Differentialgleichungen

VORLESUNGSMITSCHRIFT

DGL I	-	Christian Kreusler	WS 2011/12
DGL IIA	-	Etienne Emmrich	SS 2012
DGL IIB	-	Etienne Emmrich	WS 2012/13
DGL III	-	Christian Kreusler	SS 2013

29. November 2015

Inhaltsverzeichnis

Differentialgleichungen I

0 Einführung, Anwendungsbeispiele und Klassifikationen

Zu Beginn geben wir einige Beispiele aus der Anwendung von Differentialgleichungen:

Beispiel 0.1.

Durchbiegung einer Platte: Wir modellieren die Durchbiegung u einer Platte Ω. Es seien $A, B \in \mathbb{R}$ reelle Parameter. Es gelte

$$B\Delta\Delta u + Au = f$$

auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Die rechte Seite $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stellt die auf die Platte wirkende Kraft dar, zusätzliche Bedingungen (*Randbedingungen*) sind $u|_{\partial\Omega} = 0$, d.h. die Platte biege sich nicht am Rand.

Navier-Stokes-Gleichungen (Strömungsmechanik): Es gelte

$$u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f$$

auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Die Funktionen u, p und f sthen dabei für folgende Größen:

$$\begin{array}{lll} u\colon & \Omega \to \mathbb{R}^3 & \text{Geschwindigkeitsfeld} \\ p\colon & \Omega \to \mathbb{R} & \text{Druck} \\ f\colon & \Omega \to \mathbb{R}^3 & \text{äußere Kraft} \end{array}$$

Im allgemeinen ist über die Existenz von Lösungen dieser Differentialgleichung noch nichts bekannt.

Black-Scholes-Gleichungen (Finanzmathematik): Für die Bewertung von Finanzoptionen wird die stochastische Differentialgleichung

$$f_t + rSf_S + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS} = rf$$

verwendet. Auf die Erläuterung dieser Differentialgleichung verzichten wir jedoch an dieser Stelle, da hierzu einige Begriffe der Stochastik erklärt werden müssten.

SIR-Modell: Das SIR-Modell beschreibt die Ausbreitung von Epidemien. Eine konstante Beölkerung wird in drei Gruppen unterteilt:

$S(t)$ Gesunde, die sich noch infizieren können,

$I(t)$ Infizierte und

$R(t)$ Alle, die sich nicht mehr infizieren können (Immunität, Tod, Quarantäne).

Für alle $t > 0$ sei $S(t)+I(t)+R(t)$ konstant. Die Differentialgleichungen haben dann folgende Form:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) &= \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) &= \beta I(t) \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingungen definiere man $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ und $R(0) = R_0$.

Ist ein mathematisches Differentialgleichungsproblem gegeben, so stehen die folgenden sechs Fragen im Mittelpunkt der Untersuchungen:

1) Existiert eine Lösung?
2) Ist die Lösung eindeutig?
3) Ist die Lösung stabil, d.h. z.B. stetig abhängig von den Daten (Anfangswerte, Parameter, rechte Seite)?
4) Wie glatt ist die Lösung? (wie oft differenzierbar, ...)
5) (Wie) lässt sich eine Lösung explizit bestimmen?
6) (Wie) lässt sich eine Lösung numerisch bestimmen?

Da jedoch die Beantwortung dieser Fragen stark davon abhängt, welche Form die vorliegende Differentialgleichung hat, sind gewisse Klassifizierungen hilfreich.

Definition 0.2 (Klassifizierungen von Differentialgleichungen)**.**

Explizite und implizite Differentialgleichungen Eine Differentialgleichung wird *explizit* genannt, falls sie nach der höchsten Ableitung aufgelöst werden kann, z.B. $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$. Andernfalls heißt sie *implizit*, z.B. $f(u'', u', u, t) = 0$.

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen Ist die gesuchte Funktion von nur einer Variablen abhängig, so heißt die Differentialgleichung *gewöhnlich*, sonst *partiell*.

Ordnung einer Differentialgleichung Die *Ordnung* einer Differentialgleichung ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung.

Lineare und nichtlineare Differentialgleichungen Wir nennen eine Differentialgleichung *linear*, falls die gesuchte Funktion und die vorkommenden Ableitungen nur linear auftreten, z.B. $u''(t) + \alpha u'(t) = 0$ oder $u_{tt} + t^2 u_x = \cos t$. Die nichtlinearen Differentialgleichungen können weiter unterteilt werden.

In *semilinearen* DGLs tritt die höchste Ableitung nur linear auf, d.h. Ableitungen niedrigeren Grades dürfen nichtlinear auftreten, z.B. $-\Delta u = u^2 f$.

Bei *quasilinearen* DGLs tritt die höchste Ableitung zwar nichtlinear auf, ihre Koeffizienten hängen aber nur von den Ableitungen niedrigerer Ordnung ab, etwa $a(x, t, u(x, t))u_t(x, t) + b(x, t, u(x, t))u_x(x, t) = 0$.

Anfangsbedingungen und Randbedingungen Die gesuchte Funktion kann durch *Anfangsbedingungen* wie $u(t_0) = u_0$ weiter charakterisiert werden. Werden die Werte der gesuchten Funktion auf dem Rand ihres Definitionsbereiches vorgegeben, spricht man von *Randbedingungen*, z.B. $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ für den Definitionsbereich (a, b)

1 Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

1.1 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel 1.1.1.

- Das Anfangswertproblem
$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t), & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
besitzt die (eindeutige) Lösung
$$u(t) = u_0 \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}.$$

- Gegeben sei das Anfangswertproblem
$$\begin{cases} u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0, & t > 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0, \end{cases}$$
wobei $p, q \in \mathbb{R}$ "Schwingungen" modellieren. Wir verwenden den Exponentialansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Dieser Ansatz ergibt $u'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $u''(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir aus $\mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda^2 + \lambda p + q) = 0$ die charakteristische Gleichung
$$\lambda^2 + p\lambda + q \overset{!}{=} 0.$$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ seien die Lösungen dieser Gleichung.
  - Sind die Nullstellen verschieden, so lösen $u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ und $u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ die DGL. Die allgemeine Lösung ist dann durch $u(t) = Au_1(t) + Bu_2(t)$ gegeben.
  - Stimmen die beiden Lösungen überein, d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, so lösen $u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $u_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}$. Die allgemeine Lösung ist wieder durch $u = Au_1 + Bu_2$ gegebem.

  In beiden Fällen werden die Konstanten A und B durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Satz 1.1.2 (Superpositionsprinzip)**.** *Seien X, Y zwei Vektorräume und sei $A\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung. Betrachte folgendes Problem:*

$$\textit{Finde zu } f \in Y \textit{ ein } u \in X \textit{ mit } Au = f.$$

Für $f = 0$ heißt dieses Problem homogen*, sonst* inhomogen*. Für zwei Lösungen $u_1, u_2 \in X$ des homogenen Problems, so ist es auch jede Linearkombination dieser Lösungen. Für eine Lösung u_h des homogenen Problems und eine Lösung u_i des inhomogenen Problems ist auch $u_h + u_i$ eine Lösung des inhomogenen Problems.*

Beweis. Für $u_1, u_2 \in X$ mit $Au_1 = 0$, $Au_2 = 0$ gilt $A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda Au_1 + \mu Au_2 = 0$. Für $u_h, u_i \in X$ mit $Au_h = 0$, $Au_i = f$ gilt $A(u_h + u_i) = Au_h + Au_i = 0 + Au_i = f$. □

Liegt ein lineares Anfangswertproblem vor, so kann also zunächst die allgemeine Lösung des homogenen Problems bestimmt werden. Anschließend sucht man *eine* Lösung des inhomogenen Problems. Schließlich werden die Parameter durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Beispiel 1.1.3. Betrachte die homogene Differentialgleichung

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0,$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ konstant sind. Hier lässt sich stets der Exponentialansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ anwenden. Man erhält die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Für eine m-fache Nullstelle λ dieses Polynoms sind $\mathrm{e}^{\lambda t}$, $t\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\ldots$, $t^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$ linear unabhängige Lösungen der DGL. Auf diese Weise erhalten wir n linear unabhängige Lösungen, die gemeinsam den Lösungsraum aufspannen.

Etwas komplizierter ist der Fall, dass $a_0, \ldots, a_{n-1}$ nichtkonstante Funktionen sind. Die entsprechende DGL erster ordnung $u'(t)+a(t)u(t) = 0$ bereitet jedoch noch keine Probleme und hat für $u(t_0) = u_0$ die Lösung $u(t) = u_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\right)$.
Bei DGLs höherer Ordnung kann folgendes Reduktionsverfahren verwendet werden:

Satz 1.1.4 (Reduktionsverfahren nach d'Alembert)**.** *Das Reduktionsverfahren wird am Beispiel einer DGL zweiter Ordnung vorgeführt. Gegeben sei dazu die DGL*

$$u'' + pu' + qu = 0.$$

Ist eine Lösung u_1 bekannt, verwenden wir den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} u_2(t) &:= u_1(t)\int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi \\ u_2'(t) &= u_1'(t)\int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi + u_1(t)v(t) \\ u_2''(t) &= u_1''(t)\int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi + 2u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL erhält man

$$\int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi \underbrace{\left(u_1''(t) + p(t)u_1'(t) + q(t)u_1(t)\right)}_{=0} + 2u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t) + p(t)u_1(t)v(t) = 0,$$

also eine DGL erster Ordnung für v.

Beispiel 1.1.5. Betrachte $p = \frac{-2t}{1-t^2}$ und $q = \frac{2}{1-t^2}$, die DGL lautet also

$$u''(t) - \tfrac{2t}{1-t^2}u'(t) + \tfrac{2}{1-t^2}u(t) = 0.$$

Durch Raten bzw. scharfes Hinsehen findet man die Lösung $u_1(t) = t$. Der Ansatz lautet also $u_2(t) = t\int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi$ mit $u_2'(t) = \int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi + tv(t)$ und $u_2''(t) = 2v(t) + tv'(t)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= 2v(t) + tv'(t) - \frac{2t}{1-t^2}\left(\int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi + tv(t)\right) + \frac{2t}{1-t^2}\int_{t_0}^t v(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= 2v(t) + tv'(t) - \tfrac{2t^2}{1-t^2}v(t). \end{aligned}$$

Umgestellt haben wir für v

$$v'(t) = \left(\tfrac{2t}{1-t^2} - \tfrac{2}{t}\right)v(t),$$

was als mögliche Lösung

$$v(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left(\tfrac{2s}{1-s^2} - \tfrac{2}{s}\right) \mathrm{d}s\right)$$

besitzt. Hierzu ist

$$\int_{t_0}^{t} \frac{2s}{1-s^2} \mathrm{d}s = \int_{t_0^2}^{t^2} \frac{1}{1-z} \mathrm{d}z = -\ln(1-z)|_{t_0^2}^{t^2} = -\ln(1-t^2) + \text{const.}$$

Dies ergibt

$$v(t) = \exp\left(-\ln(1-t^2) - 2\ln(t) + \text{const}\right) = \exp\left(\ln\left(\tfrac{1}{(1-t^2)t^2}\right) + \text{const}\right) = \tfrac{\text{const}}{(1-t^2)t^2}$$

und damit

$$u_2(t) = t\int_{t_0}^{t} \tfrac{1}{(1-s^2)s^2} \mathrm{d}s.$$

Um u_2 schließlich explizit ohne Integral angeben zu können, nutzen wir Partailbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(1-s^2)s^2} = \frac{1}{(1+s)(1-s)s^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+s} + \frac{1}{s^2}.$$

Hiermit erhalten wir

$$u_2(t) = t\left(-\tfrac{1}{2}\ln(1-s) + \tfrac{1}{2}\ln(1+s) - \tfrac{1}{s}\right)\Big|_{t_0}^{t} = t\left(\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right) - \tfrac{1}{t} + c\right) = \tfrac{t}{2}\ln\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right) - 1 + ct,$$

wobei der Term ct hier vernachlässigt werden kann, da dieser bereits in u_1 enthalten ist.

Hat man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung bestimmt, lässt sich daraus mit der *Variation der Konstanten* auch eine inhomogene Lösung bestimmen.

Satz 1.1.6 (Variation der Konstanten)**.** *Eine vorliegende DGL*

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = f$$

habe die allgemeine Lösung

$$u_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t)$$

für das homogene Problem. Verwende für das inhomogene Problem den Ansatz

$$u_p(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_k(t),$$

leite diese Funktion ab und setze sie in die DGL ein. Dabei können $n-1$ Gleichungen für die n unbekannten Parameterfunktionen frei gewählt werden.

Beispiel 1.1.7. Es sei die DGL

$$u'(t) - tu(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2 + t}$$

vorgelegt. Die homogene Gleichung $u'(t) = tu(t)$ hat hier die Lösung

$$u_h(t) = c\exp\left(\int_0^t d\mathrm{d}s\right) = c\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Für eine partikuläre Lösung u_p der inhomogenen Gleichung wählen wir also den Ansatz

$$\begin{aligned} u_p(t) &= c(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} \\ u_p'(t) &= c'(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + c(t)t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}. \end{aligned}$$

Eingesetzt erhalten wir

$$c'(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + c(t)t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} - tc(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2+t}.$$

Dies liefert offenbar $c'(t) = \mathrm{e}^t$ und somit $c(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{const}$. Als allgemeine Lösung für das inhomogene Problem erhalten wir also

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{const}) = \tilde{c}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2+t}.$$

Meist ist die Variation der Konstanten jedoch mit viel Aufwand verbunden. Wir stellen daher eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der inhomogenen Lösung vor.

Satz 1.1.8 (Ansatz der rechten Seite)**.** *Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung, vorzugsweise mit linearen Koeffizienten. Zur Bestimmung einer partikulären Lösung wähle man als Ansatz eine allgemeine Form der rechten Seite. Einsetzen dieses Ansatzes und Koeffizientenvergleich können nun eine partikuläre Lösung liefern.*

Bei der Formulierung dieser Methode halten wir uns bewusst allgemein, denn die zu wählende Ansatzfunktion kann in manchen Fällen nach Belieben gewählt werden. Es gibt jedoch einige Funktionen, für die typische Ansätze bekannt sind. Dies sind z.B.

- Polynome
- trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen.

Beispiel 1.1.9. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'' + u' - 2u = 2\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^{-2t} - 2t^3 + 3\sin(4t) + 7t.$$

Lösungen der homogenen Gleichung sind $u(t) = \mathrm{e}^t$ und $u(t) = \mathrm{e}^{-2t}$. Wir bestimmen nun mehrere partikuläre Lösungen, die wir zum Schluss zusammensetzen. Dazu beginnen wir mit der rechten Seite $2\mathrm{e}^t$. Hierbei handelt es sich um eine Exponentialfunktion, unser Ansatz wäre also zunächst $u(t) = c\mathrm{e}^t$. Jedoch ist dies bereits Teil der homogenen Lösung. Wie von mehrfachen Lösungend der charakteristischen Gleichung bekannt, multiplizieren wir mit t und erhalten nun den Ansatz $u_1(t) = ct\mathrm{e}^t$. Eingesetzt erhalten wir

$$ct\mathrm{e}^t + c\mathrm{e}^t + c\mathrm{e}^t + ct\mathrm{e}^t + c\mathrm{e}^t - 2ct\mathrm{e}^t = 2\mathrm{e}^t$$

und haben mit Koeffizientenvergleich $c = \frac{2}{3}$.
Als nächstes betrachten wir die rechte Seite $t\mathrm{e}^{-2t}$. Wir schreiben die allgemeine Form als Produkt von Polynom und Exponentialfunktion: $(at + b)\mathrm{e}^{-2t}$. Da jedoch auch -2 Lösung der charakteristischen Gleichung war, multiplizieren wir wieder mit t und erhalten den Ansatz $u_2(t) = (at^2 + bt)\mathrm{e}^{-2t}$. Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2a\mathrm{e}^{-2t} - 2(2at+b)\mathrm{e}^{-2t} - 2(2at+b)\mathrm{e}^{-2t} + 4(at^2+bt)\mathrm{e}^{-2t} \\ +(2at+b)\mathrm{e}^{-2t} - 2(at^2+bt)\mathrm{e}^{-2t} - 2(at^2+bt)\mathrm{e}^{-2t} &= t\mathrm{e}^{-2t} \\ 2a\mathrm{e}^{-2t} - 3(2at+b)\mathrm{e}^{-2t} &= t\mathrm{e}^{-2t} \\ (2a-3b)\mathrm{e}^{-2t} + (-6a)t\mathrm{e}^{-2t} &= t\mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

und damit $a = -\frac{1}{6}$ und $b = -\frac{1}{9}$.

Als drittes betrachten wir die rechte Seite $-2t^3 + 7t$. Als Ansatz wählen wir $u_3(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.

Für die rechte Seite $3\sin(4t)$ wählen wir den Ansatz $u_4(t) = a\sin(4t) + b\cos(4t)$.

Die Bestimmung der Koeffizienten hierbei sei dem Leser überlassen.

Sind alle Koeffizienten bestimmt, haben wir mit $u_p(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t)$ eine partikuläre Lösung unserer Differentialgleichung gefunden.

Die am häufigsten genutzen Ansätze sind folgende:

- Polynome: $\sum_{k=0}^{n} c_k t^k$,
- trigonometrische Funktionen: $c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$,
- Exponentialfunktionen: $ce^{\lambda t}$

und Produkte daraus, wobei die c_i hier die Variablen beschreiben, auf die im Ansatz verallgemeinert wird. λ und der Grad n eines Polynoms werden übernommen.

Wie jedoch leicht festzustellen ist, ist dies ein sehr spezielles Vorgehen; die Variation der Konstanten ist wesentlich allgemeiner. Mit ihr kann etwa folgende Lösungsformel hergeleitet werden.

Satz 1.1.10 (Formel von Duhamel)**.** *Die Differentialgleichung*

$$u' + au = b$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$u(t) = c\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{s}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s$$

für beliebige $c, t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Der erste Summand ergibt sich bekanntlich als Lösung der homogenen Gleichung. Den zweiten Summanden erhalten wir mit der Variation der Konstanten. Zum Beweis der Aussage wird dieses Verfahren jedoch nicht durchgeführt, sondern die angegebene Funktion in die Differentialgleichung eingesetzt. Um die Ableitung zu bestimmen, formen wir zunächst die inhomogene Lösung um:

$$\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{s}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{s} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s.$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} u'(t) &= -ca(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) - a(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{s} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= -ca(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) - a(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{s} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s \\ &\qquad + b(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} u' + au = {} & -ca(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\right) - a(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ & \cdot \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^s a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s + b(t) + a(t)c\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\right) \\ & + a(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^s a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s \\ = {} & b(t). \end{aligned}$$

□

Für ein Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' + au = b & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

existiert also die eindeutige Lösung

$$u(t) = u_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s.$$

1.2 Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Für nichtlineare Gleichungen sind nur wenige Lösungsmethoden bekannt. Oft helfen auch Nachschlagen und Raten. Ein Lösungsverfahren können wir hier jedoch vorstellen.

Satz 1.2.1 (Trennung der Veränderlichen)**.** *Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung der Form*

$$u'(t) = f(t)g(u(t)).$$

Dann haben wir nach Umstellen

$$\tfrac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t)$$

und können integrieren:

$$\int_{t_0}^t \tfrac{u'(s)}{g(u(s))}\mathrm{d}s = \int_{t_0}^t f(s)\mathrm{d}s.$$

Mit Substution können wir anschließend über

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \tfrac{1}{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{t_0}^t f(s)\mathrm{d}s$$

die Lösung der Differentialgleichung in Abhängigkeit von $u(t_0)$ bestimmen.

1.3 Charakteristikenverfahren für quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten das (zweidimensionale) Problem

$$\begin{cases} u_t + a(x,t,u)u_x = g(x,t,u) & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Dieses "Cauchy-Problem" ist auf dem gesamten Raum definiert (t ist die Zeit-, x die Raumkoordinate). Wir betrachten eine Kurve ("*Charakteristik*") $x_c = x_c(t)$ und setzen $U(t) = u(x_c(t), t)$. Dies liefert

$$U'(t) = u_x(x_c(t), t)x_c'(t) + u_t(x_c(t), t).$$

Mit der Wahl $x_c'(t) = a(x_c(t), t, U(t))$ haben wir mit $U'(t) = g(x_c(t), t, U(t))$ ein System von zwei gekoppelten gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Beispiel 1.3.1. Betrachte

$$\begin{cases} u_t + 4u_x = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Wir haben also $x_c'(t) = 4$ und $U'(t) = 0$. Dies liefert $x_c(t) = 4t + x_c(0)$ und $U(t) = U(0)$. Nun suchen wir für beliebige x, t den Wert $u(x,t)$. Wir ermitteln zunächst eine Charakteristik, auf der x liegt:

$$x \overset{!}{=} x_c(t) = 4x + x_c(0) \Rightarrow x_c(0) = x - 4t.$$

Also haben wir

$$u(x,t) = u(x_c(t), t) = U(t) = U(0) = u(x_c(0), 0) = u_0(x_c(0)) = u_0(x - 4t).$$

1.4 Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Die allgemeine Form einer partiellen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Variablen lautet

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0.$$

Die Terme, die die zweiten Ableitungen beinhalten, also $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}$ werden auch als Hauptteil bezeichnet.

Als *Diskriminante* bezeichnen wir den Ausdruck $D := \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

Entsprechend der Diskriminante können wir die Differentialgleichung klassifizieren: Sie heißt $\begin{cases} \text{parabolisch,} & \text{wenn } D = 0, \\ \text{elliptisch,} & \text{wenn } D < 0 \text{ und} \\ \text{hyperbolisch,} & \text{wenn } D > 0. \end{cases}$

Beispiel 1.4.1.

1. Beispiele für elliptische Differentialgleichungen sind die Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$, die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ und die Helmholtz-Gleichung $-\Delta u + fu = g$.
2. Ein Beispiel für eine parabolische Gleichung ist die Wärmeleitgleichung $u_t - u_{yy} = f$.
3. Ein Beispiel für eine hyperbolische Gleichung ist die Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = f$.

Beispiel 1.4.2. Eine Saitenschwingung lässt sich mit folgendem Problem modellieren:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Zur Lösung verwenden wir die Idee des *Separationsansatzes*. Dazu schreiben wir u als $u(x,t) = X(x)T(t)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$ und damit

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Nun ist eine Seite nur von x, die andere nur von t abhängig, was impliziert, dass sie beide konstant sein müssen, diese Konstante sei $-\lambda^2$. Wir lösen die Differentialgleichung $X''(x) = -\lambda^2 X(x)$ und erhalten $X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)$ und analog $T(t) = c\cos(\lambda t) + d\sin(\lambda t)$. Damit ist

$$u(x,t) = \Big(a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)\Big)\Big(c\cos(\lambda t) + d\sin(\lambda t)\Big)$$

für jede Wahl von a, b, c, d und λ eine Lösung der Differentialgleichung.

Diese Konstanten werden nur über die Anfangs- und Randbedingungen bestimmt.

Die Randbedingung $u(0,t) = 0$ liefert über $0 = a\Big(c\cos(\lambda t) + d\sin(\lambda t)\Big)$, dass $a = 0$ (oder $c = d = 0$). Die Randbedingung $u(L,t) = 0$ liefert mit $a = 0$ nun $b\sin(\lambda L)\Big(c\cos(\lambda t) + d\sin(\lambda t)\Big)$ und damit $\lambda = \frac{k\pi}{L}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Mit $C = bc$ und $D = bd$ löst also

$$u(x,t) = \sin\left(\tfrac{k\pi}{L}x\right)\left(C\cos\left(\tfrac{k\pi}{L}t\right) + D\sin\left(\tfrac{k\pi}{L}t\right)\right)$$

für beliebige $C, D \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ die Differentialgleichung.

Zur Erfüllung der Anfangswertbedingungen und Bestimmung von C und D kann die Fourieranalysis herangezogen werden.

2 Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen

2.1 Integral für stetige Funktionen einer reellen Variable mit Werten in einem Banach-Raum

Um im weiteren allgemeingültige Sätze formulieren zu können, benötigen wir die Definition eines Integrals einer Banachraum-wertigen Funktion. Hierzu sei im folgenden $(X, \|\cdot\|)$ ein (reeller) Banach-Raum und $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall.

Wir erinnern uns an die Definition der Stetigkeit:

Definition 2.1.1.

(i) Eine Funktion $u\colon [a,b] \to X$ heißt *stetig* in $t_0 \in [a,b]$, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass
$$\forall t \in [a,b] : |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|u(t) - u(t_0)\| < \varepsilon\,.$$

(ii) Ist u in jedem $t \in [a,b]$ stetig, dann ist u auch *gleichmäßig stetig* (da $[a,b]$ kompakt ist), d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass
$$\forall s,t \in [a,b] : |s - t| < \delta \Rightarrow \|u(s) - u(t)\| < \varepsilon\,.$$

Beispiel 2.1.2. Sei $X = \ell^1 = \{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|v\|_{\ell^1} < \infty\}$. Betrachte für $T > 0$ die Funktion $u\colon [0,T] \to X$ mit $u(t) = \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Funktion ist wohldefiniert, da $\|u(t)\| = \mathrm{e}^t < \infty$. Außerdem ist u in $[0,1]$ stetig: Sei $t \in [0,1]$. Es ist $t^{k-1} - s^{k-1} = (k-1)\xi^{k-2}(t-s)$ für ein ξ zwischen s und t. Also ist
$$\|u(t) - u(s)\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} - s^{k-1}}{(k-1)!} = (t-s) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi^{k-2}}{(k-2)!} = (t-s)\mathrm{e}^{\xi} \leq (t-s)\mathrm{e}^{T}\,.$$

Wir bezeichnen mit $C([a,b],X)$ die Menge aller stetiger Funktionen $u\colon [a,b] \to X$. Mit der Norm $\|u\| = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|$ ist $(C([a,b],X), \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Treppenfunktionen
$$u^{(n)}(t) = \begin{cases} u\left(t_k^{(n)}\right), & \text{falls } t \in \left[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}\right) \\ u\left(t_{n-1}^{(n)}\right), & \text{falls } t = b\,, \end{cases}$$
wobei $t_k^{(n)} = a + k\frac{(b-a)}{n}$ für $k = 0, \ldots, n-1$.

Lemma 2.1.3. *Die Treppenfunktionen $u^{(n)}$ konvergieren punktweise gegen u, d.h. für alle $t \in [a,b]$ gilt $\|u^{(n)}(t) - u(t)\| \to 0$.*

Lemma 2.1.4. *Es existiert ein $g \in X$ mit*
$$\int_a^b u^{(n)}(t)\mathrm{d}t := \sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right)\left(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}\right) \to g\,.$$

Wir schreiben dann
$$\int_a^b u(t)\mathrm{d}t := g\,.$$

Beweis. Sei $g^{(n)} = \int_a^b u^{(n)}(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right)$. Wir zeigen, dass $\left(g^{(n)}\right)$ eine Cauchy-Folge ist. Da X ein Banach-Raum ist, ist die Aussage damit bewiesen. Sei o.B.d.A. $m > n$, $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} g^{(m)} - g^{(n)} &= \frac{b-a}{m}\sum_{j=0}^{m-1} u\left(t_j^{(m)}\right) - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right) \\ &= \frac{b-a}{mn}\left(n\sum_{j=0}^{m-1} u\left(t_j^{(m)}\right) - m\sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{mn}\Bigg(\underbrace{u\left(t_0^{(m)}\right) + \cdots + u\left(t_0^{(m)}\right)}_{n\text{-mal}} + \underbrace{u\left(t_1^{(m)}\right) + \cdots + u\left(t_1^{(m)}\right)}_{n\text{-mal}} + \cdots \\ &\qquad - \Bigg(\underbrace{u\left(t_0^{(n)}\right) + \cdots + u\left(t_0^{(n)}\right)}_{m\text{-mal}} + \cdots\Bigg)\Bigg) \end{aligned}$$

Dies können wir so umsortieren, dass wir Summanden der Form $u\left(t_{[l/n]}^{(m)}\right) - u\left(t_{[l/m]}^{(n)}\right)$, $l = 0, \ldots, mn-1$, erhalten. Nun ist

$$\begin{aligned} t_{[l/n]}^{(m)} - t_{[l/m]}^{(n)} &= \frac{b-a}{m}\left[\frac{l}{n}\right] - \frac{b-a}{n}\left[\frac{l}{m}\right] = \frac{b-a}{mn}\left(n\left[\frac{l}{n}\right] - m\left[\frac{l}{m}\right]\right) \\ &\leq \frac{b-a}{mn}(l-(l-m)) = \frac{b-a}{n}\,. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen gleichmäßiger Stetigkeit von u ist nun für entsprechend gewähltes $\delta > 0$ für genügend großes n mit $\frac{b-a}{n} < \delta$ die Ungleichung $\|u\left(t_{[l/n]}^{(m)}\right) - u\left(t_{[l/m]}^{(n)}\right)\| < \varepsilon$ erfüllt. Hiermit folgt

$$\|g^{(m)} - g^{(n)}\| \leq \tfrac{b-a}{mn} mn\varepsilon = (b-a)\varepsilon\,.$$

□

Bemerkung 2.1.5.

- Aufgrund der Stetigkeit von u ist das Integral unabhängig von der gewählten Zerlegung.
- Es ist $\int_a^b u(t)\mathrm{d}t \in X$.
- Das Bochner-Integral bietet eine Verallgemeinerung auf unstetige Funktionen.

Beispiel 2.1.6. Sei $u\colon [0,T] \to \ell^1$ wie oben definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^T u^{(n)}(t)\mathrm{d}t &= \frac{T-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1, \tfrac{T}{n}k, \tfrac{T^2}{2n^2}k^2, \ldots\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{T}{n}, \sum_{k=0}^{n-1}\frac{T^2}{n^2}k, \sum_{k=0}^{n-1}\frac{T^3}{n^3}k^2, \ldots\right) \\ &= \left(T, \tfrac{T^2}{n^2}\tfrac{n(n-1)}{2}, \tfrac{T^3}{n^3}\tfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \ldots\right) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \left(T, \tfrac{T^2}{2}, \tfrac{T^3}{6}, \ldots\right) =: g\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir jedoch nur gezeigt, dass $\int_0^T u^{(n)}(t)\mathrm{d}t$ komponentenweise gegen g konvergiert. Noch zu überprüfen wäre die Konvergenz in ℓ^1 und auch ob $g \in \ell^1$.

Satz 2.1.7 (Eigenschaften des Integrals)**.**

(i) *Das Integral ist linear: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in C([a,b], X)$ gilt*

$$\int_a^b (\alpha u(t) + \beta v(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b v(t)\mathrm{d}t\,.$$

(ii) *Es gilt die Dreiecksungleichung:*

$$\left\| \int_a^b u(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\mathrm{d}t\,.$$

(iii) *Es gilt*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\mathrm{d}t \in \overline{\mathrm{co}}\{u(t) : t \in [a,b]\}\,.$$

(iv) *Ist $A\colon X \to Y$ (Y sei ein weiterer Banach-Raum) ein linearer, beschränkter Operator, dann ist*

$$A\int_a^b u(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (Au)(t)\mathrm{d}t\,.$$

Bemerkung 2.1.8.

- $\overline{\mathrm{co}}(M)$ ist die *abgeschlossene konvexe Hülle* einer Menge M: die kleinste abgeschlossene und konvexe Menge, die M enthält.

  Hierfür gilt der Satz von Mazur:

  Satz 2.1.9 (Satz von Mazur)*. Ist M kompakt, dann ist auch $\overline{\mathrm{co}}(M)$ kompakt.*

  Da $[a,b]$ kompakt und u stetig ist, folgt daraus also, dass $\overline{\mathrm{co}}(u([a,b]))$ kompakt ist.

- Ein Operator $A\colon X \to Y$ (X, Y seien Banach-Räume) heißt *beschränkt*, wenn er beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.

- Ist A zusätzlich linear, so ist der Operator A genau dann beschränkt, wenn er auch stetig ist. Beide Aussagen sind außerdem äquivalent zu folgender Bedingung: Es gibt ein $c > 0$, so dass

  $$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$$

  für alle $x \in X$.

Beweis.

(i) Klar.

(ii) Es gilt[1]

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b u(t)\mathrm{d}t\right\| &\leq \left\|\int_a^b u(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right)\right\| + \left\|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right)\right\| \\ &\leq \left\|\int_a^b u(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right)\right\| + \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left\|u\left(t_k^{(n)}\right)\right\| \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0 + \int_a^b \|u(t)\|\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

[1] Wegen $\big|\|u(t)\| - \|u(s)\|\big| \leq \|u(t) - u(s)\|$ ist $t \mapsto \|u(t)\|$ stetig.

(iii) Mit

$$\int_a^b u(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^b u^{(n)}(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(t_k^{(n)}\right)\tfrac{b-a}{n}$$

haben wir

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}u\left(t_k^{(n)}\right) \in \overline{\mathrm{co}}(u([a,b]))\,.$$

(iv) Für $u \in C([a,b],X)$ ist $Au \in C([a,b],Y)$, denn

$$\|A(u(t)) - A(u(s))\| = \|A(u(t)-u(s))\| \leq \mathrm{const}\cdot\|u(t)-u(s)\|\,.$$

Mit der Stetigkeit von A haben wir nun

$$\begin{aligned} A\int_a^b u(t)\mathrm{d}t &= A\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u\left(t_k^{(n)}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}A\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u\left(t_k^{(n)}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}Au\left(t_k^{(n)}\right) = \int_a^b A(u(t))\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

□

Satz 2.1.10. *Sei $u \in C([0,T],X)$. Dann gilt*

(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)\mathrm{d}s = u(t) \quad \forall t\in[0,T]$,

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\int_0^T \|u(t+h)-u(t)\|\mathrm{d}t = 0$. *(wobei u außerhalb von $[0,T]$ mit Null fortgesetzt wird)*

Beweis.

(i) Wir haben mit der Dreiecksungleichung

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}u(s)\mathrm{d}s - u(t)\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(u(s)-u(t))\mathrm{d}s\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|u(s)-u(t)\|\mathrm{d}s\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von u gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $s \in [0,T]$ mit $|s-t| < \delta$ gilt, dass $\|u(s)-u(t)\| < \varepsilon$. Für $|h| < \delta$ haben wir also $\frac{1}{h}\int_a^b \|u(s)-u(t)\|\mathrm{d}s < \varepsilon$.

(ii) Wieder gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|s-t| < \delta \Rightarrow \|u(s)-u(t)\| < \varepsilon$. Für $h < \delta$ (o.B.d.A. $h > 0$) haben wir nun

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(t+h)-u(t)\|\mathrm{d}t &= \int_0^{T-h}\|u(t+h)-u(t)\|\mathrm{d}t + \int_{T-h}^T \|u(t+h)-u(t)\|\mathrm{d}t\\ &\leq T\varepsilon + \int_{T-h}^T \|\underbrace{u(t+h)}_{=0} - u(t)\|\mathrm{d}t \leq T\varepsilon + h\|u\|\,. \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.11. Eine Funktion $u\colon [0,T] \to X$ heißt *differenzierbar* in $t \in [0,T]$, wenn ein $g \in X$ existiert, so dass

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - g \right\| = 0\,.$$

Ist u in jedem $t \in [0,T]$ differenzierbar (u heißt dann auch abkürzend *differenzierbar*) und ist $u'\colon t \mapsto u'(t)$ stetig, schreiben wir $u \in C^1([0,T],X)$

Satz 2.1.12 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $u\colon [0,T] \to X$ differenzierbar. Dann gilt für jedes Intervall $[a,b] \subseteq [0,T]$:*

$$\|u(b) - u(a)\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|u'(t)\|(b-a)\,.$$

Beweis. Siehe Zeidler: Nonlinear Functional Analysis (I). □

Satz 2.1.13 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $v \in C([0,T],X)$. Dann ist $t \mapsto u(t) := \int_0^t v(s)\mathrm{d}s$ stetig differenzierbar und $u' = v$.*

Beweis. Mit Satz 2.1.10 haben wir

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} v(s)\mathrm{d}s - \int_0^t v(s)\mathrm{d}s \right) - v(t) \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|v(s) - v(t)\|\mathrm{d}s \to 0\,.$$

□

2.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

Im folgenden betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

und werden Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung unter gewissen Voraussetzungen treffen.

Definition 2.2.1. Sei $f\colon [0,T] \times X \to X$. Eine Abbildung F mit

$$(Fv)(t) = f(t, v(t)) \tag{2.1}$$

für Funktionen $v\colon [0,T] \to X$ heißt von f erzeugter *Nemyzki-Operator*.

Satz 2.2.2.

(i) *Sei $f\colon [0,T] \times X \to X$ stetig. Dann bildet der zugehörige Nemyzki-Operator den Raum $C([0,T],X)$ in sich selbst ab, d.h.*

$$F\colon C([0,T],X) \to C([0,T],X)\,.$$

(ii) *Ist $f\colon [0,T] \times \overline{B(u_0,r)} \to X$ stetig*[2]*, dann ist*

$$F\colon C([0,T],\overline{B(u_0,r)}) \to C([0,T],X)\,.$$

[2] $\overline{B(u_0,r)} = \{v \in X : \|v - u_0\| \leq r\}$ bezeichnet die *abgeschlossene Kugel* vom Radius $r > 0$ um u_0.

Beweis. Übung. $\square$

Bemerkung 2.2.3.

- $f\colon [0,T] \times \overline{B(u_0,r)}$ heißt stetig, falls es für alle $t \in [0,T]$, $v \in \overline{B(u_0,r)}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $s \in [0,T]$ und $w \in \overline{B(u_0,r)}$ mit $|s-t| + \|v-w\| < \delta$ gilt, dass $\|f(t,v) - f(s,w)\| < \varepsilon$, d.h. wir verwenden auf $[0,T] \times \overline{B(u_0,r)}$ die Norm $(t,v) \mapsto |t| + \|v\|$.
- Im Endlichdimensionalen ist $\overline{B(u_0,r)}$ kompakt, daher ist auch $[0,T] \times \overline{B(u_0,r)}$ kompakt und f ist gleichmäßig stetig. Dann ist auch $f([0,T] \times \overline{B(u_0,r)})$ kompakt.
- Im Unendlichdimensionalen ist $\overline{B(u_0,r)}$ dagegen nicht kompakt und die obigen Aussagen müssen nicht gelten.

Satz 2.2.4 (Rieszscher Kompaktheitssatz)**.** *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Ausagen äquivalent:*

(i) *X ist endlichdimensional.*

(ii) *Die abgeschlossene Einheitskugel ist kompakt.*

(iii) *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Die Aussage (ii) ist außerdem äquivalent zur Kompaktheit jeder beliebigen abgeschlossenen Kugel. Im Unendlichdimensionalen ist also keine abgeschlossene Kugel kompakt.

Lemma 2.2.5. *Sei $f\colon [0,T]\times\overline{B(u_0,r)} \to X$ stetig und genüge einer* Lipschitz-Bedingung*, d.h. es gebe ein $L \geq 0$, so dass*

$$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L\|v-w\| \qquad \forall t \in [0,T],\ v,w, \in \overline{B(u_0,r)}.$$

Dann gibt es eine obere Schranke $M > 0$ für $\|f(t,v)\|$, d.h.

$$\|f(t,v)\| \leq M \qquad \forall t \in [0,T],\ v \in \overline{B(u_0,r)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|f(t,v)\| &\leq \|f(t,v) - f(t,u_0)\| + \|f(t,u_0)\| \leq L\|v - v_0\| + \max_{t\in[0,T]} \|f(t,u_0)\| \\ &\leq Lr + \max_{t\in[0,T]} \|f(t,u_0)\| =: M.\end{aligned}$$

$\square$

Wie zu Beginn des Kapitels angekündigt, werden wir nun eine erste Existenz- und Einzigkeitsaussage über das betrachtete Anfangwertproblem (2.1) formulieren.

