in dieser Richtung interpretieren können, fassen wir unsere hier gewonnene Erkenntnis wie folgt zusammen:

Der Gradient zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von f .

- 2) Seien $\varepsilon > 0$, sowie $\alpha :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$. Dann folgt für alle $t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ mit Hilfe der Kettenregel und (2.30), dass

$$(f \circ \alpha)'(t) = Df(\alpha(t))(\alpha'(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

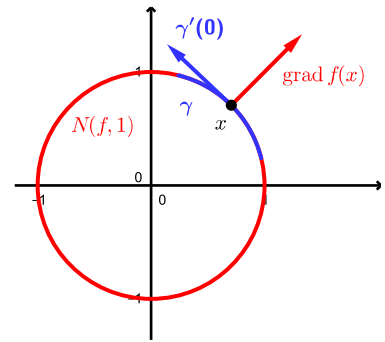
Falls nun das Bild von α in der Niveaumenge $N(f, c)$ von f liegt, wobei $c = f(x)$, so ist $f \circ \alpha$ konstant und wir erhalten speziell für $t = 0$, dass

$$\langle \operatorname{grad} f(x), \alpha'(0) \rangle = 0$$

für alle $t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$. Da α eine Kurve in $N(f, c)$ ist, ist $\alpha'(0)$ anschaulich gesehen ein Vektor, der tangential zu der Menge $N(f, c)$ verläuft. (Vergleichen Sie hierzu auch Abschnitt 3.3, wo wir präzisieren werden, was ein *Tangentenvektor* ist.) Der Gradient $\operatorname{grad} f(x)$ ist folglich senkrecht zu diesem Vektor und da dies für jede beliebige Kurve in $N(f, c)$ gilt, können wir unseren Ergebnis wie folgt anschaulich zusammenfassen:

Der Gradient steht senkrecht auf der jeweiligen Niveaumenge von f .

Die nebenstehende Graphik illustriert noch einmal die obige Feststellung für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ aus Beispiel 2.58. Betrachten wir den Punkt $x = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ mit $f(x) = 1$ und eine differenzierbare Kurve $\alpha :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow N(f, 1)$ in der zugehörigen Niveaumenge $N(f, 1)$ mit $\alpha(0) = x$, so ist $\alpha'(0)$ ein Tangentialvektor der Niveaumenge und der Gradient $\operatorname{grad} f(x)$ ist senkrecht zu $\alpha'(0)$ und steht auch senkrecht auf der Niveaumenge $N(f, 1)$ (und zeigt zudem noch in die Richtung, in der die Funktionswerte am stärksten anwachsen).



Der Grund dafür, dass der Gradient als *Differentialoperator* bezeichnet wird rührt daher, dass wir ihn als lineare Abbildung auffassen können. Betrachten wir zu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen die Menge $\mathcal{S}_d(U)$ der differenzierbaren Skalarfelder auf U und mit $\mathcal{V}(U)$ die Menge der Vektorfelder auf U , so erhalten wir durch die Zuordnung $f \mapsto \operatorname{grad} f$ eine Abbildung $\operatorname{grad} : \mathcal{S}_d(U) \rightarrow \mathcal{V}(U)$. Diese ist linear, denn für alle $f, g \in \mathcal{S}_d(U)$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} g.$$

Lineare Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen bezeichnet man üblicherweise als *Operatoren*. Diese werden in der *Operatortheorie*, einem Teilgebiet der *Funktionalanalysis*, näher untersucht.

Neben dem Gradienten gibt es weitere wichtige Differentialoperatoren in der klassischen Vektoranalysis, auf die wir in der Analysis III zurückkommen werden bzw. die Sie in Vertiefungsveranstaltungen wiedertreffen können.

Definition 2.67 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld.

1) Das Skalarfeld $\operatorname{div} f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$

für $x \in U$ heißt Divergenz von f .

2) Im Fall $n = 3$ heißt das Vektorfeld $\operatorname{rot} f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix}$$

für $x \in U$ die Rotation von f .

Der Name *Divergenz* hat nichts mit der Divergenz von Folgen zu tun, sondern ist hier wörtlich als “Auseinanderlaufen” zu verstehen. Man kann nämlich zeigen, dass sich die Divergenz als *Quelldichte* eines Vektorfelds interpretieren lässt. Dazu fasst man ein differenzierbares Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, als das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung auf. Gilt für $x \in U$, dass $\operatorname{div} f(x) > 0$, so befindet sich in x eine *Quelle*, d.h. anschaulich gesprochen, dass für jede hinreichend kleine Umgebung um x gilt, dass aus dieser “mehr herausfließt als hinein”. Ist analog $\operatorname{div} f(x) < 0$, so spricht man von einer Senke, denn in jede hinreichend kleine Umgebung um x “fließt mehr hinein als heraus”. Ein Vektorfeld mit der Eigenschaft $\operatorname{div} f(x) = 0$ für alle $x \in U$ heißt *quellfrei*.

Auch die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, hat eine anschauliche Bedeutung. Sie ist ein Maß für die “Verwirbelung” des Vektorfelds. Befestigt man in $x \in U$ ein hinreichend kleines “Windrädchen” mit Achse in Richtung $\operatorname{rot} f(x)$ (falls $\operatorname{rot} f(x) \neq 0$), so beginnt sich dieses mit der Winkelgeschwindigkeit $\|\operatorname{rot} f(x)\|$ zu drehen. Jedes Windrädchen mit einer Achse, die linear unabhängig von $\operatorname{rot} f(x)$ ist, weist eine Drehung mit niedrigerer Winkelgeschwindigkeit auf.

Ebenfalls häufig taucht in Anwendungen (z.B. in der Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung oder Schrödingergleichung) der sogenannte *Laplace-Operator* auf.

Definition 2.68 (Laplace-Operator) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein zweimal differenzierbares Skalarfeld. Dann ist das Skalarfeld $\Delta f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \Delta f(x) := \operatorname{div} (\operatorname{grad} f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(x).$$

Schöne Merkgeregeln für die klassischen Differentialoperatoren erhalten wir mit Hilfe des sogenannten *Nabla-Operators* ∇ , dessen Name auf den griechischen Namen des Nevels, einem antiken Saiteninstrument, das eine ähnliche Form aufweist, zurückgeht und der für die Dimension n wie folgt definiert ist:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Durch Anwenden, bzw. formales Bilden des Standardskalarprodukts (das wir hier wie in den Anwendungswissenschaften üblicher mit \cdot statt mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen werden), erhalten wir dann für ein differenzierbares Skalarfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. differenzierbares Vektorfeld $f = f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ die folgende Darstellung für die klassischen Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} \nabla F &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \text{grad } F, \\ \nabla \cdot f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \text{div } f, \\ \nabla^2 F &= \nabla \cdot \nabla F = \text{div}(\text{grad } F) = \Delta F, \end{aligned}$$

und für den Fall $n = 3$ unter Hinzunahme des Vektorprodukts auch

$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \text{rot } f$$

Kapitel 3

Die großen Sätze der mehrdimensionalen Differentialrechnung und Anwendungen

In diesem Kapitel werden wir uns unter anderem mit einer wichtigen Anwendung befassen, nämlich der Theorie nichtlinearer Gleichungssysteme. Genauso wie sich ein lineares Gleichungssystem in der Form $Ax = y$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und einer rechten Seite $y \in \mathbb{R}^m$ schreiben lässt, bzw. äquivalent dazu in der Form $L(x) = b$, wobei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, so können wir ein nichtlineares Gleichungssystem in der Form $f(x) = y$ schreiben, wobei X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung ist.

Mit der Theorie der linearen Gleichungssysteme sind sie bestens aus der Linearen Algebra vertraut. In der Theorie nichtlinearer Gleichungssysteme lassen sich dagegen meist nur in Spezialfällen Aussagen treffen, wie z.B., wenn unsere zu Grunde liegende Funktion f differenzierbar ist. In diesem Fall lässt sie sich nämlich in jedem Punkt x durch ihre Ableitung $Df(x)$ linear approximieren, wodurch sich einige Erkenntnisse aus der Theorie linearer Gleichungssysteme auf diesen Fall übertragen lassen. Da die Ableitung $Df(x)$ die Funktion f allerdings nur in einer kleinen Umgebung von $x \in G$ gut approximiert, erhalten wir als Antwort auf unsere Fragen im Allgemeinen nur *lokale* Aussagen, also Aussagen, die nur in einer Umgebung eines betrachteten Punktes gelten.

Damit der Begriff der Differenzierbarkeit für unsere Funktion $f : X \rightarrow Y$ Sinn macht, sollten die Mengen X und Y Teilmengen von endlich-dimensionalen Banachräumen \mathcal{V} und \mathcal{W} sein. Der Einfachheit halber werden wir uns in diesem Kapitel auf den Fall $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ beschränken. Wie wir bereits in einigen Beweisen ausgenutzt haben, lässt sich der allgemeine Fall mit Hilfe von Isomorphismen $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$ und $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{W}$ darauf zurückführen. Die Differenzierbarkeit und auch Ableitungen von Funktionen sind verträglich mit diesen Isomorphismen, denn mit Hilfe der Kettenregel folgt für differenzierbares $f : U \rightarrow \mathcal{W}$, $U \subseteq \mathcal{V}$ offen, und für $\tilde{f} := \Psi^{-1} \circ f \circ \Phi : \Phi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$, dass

$$D\tilde{f}(x) = \Psi^{-1} (f(\Phi(x))) \circ Df(\Phi(x)) \circ \Phi'(x) = \Psi^{-1} \circ Df(\Phi(x)) \circ \Phi$$

für alle $x \in \Phi^{-1}(U)$ gilt.

Bisher haben wir immer strikt zwischen der Ableitung $Df(x)$ von $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt x der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und der darstellenden Matrix $[Df(x)]$ unterschieden. Im Folgenden wollen wir beide Begriffe jedoch beide Begriffe identifizieren und lassen folgerichtig die eckigen Klammern bei der Jacobi-Matrix weg, um fortan die Notation $Df(x) \in \mathbb{R}^{m,n}$ zu verwenden. Diese Generalvereinbarung soll jedoch nur für den Fall gelten, dass Urbild- und Bildraum unserer Abbildung f Teilmengen von \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m sind, und daher auch nur für die *erste* Ableitung von f in $x \in U$. Die zweite Ableitung ist nämlich die Ableitung der Funktion $Df : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (bzw. von $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$ unter Nutzung unserer Generalvereinbarung, dass wir $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $\mathbb{R}^{m,n}$ identifizieren) und in diesem Fall ist es handlicher $D^2f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wie gehabt als eine bilineare Abbildung zu betrachten.

3.1 Der Umkehrsatz

Eine zentrale Frage in der Analysis ist die, ob eine gegebene Funktion umkehrbar ist und ggf. welche analytischen Eigenschaften ihre Umkehrfunktion hat. Übersetzt in die Sprache der nichtlinearen Gleichungssysteme entspricht dies gerade der Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit des Gleichungssystems. Genauer betrachten wir dazu ein nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= y_m, \end{aligned}$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ seien. Die Frage, ob für alle $y \in \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung V von $y_0 \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung existiert, entspricht dann der Suche nach einer *Umkehrabbildung* von f , die auf der Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ definiert ist.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ genau dann für alle $b \in \mathbb{R}^m$ eindeutig lösbar ist, wenn $m = n$ gilt und A invertierbar ist. Die Beobachtung in der nachfolgenden Bemerkung zeigt, dass wir uns auch im Fall nichtlinearer Gleichungssysteme, die durch differenzierbare Funktionen gegeben sind, auf den Fall $n = m$ beschränken sollten - anschaulich gesprochen entspricht das der Situation, dass die Anzahl m der Gleichungen mit der Anzahl n der Variablen übereinstimmt.

Bemerkung 3.1 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sowie $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow U$ differenzierbar, so dass $g \circ f = Id_U$ und $f \circ g = Id_V$ gilt. Dann erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel für alle $x \in U$ und $y := f(x)$, dass

$$\begin{aligned} I_n &= DId_U(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x) \\ \text{und } I_m &= DId_V(y) = Df(g(y)) \cdot Dg(y) = Df(x) \cdot Dg(f(x)). \end{aligned}$$

Somit ist $Df(x)$ invertierbar und es gilt $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$. Insbesondere folgt $n = m$.

Bemerkung 3.1 zeigt insbesondere, dass die Invertierbarkeit der Ableitung notwendig für die Existenz der Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion ist, zumindest, wenn wir voraussetzen, dass die Umkehrfunktion ebenfalls differenzierbar sein soll. (Vergleichen Sie dazu auch Bemerkung 6.20 aus Analysis I.) Ist nun umgekehrt $Df(x_0)$ invertierbar, so können wir die approximative Gleichung

$$y = f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0),$$

nach x auflösen und erhalten

$$x \approx x_0 + Df(x_0)^{-1} \cdot (f(x) - f(x_0)).$$

Tatsächlich werden wir im Folgenden zeigen, dass die Invertierbarkeit der Ableitung von f an einer Stelle x_0 unter gewissen Voraussetzungen schon hinreichend für die Existenz einer Umkehrfunktion von f in einer Umgebung von x_0 ist. Dabei erweist sich das folgende Resultat als nützlich, das ein Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix liefert.

Lemma 3.2 (Neumann-Reihe) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $\|A\| < 1$, wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm ist. Dann ist $I_n - A$ invertierbar und es gilt¹

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \quad (3.1)$$

Beweis: Die Operatornorm hatten wir formal zwar nur für lineare Abbildungen definiert, aber natürlich lässt sich diese Definition sofort auf Matrizen übertragen, d.h. für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Diese Norm hat die Eigenschaft *submultiplikativ* zu sein, d.h. für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt²

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

woraus per Induktion sofort $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt. Wegen $\|A\| < 1$ folgt damit aber $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$. Weiter erhalten wir

$$(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^m A^k = \sum_{k=0}^m A^k - \sum_{k=1}^{m+1} A^k = I_n - A^{m+1}$$

und daher

$$I_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (I_n - A^{m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left((I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^m A^k \right) = (I_n - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Hieraus folgt die Invertierbarkeit von $I_n - A$, sowie die Formel (3.1). \square

¹Der Reihenbegriff in Banachräumen wird über die Folge der zugehörigen Partialsummen definiert und ist damit komplett analog zu dem Reihenbegriff reeller Zahlen in Analysis I erklärt.

²Dies zeigt man in der Linearen Algebra, aber wegen seiner Kürze geben wir den Nachweis auch an dieser Stelle an: Per Definition der Operatornorm gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ und daher auch $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$. Hieraus folgt für alle $x \neq 0$, dass $\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|B\|$, und daher auch $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Kam Ihnen dieser Beweis bekannt vor? Wenn nicht, dann schauen Sie sich noch einmal den Beweis über die Konvergenz der geometrischen Reihe aus Analysis I an (siehe dort Teil 2) von Beispiel 3.2). Tatsächlich ist die Neumann-Reihe die Entsprechung der geometrischen Reihe für Matrizen bzw. lineare Abbildungen.

Theorem 3.3 (Umkehrsatz) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ferner sei $x_0 \in U$, so dass $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertierbar ist. Dann ist f um x_0 lokal invertierbar mit stetig differenzierbarer Inverser, d.h. es gibt $\tilde{U} \subseteq U$ offen mit $x_0 \in \tilde{U}$, so dass $f : \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$ bijektiv und die lokale Inverse $g : f(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U}$ von f stetig differenzierbar ist. Weiter gilt für alle $x \in \tilde{U}$, dass $Df(x)$ invertierbar ist und dass

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}. \quad (3.2)$$

Beweis: Wir führen den Beweis in insgesamt drei Schritten:

Schritt 1: Vereinfachungen.

i) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 0$ gilt. Andernfalls betrachten wir die Funktion

$$\tilde{f} : x \mapsto f(x + x_0) - f(x_0).$$

Diese hat die Eigenschaft $\tilde{f}(0) = 0$, sowie $D\tilde{f}(0) = Df(x_0)$, d.h. $D\tilde{f}(0)$ ist invertierbar. Offenbar ist mit \tilde{f} auch f lokal invertierbar.

ii) Weiter können wir o.B.d.A. annehmen, dass $Df(x_0) = I_n$ bzw. in der Sprache linearer Abbildungen $Df(x_0) = Id_{\mathbb{R}^n}$ gilt. Andernfalls betrachten wir die Funktion

$$\hat{f} := (Df(0))^{-1} \circ f.$$

Diese hat die Eigenschaften $\hat{f}(0) = 0$ und

$$D\hat{f}(0) = D\left((Df(0))^{-1}\right)(f(0)) \circ Df(0) = (Df(0))^{-1} \circ Df(0) = Id,$$

wobei wir hier die Linearität der Abbildung $(Df(0))^{-1}$ ausgenutzt haben. Auch hier folgt aus der lokalen Invertierbarkeit von \hat{f} die lokale Invertierbarkeit von f .

Schritt 2: Konstruktion der lokalen Inversen g .

