Kapitel 6

Bifurkation: Verzweigung von Ruhelagen

Wir untersuchen parameterabhängige Differentialgleichungen vom Typ

$$y' = f(y, \alpha), \quad \alpha \in J \subseteq \mathbb{R}$$

Frage:
Wie hängt das qualitative Verhalten der Differentialgleichung vom Parameter ab? Klar ist, dass eine Variation des Parameters einen quantitativen Einfluss auf die Lösungen und speziell die Ruhelagen hat.
Aber gibt es auch einen qualitativen? Gibt es beispielsweise einen kritischen Parameterwert α_0, an dem etwa

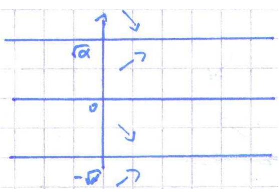
* eine *stabile* Ruhelage $y_s(\alpha)$ zu einer *instabilen* Ruhelage wird
* eine Ruhelage in mehrere Ruhelagen übergeht
* ...

Beispiele:

1)

$$y' = \alpha y - y^3 = y\left(\alpha - y^2\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha > 0$: 3 Ruhelagen: $0, \sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}$



$\Rightarrow \sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}$ asymptotisch stabil, 0 instabil.

$\alpha = 0$: $y' = -y^3$: 1 Ruhelage: 0 asymptotisch stabil.

$\alpha < 0$: 1 Ruhelage: 0 asymptotisch stabil.

Verzweigungsdiagramm

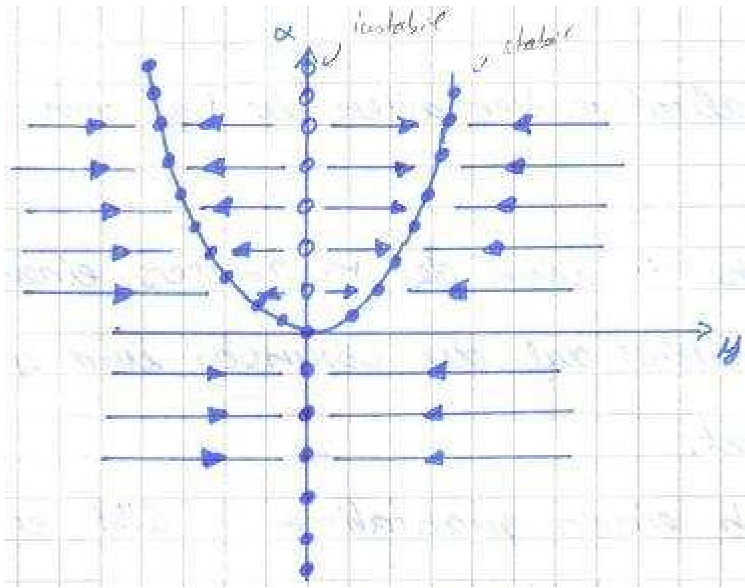


Abbildung 6.1: Heugabelverzweigung

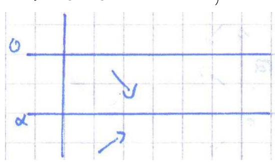
2)

$$y' = \alpha y - y^2 = y\,(\alpha - y)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha < 0$: 0 stabil, α instabil.

$\alpha = 0$: 0 instabil.

$\alpha > 0$: 0 instabil, α stabil.



Verzweigungsdiagramm

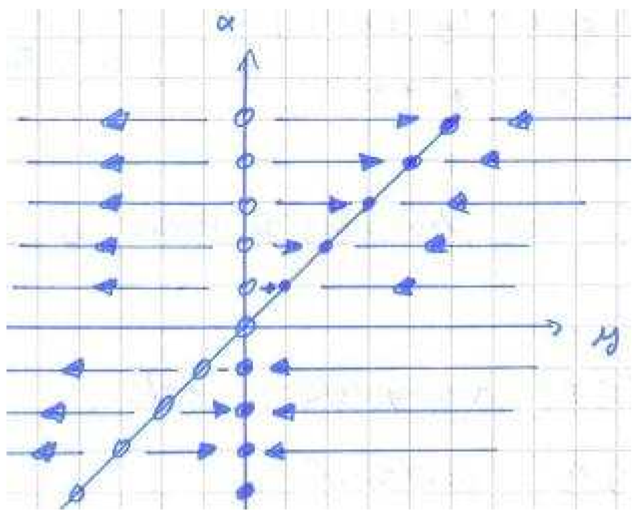
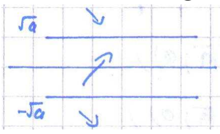


Abbildung 6.2: Transkritische Bifurkation

3)

$$y' = \alpha - y^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha > 0$: Ruhelagen: $\sqrt{\alpha}$ asymptotisch stabil und $-\sqrt{\alpha}$ instabil.



