Aufgabe 2c

<u>Voraussetzung:</u> F und G kommutieren. Zudem sind F und G diagonalisierbar. Daher gilt nach Satz aus der Vorlesung, dass man den Vektorraum V als direkte Summe von allen Eigenräumen von F darstellen kann. Ebenso mit G.

$$V = \mathrm{Eig}(F, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(F, \lambda_k)$$
$$V = \mathrm{Eig}(G, \mu_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(G, \mu_l)$$

<u>Beweisidee:</u> Zeige, dass für beliebige Eigenwerte $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ gilt:

$$\mathrm{Eig}(F, \lambda) = \underbrace{\Big(\mathrm{Eig}(F, \lambda) \cap \mathrm{Eig}(G, \mu_1)\Big)}_{:=\Phi_1} \oplus ... \oplus \underbrace{\Big(\mathrm{Eig}(F, \lambda) \cap \mathrm{Eig}(G, \mu_l)\Big)}_{:=\Phi_l}. \qquad (\bigstar)$$

Was hilft das jetzt? Fassen wir erst mal einige Dinge zusammen, die bekannt sind.

- Für Φ_1 existieren Basisvektoren $v_1^{(1)}, ..., v_{\alpha_1}^{(1)}$ mit $\alpha_1 = \dim \Phi_1$.
- Für Φ_2 existieren Basisvektoren $v_1^{(2)}, ..., v_{\alpha_2}^{(2)}$ mit $\alpha_2 = \dim \Phi_2$
- ...
- Und so weiter bis Φ_l mit Basisvektoren $v_1^{(l)}, ..., v_{\alpha_l}^{(l)}$ mit $\alpha_l = \dim \Phi_l$

Wegen der direkten Summe aus ($\bigstar$) bilden all die Vektoren $(v_1^{(1)}, ..., v_{\alpha_1}^{(1)}, ..., v_1^{(l)}, ..., v_{\alpha_l}^{(l)})$ auch wieder eine Basis und <u>sie bilden sogar eine Basis von $\mathrm{Eig}(F, \lambda)$</u>, siehe ($\bigstar$). Fassen wir zusammen:

- Jede dieser Basisvektoren ist ein Eigenvektor von F mit Eigentwert λ, denn sie bilden eine Basis von $\mathrm{Eig}(F, \lambda)$.
- Jede dieser Basisvektoren ist <u>auch</u> ein Eigenvektor von G, denn betrachte, wie wir die Basis konstruiert haben und wie $\Phi_i = \mathrm{Eig}(F, \lambda) \cap \mathrm{Eig}(G, \mu_i)$ definiert ist

  $$\Big(\underbrace{v_1^{(1)}, ..., v_{\alpha_1}^{(1)}}_{\text{bilden Basis von } \Phi_1}, ..., \underbrace{v_1^{(l)}, ..., v_{\alpha_l}^{(l)}}_{\text{bilden Basis von } \Phi_l} \Big)$$

  Mit anderen Worten: $v_1^{(1)}, ..., v_{\alpha_1}^{(1)} \in \mathrm{Eig}(G, \mu_1)$ sind Eigenvektoren in G mit Eigenwert μ_1 und so weiter, sodass $v_1^{(l)}, ..., v_{\alpha_1}^{(l)} \in \mathrm{Eig}(G, \mu_l)$ auch Eigenvektoren in G mit Eigenwert μ_l sind.

Um deutlich zu werden, wir haben eine Basis von $\mathrm{Eig}(F, \lambda)$ gefunden, bei der <u>jeder Basisvektor sowohl Eigenvektor von F als auch von G ist!</u> Wir bezeichnen diese besondere Basis als *Königsbasis*

$$\overset{♕}{B} := (v_1^{(1)}, ..., v_{\alpha_1}^{(1)}, ..., v_1^{(l)}, ..., v_{\alpha_l}^{(l)}).$$

Dieses Prozedere wiederholen wir für jedes $\lambda_1, ..., \lambda_k$, denn wir haben anfangs ein beliebiges λ gewählt. Das heißt, man kann für jedes $\lambda_1, ..., \lambda_k$ eine Königsbasis wählen, falls ($\bigstar$) gilt. Da $V = \mathrm{Eig}(F, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(F, \lambda_k)$ nach Voraussetzung gilt, bilden die einzelnen Basen von $\mathrm{Eig}(F, \lambda_1), ..., \mathrm{Eig}(F, \lambda_k)$ zusammen auch eine Basis von V wegen der direkten Summe! Daher bilden die Königsbasen von $\mathrm{Eig}(F, \lambda_1), ..., \mathrm{Eig}(F, \lambda_k)$ zusammen eine Basis von V. Diese Basis enthält Eigenvektoren in F und G, was zu zeigen war.

Beweis. Zeige die Gleichung (★). Nehme ein beliebiges $v \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$. Wenn sich v nun eindeutig darstellen lässt als

$$v = \varphi_1 + ... + \varphi_l$$

mit $\varphi_1 \in \Phi_1, ..., \varphi_l \in \Phi_l$, so gilt (★) nach Definition der direkten Summe.

1. Da $v \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$ nach Voraussetzung gilt, ist auch $v \in V$, denn $V \supset \mathrm{Eig}(F, \lambda)$.