Für ein y in der Nähe von 0 suchen wir ein $x^* \in U$ in der Nähe von 0, so dass $f(x^*) = y$ gilt. Die entscheidende Idee ist nun, dass wir aus dieser Gleichung eine Fixpunktgleichung basteln können, indem wir den Trick aus Bemerkung 1.44 verwenden. Definieren wir die Abbildung $\Phi_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - f(x) + y$, so ist wegen

$$\Phi_y(x^*) = x^* - f(x^*) + y$$

der Punkt x^* genau dann ein Fixpunkt von Φ_y wenn $f(x^*) = y$. Unser Ziel ist nun die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes Satz 1.41, sowie die Konstruktion von $\delta > 0$, so dass

$$\Phi_y : \overline{U_\delta(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x - f(x) + y$$

für alle y in einer Umgebung von 0 eine Selbstabbildung und Kontraktion ist. (Den Abschluss betrachten wir hier, da der Banachsche Fixpunkt voraussetzt, dass die Kontraktion auf einer abgeschlossenen Menge definiert ist.) In Hinblick auf Korollar 2.35 ist es in die-

sem Fall zweckmäßig, die Norm der Ableitung von Φ_y durch eine Konstante $L < 1$ zu beschränken. (Der Einfachheit halber werden wir diese Konstante als $L = \frac{1}{2}$ festlegen.) Dazu beobachten wir, dass mit f auch Φ_y stetig differenzierbar ist und dass für alle $x \in U$ gilt, dass

$$D\Phi_y(x) = DId(x) - Df(x) + 0 = I_n - Df(x) = Df(0) - Df(x).$$

Das gesuchte δ wählen wir nun wie folgt: Wegen der Stetigkeit von Df gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ mit $\overline{U_\delta(0)} \subseteq U$ und $\|Df(x) - I_n\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \overline{U_\delta(0)}$. (Klar?) Daraus erhalten wir für alle y und alle x mit $\|x\| \leq \delta$, dass

$$\|D\Phi_y(x)\| = \|I_n - Df(x)\| \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Wir zeigen nun, dass Φ_y für alle y mit $\|y\| \leq \frac{1}{2}\delta$ eine Selbstabbildung und Kontraktion ist: Seien dazu $x, \tilde{x} \in \overline{U_\delta(0)}$ beliebig. Zunächst einmal gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi_y(x)\| &\leq \|\Phi_y(x) - \Phi_y(0)\| + \|\Phi_y(0)\| \\ &\leq \sup_{v \in \overline{0x}} \|D\Phi_y(v)\| \cdot \|x - 0\| + \|y\| \\ &\leq \frac{1}{2}\delta + \|y\| \leq \delta, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung den Schrankensatz benutzt haben. Damit folgt $\Phi_y(\overline{U_\delta(0)}) \subseteq \overline{U_\delta(0)}$, d.h. Φ_y ist eine Selbstabbildung. Außerdem gilt unter erneuter Anwendung des Schrankensatzes, dass

$$\|\Phi_y(x) - \Phi_y(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|, \quad (3.4)$$

d.h. Φ_y ist auch eine Kontraktion. Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und daher existiert zu jedem $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| \leq \frac{1}{2}\delta$ ein eindeutig bestimmtes $x^* \in \overline{U_\delta(0)}$ mit $\Phi_y(x^*) = x^*$ bzw. mit $f(x^*) = y$. Setze nun

$$\tilde{U} := U_\delta(0) \cap f^{-1}(U_{\delta/2}(0)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \delta \text{ und } \|f(x)\| < \frac{1}{2}\delta\}.$$

Dann ist \tilde{U} offen (f ist stetig) und nach Konstruktion ist $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$ injektiv, also auch bijektiv und es existiert eine eindeutige *lokale Inverse* $g : f(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U}$ von f (d.h. eine Inverse von $f|_{\tilde{U}}$).

Schritt 3: g ist stetig differenzierbar. Notwendig für die Differenzierbarkeit von g ist zunächst einmal die Offenheit des Definitionsbereichs $f(\tilde{U})$. (Beachten Sie, dass dies nicht automatisch aus der Stetigkeit von f folgt. Zwar sind Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen offen, aber über Bilder von offenen Mengen können wir i.A. keine Aussage treffen.) Um dies zu zeigen beobachten wir, dass wegen $\Phi_0(x) = x - f(x)$ für alle $x, \tilde{x} \in \overline{U_\delta(0)}$ gilt, dass

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|f(x) - f(\tilde{x})\| + \|\Phi_0(x) - \Phi_0(\tilde{x})\| \leq \|f(x) - f(\tilde{x})\| + \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|,$$

wobei wir für die letzte Abschätzung (3.4) ausgenutzt haben. Durch Umstellen erhalten wir daraus

$$\frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\| \leq \|f(x) - f(\tilde{x})\| \quad \text{bzw.} \quad \|x - \tilde{x}\| \leq 2\|f(x) - f(\tilde{x})\|. \quad (3.5)$$

Nach Konstruktion gilt $f(\tilde{U}) \subseteq U_{\delta/2}(0)$. Wir zeigen hier nun die Gleichheit, woraus die Offenheit von $f(\tilde{U})$ folgt. Sei also $y \in U_{\delta/2}(0)$. Dann gibt es wegen der Konstruktion in Schritt 2 ein $x \in \overline{U_\delta(0)}$ mit $f(x) = y$. Weiter gilt unter Ausnutzung von (3.5) für $\tilde{x} = 0$, dass

$$\|x\| \leq 2\|f(x)\| < 2 \cdot \frac{1}{2}\delta = \delta,$$

woraus $x \in U_\delta(0)$ und damit $x \in \tilde{U}$ folgt. Dies impliziert $y \in f(\tilde{U})$ und damit die Offenheit von $f(\tilde{U})$.

Wenden wir Lemma 3.2 auf $I_n - (I_n - Df(x))$ an, so folgt, dass $Df(x)$ nicht nur für $x = 0$, sondern für alle $x \in \tilde{U}$ invertierbar ist, denn mit Hilfe von (3.3) erhalten wir, dass

$$\|I_n - Df(x)\| = \|D\Phi_0(x)\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Sei nun $\tilde{y}_0 \in f(\tilde{U})$ beliebig und $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}$ mit $f(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$. Nach Voraussetzung ist f differenzierbar und daher gibt es eine Funktion $R : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in \tilde{U}$ gilt, dass

$$f(x) = f(\tilde{x}_0) + Df(\tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_0) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0} \frac{R(x)}{\|x - \tilde{x}_0\|} = 0.$$

Nach Bemerkung 3.1 ist nun $Df(\tilde{x}_0)^{-1}$ der einzig sinnvolle Kandidat für die Ableitung von g in \tilde{y}_0 . Tatsächlich gilt für alle $y \in f(\tilde{U})$ (und $x \in \tilde{U}$ mit $f(x) = y$), dass

$$\begin{aligned} g(y) - g(\tilde{y}_0) - (Df(\tilde{x}_0))^{-1}(y - \tilde{y}_0) &= x - \tilde{x}_0 - (Df(\tilde{x}_0))^{-1}(f(x) - f(\tilde{x}_0)) \\ &= x - \tilde{x}_0 - (Df(\tilde{x}_0))^{-1}(Df(\tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_0) + R(x)) \\ &= -(Df(\tilde{x}_0))^{-1}(R(x)). \end{aligned}$$

Weiter gilt wegen (3.5), dass

$$\frac{\|(Df(\tilde{x}_0))^{-1}(R(x))\|}{\|y - \tilde{y}_0\|} \leq 2 \frac{\|(Df(\tilde{x}_0))^{-1}\| \cdot \|R(x)\|}{\|x - \tilde{x}_0\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow \tilde{y}_0,$$

denn wegen (3.5) gilt für $y \rightarrow \tilde{y}_0$ auch $x \rightarrow \tilde{x}_0$ und wegen der Differenzierbarkeit von f geht der Grenzwert auf der rechten Seite der Ungleichung gegen Null. Dies beweist die Differenzierbarkeit von g auf ganz $f(\tilde{U})$. Insbesondere folgt dann mit Bemerkung 3.1 sofort die Formel

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}.$$

Für den Nachweis der Stetigkeit der Ableitung Dg von g beobachten wir, dass für alle $y \in f(\tilde{U})$ gilt, dass

$$Dg(y) = Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1} = (Df(g(y)))^{-1},$$

wobei $x \in \tilde{U}$ so gewählt ist, dass $f(x) = y$. Damit ist $Dg = \text{inv} \circ Df \circ g$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Hierbei bezeichnet inv die Inversion auf der Menge $GL_n(\mathbb{R})$, die wir in Beispiel 1.50 als stetig entlarvt hatten. \square

Beispiel 3.4 Wir betrachten die Funktion

$$f :]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\varrho, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{bmatrix},$$

die den Polarkoordinaten (ϱ, ϕ) die kartesischen Koordinaten $(\varrho \cos \phi, \varrho \sin \phi)$ zuordnet. Beachten Sie, dass f nicht injektiv ist! (Die Einschränkung von f auf $]0, \infty[\times [0, 2\pi[$ ist allerdings injektiv und damit global invertierbar, jedoch ist die Inverse dann leider auf der positiven x -Achse nicht stetig. Klar?) Betrachten wir die Ableitung von f , so gilt

$$Df(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\varrho \sin \phi \\ \sin \phi & \varrho \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \det Df(\varrho, \phi) = \varrho \cos^2 \phi + \varrho \sin^2 \phi = \varrho > 0$$

für alle $(\varrho, \phi) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$, d.h. $Df(\varrho, \phi)$ ist für alle (ϱ, ϕ) invertierbar. Damit ist f nach Satz 3.3 überall lokal invertierbar. Zu gegebenem (ϱ_0, ϕ_0) können wir dabei die Menge $U =]0, \infty[\times]\phi_0 - \pi, \phi_0 + \pi[$ wählen. Für die lokale Inverse $g : f(U) \rightarrow U$ gilt dann in $(x, y) = (\varrho \cos \phi, \varrho \sin \phi) \in f(U)$, dass

$$\begin{aligned} Dg(x, y) &= Dg(f(\varrho, \phi)) = (Df(\varrho, \phi))^{-1} = \frac{1}{\varrho} \begin{bmatrix} \varrho \cos \phi & \varrho \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\varrho} \begin{bmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\varrho} & \frac{x}{\varrho} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5 Aus Beispiel 3.4 gewinnen wir zwei wichtige Erkenntnisse:

- 1) Wir können die Ableitung der lokalen Inversen g bestimmen, ohne eine explizite Funktionsvorschrift für g zu kennen.
- 2) Funktionen, deren Ableitung überall invertierbar ist, sind nicht notwendigerweise global umkehrbar. Dies steht im Gegensatz zum Analogon des Umkehrsatzes aus Analysis I (siehe dort Satz 6.19), wo aus der Invertierbarkeit der Ableitung $f'(x)$ einer differenzierbaren Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, in allen $x \in I$ (dies bedeutet einfach nur, dass die Ableitung überall von Null verschieden ist) bereits die Existenz und Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion auf ganz $f(I)$ folgt.

Satz 3.3 lässt sich noch verschärfen: Ist f sogar k -mal stetig differenzierbar, so gilt dies auch für die lokale Inverse g . Dies folgt per Induktion leicht aus der Darstellung $Dg = \text{inv} \circ Df \circ g$, wenn wir zeigen können, dass inv nicht nur stetig, sondern sogar k -mal stetig differenzierbar ist. Wir beginnen dazu mit dem Nachweis der Differenzierbarkeit.

Lemma 3.6 Die Abbildung $\text{inv} : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$, $A \mapsto A^{-1}$ ist differenzierbar und für alle $A \in GL_n(\mathbb{R})$ und alle $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$D(\text{inv})(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

Beweis: Zunächst einmal erinnern wir daran, dass $GL_n(\mathbb{R})$ nach Beispiel 1.53 offen ist, d.h. die Frage nach der Differenzierbarkeit von inv ist überhaupt erst einmal sinnvoll, da der Definitionsbereich eine offene Menge ist. Sei nun $A \in GL_n(\mathbb{R})$ beliebig und $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(A) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, sowie $H \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass $\|H\| < \varepsilon$. (Damit gilt $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$.) Dann folgt:

$$\begin{aligned} \text{inv}(A + H) - \text{inv}(A) &= (A + H)^{-1} - A^{-1} = (A(I + A^{-1}H))^{-1} - A^{-1} \\ &= (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} - A^{-1} = ((I + A^{-1}H)^{-1} - I)A^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sei nun o.B.d.A. H so klein, dass $\|A^{-1}H\| < 1$. Dann folgt mit Lemma 3.2, dass

$$(I + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k = I - A^{-1}H + \underbrace{(A^{-1}H)^2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^{k-2}}_{=: g(H)}.$$

Damit erhalten wir aus (3.6), dass

$$\text{inv}(A + H) - \text{inv}(A) = -A^{-1}HA^{-1} + (A^{-1}H)^2 g(H)A^{-1},$$

wobei gilt, dass

$$\frac{\|(A^{-1}H)^2 g(H)A^{-1}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|H\|^2 \|g(H)\| \cdot \|A^{-1}\|}{\|H\|} = \|A^{-1}\|^2 \|H\| \cdot \|g(H)\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

und da $g(H)$ nur nichtnegative Potenzen von H enthält, bleibt $\|g(H)\|$ beschränkt für $H \rightarrow 0$, so dass

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|(A^{-1}H)^2 g(H)A^{-1}\|}{\|H\|} = 0.$$

Damit folgt (da $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ eine lineare Abbildung ist), dass inv differenzierbar ist und dass für alle $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt, dass

$$D(\text{inv})(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}. \quad \square$$

Bemerkung 3.7 1) Die Formel $D(\text{inv})(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$ sieht auf den ersten Blick etwas ungewöhnlich aus, ist aber eine Verallgemeinerung einer uns ganz vertrauten Ableitungsregel. Für den Spezialfall $n = 1$ und $a \in \mathbb{R}^{1,1} \cong \mathbb{R}$ erhalten wir nämlich für alle $h \in \mathbb{R}$, dass

$$D(\text{inv})(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1} = -\frac{h}{a^2}$$

und somit

$$\left[D(\text{inv})(a) \right] = \left[-\frac{1}{a^2} \right],$$

was mit unserem Wissen übereinstimmt, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ die Ableitung $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ hat.

2) Da sich $D(\text{inv})$ als Verkettung von Matrixmultiplikationen und inv schreiben lässt (versuchen sie dies einmal explizit), folgt mit Induktion, dass inv sogar beliebig oft differenzierbar ist.

3.2 Implizite Funktionen

In diesem Abschnitt wenden wir uns unterbestimmten nichtlinearen Gleichungssystemen zu, d.h. dem Fall, dass weniger Gleichungen als Variablen gegeben sind. Eine zentrale Fragestellung ist dann die Auflösbarkeit des Gleichungssystemen nach einer oder mehrerer Variablen. Auch hier werden wir zunächst den linearen Fall studieren und betrachten dazu ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Ax + By = 0, \quad (3.7)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ gilt. Falls B invertierbar ist, so ist das Gleichungssystem eindeutig nach y auflösbar, denn es gilt

$$y = -B^{-1}Ax.$$

Betrachten wir nun ein unterbestimmtes nichtlineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und $n + m$ Variablen. Letzte teilen wir in m Unbekannte y_1, \dots, y_m und n Parameter x_1, \dots, x_n auf. Unser Gleichungssystem hat dann die Form

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

mit Funktionen $F_i : W \rightarrow \mathbb{R}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$. Wir schreiben dieses Gleichungssystem auch kurz in der Form $F(x, y) = 0$ mit $F = (F_1, \dots, F_m)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$. Unser Ziel ist nun, das Gleichungssystem nach y aufzulösen, d.h. die Unbekannten y_1, \dots, y_m in Abhängigkeit der Parameter x_1, \dots, x_n darzustellen. Ist dies möglich, so existiert eine Funktion $f : x \mapsto y$ mit der Eigenschaft

$$F(x, f(x)) = 0 \quad (3.8)$$

für alle x . Wir sagen dann, dass die Funktion f *implizit durch* (3.8) *gegeben* ist. Wenn wir nun annehmen, dass F differenzierbar ist und wir in $(x_0, y_0) \in W$ durch $DF(x_0, y_0)$ approximieren können, so benötigen wir gemäß unserer Vorüberlegungen beim linearen Fall die Invertierbarkeit desjenigen Teils der Jacobi-Matrix $DF(x_0, y_0)$, der durch die letzten m Spalten gegeben ist. Um dies mathematisch präzise formulieren zu können, benötigen wir an dieser Stelle eine flexible Notation für Untermatrizen der Jacobi-Matrix.

Definition 3.8 Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Für $x \in W$ und Indizes $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_\ell$ sei

$$\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_\ell})}(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}}(x) & \dots & \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_\ell}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_1}}(x) & \dots & \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_\ell}}(x) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

die Teilmatrix von $Df(x)$, die aus den Zeilen i_1, \dots, i_k und Spalten j_1, \dots, j_ℓ besteht.

Für den Fall, dass wir eine differenzierbare Funktion $F : W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mit offenem Definitionsbereich $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ betrachten und die Variablen des \mathbb{R}^n mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und die des \mathbb{R}^m mit $y = (y_1, \dots, y_m)$ bezeichnen, benutzen wir für $(x_0, y_0) \in W$ auch die vereinfachte Notation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) := \frac{\partial(F_1, \dots, F_\ell)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{\ell, n} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) := \frac{\partial(F_1, \dots, F_\ell)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{\ell, m}$$

In diesem Fall gilt also

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Für den Beweis des Hauptresultat dieses Abschnitts, benötigen wir nun noch den folgenden Hilfssatz.

Lemma 3.9 *Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen. Dann gibt es zu jedem $(x, y) \in W$ offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von y , so dass $U \times V \subseteq W$.*

Beweis: Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ äquivalent sind, ist W nach Satz 1.92 auch offen bzgl. der durch $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definierten Norm. Folglich gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x, y) \subseteq W$. Für die letzte ε -Umgebung gilt aber $U_\varepsilon(x, y) = U_\varepsilon(x) \times U_\varepsilon(y)$. (Klar?). Wähle also $U = U_\varepsilon(x)$ und $V = U_\varepsilon(y)$. \square

Satz 3.10 (über implizite Funktionen) *Seien $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sowie $(x_0, y_0) \in W$, so dass gilt:*

- (i) $F(x_0, y_0) = 0$.
- (ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m, m}$ ist invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von y_0 mit $U \times V \subseteq W$, so dass folgende Aussagen gelten:

- 1) *Zu jedem $x \in U$ gibt es genau ein $y_x \in V$ mit $F(x, y_x) = 0$. Insbesondere gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f : U \rightarrow V$, $x \mapsto y_x$ mit der Eigenschaft*

$$F(x, f(x)) = 0.$$

- 2) *Die Funktion f aus 1) ist stetig differenzierbar. Ferner ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$ für alle $x \in U$ invertierbar und es gilt*

$$Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

für alle $x \in U$.