Satz 2.2.6 (Satz von Picard-Lindelöf, lokale Version)**.** *Sei $f\colon [0,T]\times\overline{B(u_0,r)} \to X$ stetig und genüge einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante L. Sei $M > 0$ eine obere Schranke wie in Lemma 2.2.5. Dann besitzt das betrachtete Anfangswertproblem* (2.1) genau eine *Lösung u auf dem Intervall $I = [0,T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$ mit $a = \min\{\frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\}$ (d.h. $u \in C^1(I,X)$).*

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$(Tv)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\mathrm{d}s.$$

Eine Funktion $u \in C^1(I, X)$ ist offenbar genau dann Lösung des Anfangswertproblems, wenn $Tu = u$, d.h. wir suchen nach Fixpunkten von T. Hierzu betrachten wir die Menge $A := \{u \in C(I, X) : \|u(t) - u_0\| \leq r \quad \forall t \in I\} = C(I, \overline{B(u_0, r)})$. Zunächst stellen wir fest, dass $A \neq \emptyset$, da $u \equiv u_0$ in A liegt.

Weiterhin ist A eine abgeschlossene Teilmenge von $C(I, X)$: Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $v_n \to v \in C(I, X)$. Zu zeigen: $v \in A$. Für $t \in I$ haben wir

$$\|v(t) - u_0\| \leq \|v(t) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - u_0\| \to \|v_n(t) - u_0\| \leq r.$$

T ist außerdem eine Selbstabbildung, d.h. $T\colon A \to A$. Mit Satz 2.2.2 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist Tv, $v \in A$, stetig differenzierbar und insbesondere stetig. Für $t \in I$ haben wir weiterhin

$$\|(Tv)(t) - u_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, v(s))\|\mathrm{d}s \leq M|t_0 - t| \leq r.$$

Und schließlich ist T eine Kontraktion:

$$\begin{aligned}
\|Tv - Tw\| = \max_{t\in I}\|(Tv)(t) - (Tw)(t)\| &= \max_{t\in I} \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, v(s)) - f(s, w(s))\Big)\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \max_{t\in I} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\|\mathrm{d}s \\
&\leq \max_{t\in I} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} L\|v(s) - w(s)\|\mathrm{d}s \\
&\leq L|t - t_0|\|v - w\| \leq \tfrac{1}{2}\|v - w\|.
\end{aligned}$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es nun genau einen Fixpunkt von T in A, also genau eine Lösung des Anfangswertproblems auf I. □

Können wir die Konstanten L und M allerdings gleichmäßig wählen, erwarten wir globale Lösbarkeit.

Satz 2.2.7 (Satz von Picard-Lindelöf, globale Version)**.** *Sei $f\colon [0, T] \times X \to X$ stetig und genüge einer Lipschitz-Bedingung. Dann hat das betrachtete Anfangswertproblem (2.1) für beliebige $t_0 \in [0, T]$ und $u_0 \in X$ genau eine Lösung $u \in C^1([0, T], X)$ auf ganz $[0, T]$.*

Beweis. Sei T wie oben über $(Tv)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\mathrm{d}s$ definiert. Wieder ist ein Fixpunkt gesucht. Wir setzen $B = C([0, T], X)$, d.h. $T\colon B \to B$. Wir versehen B mit der Norm

$$\|u\|_B := \max_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\|u(t)\|\,.$$

Diese Norm $\|\cdot\|_B$ ist äquivalent zur Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ (da $\mathrm{e}^{-L|t-t_0|}$ nach oben und unten durch positive Konstanten beschränkt ist), also ist $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banach-Raum. Offenbar ist $B \neq \emptyset$ und abgeschlossen, außerdem ist T eine Selbstabbildung.

Es bleibt zu zeigen, dass T eine Kontraktion ist:

$$\begin{aligned}
\|Tv - Tw\|_B &= \max_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|} \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s,v(s)) - f(s,w(s)) \Big) \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq L \max_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|v(s) - w(s)\| \mathrm{d}s \\
&\leq L \max_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \mathrm{e}^{L|s-t_0|} \mathrm{e}^{-L|s-t_0|} \|v(s) - w(s)\| \mathrm{d}s \\
&\leq L \max_{t\in[0,T} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \mathrm{e}^{L|s-t_0|} \|v - w\|_B \mathrm{d}s \\
&= L\|v-w\|_B \max_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|} \left(\tfrac{1}{L} \mathrm{e}^{L|s-t_0|} \right) \Big|_{t_0}^{t} \\
&= \|v-w\|_B \max_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|} \left(\mathrm{e}^{L|t_0-t|} - 1 \right) \\
&= \|v-w\|_B \max_{t\in[0,T]} 1 - \mathrm{e}^{-L|t-t_0|} \leq \left(1 - \mathrm{e}^{-LT} \right) \|v-w\|_B
\end{aligned}$$

mit $1 - \mathrm{e}^{-LT} < 1$.

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert nun eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. □

Wir zeigen nun, dass auch aus lokaler Lipschitz-Bedingung globale Lösbarkeit folgen kann.

Satz 2.2.8 (Satz von Picard-Lindelöf, globale Lösbarkeit bei lokaler Lipschitz-Bedingung). *Sei $f\colon \mathbb{R}\times X \to X$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung, d.h. für alle $s \in \mathbb{R}$ und $v \in X$ gebe es $\varepsilon > 0$, $r > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|s-t| < \varepsilon$ und alle $w_1, w_2 \in \overline{B(v,r)}$ gilt, dass*

$$\|f(t,w_1) - f(t,w_2)\| \leq L\|w_1 - w_2\| \,.$$

Weiterhin gebe es ein $M > 0$, so dass $\|f(t,u(t))\| \leq M$ für jede Lösung u des Anfangswertproblems und alle $t \in \mathbb{R}$, für die das jeweilige $u(t)$ wohldefiniert ist.

Dann ist das Anfangswertproblem (2.1) auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar für beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in X$.

Beweis. Seien $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in X$ beliebig. Mit der lokalen Version von Picard-Lindelöf erhalten wir die Existenz einer eindeutigen Lösung u auf einem Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$. Sei nun I das größte offene Intervall, auf dem u existiert. Unser Ziel ist, dass $I = \mathbb{R}$. Angenommen also, $I \neq \mathbb{R}$. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass $I = (\alpha, \beta)$ mit $-\infty \leq \alpha < \beta < \infty$. Da für $t \in I$ gilt, dass $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\mathrm{d}s$, haben wir für $t_1, t_2 \in I$

$$\begin{aligned}
\|u(t_1) - u(t_2)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s,u(s))\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t_2} f(s,u(s))\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)} \|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s \leq M|t_1 - t_2| \,.
\end{aligned}$$

Sei nun $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $t_n \nearrow \beta$. Dann ist $(u(t_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge und es gibt ein $y \in X$ mit $u(t_n) \to y$. Definiere $u(\beta) = y$. Betrachte nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} v'(t) = f(t,v(t)) \\ v(\beta) = y = u(\beta) \,. \end{cases}$$

Wieder existiert eine lokale Lösung $v \in C([\beta - d, \beta + d], X)$. Aufgrund der Eindeutigkeit stimmen u und v auf $[\beta - d, \beta]$ überein. Daher existiert eine Lösung sogar bis $\beta + d$, was im Widerspruch zu $\sup I = \beta$ steht, d.h. es muss $\beta = \infty$ gelten.

Analog erhalten wir $\alpha = -\infty$. □

2.3 Lineare Systeme mit beschränkten Operatoren

Zu gegebenem $[0, T]$ betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = b(t)\,, \quad t \in [0, T] \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

für $t_0 \in [0, T]$, $u_0 \in X$. Hierbei ist $\{A(t)\}_{t \in [0,T]} \subset L(X)$ eine Familie linearer, beschränkter Operatoren $A(t)\colon X \to X$, wobei $A \in C([0, T], L(X))$ stetig ist. Weiterhin ist $b \in C([0, T], X)$.

Bemerkung 2.3.1. $L(X, Y)$ ist der Raum der beschränkten, linearen Operatoren von X nach Y, $L(X) := L(X, X)$. Mit der Operatornorm

$$\|A\| := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ist $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum (falls Y ein Banach-Raum ist).

Für $\dim X < \infty$ ist jeder lineare Operator $T\colon X \to X$ beschränkt.

Wir betrachten nun $f\colon [0, T] \times X \to X$, $f(t, u) = b(t) - A(t)u$. Dann erfüllt f die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf:

- f ist stetig.
- f genügt einer Lipschitz-Bedingung:

$$\begin{aligned} \|f(t, u) - f(t, v)\| &= \|A(t)v - A(t)u\| = \|A(t)(u - v)\| \\ &\leq \|A(t)\|\|u - v\| \leq \sup_{t \in [0,T]} \|A(t)\|\|u - v\|\,. \end{aligned}$$

  Dabei ist $\sup_{t \in [0,T]} \|A(t)\| < \infty$, da $[0, T]$ kompakt ist und $t \mapsto \|A(t)\|$ stetig ist.

Wir erhalten also eindeutige Lösbarkeit auf ganz $[0, T]$.

Satz 2.3.2. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Dann ist das Anfangswertproblem* (2.2) *auf ganz I eindeutig lösbar für beliebige $t_0 \in I$, $u_0 \in X$.*

Beweis. Ist I abgeschlossen und beschränkt, folgt die Behauptung mit Picard-Lindelöf. Für beliebiges $I \subseteq \mathbb{R}$ können wir I schreiben als $I = \bigcup J$ für abgeschlossene, beschränkte Intervalle $J \subset I$ mit $t_0 \in J$. Auf jedem dieser Intervalle J existiert also eine eindeutige Lösung $u_J \in C(J, X)$. Wir definieren $u(t) = u_J(t)$, falls $t \in J$. Dann ist $u\colon I \to X$ wohldefiniert: Seien $J, J' \subset I$ beschränkte, abgeschlossene Intervalle mit $t_0 \in J, J'$ und u_J, $u_{J'}$ die jeweiligen eindeutigen Lösungen. Dann folgt $u_J = u_{J'} = u_{J \cap J'}$ auf $J \cap J'$ und damit insbesondere $u_J(t) = u_{J'}(t)$ für $t \in J \cap J'$. □

Im Fall $X = \mathbb{R}$ erinnern wir uns an die Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

durch die Formel von Duhamel:

$$u(t) = u_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) b(s)\mathrm{d}s\,.$$

Nun setzen wir $U(t,s) := \exp\left(-\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$. Das so definierte $U\colon [0,T]\times[0,T] \to L(\mathbb{R})$ besitzt folgende Eigenschaften:

- U ist stetig.
- $U(t,t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
- $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$.
- $u\colon t \to U(t,s)u_0$ ist die eindeutige Lösung des oben genannten Anfangswertproblems (2.3) mit $b(t) = 0$ und $u(s) = u_0$.
- $U(t,s)^{-1} = U(s,t)$
- Ist $a(t) \equiv a$, dann ist $U(t,s) = \mathrm{e}^{-a(t-s)} = S(t-s)$ mit $S(r) = \mathrm{e}^{-ra}$.

Definition 2.3.3. Sei $A \in C(\mathbb{R}, L(X))$. Dann besitzt nach Satz 2.3.2 das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(s) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$ für beliebige $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in X$. Die Abbildung $(t,s) \mapsto U(t,s) \in L(X)$, $u(t) =: U(t,s)u_0$ heißt *Propagator* (auch Evolutionsoperator, Lösungsoperator, Übergangsoperator,...).

Bemerkung 2.3.4.

- Im allgemeinen gibt es keine explizite Darstellung für $U(t,s)$. Kommutieren jedoch alle $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ miteinander (d.h. $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$), dann ist

$$U(t,s) = \exp\left(-\int_s^t A(\tau)\mathrm{d}\tau\right),$$

wobei wir für $B \in L(X)$ die Exponentialfunktion als $\mathrm{e}^B := \sum_{k=0}^\infty \frac{B^k}{k!}$ definieren. Dies ist wohldefiniert, da die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden: Sei $m > n$. Dann ist

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{B^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right\| \le \sum_{k=n+1}^m \frac{\|B^k\|}{k!} \le \sum_{k=n+1}^m \frac{\|B\|^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Da X ein Banach-Raum ist, ist es auch $L(X)$, also konvergiert $\sum_{k=0}^\infty \frac{B^k}{k!}$ in $L(X)$.

- Für $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in X$ löst $u(t) := \exp\left(-\int_s^t A(\tau)\mathrm{d}\tau\right) u_0$ das Anfangswertproblem (2.4). Aufgrund der Konstruktion des Integrals und der Exponentialfunktion als Grenzwert endlicher Summen haben wir mit entsprechender Kommutativität

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp\left(-\int_s^t A(\tau)\mathrm{d}\tau\right) u_0 &= \exp\left(-\int_s^t A(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(-A(t))u_0 \\ &= -A(t)\exp\left(-\int_s^t A(\tau)\mathrm{d}\tau\right) u_0\,.\end{aligned}$$

  Damit gilt $u'(t) = -A(t)u(t)$ und ebenso $u(s) = \mathrm{id}\, u_0 = u_0$.

- Ist $A(t)$ konstant, d.h. $A(t) \equiv A$, sprechen wir von einem *autonomen System*. In diesem Fall kommutieren insbesondere alle $A(t)$ miteinander, wir haben $U(t,s) = \exp\left(-\int_s^t A\mathrm{d}\tau\right) = \mathrm{e}^{-(t-s)A}$.

  Setzen wir $S(r) := \mathrm{e}^{-rA}$ (d.h. $U(t,s) = S(t-s)$), bildet $\{S(r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ eine einparametrige abelsche (d.h. kommutative) Gruppe: Für $t, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ gilt

  - $S(t_1)(S(t_2)S(t_3)) = (S(t_1)S(t_2))S(t_3)$,
  - $S(0) = \mathrm{id} \in L(X)$,
  - $S(t)^{-1} = S(-t)$,
  - $S(t_1)S(t_2) = S(t_1+t_2) = S(t_2)S(t_1)$.

  Ist S dagegen nur auf $[0,\infty)$ gegeben, bildet $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ nur eine Halbgruppe, da die Invertierbarkeit verloren geht.

- Propagatoren (bzw. zweiparametrige Familien) beschreiben das Lösungsverhalten von nicht autonomen (also von der Zeit nicht unabhängigen) und reversiblen Systemen.

  Einparametrige Gruppen beschreiben autonome (von der Zeit unabhängige) und reversible Systeme.

  Halbgruppen beschreiben Systeme, die zwar homogen in der Zeit, aber nicht reversibel sind.

Satz 2.3.5 (Eigenschaften des Propagators)**.** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Es ist $U(t,s) \in L(X)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und $(t,s) \mapsto U(t,s)$ ist stetig, d.h. $U \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, L(X))$.*

(ii) *Es ist $U(t,t) = \mathrm{id} \in L(X)$ und $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$.*

(iii) *Es gilt $U(t,s)^{-1} = U(s,t)$.*

(iv) *Die Abbildung $U\colon (s,t) \mapsto U(t,s)$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertwertproblems*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}U(t,s) + A(t)U(t,s) = 0 \\ U(s,s) = \mathrm{id} \in L(x) \end{cases}$$

in $L(X)$.

(v) *Ist $A(t) \equiv A$, dann ist $U(t,s) = U(t-s,0) = S(t-s)$ mit $S(r) = \mathrm{e}^{-rA}$.*

(vi) *Es gelten die Gleichungen* $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = -A(t)U(t,s)$ *und* $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = U(t,s)A(t)$.

(vii) *Es gilt die Abschätzung* $\|U(t,s)\|_{L(X)} \le \exp\left(\int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} \|A(\tau)\| \mathrm{d}\tau\right)$ *für alle* $t, s \in \mathbb{R}$.

Beweis.

(i) Zur Linearität: Für $u_0, v_0 \in X$ seien $u(t)$ und $v(t)$ die eindeutig bestimmten Lösungen des jeweiligen Problems (2.4) (für festes $s \in \mathbb{R}$), d.h. $u(t) = U(t,s)u_0$ und $v(t) = U(t,s)v_0$. Setzen wir $w := \alpha u + \beta v$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann löst auch w die Differentialgleichung mit $w' + Aw = 0$ und $w(s) = \alpha u(s) + \beta v(s) = \alpha u_0 + \beta v_0$, d.h. $U(t,s)(\alpha u_0 + \beta v_0) = w(t) = \alpha u(t) + \beta v(t) = \alpha U(t,s)u_0 + \beta U(t,s)v_0$.

Zur Beschränktheit: Seien $t, s \in \mathbb{R}$ und u die Lösung von (2.4), es gelte also $u(t) = U(t,s)u_0$. Es gilt $u(t) = u_0 - \int_s^t A(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$, also $\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int_s^t \|A(\tau)\|\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau$ (o.B.d.A. $t \ge s$). Das Lemma von Gronwall (Satz 3.1.1) liefert nun die Abschätzung $\|u(t)\| \le \|u_0\| \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right)$. Damit gilt

$$\|U(t,s)\| = \sup_{0 \ne u_0 \in X} \frac{\|U(t,s)u_0\|}{\|u_0\|} \le \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right) < \infty\,.$$

Also ist $U(t,s) \in L(X)$.

Es bleibt die Stetigkeit von $(t,s) \mapsto U(t,s)$ zu zeigen. Seien hierzu $s, t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann haben wir für beliebige $s', t' \in \mathbb{R}$ (o.B.d.A. $t' > t$)

$$\|U(t,s) - U(t',s')\| \le \|U(t,s) - U(t,s')\| + \|U(t,s') - U(t',s')\|\,.$$

Nun haben wir für den zweiten Summanden

$$\|U(t,s') - U(t',s')\| = \sup_{\|u_0\|=1} \|U(t,s')u_0 - U(t',s')u_0\| = \sup_{\|u_0\|=1} \|u(t) - u(t')\| \to 0\,,$$

wegen gleichmäßiger Stetigkeit von $u = u(t) = U(t,s')u_0$.

Es bleibt der erste Summand zu untersuchen:. Hierzu betrachten wir

$$\|U(t,s')u_0 - U(t',s')u_0\| = \|u(t) - u(t')\|\,,$$

wobei $u(t) = U(t,s')u_0$. Es ist

$$u(t) - u(t') = \int_t^{t'} u'(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_t^{t'} -A(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

also

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t')\| &\le \int_t^{t'} \|A(\tau)\|\|u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\le \int_t^{t'} \|A(\tau)\|\|u(\tau) - u(t)\|\mathrm{d}\tau + \int_t^{t'} \|A(\tau)\|\|u(t)\|\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

Somit ist nach dem Lemma von Gronwall (später)

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t')\| &\le \int_t^{t'} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau \|u(t)\| \exp\left(\int_t^{t'} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right) \\ &\le \int_t^{t'} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau \exp\left(\int_t^{t'} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right) \exp\left(\int_{s'}^{t} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right) \|u_0\|\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\|(U(t,s') - U(t',s'))u_0\| \leq \int_t^{t'} \|A(\tau)\mathrm{d}\tau \exp\left(\int_{\min(s',t')}^{\max(s',t')} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right) \|u_0\| \,.$$

Somit gilt auch

$$\|U(t,s') - U(t',s')\| \leq \int_t^{t'} \|A(\tau)\mathrm{d}\tau \exp\left(\int_{\min(s',t')}^{\max(s',t')} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right) \to 0 \ (s',t') \to (s,t)\,.$$

(ii) Sei $s \in \mathbb{R}$ und $u(t) = U(t,s)u_0$, $u_0 \in X$. Dann ist $u_0 = u(s) = U(s,s)u_0$, also ist $U(s,s) = \mathrm{id} \in L(X)$.

Sei nun $u(t) = U(t,s)u_0$ und v eine Lösung von

$$\begin{cases} v' + Av = 0 \\ v(r) = u(r). \end{cases}$$

Aus der Eindeutigkeit folgt $v = u$. Also

$$U(t,s)u_0 = u(t) = v(t) = U(t,r)u(r) = U(t,r)U(r,s)u_0\,.$$

(iii) Folgt aus (ii).

(iv) Folgt aus (ii) und (vi).

(v) Wurde bereits gezeigt.

(vi) Sei wieder $u(t) = U(t,s)u_0$. Es ist zu zeigen:

$$\left\|\frac{U(t+\Delta t,s) - U(t,s)}{\Delta t} + A(t)U(t,s)\right\|_{L(X)} \xrightarrow{\Delta t \to 0} 0\,.$$

Betrachte

$$\left\|\frac{U(t+\Delta t,s) - U(t,s)}{\Delta t}u_0 + A(t)U(t,s)u_0\right\| = \left\|\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + A(t)u(t)\right\|\,.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + A(t)u(t) &= -\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} A(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau + A(t)u(t) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} (A(t)u(t) - A(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_t^{t+\Delta t} A(\tau)\left(\frac{u(\tau)-u(t)}{\Delta t} + A(t)u(t)\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} (A(t) - A(\tau))u(t)\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} A(\tau)\mathrm{d}\tau A(t)u(t)\,.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}+A(t)u(t)\right\| \leq \int_t^{t+\Delta t} &\|A(\tau)\| \left\|\frac{u(\tau)-u(t)}{\Delta t}+A(t)u(t)\right\| \mathrm{d}\tau \\
&+ \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \|A(t)-A(\tau)\|\|u(t)\|\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} \|A(\tau)\mathrm{d}\tau\|A(t)\|\|u(t)\|.
\end{aligned}
$$

Das Lemma von Gronwall liefert

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}+A(t)u(t)\right\| \leq &\left(\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \|A(t)-A(\tau)\|\|u(t)\|\mathrm{d}\tau\right. \\
&+ \left.\int_t^{t+\Delta t} \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\|A(t)\|\|u(t)\|\right) \exp\left(\int_t^{t+\Delta t}\|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt

$$
\|u(t)\| \leq \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right)\|u_0\|.
$$

Insgesamt haben wir

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{U(t+\Delta t,s)-U(t,s)}{\Delta t}u_0+A(t)U(t,s)u_0\right\| \leq &\left(\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\|A(t)-A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right. \\
+ \left.\int_t^{t+\Delta t}\|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right) &\exp\left(\int_t^{t+\Delta t}\|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right)\exp\left(\int_s^t\|A(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$
\left\|\frac{U(t+\Delta t,s)-U(t,s)}{\Delta t}+A(t)U(t,s)\right\| \to 0,
$$

da für jedes u_0 die beiden Exponentialterme beschränkt bleiben, während die Integrale gegen Null konvergieren. Also ist $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=-A(t)U(t,s)$.

Schließlich haben wir

$$
\begin{aligned}
0 = \tfrac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{id} &= \tfrac{\partial}{\partial s}U(s,s) = \tfrac{\partial}{\partial s}(U(s,t)U(t,s)) \\
&= \left(\tfrac{\partial}{\partial s}U(s,t)\right)U(t,s) + U(s,t)\left(\tfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)\right).
\end{aligned}
$$

Mit $\frac{\partial}{\partial s}U(s,t)=-A(s)U(s,t)$ folgt $A(s)U(s,t)U(t,s)=U(s,t)\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)$, also

$$
\tfrac{\partial}{\partial s}U(t,s) = U(t,s)A(s).
$$

(vii) Wurde bereits in (i) gezeigt.

□

Wir betrachten nun das inhomogene Problem.

Satz 2.3.6 (Formel von Duhamel)**.** *Sei $A \in C(I, L(X))$, $b \in C(I, X)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $u_0 \in X$. Betrachte das inhomogene Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \, . \end{cases} \tag{2.5}$$

Dann hat die eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(I, X)$ hat die Darstellung

$$u(t) = U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, s)b(s)\mathrm{d}s \, . \tag{2.6}$$

Ist insbesondere $A(t) \equiv A$, so gilt

$$u(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)A}b(s)\mathrm{d}s \, .$$

Beweis. Aufgrund der Eindeutigkeit genügt es zu zeigen, dass u aus (2.6) das Anfangwertproblem (2.5) löst:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)u_0 + U(t, t)b(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}U(t, s)b(s)\mathrm{d}s \\ &= -A(t)U(t, t_0)u_0 + b(t) - \int_{t_0}^{t} A(t)U(t, s)b(s)\mathrm{d}s \\ &= -A(t)U(t, t_0)u_0 + b(t) - A(t)\int_{t_0}^{t} U(t, s)b(s)\mathrm{d}s \\ &= b(t) - A(t)\Big(U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, s)b(s)\mathrm{d}s\Big) = b(t) - A(t)u(t) \, . \end{aligned}$$

□

Wir betreiben nun etwas Regularitätstheorie für den autonomen Fall $A(t) \equiv A$.

Satz 2.3.7. *Sei $u \in C^1(I, X)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \, . \end{cases}$$

Aus $b \in C^m(I, X)$ folgt dann $u \in C^{m+1}(I, X)$. Insbesondere ist $u \in C^\infty(I, X)$, falls $b \in C^\infty(I, X)$.

Beweis. Für $u \in C^1(I, X)$ ist auch $Au \in C^1(I, X)$:

$$(Au)'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(Au)(t + \Delta t) - (Au)(t)}{\Delta t} = A\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}\right) = Au'(t) \, .$$

Ist $u \in C^m(I, X)$, so auch $Au \in C^m(I, X)$. Aus

$$u'(t) = b(t) - Au(t)$$

folgt nun also wegen der stetigen Differenzierbarkeit der rechten Seite

$$u''(t) = b'(t) - Au'(t)$$

usw. □

Bemerkung 2.3.8. Ist $A(t) \neq \text{const}$, so erhalten wir formal

$$u''(t) = b'(t) - (A(t)u(t))' = b'(t) - A'(t)u(t) - A(t)u'(t)$$

mit der Forderung, dass A stetig differenzierbar ist.

Nun wenden wir uns dem endlichdimensionalen Problem zu, also $X = \mathbb{R}^d$.

Satz 2.3.9 (Struktur). *Sei $X = \mathbb{R}^d$, $A \in C(I, \mathbb{R}^{d\times d})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^d)$.*

(i) *Die Lösungsmenge V des homogenen Problems,*

$$V := \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^d) : u'(t) + A(t)u(t) = 0\},$$

bildet einen d-dimensionalen Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^d)$.

(ii) *Die Lösungsmenge*

$$V_p := \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^d) : u'(t) + A(t)u(t) = b(t)\}$$

bildet einen zu V affinen Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^d)$, d.h. $V_p = V + u_p$ für eine beliebige partikuläre Lösung u_p.

(iii) *Seien $v_1, \dots, v_m \in V$ beliebig für $m \leq d$. Dann sind folgende Assagen äquivalent:*

(a) Die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ sind linear unabhängig in $C(I, \mathbb{R}^d)$.

(b) Für alle $t \in I$ sind $v_1(t), \dots, v_m(t)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^d$.

(c) Für ein $\bar{t} \in I$ sind $v_1(\bar{t}), \dots, v_m(\bar{t})$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Die Unterraumeigenschaft von V und (ii) folgen direkt aus dem Superpositionsprinzip.
Wir betrachten $S\colon \mathbb{R}^d \to V,\ u_0 \mapsto u$, wobei u die eindeutig bestimmte Lösung von

$$\begin{cases} u' + Au = 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

für beliebiges, aber festes $t_0 \in I$ ist. S ist linear, injektiv ($u_0 \neq v_0 \Rightarrow Su_0 \neq Sv_0$) und surjektiv ($u \in V$: $Su_0 = u$ für $u_0 := u(t_0)$). Also ist S ein Isomorphismus und es ist $\dim V = \dim \mathbb{R}^d = d$.

Zu (iii): Wird S wie oben gewählt, so bewahrt S die lineare Unabhängigkeit, d.h. (iiia) ist äquivalent zu (iiic) ($\bar{t} = t_0$). Da t_0 beliebig wählbar ist, folgt auch (iiib)$\Leftrightarrow$(iiic). □

Definition 2.3.10.

(1) Eine Basis $\{u_1, \dots, u_d\} \subset V$ von V heißt *Fundamentalsystem.*

(2) Es bilden $u_1, \dots, u_d \in V$ ein Fundamentalsystem. Sei $(u_1, \dots, u_d) =: u$. $u\colon I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ heißt *Fundamentalmatrix.*

(3) Für $u_1, \dots, u_d \in V$ heißt $w := \det(u_1, \dots, u_d)$ *Wronski-Determinante.*

Satz 2.3.11 (Wronski-Determinante)**.**

(i) *Es gilt entweder $w(t) = 0$ für alle $t \in I$ oder es gilt $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.*

(ii) *Die Menge* $\{u_1, \dots, u_d\}$ *ist ein Fundamentalsystem, falls* $w(t) \neq 0$ *für alle* $t \in I$.

(iii) *Die Menge* $\{u_1, \dots, u_d\}$ *ist ein Fundamentalsystem, falls* $w(t) \neq 0$ *für ein* $t \in I$.

(iv) *Es gilt die Formel von Liouville:*

$$w'(t) + \operatorname{tr}(A(t))w(t) = 0$$

für $t \in I$ *und damit*

$$w(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(\tau))\mathrm{d}\tau\right) w(t_0)\,.$$

Beweis. Die ersten drei Aussagen folgen direkt aus Satz 2.3.9.
Wir schreiben

$$W(t) = (u_1, \dots, u_d) = \begin{pmatrix} W_{11}(t) & \dots & W_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{d1}(t) & \dots & W_{dd}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{pmatrix}.$$

Da u_i die Gleichung $u_i' + Au_i = 0$ löst, haben wir

$$W'(t) = -AW(t) = -\begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1d}y_d \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{d1}y_1 + a_{d2}y_2 + \dots + a_{dd}y_d \end{pmatrix}.$$

Für die Determinanten gilt

$$w(t) = \det W(t) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) W_{1,\sigma(1)}(t) \cdots W_{d,\sigma(d)}(t)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} w'(t) &= (\det W(t))' \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) W'_{1,\sigma(1)}(t) W_{2,\sigma(2)} \cdots W_{d,\sigma(d)}(t) + \dots + \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) W_{1,\sigma(1)}(t) \cdots W'_{d,\sigma(d)}(t) \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit $y_i' = -a_{i1}y_1 - \dots - a_{id}y_d$ und der Tatsache, dass die Determinante verschwindet, falls linear abhängige Zeilen auftauchen, folgt

$$w' = \det \begin{pmatrix} -a_{11}y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{d-1} \\ -a_{dd}y_d \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{d} (-a_{nn}) \det(W) = -\operatorname{tr}(A)w\,.$$

□

Satz 2.3.12 (Fundamentalmatrix und Propagator)**.** *Sei* U *eine Fundamentalmatrix. Dann gilt*

$$U(t,s) = U(t)U(s)\,.$$

Beweis. Die Spalten $u_1, \ldots, u_d$ von U lösen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' + Au = 0 \\ u(s) = u_j(s)\,, \end{cases}$$

$j = i, \ldots, d$. Somit gilt $u_j(t) = U(t,s)u_j(s)$, $j = 1, \ldots, d$, und damit $U(t) = U(t,s)U(s)$. □

2.4 Der Satz von Peano

Wir erinnern uns zunächst an den Satz von Picard-Lindelöf: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

besitzt genau eine Lösung $u \in C^1(I, \overline{B(u_0, r)})$, falls $f\colon [0,T] \times \overline{B(u_0, r)} \to X$ stetig ist und einer Lipschitz-Bedingung genügt, $I = [0,T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$ mit $a = \min\left\{\frac{1}{2L}, \frac{r}{M}\right\}$ und $\|f(t,v)\| \leq M$ für alle t, v.
Wir machen nun eine Aussage über die nicht notwendigerweise eindeutige Lösbarkeit des Problems.

Satz 2.4.1 (Satz von Peano)**.** *Es sei $X = \mathbb{R}^d$ mit der Norm $|\cdot|$. Sei $u_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ und es sei $f\colon [0,T] \times \overline{B(u_0, r)} \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem* (2.7) *mindestens eine Lösung $u \in C^1(I, \overline{B(u_0, r)})$ mit $I = [0,T] \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$ und $M = \max\limits_{\substack{t \in [0,T] \\ v \in \overline{B(u_0,r)}}} |f(t,v)|$.*

Bemerkung 2.4.2.

- Der Satz von Peano gilt in dieser Version nur für $\mathbb{R}^d$ bzw. für endlichdimensionales X.
- Die Existenz von M ist gesichert, da f stetig und $[0,T] \times \overline{B(u_0, r)}$ kompakt ist.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir jedoch noch einige weitere Aussagen.

Satz 2.4.3 (Satz von Arzelà-Ascoli)**.** *Sei $\{u_n\}$ eine Folge von auf $[0,T]$ gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen $u_n\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$. Dann existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Beweis. In der Übung. □

Bemerkung 2.4.4.

- Die Folge $\{u_n\} \subset C([0,T], \mathbb{R}^d)$ heißt *gleichmäßig beschränkt*, falls $\{u_n\}$ als Folge in $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ beschränkt ist, d.h. falls es ein $c > 0$ gibt mit $\|u_n\|_\infty \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Die Folge $\{u_n\}$ heißt *gleichgradig stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $s, t \in [0,T]$ mit $|s - t| < \delta$ gilt, dass $|u_n(s) - u_n(t)| < \varepsilon$.
- Dieser Satz gilt nur im $\mathbb{R}^d$.
- Wir haben hiermit ein Kompaktheitskriterium für Mengen stetiger Funktionen. Es gilt: Eine Familie stetiger Funktionen in $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichmäßig beschränkt und und gleichgradig stetig ist.

Satz 2.4.5 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^d$ in sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. (Übung, Naos/Tutschke „Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik“) □

Bemerkung 2.4.6.

- Für $d = 1$ ist dies genau der Zwischenwertsatz.
- Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt nur im Endlichdimensionalen.
- Die abgeschlossene Kugel kann durch eine beliebige nichtleere, abgeschlossene, beschränkte, konvexe Menge ersetzt werden.

Satz 2.4.7 (Fixpunktsatz von Schauder). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum, $A \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge von X und sei $T\colon A \to A$ eine kompakte Abbildung. Dann hat T mindestens einen Fixpunkt.*

Bemerkung 2.4.8.

- Die Menge A heißt konvex, wenn für $u, v \in A$, $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda u + (1 - \lambda)v$ in A liegt.
- Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $M \subseteq X$. Dann heißt $F\colon M \to Y$ *kompakt*, falls F stetig ist und beschränkte Teilmengen von X in relativ kompakte Teilmengen von Y überführt.

  Die zweite Eigenschaft besagt, dass man aus jeder beschränkten Folge in X eine Teilfolge auswählen kann, so dass deren Bilder konvergieren.
- Häufig wird Kompaktheit nur für lineare Operatoren definiert. In diesem Fall kann in der Definition auf die Stetigkeit verzichtet werden, da diese im linearen Fall aus der zweiten Eigenschaft folgt.

Satz 2.4.9 (Approximationssatz für kompakte Operatoren). *Es seien X, Y Banach-Räume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ beschränkt und $F\colon M \to Y$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Abbildung $F_n\colon M \to Y$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Es gilt die Abschätzun* $\max\limits_{v \in M} \|F_n v - Fv\| \leq \frac{1}{n}$.

(ii) *Der von der Menge $F_n(M)$ aufgespannte Unterraum ist endlichdimensional, d.h. es ist* $\dim \operatorname{span} F_n(M) < \infty$.

(iii) *Es gilt die Inklusion $F_n(M) \subset \operatorname{co} F(M)$.*

Beweis. Da M beschränkt ist und F kompakt, ist $F(M) \subset Y$ relativ kompakt. Somit gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein endliches $\frac{1}{n}$-Netz von $F(M)$: Es gibt $v_1, \ldots, v_m \in F(M)$, so dass $\left\{B\left(v_j, \frac{1}{n}\right), j = 1, \ldots, n\right\}$ eine endliche Überdeckung von $F(M)$ bildet, d.h. jedes Bildelement Fu, $u \in M$, liegt in einer Kugel $B(v_j, \frac{1}{n})$. Damit ist

$$\min_{j=1,\ldots,n} \|Fu - v_j\| \leq \frac{1}{n} \qquad \forall u \in M\,.$$

Wir setzen

$$a_j(u) := \max\{\tfrac{1}{n} - \|Fu - v_j\|, 0\} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

und

$$F_n u := \frac{\sum_{j=1}^m a_j(u) v_j}{\sum_{j=1}^m a_j(u)} .$$

F_n ist wohldefiniert, da $a_j(u) \geq 0$ und für mindestens ein j sogar $a_j(u) > 0$.
Die Abbildung $u \mapsto \|Fu - v_j\|$ ist stetig, denn

$$\Big| \|Fu - v_j\| - \|F\tilde{u} - v_j\| \Big| \leq \|Fu - F\tilde{u}\| \to 0$$

für $\|u - \tilde{u}\| \to 0$. Also ist auch a_j stetig:

$$\begin{aligned} |a_j(u) - a_j(\tilde{u})| &= \Big| \max\{\tfrac{1}{n} - \|Fu - v_j\|, 0\} - \max\{\tfrac{1}{n} - \|F\tilde{u} - v_j\|, 0\} \Big| \\ &= \begin{cases} 0 & \\ \frac{1}{n} - \|Fu - v_j\| & \text{falls } \frac{1}{n} - \|F\tilde{u} - v_j\| < 0 \\ \frac{1}{n} - \|F\tilde{u} - v_j\| & \text{falls } \frac{1}{n} - \|Fu - v_j\| < 0 \\ \Big| \|Fu - v_j\| - \|F\tilde{u} - v_j\| \Big| . & \end{cases} \end{aligned}$$

Fälle 1 und 4 stellen kein Problem dar. In Fall 2 folgt aus $\|Fu - v_j\| < \frac{1}{n}$ und $\|F\tilde{u} - v_j\| > \frac{1}{n}$ im Grenzfall $\|u - \tilde{u}\| \to 0$, dass $\frac{1}{n} - \|Fu - v_j\| = \frac{1}{n} - \|F\tilde{u} - v_j\| = 0$. Damit ist auch F_n stetig als Komposition stetiger Funktionen.

(i) Für alle $v \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \|F_n v - Fv\| &= \left\| \left(\sum_{j=1}^m a_j(v) \right)^{-1} \sum_{j=1}^m a_j(v) v_j - Fv \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{j=1}^m a_j(v) \right)^{-1} \sum_{j=1}^m a_j(v)(v_j - Fv) \right\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m a_j(v) \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^m a_j(v) \right) \|v_j - Fv\| < \frac{1}{n} . \end{aligned}$$

(ii) Sei $u \in M$. Dann ist

$$F_n u = \left(\sum_{j=1}^m a_j(u) \right)^{-1} \sum_{j=1}^m a_j(u) v_j \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\} ,$$

also $F_n(M) \subseteq \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ und damit $\dim \operatorname{span} F_n(M) \leq m < \infty$.

(iii) Sei $u \in M$. Dann ist

$$F_n u = \sum_{j=1}^m \frac{a_j(u)}{\sum_{j=1}^m a_j(u)} v_j \in \operatorname{co}(F(M)) .$$

□

Beweis des Schauderschen Fixpunktsatzes. O.B.d.A. sei $0 \in A$. Ansonsten gibt es ein $u_0 \in A$, für das wir $\tilde{T}(v) := T(u_0 + v) - u_0$ setzen. $\tilde{T}\colon A - u_0 \to A - u_0$ ist kompakt, $0 \in A - u_0$.

