

1 Geschichte

- Riemann 1854
- Lebesgue 1904
- Kolmogorov 1933 (moderne Wahrscheinlichkeitstheorie)

2 Aktuelles Interesse/ Beispiele

Beispiel 2.1

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$ abzählbar oder endlich. $\mu(\{w_i\}) := p_i \in [0, \infty]$. Sei $A \subset \Omega : \mu(A) = \sum_{w \in A} \mu(\{w\}) \in [0, \infty]$ (funktioniert da endliche/ abzählbare Mengen).

Eigenschaften:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu \geq 0$
- σ -Additivität: $\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$ und A und B sind disjunkt. Das heißt abzählbare Vereinigung klappt.

Spezialfall: $p_i = 1$ (Zählmaß).

Fixiere $x \in \Omega$.

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Genannt das Dirac Maß.

Sei Ω diskret. Seien $\{x_1, \dots, x_n\}$. Das empirische Maß: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}(\cdot)$.

2.1 Länge eines Pfades/ einer Kurve

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow (E, \varrho)$ mit Metrik ϱ . Sei π eine endliche Partition von $[0, 1]$ ist. Die Länge ist definiert als

$$L[\gamma] := \sup_{\pi} \sum_{[s,t] \in \pi} \varrho(\gamma(s), \gamma(t))$$

2.2 Geometrie

Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^n mit Dimension n . Eine nette Teilfläche von \mathbb{R}^m mit $m \geq n$. Für eine lokale Umgebung von $x \in \mathcal{M}^n$ findet man eine Karte φ , sodass der betrachtete Raum \mathbb{R}^n gleicht. Sei $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(A)$.

What is the right definition of volume (measure)? Naiv:

$$\text{vol}^n(\mathcal{A}) := \text{Leb}^n(A).$$

Geht nicht, da nicht intrinsisch definiert (hängt von der Karte φ ab).

Besser:

$$\text{Vol}^n(\mathcal{A}) := \int_{A \subset \mathbb{R}^n} \sqrt{\det(g \circ \varphi^{-1})} dx^1 \dots dx^n,$$

wobei $g : \mathcal{M} \rightarrow \{IP\}, x \mapsto g|_x$. Genannt **Riemann'sche Volumenmaß**.

2.3 Hausdorff Maß

Sei (E, ϱ) ein metrischer Raum. Bisher: $A \subset E$. Man versucht daraus ein d -dimensionales Maß zu konstruieren. U_i, \dots max abzählbare Überdeckung von A . Wir schauen uns nur Überdeckungen an mit $\text{diam}(U_i) := \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in U_i\} < \delta$, wobei $\delta > 0$ fix ist.

$$H_\delta^d(A) := \inf\{(\sum \text{diam}(U_i))^d\}$$

Wir lassen δ gegen 0 laufen

$$H(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^d(A)$$

Nun ist H^d (eingeschränkt auf geeignete A) ein Maß. Es nennt sich das d -dimensionale Hausdorff-Maß. Es gibt ein Theorem, das besagt, dass für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}^n : $H^d = Vol^d$ (bis auf eine Konstante).

Leistungstärker als das Riemannsche Volumenmaß. Man kann zum Beispiel die Koch Kurve berechnen.

Beispiel 2.2

Das eindimensionale Hausdorffmaß: $H^1(\text{Koch Menge}) = \infty$. Für das zweidimensionale Maß erhält man $H^2(\text{Koch Menge}) = 0$. Was passiert, wenn $1 < d < 2$?

Maße mit Gesamtmasse 1 heißen Wahrscheinlichkeitsmaße. $\mu(\Omega) = 1 \iff$ probability. $\int \dots d\mu$ heißen Erwartungswerte.

Maßtheorie in ∞ -dim: Wiener-Maß (Highlight der letzten 50 Jahre Mathematik):

$$\Omega = C([0, 1], \mathbb{R}^n) \quad \text{Banachraum}$$

$$A \subset \Omega, \mu(A) \in [0, 1]$$

outer boundary of planar brownian motion. Was ist die Hausdorff Dimension von solchen Objekten? $\dim_H(\%) = \frac{4}{3}$ im Jahr 2000: L-S-W.

2014 Φ^4 measure: Quantenfeldtheorie. Hainer Fields Medaille