**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 12.11.-16.11.2018

# 4. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(Transformationsformel)

---

## Themen der großen Übung am 05.11.

Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ nennen wir das Integral $\mathrm{Vol}(U) = \int_U \mathbb{1}\, \mathrm{d}x$ das *Volumen* von $U$, falls die konstante Funktion $\mathbb{1} = \mathbb{1}_U \colon U \to \{1\}$ integrierbar im Sinne von Definition 1.2.9 ist.
Wir werden sehen, dass jede beschränkte offene Menge $U$ ein endliches Volumen hat, d.h. $\mathbb{1}_U$ in diesem Sinn integrierbar ist. Dazu konstruieren wir eine Teilung der Eins auf $U$, so dass jede Funktion der Teilung kompakten Träger in $U$ hat.

Ist z.B. $Q = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ ein Quader in $\mathbb{R}^d$ werden wir sehen, dass $\int_{Q^\circ} \mathrm{d}x = \int_Q \mathrm{d}x = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ gilt. Es wird sich herausstellen, dass diese Beziehung auf einem allgemeineren Prinzip beruht, welches wir später in der Vorlesung kennen lernen: Für ein Integral über eine offene Menge, deren Rand nicht "zu wild" ist, trägt der Rand nichts zum Wert des Integrals bei (wie ja auch im Eindimensionalen Änderungen an einzelnen Punkten das Integral nicht verändern.)

Wir diskutieren den Nutzen von Koordinatentransformationen: Mittels *Kugelkoordinaten*

$$\Phi(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

berechnen wir das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ der Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $r$.
Wir führen die sogenannten *Zylinderkoordinaten* für $\mathbb{R}^3 \setminus \{(r, 0, 0)^\top \mid r \in [0, \infty)\}$ ein:

$$\mathrm{Zyl}(\rho, \varphi, h) := (\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi), h).$$

Ist $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, so erhält man als Zylinderkoordinaten $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi$ wird wie bei den Polarkoordinaten bestimmt und $h = z$. (Zylinderkoordinaten sind also ebene Polarkoordinaten, ergänzt um die Höhe)

## Tutoriumsvorschläge

# 8. Aufgabe $\star$

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Zeigen Sie, dass $f$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ liegt, und berechnen Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

# 9. Aufgabe $\star$

Es sei $\mathcal{K} := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kreisscheibe $\mathcal{K}$, d.h. bestimmen Sie $\int_{\mathcal{K}^\circ} \mathrm{d}x$.

# 10. Aufgabe

Bestimmen Sie $\mathrm{Vol}((0,1))$ und zeigen Sie, dass $(0,\infty)$ kein endliches Volumen haben kann. Beweisen Sie dann, dass $\varphi\colon (0,1) \to (1,\infty),\ x \mapsto \frac{1}{x}$, ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist, und somit die Eigenschaft, endliches Volumen zu haben, nicht invariant unter Diffeomorphismen ist. Widerspricht dies dem Transformationssatz?

# 11. Aufgabe

Sei $V$ ein beliebiger $n$-dimensionaler Banachraum. Dann nennen wir eine Abbildung $f\colon V \to \mathbb{R}$ *integrierbar*, falls es einen linearen Isomorphismus $\phi\colon \mathbb{R}^n \to V$ gibt, so dass $F\circ\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Beweisen Sie, dass, falls $F$ integrierbar ist,

(i) auch $F \circ \psi$ integrierbar ist für jeden linearen Isomorphismus $\psi\colon \mathbb{R}^n \to V$,

(ii) der Wert des Integrals $\int_V F := \int_{\mathbb{R}^n} F\circ\phi$ im Allgemeinen von der Wahl von $\phi$ abhängt.

## Hausaufgaben

### 11. Aufgabe (5 Punkte)

Ziel der Aufgabe ist es, einen *Alternativbeweis für den Transformationssatz für lineare Transformationen* zu geben. Seien dazu $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ und $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Beweisen Sie die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax)|\det A|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (T)$$

indem Sie wie folgt vorgehen: Zeigen Sie, dass $A$ als Produkt von Matrizen geschrieben werden kann, die sich nur in einer Zeile von der Einheitsmatrix unterscheiden. Beweisen Sie dann $(T)$ für solche Matrizen an Stelle von $A$. Dann zeigen Sie $(T)$ für $A$.

**Hinweis:** Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich jede invertierbare Matrix durch elementare Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix umformen lässt.

## 12. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnen eines geeigneten Integrals, dass für $a, b, c \neq 0$ das offene Ellipsoid $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 < 1\}$ das Volumen (im Sinne der Definition aus der großen Übung) $\frac{4}{3}\pi abc$ hat.

## 13. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $g \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(t) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

in $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ liegt und glatt ist, d.h. unendlich oft differenzierbar.

(ii) Konstruieren Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in (0, \infty)$ eine $\mathcal{C}^\infty$ Funktion $h_{\alpha,x} \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, die im Intervall $[x - \frac{\alpha}{2}, x + \frac{\alpha}{2}]$ gleich 1 und außerhalb von $[x - \alpha, x + \alpha]$ gleich 0 ist.

**Hinweis:** Überlegen Sie sich zuerst, dass es glatte Funktionen mit Träger in $[x - \alpha, x + \alpha]$ gibt, die an der Stelle $x$ den Wert 1 annehmen.

## 14. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Jacobi-Transformation $J(u, v) := (u(1-v), uv)^\top$ einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $(0, \infty) \times (0, 1) \to (0, \infty)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ induziert. Beweisen Sie dann durch Anwendung von $J$ auf ein geeignetes Integral der Funktion $F(x, y) := x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}$ die folgende Identifikation des Euler'schen Beta-Integrals

$$B(p, q) := \int_0^1 (1 - t)^{p-1} t^{q-1} \,\mathrm{d}\, t = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}, \quad p, q \in (0, \infty),$$

wobei $\Gamma(p) := \int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ die Gamma-Funktion ist, welche die Fakultät interpoliert.

Gesamtpunktzahl: 20