Mit dem Approximationssatz gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Abbildung $T_n\colon A \to X_n$, wobei X_n ein endlichdimensionaler Unterraum von X ist. Weiterhin ist

$$\|T_n u - Tu\| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $u \in A$. Wir setzen $A_n := A \cap X_n$. Dann ist A_n nichtleer ($0 \in A$), abgeschlossen und beschränkt (da A beschränkt ist), konvex (da A und X_n konvex sind). Außerdem ist A_n im endlichdimensionalen Vektorraum X_n enthalten und es ist

$$T_n(A) \subset \operatorname{co}(T(A)) \subset \operatorname{co}(A) = A\,,$$

also ist $T_n\colon A_n \to A_n$ eine Selbstabbildung. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz gibt es mindestens einen Fixpunkt $u_n \in A_n$, d.h. $T_n u_n = u_n$.

Es gilt $\{u_n\} \subset A$ und A ist beschränkt, also ist es auch $\{u_n\}$. Da T kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$, so dass $\{Tu_{n'}\}$ konvergiert. Wir schreiben $Tu_{n'} \to w$. Damit haben wir

$$\|u_{n'} - w\| = \|T_{n'}u_{n'} - w\| \leq \|T_{n'}u_{n'} - Tu_{n'}\| + \|Tu_{n'} - w\| \to 0,\ n \to \infty\,.$$

Also ist $Tw = w$, denn

$$Tw = T\left(\lim_{n'\to\infty} u_{n'}\right) = \lim_{n'\to\infty} Tu_{n'} = w\,.$$

□

Beweis des Satzes von Peano. Wie im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf formulieren wir ein äquivalentes Fixpunktproblem: u löst das Anfangswertproblem, wenn u Fixpunkt von T ist, wobei

$$(Tu)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau\,.$$

Wir betrachten $A := C(I, \overline{B(u_0, r)})$ und $T\colon A \to A$. Dann ist T wohldefiniert und eine Selbstabbildung. A ist nichtleer und abgeschlossen (wie im Beweis zu Picard-Lindelöf).

Zu zeigen bleiben Konvexität und Beschränktheit von A und Kompaktheit von T.

Zur Konvexität von A: Seien $v, w \in A$, $\lambda \in [0,1]$. Dann ist $\lambda v + (1-\lambda)w$ stetig, außerdem ist

$$\|\lambda v(t) + (1-\lambda)w(t) - u_0\| \leq \|\lambda(v(t) - u_0)\| + \|(1-\lambda)(w(t) - u_0)\| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r\,.$$

Zur Beschränktheit von A: Sei $v \in A$. Dann ist

$$\|v\| = \max_{t\in I}\|v(t)\| \leq \max_{t\in I}\|v(t) - u_0\| + \|u_0\| \leq r + \|u_0\|\,.$$

Wir zeigen nun die Kompaktheit von T. Zunächst ist die Stetigkeit nachzuweisen. Seien dazu $v, w \in A$. Es gilt

$$\|Tv - Tw\| = \max_{t\in I}\|(Tv)(t) - (Tw)(t)\| = \max_{t\in I}\left\|\int_{t_0}^{t}\Big(f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, w(\tau))\Big)\mathrm{d}\tau\right\|\,.$$

Da f stetig ist und auf der kompakten Menge $[0, T] \times \overline{B(u_0, r)}$ auch gleichmäßig stetig, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\|v - w\|_\infty = \max_{t \in I} \|v(t) - w(t)\| < \delta \Rightarrow \|f(t, v(t)) - f(t, w(t))\| < \varepsilon \, .$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|Tv - Tw\| &= \max_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, w(\tau)) \Big) \mathrm{d}\tau \right\| \\ &< \max_{t \in I} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} \varepsilon \mathrm{d}\tau = \max_{t \in I} \varepsilon |t - t_0| < \frac{\varepsilon r}{M} \, , \end{aligned}$$

d.h. T ist stetig.

Es bleibt zu zeigen, dass T beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen überführt oder – äquivalent dazu – dass das Bild $\{Tu_n\}$ jeder beschränkten Folge $\{u_n\}$ eine konvergente Teilfolge enthält. Sei also $\{u_n\}$ eine beliebige Folge in A (die Beschränktheit ist durch die von A gegeben). $\{Tu_n\}$ ist wegen der Beschränktheit von A gleichmäßig beschränkt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, $s, t \in I$ mit $|s - t| < \delta$, dass

$$\|(Tu_n)(t) - (Tu_n)(s)\| = \left\| \int_s^t f(\tau, u_n(\tau)) \mathrm{d}\tau \right\| \leq \int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} \|f(\tau, u_n(\tau))\| \mathrm{d}\tau \leq M|s - t| < \varepsilon \, .$$

Also ist $\{Tu_n\}$ gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es eine konvergente Teilfolge von $\{Tu_n\}$.

Damit ist T kompakt und wir können den Schauderschen Fixpunktsatz anwenden. Somit hat T mindestens einen Fixpunkt bzw. das Anfangswertproblem mindestens eine Lösung. □

Ist X jedoch unendlichdimensional, so gilt der Satz von Peano in dieser Form nicht. Als Idee zur Verallgemeinerung ersetzen wir die Stetigkeit der rechten Seite durch Kompaktheit. Hierzu verallgemeinern wir zunächst den Satz von Arzelà-Ascoli.

Satz 2.4.10 (Verallgemeinerter Satz von Arzelà-Ascoli)**.** *Sei X ein Banach-Raum und $M \subseteq C([0, T], X)$. M ist genau dann relativ kompakt in $C([0, T], X)$, wenn*

(i) *die Menge M gleichgradig stetig ist und*

(ii) *die Menge $M(t) = \{v(t) : v \in M\}$ für alle $t \in [0, T]$ relativ kompakt in X ist.*

Beweis. Dieudonné: „Grundzüge der modernen Analysis“, Band 1. □

Satz 2.4.11 (Verallgemeinerter Satz von Peano)**.** *Es sei X ein Banach-Raum, $u_0 \in X$, $t_0 \in [0, T]$ und $f : [0, T] \times \overline{B(u_0, r)} \to X$ kompakt. Dann gibt es ein $M > 0$, so dass $\|f(t, v)\| \leq M$ für alle $t \in [0, t]$ und $v \in \overline{B(u_0, r)}$, und das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

hat mindestens eine Lösung $u \in C^1(I, X)$ mit $I = [0, T] \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$.

Beweis. $[0,T] \times \overline{B(u_0,r)}$ ist beschränkt, also ist $f([0,T] \times \overline{B(u_0,r)})$ relativ kompakt und somit beschränkt, was die Existenz von M liefert.

Wie im endlichdimensionalen Fall betrachten wir $T\colon A \to A$,

$$(Tv)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, v(\tau))\mathrm{d}\tau\,,$$

für $A = C(I, \overline{B(u_0,r)})$. Wieder ist A nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex und $T\colon A \to A$ eine Selbstabbildung.

Wir zeigen die Stetigkeit von T: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta = \delta(v) > 0$, so dass für alle $w \in A$ mit $\|v - w\| = \max_{t\in I}\|v(t) - w(t)\| < \delta$ gilt, dass $\|f(t, v(t)) - f(t, w(t))\| < \varepsilon$ für alle $t \in I$. Denn: Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $w_n \in A$ gibt mit $\|v - w_n\| < \frac{1}{n}$, aber es gibt ein $t_n \in I$ mit $\|f(t_n, v(t_n)) - f(t_n, w_n(t_n))\| \geq \varepsilon$. Da $(t_n) \in I$, gibt es eine konvergente Teilfolge; wir können also o.B.d.A. annehmen, dass (t_n) konvergiert, d.h. $t_n \to t$, $n \to \infty$. Mit der Stetigkeit von v ist $v(t_n) \to v(t)$. Damit ist

$$\|w_n(t_n) - v(t)\| \leq \underbrace{\|w_n(t_n) - v(t_n)\|}_{<\frac{1}{n}} + \|v(t_n) - v(t)\| \to 0\,,$$

also $w(t_n) \to v(t)$ und damit erhalten wir den Widerspruch

$$0 < \varepsilon \leq \|f(t_n, v(t_n)) - f(t_n, w_n(t_n))\| \to 0\,.$$

Sei nun $w \in A$ beliebig mit $\|v - w\|_\infty < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|Tv - Tw\|_\infty &= \max_{t\in I}\left\|\int_{t_0}^{t}\Big(f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, w(\tau))\Big)\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leq \max_{t\in I}\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \varepsilon \mathrm{d}\tau = \varepsilon \max_{t\in I}|t - t_0| \leq \frac{\varepsilon r}{M}\,.\end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Kompaktheit von T. Sei dazu $\tilde{\mathcal{M}} \subseteq A$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{M} := T(\tilde{\mathcal{M}})$ relativ kompakt ist. $\mathcal{M}$ ist gleichgradig stetig (analog zum endlichdimensionalen Fall). Sei $t \in I$ beliebig. Zu zeigen: $\mathcal{M}(t) = \{v(t) : v \in \mathcal{M}\}$ ist relativ kompakt in X. Für $u \in \tilde{\mathcal{M}}$ haben wir

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau \in N(u, T)\,,$$

wobei

$$N(u,t) := \Big\{w \in X : w = u_0 + (t - t_0)\bar{w},\ \bar{w} \in \overline{\mathrm{co}\{f(\tau, u(\tau)), \tau \in I\}}\Big\}\,,$$

denn wir wissen bereits, dass für stetige Funktionen $g\colon [a,b] \to X$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(\tau)\mathrm{d}\tau \in \overline{\mathrm{co}\{g(\tau) : \tau \in [a,b]\}}\,.$$

Weiterhin ist

$$N(u,t) \subset N(t) := \Big\{w \in X : w = u_0 + (t - t_0)\bar{w},\ \bar{w} \in \overline{\mathrm{co}\{f(I \times \overline{B(u_0,r)})\}}\Big\}\,.$$

Da f kompakt ist und $I \times \overline{B(u_0, r)}$ beschränkt, ist $f(I \times \overline{B(u_0, r)})$ relativ kompakt und nach dem Satz von Mazur ist $\overline{\operatorname{co}\{f(I \times \overline{B(u_0, r)})\}}$ kompakt, also ist auch $N(t)$ kompakt. Damit ist $\mathcal{M}(t) \subset N(t)$ kompakt, insbesondere ach relativ kompakt.

Nach dem verallgemeinerten Satz von Arzelà-Ascoli ist T kompakt und die Behauptung folgt mit dem Schauderschen Fixpunktsatz. □

Lemma 2.4.12 (Struktur der Lösungsmenge). *Unter den Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Peano ist die Menge L aller Lösungen des Anfangswertproblems eine kompakte Teilmenge $L \subset C(I, \overline{B(u_0, r)})$.*

Beweis. Jede Lösung $u \in L$ ist Fixpunkt von T, d.h. $Tu = u$. Insbesondere ist $L \subset T(A)$. Da A beschränkt ist, ist $T(A)$ relativ kompakt, also ist L relativ kompakt. Es bleibt zu zeigen, dass L abgeschlossen ist. Sei dazu $(u_n) \in L$ mit $u_n \to u \in C(I, \overline{B(u_0, r)})$. Zu zeigen: $u \in L$. Aufgrund der Stetigkeit von T gilt $u_n = Tu_n \to Tu$, woraus $Tu = u$ folgt, also ist $u \in L$. □

2.5 Einzigkeitsaussagen

Satz 2.5.1 (Lokale Lipschitz-Bedingung). *Sei X ein Banach-Raum, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $D \subset X$ offen und $f\colon J \times D \to X$ genüge auf $J \times D$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung, d.h. für alle $(t, v) \in J \times D$ gibt es $a, r > 0$ und $L \geq 0$, so dass*

$$\|f(s, w_1) - f(s, w_2)\| \leq L\|w_1 - w_2\|$$

für $|t - s| < a$ und $w_1, w_2 \in B(v, r)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

höchstens eine Lösung für $(t_0, u_0) \in J \times D$.

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Lösungen u, v auf einem gemeinsamen Existenzintervall $I \ni t_0$. Wir betrachten o.B.d.A. nur $t \geq t_0$. Es sei $\bar{t}$ die Stelle $\bar{t} \geq t_0$, nach der sich die beiden Lösungen unterscheiden:

$$\bar{t} := \inf\{t > t_0 : u(t) \neq v(t)\}\,.$$

Da u und v stetig sind, ist $u(\bar{t}) = v(\bar{t}) =: \bar{u}$ und $u(\bar{t} + \delta) \neq v(t + \delta)$ für alle $\delta \in (0, \bar{\delta})$. Aufgrund der lokalen Lipschitz-Bedingung gibt es Konstanten $a, r > 0$, $L \geq 0$, so dass

$$\|f(t, w_1) - f(t, w_2)\| \leq L\|w_1 - w_2\|\,,$$

falls $|t - \bar{t}| < a$, $w_1, w_2 \in B(\bar{u}, r)$. Wir betrachten $t > \bar{t}$:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \left\| \bar{u} + \int_{\bar{t}}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s - \bar{u} - \int_{\bar{t}}^{t} f(s, v(s))\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \int_{\bar{t}}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|\mathrm{d}s \leq 0 + \int_{\bar{t}}^{t} L\|u(s) - v(s)\|\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$\|u(t) - v(t)\| \leq 0 \cdot \exp\left(\int_{\bar{t}}^{t} L\mathrm{d}s \right) = 0\,.$$

Also $u(t) = v(t)$ für $\bar{t} < t < t + a$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $\bar{t}$. □

Satz 2.5.2 (Einseitige Lipschitz-Bedingung)**.** *Sei* $(\mathcal{H}, (\cdot\,,\cdot), |\cdot|)$ *ein Hilbert-Raum und die Funktion* $f\colon [0,T]\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *genüge einer einseitigen Lipschitz-Bedingung, d.h. es gebe ein* $L\in\mathbb{R}$, *so dass für alle* $t\in[0,T]$

$$\Big(f(t,v)-f(t,w), v-w\Big) \le L|v-w|^2\,.$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

höchstens eine Lösung für $t\ge t_0$.

Zu beachten ist, dass an L keine Vorzeichenbedingung gestellt wird.
Zum Beweis benötigen wir noch ein Lemma.

Lemma 2.5.3. *Sei* $u\in C^1(I,\mathcal{H})$. *Dann ist*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u(t)|)^2 = (u'(t),u(t))\,.$$

Beweis. Seien $t, t+h\in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{h}(|u(t+h)|^2-|u(t)|^2) &= \tfrac{1}{h}\Big((u(t+h)-u(t),u(t+h))-(u(t),u(t)-u(t+h))\Big)\\ &= \tfrac{1}{h}\Big((u(t+h)-u(t),u(t+h))+(u(t+h)-u(t),u(t))\Big)\,.\end{aligned}$$

Einerseits ist

$$\begin{aligned}\Big|(u'(t),u(t))-\tfrac{1}{h}(u(t+h)-u(t),u(t))\Big| &= \Big|(u'(t)-\tfrac{1}{h}(u(t+h)-u(t)),u(t))\Big|\\ &\le \Big|u'(t)-\tfrac{1}{h}(u(t+h)-u(t))\Big||u(t)|\\ &\to 0,\ h\to 0\,,\end{aligned}$$

also ist

$$\frac{1}{h}(u(t+h)-u(t),u(t))\to(u'(t),u(t))\,.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\Big|(u'(t),u(t))-\tfrac{1}{h}(u(t+h)-u(t),u(t+h))\Big| &\le |(u'(t),u(t)-u(t+h))|\\ &\quad+\Big|(u'(t)-\tfrac{1}{h}(u(t+h)-u(t)),u(t+h))\Big|\\ &\le |u'(t)||u(t)-u(t+h)|+|u'(t)-\tfrac{1}{h}(u(t+h)-u(t))||u(t+h)|\\ &\to 0,\ h\to 0\,,\end{aligned}$$

also ist

$$\tfrac{1}{h}(u(t+h)-u(t),u(t+h))\to(u'(t),u(t))\,.$$

□

Beweis (einseitige Lipschitz-Bedingung). Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Lösungen u, v. Dann ist für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)-v(t)|^2 &= \big(u'(t)-v'(t), u(t)-v(t)\big) = \big(f(t,u(t))-f(t,v(t)), u(t)-v(t)\big)\\ &\leq L|u(t)-v(t)|^2\,.\end{aligned}$$

Wir integrieren von t_0 bis t:

$$\frac{1}{2}\Big(|u(t)-v(t)|^2 - \underbrace{|u(t_0)-v(t_0)|^2}_{u_0-u_0}\Big) \leq L\int_{t_0}^{t}|u(s)-v(s)|^2\mathrm{d}s$$

und damit

$$|u(t)-v(t)|^2 \leq 2L\int_{t_0}^{t}|u(s)-v(s)|^2\mathrm{d}s\,.$$

Das Lemma von Gronwall liefert wieder

$$|u(t)-v(t)|^2 \leq 0\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}2L\mathrm{d}s\right) = 0\,,$$

also $u(t) = v(t)$ für $t \geq t_0$. □

Satz 2.5.4 (Eindeutigkeitssatz von Nagumo)**.** *Sei X ein Banach-Raum, die Abbildung $f\colon[0,T]\times\overline{B(u_0,r)}\to X$ sei stetig und genüge einer* Nagumo-Bedingung*, d.h. es gelte*

$$|t-t_0|\|f(t,u)-f(t,v)\| \leq \|u-v\|$$

für $u,v\in\overline{B(u_0,r)}$ und $t\in[0,T]$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases}u'(t) = f(t,u(t))\\ u(t_0) = u_0\end{cases}$$

höchstens eine Lösung auf beliebigen Intervallen $t_0\in J\subseteq[0,T]$.

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Lösungen u, v auf einem Intervall J. Wegen der Stetigkeit gibt es $\inf J \leq t_* < t_0 < t^* \leq \sup J$ mit $u(t) = v(t)$ auf $[t_*, t^*]$ und $u(t)\neq v(t)$ zumindest auf kleinen Umgebungen rechts von t^* bzw. links von t_*.
Wir betrachten

$$m(t) := \begin{cases}\frac{\|u(t)-v(t)\|}{|t-t_0|} & \text{für } t\neq t_0\,,\ t\in J\\ 0 & \text{sonst}\,.\end{cases}$$

Wir zeigen, dass $m(t) = 0$ für alle $t\in J$. Für $t\neq t_0$ gilt

$$\begin{aligned}m(t) &= \frac{1}{|t-t_0|}\left\|\int_{t_0}^{t}(f(s,u(s))-f(s,v(s)))\,ds\right\|\\ &\leq \frac{1}{|t-t_0|}\int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)}\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\|\mathrm{d}s\\ &\to \|f(t_0,u(t_0))-f(t_0,v(t_0))\| = 0,\ t\to t_0\,.\end{aligned}$$

Also ist m überall stetig.

Sei $h > 0$ beliebig. Wegen $t^* \geq t_0$ gilt

$$\begin{aligned} m(t^* + h) &= \frac{1}{t^* + h - t_0} \left\| \int_{t^*}^{t^*+h} (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) \mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \frac{h}{t^* + h - t_0} \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \mathrm{d}s \leq \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} m(s) \mathrm{d}s \,. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall liefert wieder $m(t^* + h) = 0$ für $h > 0$. Analog ist $m(t_* - h) = 0$ für $h > 0$. □

Satz 2.5.5 (Eindeutigkeitssatz von Osgood)**.** *Sei X ein Banach-Raum, $t_0 \in [0, T]$, $u_0 \in X$, $f \colon [0, T] \times \overline{B(u_0, r)} \to X$ stetig. Das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

hat auf beliebigen Intervallen $J \ni t_0$ höchstens eine Lösung, falls f eine Osgood-Bedingung *erfüllt: Es gebe ein monoton wachsendes $w \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $w(0) = 0$, $w(z) > 0$ für $z > 0$, $w(x + y) \leq w(x) + w(y)$ und $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^{z_0} \frac{1}{w(z)} \mathrm{d}z = \infty$ für $z_0 > 0$.*

Beweis. Übung. □

2.6 Verlauf der Lösungen im Großen und maximal fortgesetzte Lösungen

Wir untersuchen, wie das maximale Existenzintervall von Lösungen von Anfangswertproblemen beschaffen ist und wie sich die Lösung insbesondere an den Rändern verhält.

Ist $f \colon [0, T] \times D \to X$, so muss das maximale Existenzintervall einer Lösung in $[0, T]$ enthalten sein. Haben wir bereits globale Lösbarkeit gezeigt (die Lösung existiert also auf $[0, T]$), so ist auch maximale Lösbarkeit auf $[0, T]$ gegeben.

Definition 2.6.1.

(1) Wie üblich sei für eine Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \,, \end{cases}$$

die auf ihrem Definitionsbereich J_u existiert, der Graph durch

$$\operatorname{graph}(u) = \{(t, u(t)) : t \in J_u\}$$

definiert.

(2) Eine auf einem Existenzintervall J_u gegebene Lösung u des Anfangswertproblems ist *Fortsetzung* einer auf einem Intervall J_v gegebenen Lösung v des Anfangswertproblems, falls $\operatorname{graph}(u) \supseteq \operatorname{graph}(v)$, d.h. $J_v \subseteq J_u$ und $v(t) = u(t)$ für $t \in J_v$.

(3) Eine auf einem Intervall J_u gegebene Lösung des Anfangswertproblems heißt maximal fortgesetzt, falls sie keine echte Fortsetzung besitzt, d.h. für jede Lösung v mit $\operatorname{graph}(v) \supseteq \operatorname{graph}(u)$ gilt $u = v$.

Bemerkung 2.6.2. Maximal fortgesetzte Lösungen müssen nicht eindeutig sein. Beispiel:

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{u(t)} \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

Dann ist für jedes $\alpha \geq 0$

$$u_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{(t-\alpha)^2}{4} & \text{für } t \geq \alpha \\ 0 & \text{für } t \leq \alpha \end{cases}, t \in J_{u_\alpha} = \mathbb{R}$$

eine maximal ortgesetzte Lösung.

Im folgenden benötigen wir das (umstrittene) Lemma von Zorn.

Sei M eine Menge und $\leq$ eine auf M durch $R_\leq \subseteq M \times M$ gegebene binäre Relation. Dann heißt $\leq$ Halbordnung, falls

(i) $x \leq x$ für alle $x \in M$ (d.h. $(x,x) \in R_\leq$).

(ii) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

(iii) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $y = x$.

$\leq$ ist eine Ordnung auf M (M ist durch $\leq$ geordnet), falls zusätzlich für alle $x, y \in M$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.

Ein Element $z \in M$ ist eine obere Schranke einer Teilmenge $M' \subseteq M$, falls $x \leq z$ für alle $x \in M'$.

Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ heißt *Kette*, falls M' (bezüglich der Halbordnung $\leq$ auf M) geordnet ist.

Satz 2.6.3 (Lemma von Zorn). *Ist M eine halbgeordnete Menge und hat jede Kette in M eine obere Schranke, so hat M ein maximales Element, d.h. es gibt ein $z \in M$, so dass für alle $x \in M$ aus $z \leq x$ folgt, dass $x = z$.*

Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom ...

Satz 2.6.4 (Auswahlaxiom). *Jede Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ nichtleerer paarweise disjunkter Mengen hat eine Auswahlfunktion , d.h. es gibt $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$*

... und zum Wohlordnungssatz.

Satz 2.6.5 (Wohlordnungssatz). *Jede Menge hat eine Wohlordnung, d.h. eine Ordnung, bezüglich der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat.*

Satz 2.6.6 (Fortsetzungslemma). *Sei X ein Banach-Raum, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $D \subseteq X$ offen, $t_0 \in J$, $u_0 \in D$ und $f\colon J \times D \to X$. Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) *Die Menge aller Lösungen des Anfangswertproblems ist bezüglich*

$$u \leq v :\Leftrightarrow \operatorname{graph}(u) \subseteq \operatorname{graph}(v)$$

halbgeordnet.

(ii) *Ist u eine auf einem Intervall J_u gegebene Lösung des Anfangswertproblems, so besitzt u mindestens eine maximale Fortsetzung $\tilde{u}$, d.h. $\tilde{u}$ ist eine Fortsetzung von u und $\tilde{u}$ ist maximal fortgesetzt.*

Beweis. (i) ist klar, denn die Inklusion von Mengen ist eine Halbordnung.
(ii). Sei M die Menge aller Fortsetzungen von u. Dann ist M halbgeordnet (M muss jedoch nicht geordnet sein). Sei $M' \subseteq M$ eine Kette, also geordnet, d.h. für $v, w \in M'$ gilt $v \leq w$ oder $w \leq v$, also $J_v \subseteq J_w$ oder $J_w \subseteq J_v$ und $v(t) = w(t)$ für $t \in J_v \cap J_w$. Wir setzen $J_{\tilde{v}} := \bigcup_{v \in M'} J_v$ und $\tilde{v}(t) := v(t)$, falls $t \in J_v$. $\tilde{v}$ ist wohldefiniert auf $J_{\tilde{v}} \subseteq J$, da die verschiedenen Lösungen gleich sind, wo sie existieren, und $\tilde{v}$ ist eine Fortsetzung von u, da jedes $v \in M'$ Fortsetzung von u ist. Somit ist $\tilde{v} \in M$ und per Konstruktion $v \leq \tilde{v}$ für alle $v \in M'$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein Maximales Element $\tilde{u} \in M$. $\tilde{u}$ ist dann eine Fortsetzung von u und per Definition von $\leq$ ist $\tilde{u}$ maximal fortgesetzt. □

Zu beachten ist jedoch, dass mit diesem Satz keine Aussage über die *Existenz* einer Lösung getroffen wurde.

Satz 2.6.7. *Sei $X = \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $J \subseteq \mathbb{R}$ offen, $t_0 \in J$, $u_0 \in D$ und $f\colon J \times D \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

mindestens eine maximal fortgesetzte Lösung.

Beweis. Nach dem Satz von Peano gibt es mindestens eine lokale Lösung. Nach dem Fortsetzungslemma hat eine solche mindestens eine maximal fortgesetzte Lösung. □

Satz 2.6.8 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei X ein Banach-Raum, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $D \subseteq X$ offen, $t_0 \in J$, $u_0 \in D$, $f\colon J \times D \to X$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Dann hat das Anfangswertproblem (2.8) genau eine maximal fortgesetzte Lösung auf einem maximalen Existenzintervall $J_{\max} \subseteq J$. $J_{\max}$ ist offen. Sei also $J_{\max} = (\alpha, \beta)$. Dabei gilt – sofern im Falle $\dim X = \infty$ die rechte Seite f auf beschränkten Teilmengen von D mit positivem Abstand zu ∂D beschränkt ist – $(\alpha, \beta) = J_{\max} = J$ oder*

$$\lim_{t \searrow \alpha} \min\left(\operatorname{dist}(u(t), \partial D), \|u(t)\|^{-1}\right) = 0$$

bzw. analog mit $t \nearrow \beta$.

Bemerkung 2.6.9.

- Es ist
$$\operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\| .$$
- Falls $\dim X < \infty$, so gilt für eine beschränkte Teilmenge $D' \subset D$, die positiven Abstand zu ∂D hat,
$$\operatorname{dist}(D', \partial D) > 0 .$$
- Im Fall $\dim X = \infty$ muss ansonsten $\|u(t)\|$ nicht konvergieren.
- Für den rechten Rand β können also folgende Fälle auftreten:

- $\beta = \sup J$ (globale Lösbarkeit),
- $\|u(t)\| \to \infty$ für $t \nearrow \beta$ oder
- $\operatorname{dist}(u(t), \partial D) \to 0$ für $t \nearrow \beta$.

Beweis. Nach Picard-Lindelöf gibt es eine lokale Lösung um t_0, nach dem Fortsetzungslemma gibt es mindestens eine maximale Fortsetzung u auf einem Intervall J_u. Nach dem Einzigkeitssatz (für lokale Lipschitz-Bedingung) ist diese eindeutig, also $J_u = J_{\max}$. Wäre $J_{\max}$ nicht offen, z.B. $J_{\max} = (\alpha, \beta]$, so könnten wir den lokalen Satz von Picard-Lindelöf z.B. auf die Anfangsbedingung $v(\beta) = u(\beta) \in D$ anwenden und so u auf einer kleinen Umgebung rechts von β fortsetzen, was ein Widerspruch wäre.

Zum Randverhalten betrachten wir den rechten Rand β. Angenommen, es sei $\beta < \sup J$ und $\min(\operatorname{dist}(u(t), \partial D), \|u(t)\|^{-1}) \not\to 0$, $t \nearrow \beta$, es gibt also $\varepsilon > 0$ und t_n mit $t_n \nearrow \beta$ und $\operatorname{dist}(u(t_n), \partial D) \geq 2\varepsilon$ und $\|u(t_n)\| \leq \frac{1}{2\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. sei $\varepsilon^2 < \frac{1}{2}$. Wir setzen

$$M := \max \left\{ |f(t, v)| : v \in \overline{B(u_0, \tfrac{1}{\varepsilon})},\ t_0 \leq t < \beta,\ \operatorname{dist}(v, \partial D) \geq \varepsilon \right\} .$$

M existiert und $M < \infty$ nach Voraussetzung. Sei $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$.
Nun gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s < \min(\delta, \beta - t_n)$ ist

$$\|u(t_n + s)\| < \frac{1}{\varepsilon} \text{ und } \operatorname{dist}(u(t_n + s), \partial D) > \varepsilon \,. \tag{2.9}$$

Angenommen, dies gälte nicht. Dann gäbe es ein $n^* \in \mathbb{N}$ und ein s^* mit $0 < s^* < \min(\delta, \beta - t_{n^*})$, so dass

$$\|u(t_{n^*} + s)\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \text{ und } \operatorname{dist}(u(t_{n^*} + s), \partial D) \geq \varepsilon \quad \text{für alle } s \in [0, s^*]$$

und

$$\|u(t_{n^*} + s^*)\| = \tfrac{1}{\varepsilon} \text{ oder } \operatorname{dist}(u(t_{n^*} + s^*), \partial D) = \varepsilon \,.$$

Für $0 \leq s \leq s^*$ gilt somit

$$\|f(t_{n^*} + s, u(t_{n^*} + s))\| \leq M$$

und demnach

$$\|f(t_{n^*} + s^*, u(t_{n^*} + s^*))\| = \left\| \int_{t_{n^*}}^{t_{n^*} + s^*} f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau \right\| \leq M s^* < M\delta < \varepsilon \,.$$

Damit ist

$$\|u(t_{n^*} + s^*)\| < \|u(t_{n^*})\| + \varepsilon \leq \frac{1}{2\varepsilon} + \varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon} \,,$$

da $\varepsilon^2 \leq \frac{1}{2}$, also $\varepsilon \leq \frac{1}{2\varepsilon}$. Ebenso ist

$$\operatorname{dist}(u(t_{n^*} + s^*), \partial D) \geq \operatorname{dist}(u(t_{n^*}), \partial D) - \|u(t_{n^*} + s^*) - u(t_{n^*})\| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \,.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Definition von s^*, also gilt (2.9).

Sei nun $\bar{n} \in \mathbb{N}$ beliebig mit $\beta - \frac{1}{\bar{n}} \leq \delta$. Für alle s mit $t_{\bar{n}} \leq s < \beta$ gilt also $\|u(s)\| < \frac{1}{\varepsilon}$ und $\operatorname{dist}(u(s), \partial D) > \varepsilon$. Für $s, t \in [t_{\bar{n}}, \beta)$ folgt

$$\|u(s) - u(t)\| \leq \int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} \|f(\tau, u(\tau))\| \mathrm{d}\tau \leq M|s - t| \,.$$

Ist (s_k) eine Folge mit $s_k \nearrow \beta$, so ist demnach

$$\|u(s_k) - u(s_{\tilde{k}})\| \leq M|s_k - s_{\tilde{k}}|$$

und $(u(s_k))$ ist eine Cauchy-Folge in X, also konvergent. Wir setzen $y := \lim_{k\to\infty} u(s_k)$. Ist k hinreichend groß, so ist $t_{\bar{n}} \leq s_k < \beta$ und damit $\operatorname{dist}(u(s_k), \partial D) > \varepsilon$, also $\operatorname{dist}(y, \partial D) \geq \varepsilon$, ebenso gilt $\|y\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, also $y \in D$.

Sei $(\tilde{s}_k)$ eine weitere Folge mit $\tilde{s}_k \nearrow \beta$. Wir setzen analog $\tilde{y} := \lim_{k\to\infty} u(\tilde{s}_k) \in D$. Es gilt

$$\|y - \tilde{y}\| = \lim_{k\to\infty} \|u(s_k) - u(\tilde{s}_k)\| \leq \lim_{k\to\infty} \int_{\min(s_k,\tilde{s}_k)}^{\max(s_k,\tilde{s}_k)} \|f(\tau, u(\tau))\| \mathrm{d}\tau \leq M \lim_{k\to\infty} |s_k - \tilde{s}_k| = 0\,.$$

Somit ist $u(t) \to y \in D$ für $t \nearrow \beta$. Setzen wir $u(\beta) = y$, so gilt

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau$$

auf $(\alpha, \beta]$, denn

$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{s} f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau \right\| \leq M|s - t|\,.$$

Mit $s_k \nearrow \beta$ ist $\left(\int_{t_0}^{s_k} f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau\right)$ eine Cauchy-Folge in X, also konvergent gegen

$$\int_{t_0}^{\beta} f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau\,.$$

Also ist u eine lösung auf $(\alpha, \beta]$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von β. □

2.7 Existenz und Einzigkeit von Lösungen im Sinne von Carathéodory

Wir betrachten nun unstetige rechte Seiten und Lösungen, die nur noch *fast überall* differenzierbar sind. Dazu setzen wir folgenden Begriffe aus der Maßtheorie voraus:

Lebesgue-Maß, Lebesgue-messbare Funktionen, Lebesgue-integrierbare Funktionen, Nullmengen, fast überall, Konvergenzsatz von Lebesgue (Satz über dominierte bzw. majorisierte Konvergenz), einfache Funktionen.

Definition 2.7.1. Eine Funktion $g\colon [0, T] \to \mathbb{R}^d$ heißt *absolut stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede endliche Menge von paarweise disjunkten Intervallen $(a_k, b_k) \subset [0, T]$, $k = 1, \ldots, n$, der Gesamtlänge $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \|g(b_k) - g(a_k)\| < \varepsilon\,.$$

Bemerkung 2.7.2. Aus Lipschitz-Stetigkeit folgt absolute Stetigkeit und aus absoluter Stetigkeit folgt gleichmäßige Stetigkeit; die Umkehrungen gelten im allgemeinen jedoch nicht.

Satz 2.7.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Ist $g\colon [0, T] \to \mathbb{R}^d$ absolut stetig, so existiert fast überall auf $[0, T]$ die klassische Ableitung g'- Dann ist g' Lebesgue-integrierbar und es gilt für beliebiges $t_0 \in [0, T]$*

$$g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} g'(s) \mathrm{d}s\,.$$

(ii) *Ist* $v\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *Lebesgue-integrierbar, so ist* $t \mapsto g(t) := \int_{t_0}^t v(s)\mathrm{d}s$ *absolut stetig und es gilt*

$$g' = v$$

fast überall.

Bemerkung 2.7.4. Alle auftretenden Integrale, Messbarkeitsbegriffe etc. sind wie üblich komponentenweise zu verstehen.

Die gesamte Theorie funktioniert mit dem Bochner-Integral auch im Unendlichdimensionalen (für reflexive Räume).

Beweis. Kolmogorov/Fomin: Analysis/Funktionalanalysis, Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. □

Definition 2.7.5. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $f\colon [0,T] \times M \to \mathbb{R}^d$.

(1) f erfüllt auf M eine *Carathéodory-Bedingung*, falls

  (a) die Abbildung $t \mapsto f_i(t,v)$ auf $[0,T]$ für alle $v \in M$, $i = 1,\dots,d$, Lebesgue-messbar ist und

  (b) die Abbildung $v \mapsto f_i(t,v)$ auf M für fast alle $t \in [0,T]$ stetig ist.

(2) f erfüllt eine *Majorantenbedingung* auf $[0,T] \times M$, falls es eine integrierbare Funktion $m\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$|f_i(t,v)| \le m(t)$$

für alle $(t,v) \in [0,T] \times M$, $i = 1,\dots,d$.

Lemma 2.7.6. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Genügt* f *einer Carathéodory-Bedingung, so bildet der zugehörige Nemyzki-Operator messbare Funktionen auf messbare Funktionen ab.*

(ii) *Genügt* f *zusätzlich einer Majorantenbedingung, so bildet der zugehörige Nemyzki-Operator integrierbare Funktionen auf integrierbare Funktionen ab.*

Beweis.

(i) Sei F der zugehörige Nemyzki-Operator, d.h.

$$(Fv)(t) := f(t,v(t))$$

für $t \in [0,T]$. Sei $v\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ messbar und sei (v^n) eine Folge einfacher Funktionen mit $v^n \to v$ f.ü. Es ist dann

$$(F_i v^n)(t) = f_i(t,v^n(t)) \to f_i(t,v(t)) = (Fv)_i(t) \text{ f.ü.}$$

Weiterhin gilt

$$f_i(t,v^n(t)) = f_i\left(t, \sum_{j=1}^{m_n} v_j^n(t)\,\mathbb{1}_{B_j^n}(t)\right) = \sum_{j=1}^{m_n} f(t,v_j^n(t))\,\mathbb{1}_{B_j^n}(t)$$

für paarweise disjunkte und messbare Mengen B_j^n, womit $(Fv^n)_i$ messbar ist. Da $(Fv^n)_i \to (Fv)_i$ f.ü., ist auch $(Fv)_i$ messsbar und damit auch Fv.

(ii) Wegen $|f_i(t,v)| \le m(t)$ und der Integrierbarkeit von m ist Fv mit

$$\int_0^T |f_i(t,v(t))| \mathrm{d}t \le \int_0^T m(t) \mathrm{d}t < \infty$$

integrierbar.

$\square$

Satz 2.7.7 (Lokale Lösbarkeit)**.** *Sei $u_0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \in [0,T]$. Genügt $f\colon [0,T] \times \overline{B(u_0,r)} \to \mathbb{R}^d$ einer Carathéodory- und einer Majorantenbedingung, so dass $|f(t,v)| \le m(t)$ für $(t,v) \in [0,T] \times \overline{B(u_0,r)}$, so besitzt die Integralgleichung*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s)) \mathrm{d}s$$

mindestens eine Lösung auf einem Intervall $I := [0,T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$, wobei a so gewählt sei, dass

$$\max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t m(s) \mathrm{d}s \right| \le r \,.$$

Weiterhin ist u absolut stetig.

Bemerkung 2.7.8.

- Da u absolut stetig ist und die Integralgleichung erfüllt, folgt

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)) & \text{f.ü. auf } I \\ u(t_0) = u_0 \,, \end{cases}$$

  d.h. u löst das Anfangswertproblem im Sinne von Carathéodory.

- Ist f sogar stetig, kann

$$m(t) := M := \max_{(t,v)} |f(t,v)|$$

  gewählt werden. Somit ist

$$\max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t m(s) \mathrm{d}s \right| = \max_{t \in I} M |t - t_0| = Ma \overset{!}{\le} r \,.$$

  Damit entspricht der Satz dem Satz von Peano.

Beweis. Sei $A := C(I, \overline{B(u_0,r)})$. Dann ist A wieder nichtleer, konvex, abgeschlossen und beschränkt

Wir definieren wieder

$$(Tu)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s)) \mathrm{d}s \,,$$

$u \in A$. $u \in A$ ist stetig auf I, also messbar und integrierbar auf I. Aus dem Lemma 2.7.6 folgt nun, dass $s \mapsto f(s,u(s))$ integrierbar ist, also ist T wohldefiniert.