Beweis: Unser Ziel ist die Anwendung des Umkehrsatzes, wofür wir allerdings eine Funktion benötigen, bei der Bild- und Urbildraum Teilmengen von Räumen derselben Dimension sind. Daher betrachten wir die Hilfsfunktion $h : W \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ F(x, y) \end{bmatrix}$$

für alle $(x, y) \in W$. Mit F ist auch h stetig differenzierbar und hat in $(x, y) \in W$ die Jacobi-Matrix

$$Dh(x, y) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Somit ist $Dh(x_0, y_0)$ wegen (ii) invertierbar und aus dem Umkehrsatz folgt die Existenz einer offenen Umgebung $\widetilde{W} \subseteq W$ von (x_0, y_0) , so dass die Einschränkung $h : \widetilde{W} \rightarrow h(\widetilde{W})$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $g : h(\widetilde{W}) \rightarrow \widetilde{W}$ hat. Nach Lemma 3.9 gibt es offene Umgebungen U von x_0 und V von y_0 mit $U \times V \subseteq \widetilde{W}$. Der Einfachheit halber nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\widetilde{W} = U \times V$ (andernfalls verkleinern wir \widetilde{W}). Dann zerlegen wir $g = (g_1, g_2)$ in zwei Komponentenfunktionen

$$g_1 : h(\widetilde{W}) \rightarrow U \text{ und } g_2 : h(\widetilde{W}) \rightarrow V.$$

Sei nun $(a, b) \in h(\widetilde{W})$, sowie $x := g_1(a, b)$ und $y := g_2(a, b)$. Dann gilt $(x, y) = g(a, b) \in \widetilde{W}$ und, da g die lokale Inverse von h ist, folgt

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = h(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ F(x, y) \end{bmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir

$$a = x = g_1(a, b) \quad \text{und} \quad b = F(x, y) = F(x, g_2(x, b)). \quad (3.10)$$

Nach Voraussetzung gilt $(x_0, 0) = h(x_0, y_0) \in h(\widetilde{W})$. Wegen der Offenheit von $h(\widetilde{W})$ gilt dann auch $(a, 0) \in h(\widetilde{W})$ für alle $a \in U$ in einer kleinen Umgebung von x_0 , o.B.d.A. bereits für alle $a \in U$. (Andernfalls verkleinern wir U .) Definiere nun $f : U \rightarrow V$ durch $f(x) := g_2(x, 0)$ für alle $x \in U$. Dann ist f stetig differenzierbar als Komposition $f = g_2 \circ \ell$, wobei ℓ die lineare Abbildung $\ell : x \mapsto (x, 0)$ bezeichnet, und wegen der Gleichung (3.10) gilt

$$0 = F(x, g_2(x, 0)) = F(x, f(x)).$$

Die Funktion f ist mit dieser Eigenschaft auch eindeutig bestimmt, denn ist $x \in U$ und $y \in V$, so dass $F(x, y) = 0$, so folgt

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

und daher

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = g(h(x, y)) = g(x, 0) = \begin{bmatrix} x \\ g_2(x, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix},$$

also $y = f(x)$. Insbesondere gibt es also zu jedem $x \in U$ genau ein $y \in V$ mit $F(x, y) = 0$, was den Beweis von 1) abschließt.

Für den Beweis von 2) nutzen wir, dass wir bereits die stetige Differenzierbarkeit von f gezeigt haben. Dann erhalten wir mit der Kettenregel aus der Gleichung

$$0 = F(x, f(x)) = (F \circ (Id, f))(x)$$

für alle $x \in U$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= DF(x, f(x)) \cdot D(Id, f)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n \\ Df(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot Df(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt $Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$ für alle $x \in U$, denn aus dem Umkehrsatz folgt die Invertierbarkeit von $Dh(x, y)$ und damit auch die von $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ für alle $(x, y) \in \widetilde{W}$. \square

Beispiel 3.11 Wir untersuchen die Auflösbarkeit der Gleichung $ye^{-x} = x$. Dazu betrachten wir die (stetig differenzierbare) Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto ye^{-x} - x$ mit der Ableitung

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} -(ye^{-x} + 1) & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

- 1) *Auflösen nach y*: Wir versuchen y als Funktion von x darzustellen, d.h. wir suchen eine Funktion f , so dass $F(x, f(x)) = 0$. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^{-x} \neq 0$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ist F_y auf ganz \mathbb{R}^2 invertierbar und nach dem Satz über implizite Funktionen ist unsere Gleichung $ye^{-x} = x$ auf ganz \mathbb{R}^2 lokal nach x auflösbar. Tatsächlich können wir die gesuchte Funktion f sogar explizit darstellen, denn aus

$$0 = F(x, f(x)) = f(x)e^{-x} - x$$

folgt $f(x) = e^x x$. Damit erhalten wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die Gleichung ist nicht nur lokal, sondern sogar global nach y auflösbar. Die Formel für das “*implizierte Differenzieren*” aus Satz 3.10 liefert uns

$$f'(x) = Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) = e^x (f(x)e^{-x} + 1).$$

Da uns die Funktion allerdings *explizit* bekannt ist, können wir sie auch “*explizit differenzieren*” und erhalten

$$f'(x) = e^x x + e^x = e^x (x + 1) = e^x (f(x)e^{-x} + 1),$$

wobei wir im letzten Schritt die Identität $f(x)e^{-x} = x$ ausgenutzt haben. In beiden Fällen erhalten wir also dasselbe Ergebnis.

- 2) *Auflösen nach x* : Jetzt wollen wir x als Funktion von y darstellen, d.h. wir suchen eine Funktion \mathbf{W} , so dass $F(\mathbf{W}(y), y) = 0$. (Die ungewöhnliche Bezeichnung “ \mathbf{W} ” für eine Funktion an dieser Stelle hat gute Gründe, von denen Sie in Kürze erfahren werden.) Nun gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -ye^{-x} - 1 \neq 0$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $ye^{-x} \neq -1$, also z.B. für $(x, y) = (0, 0)$. Folglich ist die Gleichung $ye^{-x} - x = 0$ lokal in $(0, 0)$ nach x auflösbar. Umformen ergibt

$$y = e^x x,$$

d.h. wir erhalten $x = \mathbf{W}(y)$, wobei \mathbf{W} die sogenannte *Lambertsche W -Funktion* ist. Diese ist per Definition gerade die Umkehrfunktion von $] -1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xe^x$. Das Besondere an der Lambertschen \mathbf{W} -Funktion ist, dass sie nicht durch elementare Funktionen (vgl. Bemerkung 7.36 in Analysis I) dargestellt werden kann und uns daher in diesem Sinne nicht explizit vorliegt. Daher können wir sie leider auch nicht explizit differenzieren, um ihre Ableitungsfunktion zu bestimmen. Wir können sie jedoch implizit differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'(y) &= -\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{W}(y), y)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{W}(y), y) \\ &= \frac{1}{ye^{-\mathbf{W}(y)} + 1} \cdot e^{-\mathbf{W}(y)} = \frac{1}{y + e^{\mathbf{W}(y)}} = \frac{\mathbf{W}(y)}{\mathbf{W}(y)(y + e^{\mathbf{W}(y)})} \\ &= \frac{\mathbf{W}(y)}{y(\mathbf{W}(y) + 1)}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $y = e^{\mathbf{W}(y)} \mathbf{W}(y)$ ausgenutzt haben. Damit liegt uns die Ableitung allerdings auch nicht explizit, sondern nur in Form einer Differentialgleichung vor. Dies ist jedoch nicht überraschend, denn wenn wir die Ableitung von \mathbf{W} in expliziter Form vorliegen hätten, könnten wir möglicherweise durch Integration auch eine explizite Form der ursprünglichen Funktion \mathbf{W} erhalten, was nach unseren Vorbemerkungen aber leider nicht möglich ist.

Der Satz über implizite Funktionen ist einer der wichtigsten Sätze der Analysis, da er unter relativ schwachen Voraussetzungen nicht nur die Existenz von Funktionen liefert, für die sich keine explizite Konstruktionsvorschrift angeben lässt, sondern auch gleichzeitig eine Formel für die Ableitung dieser Funktionen enthält.

3.3 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Die beiden großen Sätze der mehrdimensionalen Differentialrechnung, die wir in den beiden vorigen Abschnitten kennengelernt haben, liefern uns ein wichtiges Werkzeug in der Behandlung nichtlinearer Gleichungssysteme. Doch was lässt sich eigentlich über die Struktur der Lösungsmengen dieser Gleichungssysteme sagen? Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme Unterräume (im homogenen Fall) bzw. affine Unterräume (im inhomogenen Fall) des \mathbb{R}^n sind. Liegt das nichtlineare Gleichungssystem in Form einer stetig differenzierbaren Funktion vor, die sich lokal durch ihre Ableitung linear approximieren lässt, ist es naheliegend sich zu fragen, ob sich die Lösungsmenge des Gleichungssystem “lokal wie ein Unterraum des \mathbb{R}^n verhält”. Die Antwort darauf liefert der Begriff der *Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n* mit dem wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen wollen. Als instruktives Beispiel betrachten wir zunächst die Kugeloberfläche der dreidimensionalen Einheitskugel, also die Einheitssphäre

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\},$$

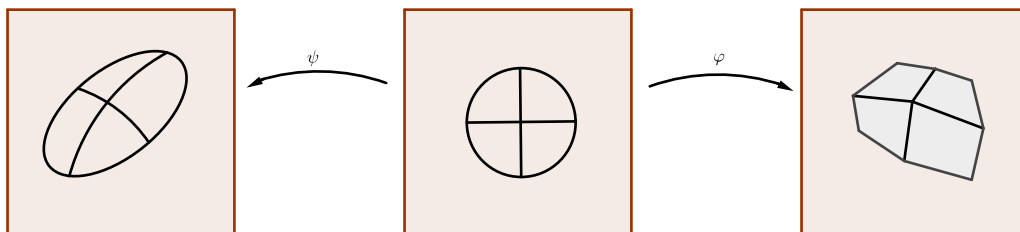
die wir als Lösungsmenge des nichtlinearen Gleichungssystem $f(x) = 0$ mit der stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ interpretieren können. Jeder Punkt der Kugeloberfläche lässt sich eindeutig durch zwei Parameter charakterisieren, nämlich der “*geographischen Breite*” und der “*geographischen Länge*”. Wie Ihnen aus der Geographie bekannt ist, lassen sich mit diesem Wissen Teile der Erdoberfläche auf einer zweidimensionalen Karte in einem Atlas darstellen. Mathematisch formuliert bedeutet das, dass sich Teile der Einheitssphäre bijektiv auf eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 abbilden lässt, wobei diese Bijektion nicht beliebig ist, sondern noch ein paar schöne Eigenschaften hat, was anschaulich gesprochen dazu führt, dass eine Teilmenge unter dieser Bijektion nur etwas “verformt” wird. Für die präzise mathematische Definition dieser Eigenschaften müssen wir allerdings etwas mehr ausholen und lernen zunächst ein paar neue Begriffe kennen.

Definition 3.12 1) Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ heißt **Homöomorphismus**, falls φ bijektiv ist und φ und φ^{-1} **beide stetig** sind. In diesem Fall heißen die Mengen X und Y *homöomorph*.

2) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ heißt **Diffeomorphismus**, falls φ bijektiv ist und φ und φ^{-1} **beide stetig differenzierbar** sind. In diesem Fall heißen die Mengen U und V *diffeomorph*.

Bemerkung 3.13 Ein Homöomorphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ ist sozusagen ein “Topologie-Isomorphismus” zwischen zwei metrischen Räumen X und Y , in dem Sinn, dass beide Räume “*topologisch äquivalent*” sind. Für alle Mengen $U \subseteq X$ ist nämlich U genau dann offen in X , wenn $\varphi(U)$ offen in Y ist. (Dies folgt sofort aus der Stetigkeit von φ und φ^{-1} die bedingt, dass Urbilder offener Mengen offen sind.) Wir können daher die homöomorphen Mengen X und Y mit Hilfe der bijektiven Abbildung φ identifizieren.

Beispiel 3.14 Die untenstehende Graphik illustriert die typische Wirkung von Homöomorphismen und Diffeomorphismen am Beispiel einer kreisförmigen Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Während ein Homöomorphismus φ (rechte Seite) die Kreisscheibe bijektiv auf eine Teilmenge abbildet, deren Rand auch Ecken haben kann, ist das Bild eines Diffeomorphismus ψ (linke Seite) deutlich “glatter”.



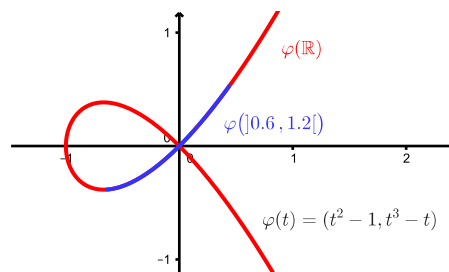
Wenn wir an “möglichst glatten Verformungen” von Teilmengen durch bijektive Abbildungen interessiert sind, dann veranschaulicht Beispiel 3.14, dass der Begriff des Homöomorphismus noch zu schwach ist. Der Begriff des Diffeomorphismus ist auf der anderen Seite wiederum zu stark für die Beschreibung einer Untermannigfaltigkeit, denn wegen Bemerkung 3.1 kann es keinen Diffeomorphismus von einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 auf eine Teilmenge einer Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3 geben, da Definitions- und Wertebereich offene Teilmengen von Banachräumen derselben Dimension sein müssen. (Dabei macht uns hier nicht nur das Problem der unterschiedlichen Dimensionen zu schaffen, sondern auch die Tatsache, dass außer der leeren Menge keine Teilmenge einer Kugeloberfläche eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^3 sein kann.) Daher wählen wir als Kompromiss den Zugang über “*immersive Homöomorphismen*”, d.h. Homöomorphismen, die zusätzlich noch eine *Immersion* sind.

Definition 3.15 Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine Abbildung $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Immersion**, falls φ stetig differenzierbar ist und $D\varphi(t)$ für alle $t \in T$ injektiv ist, d.h. wenn $\text{Rang } D\varphi(t) = k$ für alle $t \in T$ gilt.

Beispiel 3.16 1) *Reguläre Kurven*, d.h. Abbildungen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, sind Immersionen. Ein spezielles Beispiel ist durch die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ gegeben. Wir erhalten

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

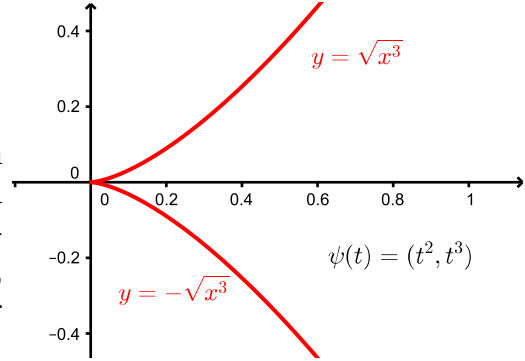
für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit ist φ eine Immersion. Beachten Sie jedoch, dass φ nicht injektiv und daher nicht global umkehrbar ist. Schränken wir φ jedoch z.B. auf das Intervall $]0.6, 1.2[$ ein (das Bild entspricht dann dem blauen Bereich in der Skizze), so ist φ dort lokal umkehrbar und, da die Umkehrfunktion offenbar ebenfalls stetig ist, dort lokal ein Homöomorphismus.



- 2) Ein Beispiel für eine nicht-reguläre Kurve ist die sogenannte *Neilsche Parabel*, die durch die Vorschrift

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^2, t^3)$$

gegeben ist. Das Bild dieser Kurve setzt sich aus den beiden Parabelästen $y = \sqrt{x^3}$ und $y = -\sqrt{x^3}$ zusammen. In diesem Fall handelt es sich folgerichtig um keine Immersion, denn wir erhalten $\psi'(t) = (2t, 3t^2)$ und daher $\psi'(0) = (0, 0)$.



Teil 2) aus Beispiel 3.16 veranschaulicht, warum wir auf die Injektivität der Ableitung bei Immersionen nicht verzichten sollten: Interessanterweise befindet sich der “Knick” in der Neilschen Parabel genau an der Stelle, in der die Ableitung nicht den vollen Rang hat. Der folgende Satz besagt, dass **eine Immersion überall lokal ein Homöomorphismus ist**.

Satz 3.17 Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $t \in T$ eine offene Umgebung $\tilde{T} \subseteq T$ von t , so dass die Einschränkung $\varphi|_{\tilde{T}} : \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T})$ ein Homöomorphismus ist. (Hierbei ist $\varphi(\tilde{T}) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der induzierten Metrik bzw. Spurmetrik ausgestattet, vgl. Teil 5) von Beispiel 1.5).

Beweis: Falls $k = n$ gilt, so folgt dies sofort aus dem Umkehrsatz, da es dann eine offene Umgebung $\tilde{T} \subseteq T$ von t gibt, auf der φ bijektiv mit stetiger (sogar stetig differenzierbarer) Umkehrfunktion ist. Sei also im Folgenden $k < n$ und sei $t \in T$ beliebig. Wegen $\text{Rang}(D\varphi(t)) = k$ gibt es k Zeilen von $D\varphi(t) \in \mathbb{R}^{n,k}$, die linear unabhängig sind. O.B.d.A. seien dies die ersten k Zeilen. (Ansonsten betrachten wir die Immersion $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ mit $\psi_i = \varphi_{\sigma(i)}$, $i = 1, \dots, n$, für eine geeignete Permutation $\sigma \in S_n$.) Schreibe nun $\varphi = (\tilde{\varphi}, \hat{\varphi})$ mit $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ und $\hat{\varphi} = (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)$. Dann gilt unter Benutzung der Notation (3.9), dass

$$\det D\tilde{\varphi}(t) = \det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0.$$

Daher existiert nach dem Umkehrsatz Satz 3.3 eine offene Umgebung $\tilde{T} \subseteq T$ von t , so dass $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{T})$ bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\tilde{\psi} : \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \rightarrow \tilde{T}$ besitzt. Mit $\tilde{\varphi}$ ist auch φ injektiv und daher ist $\varphi : \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T})$ bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $\psi : \varphi(\tilde{T}) \rightarrow \tilde{T}$ mit

$$\psi(y, z) := \tilde{\psi}(y) \quad \text{für } (y, z) \in \varphi(\tilde{T}) \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k},$$

denn für alle $u \in \tilde{T}$ gilt, dass

$$\psi(\varphi(u)) = \psi(\tilde{\varphi}(u), \hat{\varphi}(u)) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(u)) = u.$$

Offenbar ist mit $\tilde{\psi}$ auch ψ stetig und daher ist $\varphi : \tilde{T} \rightarrow \varphi(\tilde{T})$ ein Homöomorphismus. \square

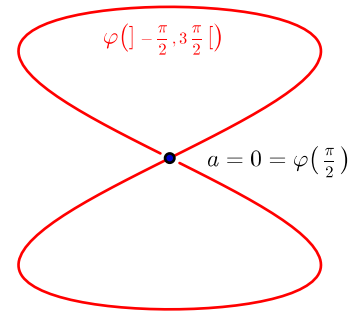
Beispiel 3.18 1) Betrachten wir noch einmal die Immersion φ aus Beispiel 3.16, so erhalten wir für $t = 1$ die Umgebung $\tilde{I} =]0.6, 1.2[$, so dass $\varphi : \tilde{I} \rightarrow \varphi(\tilde{I})$ ein Homöomorphismus ist. Dabei ist $\varphi(\tilde{I})$ durch den blauen Bereich der Kurve gegeben. Dieser “verhält sich wie” das Intervall $]0.6, 1.2[$ in dem Sinn, dass \tilde{I} stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion auf $\varphi(\tilde{I})$ abgebildet werden kann. Anschaulich gesprochen haben wir mit $\varphi(\tilde{I})$ ein Kurvenstück gegeben, dass sich “zu einem Intervall glattwalzen lässt”.