2. Wegen $V = \mathrm{Eig}(G, \mu_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(G, \mu_l)$ nach Voraussetzung, lässt sich $v \in V$ eindeutig darstellen als

$$v = \varphi_1 + ... + \varphi_l$$

mit $\underline{\varphi_1 \in \mathrm{Eig}(G, \mu_1), ..., \varphi_l \in \mathrm{Eig}(G, \mu_l)}$ nach Definition der direkten Summe.

3. Ist $\underline{\varphi_i \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)}$ für jedes $i \in \{1, ..., l\}$? Wenn wir das zeigen könnten, so ist

$$\varphi_1 \in \Phi_1, ..., \varphi_l \in \Phi_l$$

nach Definition von Φ und wir sind fertig, denn $v = \varphi_1 + ... + \varphi_l$ mit $\varphi_1 \in \Phi_1, ..., \varphi_l \in \Phi_l$, was zu zeigen war.

Wir zeigen zum Schluss nur noch, dass $\varphi_1, ..., \varphi_l \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$ gilt. Nach Aufgabe 2b sind alle Räume $\mathrm{Eig}(G, \mu_1), ..., \mathrm{Eig}(G, \mu_l)$ F-invariant, denn F und G kommutieren *(Aha, hier brauchen wir die Voraussetzung!)*. Also

$$\forall i \in \{1, ..., l\} : F(\mathrm{Eig}(G, \mu_i)) \subset \mathrm{Eig}(G, \mu_i). \tag{1}$$

Diesen Sachverhalt brauchen wir für die folgende Beweiskette:

- Wende auf v die Funktion F an. Es gilt $F(v) = \lambda v$ wegen $v \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$. Auch ist $v = \varphi_1 + ... + \varphi_l$ und folglich $\lambda v = \lambda\varphi_1 + ... + \lambda\varphi_l$. Zusammengefasst:

$$F(v) = F(\varphi_1 + ... + \varphi_l) = F(\varphi_1) + ... + F(\varphi_l) = \lambda v = \lambda\varphi_1 + ... + \lambda\varphi_l$$

Wir wollen als nächstes $F(\varphi_i)$ mit $\lambda\varphi_i$ vergleichen und halten zuerst fest:

$$\underbrace{\lambda\varphi_i \in \mathrm{Eig}(G, \mu_i)}_{\text{wegen } \varphi_i \in \mathrm{Eig}(G, \mu_i)} \quad \text{und} \quad \underbrace{F(\varphi_i) \in \mathrm{Eig}(G, \mu_i)}_{\text{wegen F-Invarianz in (1)}}$$

Es muss $F(\varphi_i) = \lambda\varphi_i$ gelten, denn auch $F(v)$ lässt sich eindeutig darstellen wegen der eindeutigen Darstellung von $v = \varphi_1 + ... + \varphi_l$. Also $F(v) = \lambda v = \lambda\varphi_1 + ... + \lambda\varphi_l$. All die $\lambda\varphi_i$ sind in $\mathrm{Eig}(G, \mu_i)$ und es gibt genau einen solchen Vektor für die Darstellung von $F(v)$ wegen der eindeutigen Darstellung. Da aber auch $F(\varphi_i) \in \mathrm{Eig}(G, \mu_i)$ gilt, muss $F(\varphi_i) = \lambda\varphi_i$. Also ist φ_i ein Eigenvektor in F und $\varphi_i \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$, was zu zeigen war.

□

Aufgabe 3

(a) Sei v_k ein Hauptvektor der Stufe k von λ. Nach Definition gilt

$$(A-\lambda E)^k v_k = 0, \text{ aber } (A-\lambda E)^{k-1} v_k \neq 0$$

Überprüfe, ob v_j mit $j \in \{1, ..., k\}$ ein Hauptvektor ist. Falls $j = k$, so ist v_j nach Voraussetzung ein Hauptvektor. Sei $j < k$. Dann ergibt sich nach $k-j$ maliger Anwendung von $v_{i-1} = (A-\lambda E)v_i$ folgende Gleichung:

$$(A-\lambda E)^j v_j = \underbrace{(A-\lambda E)^j (A-\lambda E) v_{j+1} = ... = (A-\lambda E)^j (A-\lambda E)^{k-j} v_k}_{k-j \text{ malige Substitution von } v_{i-1} \text{ durch einen Term mit } v_i} = \underbrace{(A-\lambda E)^k v_k = 0}_{\text{nach Voraussetzung}}.$$

Auch ist $(A-\lambda E)^{j-1} v_j \neq 0$, denn wegen $v_{i-1} = (A-\lambda E)v_i$ für $i \in \{2, ..., k\}$ gilt:

$$(A-\lambda E)^{k-1} v_k \neq 0 \iff (A-\lambda E)^{k-2} v_{k-1} \neq 0 \iff (A-\lambda E)^{k-1-(k-j)} v_{k-(k-j)} = (A-\lambda E)^{j-1} v_j \neq 0.$$

Schlussendlich ist v_j ein Hauptvektor der Stufe j.

(b) Leite die Abbildung $x(t) := e^{\lambda t}\big(v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \frac{t^3}{3!} v_{k-3} + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1\big)$ ab. Wir schreiben die Formel um und leiten mit der Produktregel ab:

$$x(t) = e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{k} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} v_{k+1-i},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{k} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} v_{k+1-i} + e^{\lambda t} \sum_{i=2}^{k} \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} v_{k+1-i}$$

Indexverschiebung des zweiten Summanden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{k} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} v_{k+1-i} + e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{k} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} v_k$$