Es ist $T\colon A \to A$, denn für $u \in A$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Tu absolut stetig, also insbesondere stetig und

$$\|(Tu)(t) - u_0\| \le \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s,u(s))\| \mathrm{d}s \le \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} m(s) \mathrm{d}s \le r \,.$$

T ist stetig: Sei $v_n \to v$ in A. Nach der Carathéodory-Bedingung folgt $f(t, v_n(t)) \to f(t, v(t))$ f.ü., also $\|f(t, v_n(t)) - f(t, v(t))\| \to 0$ f.ü. Da nach der Majorantenbedingung

$$\|f(t, v_n(t)) - f(t, v(t))\| \leq 2m(t) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass

$$\int_I \|f(t, v_n(t)) - f(t, v(t))\| \mathrm{d}t \to 0\,.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \|Tv_n - Tv\| &\leq \max_{t \in I} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, v_n(s)) - f(s, v(s))\| \mathrm{d}s \\ &\leq \int_I \|f(s, v_n(s)) - f(s, v(s))\| \mathrm{d}s \to 0\,. \end{aligned}$$

T überführt beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen: Aus $T(A) \subset A$ folgt gleichmäßige Beschränktheit. T ist gleichgradig stetig, denn

$$\|(Tv)(t) - (Tv)(s)\| \leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(\tau, v(\tau))\| \mathrm{d}\tau \leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} m(\tau) \mathrm{d}\tau\,,$$

unabhängig von $v \in A$. Da m integrierbar ist, ist insbesondere m im L^1-Mittel stetig, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $|s - t| < \delta$ folgt, dass $\int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} m(\tau) \mathrm{d}\tau < \varepsilon$. Somit ist T kompakt. Die Behauptung folgt nun mit dem Schauderschen Fixpunktsatz. □

Satz 2.7.9 (Maximal fortgesetzte Lösungen). *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f\colon J \times D \to \mathbb{R}^d$ genüge einer Carathéodory-Bedingung und für jede kompakte Menge $K \subset D$ gebe es $m_K \in L^1(J)$ mit*

$$\|f(t, v)\| \leq m_K(t)$$

für alle $t \in J$, $v \in K$. Dann gibt es zu jedem $(t_0, u_0) \in J \times D$ mindestens eine maximal fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

im Sinne von Carathéodory auf einem maximalen Existenzintervall $(\alpha, \beta) \subset J$.

Für $t \searrow \alpha$ bzw. $t \nearrow \beta$ läuft die Lösung „gegen den Rand von $J \times D$". Erfüllt f zusätzlich für jedes kompakte $K \subset D$ eine verallgemeinerte Lipschitz-Bedingung, d.h. es gebe ein $\ell_k \in L^1(J)$ mit

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq \ell_k(t) \|v - w\|$$

für alle $t \in J$, $v, w \in K$, so gibt es genau eine derartige maximal fortgesetzte Lösung.

Bemerkung 2.7.10. Die meisten Aussagen für klassische Lösungen lassen sich für Lösungen im Sinne von Carathéodory umformulieren.

3 Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Stabilität, Zeitdiskretisierung

3.1 Stetige/differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Lemma von Gronwall

Satz 3.1.1 (Lemma von Gronwall)**.** *Sei $0 < T \leq \infty$, $t_0 \in [0,T)$, $a, b \in L^\infty(t_0,T)$, $\lambda \in L^1(t_0,T)$, $\lambda \geq 0$ fast überall. Gilt nun*

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)a(s)\mathrm{d}s$$

fast überall in (t_0,T), dann folgt

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)\mathrm{d}s$$

fast überall in (t_0,T), wobei

$$\Lambda(t) := \int_{t_0}^{t} \lambda(s)\mathrm{d}s\,.$$

Ist b auf $[t_0,t]$ absolut stetig, so gilt

$$a(t) \leq \mathrm{e}^{\Lambda(t)} \left(b(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\Lambda(s)} b'(s)\mathrm{d}s \right)\,.$$

Ist b monoton wachsend und stetig, so gilt

$$a(t) \leq b(t)\mathrm{e}^{\Lambda(t)}\,.$$

Beweis. Da $a, b \in L^\infty$ und $\lambda \in L^1$, sind alle Terme wohldefiniert. Wir machen den Ansatz

$$\tilde{a}(t) := \mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \int_{t_0}^{t} \lambda(s)a(s)\mathrm{d}s\,.$$

Damit ist

$$\tilde{a}'(t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \left(\lambda(t)a(t) - \lambda(t) \int_{t_0}^{t} \lambda(s)a(s)\mathrm{d}s \right) \leq \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}\lambda(t)b(t)\,.$$

Wir integrieren von t_0 bis t:

$$\tilde{a}(t) - \tilde{a}(t_0) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \int_{t_0}^{t} \lambda(s)a(s)\mathrm{d}s \leq \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)\mathrm{d}s\,.$$

Wir haben

$$\mathrm{e}^{-\Lambda(t)}(a(t) - b(t)) \leq \mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \int_{t_0}^{t} \lambda(s)a(s)\mathrm{d}s \leq \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)\mathrm{d}s$$

und damit also

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)\mathrm{d}s\,.$$

Ist b nun absolut stetig, so folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)\mathrm{d}s &= -\mathrm{e}^{-\Lambda(s)}b(s)\Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\Lambda(s)}b'(s)\mathrm{d}s \\ &= -\mathrm{e}^{-\Lambda(t)}b(t) + b(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\Lambda(s)}b'(s)\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Also gilt

$$a(t) \le \mathrm{e}^{\Lambda(t)}\left(b(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\Lambda(s)}b'(s)\mathrm{d}s\right)\,.$$

Ist nun b monoton wachsend und stetig, folgt die Aussage wie aus der Übung bekannt. □

Bemerkung 3.1.2. Die Forderung $\lambda \ge 0$ ist wesentlich für die Aussage; für $\lambda \le 0$ gibt es Gegenbeispiele.

Satz 3.1.3 (Differentielles Lemma von Gronwall)**.** *Es sei $a\colon [t_0,T] \to \mathbb{R}$ absolut stetig und es seien $g,\lambda \in L^1(t_0,T)$. Gilt nun*

$$a'(t) \le g(t) + \lambda(t)a(t)$$

fast überall in (t_0,T), dann folgt

$$a(t) \le \mathrm{e}^{\Lambda(t)}a(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}g(s)\mathrm{d}s$$

fast überall.

Bemerkung 3.1.4. Hier kann λ auch negativ sein.

Beweis. Wieder sind alle Terme wohldefiniert. Wir machen den Ansatz

$$\tilde{a}(t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}a(t)\,.$$

Damit ist

$$\tilde{a}'(t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}(a'(t) - \lambda(t)a(t)) \le \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}g(t)\,.$$

Integrieren liefert

$$\tilde{a}(t) - \tilde{a}(t_0) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}a(t) - a(t_0) \le \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\Lambda(s)}g(s)\mathrm{d}s\,.$$

□

Satz 3.1.5 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen)**.** *Unter den Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Picard-Lindelöf (Satz 2.2.6) sei u die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

auf einem Intervall $I = [0,T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$, mit $a = \min\{\frac{1}{2L}, \frac{r}{M}\}$. Dann gibt es zu jedem $v_0 \in B(u_0,r)$ eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} v'(t) = f(t,v(t)) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

auf einem Intervall $I' \subseteq I$ und es gilt für alle $t \in I'$

$$\|v(t) - u(t)\| \leq \mathrm{e}^{L|t-t_0|}\|v_0 - u_0\| \leq \mathrm{e}^{La}\|v_0 - u_0\|\,,$$

wir haben also stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten.

Beweis. Wegen $v_0 \in B(u_0, r)$ gibt es $0 < r' \leq r$ mit $\overline{B(v_0, r')} \subset \overline{B(u_0, r)}$. Nach Picard-Lindelöf gibt es also genau eine Lösung v zur Anfangsbedingung $v(t_0) = v_0$ auf dem Intervall $I' = [0, T] \cap [t_0 - a', t_0 + a']$ mit $a' = \min\{\frac{r'}{M}, \frac{1}{2L}\}$, also $I' \subseteq I$. Wir haben

$$\begin{aligned}
\|v(t) - u(t)\| &\leq \|v_0 - u_0\| + \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\|\mathrm{d}s \\
&\leq \|v_0 - u_0\| + L\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|v(s) - u(s)\|\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\|\mathrm{e}^{L|t_0-t|}\,.$$

Für $t < t_0$ muss man hierfür im Lemma von Gronwall t durch $t_0 - t$ substituieren. □

Bemerkung 3.1.6. Unter den Voraussetzungen des globalen Picard-Lindelöf gibt es zu beliebigen Anfangswerten u_0, v_0 jeweils genau eine Lösung u, v. Diese erfüllen

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \mathrm{e}^{L|t-t_0|}\|u_0 - v_0\| \leq \mathrm{e}^{LT}\|u_0 - v_0\|\,.$$

Satz 3.1.7 (Stetige Abhängigkeit von der rechten Seite)**.** *Es seien für $f, g\colon [0, T] \times \overline{B(u_0, r)} \to X$ die Bedingungen des verallgemeinerten Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt. Dann gibt es auf einem gemeinsamen Existenzintervall $t_0 \in I \subset [0, T]$ Lösungen u, v zu den rechten Seiten f bzw. g und der gleichen Anfangsbedingung $u(t_0) = v(t_0) = u_0$. Dann gilt für $t \in I$*

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\| &\leq |t - t_0|\mathrm{e}^{\min\{L_f, L_g\}|t-t_0|} \max_{\substack{t\in I \\ w\in\overline{B(u_0,r)}}} \|f(t, w) - g(t, w)\| \\
&\leq a\mathrm{e}^{a\min\{L_f, L_g\}}\|f - g\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

mit $a = \min\{\frac{r}{M_f}, \frac{r}{M_g}, \frac{1}{2L_f}, \frac{1}{2L_g}\}$, wobei L_f, L_g die Lipschitz-Konstanten, M_f, M_g die Beschränktheitskonstanten für f, g sind.

Beweis. Nach Picard-Lindelöf gibt es zu den rechten Seiten f, g jeweils genau eine lokale Lösung. Setzen wir I als Schnitt der Lösungsintervalle, dan ist

$$I = [0, T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\| &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, u(s)) - g(s, v(s))\|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, v(s)) - g(s, v(s))\|\mathrm{d}s \\
&\leq L_f\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|u(s) - v(s)\|\mathrm{d}s + \max_{\substack{s\in I \\ w\in\overline{B(u_0,r)}}} \|f(s, w) - g(s, w)\||t - t_0|\,.
\end{aligned}$$

Analog gilt ebenso

$$\|u(t)-v(t)\| \leq L_g \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|u(s)-v(s)\| \mathrm{d}s + \max_{\substack{s\in I \\ w\in B(u_0,r)}} \|f(s,w)-g(s,w)\| |t-t_0| \,.$$

Daraus erhalten wir

$$\|u(t)-v(t)\| \leq \min\{L_f, L_g\} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|u(s)-v(s)\| \mathrm{d}s + \max_{\substack{s\in I \\ w\in B(u_0,r)}} \|f(s,w)-g(s,w)\| |t-t_0| \,.$$

Die Behauptung folgt nun mit dem Lemma von Gronwall. □

Bemerkung 3.1.8. Wieder gelten entsprechende Aussagen für den Fall globaler Lösbarkeit.

Satz 3.1.9 (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen)**.** *Sei $X = \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$, $f = f(t,v) \in C(G)$ und es existiere $\frac{\partial}{\partial v} f \in C(G)$. Dann gibt es für alle Anfangsdaten $(t_0, u_0) \in G$ genau eine maximal fortgesetzte Lösung auf dem maximalen Existenzintervall $I = I(t_0, u_0)$. Außerdem existieren alle partiellen Ableitungen von $(t,s,v) \mapsto u(t,s,v)$ auf $\Omega := \{(t,s,v) : t \in I(s,v), (s,v) \in G\}$ und sind stetig. Weiterhin gilt für $(t,s,v) \in \Omega$:*

$$u_s(t,s,v) + u_v(t,s,v) = 0$$

und

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_s(t,s,v) = f_v(t, u(t,s,v) \cdot u_v(t,s,v)) \\ u_v(t,s,v) = 1 \,. \end{cases}$$

Beweis. Die Formel erhalten wir formal durch Ableiten der Differentialgleichung. □

3.2 Dissipative Systeme

Definition 3.2.1. Sei $(\mathcal{H}, (\cdot\,,\cdot), |\cdot|)$ ein Hilbertraum. Die Abbildung $f\colon [0,T] \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt

- *dissipativ*, falls

$$(f(t,v) - f(t,w), v-w) \leq 0 \qquad \forall v,w \in \mathcal{H}, t \in [0,T] \,.$$

- *stark dissipativ*, falls es ein $\mu > 0$ gibt, so dass

$$(f(t,v) - f(t,w), v-w) \leq -\mu |v-w|^2 \qquad \forall v,w \in \mathcal{H}, t \in [0,T] \,.$$

Ein Anfangswertproblem mit dissipativer rechter Seite heißt *dissipatives System*

Bemerkung 3.2.2.

- Die Dissipativität hängt vom verwendeten Skalarprodukt ab.
- $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt akkretiv, falls $-A$ dissipativ ist, d.h. falls

$$(-Av + Aw, v-w) \leq 0 \qquad \forall v,w \in \mathcal{H} \,.$$

Beispiel 3.2.3. Ein einfaches Beispiel ist

$$\begin{cases} u'(t) = -\mu u(t) \\ u(0) = u_0 \,, \end{cases}$$

$\mu > 0$, mit der Lösung $u(t) = \mathrm{e}^{-\mu t} u_0$.

An dieser Stelle erinnern wir daran, dass für $u \in C^1(I, H)$ gilt:

$$\tfrac{1}{2} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |u(t)|^2 = (u'(t), u(t)) \,.$$

Satz 3.2.4. *Sei $f\colon [0,T] \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ stark dissipativ und seien u, v Lösungen von*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

bzw. mit $v(t) = v_0$. Dann gilt für alle $s, t \in I$, wobei I das gemeinsame Existenzintervall bezeichnet,

$$|u(t) - v(t)| \le \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} |u(s) - v(s)| \le \mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)} |u_0 - v_0| \,,$$

$t > s \ge t_0$, wobei $\mu > 0$ die Dissipativitätskonstante von f ist.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |u(t) - v(t)|^2 &= (u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)) = (f(t, u(t)) - f(t, v(t)), u(t) - v(t)) \\ &\le -\mu |u(t) - v(t)|^2 \,. \end{aligned}$$

Mit dem differentiellen Lemma von Gronwall folgt nun

$$|u(t) - v(t)|^2 \le \exp\left(\int_{t_0}^{t} -2\mu \mathrm{d}\tau \right) |u_0 - v_0|^2 = \mathrm{e}^{-2\mu(t-t_0)} |u_0 - v_0|^2 \,.$$

□

Bemerkung 3.2.5. Die Voraussetzung der Dissipativität auf ganz $\mathcal{H}$ kann abgeschwächt werden auf z.B. gewisse Kugeln.

Existieren u und v sogar für alle $t \ge t_0$, so folgt $|u(t) - v(t)| \xrightarrow{t \to \infty} 0$, sogar exponentiell.

In linearen System haben wir $f(t, v) = -Av + b$. Dann ist f dissipativ, falls A positiv ist:

$$(f(t, v) - f(t, w), v - w) = -(A(v - w), v - w) \overset{!}{\le} 0 \,.$$

Im Falle der homogenen Gleichung ($b = 0$) ist stets $v \equiv 0$ eine Lösung zu $v_0 = 0$, also $|u(t)| \le \mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)} |u_0|$.

3.3 Zeitdiskretisierung durch einfache Einschrittverfahren

Wir befassen uns mit der Idee der Zeitdiskretisierung: Wir unterteilen das Intervall $[0, T]$ in äquidistante Teilintervalle

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T \,,$$

d.h. $t_n = n\Delta t$ mit $\Delta t = \frac{T}{N}$. Gesucht sind die Werte u^n mit $u(t_n) \approx u^n$. Die Idee hierzu ist

$$u'(t_n) \approx \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}\,.$$

Nun unterscheiden wir zwischen verschiedenen Schemata:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \begin{cases} f(t_n, u^n) & \text{explizites Eulerverfahren} \\ f(t_{n+1}, u^{n+1}) & \text{implizites Eulerverfahren} \\ f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{u^n + u^{n+1}}{2}\right) & \text{Mittelpunktverfahren.} \end{cases}$$

Wir wollen uns nun mit dem expliziten Eulerverfahren beschäftigen.

Wir wählen also wie oben eine äquidistante Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ des Intervalls $[0, T]$ mit den Knoten $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = \frac{T}{N}$. Setze $u^0 := u_0$ und konstruiere $(u^n)_{n=0}^N$ als Näherung $u^n \approx u(t_n)$ durch

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f(t_n, u^n)\,,$$

d.h.

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(t_n, u^n)\,.$$

Bemerkung 3.3.1. Die Folge $(u^n)_{n=0}^N$ ist dabei immer wohldefiniert.

Dieselbe Konstruktionsvorschrift erhalten wir aus

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, u(s))\mathrm{d}s$$

durch Diskretisierung des Integrals mittels Rechtecken.

Satz 3.3.2 (Explizites Eulerverfahren)**.** *Sei $f\colon [0,T] \times X \to X$ stetig und genüge folgender Lipschitz-Bedingung: Es gebe ein $L \geq 0$, so dass für alle $s, t \in [0, T]$, $v, w \in X$ gilt, dass*

$$\|f(s, v) - f(t, w)\| \leq L(|s - t| + \|v - w\|)\,.$$

Wir setzen $w_0 = 1 + L\Delta t$ (also $w_0 \leq \mathrm{e}^{L\Delta t}$ und damit $w_0^n \leq \mathrm{e}^{Lt_n} \leq \mathrm{e}^{LT}$)

Dann ist sowohl die Folge $(u^n)_{n=0}^N$ der Lösungen des expliziten Eulerverfahrens als auch die Folge $\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}\right)_{n=0}^{N-1}$ ihrer diskreten Ableitungen gleichmäßig in Δt beschränkt und es gilt

$$\|u^n\| \leq \|u^0\| + \tfrac{1}{L}(w_0^n - 1)(1 + \|f(0, u^0)\|) \tag{3.1}$$

ebenso wie

$$\left\|\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}\right\| \leq w_0^n(1 + \|f(0, u^0)\|) - 1\,. \tag{3.2}$$

Weiterhin gilt: Sind $(u^n)_{n=0}^N$ und $(v_n)_{n=0}^N$ die entsprechenden Lösungen zu den Anfangswerten u^0 bzw. v^0, dann gilt

$$\|u^n - v^n\| \leq w_0^n\|u^0 - v^0\|\,.$$

Ist u die nach Picard-Lindelöf eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u^0\,, \end{cases}$$

so gilt für den Diskretisierungsfehler $e^n := u(t_n) - u^n$

$$\|e^n\| \le w_0^n \left(\|e^0\| + \Delta t \int_0^{t_n} \|u''(s)\| \mathrm{d}s \right),$$

falls u *zweimal stetig differenzierbar ist.*

Beweis. Für $n = 0$ haben wir

$$\|u^1 - u^0\| = \Delta t \|f(0, u^0)\|,$$

also (3.2).

Im Induktionsschritt haben wir

$$\begin{aligned}
\|u^{n+1} - u^n\| &= \|u^n - u^{n-1} + \Delta t(f(t_n, u^n) - f(t_{n-1}, u^{n-1}))\| \\
&\le \|u^n - u^{n-1}\| + L\Delta t(\Delta t + \|u^n - u^{n-1}\|) = w_0\|u^n - u^{n-1}\| + L(\Delta t)^2 \\
&\le w_0^2\|u^{n-1} - u^{n-2}\| + L(\Delta t)^2(1 + w_0) \le \cdots \\
&\le w_0^n\|u^1 - u^0\| + L(\Delta t)^2 \tfrac{w_0^n - 1}{w_0 - 1} = w_0^n \Delta t \|f(0, u^0)\| + \Delta t(w_0^n - 1),
\end{aligned}$$

womit (3.2) für alle $n = 0, \dots, N-1$ gezeigt ist.

Für (3.1) haben wir

$$\begin{aligned}
\|u^n\| &\le \|u^n - u^{n-1}\| + \|u^{n-1}\| \le \Delta t w_0^{n-1}(1 + \|f(0, u^0)\|) + \|u^{n-1}\| \\
&\le \Delta t(w_0^{n-1} + w_0^{n-2}(1 + \|f(0, u^0)\|) + \|u^{n-2}\| \le \cdots \\
&\le \Delta t(1 + \|f(0, u^0)\|) \tfrac{w_0^n - 1}{w_0 - 1} + \|u^0\| = \tfrac{1}{L}(1 + \|f(0, u^0)\|)(w_0^n - 1) + \|u^0\|.
\end{aligned}$$

Seien nun (u^n) bzw. (v^n) die Lösungen zu den Anfangswerten u^0 bzw. v^0. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|u^n - v^n\| &= \|u^{n-1} - v^{n-1} + \Delta t(f(t_{n-1}, u^{n-1}) - f(t_{n-1}, v^{n-1})\| \\
&\le \|u^{n-1} - v^{n-1}\| + L\Delta t\|u^{n-1} - v^{n-1}\| = w_0\|u^{n-1} - v^{n-1}\| \\
&\le \cdots \le w_0^n \|u^0 - v^0\|.
\end{aligned}$$

Sei nun u zweimal stetig differenzierbar. Für die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers beginnen wir mit

$$\begin{aligned}
\tfrac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} &= \tfrac{1}{\Delta t}(u(t_{n+1}) - u(t_n)) - f(t_n, u^n) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} u'(s)\mathrm{d}s - f(t_n, u^n) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} u'(s)\mathrm{d}s - u'(t_n) + f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u^n) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)u''(s)\mathrm{d}s + f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u^n).
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\|e^{n+1}\| &\le \|e^n\| + \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)u''(s)\mathrm{d}s \right\| + \Delta t \underbrace{\|f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u^n)\|}_{\le L\|e^n\|} \\
&\le w_0\|e^n\| + \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u''(s)\|\mathrm{d}s \\
&\le w_0^2\|e^{n-1}\| + \Delta t \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u''(s)\|\mathrm{d}s + w_0 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u''(s)\|\mathrm{d}s \right) \\
&\le \cdots \le w_0^{n+1}\|e^0\| + \Delta t \int_0^{t_{n+1}} \|u''(s)\|\mathrm{d}s \cdot w_0^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Nun beschäftigen wir uns mit dem impliziten Eulerverfahren. Sei also

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(t_{n+1}, u^{n+1})\,.$$

Satz 3.3.3 (Implizites Eulerverfahren)**.** *Sei $f\colon [0,T]\times X \to X$ wie im vorigen Satz. Dann ist für $\Delta t < \frac{1}{L}$ die Folge $(u^n)_{n=0}^N$ der Lösungen des impliziten Eulerverfahrens wohldefiniert und die Aussagen des obigen Satzes 3.3.2 gelten entsprechend, falls man w_0 durch*

$$w_1 = \frac{1}{1-L\Delta t}$$

und $f(0,u^0)$ durch $f(t_1,u^1)$ ersetzt.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.3.4. Das implizite Eulerverfahren ist besonders geeignet zur Behandelung von dissipativen Systemen, da es deren Struktur bewahrt. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Es gelten folgende Aussagen:

- Für beliebige $v, w \in \mathcal{H}$ gilt
$$(v-w,v) = \tfrac{1}{2}(|v|^2 - |w|^2 + |v-w|^2) \geq \tfrac{1}{2}(|v|^2 - |w|^2)\,.$$
- Sei $(u^n)_{n=0}^N \subset \mathcal{H}$. Dann ist
$$\tfrac{1}{2\Delta t}(|u^{n+1}|^2 - |u^n|^2) \leq \left(\tfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}, u^{n+1}\right)\,.$$
- Bei dissipativen Systemen ist (u^n) immer wohldefiniert, auch wenn $\Delta t \geq \frac{1}{L}$.

Satz 3.3.5 (Implizites Eulerverfahren und dissipative Systeme)**.** *Es seien $(u^n)_{n=0}^N$ bzw. $(v^n)_{n=0}^N$ Lösungen des impliziten Eulerverfahrens zu Anfangswerten u^0 bzw. v^0. Die rechte Seite f sei dissipativ mit Dissipativitätskonstante $\mu \geq 0$. Dann gilt für alle $n = 0,\ldots,N$*

$$|u^n - v^n| \leq \bar{w}_1^n |u^0 - v^0|\,,$$

wobei

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+2\mu\Delta t}} \leq 1\,.$$

Ist u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems, so gilt für den Diskretisierungsfehler $e^n := u(t_n) - u^n$

$$|e^n| \leq \bar{w}_1^n \left(|e^0| + 2\Delta t \bar{w}_1 \int_0^{t_n} |u''(s)| \mathrm{d}s \right)\,.$$

Man beachte $\bar{w}_1 < 1$ für $\mu > 0$.

Beweis. Wir setzen $w^n := u^n - v^n$ und erhalten

$$\frac{w^{n+1}-w^n}{\Delta t} = f(t_{n+1},u^{n+1}) - f(t_{n+1},v^{n+1})\,.$$

Mit obiger Bemerkung folgt nun

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\Delta t}\left(|w^{n+1}|^2-|w^n|^2\right) &\le \left(\tfrac{w^{n+1}-w^n}{\Delta t}, w^{n+1}\right)\\ &= \left(f(t_{n+1},u^{n+1})-f(t_{n+1},v^{n+1}), u^{n+1}-v^{n+1}\right)\\ &\le -\mu|u^{n+1}-v^{n+1}|^2 = -\mu|w^{n+1}|^2\,.\end{aligned}$$

Umstellen liefert

$$|w^{n+1}|^2 \le \tfrac{1}{1+2\mu\Delta t}|w^n|^2 = \bar{w}_1^2|w^n|^2\,.$$

Zur Fehlerabschätzung haben wir

$$\tfrac{1}{\Delta t}(e^{n+1}-e^n) = -\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(s-t_n)u''(s)\mathrm{d}s + f(t_{n+1},u(t_{n+1})) - f(t_{n+1},u^{n+1})\,.$$

Mit der Bemerkung folgt wieder

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\Delta t}(|e^{n+1}|^2-|e^n|^2) &\le \left(-\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(s-t_n)u''(s)\mathrm{d}s, e^{n+1}\right)\\ &\quad+\left(f(t_{n+1},u(t_{n+1})-f(t_{n+1},u^{n+1},e^{n+1}\right)\\ &\le \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(s-t_n)|u''(s)|\mathrm{d}s|e^{n+1}|-\mu|e^{n+1}|^2\\ &\le \int_{t_n}^{t_{n+1}}|u''(s)|\mathrm{d}s|e^{n+1}|-\mu|e^{n+1}|^2\,.\end{aligned}$$

Umstellen ergibt

$$\begin{aligned}|e^{n+1}| &\le \Delta t\bar{w}_1^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}|u''(s)|\mathrm{d}s + \left(\left(\Delta t\bar{w}_1^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}|u''(s)|\mathrm{d}s\right)^2+\bar{w}_1^2|e^n|^2\right)^{1/2}\\ &\le 2\Delta t\bar{w}_1^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}|u''(s)|\mathrm{d}s+\bar{w}_1|e^n|\,.\end{aligned}$$

□

3.4 Stabilität, der Satz von Ljapunov und das asymptotische Verhalten von Lösungen

Im folgenden sei stets M eine Teilmenge eines Banach-Raums X.

$f\colon [0,\infty)\times M\to X$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t))\\ u(0) = u_0\end{cases}$$

stets genau eine maximal fortgesetzte Lösung auf einem Intervall $I\subset[0,\infty)$.

Definition 3.4.1.

(i) Ein Punkt $\bar{u}\in M$ heißt *Gleichgewichtspunkt* oder kritischer/stabiler Punkt/Zustand, falls

$$f(t,\bar{u}) = 0 \qquad \forall t\ge 0\,.$$

(ii) Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{u} \in M$ heißt *stabil*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $u_0 \in M$ gilt:

$$\|u_0 - \bar{u}\| < \delta \Rightarrow \|u(t) - \bar{u}\| < \varepsilon \qquad \forall t > 0\,,$$

wobei u die Lösung des Anfangswertproblems zu $u(0) = u_0$ ist.

(iii) Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{u}$ heißt *instabil*, falls er nicht stabil ist.

Bemerkung 3.4.2.

- $u(t) \equiv \bar{u}$ ist stets Lösung des Anfangswertproblems mit $u(0) = \bar{u}$.
- Gleichgewichtspunkte sind bei nichtautonomen rechten Seiten sehr selten. Daher betrachtet man meist nur autonome Systeme, d.h. $f(t, v) = f(v)$.
- Ist $\bar{u} \in M$ ein Gleichgewichtspunkt zur rechten Seite f, so ist $0 \in M - \bar{u}$ ein Gleichgewichtspunkt zur rechten Seite g mit

$$g(t, v) = f(t, v + \bar{u}), \qquad v \in M - \bar{u}\,.$$

Wir werden also meist als Gleichgewichtspunkt die *Nulllage* $\bar{u} = 0$ betrachten.

Definition 3.4.3.

(i) Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{u}$ heißt *attraktiv*, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $u_0 \in M$ mit $\|u_0 - \bar{u}\| < \delta$ folgt: Das Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ hat genau eine Lösung u. Für diese gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \bar{u}\| = 0\,.$$

(ii) Ist ein Gleichgewichtspunkt stabil und attraktiv, so heißt er *asymptotisch stabil*.

(iii) Ein Gleichgewichtspunkt heißt *exponentiell stabil*, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\|u(t) - \bar{u}\| \leq c\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \forall t \geq 0\,,$$

wobei u wie in (i) gewählt ist und $c, \lambda > 0$.

Bemerkung 3.4.4.

- Da f eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, folgt aus exponentieller Stabilität auch asymptotische Stabilität.
- Ist $\dim X = 1$, so impliziert Attraktivität auch Stabilität, also auch asymptotische Stabilität.

  In höheren Dimensionen gilt dies im allgemeinen nicht.

Beispiel 3.4.5.

- Zur Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t)$$

finden wir den Gleichgewichtspunkt $\bar{u} = 0$. Für den Anfangswert $u(0) = u_0$ haben wir dann

$$|u(t) - \bar{u}| = |\mathrm{e}^t u_0 - 0| = \mathrm{e}^t |u_0|\,.$$

Unabhängig davon, wie klein $|u_0| > 0$ ist, folgt also

$$|u(t) - \bar{u}| \xrightarrow{t\to\infty} \infty\,,$$

d.h. $\bar{u}$ ist instabil.

- Wir betrachten nun
$$u'(t) = -u(t)\,.$$
Auch hier ist $\bar{u} = 0$ ein Gleichgewichtspunkt, nun gilt jedoch
$$|u(t) - \bar{u}| = \mathrm{e}^{-t}|u_0| \xrightarrow{t\to\infty} 0\,,$$
$\bar{u}$ ist also exponentiell stabil.

- Betrachte
$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u(t)\,.$$
Der Gleichgewichtspunkt ist $\bar{u} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $|u(t)|^2 = |u_0|^2$ für alle $t \geq 0$, denn
$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2 = (u'(t), u(t)) = \left(\begin{pmatrix} u_2(t) \\ -u_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \right) = 0\,.$$
Damit ist $\bar{u}$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

- Wir betrachten die logistische Differentialgleichung
$$u'(t) = u(t)(1 - u(t))\,.$$
Gleichgewichtspunkte sind $\bar{u} = 0$ bzw. $\bar{u} = 1$. Hier ist $\bar{u} = 0$ instabil, aber $\bar{u} = 1$ asymptotisch stabil.

Im folgenden sei nun $X = \mathbb{R}^d$.

Satz 3.4.6 (Stabilität autonomer linearer Systeme)**.** *Wir betrachten das lineare Anfangswertproblem*
$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t > 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in \mathbb{R}^d\,. \end{cases}$$
Dann ist die Nulllösung $\bar{u} = 0$ *ein Gleichgewichtspunkt. Sie ist*

(i) *stabil, falls* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *für alle Eigenwerte* λ *von* $-A$ *und die Eigenwerte* λ *mit* $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ *halbeinfach sind, d.h. algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.*

(ii) *exponentiell stabil, falls alle Eigenwerte von* $-A$ *negativen Realteil haben.*

(iii) *instabil mit einer exponentiell wachsenden Komponente, falls es einen Eigenwert von* $-A$ *mit positivem Realteil gibt.*

(iv) *instabil mit einer höchstens polynomiell wachsenden Komponente, falls alle Eigenwerte von* $-A$ *nichtpositiven Realteil haben und es einen Eigenwert* λ *mit* $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ *gibt, der nicht halbeinfach ist.*

Bemerkung 3.4.7.

- Es ist zu beachten, dass die Eigenwerte von $-A$ untersucht werden, nicht die von A, da wir die Gleichung $u' + Au = 0$ statt $u' = Au$ betrachten.

- Zur Erinnerung:
$$|e^{\lambda t}| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\underbrace{|e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda)t}|}_{=1} = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\,.$$

- Wir wissen bereits, dass das Anfangswertproblem für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ global auf $[0,\infty)$ endlich lösbar ist:
$$u(t) = e^{-tA} = \sum_{j=1}^{m} e^{-\tilde{\lambda}_j t}\sum_{l=0}^{\nu_j}\frac{(-t)^l}{l!}(A-\tilde{\lambda}_j\,\mathrm{id})^l u_{0j}\,, \tag{3.3}$$
wobei $u_{0j} \in \ker(A-\tilde{\lambda}_j\,\mathrm{id})^{\nu_j}$, $u_0 = u_{01}+\cdots+u_{0m}$ und $\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_m$ Eigenwerte von A mit algebraischer Vielfachheit ν_j sind.

Beweis. Zunächst ist die Nullösung offenbar tatsächlich ein Gleichgewichtspunkt.

Wir setzen nun $B := -A$ und es es seien $\lambda_j = -\tilde{\lambda}_j$ die Eigenwerte von B. (3.3) wird dann zu
$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t}\sum_{l=0}^{\nu_j}\frac{(-t)^l}{l!}(-1)^l(B-\lambda_j\,\mathrm{id})^l u_{0j}\,.$$
Es gelte nun $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, $j = 1,\ldots,m$. Wir haben
$$\left|\sum_{l=0}^{\nu_j}\frac{(-t)^l}{l!}(-1)^l(B-\lambda_j\,\mathrm{id})^l u_{0j}\right| \le c(|t|^2+1)\,,$$
$j = 1,\ldots,m$, für ein $c \in \mathbb{R}$. Damit gilt
$$|u(t)-\bar{u}| = |u(t)| \le c e^{a\max_{j=1,\ldots,m}\{\mathrm{Re}(\lambda_j)\}t}(|t|^d+1)\,,$$
$a > 0$, womit (ii) sofort folgt.

Zu (i): Die Summanden zu $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ fallen exponentiell; zu betrachten sind Summanden mit $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$. Sei o.B.d.A. $\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$. Da λ_1 halbeinfach ist, hat $(B-\lambda_1\,\mathrm{id})^{\nu_1}$ eine Basis aus Eigenvektoren zu λ_1. Somit ist $(B-\lambda_1\,\mathrm{id})^l u_{01} = 0$, falls $l \ge 1$. Also verschwinden alle Summanden zu $l \ge 1$ und insgesamt erhalten wir
$$|e^{\lambda_1 t}||u_{01}| = |u_{01}|\,.$$
Es folgt Stabilität, aber nicht exponentielle Stabilität.

Zu (iii): Sei o.B.d.A. $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu beliebigem $\delta > 0$ wähle $u_0 := \delta v_1$, wobei v_1 ein normierter Eigenvektor zu λ_1 ist. Dann ist $u_0 = u_{01} = \delta v_1$ und mit $u(t) = -e^{\lambda_1 t}\delta v_1$ ist $|u(t)| = \delta e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$-

Zu (iv): Wähle u_0 als (echten) Hauptvektor zum nichthalbeinfachen Eigenwert mit Realteil Null. $\square$

Wir liefern eine erste Verallgemeinerung auf lineare Systeme mit “kleiner Störung”:

Satz 3.4.8 (Ljapunov). *Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und sei $f\colon [0,\infty)\times B(0,R) \to \mathbb{R}^d$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Es gelte weiterhin $f(t,0) = 0$ für alle $t \ge 0$ und $f(t,v) = o(\|v\|)$ gleichmäßig in t für $\|v\| \to 0$. Gilt für alle Eigenwerte λ von $-A$, dass $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, dann ist die Nulllösung von*
$$u'(t) + Au(t) = f(t,u(t))$$
exponentiell stabil.

Bemerkung 3.4.9.

- Die Einschränkung auf die Nulllösung ist keine Beschränkung der Allgemeingültigkeit der Aussage.
- "$f(t,v) = o(\|v\|)$ gleichmäßig in t für $\|v\| \to 0$" bedeutet, dass
$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\|f(t,v)\|}{\|v\|} = 0$$
gleichmäßig in t.
- Es gibt auch einen Instabilitätssatz: Gibt es einen Eigenwert λ von $-A$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, ist auch das gestörte System instabil.
- Gilt nur $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ und gibt es einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, ist keine Aussage möglich.

Wir machen nun einen Schritt in Richtung nichtlinearer Probleme. Hierzu betrachten wir ein autonomes System für eine offene Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ und eine Funktion

$$f\colon M \to \mathbb{R}^d,\ f \text{ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung.} \tag{3.4}$$

Es sei $\bar{u} \in M$ ein Gleichgewichtspunkt von f: $f(\bar{u}) = 0$. Wir linearisieren um $\bar{u}$:

$$f(u(t)) = \cancel{f(\bar{u})} + f'(\bar{u})(u(t) - \bar{u}) + o(\|u(t) - \bar{u}\|)\,.$$

Für die Differentialgleichung
$$u'(t) = f(u(t))$$
folgt also
$$(u(t) - \bar{u})' - f'(\bar{u})(u(t) - \bar{u}) = o(\|u(t) - \bar{u}\|)\,,$$
falls f in $\bar{u}$ differenzierbar ist. Damit sind wir in der Situation des Satzes von Ljapunov und erhalten:

Satz 3.4.10 (Linearisierte Stabilität)**.** *f sei wie in (3.4), $\bar{u}$ sei ein Gleichgewichtspunkt von f und f sei in $\bar{u}$ differenzierbar. Haben alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $f'(\bar{u})$ negativen Realteil, so ist $\bar{u}$ stabil.*

Bemerkung 3.4.11.

- Gibt es einen Eigenwert mit positivem Eigenwert, ist $\bar{u}$ instabil.
- Sind die Realteile nur nichtpositiv und existiert ein Eigenwert mit Realteil Null, ist keine Aussage möglich.

Beispiel 3.4.12.

- Wir betrachten das mathematische Pendel:
$$u'(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\sin(u_1(t)) \end{pmatrix}.$$

Gleichgewichtspunkte sind hierbei $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-\pi\\0\end{pmatrix}$, f ist nicht linear, das Sytem ist autonom. Für $\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix}$ haben wir

$$f'(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(u_1) & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$f'(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind 1 und -1, $\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix}$ ist also instabil.

Analog ist $\begin{pmatrix}-\pi\\0\end{pmatrix}$ instabil.

Jedoch ist

$$f'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mit Eigenwerten i und $-$i, hier ist also keine Aussage zu treffen.

- Für
$$u'(t) = u^2(t)$$
haben wir den Gleichgewichtspunkt $\bar{u} = 0$. Hier ist $f'(0) = 0$, wir wissen jedoch, dass $\bar{u}$ instabil ist.