- 2) Genauso wie beim Umkehrsatz erhalten wir auch hier stets nur eine lokale Aussage, selbst dann, wenn die gegebene Immersion injektiv ist.

Als Beispiel betrachten wir die reguläre Kurve

$$\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Dann ist φ injektiv und auch eine Immersion, jedoch ist $\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \varphi(]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[)$ kein Homöomorphismus, da die Umkehrfunktion φ^{-1} im Punkt $a = 0 = \varphi(\frac{\pi}{2})$ nicht stetig ist. (Klar?)



Nach diesen Vorbereitungen haben wir endlich die notwendigen Hilfsmittel zusammengestellt, um den Begriff der *Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n* definieren zu können.

Definition 3.19 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

- 1) M heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , falls es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a , sowie eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : T \rightarrow M$ gibt, so dass

$$\varphi(T) = M \cap U$$

gilt, wobei $\varphi : T \rightarrow \varphi(T)$ ein Homöomorphismus ist.

- 2) $\varphi : T \rightarrow M$ wie in 1) heißt Parameterdarstellung (auch lokales Koordinatensystem) von M um a . Ist $(t_1, \dots, t_k) \in T$ mit $\varphi(t_1, \dots, t_k) = a$, so heißen t_1, \dots, t_k die lokalen Koordinaten von a bzgl. φ . (Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(T) \rightarrow T$ bezeichnet man auch als eine Karte von M .)

Beispiel 3.20 1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist U eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , denn für jedes $a \in U$ ist $\text{Id}_U : U \rightarrow U$ eine Parameterdarstellung von U um a .

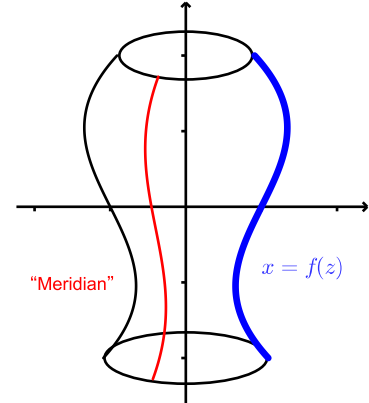
- 2) Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann folgt sofort aus Satz 3.17, dass es zu jedem $x \in T$ eine offene Umgebung $\tilde{T} \subseteq T$ von x gibt, so dass $\varphi(\tilde{T}) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. (Handelt es sich bei dem Bild $\varphi(\mathbb{R})$ der Immersion aus Beispiel 3.16 um eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ?)

- 3) *Rotationsflächen im \mathbb{R}^3* . Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall sowie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Graphen wir als “ $x = f(z)$ ” in der x, z -Ebene betrachten. Durch Rotation dieses Graphen um die z -Achse (siehe Skizze) entsteht eine Fläche M als Bild der Abbildung

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \alpha) \mapsto \begin{bmatrix} f(t) \cos \alpha \\ f(t) \sin \alpha \\ t \end{bmatrix}.$$

Für deren Ableitung erhalten wir

$$D\varphi(t, \alpha) = \begin{bmatrix} f'(t) \cos \alpha & -f(t) \sin \alpha \\ f'(t) \sin \alpha & f(t) \cos \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



und offenbar gilt $\text{Rang } D\varphi(t, \alpha) = 2$ genau dann, wenn $f(t) \neq 0$. Folglich ist φ genau dann eine Immersion, wenn der Graph von f die z -Achse nicht schneidet. Allerdings ist φ nicht injektiv und bildet daher $I \times \mathbb{R}$ nicht homöomorph auf M ab. Betrachten wir jedoch für ein festes $\beta \in \mathbb{R}$ die Einschränkung

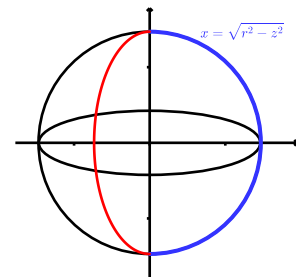
$$\varphi_\beta := \varphi|_{I \times]\beta, \beta + 2\pi[} : I \times]\beta, \beta + 2\pi[\rightarrow \varphi(I \times]\beta, \beta + 2\pi[) \subseteq M,$$

so ist dies ein Homöomorphismus (was wir an dieser Stelle allerdings nicht nachweisen werden). Somit ist φ eine Parameterdarstellung für alle $x \in \varphi(I \times]\beta, \beta + 2\pi[)$, wobei man die letztere Menge erhält, indem man aus der Rotationsfläche M den “Meridian” $\varphi(I \times \{\beta\})$ entfernt. (In der Graphik ist dieser rot eingezeichnet.) Für alle Punkte des Meridians kann z.B. $\varphi_{\beta+\pi}$ als Parameterdarstellung gewählt werden. Daher ist M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 .

- 4) Die Kugel $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$ vom Radius $r > 0$ ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Parameterdarstellungen erhalten wir analog wie in 3) durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f :]0, r[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sqrt{r^2 - t^2}.$$

um die z -Achse. Für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ ist dann



$$\psi_\beta :]-r, r[\times]\beta, \beta + 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{r^2 - t^2} \cos \phi \\ \sqrt{r^2 - t^2} \sin \phi \\ t \end{bmatrix}$$

eine Parameterdarstellung für alle Punkte von M mit Ausnahme eines Meridians. Allerdings sind die Wurzelterme in dieser Parameterdarstellung doch recht störend.

Man wählt daher an dieser Stelle eine andere Parametrisierung und ersetzt t einfach durch $r \cos \theta$. Damit erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\hat{\psi}_\beta :]0, \pi[\times]\beta, \beta + 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}$$

Der Parameter θ entspricht hierbei der “*Poldistanz*” (nicht jedoch der “*geographischen Breite*”, diese wäre durch $\frac{\pi}{2} - \theta$ gegeben), während ϕ der “*geographischen Länge*” entspricht. “*Nord-*” und “*Südpol*”, d.h. die Punkte $(0, 0, r)$ bzw. $(0, 0, -r)$ werden von keiner der Parameterdarstellungen ψ_β oder $\hat{\psi}_\beta$ erfasst. Für diese beiden Ausnahmepunkte erhalten wir Parameterdarstellungen z.B. mit Hilfe der Rotation von Funktionsgraphen in der x, y -Ebene um die x -Achse.

- 5) Jeder k -dimensionale affine Unterraum M des \mathbb{R}^n ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Gilt nämlich

$$M = v + \mathcal{W} := \{v + w \mid w \in \mathcal{W}\}$$

wobei $v \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum des \mathbb{R}^n ist und ist (v_1, \dots, v_k) eine Basis von \mathcal{W} , so erhalten wir durch

$$\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow M, \quad (t_1, \dots, t_k) \mapsto v + \sum_{j=1}^k t_j v_j$$

für jedes $a \in M$ eine Parameterdarstellung von M um a , denn wie sie leicht überprüfen gilt $\text{Rang } D\varphi(t) = k$ für alle $t \in \mathbb{R}^k$ und offenbar ist φ bijektiv und φ^{-1} ist stetig, d.h. φ ist ein Homöomorphismus.

Die Definition von Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n wie in Definition 3.19 ist für die weitere Theorie sehr nützlich, in manchen Situationen allerdings auch sehr unhandlich. Daher ist es zweckmäßig auf alternative Darstellungen ausweichen zu können. Welche anderen Möglichkeiten man dabei in Betracht ziehen kann, wollen wir uns am Beispiel der Einheitssphäre klarmachen, die wir im vorigen Beispiel als zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 entlarvt haben.

Beispiel 3.21 Wir betrachten die Einheitssphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$.

- 1) *Beschreibung durch eine Gleichung.* Bereits in der Mengenbeschreibung ist die Gleichung $1 = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ enthalten. Der Nachteil bei dieser Darstellung ist allerdings wieder einmal der unhandliche Wurzelausdruck. Daher betrachten wir stattdessen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

Dann ist f stetig differenzierbar und offenbar gilt $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$. Außerdem beobachten wir, dass für alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ gilt, dass

$$Df(x) = 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

- 2) *Beschreibung durch Graphen.* Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in S^2$ mit $a_3 > 0$. Durch Auflösen der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ können wir x_3 lokal um a als Funktion von x_1 und x_2 darstellen. Es gilt:

$$x_3 = g(x_1, x_2) := \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Definieren wir nun die offenen Mengen $U' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ und $U'' :=]0, \infty[$, so erhalten wir durch

$$S^2 \cap (U' \times U'') = \{(x_1, x_2, x_3) \in U' \times U'' \mid x_3 = g(x_1, x_2)\}$$

eine lokale Darstellung von S^2 um a als Graph der Funktion g . Analog funktioniert dies um Punkte $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ mit $\hat{x}_3 < 0$. Ist dagegen $\hat{x}_3 = 0$, so gilt entweder $\hat{x}_1 \neq 0$ oder $\hat{x}_2 \neq 0$, so dass wir S^2 lokal als Graph einer Funktion von x_2, x_3 bzw. von x_1, x_3 darstellen können.

Die Beobachtung des vorangegangenen Beispiels lassen sich verallgemeinern, wobei wir im folgenden Satz noch eine weitere äquivalente Bedingung zur Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n hinzufügen.

Satz 3.22 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- 1) M ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .
 2) **(Darstellung durch Flachmacher).** Zu jedem $a \in M$ gibt es offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$, sowie einen Diffeomorphismus $\Psi : U \rightarrow V$, so dass

$$\Psi(M \cap U) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \cap V.$$

- 3) **(Darstellung durch Gleichungen).** Zu jedem $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit der Eigenschaft

$$\text{Rang } Df(x) = n - k$$

für alle $x \in M \cap U$, so dass

$$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

- 4) **(Darstellung als Graph).** Zu jedem $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ gibt es (ggf. nach Umm Nummerierung der Koordinaten) offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \rightarrow U''$, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}.$$

Beweis: “1) \Rightarrow 2)”: Sei $a \in M$. Dann gibt es eine offene Menge $\widehat{T} \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \widehat{T} \rightarrow \varphi(\widehat{T}) \subseteq M$, so dass $a \in \varphi(\widehat{T})$. Im Beweis von Satz 3.17 haben wir gezeigt, dass es dann (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten) eine offene Menge $T \subseteq \widehat{T}$ gibt, so dass $a \in \varphi(T)$ und so dass

$$\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : T \rightarrow \tilde{\varphi}(T) \subseteq \mathbb{R}^k$$

ein Diffeomorphismus ist. Wir erweitern $\tilde{\varphi}$ auf $T \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$\Phi : T \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_k) \\ \varphi_{k+1}(x_1, \dots, x_k) + x_{k+1} \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_k) + x_n \end{bmatrix}.$$

Dann ist Φ ein Diffeomorphismus, denn wie Sie leicht nachrechnen, ist

$$\Psi : \tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow T \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}^{-1}(y_1, \dots, y_k) \\ y_{k+1} - \varphi_{k+1}(\tilde{\varphi}^{-1}(y_1, \dots, y_k)) \\ \vdots \\ y_n - \varphi_n(\tilde{\varphi}^{-1}(y_1, \dots, y_k)) \end{bmatrix}$$

die Umkehrfunktion von Φ und diese ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen selbst stetig differenzierbar. Speziell gilt

$$\Phi(T \times \{0\}) = \varphi(T) \subseteq M.$$

Da $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und φ ein Homöomorphismus, also φ^{-1} stetig ist, ist insbesondere $\varphi(T)$ offen in M , d.h. es gibt eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$M \cap U = \varphi(T).$$

O.B.d.A. sei $U \subseteq \tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k}$. (Andernfalls ersetze U durch $U \cap (\tilde{\varphi}(T) \times \mathbb{R}^{n-k})$, denn $\tilde{\varphi}(T)$ ist offen im \mathbb{R}^k , da $\tilde{\varphi}$ ein Diffeomorphismus ist.) Setze nun $V := \Phi^{-1}(U)$. Dann ist $\Psi : U \rightarrow V$ immer noch ein Diffeomorphismus. Außerdem gilt $V \subseteq T \times \mathbb{R}^{n-k}$ und

$$\Psi(M \cap U) = \Psi(\varphi(T)) = T \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \cap V.$$

“2) \Rightarrow 3)”: Sei $a \in M$. Dann gibt es nach 2) einen Diffeomorphismus $\Psi : U \rightarrow V$, wobei U eine offene Umgebung von a ist und $\Psi(M \cap U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \cap V$ gilt. Mit $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$ erhalten wir daraus

$$M \cap U = \{x \in U \mid \Psi_{k+1}(x) = \dots = \Psi_n(x) = 0\}.$$

Setze also $f_i := \Psi_{k+i}$ für $i = 1, \dots, n-k$ und $f = (f_1, \dots, f_{n-k})$. Da Ψ ein Diffeomorphismus ist, ist $D\Psi(x)$ nach Bemerkung 3.1 für alle $x \in U$ invertierbar und daher gilt für alle $x \in U$, dass

$$\text{Rang } Df(x) = \text{Rang } \frac{\partial(\Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = n - k.$$

“3) \Rightarrow 4)”: Sei $a \in M$ und sei $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ wie in 3). Wegen $\text{Rang } Df(x) = n-k$ für alle $x \in U$ hat die Matrix $Df(a)$ insgesamt $n-k$ linear unabhängige Spalten. O.B.d.A. seien dies die Spalten $k+1, \dots, n$. (Andernfalls nummerieren wir die Variablen um.) Somit hat $Df(a)$ die Form

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x'}(a) & \frac{\partial f}{\partial x''}(a) \end{bmatrix}$$

mit $x' = (x_1, \dots, x_k)$ und $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, wobei $\frac{\partial f}{\partial x''}(a)$ invertierbar ist. Daher lässt sich der Satz 3.10 über implizite Funktionen anwenden und es folgt die Existenz von offenen Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von a' und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von a'' , so dass zu jedem $x' \in U'$ genau ein $x'' \in U''$ existiert mit $f(x', x'') = 0$. Insbesondere gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \rightarrow U''$, so dass $x'' = g(x')$. Damit erhalten wir

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}.$$

“4) \Rightarrow 1)”: Sei $a \in M$ und seien U', U'' und g wie in 4). Setze $T := U'$. Dann ist

$$\varphi : T \rightarrow \varphi(T) \subseteq U' \times U'', \quad t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ g(t) \end{bmatrix}$$

eine Immersion, denn es gilt

$$D\varphi(t) = \begin{bmatrix} I_k \\ Dg(t) \end{bmatrix},$$

d.h. $D\varphi(t)$ hat vollen Rang für alle $t \in T$. Ferner ist φ offenbar injektiv und die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : \varphi(T) \rightarrow T$ ist ebenso offenbar stetig. Folglich ist $\varphi : T \rightarrow \varphi(T)$ ein Homöomorphismus und damit auch eine Parameterdarstellung von M um den Punkt a . \square

Bemerkung 3.23 Die Darstellungsmöglichkeit 3) aus Satz 3.22 verdeutlicht, dass Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n in natürlicher Weise als Lösungsmengen nichtlinearer Gleichungssysteme auftreten. Ist nämlich ein solches Gleichungssystem in der Form $f(x) = 0$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, gegeben und gilt $\text{Rang } Df(x) = n - k$ für alle $x \in U$, so ist $M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

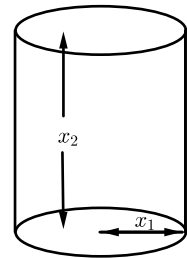
Diese Erkenntnis verdeutlicht auch noch einmal unsere ursprüngliche Interpretation einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , dass sie sich lokal “wie der \mathbb{R}^k verhält”. Betrachten wir nämlich ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ und $\text{Rang } A = n - k$, so ist aus der linearen Algebra bekannt, dass die Lösungsmenge $\text{Kern}(A)$ des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ein k -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n und daher isomorph zum \mathbb{R}^k ist. Dass sich eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal um einen Punkt $x_0 \in U$ durch eine lineare Abbildung (nämlich $Df(x_0)$) approximieren lässt, können wir nun so argumentieren, dass sie sich nahe x_0 “wie eine lineare Funktion verhält”. Dementsprechend “verhält sich” die Lösungsmenge des nichtlinearen Gleichungssystems $f(x) = 0$ wie ein k -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n .

3.4 Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen

Eine wichtige Anwendung unserer bisherigen Erkenntnisse dieses Kapitels ist die Lösung von Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen. Dazu betrachten wir als Motivation das folgende Beispiel.

Beispiel 3.24 Ein Hersteller möchte zylinderförmige Dosen für Katzenfutter herstellen. Eine einzelne Dose soll das Volumen $V \in \mathbb{R}$ besitzen. Um Materialkosten zu sparen soll der Zylinder dabei so konstruiert werden, dass seine Oberfläche minimal ist.

Es sei x_1 der Radius der Grundfläche des Zylinders und x_2 seine Höhe. Dann ist die Mantelfläche des Zylinders durch $2\pi x_1 x_2$ und seine Boden- und Deckelfläche jeweils durch πx_1^2 gegeben. Das Volumen des Zylinders ist dann $\pi x_1^2 x_2$. Da letzteres den vorgegebenen Wert V annehmen soll, können wir unser Problem nun wie folgt mathematisch formulieren: *Minimiere die Funktion*



$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2$$

unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) := \pi x_1^2 x_2 - V = 0$.