$\alpha = 0$: Ruhelage: 0 instabil.

$\alpha < 0$: keine Ruhelagen.

Verzweigungsdiagramm

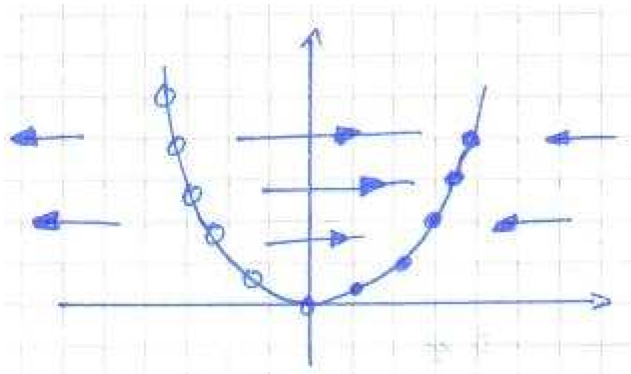


Abbildung 6.3: Sattelpunktbifurkation

4)

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -z + y\left(a - \left(y^2 + z^2\right)\right) \\ y + z\left(a - \left(y^2 + z^2\right)\right) \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$\forall\, a \in \mathbb{R} : (0,0)$ ist die einzige Ruhelage.

$\alpha \leq 0$: $(0,0)$ asymptotisch stabil.

$\alpha > 0$: $(0,0)$ instabil.

$$(y_a(x), z_a(x)) = \left(\sqrt{a}\cos(x), \sqrt{a}\sin(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Für $a > 0$ existieren globale periodische Lösungen (y_a, z_a).

$$\begin{aligned} \text{Orbit} &= S_{\sqrt{a}} \text{ Sphäre mit Radius } \sqrt{a} \\ &= O^+\left(\left(\sqrt{a}; 0\right)\right) \\ &= O\left(\left(\sqrt{a}; 0\right)\right) \\ &= \omega\left(\left(\sqrt{a}; 0\right)\right) \end{aligned}$$

(Man kann zeigen, dass diese Mengen Attraktoren sind).

Es gilt: $\forall \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{dist}\left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\left(x; \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\right), S_{\sqrt{a}}\right) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d.h. $S_{\sqrt{a}}$ ist ein *Attraktor / Grenzzyklus.*

Verzweigungsdiagramm

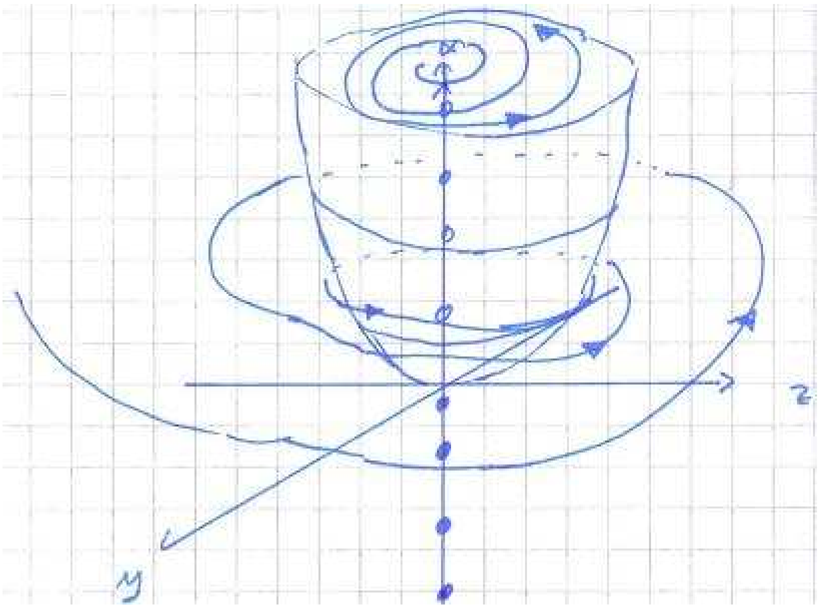


Abbildung 6.4: Hopf-Bifurkation