- Für
$$u'(t) = 0$$
ist $\bar{u} = 0$ ein Gleichgewichtspunkt. Es ist $f'(0) = 0$, $\bar{u}$ ist jedoch stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

- Für
$$u'(t) = u^3(t)$$
ist wieder $\bar{u} = 0$ ein Gleichgewichtspunkt. Es ist $f'(\bar{u}) = 0$, für die Lösung gilt
$$u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + t u_0^2}} \xrightarrow{t \to \infty} 0 = \bar{u},$$
$\bar{u}$ ist also asymptotisch stabil, aber nicht exponentiell stabil.

- Für
$$u'(t) = -u(t)$$
ist wieder $\bar{u} = 0$ ein Gleichgewichtspunkt. Hier ist $\bar{u}$ exponentiell stabil.

Bemerkung 3.4.13. Ist $u(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung für eine autonome rechte Seite und gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = u_\infty$, dann ist u_∞ ein Gleichgewichtspunkt, denn: Komponentenweise gilt

$$\underbrace{u_i(n+1) - u_i(n)}_{\to 0,\ n \to \infty} = u_i'(n + \nu) = f_i(u(n + \nu)) \to f(u_\infty),\ n \to \infty .$$

Beweis zum Satz von Ljapunov 3.4.8. Wegen $-A \cdot 0 + f(t,0) = 0$ ist die Nulllösung ein Gleichgewichtspunkt.

Nach Voraussetzung gibt es $C \geq 1$, $M \geq 0$ so, dass

$$\|\mathrm{e}^{-tA}\| \leq C\mathrm{e}^{-Mt}$$

für alle $t \geq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $\|v\| < \delta$ folgt, dass $\|f(t,v)\| \leq \varepsilon\|v\|$.

Zu jedem $(t_0, u_0) \in [0,\infty) \times B(0,R)$ gibt es genau eine maximal fortgesetzte Lösung auf einem Intervall $[t_0, \beta(t_0,u_0))$. O.B.d.A. sei $\|u_0\| < \frac{\delta}{C} \leq \delta < R$. Da die Lösung stetig ist, gilt zumindest in einem Intervall $[t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta)) \subseteq [t_0, \beta(t_0,u_0))$, dass $\|u(t)\| < \delta$. Solange $t \in [t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta))$, gilt

$$u(t) = \mathrm{e}^{-tA}u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s$$

und damit

$$\|u(t)\| \leq C\mathrm{e}^{-M(t-t_0)}\|u_0\| + \int_{t_0}^{t} C\mathrm{e}^{-M(t-s)}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s\,,$$

also

$$\mathrm{e}^{Mt}\|u(t)\| \leq C\mathrm{e}^{Mt_0}\|u_0\| + \int_{t_0}^{t} C\varepsilon\mathrm{e}^{Ms}\|u(s)\|\mathrm{d}s\,.$$

Das Lemma von Gronwall liefert

$$\mathrm{e}^{Mt}\|u(t)\| \leq C\mathrm{e}^{Mt}\|u_0\|\mathrm{e}^{C\varepsilon(t-t_0)}\,.$$

Damit gilt

$$\|u(t)\| \leq C\mathrm{e}^{-(t-t_0)(M-C\varepsilon)}\,. \tag{3.5}$$

Falls $M > C\varepsilon$, also $\varepsilon < \frac{M}{C}$, folgt insbesondere

$$\|u(t)\| \leq C\|u_0\| < \delta\,.$$

Für beliebiges $\eta < \delta$ folgt ebenso aus $\|u_0\| < \frac{\eta}{C}$, dass $\|u(t)\| < \eta < \delta$.

Hieraus folgt $\beta'(t_0,u_0,\delta) = \beta(t_0,u_0)$: Ansonsten gilt $u(\beta'(t_0,u_0,\delta)) = \delta$. Wegen Stetigkeit gibt es ein $t^* \in [t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta))$, so dass $\eta < \|u(t^*)\| < \delta$. Dies ist ein Widerspruch zu $\|u(t)\| \leq \eta$ auf $[t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta))$.

Somit ist u auf dem maximalen Existenzintervall durch β beschränkt. Hieraus folgt nun, dass $\beta(t_0,u_0) = \infty$.

Somit gilt (3.5) auf ganz $[0,\infty)$, dies zeigt die exponentielle Stabilität. □

Der Problemfall, dass die Eigenwerte nur nichtpositiven Realteil haben, bleibt jedoch ungelöst.

Definition 3.4.14. $M \subset \mathbb{R}^d$ sei offen, $f\colon M \to \mathbb{R}^d$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. $\bar{u}$ sein ein Gleichgewichtspunkt von f. Dann heißt eine stetig differenzierbare Funktion $V\colon U \to \mathbb{R}$, $U \ni \bar{u}$

(i) *schwache Ljapunov-Funktion*, falls $\nabla V(u) \cdot f(u) \leq 0$ für alle $u \in U$,

(ii) *starke Ljapunov-Funktion*, falls $\nabla V(u) \cdot f(u) < 0$ für alle $u \in U$ bzw.

(iii) *erstes Integral*, falls $\nabla V(u) \cdot f(u) = 0$ für alle $u \in U$.

Bemerkung 3.4.15. V ist eine schwache (starke) Ljapunov-Funktion, falls V entlang der Lösungskurven in U (streng) monoton fällt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(u(t)) = \nabla V(u(t)) \cdot u'(t) = \nabla V(u(t)) \cdot f(u(t)) \overset{(<)}{\leq} 0\,.$$

Satz 3.4.16 (schwache Ljapunov-Funktion)**.** *Sei f wie oben, $\bar{u}$ ein Gleichgewichtspunkt. Es sei V eine schwache Ljapunov-Funktion zum Gleichgewichtspunkt $\bar{u}$ der Differentialgleichung $u'(t) = f(u(t))$ und es gelte $V(\bar{u}) < V(u)$ für alle $u \in U \setminus \{\bar{u}\}$. Dann ist $\bar{u}$ stabil.*

Beweis. O.B.d.A. sei $\bar{u} = 0$, $V(0) = 0$.
Es sei $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B(0, \varepsilon)} \subseteq U$. Wir setzen

$$m(\varepsilon) := \min\{V(u) : \|u\| = \varepsilon\} > 0\,.$$

Da V stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $0 \leq V(u) \leq \frac{m(\varepsilon)}{2}$ für alle $u \in \overline{B(0, \delta)}$.
Sei $u_0 \in B(0, \delta)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) &= f(u(t)) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

genau eine maximal fortgesetzte Lösung u. Sei

$$T^* := \sup\{T > 0 : \|u(t)\| < \varepsilon \ \forall t \in [0, T]\}\,.$$

Angenommen, $T^* < \infty$. Dann ist $\|u(T^*)\| = \varepsilon$. Die Funktion $t \mapsto V(u(t))$ ist monoton fallend und damit wäre widersprüchlicherweise

$$\underbrace{V(u(T^*))}_{=m(\varepsilon)} \leq V(u(0)) = V(u_0) = \tfrac{m(\varepsilon)}{2}\,.$$

Also ist $T^* = \infty$ und damit $\|u(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$, d.h. $\bar{u}$ ist stabil. □

Satz 3.4.17 (starke Ljapunov-Funktion)**.** *Unter den gleichen Voraussetzungen sei V eine starke Ljapunov-Funktion. Dann ist $\bar{u}$ sogar asymptotisch stabil.*

Beweis. O.B.d.A. sei $\bar{u} = 0$, $V(0) = 0$. Wir wissen bereits, dass $\bar{u}$ stabil ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass aus $\|u_0\| < \delta$ folgt, dass $\|u(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$.
Sei $\|u_0\| < \delta$ und u die entsprechende Lösung. Da $t \mapsto V(u(t))$ streng monoton fällt und $V(u) \geq 0$ auf U, gilt $V(u(t)) \xrightarrow{t \to \infty} V_\infty$.
Angenommen, es wäre $V_\infty > 0$. Da $V(0) = 0$ und V stetig ist, gibt es ein $0 < \eta < \delta$ mit $0 \leq V(u) < V_\infty$ für alle $u \in B(0, \eta)$. Somit folgt $\eta \leq \|u(t)\| \leq \varepsilon$ für alle $t > 0$.
Nun ist $K(\eta, \varepsilon) := \{u \in \mathbb{R}^d : \eta \leq \|u\| \leq \varepsilon\}$ kompakt und V ist stetig differenzierbar, also existiert das Maximum

$$m := \max_{u \in K(\eta, \varepsilon)} \nabla V(u) \cdot f(u) < 0\,.$$

Damit folgt

$$V(u(t)) - V(u_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} V(u(s)) \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \nabla V(u(s)) \cdot f(u(s)) \mathrm{d}s \leq m(t - t_0) = mt\,.$$

Also

$$\underbrace{V(u(t))}_{\to V_\infty} \leq \underbrace{mt + V(u_0)}_{\to -\infty} .$$

Dies ist ein Widerspruch zu $V_\infty > 0$, es ist daher $V_\infty = 0$.
Nun ist $\overline{B(0,\varepsilon)}$ kompakt und $\{u(t), t \geq 0\} \subset \overline{B(0,\varepsilon)}$. Für eine beliebige Folge $t_n \to \infty$ gilt, dass eine Teilfolge $(t_{n'})$ existiert, so dass $u(t_{n'}) \to u_\infty$ und damit

$$\underbrace{V(u(t_{n'}))}_{\to V_\infty = 0} \to V(u_\infty) .$$

Das bedeutet, $u_\infty = 0 = \bar{u}$. Da (t_n) beliebig ist, folgt auch $u(t) \to u_\infty = 0$, also ist $\bar{u}$ asymptotisch stabil. $\square$

4 Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

4.1 Grundbegriffe und elementare Aussagen

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0\,.$$

Im *semilinearen* Fall lautet die Gleichung

$$-u''(x) = f(x, u(x), u'(x))\,,$$

im *linearen* Fall

$$-u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = b(x)\,.$$

Die Gleichung ist *homogen*, wenn $b \equiv 0$, und *symmetrisch*, wenn $c \equiv 0$.

Wir betrachten die Differentialgleichung auf einem Intervall $[a, b]$ und stellen (zwei) Randbedingungen. Allgemein lauten diese

$$G_i(a, b, u(a), u(b), u'(a), u'(b)) = 0\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Meist werden jedoch etwas speziellere Randbedingungen betrachtet.

Definition 4.1.1. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c_a, c_b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir führen Bezeichnungen für Randbedingungen von folgenden Formen ein:

- $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ heißen *Dirichletsche Randbedingungen.*
- $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$ heißen *Neumannsche Randbedingungen.*
- $c_a u(a) + u'(a) = \alpha$, $c_b u(b) + u'(b) = \beta$ heißen *Robinsche Randbedingungen.*
- $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$ heißen *periodische Randbedingungen.*

Treten an a und b unterschiedliche Typen von Randbedingungen auf, so spricht man von *gemischten Randbedingungen*. Ist $\alpha = \beta = 0$, heißen die Randbedingungen *homogen*.

Die Randbedingungen sind entscheidend für die Lösbarkeit der Differentialgleichungen und für das Verhalten ihrer Lösungen.

Bemerkung 4.1.2.

- Durch die Transformation $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$ kann ein Randwertproblem stets auf das Intervall $[0, 1]$ transformiert werden.
- Beim linearen Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) + d(x)u(x) = b(x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases} \tag{4.1}$$

  können die inhomogenen Randbedingungen stets in die rechte Seite transformiert werden: Definiere

$$(Lu)(x) := -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = b(x)\,.$$

Die Differentialgleichung schreibt sich dann als $Lu = b$. Es sei $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt mit $r(a) = \alpha$, $r(b) = \beta$. Wir setzen $\tilde{u} = u - r$. Dann ist $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$ und wir haben $L\tilde{u} = Lu - Lr = b - Lr$. Somit ist u eine Lösung von (4.1), wenn $\tilde{u}$ eine Lösung von

$$\begin{cases} L\tilde{u} = b - Lr \\ \tilde{u}(a) = 0 \\ \tilde{u}(b) = 0 \end{cases}$$

ist.

- Ist c hinreichend glatt, so kann die lineare Differentialgleichung stets in eine symmetrische überführt werden:

  $$\tilde{u}(x) := u(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^x c(s)\mathrm{d}s\right).$$

  Dann ist u genau dann Lösung von (4.1), wenn $\tilde{u}$ das Randwertproblem

  $$\begin{cases} -\tilde{u}''(x) + \tilde{d}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{b}(x) \\ \tilde{u}(a) = \alpha \\ \tilde{u}(b) = \beta \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^b c(s)\mathrm{d}s\right) \end{cases}$$

  löst, wobei

  $$\tilde{d} = d + \tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{2}c', \quad \tilde{b}(x) = b(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^x c(s)\mathrm{d}s\right).$$

Definition 4.1.3. Unter einer Lösung eines Randwertproblems mit Dirchletschen Randbedingungen für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung verstehen wir eine Funktion $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$, die die Differentialgleichung auf (a,b) erfüllt und die Randbedingungen in a und b.

4.2 Randwertprobleme für homogene, lineare Differentialgleichungen

Erinnerung: In diesem Abschnitt untersuchen wir die Differentialgleichung

$$-u''(x) + c(x)u(x) + d(x)u(x) = b(x).$$

Da wir nur reellwertige Differentialgleichungen betrachten, haben wir einen zweidimensionalen Lösungsraum, mit einem Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen u_1, u_2. Die allgemeine Lösung lässt sich dann über $u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ darstellen.

Definition 4.2.1. Seien u_1, u_2 zwei Lösungen der Differentialgleichung. Dann heißt

$$w(x) = \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$$

Wronski-Determinante.

Die beiden Lösungen u_1, u_2 sind unabhängig, wenn $w(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$.

Wir beschäftigen uns nun mit der Lösbarkeit der betrachteten Differentialgleichungen.

Beispiel 4.2.2. Betrachte

$$-u''(x) - u(x) = 0\,,$$

d.h. $u'' = -u$. Diese Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $u(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$. Nun ist das Anfangswertproblem mit $u(a) = \alpha$, $u'(a) = \tilde{\alpha}$, $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, stets eindeutig lösbar. Für das Randwertproblem gilt dies jedoch nicht:

- Sei $(a, b) = (0, \frac{\pi}{2})$, $u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 1$. Dann folgt $u(0) = c_2 = 1$ und ebenso $u(\frac{\pi}{2}) = c_1 = 1$, es existiert hierbei also eine *eindeutige* Lösung.
- Sei $(a, b) = (0, \pi)$, $u(0) = u(\pi) = 1$. Dann folgen die Bedingungen $u(0) = c_2 = 1$ und $u(\pi) = -c_2 = 1$, es existiert also *keine* Lösung.
- Sei $(a, b) = (0, \pi)$, $u(0) = 1$, $u(\pi) = -1$. Dann folgen wie oben $u(0) = c_2 = 1$ und $u(\pi) = -c_2 = -1$. Damit ist $c_2 = 1$, $c_1 \in \mathbb{R}$ bleibt jedoch beliebig, es existieren also *unendlich viele* Lösungen.

Satz 4.2.3 (konstante Koeffizienten)**.** *Wir betrachten das Randwerproblem*

$$\begin{cases} -u''(x) + cu'(x) + du(x) = 0 \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

und definieren

$$D := \tfrac{c^2}{4} + d\,.$$

(i) *Ist $D \geq 0$, dann ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.*

(ii) *Ist $D < 0$, dann gibt es*

  (1) genau eine Lösung, falls $\sqrt{-D}(b-a)$ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist,

  (2) unendlich viele Lösungen, falls $\sqrt{-D}(b-a) = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $\beta = (-1)^k \alpha \exp\left(\frac{c}{2}\frac{k\pi}{\sqrt{-D}}\right)$,

  (3) keine Lösung, falls keiner der genannten Fälle eintrifft.

Beweis. Wir machen den üblichen Exponentialansatz $u(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ und erhalten als Lösungen $\lambda_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{D}$.

$\underline{D > 0}$: Hier bilden $u_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ und $u_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$ ein Fundamentalsystem, die allgemeine Lösung ist $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$. Zur Erfüllung der Randbedingungen muss also

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 a} & \mathrm{e}^{\lambda_2 a} \\ \mathrm{e}^{\lambda_1 b} & \mathrm{e}^{\lambda_2 b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

gelten. Dies ist eindeutig lösbar, falls die angegebene Matrix invertierbar ist, d.h. $\mathrm{e}^{\lambda_1 a}\mathrm{e}^{\lambda_2 b} - \mathrm{e}^{\lambda_2 a}\mathrm{e}^{\lambda_1 b} \neq 0$. Dies ist der Fall, da $\lambda_1 a + \lambda_2 b \neq \lambda_2 a + \lambda_1 b$, denn $\lambda_1(a-b) \neq \lambda_2(a-b)$.

$\underline{D = 0}$: Hier bilden $u_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ und $u_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ ein Fundamentalsystem. Die eindeutige Lösbarkeit wird analog gezeigt.

$\underline{D < 0}$: Hier bilden $u_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{c}{2}x} \sin(\sqrt{-D}x)$ und $u_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{c}{2}x} \cos(\sqrt{-D}x)$ ein (reelles) Fundamentalsystem. Hier ist

$$\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{-D}a) & \cos(\sqrt{-D}a) \\ \sin(\sqrt{-D}b) & \cos(\sqrt{-D}b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{c}{2}a}\alpha \\ \mathrm{e}^{-\frac{c}{2}b}\beta \end{pmatrix}$$

zu lösen. Die Determinante dieser Matrix ist

$$\sin(\sqrt{-D}a)\cos(\sqrt{-D}b) - \cos(\sqrt{-D}a)\sin(\sqrt{-D}b) = -\sin(\sqrt{-D}(b-a)) .$$

Dieser Ausdruck ist genau dann ungleich Null, wenn $\sqrt{-D}(b-a)$ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Ansonsten existieren unendlich viele Lösungen, wenn $\left(\mathrm{e}^{-\frac{c}{2}a}\alpha,\ \mathrm{e}^{-\frac{c}{2}b}\beta\right)^{\mathrm{T}}$ im Bild der Matrix liegt, was zu den Bedingungen in (ii2) führt. $\square$

Wir formulieren nun eine ähnliche Aussage für nichtkonstante Koeffizienten.

Satz 4.2.4. *Wir betrachten das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 , \end{cases} \tag{4.2}$$

wobei $c \in C^1[a,b]$ und $d \in C[a,b]$. Wie oben definieren wir

$$D(x) = d(x) + \tfrac{1}{4}c^2(x) - \tfrac{1}{2}c'(x) .$$

Ist $D(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist die triviale Lösung $u \equiv 0$ die einzige Lösung des Problems.

Beweis. Wir überführen das Randwertproblem in ein symmetrisches. Sei

$$\tilde{u}(x) := u(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^x c(s)\mathrm{d}s\right) .$$

Dann löst u genau dann das Randwertproblem (4.2), wenn $\tilde{u}$ das Problem

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(x) + D(x)\tilde{u}(x) = 0 \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0 \end{cases}$$

löst. Für eine beliebige Lösung $\tilde{u}$ folgt (durch Multiplizieren mit dieser Lösung und Integration)

$$-\int_a^b \tilde{u}''(x)\tilde{u}(x)\mathrm{d}x + \int_a^b D(x)\tilde{u}^2(x)\mathrm{d}x = 0 ,$$

was nach partieller Integration äquivalent ist zu

$$\underbrace{-\tilde{u}'(x)\tilde{u}(x)\big|_a^b}_{=0} + \int_a^b (\tilde{u}')^2(x)\mathrm{d}x + \underbrace{\int_a^b D(x)\tilde{u}^2(x)\mathrm{d}x}_{\geq 0} = 0 .$$

Also muss $\tilde{u}' \equiv 0$ gelten, mit Randbedingungen also auch $\tilde{u} \equiv 0$ und somit auch $u \equiv 0$ für jede Lösung u von (4.2). $\square$

4.3 Greensche Funktion und semilineare Probleme

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Die Lösung erhalten wir offenbar durch zweimalige Integration, die Randbedingungen werden mit Anpassen der Integrationskonstanten bestimmt.
Wir definieren die *Greensche Funktion* des Randwertproblems:

$$G\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$$

$$G(x,\xi) := \frac{1}{b-a}\begin{cases}(b-x)(\xi-a)\,, & \text{für } a\le\xi\le x\le b\\ (b-\xi)(x-a)\,, & \text{für } a\le x\le\xi\le b\,.\end{cases}$$

Es gilt:

- $G \geq 0$.
- Unterteilt man $[a,b]^2$ entlang der Diagonalen durch (a,a) und (b,b) in zwei Dreiecke D_1, D_2, so ist G auf D_1 und auf D_2 glatt.
- G ist symmetrisch, d.h. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.
- G ist stetig auf $[a,b]^2$.

Für beliebiges $f \in C[a,b]$ ist durch

$$u(x) := \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

eine Lösung des Randwertproblems (4.3) gegeben:

- $u(a) = \int_a^b \underbrace{G(a,\xi)}_{=0} f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$, analog $u(b) = 0$.
- Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (\xi-a)f(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi\,,\\
u'(x) &= -\frac{1}{b-a}\int_a^x (\xi-a)f(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{b-a}\int_x^b (b-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \text{und}\\
u''(x) &= -\frac{x-a}{b-a}f(x) - \frac{b-x}{b-a}f(x) = -f(x)\,.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun das allgemeinere Randwertproblem

$$\begin{cases}-u''(x) = f(x,u(x))\\ u(a) = u(b) = 0\,.\end{cases} \tag{4.4}$$

Lemma 4.3.1. *Eine Funktion $u \in C[a,b]$ ist genau dann eine (klassische) Lösung des Randwertproblems (4.4), wenn*

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))\mathrm{d}\xi\,.$$

Beweis. "$\Leftarrow$": Analog zu obiger Rechnung.
"$\Rightarrow$": Sei u eine Lösung von (4.4). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))\mathrm{d}\xi &= -\int_a^b G(x,\xi)u''(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{b-x}{b-a}\int_a^x (\xi-a)u''(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{x-a}{b-a}\int_a^b (b-\xi)u''(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{b-x}{b-a}(x-a)u'(x) + \frac{b-x}{b-a}\int_a^x u'(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&\quad + \frac{x-a}{b-a}(b-x)u'(x) - \frac{x-a}{b-a}\int_x^b u'(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= u(x)\left(\frac{b-x}{b-a} + \frac{x-a}{b-a}\right) = u(x)\,.
\end{aligned}$$

□

Satz 4.3.2. *Es sei $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und genüge einer Lipschitz-Bedingung, d.h. es gebe ein $L\geq 0$, so dass*

$$|f(x,v)-f(x,w)| \leq L|v-w|\,, \qquad \text{für alle } x\in[a,b]\,,\ v,w\in\mathbb{R}\,.$$

Gibt es ein solches L mit $L<\frac{8}{(b-a)^2}$, dann existiert für das Randwertproblem (4.4) genau eine Lösung.

Bemerkung 4.3.3.

- Die Schranke ist nicht optimal, die scharfe Konstante lautet $\frac{\pi^2}{(b-a)^2}$.
- Für $f(x,u(x)) = f(x)$ können wir $L=0$ wählen. Im Falle symmetrischer, linearer Probleme, d.h. $f(x,u(x)) = f(x) - d(x)u(x)$, gilt

  $$|f(x,v)-f(x,w)| \leq |d(x)||v(x)-w(x)|\,,$$

  für hinreichend kleines $\|d\|_\infty$ ist also eindeutige Lösbarkeit gegeben.
- Inhomogene Randbedingungen können unter Bewahrung der Lipschitz-Konstante in die rechte Seite transformiert werden.

Beweis. Nach Lemma 4.3.1 reicht es zu zeigen, dass der Operator $T\colon C[a,b]\to C[a,b]$ mit

$$(Tu)(x) := \int_a^b G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))\mathrm{d}\xi$$

genau einen Fixpunkt besitzt. Da G und f stetig sind, ist T wohldefiniert. Wir zeigen, dass T unter den gestellten Voraussetzungen eine Kontraktion ist:

$$\begin{aligned}
\|Tu-Tv\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^b G(x,\xi)\Big(f(\xi,u(\xi))-f(\xi,v(\xi))\Big)\mathrm{d}\xi\right| \\
&\leq L\max_{x\in[a,b]}\int_a^b G(x,\xi)|u(\xi)-v(\xi)|\mathrm{d}\xi \leq L\max_{x\in[a,b]}\int_a^b G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\|u-v\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$
\begin{aligned}
\int_a^b G(x,\xi)\mathrm{d}\xi &= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (\xi-a)\mathrm{d}\xi + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{b-x}{2(b-a)}(x-a)^2 + \frac{x-a}{2(b-a)}(b-x)^2 = \frac{(b-x)(x-a)}{2(b-a)}(x-a+b-x) \\
&= \frac{(b-x)(x-a)}{2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Ist also $L < \frac{8}{(b-a)^2}$, ist T eine Kontraktion und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt. □

4.4 Greensche Funktion und inhomogene lineare Probleme

Wir betrachten nun das Randwertproblem

$$
\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x)\,, & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0\,. \end{cases} \tag{4.5}
$$

Wir schreiben

$$
(Lu)(x) := -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x)\,.
$$

Gesucht ist nun die Greensche Funktion.

Die homogene Gleichung $Lu = 0$ ist immer lösbar und hat einen zweidimensionalen Lösungsraum. Seien u_1, u_2 ein Fundamentalsystem. Dann ist die Wronski-Determinante

$$
W(x) = \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0
$$

für alle $x \in (a,b)$. Definiere weiterhin

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \det\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}\,, \\
B(x) &= \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\
R &= \det\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} = A(b) = B(a)\,.
\end{aligned}
$$

Das homogene Problem ist nun genau dann eindeutig lösbar, falls $R \neq 0$. Besitzt das homogene Problem also nur die triviale Lösung, definieren wir die allgemeine Greensche Funktion

$$
G(x,\xi) = \frac{1}{W(\xi)R}\begin{cases} A(\xi)B(x)\,, & \text{falls } a \le \xi \le x \le b \\ A(x)B(\xi)\,, & \text{falls } a \le x \le \xi \le b\,. \end{cases}
$$

Dann ist G wohldefiniert, stetig und symmetrisch.

Beispiel 4.4.1. Sei $c \equiv d \equiv 0$. Ein Fundamentalsystem ist dann durch $u_1(x) = 1$ und $u_2(x) = x$ gegeben. Wir haben

$$
W(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad A(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & x \end{pmatrix} = x-a
$$

$$
B(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & b \end{pmatrix} = b-x \qquad R = A(b) = b-a\,.
$$

G stimmt also tatsächlich mit der bereits bekannten Version überein.

Lemma 4.4.2. *$u \in C[a,b]$ ist genau dann eine Lösung des Randwertproblems (4.5), wenn*

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \,. \tag{4.6}$$

Beweis. Analog zur bereits bekannten Version. □

Satz 4.4.3. *Besitzt das zu (4.5) gehörige homogene Problem nur die triviale Lösung $u \equiv 0$, dann ist das inhomogene Problem für beliebige rechte Seiten $f \in C[a,b]$ eindeutig lösbar. Diese Lösung ist dann durch (4.6) gegeben.*

Ebenso gilt die Umkehrung:

Satz 4.4.4. *Ist das inhomogene Randwertproblem (4.5) eindeutig lösbar, so hat das zugehörige homogene Problem nur die triviale Lösung.*

Beweis. Sei u die Lösung des inhomogenen Problems. Angenommen, $\bar{u}$ wäre eine nichttriviale Lösung des homogenen Problems. Dann ist $u+\bar{u}$ eine weitere Lösung des inhomogenen Problems. □

Bemerkung 4.4.5. Die Aussagen zur eindeutigen Lösbarkeit des homogenen Problems implizieren also entsprechende Aussagen für das inhomogene Problem.

Diesen Zusammenhang formuliert man auch als *Fredholmsche Alternative*:

Satz 4.4.6 (Fredholmsche Alternative)**.** *Entweder hat das inhomogene Problem (4.5) genau eine Lösung für beliebige (stetige) rechte Seiten oder das zugehörige homogene Problem besitzt eine nichttriviale Lösung.*

Bemerkung 4.4.7. Inhomogene Randbedingungen können wie üblich in die rechte Seite transformiert werden.

4.5 Das Sturm-Liouville-Problem

Wir betrachten nun das Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x)\,, & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Dabei seien $f, q \in C[a,b]$ und $p \in C^1[a,b]$, $p(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Mit der Stetigkeit von p ist also $p(x) > 0$ oder $p(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$. Sei also o.B.d.A. $p > 0$. Das Problem (4.7) kann in die gewohnte Form umgeschrieben werden mit $c = \frac{p'}{p}$, $d = \frac{q}{p}$ und $\tilde{f} = \frac{f}{p}$

Per Definition liegt jede Lösung von (4.7) zunächst in $C[a,b] \cap C^2(a,b)$. Da hier q und f stetig sind, folgt $-(pu')' = f - qu \in C[a,b]$, also $pu' \in C^1[a,b]$. Da $p \in C^1[a,b]$, $p > 0$, folgt $u' \in C^1[a,b]$, also $u \in C^2[a,b]$.

Satz 4.5.1. *Sei $q \geq 0$ auf $[a,b]$. Dann besitzt (4.7) genau eine Lösung für beliebige $f \in C[a,b]$.*

Beweis. Wir betrachten das homogene Problem mit Lösung u. Dann folgt

$$0 = \int_a^b (-p(x)u'(x))'u(x) + q(x)u^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b p(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2(x)\mathrm{d}x\,.$$

Insbesondere folgt $p(u')^2 \equiv 0$, also $u' \equiv 0$. Unter Erfüllung der Randbedingungen ist dann auch $u \equiv 0$. Das homogene Problem besitzt also nur die triviale Lösung, daher ist (4.7) für beliebiges $f \in C[a,b]$ eindeutig lösbar. □

Satz 4.5.2 (Kompatibilitätsbedingungen)**.** *Besitzt das zu* (4.7) *gehörige homogene Problem eine nichttriviale Lösung* u_h*, so besitzt* (4.7) *genau dann mindestens eine Lösung, wenn*

$$\int_a^b u_h(x)f(x)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Beweis. "⇒": Sei u_h eine nichttriviale Lösung des homogenen Problems und sei u eine Lösung von (4.7). Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b u_h(x)f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b u_h(x)\Big(-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b p(x)u'(x)u_h'(x) + q(x)u(x)u_h(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b -(p(x)u_h'(x))'u(x) + q(x)u_h(x)u(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \underbrace{\Big(-(p(x)u_h'(x))' + q(x)u_h(x)\Big)}_{=0} u(x)\mathrm{d}x = 0\,.
\end{aligned}$$

"⇐": Seien u_1, u_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Dann gibt es Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so dass $u = c_1u_1 + c_2u_2$, wobei $c_1 \neq 0$ oder $c_2 \neq 0$. Nach Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \\ u(a) = 0 \\ u'(a) = c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \end{cases}$$

die eindeutige Lösung u_p. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b u_h(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u_h(x)(-(p(x)u_p'(x)) + q(x)u_p(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b p(x)u_p'(x)u_h'(x) + q(x)u_p(x)u_h(x)\mathrm{d}x \\
&= p(x)u_h'(x)u_p(x)\big|_a^b + \int_a^b \underbrace{\Big((-p(x)u_h'(x))' + q(x)u_h(x)\Big)}_{=0} u_p(x)\mathrm{d}x \\
&= p(b)u_h'(b)u_p(b)\,.
\end{aligned}$$

Es folgt $u_h'(b) = 0$ oder $u_p(b) = 0$, da $p > 0$. Im zweiten Fall ist u_p bereits Lösung von (4.7). Angenommen, $u_h'(b) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
u_h(b) &= 0 = c_1u_1(b) + c_2u_2(b) \quad \text{und} \\
u_h'(b) &= 0 = c_1u_1'(b) + c_2u_2'(b)\,.
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat eine nichttriviale Lösung, also ist die Matrix singulär, d.h. ihre Determinante ist Null. Diese ist jedoch $W(b) = 0$, was einen Widerspruch darstellt, da u_1 und u_2 ein Fundamentalsystem bilden und somit $W(b) \neq 0$. □

4.6 Maximumprinzip und Stabilität

Wir schreiben wieder

$$(Lu)(x) = -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x)\,,$$

mit $c, d \in C[a, b]$.

Lemma 4.6.1. *Es sei $d \equiv 0$ auf $[a, b]$. Dann gilt für $v \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$:*

(i) *Aus $(Lv)(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ für alle $x \in [a, b]$.*

(ii) *Aus $(Lv)(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass (ii) aus (i) durch Übergang von v zu $-v$ folgt.

Sei nun zunächst $(Lv)(x) < 0$ auf (a, b). Angenommen, (i) gelte nicht, d.h. v hätte ein Maximum auf (a, b). Das bedeutet, es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit $v'(x_0) = 0$ und $v''(x_0) \leq 0$. Dann wäre widersprüchlicherweise

$$(Lv)(x_0) = -v''(x) + c(x_0)v'(x_0) = -v''(x_0) \geq 0\,.$$

Sei nun $(Lv)(x) \leq 0$ auf (a, b). Für $\delta, \lambda > 0$ definieren wir eine Hilfsfunktion $w(x) := \delta e^{\lambda x}$ für $x \in [a, b]$. Dann ist

$$(Lw)(x) = -\lambda(\lambda - c(x))w(x) < 0\,.$$

Wir wählen nun $\lambda > \|c\|_\infty$. Dann ist

$$(L(v + w))(x) = (Lv)(x) + (Lw)(x) < 0$$

für alle $x \in (a, b)$. Also ist

$$v(x) + w(x) = v(x) + \delta e^{\lambda x} \leq \max\{v(a) + \delta e^{\lambda a}, v(b) + \delta e^{\lambda b}\}\,.$$

Für $\delta \to 0$ folgt die Behauptung. □

Satz 4.6.2 (Maximumprinzip)**.** *Es sei $d \geq 0$ auf $[a, b]$. Dann gelten für alle $v \in C[a, b] \cap C^2[a, b]$ die folgenden Aussagen:*

(i) *Aus $(Lv)(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \leq \max\{v(a), v(b), 0\}$ für alle $x \in [a, b]$.*

(ii) *Aus $(Lv)(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \geq \min\{v(a), v(b), 0\}$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Wie im vorigen Lemma folgt (ii) aus (i).

Wir setzen

$$M^+ := \{x \in (a, b) : v(x) > 0\}\,.$$

Aufgrund der Stetigkeit von v ist $M^+ = \emptyset$ oder M ist die Vereinigung offener Intervalle. Ist $M^+ = \emptyset$, folgt sofort die Behauptung. Für den Fall $M^+ \neq \emptyset$ sei $(a_0, b_0) \subset M^+$. Falls $a_0 \neq a$ und $v(a_0) > 0$, gibt es ein $a_1 < a_0$ mit $v(a_1) = 0$ oder $a_1 = a$. Entsprechendes gilt für b_0. Wir können also annehmen: ($a_0 = a$ oder $v(a_0) = 0$) und ($b_0 = b$ oder $v(b_0) = 0$).

Es liegen vier Fälle vor:

- Ist $a_0 = a$ und $b_0 = b$, dann ist $M^+ = (a, b)$. Dann ist $d(x)v(x) \geq 0$. Aus dem Lemma 4.6.1 folgt wegen $-v''(x) + c(x)v'(x) \leq (Lv)(x) \leq 0$ die Behauptung.
- Für $v(a_0) = 0$ und $v(b_0) = 0$ folgt widersprüchlicherweise $v \equiv 0$ auf (a_0, b_0).
- Es verbleiben der Fall $a_0 = a$ und $v(b_0) = 0$ und der Fall $v(a_0) = 0$ und $b_0 = b$.

Hier folgt, dass es $a', b' \in [a, b]$, $a' < b'$, gibt, so dass $M^+ = (a, a') \cup (b', b)$ und $v(a') = 0$, $v(b') = 0$.

Nun folgt schließlich für alle $x \in (a, b)$:

$$v(x) \leq \max\left\{\max_{x\in(a,a')} v(x),\ \max_{x\in(b',b)} v(x)\right\} \leq \max\{v(a), \underbrace{v(a')}_{=0}, \underbrace{v(b')}_{=0}, v(b)\}\,.$$

□

Korollar 4.6.3 (Inverse Monotonie)**.** *Unter den Voraussetzungen des Maximumsprinzips seien* $v, w \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ *mit* $v(a) \leq w(a)$, $v(b) \leq w(b)$ *und* $(Lv)(x) \leq (Lw)(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$*. Dann gilt* $v(x) \leq w(x)$ *auf* (a, b)*.*

Beweis. Maximumsprinzip für $v - w$. □

Satz 4.6.4 (Stabilität, stetige Abhängigkeit von den Daten)**.** *Wir betrachten das Randwertproblem*

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(x)\,, & x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta\,. \end{cases} \tag{4.8}$$

Es sei $d \geq 0$ *auf* $[a, b]$*. Dann gibt es ein* $\Lambda = \Lambda(a, b, c, d) > 0$ *mit*

$$\|u\|_\infty \leq \Lambda\|f\|_\infty + \max\{|\alpha|, |\beta|\}\,.$$

Beweis. Für $\lambda, A, B > 0$ definiere die Hilfsfunktion $w(x) := B\mathrm{e}^{\lambda(x-a)} - A$. Hierfür gilt

$$(Lw)(x) = (-\lambda^2 + \lambda c(x) + d(x))B\mathrm{e}^{\lambda(x-a)} - d(x)A\,.$$

Wir wählen λ so groß, dass

$$(\lambda^2 - \lambda c(x) - d(x))\mathrm{e}^{\lambda(x-a)} \geq 1\,.$$

Dann gilt $(Lw)(x) \leq -B \leq 0$. Damit haben wir

$$(L(\pm u + w))(x) = \pm f(x) + (Lw)(x) \leq |f(x)| - B \overset{!}{\leq} 0$$

für alle $x \in (a, b)$. Setze also $B := \|f\|_\infty$. Das Maximumprinzip liefert

$$\pm u(x) + w(x) \leq \max\{\mp\alpha + w(a), \pm\beta + w(b)\}\,.$$

Nun ist $w(x) \geq B - A = w(a)$ für alle $x \in (a, b)$ und $w(b) = B\mathrm{e}^{\lambda(b-a)} - A$. Damit gilt

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \max\{|\alpha| + B - A, |\beta| + B\mathrm{e}^{\lambda(b-a)} - A, 0\} + A - B \\ &= \max\left\{|\alpha|, |\beta| + B\left(\mathrm{e}^{\lambda(b-a)} - 1\right), A - B\right\}. \end{aligned}$$

Es sei

$$\Lambda = \mathrm{e}^{\lambda(b-a)} - 1\,, \qquad A := \max\{|\alpha|, |\beta|\} + \Lambda B\,.$$

Nun ist

$$|u(x)| \leq A = \Lambda\|f\|_\infty + \max\{|\alpha|, |\beta|\}\,.$$

□

Korollar 4.6.5. *Das zu (4.8) gehörende homogene Problem ($f \equiv 0$, $\alpha = \beta = 0$) hat nur die triviale Lösung, falls $d \geq 0$ auf $[a, b]$.*

Beweis. Direkte Folgerung aus Satz 4.6.4 ($|\alpha| = |\beta| = \|f\|_\infty = 0$). □

Korollar 4.6.6. *Falls $d \geq 0$ auf $[a, b]$, so hat das Randwertproblem (4.8) für beliebige $f \in C[a, b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.*

Beweis. Man transformiere die Randbedingungen in die rechte Seite und verwende Korollar 4.6.5 und die Fredholmsche Alternative. □

Lemma 4.6.7. *Es sei wieder $d \geq 0$ auf $[a, b]$. Für $v \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ gelte $(Lv)(x) < 0$ auf (a, b). Dann kann v kein nichtnegatives Maximum in (a, b) annehmen.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein solches Maximum, d.h. es gäbe ein $x_0 \in (a, b)$ mit $v(x_0) \geq 0$, $v'(x_0) = 0$ und $v''(x_0) \leq 0$. Damit wäre

$$(Lv)(x_0) = \underbrace{-v''(x_0)}_{\geq 0} + \underbrace{c(x_0)v'(x_0)}_{=0} + \underbrace{d(x_0)v(x_0)}_{\geq 0} \geq 0\,.$$

□

Satz 4.6.8 (starkes Maximumprinzip)**.** *Wieder sei $d \geq 0$ auf $[a, b]$. Falls $v \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ in (a, b) ein nichtnegatives Maximum besitzt und falls $(Lv)(x) \leq 0$ auf (a, b), so ist v konstant.*

Beweis. Angenommen, v wäre nicht konstant. Dann sei $x_0 \in (a, b)$ eine solche Maximalstelle, d.h. insbesondere $v(x_0) \geq 0$. Dann gibt es ein $x_1 \in (a, b)$ mit $v(x_1) < v(x_0)$, o.B.d.A. $x_0 < x_1 < b$. Für $\delta, \lambda > 0$ definieren wir

$$w(x) = \delta\left(\mathrm{e}^{\lambda(x-x_0)} - 1\right),$$

$x \in [a, x_1]$. Es ist $w(x) < 0$ für alle $a \leq x < x_0$, $w(x_0) = 0$ und $w(x) > 0$ für $x > x_0$. Wir haben

$$(Lw)(x) = -(\lambda^2 - c(x)\lambda - d(x))\delta\mathrm{e}^{\lambda(x-x_0)} - \delta d(x) \overset{!}{<} 0\,.$$

Wähle λ so groß, dass $\lambda^2 - c(x)\lambda - d(x) > 0$. Damit ist

$$(L(v + w))(x) = (Lv)(x) + (Lw)(x) < 0$$

für alle $x \in (a, b)$. Somit kann $v + w$ kein nichtnegatives Maximum in (a, x_1) annehmen. Es gelten aber für $a < x < x_0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} v(x) + w(x) &\leq v(x_0)\,, \\ v(x_0) + w(x_0) &= v(x_0)\,, \\ v(x_1) + w(x_1) &= v(x_0) + \delta\left(\mathrm{e}^{\lambda(x_1 - x_0)} - 1\right) < v(x_0) \end{aligned}$$

für hinreichend kleines δ. Also nimmt $v + w$ in (a, x_1) ein nichtnegatives Minimum an, was ein Widerspruch wäre. □

Bemerkung 4.6.9. Unter den Voraussetzungen des starken Maximumprinzips gilt $v \equiv v_0 \geq 0$, also $Lv = dv_0 \geq 0$. Da jedoch $LV \leq 0$, muss entweder $d \equiv 0$ oder $v \equiv 0$ gelten.