In diesem speziellen Fall ist die Aufgabe auch ohne weitere Hilfsmittel möglich, da die Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = 0$ explizit nach x_2 auflösbar ist. Dann können wir x_2 in $f(x_1, x_2)$ einsetzen und erhalten eine Minimierungsaufgabe für eine Funktion einer Veränderlichen ohne Nebenbedingung. Im Allgemeinen ist diese Vorgehensweise allerdings nicht immer möglich, weshalb wir in diesem Abschnitt ein neues Lösungsverfahren entwickeln werden.

Definition 3.25 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, wobei $m \leq n$.

1) Wir nennen

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen.

2) $\mathcal{F} := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ heißt zulässiger Bereich³ von (3.11).

3) Ein Punkt $x \in \mathcal{F}$ heißt regulär, falls $\text{Rang } Dg(x) = m$.

4) Ein Punkt $x^* \in \mathcal{F}$ heißt lokale Lösung von (3.11) oder auch Stelle eines lokalen Minimums von (3.11), falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

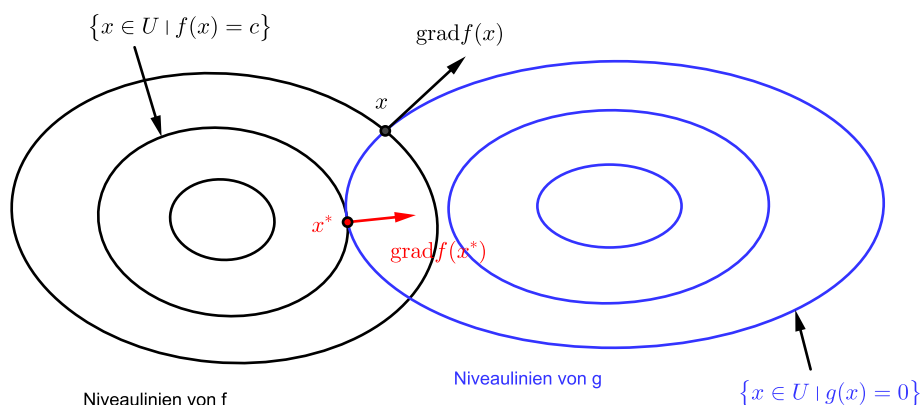
$$f(x^*) \leq f(x)$$

für alle $x \in \mathcal{F}$ mit $\|x - x^*\| < \varepsilon$ gilt.

³Die übliche Bezeichnung mit \mathcal{F} erklärt sich dadurch, dass “zulässig” im Englischen mit “feasible” übersetzt wird.

Bemerkung 3.26 Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 3.25 sei $x^* \in \mathcal{F}$ regulär. Wegen $\text{Rang } Dg(x^*) = m$ und der stetigen Differenzierbarkeit von g gibt es dann eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von x^* , so dass $\text{Rang } Dg(x) = m$ für alle $x \in \tilde{U}$ gilt. (Übung.) Damit ist $M := \mathcal{F} \cap \tilde{U}$ nach Teil 3) von Satz 3.22 eine $(n - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Um eine Idee für ein Lösungsverfahren für das Problem 3.11 zu finden, betrachten wir einmal den Spezialfall $n = 2$ und $m = 1$ etwas genauer, d.h. wir betrachten $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und stetig differenzierbare Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, die wir uns mit Hilfe von Niveaumengen (dies sind in diesem Fall typischerweise Linien) vorstellen können, vgl. Definition 2.63.



Insbesondere ist $\mathcal{F} = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ eine dieser Niveaumengen. Anschaulich ist klar: Ist $x \in \mathcal{F}$ und steht $\text{grad } f(x)$ nicht senkrecht auf \mathcal{F} , so gibt es entlang der Niveaulinie \mathcal{F} in einer Richtung einen Anstieg von f , in der anderen Richtung dagegen einen Abfall. In solchen Punkten kann also kein lokales Minimum vorliegen, sondern höchstens in einem Punkt $x^* \in U$, in dem der Gradient von f senkrecht auf \mathcal{F} steht. Da der Gradient von g in x^* ebenfalls senkrecht auf \mathcal{F} steht, bedeutet das in diesem Fall (da wir uns im \mathbb{R}^2 befinden), dass $\text{grad } f(x^*)$ und $\text{grad } g(x^*)$ parallel sein müssen, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\text{grad } f(x^*) = \lambda \text{grad } g(x^*)$$

gilt. Diese Beobachtung werden wir nun im Folgenden formalisieren und präzisieren.

Definition 3.27 Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und sei $a \in M$.

- 1) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in a , falls es $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ gibt, so dass

$$\alpha(0) = a \quad \text{und} \quad \alpha'(0) = v.$$

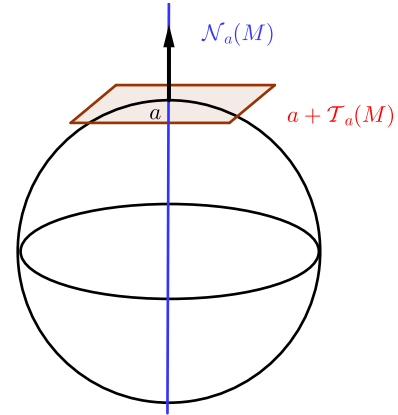
- 2) Die Menge $\mathcal{T}_a(M) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}$ heißt Tangentialraum von M in a .
- 3) Die Menge $\mathcal{N}_a(M) := \mathcal{T}_a(M)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \perp v \text{ für alle } v \in \mathcal{T}_a(M)\}$ heißt Normalenraum von M in a . Ihre Elemente heißen Normalenvektoren von M in a .

Beispiel 3.28 1) Sei $M = S^2$ die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 und sei $a = (0, 0, 1) \in S^2$ der “Nordpol”. Dann gilt (Übung):

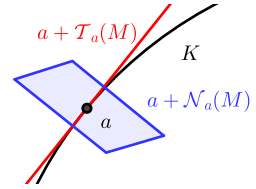
$$\mathcal{T}_a(M) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{und } \mathcal{N}_a(M) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Offenbar handelt es sich bei $\mathcal{T}_a(M)$ und $\mathcal{N}_a(M)$ um Unterräume des \mathbb{R}^3 . Betrachten wir den affinen Raum $E = a + \mathcal{T}_a(M)$, so erhalten wir eine *Tangentialebene* von M in a . Analog ist $a + \mathcal{N}_a(M)$ ein affiner Raum, der senkrecht auf M steht. In diesem speziellen Fall ist sogar $\mathcal{N}_a(M) = a + \mathcal{N}_a(M)$, da a selbst in $\mathcal{N}_a(M)$ liegt.



- 2) Sei nun K das Bild einer regulären Kurve $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. In diesem Fall ist der Tangentialraum ein eindimensionaler Unterraum und der affine Raum $a + \mathcal{T}_a(M)$ entspricht einer Tangente an die Kurve K im Punkt a . Andererseits ist $\mathcal{N}_a(M)$ ein zweidimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^3 und der affine Raum $a + \mathcal{N}_a(M)$ ist “senkrecht” zur Kurve K .



In beiden Fällen beobachten wir, dass $\dim \mathcal{T}_a(M) = k$ und $\dim \mathcal{N}_a(M) = n - k$ gilt, wenn k die Dimension der Untermannigfaltigkeit M ist.

Satz 3.29 Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und sei $a \in M$. Dann gilt:

- 1) Der Tangentialraum $\mathcal{T}_a(M)$ von M in a ist ein Unterraum des \mathbb{R}^n der Dimension k . Ist $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \rightarrow M$ mit $a \in \varphi(T)$ eine Parameterdarstellung von M um a und ist $t^* := \varphi^{-1}(a)$, dann ist durch die Spalten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t^*), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t^*)$$

von $D\varphi(t^*)$ eine Basis von $\mathcal{T}_a(M)$ gegeben.

- 2) Der Normalenraum $\mathcal{N}_a(M)$ von M in a ist ein Unterraum des \mathbb{R}^n der Dimension $n - k$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a und $g = (g_1, \dots, g_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar, so dass $\text{Rang } Dg(x) = n - k$ für alle $x \in U$ und

$$M \cap U = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_{n-k}(x) = 0\}$$

gilt, so ist durch die Zeilen

$$\text{grad } g_1(a), \dots, \text{grad } g_{n-k}(a)$$

von $Dg(a)$ eine Basis von $\mathcal{N}_a(M)$ gegeben.

Beweis: Aus der Linearen Algebra ist bekannt (falls nicht: Übung), dass $\mathcal{N}_a(M)$ ein Unterraum des \mathbb{R}^n ist und dass

$$\mathcal{T}_a(M) \subseteq \mathcal{N}_a(M)^\perp$$

gilt. Gleichheit liegt vor, wenn $\mathcal{T}_a(M)$ bereits selbst ein Vektorraum ist. Wir definieren nun

$$\mathcal{V} := \text{Span} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t^*), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t^*) \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \text{Span} \left(\text{grad } g_1(a), \dots, \text{grad } g_{n-k}(a) \right).$$

Dann gilt $\dim \mathcal{V} = k$ und $\dim \mathcal{W} = n - k$, da $D\varphi(t^*) \in \mathbb{R}^{n,k}$ und $Dg(a) \in \mathbb{R}^{n-k,n}$ vollen Rang und somit linear unabhängige Spalten bzw. Zeilen haben. Es reicht nun zu zeigen, dass $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_a(M)$ und $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{N}_a(M)$ gilt, denn dann folgt

$$n - k = \dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{N}_a(M) = \dim \mathcal{T}_a(M)^\perp \leq \dim \mathcal{V}^\perp = n - k$$

und daher gilt $\mathcal{W} = \mathcal{N}_a(M)$. Wegen $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_a(M) \subseteq \mathcal{N}_a(M)^\perp$ folgt dann insbesondere aus $\dim \mathcal{V} = k = \dim \mathcal{N}_a(M)^\perp$, dass $\mathcal{V} = \mathcal{T}_a(M) = \mathcal{N}_a(M)^\perp$ gilt. Speziell ist damit $\mathcal{T}_a(M)$ ein Vektorraum.

“ $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_a(M)$ ”: Sei $v \in \mathcal{V}$ beliebig. Dann gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t^*).$$

Wir definieren nun die Kurve $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ durch

$$\alpha(s) := \varphi(t^* + s \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_k)),$$

wobei wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass $t^* + s(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in U$ für alle $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ gilt. Dann gilt $\alpha(0) = a$ und mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$\alpha'(0) = D\varphi(t^*) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t^*) = v.$$

Folglich ist v ein Tangentialvektor von M in a , d.h. es gilt $v \in \mathcal{T}_a(M)$.

“ $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{N}_a(M)$ ”: Da wir bereits wissen, dass $\mathcal{N}_a(M)$ ein Vektorraum ist, reicht es zu zeigen, dass $\text{grad } g_j(a) \in \mathcal{N}_a(M)$ für $j = 1, \dots, n - k$ gilt. Seien also $j \in \{1, \dots, n - k\}$ und $v \in \mathcal{T}_a(M)$ beliebig. Dann gibt es nach Definition von $\mathcal{T}_a(M)$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Kurve $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$, so dass $\alpha(0) = a$ und $\alpha'(0) = v$. Da das Bild der Kurve α in M enthalten ist, gilt insbesondere

$$g_j(\alpha(t)) = 0$$

für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Mit Hilfe der Kettenregel folgt für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, dass

$$0 = Dg_j(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \langle \text{grad } g_j(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

Speziell für $t = 0$ erhalten wir daraus

$$\langle \text{grad } g_j(a), v \rangle = \langle \text{grad } g_j(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle = 0.$$

Da v beliebig war, folgt $\text{grad } g_j(a) \perp \mathcal{T}_a(M)$ und daher $\text{grad } g_j(a) \in \mathcal{N}_a(M)$. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun unserer Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen zuwenden und erhalten die folgende notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung.

Satz 3.30 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner sei $x^* \in \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ eine Stelle eines lokalen Minimums der Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Falls x^* regulär ist (d.h. $\text{Rang } Dg(x^*) = m$), so gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$\text{grad } f(x^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } g_j(x^*). \quad (3.12)$$

Beweis: Da x^* regulär ist, können wir nach Bemerkung 3.26 (ggf. nach Verkleinerung von U) annehmen, dass

$$\mathcal{F} := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$$

eine $(n - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. Seien nun weiter $\varepsilon > 0$ sowie $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{F}$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x^*$. Da x^* Stelle eines lokalen Minimums ist, hat die differenzierbare Abbildung $t \mapsto f(\alpha(t))$ in der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum. Daraus erhalten wir (analog wie im Beweis von Satz 3.29), dass

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \langle \text{grad } f(x^*), \alpha'(0) \rangle.$$

Da α eine beliebige Kurve in \mathcal{F} mit $\alpha(0) = x^*$ war, folgt $\text{grad } f(x^*) \perp \mathcal{T}_{x^*}(\mathcal{F})$ und daher $\text{grad } f(x^*) \in \mathcal{N}_{x^*}(\mathcal{F})$. Dann gibt es aber nach Satz 3.29 Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } f(x^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } g_j(x^*). \quad \square$$

Bemerkung 3.31 Die Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ aus Satz 3.30 bezeichnet man als *Lagrange-Multiplikatoren*. Der Name *Multiplikator* erklärt sich dabei durch die folgende Herangehensweise: Setzen wir nämlich $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ und betrachten wir die sogenannte *Lagrange-Funktion*

$$L : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, \lambda) \mapsto f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x),$$

die wir, anschaulich gesprochen, durch “Anhängen der Nebenbedingung nach Multiplikation mit den Lagrange-Multiplikatoren” erhalten, so ist mit f auch L differenzierbar und es gilt:

$$\text{grad } L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \text{grad } f(x) - \langle \lambda, \text{grad } g(x) \rangle \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

Für $x^* \in U$ gilt also: $x^* \in U$ liegt im zulässigen Bereich (d.h. $g(x^*) = 0$) und erfüllt die notwendige Bedingung (3.12) aus Satz 3.30, genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $\text{grad } L(x^*, \lambda) = 0$ gilt, d.h. wenn (x^*, λ) ein kritischer Punkt der Funktion L ist.

Damit sieht es so aus, als hätten wir das Problem des Findens eines lokalen Extremums unter Nebenbedingungen für die Funktion f auf das klassische Extremwertproblem (d.h. ohne Nebenbedingungen) für die Funktion L zurückgeführt. Doch Vorsicht! Unsere Überlegungen beziehen sich dabei nur auf die jeweilige *notwendige* Bedingung. Die Untersuchung der Hesse-Matrix $H_L(x^*, \lambda)$ von L auf Definitheit bringt keine Auskunft darüber, ob x^* Stelle eines lokalen Minimums ist oder nicht, da in diesem Fall der Punkt (x^*, λ) nicht notwendigerweise auch ein lokales Minimum von L ist. Wir verzichten an dieser Stelle aber auf die Herleitung von hinreichenden Bedingungen und verweisen stattdessen auf Spezialvorlesungen, die sich mit Optimierungsproblemen beschäftigen.

Beispiel 3.32 Wir kommen auf unsere Aufgabenstellung in Beispiel 3.24 zurück und suchen das (globale!) Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto 2\pi x_1 x_2 + 2x_1^2 \pi$ unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V = 0$, wobei wir $V > 0$ annehmen. Es gilt:

$$\text{grad } f(x) = \begin{bmatrix} 2\pi x_2 + 4\pi x_1 \\ 2\pi x_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \text{grad } g(x) = \begin{bmatrix} 2\pi x_1 x_2 \\ \pi x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Hier sind alle Punkte des zulässigen Bereichs regulär, denn aus $\text{grad } g(x) = 0$ folgt $x_1 = 0$, doch dann ist die Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = 0$ nicht erfüllt. Somit liefert uns die notwendige Bedingung $\text{grad } f(x) = \lambda \text{grad } g(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ zusammen mit der Nebenbedingung $g(x) = 0$ das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$2\pi x_2 + 4\pi x_1 = 2\lambda \pi x_1 x_2 \tag{3.13}$$

$$2\pi x_1 = \lambda \pi x_1^2 \tag{3.14}$$

$$\pi x_1^2 x_2 - V = 0 \tag{3.15}$$

Aus $\lambda = 0$ folgt aus (3.14) auch $x_1 = 0$ im Widerspruch zu (3.15). Damit erhalten wir aus (3.14), dass $x_1 = \frac{2}{\lambda}$. Einsetzen in 3.13 liefert $x_2 = \frac{4}{\lambda}$. Setzen wir die Ergebnisse für x_1 und x_2 schließlich in (3.15) ein, so erhalten wir $\frac{16\pi}{\lambda^3} = V$ bzw. $\lambda = 2\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$, sowie

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{und} \quad x_2 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Damit haben wir zunächst einmal nur einen kritischen Punkt x^* für die Lösung unserer Minimierungsaufgabe gefunden. Anschaulich ist aber aus der zugrunde liegenden Anwendung klar, dass es ein Minimum geben muss. Da dieses die notwendige Bedingung erfüllen muss und wir nur einen einzigen kritischen Punkt gefunden haben, muss an diesem das gesuchte Minimum vorliegen. Der Zylinder hat bei gegebenem Volumen also die kleinste Oberfläche, wenn die Höhe genau doppelt so groß ist wie der Radius der Grundfläche.

Kapitel 4

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Zahlreiche Anwendungsprobleme in den Naturwissenschaften, den Ingenieurwissenschaften und anderen Disziplinen führen auf sogenannte *Differentialgleichungen*. Wir haben diese spezielle Klasse von Gleichungen bereits in der Analysis I kennengelernt, dort auch kurz diskutiert, und darüberhinaus im Abschnitt 3.2 des vorigen Kapitels festgestellt, dass sie auch beim impliziten Differenzieren eine wichtige Rolle spielen. Obwohl es eine eigene Vorlesung zum Thema Differentialgleichungen gibt, gehört eine Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen dennoch zu den klassischen Aufgaben der Vorlesung Analysis, weshalb wir uns an dieser Stelle etwas näher mit ihnen beschäftigen wollen.

