Aufgabe 3

(a) *Beweis.* Sei $I \in \mathbb{R}$ wie in der Aufgabenstellung definiert. Sei $\Gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_x^\infty \frac{1}{u^2(t)}\,dt$. Γ ist auf seinem Definitionsbereich definiert, denn es gilt

$$\Gamma(x) = I - \int_0^x \frac{1}{u^2(t)}\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Insbesondere existiert $\int_0^x \frac{1}{u^2(t)}\,dt \in \mathbb{R}$ für beliebige $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, da $\frac{1}{u^2}$ über jedes Intervall $[0,\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ integrierbar sein muss (notwendige Bedingung für die Existenz des uneigentlichen Integrals).

Sei $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto u(x)$ eine Lösung von $(\star\star)$, das heißt

$$u'' + pu = 0. \tag{1}$$

Sei $b = u\Gamma$. Die Ableitungen lauten:

$$b' = u'\Gamma + u\Gamma' = u'\Gamma - u\frac{1}{u^2} = u'\Gamma - \frac{1}{u}$$
$$b'' = u''\Gamma + u'\Gamma' + \frac{u'}{u^2} = u''\Gamma - \frac{u'}{u^2} + \frac{u'}{u^2} = u''\Gamma.$$

Verifiziere den Ansatz $b = u\Gamma$ für $(\star\star)$.

$$b'' + pb = u''\Gamma + pu\Gamma = \Gamma(u'' + pu) \overset{(1)}{=} \Gamma \cdot 0 = 0.$$

□

(b) *Beweis.* Sei $\Psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x \frac{1}{u^2(t)}\,dt$. Die Funktion Ψ ist auf seinem Definitionsbereich definiert, da $\int_0^x \frac{1}{u^2(t)}\,dt$ für jedes $x \in [0,\infty)$ existiert aufgrund von $I = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{dt}{u^2(t)} = \infty$ (um den Grenzwert überhaupt bilden zu können, muss $\frac{1}{u^2}$ auf $[0,\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ integrierbar sein).

Sei $w := u\Psi$, wobei u wie in Aufgabe 3(a) definiert ist.

$$w' = u'\Psi + u\Psi' = u'\Psi + \frac{u}{u^2} = u'\Psi + \frac{1}{u}$$
$$w'' = u''\Psi + u'\Psi' - \frac{u'}{u^2} = u''\Psi + \frac{u'}{u^2} - \frac{u'}{u^2} = u''\Psi.$$

Verifiziere den Ansatz $w = u\Psi$ für $(\star\star)$.

$$w'' + pw = u''\Psi + pu\Psi = \Psi(u'' + pu) \overset{(1)}{=} \Psi \cdot 0 = 0.$$

□

(c) Sei u eine Lösung mit $I := \int_0^\infty \frac{dx}{u^2(x)} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$.

- Wie in Aufgabe (a) und (b) gezeigt, existieren zwei Lösungen u und $u\Phi$ mit

$$\Phi(x) := \begin{cases} \Gamma(x), & \text{falls } I < \infty \\ \Psi(x), & \text{falls } I = \infty. \end{cases}$$

.

- u ist nach Voraussetzung positiv. $u\Phi$ ist ebenfalls positiv, denn Φ ist positiv. Das sieht man wie folgt: u muss eine stetige Funktion sein, sonst würde es nicht die Differentialgleichung lösen. Daher ist auch $\frac{1}{u^2}$ stetig wegen $u(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher ist das Integral von $\frac{1}{u^2}$ auf einem beliebigen Intervall $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ positiv nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung.

$$\underbrace{\frac{1}{u(\xi)^2}}_{>0}\underbrace{\frac{1}{(\beta-\alpha)}}_{>0} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{u^2(t)}\,dt, \quad \xi \in [\alpha,\beta]$$

- Falls $I < \infty$:

$$y_1 := u\Phi, y_1' = u'\Phi - \frac{1}{u}, y_2 := u, y_2' = u'$$
$$y_1y_2' - y_1'y_2 = uu'\Phi - (uu'\Phi - 1) = 1.$$

Falls $I = \infty$:

$$y_1 := u, y_1' = u', y_2 := u\Phi, y_2' = u'\Phi + \frac{1}{u}$$
$$y_1y_2' - y_1'y_2 = uu'\Phi + 1 - u'u\Phi = 1.$$

- Falls $I < \infty$: $y_1 := u\Phi, y_2 := u$.

$$\Omega := \frac{y_1}{y_2} = \Phi = \Gamma$$
$$\Omega' = \Gamma' = -\frac{1}{u^2} < 0.$$

Falls $I = \infty$: $y_1 := u, y_2 := u\Phi$.

$$\Omega := \frac{y_1}{y_2} = \frac{u}{u\Phi} = \frac{1}{\Psi}$$
$$\Omega' = -\frac{\Psi'}{\Psi^2} = -\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{>0}\underbrace{\frac{1}{\Psi^2}}_{>0} < 0$$

- Falls $I < \infty$: $y_1 := u\Phi, y_2 := u$. Es gilt

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \Gamma(x) = I - \int_0^x \frac{1}{u^2(t)}\,dt.$$

Nun ist $\int_0^x \frac{dt}{u^2(t)} \to I$ für $x \to \infty$. Also $\Gamma(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Falls $I = \infty$: $y_1 := u, y_2 := u\Phi$. Es gilt

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{\Psi(x)} = \frac{1}{\int_0^x \frac{1}{u^2(t)}\,dt}.$$

Da für $x \to \infty$ die Funktion $\Psi(x)$ gegen $I = \infty$ läuft, ist $\frac{1}{\Psi(x)} \to 0$ für $x \to \infty$.