4.7 Greensche Funktion und semilineare Probleme II

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \\ u(a) = u(b) = 0\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Bemerkung 4.7.1.

- Inhomogene Randbedingungen können wieder in die rechte Seite transformiert werden.
- Falls das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, gibt es die Greensche Funktion
$$G(x, \xi) = \frac{1}{RW(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x) & \xi \leq x \\ A(x)B(\xi) & x \leq \xi\,. \end{cases}$$

Satz 4.7.2. *Es sei $f\colon [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und genüge einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstanten $L, L' > 0$, d.h. es gelte*

$$|f(x, t, t') - f(x, s, s')| \leq L|t - s| + L'|t' - s'|$$

für alle $x \in [a, b]$, $s, s', t, t' \in \mathbb{R}$. Dann hat das Randwertproblem (4.9) genau eine Lösung, falls

$$\max_{x \in [a,b]} \int_a^b L|G(x, \xi)| + L'|\tfrac{\partial}{\partial x} G(x, \xi)| \mathrm{d}\xi < 1 \tag{4.10}$$

und falls das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt.

Beweis. $u \in C^1[a, b]$ ist genau dann Lösung des Randwertproblems (4.9), wenn

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) \mathrm{d}\xi =: (Tu)(x)\,.$$

Wir verwenden die Norm

$$\|x\|_L := \max_{x \in [a,b]} (L|v(x)| + L'|v'(x)|)\,,$$

$v \in C^1[a, b]$. Dann ist diese Norm äquivalent zu $\|\cdot\|_{C^1} = \max(|\cdot| + |\cdot'|)$. $(C^1[a, b], \|\cdot\|_L)$ ist also ein Banach-Raum.

Weiterhin ist T wohldefiniert, da G stetig ist und ebenso f in ξ für $u \in C^1[a,b]$. T bildet außerdem nach $C^1[a,b]$ ab, denn

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Tu)(x) &= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial x} G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi))\mathrm{d}\xi \\ &= B'(x)\int_a^x \frac{A(\xi)}{RW(\xi)} f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\mathrm{d}\xi + A'(x)\int_x^b \frac{B(\xi)}{RW(\xi)} f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

existiert und ist stetig. Damit ist T eine Selbstabbildung.
Wir zeigen nun, dass T eine Kontraktion bezüglich $\|\cdot\|_L$ ist. Wir haben zunächst

$$\begin{aligned}|(Tu)(x) - (Tv)(x)| &\le \int_a^b |G(x,\xi)||f(\xi,u(\xi),u'(\xi)) - f(\xi,v(\xi),v'(\xi))|\mathrm{d}\xi \\ &\le \int_a^b |G(x,\xi)|\Big(L|u(\xi)-v(\xi)| + L'|u'(\xi)-u'(\xi)|\Big)\mathrm{d}\xi \\ &\le \int_a^b |G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\|u-v\|_L\,.\end{aligned}$$

Analog ist

$$|(Tu)'(x) - (Tv)'(x)| \le \int_a^b |\tfrac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)|\mathrm{d}\xi \|u-v\|_L\,.$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned}\|Tu - Tv\|_L &\le \max_{x\in[a,b]} \left(L|(Tu)(x)-(Tv)(x)| + L'|(Tu)'(x)-(Tv)'(x)|\right) \\ &\le \max_{x\in[a,b]}\left(\int_a^b L|G(x,\xi)| + L'|\tfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\|u-v\|_L\,.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (4.10) ist T also eine Kontraktion, der Rest folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz. □

Bemerkung 4.7.3. Für $c \equiv d \equiv 0$ kann die Voraussetzug vereinfacht werden. Dann haben wir nämlich

$$G(x,\xi) = \frac{1}{b-a}\begin{cases}(b-x)(\xi-a)\,, & \xi \le x \\ (b-\xi)(x-a)\,, & x \le \xi\,.\end{cases}$$

Damit folgt

$$\max_{x\in[a,b]}\int_a^b |G(x,\xi)| = \frac{(b-a)^2}{8}$$

und ebenso

$$\int_a^b |\tfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)|\mathrm{d}\xi = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^x (\xi-a)\mathrm{d}\xi + \int_x^b (b-\xi)\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{2(b-a)}\Big((x-a)^2 + (b-x)^2\Big)\,,$$

also

$$\max_{x\in[a,b]}\int_a^b |\tfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)|\mathrm{d}\xi = \frac{b-a}{2}\,.$$

Die Voraussetzung (4.10) wird dann zu

$$L\frac{(b-a)^2}{8} + L'\frac{b-a}{2} < 1\,.$$

Satz 4.7.4 (Scorza-Dragoni). *Es sei* $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *stetig und beschränkt. Es sei weiterhin das zu* (4.9) *gehörige homogene Problem nur trivial lösbar. Dann hat* (4.9) *mindestens eine (klassische) Lösung.*

Beweis. Es sei $|f(x,t,t')|\le M$ für alle $x\in[a,b]$, $t,t'\in\mathbb{R}$. Die Greensche Funktion ist wohldefiniert und wieder ist u genau dann Lösung von (4.9), wenn

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\mathrm{d}\xi =: (Tu)(x)\,.$$

Wir setzen

$$\gamma := \max_{x\in[a,b]}\int_a^b |G(x,\xi)|+|\tfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)|\mathrm{d}\xi$$

und

$$r:=\gamma M\,.$$

Sei $T\colon C^1[a,b]\supset\overline{B(0,r)}\to\overline{B(0,r)}$ wie oben definiert. Dann ist T wohldefiniert und eine Selbstabbildung: Sei $u\in\overline{B(0,r)}\subset C^1[a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{C^1} &= \max_{x\in[a,b]}\Big(|(Tu)(x)|+|(Tu)'(x)|\Big)\\ &= \max_{x\in[a,b]}\int_a^b\Big(|G(x,\xi)|+|\tfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)|\Big)\underbrace{|f(\xi,u(\xi),u'(\xi))|}_{\le M}\mathrm{d}\xi\le\gamma M=r,\end{aligned}$$

d.h. $Tu\in\overline{B(0,r)}$.

Wir möchten nun den Schauderschen Fixpunktsatz anwenden:

Die Menge $\overline{B(0,r)}$ ist offenbar konvex, abgeschlossen, beschränkt und nichtleer.

Wir zeigen, dass T kompakt ist:

- T ist stetig: Auf der kompakten Menge $\{(x,s,s')\in[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}: |s|+|s'|\le r\}$ ist f gleichmäßig stetig. Insbesondere gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so dass für alle $x\in[a,b]$ und $s,s',t,t'\in\mathbb{R}$ mit $|s|+|s'|\le r$ und $|t|+|t'|\le r$ gilt:

  $$|s-t|+|s'-t'|\le\delta\Rightarrow|f(x,s,s')-f(x,t,t')|\le\tfrac{\varepsilon}{\gamma}\,.$$

  Damit gilt für $v,w\in\overline{B(0,r)}$:

  $$\|v-w\|_{C^1}\le\delta\Rightarrow|f(x,v(x),v'(x))-f(x,w(x),w'(x))|\le\tfrac{\varepsilon}{\gamma}\,.$$

  Also gilt für $\|v-w\|_{C^1}\le\delta$:

  $$\begin{aligned}\|Tv-Tw\|_{C^1}\le\max_{x\in[a,b]}\int_a^b&\Big(|G(x,\xi)|+|\tfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)|\Big)\\ &\Big(f(\xi,v(\xi),v'(\xi))-f(\xi,w(\xi),w'(\xi))\Big)\mathrm{d}\xi\le\gamma\tfrac{\varepsilon}{\gamma}=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

- Der Operator T überführt beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen: Sei $\{u_n\}\subset\overline{B(0,r)}$. Für $\{Tu_n\}\subset\overline{B(0,r)}$ gilt:

  Die Folge $\{Tu_n\}$ ist gleichmäßig beschränkt.

Die Folge $\{Tu_n\}$ ist weiterhin gleichgradig stetig:

$$\begin{aligned}|(Tu_n)(x)-(Tu_n)(y)| &\le \int_a^b |G(x,\xi)-G(y,\xi)||f(\xi,u_n(\xi),u_n'(\xi))|\mathrm{d}\xi\\ &\le M\int_a^b |G(x,\xi)-G(y,\xi)|\mathrm{d}\xi\,.\end{aligned}$$

Da G gleichmäßig stetig auf $[a,b]^2$ ist, folgt hieraus die gleichgradige Stetigkeit von $\{Tu_n\}$.

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$, so dass $\{Tu_{n'}\}\subset C[a,b]$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert. Wir benötigen jedoch Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_{C^1}$. Wir betrachten dazu also $\{(Tu_{n'})'\}$, es gilt insbesondere $\|(Tu_{n'})'\|\le r$, d.h. die Folge ist gleichmäßig beschränkt.

Außerdem ist $\{(Tu_{n'})'\}$ gleichgradig stetig: Für $x,y\in[a,b]$ (o.B.d.A. $x<y$) haben wir

$$\begin{aligned}|(Tu_{n'})'(x)-(Tu_{n'})'(y)| &\le \left|\int_a^b \left(\tfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)-\tfrac{\partial}{\partial y}G(y,\xi)\right) f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\mathrm{d}\xi\right|\\ &\le |B'(x)-B'(y)|\int_a^x \left|\frac{A(\xi)}{RW(\xi)}\right| |f(\xi,u(\xi),u'(\xi))|\mathrm{d}\xi\\ &\quad+\int_x^y \left|\frac{A'(x)B(\xi)-A(\xi)B'(y)}{RW(\xi)}\right| |f(\xi,u(\xi),u'(\xi))|\mathrm{d}\xi\\ &\quad+|A'(x)-A'(y)|\int_y^b \left|\frac{B(\xi)}{RW(\xi)}\right| |f(\xi,u(\xi),u'(\xi))|\mathrm{d}\xi\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung, da A und B stetig differenzierbar sind.

Nach Arzelà-Ascoli gibt es also wieder eine Teilfolge $\{u_{n''}\}\subset\overline{B(0,r)}$, so dass $\{(Tu_{n''})'\}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert. Sei $h\in C[a,b]$ als Grenzwert dieser gleichmäßig konvergenten Folge definiert, d.h. $(Tu_{n''})'\to h$. Sei weiter $g\in C^1[a,b]$ analog definiert über $Tu_{n''}\to g$. Dann gilt $g'=h$ und $Tu_{n''}\to g$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^1}$.

Nun folgt die Behauptung des Satzes aus dem Schauderschen Fixpunktsatz. □

4.8 Ober- und Unterlösungen

Wir betrachten nun das Randwertproblem

$$\begin{cases}(Lu)(x)=-u''(x)=f(x,u(x),u'(x))\\ u(a)=u(b)=0\,.\end{cases}\tag{4.11}$$

Definition 4.8.1. $v\in C^2[a,b]$ heißt

- *Oberlösung* von (4.11), falls
$$(Lv)(x)\ge f(x,u(x),u'(x))\qquad \forall x\in[a,b]$$
und $v(a)\ge 0$, $v(b)\ge 0$.
- *Unterlösung* von (4.11), falls
$$(Lv)(x)\le f(x,u(x),u'(x))\qquad \forall x\in[a,b]$$
und $v(a)\le 0$, $v(b)\le 0$.

$f\colon [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist dabei immer stetig, aber nicht unbedingt beschränkt.

Satz 4.8.2 (Existenzsatz)**.** *Es sei v eine Unterlösung und w eine Oberlösung von (4.11). Es gelte $v(x)\le w(x)$ auf $[a,b]$. f erfülle eine* Nagumo-Bedingung *bezüglich v und w auf $[a,b]$, d.h.:*
Es gebe eine stetige Funktion $h\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ mit

$$\int_\lambda^\infty \frac{s}{h(s)}\mathrm{d}s > \max_{x\in[a,b]} w(x) - \min_{x\in[a,b]} v(x)$$

und

$$\lambda(b-a) = \max\{|v(a)-w(b)|, v(b)-w(a)|\}\,,$$

so dass

$$|f(x,t,t')|\le h(|t'|)$$

für alle $x\in[a,b]$, $v(x)\le t\le w(x)$, $t,t'\in\mathbb{R}$.
Dann existiert mindestens eine Lösung $u\in C^2[a,b]$ des Randwertproblems (4.11) mit $v(x)\le u(x)\le w(x)$ auf $[a,b]$.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir jedoch noch etwas Vorarbeit.

Lemma 4.8.3 (Nagumo-Bedingung)**.** *Es erfülle f eine Nagumo-Bedingung bezüglich v, w auf $[a,b]$. Dann gibt es ein $C=C(v,w,h)>0$ mit*

$$|u'(x)|\le C \tag{4.12}$$

für alle $x\in[a,b]$ für jede Lösung $u\in C^2[a,b]$ des Randwertproblems (4.11) mit $v(x)\le u(x)\le w(x)$.

Beweis. Es sei $C>\lambda$ so groß, dass

$$\int_\lambda^C \frac{s}{h(s)}\mathrm{d}s > \max_{x\in[a,b]} w(x) - \min_{x\in[a,b]} v(x)\,. \tag{4.13}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_0\in(a,b)$, so dass

$$u'(x_0)(b-a) = u(b)-u(a)\le \max\{|v(a)-w(b)|, |v(b)-w(a)|\} = \lambda(b-a)\,,$$

also $u'(x_0)\le\lambda$.
Angenommen, (4.12) gälte nicht. Dann gibt es ein $x_3\in(a,b)$ mit $|u'(x_3)|>C$. Also gibt es ein Intervall $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ mit

$$\begin{aligned} &|u'(x_1)|=\lambda && |u'(x_2)|=C \text{ oder}\\ &|u'(x_1)|=C && |u'(x_2)|=\lambda\,, \end{aligned}$$

d.h. $\lambda<|u'(x)|<C$ auf (x_1,x_2). O.B.d.A. sei $u'(x_1)=\lambda<u'(x)<u'(x_2)=C$, $x\in(x_1,x_2)$. Dann gilt für $x\in[x_1,x_2]$

$$|u''(x)|u'(x) = |f(x,u(x),u'(x))|u'(x)\le h(|u'(x)|)u'(x)|\,,$$

also

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{u(x_1)\lambda}^{u(x_2)=C} \frac{t}{h(t)} \mathrm{d}t \right| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{u''(s)u'(s)}{h(u'(s))} \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} \frac{|u''(s)|u'(s)}{h(|u'(s)|)} \mathrm{d}s \leq \int_{x_1}^{x_2} u'(s)\mathrm{d}s = u(x_2) - u(x_1) \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} w(x) - \min_{x\in[a,b]} v(x)\,.
\end{aligned}
$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von C in (4.13). □

Definition 4.8.4. Es seien v, w Unter- bzw. Oberlösungen von (4.11) mit $v(x) \leq w(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Sei $c > 0$ mit $|v'(x)|, |w'(x)| \leq c$, $x \in [a,b]$. Wir definieren

$$
F^*(x,t,t') := \begin{cases} f(x,t,c), & \text{falls } t' > c \\ f(x,t,t'), & \text{falls } |t'| \leq c \\ f(x,t,-c), & \text{falls } t' < -c \end{cases}
$$

und damit

$$
F(x,t,t') := \begin{cases} F^*(x,w(x),t') - \frac{t-w(x)}{1+t^2}, & \text{falls } t > w(x) \\ F^*(x,t,t'), & \text{falls } v(x) \leq t \leq w(x) \\ F^*(x,v(x),t') - \frac{t-v(x)}{1+t^2}, & \text{falls } t < v(x)\,. \end{cases}
$$

F heißt *Modifikation* von f bezüglich v, w und c auf $[a,b]$.

Bemerkung 4.8.5 (Eigenschaften der Modifikation).

- Die Modifikation F ist stetig.
- Die Modifikation F ist beschränkt, d.h.

$$
\begin{aligned}
|F(x,t,t')| \leq 1 + \max&\Big\{f(x,t,t') : x \in [a,b],\ |t'| \leq c,\ v(x) \leq t \leq w(x)\Big\} \\
&+ \|v\|_\infty + \|w\|_\infty\,.
\end{aligned}
$$

Lemma 4.8.6 (Modifikation)**.** *Es seien v, w Unter- bzw. Oberlösungen von (4.11) mit $v(x) \leq w(x)$ auf $[a,b]$. Sei $c > 0$ mit $|v'(x)|, |w'(x)| \leq c$. Dann hat das Randwertproblem*

$$
\begin{cases} -u''(x) = F(x,u(x),u'(x))\,, & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{4.14}
$$

mindestens eine Lösung u mit $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$, $x \in [a,b]$.

Beweis. Die Existenz einer Lösung u von (4.14) folgt aus dem Satz von Scorza-Dragoni. Wir zeigen die Abschätzung $u(x) \leq w(x)$: $0 = u(a) \leq w(a)$, $0 = u(b) \leq w(b)$. Angenommen, die Abschätzung gälte nicht. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $u(x) > w(x)$. Die Funktion $u - w$ nimmt also ein positives Maximum in einem $x_0 \in (a,b)$ an. Damit ist $u(x_0) > w(x_0)$ und $u'(x_0) = w'(x_0)$, also $|u'(x_0)| \leq c$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
-u''(x_0) = F(x_0,u(x_0),u'(x_0)) &= F^*(x_0,w(x_0),u'(x_0)) - \tfrac{u(x_0)-w(x_0)}{1+u^2(x_0)} \\
&= f(x_0,w(x_0),w'(x_0)) - \tfrac{u(x_0)-w(x_0)}{1+u^2u(x_0}
\end{aligned}
$$

und damit
$$-w''(x_0) \geq f(x_0, w(x_0), w'(x_0))\,.$$
Also ist
$$u'' - w'' \geq -f + \tfrac{u(x_0)-w(x_0)}{1+u^2(x_0)} + f = \tfrac{u(x_0)-w(x_0)}{1+u^2(x_0)} > 0\,.$$
Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $u - w$ auf (a, b) ein Maximum annimmt. □

Damit haben wir alle nötigen Werkzeuge, um den Existenzsatz zu beweisen.

Beweis des Existenzsatzes. Nach Lemma 4.8.3 gibt es ein $c > 0$ mit $|u'(x)| \leq c$, $x \in [a, b]$, für alle Lösungen u von (4.11) mit $v \leq u \leq w$. Sei $c_1 < c$ mit $|v'(x)|, |w'(x)| \leq c_1$, $x \in [a, b]$.
Sei F die Modifikation von f bezüglich v, w, c_1 auf $[a, b]$. Nach Lemma 4.8.6 gibt es eine Lösung u des Randwertproblems (4.14) mit $v \leq u \leq w$ auf $[a, b]$.
Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit
$$u'(x_0)(b - a) = u(b) - u(a) \leq \max\{|w(a) - v(b)|, |v(a) - w(b)|\} = \lambda(b - a)\,.$$
Damit folgt $|u'(x_0)| \leq \lambda < c$.
Somit gibt es ein Intervall $J \subset [a, b]$ mit $x_0 \in J$, auf dem $-u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$ gilt.
Mit Lemma 4.8.3 folgt wieder $|u'(x)| \leq c < c_1$, $x \in J$, $c \in \mathbb{R}$.
Solange $|u'(x)| < c_1$ ist, folgt $-u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$.
Damit folgt $J = [a, b]$. u löst also das Randwertproblem (4.11) nicht nur auf einem Teilintervall J, sondern auf ganz $[a, b]$. Denn: Angenommen, dies wäre nicht so. Dann gibt es ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $|u'(x)| = c_1$ und $|u(x)| < c_1$ für $x < \bar{x}$, also gilt für $x < \bar{x}$: $|u'(x)| \leq c < c_1$ und damit $|u'(\bar{x}) \leq c < c_1$. Widerspruch!
Also ist u Lösung von (4.11). □

Differentialgleichungen II

5 Verallgemeinerte Ableitung und Regularisierung im eindimensionalen Fall

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung der Ableitung nach folgender Idee: Sei $u \in C[a,b]$ eine auf (a,b) stetig differenzierbare Funktion. Wir wählen mit v eine ebenfalls stetig differenzierbare Funktion, so dass $v(a) = v(b) = 0$. Partielle Integration liefert nun

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \underbrace{u(x)v(x)|_a^b}_{=0} - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x\,.$$

Zur Wohldefiniertheit der Ausdrücke können wir außerdem $u, u', v \in L^2(a,b)$ fordern.

Hierbei wurden jedoch einige Annahmen getroffen, auf die auch verzichtet werden könnten. Wäre beispielsweise u' auf einer Nullmenge nicht wohldefiniert, so würde dies die Integration nicht behindern.

Daraus lässt sich der Ableitungsbegriff auf eine größere Klasse von Funktionen verallgemeinern.

Definition 5.1. Seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$. Gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b v(x)\phi(x)\mathrm{d}x\,,$$

so heißt v *schwache bzw. verallgemeinerte Ableitung* von u.

Bemerkung 5.2. $L^1_{\text{loc}}(a,b)$ bezeichnet den Raum der lokal integrablen Funktionen, d.h. der Raum der Funktionen, die auf (a,b) messbar und auf jeder kompakten Teilmenge von (a,b) integrierbar sind.

$C_0^\infty(a,b)$ oder auch $C_c^\infty(a,b)$ bezeichnet den Raum der auf (a,b) unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, d.h. es gibt ein Intervall $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, so dass $\phi(x) = 0$, wenn $x \notin (\alpha,\beta)$.

Der *Träger* einer Funktion $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\operatorname{supp}\phi := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\}}\,.$$

Beispiel 5.3 (L^1_{loc} und C_0^∞). Die Funktion $w\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ liegt in $L^1_{\text{loc}}(0,1)$, aber nicht in $L^1(0,1)$.

$\phi\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$ liegt in $C^\infty(0,\pi)$, jedoch nicht in $C_0(0,\pi)$, also auch nicht in $C_0^\infty(0,\pi)$.

Die Funktion $\phi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

liegt in $C_0^\infty(a,b)$, wenn $a < -1$ und $b > 1$, denn $\operatorname{supp}\phi = [-1,1]$.

Analog ist $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(a,b)$,

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|\frac{x}{\varepsilon}|^2}\right) & \text{für } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$, wenn $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \subset (a,b)$.

Beispiel 5.4 (schwache Ableitung). Sei $u(x) = |x|$, $v(x) = \operatorname{sgn} x$ in $(-1,1)$. Dann ist v *eine* schwache Ableitung von u:

$$\int_{-1}^{1} |x|\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x)\phi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\phi'(x)\mathrm{d}x =$$
$$\underbrace{-x\phi(x)\Big|_{-1}^{0}}_{=0} - \int_{-1}^{0}(-1)\phi(x)\mathrm{d}x + \underbrace{x\phi(x)\Big|_{0}^{1}}_{=0} - \int_{0}^{1}\phi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} v(x)\phi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Allerdings ist auch jede Funktion, die sich von v nur auf einer Nullmenge unterscheidet, ebenfalls eine schwache Ableitung von u.

v besitzt keine schwache Ableitung, da sonst

$$\int_{-1}^{1} v(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}\phi'(x)\mathrm{d}x = 2\phi(0) \overset{!}{=} -\int_{-1}^{1} w(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

für ein $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(-1,1)$, was nicht für alle ϕ zu erfüllen ist (Übung!).

Satz 5.5 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** *Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ und es gelte*

$$\int_a^b u(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$. Dann gilt $u(x) = 0$ für fast alle $x \in (a,b)$.

Um diese Aussage beweisen zu können, benötigen wir jedoch die Theorie der Regularisierung.

Definition 5.6. Sei $\varepsilon > 0$. Eine Funktion $\rho_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Mittelungskern*, falls

(i) $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$ und

(iii) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei die auf (a,b) gegebene Funktion u außerhalb von (a,b) zu $\bar{u}$ mit Null fortgesetzt. Die Faltung $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \star \bar{u}$,

$$(\rho_\varepsilon \star \bar{u})(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)\bar{u}(\xi)\mathrm{d}\xi\,,$$

heißt *Mittelfunktion* oder *Regularisierung* von u.

Ein Beispiel für einen Mittelungskern bildet

$$\rho_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|\frac{x}{\varepsilon}|^2}\right) & \text{für } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

mit dem Normierungsfaktor

$$c_\varepsilon = \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x\right)^{-1} .$$

Wählen wir ρ_ε auf diese Weise, gilt außerdem

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) ,$$

was wir im folgenden stets für Folgen $\{\rho_\varepsilon\}$ von Mittelungskernen voraussetzen.

Satz 5.7. *Sei $u \in L^p(a,b)$ für $1 \le p < \infty$. Dann sind die Mittelfunktionen u_ε für $\varepsilon > 0$ wohldefiniert und es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$,

(ii) $u_\varepsilon \in C_0^\infty(a,b)$ *für genügend kleines* ε, *falls* $\operatorname{supp} u \subset (a,b)$,

(iii) $\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|u\|_{L^p(a,b)}$ *(gilt auch für* $p = \infty$*)*,

(iv) $u_\varepsilon \to u$ *in* $L^p(a,b)$, *d.h.* $\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(a,b)} = 0$, *und*

(v) $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ *für fast alle* $x \in (a,b)$.

(vi) $\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon - u\|_{C(K)} = 0$, *für kompakte Mengen* $K \subset (a,b)$, *falls* $u \in C(a,b)$.

Beweis. (i) und (ii) folgen aus der Definition der Mittelfunktionen.
Zu (iii): Die Hölder-Ungleichung liefert für $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\overline{u}(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \le \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)|\overline{u}(\xi)|^p\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)|\overline{u}(\xi)|^p\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Mit Fubini erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} |u_\varepsilon(x)|^p\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)|\overline{u}(\xi)|^p\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)\mathrm{d}x}_{=1}|\overline{u}(\xi)|^p\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Zu (iv): Es ist

$$\int_a^b |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p\mathrm{d}x \to 0$$

zu zeigen. Hierzu beobachten wir wegen $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon(x-\cdot) = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ zunächst

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)olu(\xi)\mathrm{d}\xi - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)\mathrm{d}\xi}_{=1}\, u(x)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-\xi)(\overline{u}(\xi) - u(x))\mathrm{d}\xi\right| \\ &= \left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-\xi)(\overline{u}(\xi) - u(x))\mathrm{d}\xi\right| . \end{aligned}$$

Die Subsitution $y := \frac{x-\xi}{\varepsilon}$ liefert $\xi = x - \varepsilon y$, also $\mathrm{d}\xi = -\varepsilon \mathrm{d}y$ und damit

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} \varepsilon \rho_\varepsilon(\varepsilon y)(\overline{u}(x - \varepsilon y) - u(x))\mathrm{d}y \right| \\ &= \left| \int_{-1}^{1} \rho_1(y)(\overline{u}(x + \varepsilon y) - u(x))\mathrm{d}y \right| . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p \mathrm{d}x &\leq \int_a^b \left(\int_{-1}^{1} \rho_1(y) |\overline{u}(x - \varepsilon y) - u(x)| \mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \left(\int_{-1}^{1} \rho_1(y) \mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-1}^{1} \rho_1(y) |\overline{u}(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \rho_1(y) \int_a^b |\overline{u}(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Für festes $y \in [-1, 1]$ ist

$$\|\overline{u}(\cdot - \varepsilon y) - u\|^p_{L^p(a,b)} = \int_a^b |\overline{u}(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \mathrm{d}x \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$, außerdem lässt sich für den Integranden in (5.2) eine integrierbare Majorante finden, da $\overline{u}, u \in L^p$. Der Satz von Lebesgue liefert also $\|u_\varepsilon - u\|^p_{L^p(a,b)} \to 0$.

(v) lässt sich ähnlich zeigen, man verwende dazu die Gleichung (5.1).

Zu (vi): Unter den genannten Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x)(\overline{u}(\xi) - \overline{u}(x)) \mathrm{d}\xi \right| \\ &= \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \rho_1 \left(\frac{x - \xi}{\varepsilon} \right) (\overline{u}(\xi) - \overline{u}(x)) \mathrm{d}\xi \right| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |\overline{u}(\xi) - \overline{u}(x)| \mathrm{d}\xi}_{\to 0} \max_{y \in [-1,1]} \rho_1(y) \to 0 \, . \end{aligned}$$

Die zu zeigende Aussage folgt nun wegen gleichmäßiger Stetigkeit von u auf K. □

Beweis zu Satz 5.5. Es sei $[c, d] \subset (a, b)$, $c < d$, ein kompaktes Intervall. Wir wollen $\int_c^d |u(x)| \mathrm{d}x = 0$ zeigen, woraus $u(x) = 0$ fast überall folgen würde. Nun sei

$$w(x) := \begin{cases} \operatorname{sgn} u(x) & \text{falls } x \in [c, d] \\ 0 & \text{sonst} \, . \end{cases}$$

Für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ liegt nun die Regularisierung w_ε in $C_0^\infty(a, b)$ und es ist $w_\varepsilon(x) \to w(x)$ fast überall für $\varepsilon \to 0$. Außerdem ist nach Voraussetzung $\int_a^b u(x) w_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = 0$. Wir wollen nun den Satz von Lebesgue anwenden, um $\int_a^b u(x) w(x) \mathrm{d}x = \int_c^d |u(x)| \mathrm{d}x = 0$ zu erhalten. Um eine Majorante für die w_ε zu finden, beobachten wir

$$|w_\varepsilon(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x - \xi) w_\varepsilon(\xi) \mathrm{d}\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x - \xi) \mathrm{d}\xi \underbrace{\max_{\xi \in \mathbb{R}} |w(\xi)|}_{=1} = 1 \, ,$$

d.h. $|u(x)w_\varepsilon(x)| \leq |u(x)|$. Da $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$, ist $u \in L^1(c,d)$ und damit ist $|u|$ eine integrierbare Majorante für uw_ε. □

Korollar 5.8. *Es sei $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ und es gelte*

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = 0$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$. Dann folgt $u(x) \equiv \text{const}$ fast überall.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 5.9. Die schwache Ableitung einer Funktion ist eindeutig bestimmt: Es seien v und w zwei schwache Ableitungen von u. Dann gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\int_a^b v(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b w(x)\phi(x)\mathrm{d}x\,,$$

also

$$\int_a^b (v(x) - w(x))\phi(x)\mathrm{d}x = 0\,,$$

womit $v(x) = w(x)$ fast überall folgt.

Für $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ können wir außerdem $v \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ als schwache Ableitung n-ter Ordnung von u bezeichnen, falls

$$\int_a^b v(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (-1)^n \int_a^b u(x)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$ gilt.

Im Gegensatz zu klassischen Ableitungen höherer Ordnung setzen wir für die Definition der n-ten schwachen Ableitung also nicht die Existenz der $(n-1)$-ten Ableitung voraus. Wir können jedoch zeigen, dass die Existenz dieser notwendig für die Existenz der n-ten Ableitung einer integrierbaren Funktion ist.

Satz 5.10. *Es sei $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ und besitze für $n \in \mathbb{N}$ die schwache Ableitung n-ter Ordnung $u^{(n)} \in L^1(a,b)$. Dann existiert für jedes $k = 0, \dots, n-1$ auch die schwache Ableitung k-ter Ordnung und diese ist absolut stetig.*

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} v_n(x) &:= u^{(n)}(x) && \text{und} \\ v_{k-1}(x) &:= \int_a^x v_k(\xi)\mathrm{d}\xi && \text{für } k = n, n-1, \dots, 1\,. \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass $v_{n-1}, \dots, v_0$ absolut stetig auf $[a,b]$ sind und v_{k-1} die schwache Ableitung v_k besitzt. Insbesondere ist für $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\int_a^b v_{n-1}(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b v_0(x)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

also unterscheidet sich v_0 von u nur durch ein Polynom vom Grad $n-1$. Rekursiv erhalten wir, dass sich v_k nur durch ein Polynom $(n-k-1)$-ten Grades von der schwachen Ableitung $u^(k)$ von Ordnung k unterscheidet. □

Wir führen nun einen ersten Raum von schwach differenzierbaren Funktionen ein. Vorher wollen wir jedoch den Begriff der Einbettung definieren.

Definition 5.11. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume. Existiert eine lineare und injektive Abbildung $i\colon X \to Y$, so sagen wir dass X in Y *eingebettet* ist und nennen i eine *Einbettung*.

(i) Ist i sogar stetig, so sagen wir, dass X stetig in Y eingebettet ist, und schreiben

$$X \hookrightarrow Y\,.$$

(ii) Ist i sogar kompakt, so sagen wir, dass X kompakt in Y eingeettet ist, und schreiben

$$X \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} Y\,.$$

(iii) Ist $i(X)$ dicht in Y, so sagen wir, dass X dicht in Y eingebetttet ist. Ist diese Einbettung zusätzlich stetig, so schreiben wir

$$X \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} Y\,.$$

Ist X sowohl kompakt als auch dicht in Y eingebettet, so schreiben wir

$$X \overset{\mathrm{d\,c}}{\hookrightarrow} Y\,.$$

Mithilfe von i können wir dann Elemente von X als Elemente von Y auffassen. Identifizieren wir X mit $i(X)$, so betrachten wir X als Teilmenge von Y. Oft ist X bereits – als Menge, nicht als normierter Raum – Teilmenge von Y und wir können i als Identität wählen.

Satz 5.12. *Es sei $W^{1,1}(a,b)$ der Vektorraum aller Funktionen $u \in L^1(a,b)$ mit schwacher Ableitung $u' \in L^1(a,b)$. Dann ist jedes $u \in W^{1,1}(a,b)$ auf $[a,b]$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. Mit*

$$\|u\|_{1,1} := \int_a^b (|u(x)| + |u'(x)|)\mathrm{d}x = \|u\|_{L^1} + \|u'\|_{L^1}$$

wird auf $W^{1,1}(a,b)$ eine Banachraum-Norm definiert. Nun ist

$$W^{1,1}(a,b) \hookrightarrow C([a,b])\,,$$

d.h. $W^{1,1}(a,b)$ ist stetig in $C^{(}[a,b])$ eingebettet, wobei

$$\|u\|_{C([a,b])} \le \frac{\max(1, b-a)}{b-a}\|u\|_{1,1} \tag{5.3}$$

für $u \in W^{1,1}(a,b)$.

Beweis. Für $u \in W^{1,1}(a,b)$ setzen wir

$$v(x) := \int_a^b u'(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Dann ist v absolut stetig und es lässt sich zeigen, dass die fast überall existierende klassische Ableitung von v mit der schwachen Ableitung übereinstimmt, d.h. $v' = u'$. Nun ist für $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\int_a^b v(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b v'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b u'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x\,,$$

woraus $v = u + \mathrm{const}$ fast überall folgt. Damit ist u fast überall gleich der absolut stetigen Funktion $v - \mathrm{const}$.

Auf den Beweis, dass $(W^{1,1}(a,b), \|\cdot\|_{1,1})$ ein Banach-Raum ist, verzichten wir.

Wir zeigen nun (5.3). Es sei dazu u der absolutstetige Repräsentant der entsprechenden Äquivalenzklasse. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert die Existenz eines $x_0 \in [a,b]$ mit

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\mathrm{d}x = u(x_0)\,.$$

Dies ergibt

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^x u'(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(\xi)|\mathrm{d}\xi + \int\limits_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |u'(\xi)|\mathrm{d}\xi \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(\xi)|\mathrm{d}\xi + \int_a^b |u'(\xi)|\mathrm{d}\xi \leq \max\left(1, \frac{1}{b-a}\right)\|u\|_{1,1}\,.\end{aligned}$$

□

Wir nennen $W^{1,1}(a,b)$ einen *Sobolew-Raum*. Analog zu $W^{1,1}(a,b)$ können wir $W^{m,p}(a,b)$ (auch $H^{m,p}(a,b)$) als den Raum aller $u \in L^p(a,b)$ mit schwachen Ableitung $u^{(k)} \in L^p(a,b)$ für $k = 1,\ldots,m$ definieren. Dabei ist also p der *Lebesgue-Exponent* und m die Differentiationsordnung. Wir setzen außerdem $H^m := W^{m,2}$.

6 Sobolew-Räume $H^1(a,b)$, $H_0^1(a,b)$ und $H^{-1}(a,b)$

Wir führen in diesem Kapitel die Sobolew-Rume $H^1(a,b) = W^{1,2}(a,b)$ und $H_0^1(a,b) = W_0^{1,2}(a,b)$ ein.

Definition 6.1. Der Raum $H^1(a,b)$ ist der Vektorraum aller Funktionen $u \in L^2(a,b)$, die eine schwache Ableitung $u' \in L^2(a,b)$ besitzen.

Satz 6.2. *Auf dem Raum $H^1(a,b)$ wird durch*

$$((u,v))_{1,2} := \int_a^b (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt, also durch $\|u\|_{1,2} = \sqrt{((u,u))_{1,2}}$ eine Norm definiert. Damit ist $H^1(a,b)$ ein Hilbert-Raum.
Durch

$$|u|_{1,2}^2 := \int_a^b |u'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

wird auf $H^1(a,b)$ eine Halbnorm $|\cdot|_{1,2}$ definiert.
Der Hilbert-Raum $H^1(a,b)$ ist separabel.