Wir erinnern uns an dieser Stelle daran, dass wir bereits in Abschnitt 3.3 der Analysis I die Differentialgleichung

$$x' = \lambda x \tag{4.1}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ untersucht haben. Entscheidend ist hier zunächst die Erkenntnis, dass es sich um eine Gleichung für Funktionen handelt. Die Variable x steht hier also nicht für eine reelle Zahl, sondern für eine differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung ein Vielfaches der ursprünglichen Funktion ist. Eine Lösung der Differentialgleichung (4.1) ist die Exponentialfunktion $t \mapsto \exp(\lambda t)$ und wie wir in Abschnitt 6.3 von Analysis I festgestellt haben, sind alle anderen Lösungen Vielfache dieser Funktion. Die Lösungsmenge der Differentialgleichung (4.1) ist also

$$\{x_c : t \mapsto c \cdot \exp(\lambda t) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

und wir stellen fest, dass es sich dabei um einen eindimensionalen Unterraum des Raums $C^\infty(\mathbb{R})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} handelt. Eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (4.1) erhalten wir, wenn wir noch einen *Anfangswert* festsetzen. Wegen $x_c(0) = c \cdot \exp(0) = c$ ist $x_c : t \mapsto c \cdot \exp(\lambda t)$ die eindeutige Lösung des sogenannten Anfangswertproblems

$$x' = \lambda x, \quad x(0) = c.$$

Speziell ist die Exponentialfunktion \exp die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x, \quad x(0) = 1.$$

Definition 4.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ eine Abbildung, sowie $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I^\circ \neq \emptyset$.

1) Die Gleichung

$$x' = f(t, x) \quad (4.2)$$

heißt gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

2) Eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung der Differentialgleichung (4.2), falls gilt:

- a) $(t, x(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
- b) $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar.
- c) $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$.

3) Sei $(t_0, x_0) \in U$. Dann heißt das Gleichungssystem

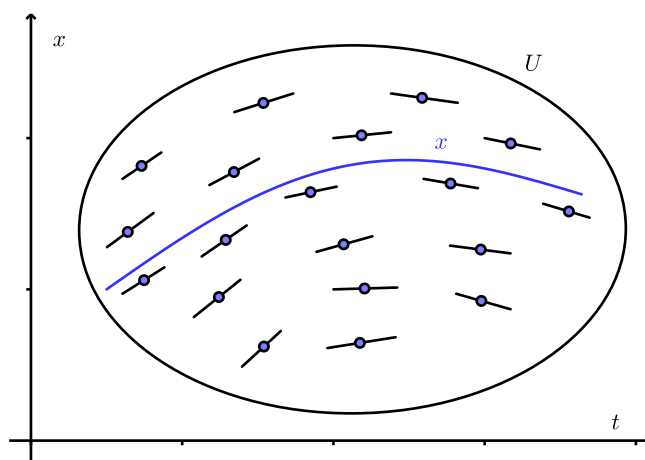
$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.3)$$

ein Anfangswertproblem.

4) Eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung (4.2) heißt Lösung des Anfangswertproblems (4.3), falls $x(t_0) = x_0$.

Es macht an dieser Stelle nichts aus, dass wir das Intervall I in Definition 4.1 nicht als offen vorausgesetzt haben, denn für die Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ können wir die Differenzierbarkeit komponentenweise betrachten und für die Komponentenfunktionen $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ den Begriff der Differenzierbarkeit aus Analysis I verwenden. Aus diesem Grund schreiben wir an dieser Stelle auch bevorzugt $x'(t)$ statt $Dx(t)$.

Die rechte Seite $f(t, x)$ der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ lässt sich im Fall $n = 1$ als *Richtungsfeld* (auch *Steigungsfeld* genannt) interpretieren. In jedem Punkt (t, x) wird durch $f(t, x)$ eine *Steigung* vorgegeben. Eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung ist dann eine Funktion, deren Funktionsgraph in jedem Punkt die vorgegebene Steigung aufweist.



4.1 Elementare Lösungsmethoden

Wie lässt sich eine Differentialgleichung lösen? In einigen Spezialfällen ist die Antwort sehr einfach. Für den Fall, dass die „rechte Seite“, also die Funktion f in Definition 4.1, nicht explizit von x abhängt, d.h. falls $f(t, x) = f(t)$ gilt, so erhalten wir die Lösung der Differentialgleichung $x' = f(t)$ einfach durch Integration. Präziser sei dazu $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Lösung der Differentialgleichung $x' = f(t)$ gegeben durch

$$x : t \mapsto \int_{t_0}^t f(s) \, ds + c,$$

wobei $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Dabei können wir t_0 beliebig wählen. Die Konstante c können wir durch einen Anfangswert festlegen: Verlangen wir z.B. $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $c = x_0$.

Das war leicht und daher trauen wir uns optimistisch an „schwierigere rechte Seiten“ heran. Als nächstes betrachten wir den Spezialfall, dass sich $f(t, x) = g(t) \cdot h(x)$ als Produkt von zwei Funktionen g und h schreiben lässt, die jeweils nur von t bzw. x abhängen. Genauer seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle sowie $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : J \rightarrow \mathbb{R}$. Falls die Funktion x eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = g(t)h(x)$, $x(t_0) = x_0$ ist, so gilt per Definition

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$$

für alle t (aus dem Definitionsbereich der Funktion x). Division durch $h(x(t))$ (falls dies erlaubt ist) und Integration auf beiden Seiten liefert

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{h(x(s))} \, ds = \int_{t_0}^t g(s) \, ds.$$

Substituieren wir $u = x(s)$ (wir müssen dann $x'(s) \, ds$ durch du ersetzen), so erhalten wir

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{h(u)} \, du = \int_{t_0}^t g(s) \, ds. \quad (4.4)$$

Diese Gleichung können wir dann nach $x(t)$ auflösen um die Lösung des Anfangswertproblems zu erhalten. Allerdings haben wir hier schon die Existenz einer Lösung vorausgesetzt! Der folgende Satz zeigt, dass wir auf diese Art und Weise tatsächlich eine Lösung erhalten.

Satz 4.2 (Trennung der Variablen) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, seien $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ und sei $(t_0, x_0) \in I \times J$. Definiere die Funktionen $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $H : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G : t \mapsto \int_{t_0}^t g(s) \, ds \quad \text{und} \quad H : x \mapsto \int_{x_0}^x \frac{1}{h(u)} \, du.$$

Weiter sei $\tilde{I} \subseteq I$ ein Intervall mit $t_0 \in \tilde{I}$ und $G(\tilde{I}) \subseteq H(J)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.5)$$

genau eine Lösung $x : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ auf \tilde{I} und für diese gilt:

$$x(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \text{für alle } t \in \tilde{I}. \quad (4.6)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Ist $x : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems (4.5), so haben wir schon gezeigt, dass (4.4) erfüllt ist, was gleichbedeutend mit

$$H(x(t)) = G(t) \quad (4.7)$$

für alle $t \in \tilde{I}$ ist. Da $H'(x) = \frac{1}{h(x)} \neq 0$ für alle $x \in J$ gilt, ist $H : J \rightarrow H(J)$ umkehrbar (Satz 6.19 aus Analysis I). Daher folgt aus (4.7) für alle $t \in \tilde{I}$, dass

$$x(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Für den Nachweis der Existenz definieren wir $x : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $t \mapsto H^{-1}(G(t))$. Dann ist mit G und H^{-1} auch x stetig differenzierbar (die stetige Differenzierbarkeit von H^{-1} folgt aus Satz 6.19 aus Analysis I) und wegen $H(x(t)) = G(t)$ gilt für alle $t \in \tilde{I}$, dass

$$g(t) = G'(t) = H'(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{1}{h(x(t))} \cdot x'(t),$$

woraus wir $x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$ für alle $t \in \tilde{I}$ erhalten. Weiter gilt

$$x(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0,$$

da $G(t_0) = 0 = H(x_0)$. Also ist x eine Lösung des Anfangswertproblems (4.5). \square

Beispiel 4.3 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = 1 + x^2, \quad x(0) = 0.$$

Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.2 haben wir hier die Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x^2$ gegeben. Dann folgt

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{1+u^2} du = \int_0^t 1 ds,$$

woraus wir $\arctan(x(t)) = t$ bzw. $x(t) = \tan t$ erhalten. Vorsichtshalber machen wir eine Probe und stellen fest, dass wegen

$$\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$$

(vgl. Beispiel 6.18 aus Analysis I) und $\tan(0) = 0$ die Funktion $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich eine Lösung unseres Anfangswertproblems ist. Vielleicht etwas überrascht stellen Sie fest, dass die Lösung \tan im Gegensatz zu den Funktionen g und h *nicht* auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Dies steht aber im Einklang mit Satz 4.2, denn dieser postuliert die Existenz einer Lösung nur auf Intervallen $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\tilde{I} = G(\tilde{I}) \subseteq H(J) = \arctan(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. (Hierbei haben wir $G = Id_{\mathbb{R}}$ für die Gleichheit $\tilde{I} = G(\tilde{I})$ ausgenutzt.)

Neben der *Trennung der Variablen* gibt es noch viele weitere direkte Lösungsmethoden für Differentialgleichungen, auf die wir an dieser Stelle aber nicht weiter eingehen werden.

4.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der folgenden Frage beschäftigen: Unter welchen Bedingungen an die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.8)$$

mit $(t_0, x_0) \in U$ eine eindeutige Lösung? Für einige spezielle “rechte Seiten” f haben wir die Antwort bereits im vorigen Abschnitt erhalten - jetzt wollen wir natürlich versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen mit dieser Eigenschaft zu identifizieren. Naheliegend ist zunächst, erst einmal nur die Stetigkeit von f vorauszusetzen. Tatsächlich reicht dies für den Beweis der Existenz einer Lösung aus (dies folgt aus dem Satz von Peano, den sie in der Vorlesung *Differentialgleichungen* kennenlernen können), jedoch nicht für die Eindeutigkeit, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.4 Das Anfangswertproblem

$$x' = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = 0$$

hat unendlich viele Lösungen, nämlich die Nullfunktion sowie die Funktionen

$$x_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < \alpha \\ \frac{1}{27}(t - \alpha)^3 & \text{für } t \geq \alpha \end{cases}$$

für $\alpha \geq 0$, denn x_α ist differenzierbar (Übung) und für $t > \alpha$ gilt

$$x'_\alpha(t) = \frac{1}{9}(t - \alpha)^2 = \sqrt[3]{x_\alpha(t)^2}.$$

(Dass die Differentialgleichung auch für $t < \alpha$ erfüllt ist, ist trivial, und für $t = \alpha$ ist es eine Übung.)

Wir benötigen also zur Stetigkeit noch zusätzliche Eigenschaften von f , um die Eindeutigkeit von Lösungen gewährleisten zu können. Um auf eine Idee zu kommen, welche Eigenschaften das sein könnten, wenden wir noch einmal unsere Strategie aus dem vorigen Abschnitt an und wandeln das Anfangswertproblem (4.8) in eine Integralgleichung um. Das Integral für eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist dabei komponentenweise definiert:

Definition 4.5 Sei $g := (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sind die Funktionen $g_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für $i = 1, \dots, n$, so heißt

$$\int_a^b g(t) \, dt := \begin{bmatrix} \int_a^b g_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(t) \, dt \end{bmatrix}.$$

das Integral von g über $[a, b]$.

Bemerkung 4.6 Zeigen Sie zur Übung, dass mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Definition 4.5 gilt, dass

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Lemma 4.7 Gegeben sei das Anfangswertproblems (4.8), sowie ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) x ist eine Lösung des Anfangswertproblems (4.8).
- 2) Für alle $t \in I$ gilt $(t, x(t)) \in U$ und $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$.

Beweis: “1) \Rightarrow 2)” folgt durch Integration beider Seiten der Differentialgleichung und “2) \Rightarrow 1)” zeigen Sie leicht mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 7.27 in Analysis I), der insbesondere die Differenzierbarkeit von x liefert. \square

Definieren wir $\Phi : \{\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid (t, \varphi(t)) \in U \text{ für alle } t \in I\} \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ durch

$$\Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (4.9)$$

für alle $t \in I$, so ist x in Hinblick auf Lemma 4.7 genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (4.8), wenn $\Phi(x) = x$ gilt, d.h. *wenn x ein Fixpunkt von Φ ist*. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz 1.41) ist die Eindeutigkeit des Fixpunktes garantiert, wenn es sich bei Φ um eine Kontraktion handelt. Wann ist dies der Fall? Wenn wir annehmen, dass $C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm versehen ist, dann suchen wir eine Konstante $c < 1$ so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(\tilde{x})\|_{\sup} \leq c \|x - \tilde{x}\|_{\sup}$$

für alle x, \tilde{x} aus einer Teilmenge des Definitionsbereichs von Φ gilt. Nun folgt

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(\tilde{x})(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))\| ds$$

womit wir schließlich

$$\|\Phi(x) - \Phi(\tilde{x})\|_{\sup} \leq (t - t_0) \sup_{s \in [t_0, t]} \|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))\|$$

erhalten. Den ersten Faktor können wir durch Verkleinerung des Intervalls nach Belieben kontrollieren. Es gilt also, den zweiten Faktor abzuschätzen. Dabei wird uns der folgende Begriff helfen.

Definition 4.8 Seien $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir sagen:

- 1) f genügt in G einer Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, falls für alle $(t, x), (t, \tilde{x}) \in G$ gilt, dass

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|.$$

- 2) f genügt in G lokal einer Lipschitzbedingung, falls es zu jedem $(t, x) \in G$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ von (t, x) gibt, so dass f in $G \cap U$ einer Lipschitzbedingung mit (von U abhängiger) Lipschitz-Konstante $L_U \geq 0$ genügt.

Satz 4.9 Seien $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, bzgl. der Variablen im \mathbb{R}^n (bezeichnet mit x_1, \dots, x_n) stetig partiell differenzierbar. Dann genügt f in U lokal einer Lipschitzbedingung.

Beweis: Sei $(t_0, x_0) \in U$ beliebig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq \varepsilon \text{ und } \|x - x_0\| \leq \varepsilon\} \subseteq U$$

gilt. (Klar?) Insbesondere ist K eine Umgebung von (t_0, x_0) und kompakt. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von f existiert daher

$$L := \sup_{(t,x) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| < \infty,$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Diese Matrix ist für jedes feste t die Jacobi-Matrix der Abbildung $f_t : x \mapsto f(t, x)$, die nach Satz 2.16 differenzierbar ist. Anwendung des Schrankensatzes (Satz 2.30) liefert schließlich

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|.$$

Folglich genügt f lokal einer Lipschitzbedingung. (Als die in der Definition geforderte offene Umgebung von (t_0, x_0) wählen wir einfach K° .) \square

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 4.10 (von Picard-Lindelöf) Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge lokal einer Lipschitzbedingung. Dann gilt:

- 1) Zu jedem $(t_0, x_0) \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.11)$$

genau eine Lösung $x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt.

- 2) Sind $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ ist) zwei Lösungen von (4.11), so gilt $x_1 = x_2$.

Beweis: 1) Nach Bemerkung 4.7 ist die Lösung des Anfangswertproblems (4.11) äquivalent zur Lösung einer Integralgleichung bzw. zum Finden eines Fixpunkts der Funktion Φ , die wie in (4.11) definiert ist. Ziel ist nun, den Definitionsbereich von Φ soweit einzuschränken, dass Φ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Nach Voraussetzung gibt es (ggf. nach Verkleinerung von U) eine Konstante $L \geq 0$, so dass

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|$$

für alle $(t, x), (t, \tilde{x}) \in U$ gilt. Wegen der Offenheit von U gibt es dann $\delta_t, \delta_x > 0$, so dass

$$Q := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq \delta_t \text{ und } \|x - x_0\| \leq \delta_x\} \subseteq U.$$

(Klar? Vergleichen Sie dies mit Lemma 3.9.) Da Q kompakt und f stetig ist, gibt es $M > 0$ mit $\|f(t, x)\| \leq M$ für alle $(t, x) \in Q$. Setze $\varepsilon := \min\{\delta_t, \frac{\delta_x}{M}, \frac{1}{2L}\}$ und

$$\mathcal{D} := \{y \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|y - x_0\|_{\sup} \leq \delta_x\}.$$

(Hierbei bezeichnen wir mit x_0 neben dem Anfangswert aus \mathbb{R}^n auch die konstante Funktion $t \mapsto x_0$.) Dann ist \mathcal{D} eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$ und daher vollständig. Wir zeigen nun, dass Φ auf \mathcal{D} die beiden wichtigen Voraussetzungen aus dem Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

i) $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ist eine Selbstabbildung: Sei $y \in \mathcal{D}$ beliebig. Dann gilt per Definition

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \text{für alle } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

denn wegen $\|y - x_0\| \leq \delta_x$ gilt $(s, y(s)) \in Q \subseteq U$ für alle $s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, d.h. $f(s, y(s))$ und $\Phi(y)$ sind wohldefiniert. Weiter gilt

$$\|\Phi(y) - x_0\|_{\sup} = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right\|_{\sup} \leq \sup_t |t - t_0| \cdot M = \varepsilon M \leq \delta_x$$

woraus wir $\Phi(y) \in \mathcal{D}$ erhalten.

ii) Φ ist eine Kontraktion: Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{D}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t L \cdot \|y_1(s) - y_2(s)\| \, ds \\ &\leq L \cdot |t - t_0| \cdot \|y_1 - y_2\|_{\sup} \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_{\sup} \end{aligned}$$

für alle $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ woraus $\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_{\sup} \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_{\sup}$ folgt.

