1 Geschichte

- Riemann 1854
- Lebesgue 1904
- Kolmogorov 1933 (moderne Wahrscheinlichkeitstheorie)

2 Aktuelles Interesse/ Beispiele

Beispiel 2.1

$\Omega = \{w_1, w_2, ...\}$ abzählbar oder endlich. $\mu(\{w_i\}) := p_i \in [0, \infty]$. Sei $A \subset \Omega : \mu(A) = \sum_{w \in A} \mu()\{w\} \in [0, \infty]$ (funktioniert da endliche/ abzählbare Mengen).

Eigenschaften:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu \geq 0$
- σ-Additivität: $\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$ und A und B sind disjunkt. Das heißt abzählbare Vereinigung klappt.

Spezialfall: $pi = 1$ (Zählmaß).
Fixiere $x \in \Omega$.

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Genannt das Dirac Maß.

Sei Ω diskret. Seien $\{x_1, ..., x_n\}$. Das empirisches Maß: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}(\cdot)$.

2.1 Länge eines Pfades/ einer Kurve

Sei $\gamma : [0, 1] \to (E, \varrho)$ mit Metrik ϱ. Sei π eine endliche Partition von $[0, 1]$ ist. Die Länge ist definiert als

$$L[\gamma] := \sup_{\pi} \sum_{[s,t] \in \pi} \varrho(\gamma(s), \gamma(t))$$

2.2 Geometrie

Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}^n$ mit Dimension n. Eine nette Teilfläche von $\mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$. Für eine lokale Umgebung von $x \in \mathcal{M}^n$ findet man eine Karte φ, sodass der betrachtete Raum $\mathbb{R}^n$ gleicht. Sei $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(A)$.

What is the right definition of volume (measure)? Naiv:

$$vol^n(\mathcal{A}) := Leb^n(A).$$

Geht nicht, da nicht intrinsisch definiert (hängt von der Karte φ ab.

Besser:

$$Vol^n(\mathcal{A}) := \int_{A \subset \mathbb{R}^n} \sqrt{\det(g \circ \varphi^{-1})} dx^1 ... dx^n,$$

wobei $g : \mathcal{M} \to \{IP\}, x \mapsto g_{|x}$. Genannt **Riemann'sche Volumenmaß.**

2.3 Hausdorff Maß

Sei (E, ϱ) ein metrischer Raum. Bisher: $A \subset E$. Man versucht daraus ein d-dimensionales Maß zu konstruieren. $U_{i...}$ max abzählbare Überdeckung von A. Wir schauen uns nur Überdeckungen an mit $diam(U_i) := \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in U\} < \delta$, wobei $\delta > 0$ fix ist.

$$H^d_\delta(A) := \inf\{(\sum diam(U_i))^d\}$$

Wir lassen δ gegen 0 laufen

$$H(A) := \lim_{\delta \to 0} H^d_\delta(A)$$

Nun ist H^d(eingeschränkt auf geeignete A) ein Maß. Es nennt sich das d-dimensionale Hausdorff-Maß. Es gibt ein Theorem, das besagt, dass für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}^n$: $H^d = Vol^d$ (bis auf eine Konstante).

Leistungsstärker als das Riemannsche Volumenmaß. Man kann zum Beispiel die Koch Kurve berechnen.

> Beispiel 2.2
>
> Das eindimensionale Hausdorffmaß: $H^1(\text{Koch Menge}) = \infty$. Für das zweidimensionale Maß erhält man $H^2(\text{Koch Menge}) = 0$. Was passiert, wenn $1 < d < 2$?

Maße mit Gesamtmasse 1 heißen Wahrscheinlichkeitsmaße. $\mu(\Omega) = 1 \iff$ probability. $\int ...d_\mu$ heißen Erwartungswerte.

Maßtheorie in $\infty-$dim: Wiener-Maß (Highlight der letzten 50 Jahre Mathemtik):

$$\Omega = C([0,1], \mathbb{R}^n) \qquad \text{Banachraum}$$

$A \subset \Omega, \mu(A) \in [0,1]$

outer boundary of planar brownian motion. Was ist die Hausdorff Dimension von solchen Objekten? $dim_H(\%) = \frac{4}{3}$ im Jahr 2000: L-S-W.

2014 Φ^4 measure: Quantenfeldtheorie. Hainer Fields Medaille