Beweisidee. Um die Vollständigkeit von $H^1(a,b)$ zu zeigen, wählen wir eine Cauchy-Folge $\{u_n\}$ in $H^1(a,b)$. Dann sind insbesondere $\{u_n\}$ und $\{u_n'\}$ Cauchy-Folgen in $L^2(a,b)$ und konvergieren damit gegen Grenzfunktionen u und v, d.h. es existieren $u, v \in L^2(a,b)$ mit $u_n \to u$ und $u_n' \to v$ in $L^2(a,b)$. Zu zeigen bleibt $u' = v$, also $\int_a^b v(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x$ für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$. Es ist jedoch

$$\begin{array}{ccc} \int_a^b u_n'(x)\phi(x)\mathrm{d}x & = & -\int_a^b u_n(x)\phi'(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_a^b v(x)\phi(x)\mathrm{d}x & = & -\int_a^b u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x\,. \end{array}$$

Um zu zeigen, dass $H^1(a,b)$ separabel ist, bemerken wir, dass $L^2(a,b) \times L^2(a,b)$ separabel ist und $T\colon H^1(a,b) \to L^2(a,b) \times L^2(a,b)$ mit $Tu = (u,u')$ eine Isometrie ist. Da also $H^1(a,b)$ isomorph zu einem separablen Raum $T\big(H^1(a,b)\big)$ ist, ist $H^1(a,b)$ separabel. □

Eine ähnliche Aussage wie die über die Stetigkeit der Funktionen aus $W^{1,1}(a,b)$ lässt sich für die aus $H^1(a,b)$ zeigen.

Satz 6.3. *Eine Funktion aus $H^1(a,b)$ ist fast überall auf $[a,b]$ gleich einer absolut stetigen Funktion und es gilt sogar*

$$H^1(a,b) \overset{c}{\hookrightarrow} C([a,b])\,,$$

wobei

$$\|v\|_{C([a,b])} = \|v\|_{0,\infty} \le \sqrt{2}\max\left(\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{b-a}\right)\|v\|_{1,2} \tag{6.1}$$

für alle $v \in H^1(a,b)$.

Beweis. Die erste Behauptung über absolut stetige Funktionen folgt tatsächlich aus der über $W^{1,1}(a,b)$, denn $H^1(a,b)$ ist ein Unterraum von $W^{1,1}(a,b)$, da $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$.

Auch die Abschätzung (6.1) können wir aus der analogen Aussage über $W^{1,1}(a,b)$. Für ein $w \in L^2(a,b)$ erhalten wir nämlich mit der Hölder-Ungleichung $\|w\|_{L^1} \leq \sqrt{b-a}\|w\|_{L^2}$, für $u \in H^1(a,b)$ also

$$\begin{aligned}
\|u\|_{0,\infty} &\leq \max\left(1, \frac{1}{b-a}\right)(\|u\|_{L^1} + \|u'\|_{L^1}) \\
&\leq \max\left(\sqrt{b-a}, \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\left(\sqrt{\|u\|_{L^2}^2} + \sqrt{\|u'\|_{L^2}^2}\right) \\
&\leq \max\left(\sqrt{b-a}\frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2}\,.
\end{aligned}$$

[. . .] □

7 Variationelle Formulierung und Operatorgleichung

8 Lineare Variationsprobleme mit stark positiver Bilinearform

9 Nichtlineare Variationsprobleme mit stark monotonem, Lipschitz-stetigem Operator

10 Galerkin-Verfahren und Finite-Elemente-Methode

11 Anwendungen auf stationäre Differentialgleichungen in mehreren Dimensionen

12 Exkurs zur Funktionalanalysis

Im Folgenden werden wir einige Begriffe der Funktionalanalysis benötigen, insbesondere den der schwachen Konvergenz. In diesem Kapitel sammeln wir alle benötigten Definitionen und Hilfsmittel und wiederholen auch einige bereits verwendete Begriffe. Für unsere Zwecke werden wir dabei einige Notationen anpassen, Definitionen in Spezialfällen betrachten und die aufgeführten Sätze in der Regel ohne Beweis angeben.

Wir beginnen mit der Definition des Dualraums.

Definition 12.1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller, normierter Raum (so auch im folgenden). Dann ist

$$X^* := \{f\colon X \to \mathbb{R} : f \text{ ist linear und beschränkt}\}$$

der *Dualraum* von X. Mit

$$\|f\|_* := \sup_{\substack{v\in X\\ v\neq 0}} \frac{f(v)}{\|v\|}$$

ist $(X^*, \|\cdot\|_*)$ ein Banach-Raum.

Bemerkung. Statt $f(v)$ schreiben wir auch $\langle f, v\rangle$.

Einer der wichtigsten Sätze der Funktionalanalysis ist der folgende Satz von Hahn-Banach, der in der Literatur in vielen Formulierungen aufzufinden ist und aus dem viele interessante Korollare gezogen werden können.

Satz 12.2 (Hahn-Banach)**.** *Sei Y ein Unterraum des normierten Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$. Sei weiter $f \in Y^*$. Dann gibt es ein $\tilde{f} \in X^*$ mit*

$$\tilde{f}\big|_Y = f \quad \textit{und} \quad \|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}\,.$$

Korollar 12.3. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ existiert stets ein $f \in X^*$ mit*

$$f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$

(ii) *Zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$ gibt es ein $f \in X^*$ mit*

$$f(x) = \|x\| \quad \textit{und} \quad \|f\|_* = 1\,.$$

(iii) *Für jedes $x \in X$ gilt*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|_*\leq 1}} |f(x)|\,.$$

(iv) *Ist M ein Unterraum von X mit $\overline{M} \neq X$, d.h. M liegt nicht dicht, dann existiert ein $f \in X^*$, $f \neq 0$ mit $f\big|_M = 0$.*

Beweis.

(i) Ohne Beweis.

(ii) Sei für $x \in X$

$$Y = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ und } g_x \colon Y \to \mathbb{R},\ g_x(y) = \lambda\|x\| \text{ für } y = \lambda x\,.$$

Dann ist g_x linear und beschränkt mit

$$|g_x(y)| = |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|y\|\,,$$

also $\|g_x\|_* = 1$. Nach Hahn-Banach gibt es ein $f_x \in X^*$ mit $\|f_x\|_* = 1$ und insbesondere $f_x(x) = g_x(x) = 1 \cdot \|x\|$.

(iii) Es ist $|f(x)| \leq \|f\|_*\|x\|$, also

$$\sup|f(x)| \leq \|x\|$$

für $\|f\|_* = 1$. Mit (ii) gilt auch

$$\|x\| = |f_x(x)| \leq \sup|f(x)|\,.$$

(iv) Ohne Beweis.

□

Wir wollen in dieser Vorlesung meist einen Banach-Raum betrachten, den wir mit dem Dualraum seines Dualraumes identifzieren können. Solche Räume werden reflexiv genannt; diesen Begriff wollen wir nun formal definieren.

Definition 12.4. Als *Bidualraum* bezeichnen wir $(X^*)^* = X^{**}$. Die *kanonische Abbildung* bzw. *Einbettung* bildet jedes $x \in X$ auf ein $j_x \in X^{**}$ ab, wobei

$$j_x(f) := f(x)\,.$$

Die Beschränktheit von j_x ist dabei durch

$$|j_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_*\|x\|$$

gegeben.

Bemerkung. Mit der alternativen Schreibweise für Funktionale haben wir

$$f(x) = \langle f, x\rangle_{X^*,X} = \langle j_x, f\rangle_{X^{**},X^*}\,.$$

Weiterhin ist

$$\|j_x\|_{**} = \|x\|$$

und $j \colon X \to X^{**},\ x \to j_x$ ist nach obigem Korollar injektiv und außerdem linear.

Definition 12.5. Ein Raum X heißt *reflexiv*, wenn j zusätzlich surjektiv ist. Wir können dann X mit X^{**} und x mit j_x identifizieren.

Bemerkung. Ein reflexiver Raum ist isometrisch isomorph zum Banach-Raum X^{**}, muss also selbst ein Banach-Raum sein.

Satz 12.6. *Sei X ein Banach-Raum. Dann ist X genau dann reflexiv, wenn X^* reflexiv ist.*

Ist X reflexiv, dann ist X genau dann separabel, wenn X^* separabel ist.

Ist X^* separabel, dann ist X separabel.

Im folgenden sei X stets ein Banach-Raum.

Wir erinnern an dieser Stelle, dass eine Folge $(x_n) \subset X$ definitionsgemäß genau dann (*stark*) gegen ein $x \in X$ konvergiert, wenn $\|x_n - x\| \to 0$. Nun führen wir den im folgenden überaus wichtigen Begriff der schwachen Konvergenz ein, der eine Verallgemeinerung des starken Konvergenzbegriffes darstellt.

Definition 12.7. Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ heißt *schwach konvergent* gegen $x \in X$, wenn für jedes $f \in X^*$

$$\langle f, x_n - x \rangle \to 0$$

gilt. Wir schreiben dann $x_n \rightharpoonup x$.

Eine Folge $\{f_n\} \subset X^*$ heißt *schwach* konvergent* gegen $f \in X^*$, wenn für jedes $x \in X$

$$\langle f_n - f, x \rangle \to 0$$

gilt. Wir schreiben dan $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Bemerkung. Wegen

$$\langle f, x_n - x \rangle \leq \|f\|_* \|x_n - x\|$$

impliziert starke Konvergenz auch schwache Konvergenz.

Wir führen nun einige Eigenschaften schwach konvergenter Folgen auf. Insbesondere betrachten wir schwach konvergente Teilfolge, welche im Laufe der Vorlesung eine wichtige Rolle in Beweisen spielen.

Satz 12.8. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Schwach bzw. schwach* konvergente Folgen haben stets einen eindeutigen Grenzwert.*

(ii) *Schwach konvergente Folgen $\{x_n\}$, $x_n \rightharpoonup x$, sind beschränkt und es gilt*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\| \,.$$

(iii) *Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ konvergiert genau dann schwach gegen x in X, wenn sie beschränkt ist und es eine Menge $M \subset X^*$ gibt, so dass $f(x_n) \to f(x)$ für alle $f \in M$, und $\overline{\operatorname{span} M} = X^*$.*

(iv) *In einem endlichdimensionalen Banach-Raum sind starke und schwache Konvergenz äquivalent.*

(v) *Eine beschränkte Folge in einem reflexiven Banach-Raum besitzt stets eine schwach konvergente Teilfolge.*

(vi) *Eine beschränkte Folge von Funktionalen aus dem Dualraum eines separablen normierten Raumes besitzt stets eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

(vii) *Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \to f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$. Analog: Aus $x_n \to x$ in X und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

(viii) *Ist $\{x_n\} \subset X$ eine beschränkte Folge und konvergiert jede schwach konvergente Teilfolge (schwach) gegen dasselbe $x \in X$, dann konvergiert auch x_n schwach gegen x.*

Beweis. Teilweise in der Übung. □

Wie zu erwarten, nennen wir eine Menge $M \subset X$ *schwach abgeschlossen*, wenn für schwach konvergente Folgen $\{x_n\} \subset M$ mit $x_n \rightharpoonup x$ in X auch ihr (schwacher) Grenzwert x in M liegt.

Satz 12.9 (Mazur)**.** *Sei $M \subset X$ konvex. M ist genau dann schwach abgeschlossen, wenn M abgeschlossen ist.*

Beispiel 12.10. Sei $X = L^2(\mathbb{R})$ mit

$$\|v\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Wähle

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{(n,2n)}(x)\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

Dann ist $\|u_n\| = 1$. Wir zeigen, dass $\{u_n\}$ keine Cauchy-Folge ist: Wähle m gerade und $n = \frac{3}{2}m$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|_{L^2}^2 &= \int_m^{\frac{3}{2}m} \frac{1}{m}\mathrm{d}t + \int_{\frac{3}{2}m}^{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3m}}\right)^2 \mathrm{d}t + \int_{2m}^{3m} \frac{2}{3m}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3} \not\to 0\,.\end{aligned}$$

Aber $u_n \rightharpoonup 0$: Sei $v \in L^2(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{n}} v(x)\mathrm{d}t \le \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\left(\int_n^{2n} |v(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \to 0\,.$$

Also konvergiert u_n schwach gegen Null, konvegriert aber nicht stark.

Beispiel 12.11. Sei $X = L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$ und $\tilde{u}$ sei die periodische Fortsetzung von

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} a & \text{für } 0 < x < \theta \\ b & \text{für } \theta < x < 1\,. \end{cases}$$

Wir definieren

$$u_n(x) = \tilde{u}(nx)$$

für $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\|u_n\|^p &= \int_0^1 |u_n(x)|^p \mathrm{d}x = \int_0^1 |\tilde{u}(nx)|^p \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\int_0^n |\tilde{u}(z)|^p \mathrm{d}z \le \max(a,b)^p\,.\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $(L^p(0,1))^* = L^q(0,1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und dass Treppenfunktionen dicht in $L^q(0,1)$ liegen. Wir betrachten daher charakteristische Funktionen $\mathbb{1}_{(c,d)}$.

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{1}_{(c,d)}, u_n\rangle &= \int_0^1 u_n(x)\, \mathbb{1}_{(c,d)}(x)\mathrm{d}x = \int_c^d u_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{nc}^{nd} \tilde{u}(z)\mathrm{d}z \\ &\to (d-c)(\theta a + (1-\theta)b) = \int_c^d (\theta a + (1-\theta)b)\mathrm{d}x = \langle \mathbb{1}_{(c,d)}, \theta a + (1-\theta)b\rangle\,.\end{aligned}$$

Beispiel 12.12. Sei $X = L^1(0,1)$ und

$$u_n(x) = \begin{cases} 2n(1-nx) & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann ist

$$\|u_n\|_{L^1} = \int_0^1 |u_n(x)| = 1\,,$$

die Folge der u_n ist also beschränkt. Mit $f \equiv 1 \in L^\infty(0,1)$ ist $\langle f, u_n \rangle = 1$, es kann also nicht $u_n \rightharpoonup 0$ gelten. Sei nun $\phi \in C_0^\infty(0,1) \subset L^\infty(0,1)$. Dann ist

$$\langle \phi, u_n \rangle = \int_0^1 \phi(x) u_n(x) \mathrm{d}x \to 0\,,$$

da ab einem genügend großen $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{supp} u_n \cap \operatorname{supp} \phi = \left[0, \frac{1}{n}\right] \cap \operatorname{supp} \phi = \emptyset\,.$$

Damit kann $\{u_n\}$ nicht schwach konvergieren.

Abschließend geben wir einen letzten großen Satz aus der Funktionalanalysis an.

Satz 12.13 (Banach-Steinhaus)**.** *Seien $A_n \in L(X,Y)$, wobei X ein Banach-Raum und Y ein normierter Raum ist. Ist die Folge der A_n punktweise beschränkt, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein $M_x > 0$, so dass $\|A_n x\| \leq M_x$, so ist die Folge $\{A_n\}$ beschränkt, d.h. $\|A_n\| \leq M$.*

13 Nichtlineare Variationsprobleme mit monotonem Operator

Wir wenden uns nun wieder der Lösbarkeit von Differentialgleichungen in ihrer schwachen Formulierung bzw. Operatorgleichungen zu. Um diese Gleichungen untersuchen zu können, definieren wir zunächst einige Eigenschaften, die wir von den betrachteten Operatoren fordern möchten. Wir beginnen dabei mit Stetigkeitsbegriffen, die auch die weiter oben eingeführte schwache Konvergenz verwenden.

Definition 13.1. Sei V ein reeller reflexiver Banach-Raum. Ein Operator $A\colon V \to V^*$ heißt

(i) *demistetig*, falls aus $v_n \to v$ in V folgt, dass $Av_n \rightharpoonup Av$ in V^*.

(ii) *hemistetig*, falls $t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle$ für alle $u, v, w \in V$ auf $[0,1]$ stetig ist.

(iii) *radialstetig*, falls $t \mapsto \langle A(u+tv), v\rangle$ für alle $u, v \in V$ auf $[0,1]$ stetig ist.

(iv) *verstärkt stetig*, falls aus $u_n \rightharpoonup u$ in V folgt, dass $Au_n \to Au$ in V^*.

(v) *lokal beschränkt*, falls es zu jedem $u \in V$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $M > 0$ gibt, so dass für alle $v \in \overline{B(u,\varepsilon)}$
$$\|Av\|_* \le M$$
gilt.

Lemma 13.2. *Es gelten folgende Implikationen für die Eigenschaften von Operatoren:*

(i) *Verstärkte Stetigkeit impliziert auf reflexiven Räumen die Kompaktheit.*

(ii) *Kompaktheit impliziert Stetigkeit.*

(iii) *Stetigkeit impliziert Demistetigkeit.*

(iv) *Demistetigkeit impliziert auf reflexiven Räumen Hemistetigkeit.*

(v) *Hemistetigkeit impliziert Radialstetigkeit.*

(vi) *Verstärkte Stetigkeit impliziert Stetigkeit.*

(vii) *Demistetigkeit impliziert lokale Beschränktheit.*

(viii) *Lineare kompakte Operatoren sind verstärkt stetig.*

Beweis.

(i) Sei V reflexiv und A verstärkt stetig, also insbesondere stetig. Sei $\{u_n\} \subset V$ eine beschränkte Folge. Aufgrund der Reflexivitität von V existieren eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$ und ein $u \in V$ mit $u_{n'} \rightharpoonup u$. Mit der verstärkten Stetigkeit folgt $Au_{n'} \to Au$.

(ii) Klar.

(iii) Klar.

(iv) Sei A nun demistetig. Zu zeigen ist, dass $t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle \in C[0,1]$. Für $t_n \to t$ ist $u + t_n v \to u + tv$ in V. Hieraus folgt $A(u+t_n v) \rightharpoonup A(u+tv)$, also $A(u+t_n v) \overset{*}{\rightharpoonup} A(u+tv)$.

(v) Klar.

(vi) Klar.

(vii) Sei A wieder demistetig. Angenommen, A wäre nicht lokal beschränkt. Dann gibt es ein $u \in V$ und eine Folge $\{u_n\} \subset V$ mit $\|Au_n\|_* \to \infty$ und $u_n \to u$ in V. Aber $u_n \to u$ impliziert $Au_n \rightharpoonup Au$ in V^* und schwach konvergente Folgen sind beschränkt.

(viii) Sei A nun linear und kompakt. Es gelte $u_n \rightharpoonup u$. Zu zeigen: $Au_n \to Au$. $\{u_n\}$ ist beschränkt, also gibt es eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$ und ein $a \in V^*$, so dass $Au_{n'} \to a$. Zu $A \in L(V, V^*)$ existiert der duale Operator $A^* \in L(V^{**}, V^*)$ mit $\langle Av, w\rangle = \langle A^*w, v\rangle$. Dann folgt, dass für alle $w \in V$

$$0 \leftarrow \langle A^*w, u_n - u\rangle = \langle A(u_n - u), w\rangle = \langle Au_n - Au, w\rangle \,.$$

Also $Au_n \overset{*}{\rightharpoonup} Au$. Damit folgt $a = Au$. Angenommen, es gäbe eine Teilfolge $\{Au_{n'}\}$ von $\{Au_n\}$, die nicht schwach konvergiert. Dann wäre diese Folge unbeschränkt, es ließe sich jedoch eine schwach konvergente (Teil-)Teilfolge finden.

□

Die folgenden Definitionen beschreiben Monotonie-Eigenschaften von Operatoren, welche zum Teil bereits bekannt sind.

Definition 13.3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller reflexiver Banach-Raum. Eine Abbildung $A\colon V \to V^*$ heißt

(i) *monoton*, falls für alle $v, w \in V$

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle \geq 0 \,.$$

(ii) *strikt monoton*, falls für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle > 0 \,.$$

(iii) *stark monoton*, falls es ein $\mu > 0$ gibt, so dass für alle $v, w \in V$

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle \geq \mu\|v - w\|^2 \,.$$

(iv) *gleichmäßig monoton*, falls es eine strikt monoton wachsende Funktion $\rho\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $\rho(0) = 0$ gibt, so dass für alle $v, w \in V$

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle \geq \rho(\|v - w\|) \,.$$

(v) *d-monoton*, falls es eine strikt monoton wachsende Funktion $\alpha\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ gibt, so dass für alle $v, w \in V$

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle \geq (\alpha(\|v\|) - \alpha(\|w\|))(\|v\| - \|w\|) \,.$$

(vi) *koerzitiv*, falls es eine Funktion $\gamma\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{z\to\infty} \gamma(z) = \infty$ gibt, so dass für alle $v \in V$

$$\langle Av, v\rangle \geq \gamma(\|v\|)\|v\| \,,$$

d.h.

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} \to \infty \,, \ \|v\| \to \infty \,.$$

Wir zeigen nun einige Zusammenhänge zwischen den eingeführten Stetigkeits- und Monotoniebegriffen.

Lemma 13.4. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reller Banach-Raum und $A\colon V \to V^*$ ein Operator.*

(i) *Ist A gleichmäßig monoton, so ist A auch strikt monoton.*

(ii) *Ist A stark monoton, so ist A auch gleichmäßig monoton.*

(iii) *Ist A stark monoton, so ist A auch d-monoton.*

(iv) *Ist A stark monoton, so ist A auch koerzitiv.*

(v) *Ist A monoton, so ist A lokal beschränkt.*

(vi) *Ist A linear und monoton, so ist A stetig.*

(vii) *Ist A monoton und radialstetig und ist V reflexiv, so ist A demistetig.*

(viii) *Ist A schließlich d-monoton, so ist A monoton.*

Beweis. Zu (iii): Die d-Monotonie ergibt sich durch $\alpha = \mathrm{id}$.
Zu (iv): Für die Koerzitivität wähle man $w = 0$ und erhält

$$\langle Av, v\rangle = \langle Av - A(0), v\rangle + \langle A(0), v\rangle \geq \mu\|v\|^2 - \|A(0)\|_*\|v\|\,,$$

also

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} \geq \mu\|v\| - \|A(0)\|\,.$$

Zu (v): Angenommen, A wäre nicht lokal beschränkt. Dann gibt es eine Folge $\{u_n\} \subset V$ und ein $u \in V$ mit $u_n \to u$, aber $\|Au_n\|_* \to \infty$. Sei $\alpha_n := 1 + \|Au_n\|_*\|u_n - u\|$. Dann ist offenbar $\frac{1}{\alpha_n} \leq 1$ und für $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_n}\langle Au_n, v\rangle &\leq \frac{1}{\alpha_n}\Big(\langle Au_n, v\rangle + \langle Au_n - A(u+v), u_n - (u+v)\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{\alpha_n}\Big(\langle Au_n, u_n - u\rangle - \langle A(u+v), u_n - (u+v)\rangle\Big)\\
&\leq \frac{1}{\alpha_n}\Big(\|Au_n\|_*\|u_n - u\| + \|A(u+v)\|_*\|u_n - (u+v)\|\Big)\\
&\leq 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|A(u+v)\|_* \underbrace{\|u_n - (u+v)\|}_{\leq \mathrm{const}}\,.
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{\alpha_n}\langle Au_n, v\rangle$ beschränkt für jedes v. Mit dem Satz von Banach-Steinhaus sind die $\frac{1}{\alpha_n}\|Au_n\|_*$ beschränkt durch ein $M > 0$. Damit gilt

$$\|Au_n\|_* \leq M(1 + \|Au_n\|_*\|u_n - u\|)\,.$$

Wegen $u_n \to u$ gilt für genügend großes n, dass $\|u_n - u\| \leq \frac{1}{2M}$. Dies ergibt $\|Au_n\|_* \leq 2M$. Widerspruch!
Zu (vi): A ist linear und lokal beschränkt. Wir betrachten $u_n \to u$. Sei

$$v_n := \begin{cases} \frac{u_n - u}{\|u_n - u\|^{\frac{1}{2}}} & \text{für } u_n \neq u \\ 0 & \text{für } u_n = u\,. \end{cases}$$

Damit folgt $\|Av_n\|_* \leq M$ für hinreichend großes n und ein $M > 0$, da $v_n \to 0$. Wir haben nun

$$\|Au_n - Au\|_* = \|A(u_n - u)\| = \left\| Av_n \|u_n - u\|^{\frac{1}{2}} \right\|_* = \|u_n - u\|^{\frac{1}{2}} \|Av_n\|_* \leq M \|u_n - u\|^{\frac{1}{2}} \to 0\,.$$

Zu (vii): Es gelte $u_n \to u$ in V. Wegen der Reflexivität fallen schwache und schwache* Konvergenz in V^* zusammen. Zu zeigen: $\langle Au_n - Au, v\rangle \to 0$ für alle $v \in V$.

Zunächst stellen wir fest, dass A lokal beschränkt ist. Also ist $\|Au_n\|_* \leq M$ für ein $M > 0$. Da auch V^* reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$ und ein $b \in V$, so dass $Au_{n'} \rightharpoonup b$ in V^*. Es folgt, dass

$$\langle Au_{n'}, u_{n'}\rangle = \langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle + \langle Au_{n'}, u\rangle \to 0 + \langle b, u\rangle\,.$$

Für beliebiges $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle Au_{n'}, u_{n'}\rangle &\geq \langle Au_{n'}, u_{n'}\rangle - \langle Au_{n'} - Av, u_{n'} - v\rangle \\ &= \langle Au_{n'}, v\rangle + \langle Av, u_{n'} - v\rangle \to \langle b, v\rangle + \langle Av, u - v\rangle\,.\end{aligned}$$

Nun folgt also

$$\langle b, u\rangle \geq \langle b, v\rangle + \langle Av, u - v\rangle\,,$$

d.h.

$$\langle b, u - v\rangle \geq \langle Av, u - v\rangle\,.$$

Sei nun $v = u - tw$ für $t \in (0,1]$ und $w \in V$. Dann folgt

$$\cancel{t}\langle b, w\rangle \geq \cancel{t}\langle A(u - tw), w\rangle\,.$$

Im Grenzwert erhalten wir aus dieser Ungleichung $\langle b, w\rangle \geq \langle Au, w\rangle$. Wählen wir $v = u + tw$, so erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung, also

$$\langle Au, w\rangle = \langle b, w\rangle$$

und damit $Au = b$.

Auch die gesamte Folge der Au_n konvergiert, denn würde sie dies nicht tun, so gäbe es eine divergente Teilfolge. Aus dieser können wir nach obiger Argumentation eine gegen $Au = b$ konvergente Teilfolge auswählen.

Zu (viii): Dies ist die Monotonie von α. □

Beispiel 13.5. Wir betrachten für $V = \mathbb{R}$ die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ g(z) = \begin{cases} |z|^{p-2} z & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0\,. \end{cases}$$

Dann ist g

(i) monoton für $p \geq 1$,

(ii) strikt monoton für $p > 1$,

(iii) stark monoton für $p = 2$.

(iv) Für $p \geq 2$ gilt für alle $z, y \in \mathbb{R}$ und ein $\mu > 0$

$$(g(z) - g(y))(z - y) \geq \mu |z - y|^p\,.$$

(v) Für $p > 1$ ist g koerzitiv mit $g(z)z = |z|^p$, also $\frac{g(z)z}{|z|} = |z|^{p-1} \to \infty$, $z \to \infty$.

(vi) Die Funktion g ist stetig.

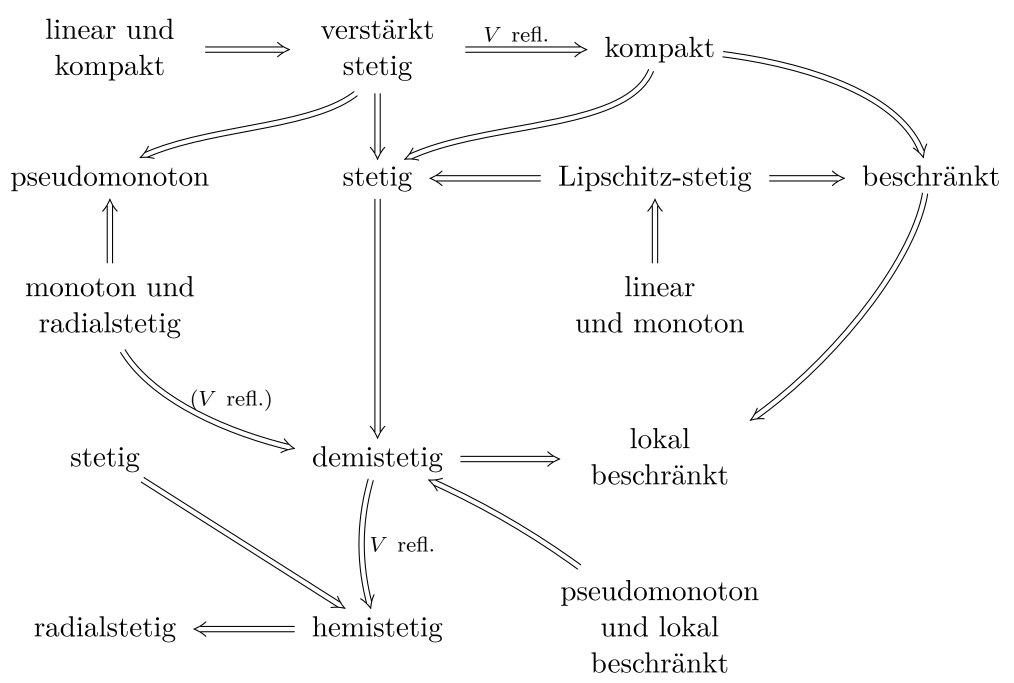
(vii) Die Funktion g ist beschränkt (d.h. bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab).

(viii) Für $p \geq 2$ gilt
$$|g(z) - g(y)| \leq (p-1)\max(|y|, |z|)^{p-2}|z - y|\,.$$
D.h. g ist Lipschitz-stetig auf jeder beschränkten Menge, also *beschränkt Lipschitz-stetig.*

Nach Lindquist gilt
$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\right) \cdot (b-a) = \frac{|b|^{p-2} + |a|^{p-2}}{2}|b-a|^2 + \frac{\left(|b|^{p-2} - |a|^{p-2}\right)\left(|b|^2 - |a|^2\right)}{2}\,,$$
denn die linke Seite entspricht
$$|b|^p - |b|^{p-2}a \cdot b - |a|^{p-2}a \cdot b + |a|^p\,,$$
die rechte Seite
$$\frac{1}{2}|b|^p - |b|^{p-2}a \cdot b + \frac{1}{2}|b|^{p-2}|a|^2 + \frac{1}{2}|a|^{p-2}|b|^2 - |a|^{p-2}a \cdot b +$$
$$\frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p - \frac{1}{2}|b|^{p-2}|a|^2 - \frac{1}{2}|a|^{p-2}|b|^2 + \frac{1}{2}|a|^p\,.$$
Durch Kürzen kann die Gleichheit gezeigt werden.

Abschließend bemerken wir, dass wir g auch als Funktion $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definieren können.

Die bisher gezeigten Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Operatoren $A\colon V \to V^*$ veranschaulichen wir nun in zwei Diagrammen. Das erste enthält zum Großteil die Stetigkeitsbegriffe aus Definition 13.1. Auch der in Definition 14.1 eingeführte Begriff der Pseudomonotonie ist enthalten.



Das zweite Diagramm verbindet vorwiegend die Monotoniebegriffe aus Definition 13.3.

$$\begin{tikzcd}
\text{d-monoton} \arrow[ddr, Rightarrow, bend right] & \text{stark monoton} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & \text{koerzitiv} \\
& \text{strikt monoton} \arrow[d, Rightarrow] & \text{gleichmäßig monoton} \arrow[l, Rightarrow] \\
& \text{monoton} \arrow[r, Rightarrow] & \text{lokal beschränkt}
\end{tikzcd}$$

Wir formulieren nun einen ersten Satz über die Lösbarkeit von Operatorgleichungen.

Satz 13.6 (Hauptsatz von Browder-Minty über monotone Operatoren, 1963)**.** *Sei V ein reeller reflexiver separabler Banach-Raum.*

(i) *Sei $A\colon V \to V^*$ monoton, radialstetig und koerzitiv. Dann gibt es zu jedem $f \in V^*$ ein $u \in V$, so dass*
$$Au = f\,.$$

(ii) *Die Lösungsmenge ist konvex, abgeschlossen und schwach abgeschlossen.*

(iii) *Ist A sogar strikt monoton, so ist die Lösung u eindeutig bestimmt. Der dann existierende inverse Operator $A^{-1}\colon V^* \to V$ ist ebenfalls strikt monoton und außerdem beschränkt und demistetig.*

(iv) *Ist A sogar stark monoton, so ist A^{-1} Lipschitz-stetig. Ist auch A Lipschitz-stetig, dann ist A^{-1} stark monoton.*

Bemerkung. Auf die Separabilität kann hier verzichtet werden. Wir fordern sie jedoch, um den Beweis nicht unnötig in die Länge zu ziehen.

Beweis. Zu (ii): Seien u, $\bar{u}$ zwei Lösungen von $Au = f$. Sei $\theta \in [0,1]$ und $u_\theta = \theta u + (1-\theta)\bar{u}$. Für beliebiges $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle f - Av, u_\theta - v\rangle &= \theta\langle f - Av, u - v\rangle + (1-\theta)\langle f - Av, \bar{u} - v\rangle \\
&= \theta\langle Au - Av, u - v\rangle + (1-\theta)\langle A\bar{u} - Av, \bar{u} - v\rangle \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Für $v = u_\theta \pm \lambda w$, $\lambda \in (0,1]$, $w \in V$ folgt

$$\langle f - A(u_\theta \pm \lambda w), \mp\lambda w\rangle \geq 0$$

und damit

$$\mp\langle f - A(u_\theta \pm \lambda w), w\rangle \geq 0\,.$$

Dies impliziert mit $\lambda \to 0$, dass $\langle f - Au_\theta, w\rangle = 0$ für alle $w \in V$, also $Au_\theta = f$.

Seien nun u_n, $n \in \mathbb{N}$, Lösungen der Gleichung, d.h. $Au_n = f$, und es gelte $u_n \rightharpoonup u$ für ein $u \in V$. Für beliebiges $v \in V$ gilt

$$\langle f - Av, u - v\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f - Av, u_n - v\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0\,.$$

Mit der Radialstetigkeit folgt wieder, dass $Au = f$, d.h. die Lösungsmenge ist schwach abgeschlossen und wegen ihrer Konvexität auch abgeschlossen.

Zu (iii): Angenommen, $u \neq \bar{u}$ sind zwei Lösungen der Gleichung. Dann wäre widersprüchlicherweise

$$0 < \langle Au - A\bar{u}, u - \bar{u} \rangle = \langle f - f, u - \bar{u} \rangle = 0\,.$$

Damit existiert $A^{-1}\colon V^* \to V = V^{**}$. Dieser Operator A^{-1} ist strikt monoton, denn für $f, g \in V$ gilt

$$\langle A^{-1}g - A^{-1}f, g - f \rangle = \langle u - \bar{u}, Au - A\bar{u} \rangle > 0\,,$$

wobei $u := A^{-1}g$ und $\bar{u} = A^{-1}f$, wenn $f \neq g$. Wir zeigen nun, dass A^{-1} auch beschränkt ist. Dazu sei $F \subset V^*$ eine beschränkte Menge, d.h. es gebe ein $M > 0$, so dass $\|f\|_* \leq M$ für alle $f \in F$. Wegen der Koerzitivität gilt dann für alle $f \in F$

$$\gamma(\|u\|)\|u\| \leq \langle Au, u \rangle = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_* \|u\| \leq M\|u\|$$

für eine entsprechende Abbildung γ. Die Menge der Lösungen $A^{-1}f$ ist unter γ beschränkt, d.h. $\gamma(\|A^{-1}f\|) \leq M$. Wäre $A^{-1}F$ nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge $\{f_n\} \subset F$ mit $\|A^{-1}f_n\| \to \infty$. Dann wäre jedoch $\gamma(\|A^{-1}f_n\|) \to \infty$. A^{-1} ist außerdem demi-stetig: Es gelte $Au_n = f_n \to f$ in V^*. Da A^{-1} monoton ist, ist A^{-1} lokal beschränkt, d.h. $\{A^{-1}f_n\} = \{u_n\}$ ist beschränkt im reflexiven Raum V. Daraus folgt die Existenz von $u \in V$ und einer Teilfolge $\{u_{n'}\}$ mit $u_{n'} \rightharpoonup u$ in V. Dies impliziert für beliebiges $v \in V$

$$\langle f - Av, u - v \rangle = \lim_{n' \to \infty} \langle f - Av, u_{n'} - v \rangle = \lim_{n' \to \infty} \langle Au_{n'} - Av, u_{n'} - v \rangle \geq 0\,.$$

Wie oben folgt $Au = f$. Also ist $u_{n'} = A^{-1}f_{n'} \rightharpoonup u = A^{-1}f$. Der übliche Widerspruchsbeweis liefert die schwache Konvergenz der Gesamtfolge. □

Beispiel 13.7. Betrachte

$$\begin{cases} -\left(|u'(x)|^{p-2}u'(x)\right)' = f(x) & \text{für } x \in (a,b),\ 1 < p < \infty \\ u(a) = u(b) = 0\,. \end{cases} \tag{13.1}$$

Die schwache Formulierung lautet: Zu $f \in V^*$ finde $u \in V$, so dass

$$a(u,v) := \int_a^b |u'(x)|^{p-2}u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \langle f, v \rangle$$

für alle $v \in V$. Wir wählen hierzu $V = W_0^{1,p}(a,b)$. Zu zeigen ist, dass $v \mapsto a(u,v)$ für jedes $u \in V$ linear und beschränkt ist. Dazu ist

$$|a(u,v)| \leq \left(\int_a^b \left(|u'(x)|^{p-1} \right)^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |v'(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = |u|_{1,p}^{p-1} |v|_{1,p}\,.$$

für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $A\colon W_0^{1,p}(a,b) \to W^{-1,q}(a,b)$, $\langle Au, v \rangle = a(u,v)$ wohldefiniert und es gilt $|\langle Au, v \rangle| \leq |u|_{1,p}^{p-1} |v|_{1,p}$, also $\|Au\|_{-1,q} \leq |u|_{1,p}^{p-1}$. Außerdem ist A monoton, denn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \int_a^b \left(|u'(x)|^{p-2}u'(x) - |v'(x)|^{p-2}v'(x) \right) (u'(x) - v'(x))\mathrm{d}x \geq 0$$

nach Beispiel 13.5. Für die Koerzitivität von A betrachten wir

$$\langle Av, v \rangle = \int_a^b |v'|^p \mathrm{d}x = |v|_{1,p}^p\,.$$

Nach Poincaré-Friedrichs ist $|\cdot|_{1,p}$ bereits eine Norm auf $W_0^{1,p}(a,b)$. Da $p > 1$, folgt nun die Koerzitivität. Um die Radialstetigkeit von A zu zeigen, haben wir nach Lebesgue

$$\begin{aligned}\langle A(u+\theta_n v), v\rangle &= \int_a^b |u'(x)+\theta_n v'(x)|^{p-2}\left(u'(x)+\theta_n v'(x)\right)v'(x)\mathrm{d}x\\ &\to \int_a^b |u'(x)+\theta v'(x)|^{p-2}(u'(x)+\theta v'(x))v'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

für $\theta_n \to \theta$, $\theta_n \in [0,1]$.
Für $p \geq 2$ gilt sogar

$$\|Au - Av\|_* \leq \operatorname{const}\max(\|u\|,\|v\|)^{p-2}\|u-v\|\,,$$

d.h. A ist beschränkt Lipschitz-stetig.