Somit ist Φ eine Kontraktion und die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt. Daher es gibt genau ein $y \in \mathcal{D}$ mit $\Phi(y) = y$, d.h. genau eine Lösung des Anfangswertproblems (4.11) in $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

2) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ und seien $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von (4.11). Definiere die Menge

$$V := \{t \in I \mid x_1(t) = x_2(t)\}.$$

Dann gilt $V \neq \emptyset$ wegen $t_0 \in V$. Da x_1, x_2 differenzierbar, also auch stetig sind, ist V nach Lemma 2.29 abgeschlossen (in I). Andererseits ist V auch offen in I , denn ist $\hat{t}_0 \in \underline{I}$, so gibt es nach Teil 1) ein $\hat{\varepsilon} > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(\hat{t}_0) = \hat{x}_0 := x_1(\hat{t}_0) = x_2(\hat{t}_0)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung im Intervall $[\hat{t}_0 - \hat{\varepsilon}, \hat{t}_0 + \hat{\varepsilon}]$ hat. Damit gilt aber insbesondere $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \in \hat{I} := I \cap]\hat{t}_0 - \hat{\varepsilon}, \hat{t}_0 + \hat{\varepsilon}[$, d.h. \hat{t}_0 ist in der in I offenen Menge \hat{I} enthalten. Somit ist V eine Teilmenge von I , die sowohl offen, als auch abgeschlossen ist. Da I ein Intervall, also zusammenhängend, und V nichtleer ist, folgt $V = I$. \square

Beispiel 4.11 Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf liefert insbesondere ein Iterationsverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen. Wir zeigen dies am Beispiel

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = c,$$

wobei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto 2tx$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf sind erfüllt, denn die "rechte Seite" f ist stetig partiell nach x differenzierbar und erfüllt daher nach Satz 4.9 lokal eine Lipschitzbedingung. Wir wählen nun als Startwert die konstante Funktion $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto c$. Unsere Fixpunktiteration lautet dann

$$x_{k+1}(t) = c + \int_0^t f(s, x_k(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

für alle $k \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$x_1(t) = c + \int_0^t 2cs \, ds = c(1 + t^2), \quad x_2(t) = c + \int_0^t 2cs(1 + s^2) \, ds = c(1 + t^2 + \tfrac{1}{2}t^4)$$

und mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_k(t) = c \left(1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3!}t^6 + \cdots + \frac{1}{k!}t^{2k} \right)$$

Hieraus folgt die Konvergenz der Iterationsfolge für alle $t \in \mathbb{R}$ und wir erhalten als Lösung des Anfangswertproblems die Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = c \cdot e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

In der Tat ist x differenzierbar und es gilt $x(0) = c$ und

$$x'(t) = ce^{t^2} \cdot 2t = 2tx(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Berechnung der Lösung auf diese Weise war allerdings unnötig aufwändig, denn wir hätten diese viel einfacher durch Trennung der Variablen ermitteln können. Außerdem handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine *lineare Differentialgleichung*, deren Lösungen wir noch viel eleganter bestimmen können.

4.3 Lineare Differentialgleichungen

In vielen Fällen lässt sich die Lösung einer gewöhnliche Differentialgleichung nicht explizit mit Hilfe von Methoden der Analysis bestimmen, sondern es ist nur möglich, eine Näherungslösung zu berechnen. (Dies wird eines der zentralen Themen in der *Numerischen Mathematik* sein.) Im Spezialfall der *linearen Differentialgleichungen* ist das allerdings anders, weshalb wir diese im Folgenden ausführlich diskutieren wollen.

Definition 4.12 Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall sowie $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Dann heißt die Differentialgleichung

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (4.12)$$

lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Sie heißt homogen, falls $b = 0$, und inhomogen sonst.

Zunächst einmal beschäftigen wir uns mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen, bevor wir die Lösungsmenge linearer Differentialgleichungen genauer charakterisieren.

Satz 4.13 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen und seien $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.13)$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: Sei $J \subseteq I$ ein beliebiges kompaktes Teilintervall von I , sowie $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto A(t)x + b(t)$. Da $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ stetig ist, existiert

$$L := \sup_{t \in J} \|A(t)\| \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt für alle $t \in J$ und alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| = \|A(t)(x - \tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|, \quad (4.14)$$

d.h. f genügt auf J einer Lipschitzbedingung. Da $J \subseteq I$ beliebig war, genügt f auf I lokal einer Lipschitzbedingung und erfüllt somit die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf (Satz 4.10). Damit folgt die Eindeutigkeit einer Lösung von (4.13) auf I .

Kommen wir nun zum Beweis der Existenz. Wir wissen bereits, dass f auf I lokal einer Lipschitzbedingung genügt, doch damit liefert uns der Satz von Picard-Lindelöf nur lokal die Existenz einer Lösung. Die entscheidende Aussage des Satzes ist allerdings, dass unser Anfangswertproblem (4.13) eine Lösung hat, die auf ganz I definiert ist. Daher kehren

wir noch einmal zur Grundidee des Beweises des Satzes von Picard-Lindelöf zurück und betrachten die Funktionenfolge $(\varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\varphi_0 : t \mapsto x_0, \quad \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) \, ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Unser Ziel ist zu zeigen, dass diese Folge auf jedem kompakten Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ gleichmäßig gegen eine Lösung $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ konvergiert. Für den Nachweis nutzen wir aus, dass sich die mutmaßliche Grenzfunktion x auch in der Form

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

schreiben lässt. (Klar?) Aus der Stetigkeit von φ_0 und φ_1 und der Kompaktheit von J folgt

$$K := \sup_{t \in J} \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < \infty.$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass für alle $t \in J$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq K \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!}. \quad (4.15)$$

“ $k = 0$ ”: Dies folgt sofort aus der Definition von K .

“ $k \Rightarrow k + 1$ ”: Wegen $\varphi_{k+2}(t) - \varphi_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{k+1}(s)) - f(s, \varphi_k(s)) \, ds$ erhalten wir mit Hilfe von (4.14) und der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+2}(t) - \varphi_{k+1}(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi_{k+1}(s) - \varphi_k(s)\| \, ds \\ &\leq KL \int_{t_0}^t \frac{L^k |s - t_0|^k}{k!} \, ds = KL^{k+1} \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

was den Beweis von (4.15) abschließt. Setzen wir $r := \sup_{t \in J} |t - t_0|$ (da J kompakt ist, ist r endlich), so folgt aus (4.15), dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{\sup} \leq K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k r^k}{k!} = K e^{Lr}.$$

Daher ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß (Satz 8.12 aus Analysis I) auf J gleichmäßig konvergent und da dies für alle kompakten Teilintervalle $J \subseteq I$ gilt, ist

$$x := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

auf ganz I definiert und dort stetig. Insbesondere gilt für alle $t \in I$, dass

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, \varphi_k(s)) \, ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds,$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit die gleichmäßige Konvergenz auf dem kompakten Intervall $[t_0, t]$ (bzw. $[t, t_0]$) ausgenutzt haben, um Satz 8.7 aus Analysis I anzuwenden. Die letzte Gleichheit folgt dann aus der Stetigkeit von f . Nach Bemerkung 4.7 ist x dann differenzierbar und eine Lösung des Anfangswertproblems (4.13). \square

Beispiel 4.14 Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = a(t)x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Mit Trennung der Variablen (Übung) erhalten wir die Lösung

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto x_0 \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) \, ds \right),$$

die auf ganz I definiert ist. Ist speziell $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 2t$ und $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 4.11), so erhalten wir die Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = c \exp \left(\int_{t_0}^t 2s \, ds \right) = ce^{t^2}.$$

Beachten Sie, dass alle Lösungen der Differentialgleichung $x' = a(t)x$ aus Beispiel 4.14 Vielfache der Exponentialfunktion $t \mapsto \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) \, ds \right)$ sind. Dies bedeutet insbesondere, dass es sich bei der Lösungsmenge dieser Differentialgleichung um einen Vektorraum handelt. Dies ist kein Zufall, denn interessanterweise stellt sich heraus, dass die Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung (4.12) stets ein Vektorraum ist, der sogar endlich-dimensional ist.

Satz 4.15 Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung (4.12), d.h. $x' = A(t)x$. Betrachte die Abbildung

$$\mathcal{L} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n), \quad x \mapsto x' - A(t)x. \quad (4.16)$$

Dann gilt:

- 1) \mathcal{L} ist linear und eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lösung von $x' = A(t)x$, wenn $\mathcal{L}(x) = 0$ gilt.
- 2) $\text{Kern}(\mathcal{L})$ ist ein Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und es gilt $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}) = n$.
- 3) Für Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$ sind folgende Aussagen äquivalent:
 - i) $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sind für alle $t \in I$ linear unabhängig im \mathbb{R}^n .
 - ii) Es gibt ein $t_0 \in I$, so dass $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ linear unabhängig im \mathbb{R}^n sind.
 - iii) Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind linear unabhängig in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: 1) \mathcal{L} ist linear, denn für alle stetig differenzierbare Funktionen $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x + \beta y)' - A(t)(\alpha x + \beta y) = \alpha(x' - A(t)x) + \beta(y' - A(t)y) \\ &= \alpha \mathcal{L}(x) + \beta \mathcal{L}(y)\end{aligned}$$

Offenbar ist jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $x' = A(t)x$ wegen der Stetigkeit der rechten Seite stetig differenzierbar und erfüllt $\mathcal{L}(x) = 0$. Daher ist $\text{Kern}(\mathcal{L})$ die Lösungsmenge der Differentialgleichung $x' = A(t)x$. Umgekehrt ist jedes $x \in \text{Kern}(\mathcal{L})$ eine Lösung von $x' = A(t)x$.

2) Dass $\text{Kern}(\mathcal{L})$ ein Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist, ist der Spezialfall einer bekannten Aussage der Linearen Algebra. Bevor wir die Dimension von $\text{Kern}(\mathcal{L})$ bestimmen, weisen wir zuerst 3) nach.

3) “i) \Rightarrow ii)” ist trivial.

“ii) \Rightarrow iii)”: Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0$. Dann gilt auch

$$\alpha_1 \varphi_1(t_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t_0) = 0(t_0) = 0$$

und mit 2) folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Also sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig.

“iii) \Rightarrow i)”: Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$ linear unabhängig, sei $t_0 \in I$ beliebig und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_1 \varphi_1(t_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t_0) = 0.$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$\varphi := \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L}),$$

so gilt $\varphi(t_0) = 0$ und damit ist φ eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = A(t)x$ und $x(t_0) = 0$. Da auch die Nullfunktion dieses Anfangswertproblem löst, folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung nach Satz 4.13, dass $\varphi = 0$ gilt. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ folgt dann aber

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

d.h. $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ sind linear unabhängig im \mathbb{R}^n .

2) (Fortsetzung.) Wir weisen nun den noch fehlenden Teil der Aussage in 2) über die Dimension des Kerns von \mathcal{L} nach. Sei $t_0 \in I$. Dann gibt es Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$ von $x' = A(t)x$ mit $\varphi_i(t_0) = e_i$ für $i = 1, \dots, n$, wobei e_i den i -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^n bezeichnet. Wegen der Äquivalenz von ii) und iii) in 3) folgt damit $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}) \geq n$. Sind andererseits $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \in \text{Kern}(\mathcal{L})$ und $t \in I$ beliebig, so sind $\varphi_1(t), \dots, \varphi_{n+1}(t)$ linear abhängig im \mathbb{R}^n und daher auch $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$, woraus $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}) = n$ folgt. \square

Definition 4.16 Gegeben sei die homogene Differentialgleichung (4.12) und die Abbildung \mathcal{L} wie in (4.16). Eine Basis von $\text{Kern}(\mathcal{L})$ heißt Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung $x' = A(t)x$.

Bemerkung 4.17 Gegeben sei die homogene Differentialgleichung (4.12) und die Abbildung \mathcal{L} wie in (4.16). Ferner seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Kern}(\mathcal{L})$. Setze

$$\Phi := \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{bmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad (4.17)$$

d.h. für jedes $t \in I$ ist $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Matrix mit den Spalten $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Dann gilt:

1) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ist ein Lösungsfundamentalsystem von $x' = A(t)x$.
- ii) Es gilt $\det \Phi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.
- iii) Es gilt $\det \Phi(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$.

2) Φ ist eine Lösung der *Matrix-Differentialgleichung* $X' = A(t)X$, denn für alle $t \in I$ gilt

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)\varphi_1(t) & \dots & A(t)\varphi_n(t) \end{bmatrix} = A(t)\Phi(t).$$

3) Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem von $x' = A(t)x$, so gibt es zu jeder Lösung φ von $x' = A(t)x$ Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = \Phi \cdot \alpha, \quad \text{wobei } \alpha := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Wegen $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t)$ erhält man die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ für beliebiges $t \in I$ als die Koordinaten von $\varphi(t)$ bzgl. der Basis $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ des \mathbb{R}^n .

Beispiel 4.18 Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 & \text{bzw.} & \quad x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x, & \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned}$$

Wir “erraten” (einen systematischen Zugang lernen wir im nächsten Abschnitt kennen) die beiden Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist φ_1, φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem von $x' = A(t)x$, denn es gilt

$$\det \Phi(t) = \det \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen $\Phi(\frac{\pi}{2}) = I_2$ erhalten wir somit die Lösung des Anfangswertproblems $x' = A(t)x$, $x(\frac{\pi}{2}) = c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^\top$ durch

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \Phi(t)c = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t).$$

An dieser Stelle haben wir die Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung (4.12) vollständig charakterisiert. Wie aber sieht es mit der Lösungsmenge der inhomogenen linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x + b(t)$ aus? Hierzu bemühen wir ein zentrales Prinzip aus der Linearen Algebra, das wir wegen seiner Wichtigkeit an dieser Stelle explizit formulieren:

Bemerkung 4.19 Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} (möglicherweise unendlich-dimensionale) \mathbb{R} -Vektorräume und sei $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ linear. Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $L(x) = 0$ ist dann durch $\text{Kern}(L)$ gegeben. Sei nun $b \in \mathcal{W}$. Sind $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$ zwei Lösungen des linearen Gleichungssystems $L(x) = b$, so gilt

$$L(x_1 - x_2) = L(x_1) - L(x_2) = b - b = 0,$$

d.h. es gilt $x_1 - x_2 \in \text{Kern}(L)$. Daher ist die Lösungsmenge von $L(x) = b$ ein affiner Raum: Ist x_p eine *partikuläre* (d.h. eine beliebige spezielle) Lösung von $L(x) = b$, so ist

$$x_p + \text{Kern}(L) := \{x_p + x_h \mid x_h \in \text{Kern}(L)\}$$

die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $L(x) = b$. (Klar? Falls nicht: Übung!)

Bemerkung 4.20 Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung (4.12). Haben wir die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x$ bereits bestimmt, so reicht es nach Bemerkung 4.19 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen. Diese erhalten wir durch die sogenannte *Variation der Konstanten*. Der Name erklärt sich dabei wie folgt: Wie wir bereits aus Bemerkung 4.17 wissen, hat eine beliebige Lösung der homogenen Differentialgleichung die Form $\Phi \cdot c$ mit $c \in \mathbb{R}^n$, wobei Φ wie in (4.17) zu einem Lösungsfundamentalsystem $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ definiert ist. Wir machen nun für eine Lösung $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der inhomogenen Differentialgleichung den Ansatz

$$\psi(t) = \Phi(t)c(t)$$

für alle $t \in I$, d.h. hier ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zunächst noch unbekannte Funktion. (Die Konstante c wird also "variiert".) Da $\Phi(t)$ für alle $t \in I$ invertierbar ist, gilt $c(t) = \Phi(t)^{-1}\psi(t)$ und mit ψ ist wegen Lemma 3.6 auch c stetig differenzierbar. Mit Hilfe der Produktregel (überlegen Sie sich die Details) erhalten wir

$$\Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = \psi'(t) = A(t)\psi(t) + b(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t)$$

für alle $t \in I$. Mit Teil 2) von Bemerkung 4.17 folgt $\Phi'(t)c(t) = A(t)\Phi(t)c(t)$ und somit

$$c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$$

für alle $t \in I$. Durch Integration erhalten wir dann für alle $t \in I$, dass

$$c(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) \, ds + k$$

mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$, die wir, da wir nur *eine* Lösung suchen, auch einfach als $k = 0$ wählen können.

Beispiel 4.21 Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 + t \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist uns bereits aus Beispiel 4.18 bekannt. Damit erhalten wir (unter Benutzung derselben Notation wie in Bemerkung 4.20)

$$\Phi(t)^{-1}b(t) = \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{bmatrix}$$

sowie mit Hilfe partieller Integration

$$c(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} s \cdot \cos s \\ s \cdot \sin s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t \sin t + \cos t \\ -t \cos t + \sin t \end{bmatrix}.$$

Als eine partikuläre Lösung berechnen wir daher $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\psi(t) = \Phi(t)c(t) = \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \sin t + \cos t \\ -t \cos t + \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist daher durch

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei sich die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit Hilfe eines Anfangswerts eindeutig bestimmen lassen.

Statt Differentialgleichungen erster Ordnung kann man auch solche höherer Ordnung betrachten. Seien dazu $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall sowie $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die *lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t). \quad (4.18)$$

Wir können dann die Lösung dieser Differentialgleichung durch die sogenannte *Ordnungsreduktion* auf den Fall linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Dazu betrachten wir die Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung als neue Variablen und setzen

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= x' = y_1' \\ y_3 &= x'' = y_2' \\ &\vdots \\ y_n &= x^{(n-1)} = y_{n-1}' \end{aligned} \quad \text{sowie} \quad y := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ist $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (4.18), so gilt $x^{(n)} = y'_n$ und daher

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= y_2(t) \\ &\vdots \\ y'_{n-1}(t) &= y_n(t) \\ y'_n(t) &= -a_{n-1}(t)y_n(t) - \cdots - a_1(t)y_2(t) - a_0(t)y_1(t) + b(t), \end{aligned}$$

d.h. $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Ist umgekehrt y eine Lösung der Differentialgleichung (4.19), so gilt $y = [y_1 \ y'_1 \ \dots \ y_1^{(n-1)}]^\top$ und $x = y_1$ ist eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung (4.18). Daher können wir unsere bisherigen Kenntnisse über die Lösungsmengen von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung auf den Fall höherer Ordnungen übertragen und erhalten unmittelbar die nachstehenden Folgerungen:

- 1) Das Anfangswertproblem bestehend aus der Differentialgleichung (4.18) und den Anfangswerten $x(t_0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = c_n$ mit $t_0 \in I$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2) Die Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichung (4.18) ist ein n -dimensionaler Vektorraum: Dazu sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem von (4.19). Dann gilt $\varphi_i = [x_i \ x'_i \ \dots \ x_i^{(n-1)}]^\top$ für Funktionen $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, die Lösungen von (4.18) sind. Weiter sind x_1, \dots, x_n linear unabhängig, denn sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, so erhalten wir durch sukzessives Differenzieren dieser Gleichung auch

$$\alpha_1 x_1^{(j)} + \dots + \alpha_n x_n^{(j)} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Hieraus folgt $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0$ und damit $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, da $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem von (4.19) bilden. Umgekehrt lässt sich jede Lösung von (4.18) als Linearkombination der Funktionen x_1, \dots, x_n darstellen. (Klar?)

- 3) Die n Lösungen $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen Differentialgleichung (4.18) sind genau dann linear unabhängig, wenn für die sogenannte *Wronski-Determinante*

$$W(t) := \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & \cdots & x'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

für alle $t \in I$ gilt (bzw. äquivalent dazu für ein $t \in I$), dass $W(t) \neq 0$. (Die Wronski-Determinante entspricht dabei der Determinante der Matrix $\Phi(t)$ aus Bemerkung 4.17 für die Differentialgleichung (4.19).)

4.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt untersuchen wir die lineare Differentialgleichung

$$x' = Ax + b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, d.h. die Matrix A und die rechte Seite b hängen nicht explizit von $t \in \mathbb{R}$ ab, sondern sind konstant. Gesucht sind dann Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir werden uns dabei im wesentlichen auf den homogenen Fall

$$x' = Ax \tag{4.20}$$

beschränken, d.h. wir nehmen an, dass $b = 0$ gilt. Im Spezialfall $n = 1$ kennen wir die Lösung schon: Ist $A = [a] \in \mathbb{R}^{1,1}$, so hat nach Analysis I jede Lösung der Differentialgleichung (4.20) die Form $x(t) = ce^{at}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{R}$. Daher versuchen wir es einmal mit dem folgenden Ansatz. Wir nehmen einfach an, dass eine Lösung der Form

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{\lambda t}v$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert. Trifft diese Annahme zu, so erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung, dass $\lambda e^{\lambda t}v = A e^{\lambda t}v$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, können wir durch $e^{\lambda t}$ dividieren und erhalten

$$Av = \lambda v.$$

Diese Gleichung ist Ihnen aus der Linearen Algebra bekannt. Es ist die sogenannte *charakteristische Gleichung*, die Sie dort für die Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren verwendet haben. Tatsächlich ist die Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eine der Hauptanwendungen der Eigenwerttheorie, wenn auch längst nicht die einzige.

Im Folgenden geht es darum, ein Fundamentalsystem von Lösungen für unsere homogene Differentialgleichung (4.20), also die Differentialgleichung $x' = Ax$, zu bestimmen. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: A ist diagonalisierbar über \mathbb{R} , d.h. es gibt eine Basis (v_1, \dots, v_n) des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von A .

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die zu v_1, \dots, v_n gehörigen Eigenwerte von A , d.h. es gilt $Av_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \dots, n$. (Die Eigenwerte sind sämtlich reell, da auch die Eigenvektoren v_1, \dots, v_n reell sind.) In diesem Fall erhalten wir sofort durch $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mit

$$\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{\lambda_i t}v_i$$

für $i = 1, \dots, n$ ein Lösungsfundamentalsystem von $x' = Ax$, denn nach unseren Vorbemerkungen sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen der Differentialgleichung und wegen $\varphi_i(0) = v_i$ für $i = 1, \dots, n$ und der linearen Unabhängigkeit von v_1, \dots, v_n sind auch $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nach Satz 4.15 linear unabhängig, bilden also ein Lösungsfundamentalsystem.

Beispiel 4.22 Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Methoden aus der Linearen Algebra berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$, sowie die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ein Lösungsfundamentalsystem φ_1, φ_2 der Differentialgleichung

$$x' = Ax \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = x_1 \end{cases}$$

ist dann durch die Funktionen

$$\varphi_1 : t \mapsto \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

gegeben. Rechnen Sie es nach!

Fall 2: A ist nicht diagonalisierbar über \mathbb{R} , aber diagonalisierbar über \mathbb{C} .

In diesem Fall können wir den Umweg über die komplexen Zahlen gehen. Tatsächlich lassen sich alle Resultate aus dem vorigen Abschnitt auf den Fall verallgemeinern, dass wir Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ als Lösungen von linearen Differentialgleichungen zulassen. (Übung: Überprüfen Sie das!) Dann liefert uns der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}v$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ komplexe Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ unserer Differentialgleichung $x' = Ax$, und wegen der Diagonalisierbarkeit von A erhalten wir dann ein komplexes Lösungsfundamentalsystem. Schön und gut, aber was machen wir, wenn wir doch lieber ein reelles Lösungsfundamentalsystem hätten? Nach Satz 4.15 muss ein solches schließlich existieren! Hier können wir ausnutzen, dass komplexe Eigenwerte von reellen Matrizen in komplex konjugierten Paaren auftreten. Ist z.B. $\lambda = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v = u + iw$, $u, w \in \mathbb{R}^n$, so gilt $Av = \lambda v$, woraus wir

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}$$

erhalten, d.h. $\bar{v} = u - iw$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\bar{\lambda}$. Damit erhalten wir gleich zwei komplexe Lösungen $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit

$$x_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}(u + iw) \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}(u - iw) = \overline{x_1(t)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist also die zweite Lösung in jedem $t \in \mathbb{R}$ komplex konjugiert zur ersten Lösung, d.h. es gilt $x_2 = \overline{x_1}$. Betrachten wir nun Real- und Imaginärteil von x_1 ,

d.h. die Funktionen $x_{re}, x_{im} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} x_{re}(t) &= \operatorname{Re}(x_1(t)) = \operatorname{Re}\left(e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u + iw)\right) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w) \\ &= \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) \\ \text{und } x_{im}(t) &= \operatorname{Im}(x_1(t)) = \operatorname{Im}\left(e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u + iw)\right) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)w + \sin(\beta t)u) \\ &= \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $x_{re} + i \cdot x_{im} = x_1$ und $x_{re} - i \cdot x_{im} = x_2$ bzw.

$$\operatorname{Span}(x_1, x_2) = \operatorname{Span}(x_{re}, x_{im})$$

in $C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. Da x_1 und x_2 linear unabhängig sind, sind dies auch x_{re} und x_{im} . Wir können also in einem komplexen Lösungsfundamentalsystem die komplexen Funktionen x_1 und x_2 durch die reellen Funktionen x_{re} und x_{im} ersetzen. Machen wir dies für alle komplex konjugierten Paare von Lösungen, so erhalten wir auf diese Weise ein reelles Fundamentalsystem.

Beispiel 4.23 Wir kommen auf die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 4.18 zurück. Damals hatten wir ein Lösungsfundamentalsystem “geraten”, nun wollen wir es systematisch bestimmen. Mit Methoden der Linearen Algebra berechnen Sie schnell die beiden Eigenwerte i und $-i$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^\top$ bzw. $\begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}^\top$. Damit erhalten wir die komplexen Lösungen $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit

$$x_1(t) = e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Als reelle Lösungen erhalten wir $x_{re}, x_{im} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} x_{re}(t) &= \cos t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \\ \text{und } x_{im}(t) &= \cos t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und damit (bis auf ein Vorzeichen) das Lösungsfundamentalsystem aus Beispiel 4.18.

Fall 3: A ist nicht diagonalisierbar (über \mathbb{C}).

Das Hauptproblem in diesem Fall ist, dass es keine Basis des \mathbb{C}^n (geschweige denn des \mathbb{R}^n) aus Eigenvektoren von A gibt. Stattdessen wissen wir aus der Linearen Algebra, dass A (zumindest über \mathbb{C}) ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform ist, d.h. es gibt $S \in GL_n(\mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix},$$

wobei jede Untermatrix J_i ein sogenannter *Jordanblock* ist, d.h. es gibt einen Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ von A , so dass

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i, n_i} \quad \text{mit } n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, r.$$

(Für Details verweisen wir dabei auf die Vorlesung Lineare Algebra. Beachten Sie hier nur, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ nicht paarweise verschieden sein müssen, d.h. es ist möglich, dass es mehrere Jordanblöcke zum gleichen Eigenwert gibt.) Die Spalten von S bilden dann eine Basis des \mathbb{C}^n und bestehen aus sogenannten *Jordan-Ketten*. Genauer gesagt gilt

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n_1} & s_{2,1} & \dots & s_{2,n_2} & \dots & s_{r,1} & \dots & s_{r,n_r} \end{bmatrix}$$

sowie

$$(A - \lambda_i I_n) s_{i,1} = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda_i I_n) s_{i,j} = s_{i,j-1}$$

für $j = 2, \dots, n_i$ und $i = 1, \dots, r$. (Beachten Sie dabei, dass $s_{i,j}$ trotz der zwei Indizes hier ein Vektor ist und nicht etwa für den (i,j) -Eintrag der Matrix S steht.) Es sind also nur die Vektoren $s_{i,1}$, $i = 1, \dots, r$ Eigenvektoren von A , die übrigen Vektoren sind sogenannte *Hauptvektoren*: Als einen *Hauptvektor k -ter Stufe* zu einem Eigenwert λ einer Matrix $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ bezeichnet man dabei einen Vektor v mit der Eigenschaft

$$(B - \lambda I_n)^k v = 0 \quad \text{und} \quad (B - \lambda I_n)^{k-1} v \neq 0.$$

Insbesondere sind Eigenvektoren auch Hauptvektoren erster Stufe. Wie sie leicht feststellen ist $s_{i,j}$ ein Hauptvektor j -ter Stufe zum Eigenwert λ_i unserer Matrix A , denn es gilt

$$(A - \lambda_i I_n)^{j-1} s_{i,j} = (A - \lambda_i I_n)^{j-2} s_{i,j-1} = \dots = s_{i,1} \neq 0,$$

sowie $(A - \lambda_i I_n)^j s_{i,j} = (A - \lambda_i I_n) s_{i,1} = 0$.

Der folgende Satz zeigt uns, wie wir aus Hauptvektoren von A nun Lösungen unserer Differentialgleichung $x' = Ax$ erhalten können.

Satz 4.24 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Hauptvektor k -ter Stufe von A , d.h. es gibt einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A und ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $(A - \lambda I_n)^k v = 0$, aber $(A - \lambda I_n)^{k-1} v \neq 0$. Dann ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$x(t) = e^{\lambda t} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = Ax$ mit $x(0) = v$.

Beweis: Wegen $(A - \lambda I_n)^k = 0$, erhalten wir insbesondere

$$x(t) = e^{\lambda t} \left(\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. (Beachten Sie, dass der obere Index der Summe nun k ist, d.h. wir haben einen “Null-Summanden” hinzugefügt.) Ableiten liefert unter Nutzung der Produktregel, dass

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \left(\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right) + e^{\lambda t} \left(\sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda I_n)^j v \right) \\ &= \lambda x(t) + e^{\lambda t} (A - \lambda I_n) \left(\sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda I_n)^{j-1} v \right) \\ &= \lambda x(t) + (A - \lambda I_n) \cdot \left(e^{\lambda t} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j v \right) \right) \\ &= \lambda x(t) + (A - \lambda I_n) x(t) \\ &= Ax(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt $x(0) = v$, d.h. x ist in der Tat eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = Ax$ und $x(0) = v$. \square

Falls das charakteristische Polynom von A über \mathbb{R} in Linearfaktoren zerfällt, d.h. wenn die Matrix A nur reelle Eigenwerte hat, dann existiert eine Basis (v_1, \dots, v_n) des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren und Hauptvektoren von A . Daraus erhalten wir dann mit Satz 4.24 unmittelbar ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung $x' = Ax$. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen folgt dabei aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren v_1, \dots, v_n und Teil 3) von Satz 4.15.

Sollte A jedoch auch komplexe Eigenwerte besitzen, so können wir wieder den Umweg über komplexe Zahlen gehen und danach mit Hilfe von Real- und Imaginärteil von komplex konjugierten Paaren von Lösungen ein reelles Fundamentalsystem bestimmen.

Beispiel 4.25 Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = Ax$ mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Matrix ist bereits in Jordanscher Normalform und daher bilden die Einheitsvektoren $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_3$ eine *Jordan-Kette*, d.h. es gilt $(A - \lambda I_3)v_2 = v_1$ und $(A - \lambda I_3)v_3 = v_2$ sowie

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0, \quad (A - \lambda I_3)^2 v_2 = 0, \quad (A - \lambda I_3)^3 v_3 = 0.$$

Folglich ist v_1 ein Eigenvektor von A und v_2 und v_3 sind Hauptvektoren von A zweiter bzw. dritter Stufe. Mit Hilfe von Satz 4.24 erhalten wir nun ein Lösungsfundamentalsystem $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ durch

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} v_1, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t} ((A - \lambda I_3)v_1 + tv_1) = e^{\lambda t} (v_2 + tv_1)$$

und

$$\varphi_3(t) = e^{\lambda t} ((A - \lambda I_3)^2 v_1 + t(A - \lambda I_3)v_1 + \frac{t^2}{2}v_1) = e^{\lambda t} (v_3 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_1)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Ausrechnen liefert dann

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad \varphi_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Als Anwendung unserer bisherigen Ergebnisse betrachten wir die *homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0, \quad (4.21)$$

wobei $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Auch hier können wir wieder mit dem klassischen Lösungsansatz " $x(t) = e^{\lambda t}$ " beginnen und erhalten durch Einsetzen in die Differentialgleichung (und Division durch $e^{\lambda t}$) die *charakteristische Gleichung*

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (4.22)$$

Das der Polynomabbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto p(\lambda)$ zu Grunde liegende Polynom p nennen wir das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung (4.21). Der folgende Satz liefert dann ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung (4.21), wobei wir in manchen Fällen wieder einmal den Umweg über die komplexen Zahlen gehen müssen.

Satz 4.26 Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung (4.21) mit dem charakteristischen Polynom p wie in (4.22). Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von p mit den Vielfachheiten m_1, \dots, m_{k-1} bzw. m_k , dann bilden die Funktionen $x_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$x_{i,j}(t) = t^{j-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, k$$

ein komplexes Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung (4.21).

Beweis: Wir benutzen erneut den Trick mit der Ordnungsreduktion und betrachten das zugehörige System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung $y' = Ay$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Dann ist p das charakteristische Polynom von A . (Dies ist Ihnen entweder schon aus der Linearen Algebra bekannt, weil Sie feststellen, dass A einfach nur die sogenannte *Begleitmatrix* des Polynoms p ist, oder Sie prüfen es nach, indem Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace die Determinante $\det(\lambda I_n - A)$ berechnen und so $p(\lambda)$ erhalten.) Folglich sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von A mit den algebraischen Vielfachheiten m_1, \dots, m_k . Die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts λ_j ist jeweils 1, denn wie man sofort sieht, sind die ersten $n-1$ Zeilen von $\lambda_j I_n - A$ linear unabhängig, d.h. die Matrix hat den Rang mindestens $n-1$. Mit dem Dimensionssatz aus der Linearen Algebra folgt dann $\dim \text{Kern}(\lambda_j I_n - A) \leq 1$, wobei hier sogar Gleichheit vorliegen muss, da λ_j ein Eigenwert ist und daher der Kern von $\lambda_j I_n - A$ nicht nur aus dem Nullvektor besteht.

Folglich hat A eine Basis $(v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k})$ aus Hauptvektoren von A , wobei $v_{i,j}$ ein Hauptvektor j -ter Stufe zum Eigenwert λ_i ist. Nach Satz 4.24 bilden dann die Funktionen $y_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$y_{i,j}(t) = e^{\lambda_i t} \left(\sum_{\ell=0}^{j-1} \frac{t^\ell}{\ell!} (A - \lambda_i I_n)^\ell v_{i,j} \right), \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.23)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem der linearen Differentialgleichung $y' = Ay$. Bezeichnen wir die erste Komponente von $y_{i,j}$ mit $\tilde{x}_{i,j}$, so bilden nach unseren Ausführungen in Abschnitt 4.3 die Funktionen $\tilde{x}_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, k$ ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung (4.21). Mit einem Blick auf (4.23) stellen wir fest, dass die Funktionen $\tilde{x}_{i,j}$ die Form

$$\tilde{x}_{i,j}(t) = e^{\lambda_i t} q_{i,j}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ haben, wobei $q_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom mit $\deg q_{i,j} \leq j-1$ ist. Daher gilt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$, dass

$$\tilde{x}_{i,j} \in \text{Span}(e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{j-1} e^{\lambda_i t}) = \text{Span}(x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i})$$

für alle $j = 1, \dots, m_i$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\tilde{x}_{i,j}$ folgt aus Dimensionsgründen

$$\text{Span}(\tilde{x}_{i,1}, \dots, \tilde{x}_{i,m_i}) = \text{Span}(x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i})$$

für $i = 1, \dots, k$. Dies beweist die Behauptung des Satzes. \square

Beispiel 4.27 Wir betrachten die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' - 6x' + ax = 0$$

und bestimmen deren Lösungen für verschiedene Werte des Parameters $a \in \{8, 9, 10\}$. Die charakteristische Gleichung ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + a$$

gegeben.

- i) Im Fall $a = 8$ hat p die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Folglich ist ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung gegeben durch die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(t) = e^{2t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{4t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

- ii) Im Fall $a = 9$ hat p eine doppelte Nullstelle in $\lambda = 3$. Also bilden die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(t) = e^{3t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = te^{3t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem. Dies wollen wir für die Funktion φ_2 einmal nachprüfen. Tatsächlich erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\varphi_2''(t) - 6\varphi_2'(t) + 9\varphi_2(t) = 9te^{3t} + 6e^{3t} - 6(3te^{3t} + e^{3t}) + 9te^{3t} = 0.$$

- iii) Im Fall $a = 10$ hat p die komplexen Nullstellen $\lambda_1 = 3+i$ und $\lambda_2 = 3-i$. Wir erhalten damit das komplexe Lösungsfundamentalsystem $t \mapsto e^{(3+i)t}$, $t \mapsto e^{(3-i)t}$ bzw. das reelle Lösungsfundamentalsystem

$$t \mapsto e^{3t} \cos t, \quad t \mapsto e^{3t} \sin t.$$

Für den Fall einer inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten benötigen wir noch eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Diese können wir wie üblich mit dem Prinzip der Variation der Konstanten bestimmen. Für spezielle rechte Seiten gibt es noch ein paar weitere Tricks, aber dafür verweisen wir auf die Vorlesung *Differentialgleichungen*.