Satz. *Das Problem (13.1) besitzt zu jedem $f \in W^{-1,q}(a,b)$ eine eindeutige Lösung $u \in W_0^{1,p}(a,b)$.*

Beweis. Folgt direkt mit dem Satz von Browder-Minty. □

Wir berücksichtigen nun auch eine mögliche Störung auf der linken Seite. Die Monotonie und Radialstetigkeit von A und die Koerzitivität der gesamten linken Seite behalten wir bei, wir schreiben links jedoch den Störterm B, von dem wir verstärkte Stetigkeit fordern.

Satz 13.8. *Sei V ein reeller reflexiver separabler Banach-Raum und sei $A\colon V \to V^*$ monoton, radialstetig, $B\colon V \to V^*$ verstärkt stetig. Ist $A+B$ koerzitiv, so gibt es zu jedem $f \in V^*$ ein $u \in V$ mit*

$$Au + Bu = f\,.$$

Weiterhin ist die Lösungsmenge schwach abgeschlossen.

Bemerkung. Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Brézis (wegen der Pseudomonotonie von $A+B$).

Um den Existenzbeweis führen zu können, benötigen wir noch folgendes Lemma.

Lemma 13.9. *Sei $\mathbf{h}\colon \mathbb{R}^m \supset \overline{B(0,R)} \to \mathbb{R}^m$ stetig und es gelte*

$$\mathbf{h}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{z} \geq 0 \textit{ für alle } \mathbf{z} \in \partial B(0,R)\,.$$

Dann besitzt $\mathbf{h}$ mindestens eine Nullstelle.

Bemerkung. Mit $\mathbf{h}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{z}$ ist das euklidische Skalarprodukt gemeint, während zur Definition von $B(0,R)$ beliebige Normen verwendet werden können.

Beweis. Angenommen, $\mathbf{h}$ besäße keine Nulstellen. Dann betrachten wir

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) := -R\frac{\mathbf{h}(\mathbf{z})}{\|\mathbf{h}(\mathbf{z})\|}\,,\ \mathbf{z} \in \overline{B(0,R)}\,.$$

Diese Funktion $\mathbf{g}$ bildet $\overline{B(0,R)}$ auf sich selbst ab (genauer: auf den Rand der Kugel, denn $\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\| = R$) und ist stetig. Mit dem Brouwerschen Fixpunkt erhalten wir einen Fixpunkt $\mathbf{z}^*$ von $\mathbf{g}$, d.h. $\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{z}^*$ und $\|\mathbf{z}^*\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)\| = R \neq 0$. Dann gilt jedoch

$$0 < \mathbf{z}^*\cdot\mathbf{z}^* = -R\frac{\mathbf{h}(\mathbf{z}^*)\cdot\mathbf{z}^*}{\|\mathbf{h}(\mathbf{z}^*)\|} \leq 0\,.$$

□

Beweis zu Satz 13.8. Existenz: V ist separabel, es existiert also eine Galerkin-Basis $\{\phi_j\}$ mit davon aufgespannten Räumen $V_m := \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$, wobei $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in V ist. Wir betrachten diskrete Ersatzprobleme: Sei $m \in \mathbb{N}$. Zu $f \in V^*$ finde $u^{(m)} \in V_m$, so dass für alle $v^{(m)} \in V_m$

$$\langle (A+B)u^{(m)}, v^{(m)}\rangle = \langle f, v^{(m)}\rangle \,.$$

Es genügt, mit $\phi_1, \dots, \phi_m$ zu testen, so dass dieses Problem äquivalent zu

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}^{(m)}) = 0,$$

wobei wir die Zuordnung

$$\begin{aligned} v^{(m)} \in V_m &\leftrightsquigarrow \mathbf{v}^{(m)} = [v_1^{(m)}, \dots, v_m^{(m)}] \in \mathbb{R}^m \\ v^{(m)} &= \sum_{j=1}^m v_j^{(m)} \phi_j \end{aligned}$$

betrachten und

$$\mathbf{h}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \,, \;\; \mathbf{h}(\mathbf{u}^{(m)})_j = \langle (A+B)u^{(m)} - f, \phi_j\rangle \,.$$

Nach Lemma 13.9 hat $\mathbf{h}$ mindestens eine Nullstelle, denn

(i) $\mathbf{h}$ ist stetig und

(ii) es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{v}^{(m)}) \cdot \mathbf{v}^{(m)} &= \sum_{j=1}^m \mathbf{h}(\mathbf{v}^{(m)})_j \mathbf{v}_j^{(m)} = \langle (A+B)v^{(m)} - f, v^{(m)}\rangle \\ &\geq \gamma(\|v^{(m)}\|)\|v^{(m)}\| - \|f\|_*\|v^{(m)}\| \end{aligned}$$

mit $\gamma(z) \to \infty$, $z \to \infty$. Gilt nun $\|v^{(m)}\| = R$ für hinreichend großes R, dann folgt $\gamma(\|v^{(m)}\|) \geq \|f\|_*$. Auf V_m haben wir die von V induzierte Norm $\|\cdot\|$, auf $\mathbb{R}^m$ können wir

$$\|\mathbf{v}^{(m)}\|_{\mathbb{R}^m} := \|v^{(m)}\|$$

definieren. Wir betrachten eine Folge $\{\mathbf{v}_\nu^{(m)}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{v}_\nu^{(m)} \to \mathbf{v}^{(m)}$. Wir haben nun

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}(\mathbf{v}_\nu^{(m)}) - \mathbf{h}(\mathbf{v}^{(m)})\|_{\mathbb{R}^m} &= \left\| \Big(\langle (A+B)v_\nu^{(m)} - f, \phi_j\rangle - \langle (A+B)v^{(m)} - f, \phi_j\rangle \Big)_{j=1}^m \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left\| \Big(\langle (A+B)v_\nu^{(m)} - (A+B)v^{(m)}, \phi_j\rangle \Big)_{j=1}^m \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^m \langle (A+B)v_\nu^{(m)} - (A+B)v^{(m)}, \phi_j\rangle \phi_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left| \langle (A+B)v_\nu^{(m)} - (A+B)v^{(m)}, \phi_j\rangle \right| \|\phi_j\| \to 0 \,, \;\; \nu \to \infty \,, \end{aligned}$$

da B verstärkt stetig und A demistetig ist.

Es gibt also ein $u^{(m)} \in V_m$, so dass für alle $v^{(m)} \in V_m$

$$\langle (A+B)u^{(m)}, v^{(m)}\rangle = \langle f, v^{(m)}\rangle \,.$$

Die Folge $\{u^{(m)}\} \subset V$ ist beschränkt, d.h. $\|u^{(m)}\| \le R$ für ein $R > 0$, denn sonst wäre für ein γ aus der Definition von Koerzitivität

$$\gamma(\|u^{(m)}\|)\|u^{(m)}\| \le \langle (A+B)u^{(m)}, u^{(m)}\rangle = \langle f, u^{(m)}\rangle \le \|f\|_*\|u^{(m)}\|\,.$$

Dies bedeutet aber den Widerspruch $\gamma(\|u^{(m)}\|) \le \|f\|_*$.
Da V reflexiv ist, existiert eine Teilfolge $\{u^{(m')}\}$ und es gibt ein u, so dass $u^{(m')} \rightharpoonup u$ in V.
Auch $\{(A+B)u^{(m)}\} \subset V^*$ ist beschränkt, denn $B\colon V \to V^*$ ist beschränkt und A ist lokal beschränkt: Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ und ein $M > 0$, so dass für alle $w \in V$ mit $\|w\| \le \varepsilon$ auch $\|Aw\| \le M$ gilt. Wir wissen, dass $\|u^{(m)}\| \le R$ und

$$\left|\langle (A+B)u^{(m)}, u^{(m)}\rangle\right| = |\langle f, u^{(m)}\rangle| \le \|f\|_* R\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\|(A+B)u^{(m)}\|_* &= \sup_{\|w\|\le\varepsilon} \frac{\langle (A+B)u^{(m)}, w\rangle}{\varepsilon} \\
&\le \sup_{\|w\|\le\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\langle (A+B)u^{(m)}, w\rangle + \langle Au^{(m)} - Aw, u^{(m)} - w\rangle\Big) \\
&= \sup_{\|w\|\le\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\langle Au^{(m)}, u^{(m)}\rangle - \langle Aw, u^{(m)} - w\rangle + \langle Bu^{(m)}, w\rangle\Big) \\
&\le \sup_{\|w\|\le\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\|f\|_* R + \|Aw\|_*\|u^{(m)} - w\| + \|Bu^{(m)}\|\|w - u^{(m)}\|\Big) \\
&\le \sup_{\|w\|\le\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\|f\|_* R + M(R+\varepsilon) + \mathrm{const}(R+\varepsilon)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Beschränktheit von $\{(A+B)u^{(m)}\}$ in V^*, also auch die von $\{(A+B)u^{(m')}\}$. Damit existiert eine Teifolge $\{u^{(m'')}\}$ mit $(A+B)u^{(m'')} \rightharpoonup \tilde{f}$ in V^* für ein $\tilde{f} \in V^*$.
Es ist $\tilde{f} = f$, denn

$$\langle (A+B)u^{(m'')}, v^{(n)}\rangle = \langle f, v^{(n)}\rangle$$

für alle $v^{(n)} \in V_n \subset V_{m''}$, $n \le m''$. Mit festem n und $m'' \to \infty$ ergibt sich

$$\langle \tilde{f}, v^{(n)}\rangle = \langle f, v^{(n)}\rangle$$

für alle $v^{(n)} \in V_n$, $n \in \mathbb{N}$, insbesondere für alle v in der dichten Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Damit erhalten wir $f = \tilde{f}$.
Mit $u^{(m'')} \rightharpoonup u$ in V und $(A+B)u^{(m'')} \rightharpoonup f$ in V^* bleibt zu zeigen, dass $(A+B)u = f$. B ist verstärkt stetig, also $Bu^{(m'')} \to Bu$ in V^*. Wir haben für alle $w \in V$ wegen Monotonie von A

$$\begin{aligned}
\langle f - Bu^{(m)}, u^{(m)}\rangle &= \langle Au^{(m)}, u^{(m)}\rangle \ge -\langle Au^{(m)} - Aw, u^{(m)} - w\rangle + \langle Au^{(m)}, u^{(m)}\rangle \\
&= \langle Au^{(m)}, w\rangle + \langle Aw, u^{(m)} - w\rangle\,.
\end{aligned}$$

Betrachten wir $m = m'' \to \infty$, erhalten wir

$$\langle f - Bu, u\rangle \ge \langle f - Bu, w\rangle + \langle Aw, u - w\rangle$$

und damit

$$\langle f - Bu, u - w\rangle \ge \langle Aw, u - w\rangle\,.$$

Mit dem bekannten Ansatz $w = u \pm sv$, $v \in V$, $s \in (0,1]$, erhalten wir wegen der Radialstetigkeit von A
$$f - Bu = Au\,.$$
Schwache Abgeschlossenheit: Seien $u_n \in V$ Lösungen zu rechter Seite $f \in V^*$, d.h. $Au_n + Bu_n = f$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in V. Dann gilt $Bu_n \to Bu$ in V^* und für alle $v \in V$ ist
$$\begin{aligned}\langle f - Av, u - v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f - Av, u_n - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n - Av, u_n - v\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, u_n - v\rangle\Big) \geq \langle Bu, u - v\rangle\,.\end{aligned}$$
Hieraus folgt
$$\langle f - Bu - Av, u - v\rangle \geq 0\,.$$
Wie oben folgt nun mit Radialstetigkeit $Au = f - Bu$. □

Beispiel 13.10 (zu Satz 13.8). Wir betrachten das Randwertproblem
$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u(x)u'(x) = f(x) & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{13.2}$$
mit $\varepsilon > 0$. Man beachte $uu' = \frac{1}{2}(u^2)'$.

(i) Für jedes $f \in H^{-1}(a,b)$ existiert mindestens eine schwache Lösung $u \in H_0^1(a,b)$.

(ii) Für kleine Daten, d.h. a, b, f und ε so, dass
$$(b-a)^{\frac{3}{2}}\|f\| < \varepsilon^2\pi\,,$$
ist die Lösung eindeutig.

Zur Existenz: Sei $V = H_0^1(a,b)$. Wir erhalten die schwache Formulierung
$$\underbrace{\int_a^b \varepsilon u'v'\mathrm{d}x}_{=:\langle Au,v\rangle} + \underbrace{\int_a^b uu'v\mathrm{d}x}_{=:\langle Bu,v\rangle} = \langle f, v\rangle\,,$$
$v \in V$, und schreiben diese als Operatorgleichung
$$Au + Bu = f\,.$$
Bekannt ist, dass A nach V^* abbildet und linear, beschränkt und stark positiv ist. Insbesondere ist A damit monoton und radialstetig. Zu zeigen bleiben Wohldefiniertheit und verstärkte Stetigkeit von B und Koerzitivität von $A + B$. Zunächst beobachten wir
$$\int_a^b uu'v\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{u^2}{2}v\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b \frac{u^2}{2}v'\mathrm{d}x\,,$$
also ist $|\langle Bu, v\rangle| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |u|^2|v'|\mathrm{d}x$. Mit Hölder haben wir
$$|\langle Bu, v\rangle| \leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b |u|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|u\|_{0,4}^2|v|_{1,2}\,.$$

Da $H_0^1(a,b) \hookrightarrow C[a,b]$, existiert $\|u\|_{0,4} < \infty$. Es gilt nun

$$|\langle Bu, v\rangle| \leq \frac{1}{2}\sqrt{b-a}\|u\|_{C[a,b]}^2 |v|_{1,2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{b-a}(b-a)|u|_{1,2}^2|v|_{1,2}\,.$$

Dies zeigt, dass B nach V^* abbildet, denn für $u \in V$ gilt

$$\|Bu\|_{-1,2} \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{2}|u|_{1,2}^2\,.$$

Damit ist B auch beschränkt. Da sogar $H_0^1(a,b) \overset{c}{\hookrightarrow} C[a,b]$, folgt die verstärkte Stetigkeit von B. Denn für $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(a,b)$ existiert eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$, so dass $u_{n'} \to u$ in $C[a,b]$, woraus auch $u_n \to u$ mit dem üblichen Teilfolgenprinzip folgt. Mit

$$\begin{aligned}
|\langle Bu_n - Bu, v\rangle| &\leq \frac{1}{2}\int_a^b |u_n^2 - u^2||v'|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b |u_n - u||u_n + u||v'|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_n - u\|_{C[a,b]}\int_a^b |u_n + u||v'|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_n - u\|_{C[a,b]}\left(\|u_n\|_{0,2} + \|u\|_{0,2}\right)|v|_{1,2}
\end{aligned}$$

folgt

$$\|Bu_n - Bu\| \leq \frac{1}{2}\|u_n - u\|_{C[a,b]}(\|u_n\|_{0,2} + \|u\|_{0,2}) \to 0\,.$$

Dies zeigt wegen $Bu_n \to Bu$, dass B verstärkt stetig ist. Schließlich ist $A + B$ koerzitiv, denn

$$\langle Bu, u\rangle = -\frac{1}{2}\int_a^b u^2u'\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int_a^b (u^3)'\mathrm{d}x = \frac{u^3(a) - u^3(b)}{6} = 0$$

und damit

$$\langle Au + Bu, u\rangle = \langle Au, u\rangle \geq \varepsilon|u|_{1,2}^2\,.$$

Somit existiert zu jedem $f \in H^{-1}(a,b)$ eine schwache Lösung $u \in H_0^1(a,b)$.

Zur Einzigkeit: Seien u_1 und u_2 Lösungen von (13.2). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varepsilon|u_1 - u_2|_{1,2}^2 &\leq \langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle = \langle Au_1, u_1 - u_2\rangle - \langle Au_2, u_1 - u_2\rangle \\
&= -\langle Bu_1, u_1 - u_2\rangle + \langle Bu_2, u_1 - u_2\rangle = \frac{1}{2}\int_a^b (u_1^2 - u_2^2)(u_1 - u_2)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b (u_1 - u_2)(u_1 + u_2)(u_1 - u_2)'\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|u_1\|_{C[a,b]} + \|u_2\|_{C[a,b]}\right)\|u_1 - u_2\|_{0,2}|u_1 - u_2|_{1,2} \\
&\leq \frac{1}{2}\sqrt{b-a}(|u_1|_{1,2} + |u_2|_{1,2})\frac{b-a}{\pi}|u_1 - u_2|_{1,2}^2\,.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\varepsilon|u|_{1,2}^2 \leq \langle Au + Bu, u\rangle = \langle f, u\rangle \leq \|f\|_{-1,2}|u|_{1,2}\,,$$

d.h. $\varepsilon|u|_{1,2} \leq \|f\|_{-1,2}$. Damit erhalten wir

$$\varepsilon|u_1 - u_2|_{1,2}^2 \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\frac{2}{\varepsilon}\|f\|_{-1,2}|u_1 - u_2|_{1,2}^2\,.$$

Also gilt

$$|u_1 - u_2|_{1,2}^2\left(\varepsilon - \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon\pi}\|f\|_{-1,2}\right) \leq 0\,.$$

Beispiel 13.11. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x) & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0\,, \end{cases} \tag{13.3}$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, $\inf_{s\in\mathbb{R}} g(s)s > -\infty$ und Konstanten $c, r > 0$ existieren, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|g(s)| \leq c(1 + |s|^r)$ gilt. Dann gibt es für jedes $f \in H^{-1,2}(a,b)$ eine schwache Lösung $u \in H_0^1(a,b) =: V$. Wir setzen hierzu $A, B\colon V \to V^*$

$$\langle Au, v\rangle = \int_a^b u'v'\mathrm{d}x \qquad\qquad \langle Bu, v\rangle = \int_a^b g(u)v\mathrm{d}x\,.$$

Dann ist A wie oben monoton und radialstetig. Wegen

$$\begin{aligned} |\langle Bu, v\rangle| &\leq \left(\int_a^b |g(u)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,2} \\ &\leq c\left(\int_a^b (1+|u|^r)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \frac{b-a}{\pi}|v|_{1,2} \\ &\leq c\frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{\pi}(1 + \|u\|_{C[a,b]}^r)|v|_{1,2} < \infty \end{aligned}$$

ist $B\colon V \to V^*$ wohldefiniert. Mit

$$\langle Bu, u\rangle = \int_a^b g(u)u\mathrm{d}x \geq (b-a)\inf_{s\in\mathbb{R}} g(s)s > -\infty$$

folgt die Koerzivität von $A + B$ aus der von A. Es bleibt die verstärkte Stetigkeit von B zu zeigen. Sei dazu $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(a,b)$. Wie oben folgt $u_n \to u$ in $C[a,b]$, also ist $g \circ u$ stetig. Damit gilt $\max_{x\in[a,b]}|g(u_n(x)) - g(u(x))| \to 0$. Nun gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Bu_n - Bu, v\rangle = \int_a^b (g(u_n) - g(u))v\mathrm{d}x &\leq \max_{x\in[a,b]}|g(u_n(x)) - g(u(x))| \int_a^b v\mathrm{d}x \\ &\leq \max_{x\in[a,b]}|g(u_n(x)) - g(u(x))|\sqrt{b-a}\|v\|_{0,2} \\ &\leq \max_{x\in[a,b]}|g(u_n(x)) - g(u(x))|\frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{\pi}|v|_{1,2}\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|Bu_n - Bu\|_{-1,2} \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{\pi} \max_{x\in[a,b]}|g(u_n(x)) - g(u(x))| \to 0\,,$$

d.h. B ist verstärkt stetig. Schließlich besitzt (13.3) für jede rechte Seite $f \in H^{-1}(a,b)$ mindestens eine Lösung.

Beispiel 13.12. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a(x, \nabla u_\varepsilon(x)) = f_\varepsilon(x) & \text{für } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ u_\varepsilon(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Hierbei genüge $a\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ einer Carathéodory-Bedingung und es gebe $\mu, \lambda > 0$, $p > 1$, so dass $a(x,z)z \geq \mu\|z\|^p - \lambda$ für alle $x \in \Omega$. Weiterhin gelte

$$\Big(a(x,y) - a(x,z)\Big)(y - z) > 0$$

für alle $y \neq z$ und

$$|a(x,z)| \leq c(1+|z|^{p-1}),$$

$c > 0$. Der Satz von Browder-Minty liefert uns ein eindeutiges $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_\varepsilon(x))\nabla v(x)\mathrm{d}x = \langle f^\varepsilon, v\rangle .$$

Satz. Haben wir $f_\varepsilon \to f$ in $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, so folgt $u_\varepsilon \to u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, wobei u die Gleichung $-\nabla a(x,u(x)) = f(x)$ auf Ω und $u(x) = 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllt – insbesondere ist also $\nabla u^\varepsilon \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$.

Beweis. Wir verwenden die $W_0^{1,p}$-(Halb-)Norm

$$\|v\| = \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Wir machen nun die Abschätzung

$$\mu \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x - \lambda|\Omega| \leq \int_\Omega a(x, \nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \mathrm{d}x = \langle f_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle \leq \|f_\varepsilon\|_* \|u_\varepsilon\| .$$

Damit ist $\{u_\varepsilon\}$ beschränkt, da $\{f_\varepsilon\}$ beschränkt ist. Es gilt nun

$$\int_\Omega |a(x,u_\varepsilon(x))|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x \leq c \int_\Omega \left(1 + |\nabla u_\varepsilon|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x \leq c\int_\Omega (1+|\nabla u_\varepsilon|^p)\mathrm{d}x \leq \text{const} .$$

Daher existieren eine Teilfolge ε', ein $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\sigma \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)^d$, so dass $u_{\varepsilon'} \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\sigma_\varepsilon := a(\cdot, \nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \sigma$. Für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_\varepsilon)\nabla v \mathrm{d}x = \langle f_\varepsilon, v\rangle \to \langle f, v\rangle ,$$

also $\int \sigma \nabla v = \langle f, v\rangle$. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \mathrm{d}x = \int_\Omega \Big(a(x,\nabla u_\varepsilon) - a(x,\nabla w)\Big)(\nabla u_\varepsilon - \nabla w)\mathrm{d}x + \int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\nabla w \mathrm{d}x \\ + \int_\Omega a(x,\nabla w)(\nabla u_\varepsilon - \nabla w)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_\Omega q(x,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \mathrm{d}x = \langle f_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle \to \langle f, u\rangle &= \int_\Omega \sigma\nabla u \mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega \sigma \nabla w \mathrm{d}x + \int_\Omega a(x,\nabla w)(\nabla u - \nabla w)\end{aligned}$$

für alle $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Mit dem Trick von Minty ($w = u \pm tv$) erhalten wir

$$\int_\Omega \sigma\nabla u \mathrm{d}x \geq \int_\Omega \sigma \nabla u \mathrm{d}x + t\int_\Omega \sigma\nabla v \mathrm{d}x - t\int_\Omega a(x, \nabla(u+tv))\nabla v \mathrm{d}x$$

und damit

$$\int_\Omega a(x, \nabla u + t\nabla v)\nabla v \mathrm{d}x \geq \int_\Omega \sigma \nabla v \mathrm{d}x$$

und für $t \to 0$

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v \mathrm{d}x \geq \int_\Omega \sigma \nabla v \mathrm{d}x\,.$$

Mit $w = u - tv$ statt $w = u + tv$ erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung. Es ist also $\sigma = a(\cdot,\nabla u)$.

Also gibt es eine Teilfolge ε' und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass $u_{\varepsilon'} \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\sigma_{\varepsilon'} = a(\cdot,\nabla u_{\varepsilon'}) \rightharpoonup \sigma = a(\cdot,\nabla u)$ in $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)^d$. Die schwache Konvergenz von $u_{\varepsilon'}$ bedeutet $u_{\varepsilon'} \to u$ in $L^q(\Omega)$ für alle $\frac{1}{p} - \frac{1}{d} < \frac{1}{q}$, d.h. $q < \frac{pd}{d-p}$, insbesondere $q = p$.

Zu zeigen ist $\nabla u_{\varepsilon'} \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)^d$. Hierzu verwenden wir den Satz von Vitali, der in diesem Fall folgendermaßen lautet:

Satz (Vitali). *Gilt fast überall $\nabla u_{\varepsilon'}(x) \to \nabla u(x)$ und gibt es für alle $\eta > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \subseteq \Omega$ mit $|A| < \delta$*

$$\int_A |\nabla u_{\varepsilon'}|^p \mathrm{d}x < \eta\,,$$

so folgt $\nabla u_{\varepsilon'} \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)^d$.

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\mu \int_A |\nabla u_{\varepsilon'}|^p \mathrm{d}x - \lambda|A| &\leq \int_A a(x,\nabla u_{\varepsilon'})\nabla u_{\varepsilon'} \mathrm{d}x\\ &= \int_A \underbrace{\Big(a(x,\nabla u_{\varepsilon'}) - a(x,\nabla u)\Big)(\nabla u_{\varepsilon'} - \nabla u)}_{=:e_{\varepsilon'}(x)} \mathrm{d}x\\ &\qquad + \int_A a(x,\nabla u_{\varepsilon'})\nabla u \mathrm{d}x + \int_A a(x,\nabla u)(\nabla u_{\varepsilon'} - \nabla u)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$\begin{aligned}\int_A a(x,\nabla u_{\varepsilon'})\nabla u \mathrm{d}x &\leq \int_A c(1 + |\nabla u_{\varepsilon'}|^{p-1})\nabla u \mathrm{d}x\\ &\leq c\int_A \nabla u \mathrm{d}x + c\underbrace{\Big(\int_A |\nabla u_{\varepsilon'}|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{p-1}{p}}}_{\leq \text{const}} \Big(\int_A |\nabla u|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\,.\end{aligned}$$

Analog verfahren wir mit $\int_A a(x,\nabla u)(\nabla u_{\varepsilon'} - \nabla u)\mathrm{d}x$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_\Omega \Big(a(x,\nabla u_{\varepsilon'}) - a(x,\nabla u)\Big)(\nabla u_{\varepsilon'} - \nabla u)\mathrm{d}x\\ &= \langle f_{\varepsilon'}, u_{\varepsilon'}\rangle - \int_\Omega a(x,\nabla u_{\varepsilon'})\nabla u \mathrm{d}x - \int_\Omega a(x,\nabla u)(\nabla u_{\varepsilon'} - \nabla u)\mathrm{d}x\\ &\to \langle f, u\rangle - \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla u \mathrm{d}x = 0\,.\end{aligned}$$

Dies ergibt wegen der Nichtnegativität des Integranden

$$\Big(a(x,\nabla u_{\varepsilon'}) - a(x,\nabla u)\Big)(\nabla u_{\varepsilon'} - \nabla u) \to 0$$

fast überall. Damit folgt $\nabla u_{\varepsilon'}(x) \to \nabla u(x)$ fast überall (wegen der strikten Monotonie und daher Injektivität). Wir wissen bisher $\int_\Omega e_{\varepsilon'}\mathrm{d}x \to 0$ und $0 \leq e_{\varepsilon'} \to 0$. Der umgekehrte Satz von Lebesgue liefert eine Teilfolge ε'' und eine Majorante $g \in L^1(\Omega)$, d.h. $e_{\varepsilon''} \leq g(x)$ fast überall. $\square$

14 Pseudomonotone Operatoren

Wir verallgemeinern in diesem Kapitel den Satz von Browder-Minty bzw. Satz 13.8 durch den bereits erwähnten Satz von Brézis.

Definition 14.1. Ein Operator $A\colon V \to V^*$ heißt *pseudomonoton*, falls aus $u_n \rightharpoonup u$ in V und $\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$ folgt, dass $\langle Au, u-w\rangle \le \liminf\langle Au_n, u_n - w\rangle$ für alle $w \in V$.

Satz 14.2 (Hauptsatz über pseudomonote Operatoren, Brézis (1968))**.** *Sei V ein reeller, reflexiver, seperabler Banach-Raum und $A\colon V \to V^*$ pseudomonoton, koerzitiv und lokal beschränkt. Dann ist A surjektiv.*

Bemerkung. Pseudomonotone Operatoren besitzen die *Eigenschaft (M)*, d.h. aus $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup b$ und $\limsup\langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle$ folgt $Au = b$.

Vor dem Beweis zeigen wir einige Zusammenhänge zwischen Pseudomonotonie und anderen bereits eingeführten Eigenschaften von Operatoren.

Lemma 14.3. *Seien $A, B\colon V \to V^*$ zwei Operatoren.*

(i) *Ist A monoton und radialstetig, so ist A auch pseudomonoton.*

(ii) *Ist A verstärkt stetig, so ist A auch pseudomonoton.*

(iii) *Sind A und B pseudomonoton, so ist auch $A + B$ pseudomonoton.*

(iv) *Ist A pseudomonoton und lokal beschränkt, so ist A auch demistetig.*

Beweis.

(i) Angenommen, $u_n \rightharpoonup u$, $\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$. Aufgrund der Monotonie von A gilt

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle = \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle + \langle Au, u_n - u\rangle \ge \langle Au, u_n - u\rangle \to 0\,,\ n \to \infty\,.$$

Hiermit erhalten wir

$$0 \le \liminf\langle Au_n, u_n - u\rangle \le \limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$$

und damit

$$\lim\langle Au_n, u_n - u\rangle = 0\,.$$

Sei nun $z = u + \theta(w-u)$ für $\theta > 0$, $w \in V$. Dann folgt

$$\langle Au_n - Az, u_n - z\rangle \ge 0\,.$$

Wir haben ebenso

$$\begin{aligned}\langle Au_n, u_n - z\rangle = \langle Au_n, u_n - u\rangle - \theta\langle Au_n, w - u\rangle &\ge \langle Az, u_n - z\rangle \\ &= \langle Az, u_n - u\rangle - \theta\langle Az, w-u\rangle\,.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle - \theta\langle Au_n, w - u\rangle \ge \langle Az, u_n - u\rangle - \theta\langle Az, w - u\rangle\,.$$

Nach Grenzwertbildung haben wir

$$\begin{aligned}\theta \liminf \langle Au_n, u_n - w\rangle &= \theta \liminf \left(\langle Au_n, u_n - w\rangle - \langle Au_n, u_n - u\rangle\right)\\ &= \theta \liminf \langle Au_n, u - w\rangle\\ &\geq \limsup \left(\langle Au_n, u - u_n\rangle + \langle Az, u_n - u\rangle - \theta\langle Az, w - u\rangle\right)\\ &= -\theta\langle Az, w - u\rangle\,.\end{aligned}$$

Dies liefert für $\theta \to 0$

$$\liminf \langle Au_n, u_n - w\rangle \geq \langle Au, u - w\rangle\,.$$

(ii) Ist $u_n \rightharpoonup u$, gilt $Au_n \to Au$. Dies ergibt

$$\langle Au_n, u_n - w\rangle \to \langle Au, u - w\rangle\,.$$

(iii) Zu zeigen: Gilt $u_n \rightharpoonup u$ und ist $\limsup\langle (A+B)u_n, u_n - u\rangle \leq 0$, so auch

$$\liminf\langle (A+B)u_n, u_n - w\rangle \geq \langle (A+B)u, u - w\rangle$$

für alle $w \in V$.

Erster Fall: Gilt unter obigen Voraussetzungen auch

$$\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0 \qquad\qquad \limsup\langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0\,,$$

so haben wir auch

$$\liminf\langle Au_n, u_n - w\rangle \geq \langle Au, u - w\rangle \qquad \liminf\langle Bu_n, u_n - w\rangle \geq \langle Bu, u - w\rangle\,.$$

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle (A+B)u, u - w\rangle &= \langle Au, u - w\rangle + \langle Bu, u - w\rangle\\ &\leq \liminf\langle Au_n, u_n - w\rangle + \liminf\langle Bu_n, u_n - w\rangle\\ &\leq \liminf\langle (A+B)u_n, u_n - w\rangle\,.\end{aligned}$$

Zweiter Fall: Wir nehmen nun unter obigen Voraussetzungen zwar $\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$, aber $\limsup\langle Bu_n, u_n - u\rangle > 0$ (oder umgekehrt) an. Aus der Pseudomonotonie von A folgt

$$\langle Au, u - w\rangle \leq \liminf\langle Au_n, u_n - w\rangle\,. \tag{14.1}$$

Außerdem existiert eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$ und ein $\beta \in (0, \infty]$, so dass $\lim\langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle = \beta$. Hieraus erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}\limsup\langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle &= \limsup\left(\langle (A+B)u_{n'}, u_{n'} - u\rangle - \langle Bu_{n'}, u_{n'} - u\rangle\right)\\ &= \limsup\langle (A+B)u_{n'}, u_{n'} - u\rangle - \beta < 0\,.\end{aligned}$$

Nun folgt mit $w = u$ in (14.1) der Widerspruch

$$0 \leq \liminf\langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle \leq \limsup\langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle < 0\,.$$

Dritter Fall: Wir nehmen $u_n \rightharpoonup u$ und sowohl $\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle > 0$ als auch $\limsup\langle Bu_n, u_n - u\rangle > 0$. Nun kann jedoch nicht $\limsup\langle (A+B)u_n, u_n - u\rangle \leq 0$ gelten, denn es existiert eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$, so dass

$$\lim\langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle = \alpha > 0\,.$$

Da weiterhin $u_{n'} \rightharpoonup u$, können wir $\limsup \langle Bu_{n'}, u_{n'} - u\rangle = \beta > 0$ annehmen (sonst läge der zweite Fall vor). Es existiert nun eine Teilfolge $\{u_{n''}\}$, so dass

$$\lim \langle Bu_{n''}, u_{n''} - u\rangle = \beta > 0\,.$$

Wir haben nun

$$0 < \alpha+\beta = \lim\langle Au_{n''}, u_{n''}-u\rangle + \lim\langle Bu_{n''}, u_{n''}-u\rangle = \lim\langle (A+B)u_{n''}, u_{n''}-u\rangle \leq 0\,.$$

(iv) Übungsaufgabe.

□

Beweis zum Satz von Brézis. Wir verwenden wieder das Galerkin-Verfahren und suchen $u^{(m)} \in V_m = \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$, so dass $\langle Au^{(m)}, v^{(m)}\rangle = \langle f, v^{(m)}\rangle$ für alle $v^{(m)} \in V_m$.

Mit Lemma 14.3 folgt die Demistetigkeit von A.

Wir wissen bereits, dass für demistetige, koerzitive Operatoren die diskrete Ersatzaufgabe lösbar ist. Mit der Beschränktheit von $\{u^{(m)}\} \subset V$ und $\{Au^{(m)}\} \subset V^*$ existieren eine Teilfolge $\{u^{(m')}\}$, $u \in V$ und $a \in V^*$, so dass $u^{(m')} \rightharpoonup u$ in V und $Au^{(m')} \rightharpoonup a$ in V^*.

Wir haben

$$\langle Au^{(m')}, v^{(k)}\rangle = \langle f, v^{(k)}\rangle$$

für alle $v^{(k)} \in V_k$, $k \leq m'$. Mit $m' \to \infty$ erhalten wir

$$\langle a, v^{(k)}\rangle = \langle f, v^{(k)}\rangle$$

für alle $v^{(k)} \in \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, wobei dieser Raum dicht in V liegt.

Es gilt

$$\limsup\langle Au^{(m')}, u^{(m')} - u\rangle = \limsup\Big(\langle f, u^{(m')}\rangle - \langle Au^{(m')}, u\rangle\Big) = 0\,.$$

Für beliebiges $w \in V$ ist nun wegen der Pseudomonotonie

$$\begin{aligned}\langle Au, u-w\rangle &\leq \liminf\langle Au^{(m')}, u^{(m')} - w\rangle = \liminf\Big(\langle f, u^{(m')}\rangle - \langle Au^{(m')}, w\rangle\Big)\\ &= \langle f, u\rangle - \langle f, w\rangle = \langle f, u-w\rangle\,.\end{aligned}$$

Wir wählen nun $w = u \pm v$, $v \in V$, und erhalten $Au = f$. □

15 Monotone Potentialoperatoren

Wir betrachten das bekannte Funktional

$$\Phi(z) = \frac{1}{p}|z|^p$$

für $z \in \mathbb{R}^d$, $p > 1$. Dann ist $\Phi'(z) = |z|^{p-1}\frac{z}{|z|} = |z|^{p-2}z$. Die Abbildung $\Phi'\colon z \mapsto \Phi'(z)$ ist ein Operator auf $\mathbb{R}^d$, was die Klassifizierung von Operatoren motiviert, die als Ableitung eines Funktionals darstellbar sind.

Definition 15.1. Seien X, Y zwei normierte Räume und sei $F\colon X \to Y$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\big(F(x+\theta z) - F(x)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(x+\theta z)\big|_{\theta=0} =: DF(x;z)\,,$$

so heißt er *Gâteaux-Differential* von F an der Stelle x in Richtung z. Ist $z \mapsto DF(x;z)$ linear und beschränkt, so heißt F an der Stelle x *Gâteaux-differenzierbar* und $F'(x) \in L(X,Y)$ mit $F'(x)z := DF(x;z)$ *Gâteaux-Ableitung* von F in x.

Im folgenden betrachten wir meist $Y = \mathbb{R}$, d.h. F sei ein Funktional auf X. Dann ist $F'(x) \in L(X,\mathbb{R}) = X^*$ und wir schreiben

$$F'(x)z = DF(x;z) = \langle F'(x), z\rangle\,.$$

Definition 15.2. Ein Operator $A\colon V \to V^*$ heißt *Potentialoperator* (Gradient), falls ein Funktional $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ (Potential) existiert, so dass

(i) das Funktional Φ Gâteaux-differenzierbar ist und

(ii) für alle $u, v \in V$ die Gâteaux-Ableitung von Φ an der Stelle u in Richtung v durch $\langle Au, v\rangle$ beschrieben wird, d.h.

$$\langle Au, v\rangle = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\big(\Phi(u+\theta v) - \Phi(u)\big)\,.$$

Bemerkung 15.3. Ist ein Funktional Φ Potential eines Operators A, dann ist auch $\Phi+\mathrm{const}$ Potential von A.

Beispiel 15.4. Wir betrachten $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$,

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}x\,,$$

also $Au = -\Delta_p u = -\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Dann ist A ein Potentialoperator mit dem Potential

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\mathrm{d}x + \mathrm{const}\,.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\langle \Phi'(u), v\rangle &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(\Phi(u+\theta v)-\Phi(u))\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla(u+\theta v)|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{p\theta}\int_\Omega \Big[|\nabla(u+t\theta v)|^p\Big]_{t=0}^{t=1}\mathrm{d}x = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{p\theta}\int_\Omega\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla(u+tv)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{p\theta}\int_\Omega\int_0^1 D\Big(\Big|\nabla\big(u(x)+t\theta v(x)\big)\Big|^p\Big)\nabla\theta v(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_\Omega\int_0^1 \Big|\nabla\big(u(x)+t\theta v(x)\big)\Big|^{p-2}\nabla\big(u(x)+t\theta v(x)\big)\mathrm{d}t\nabla\theta v(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega\int_0^1 |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\mathrm{d}t\nabla v(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Lemma 15.5. *Sei $A\colon V\to V^*$ radialstetig und ein Potentialoperator mit einem Potential $\Phi\colon V\to\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\Phi(v) = \Phi(0) + \int_0^1 \langle A(tv), v\rangle \mathrm{d}t\,.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(tv) = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(\Phi(tv+\theta v)-\Phi(tv)) = \langle A(tv), v\rangle\,.$$

Aus der Radialstetigkeit von A folgt die Stetigkeit von $t\mapsto\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(tv)$, also

$$\Phi(v)-\Phi(0) = \int_0^1 \langle A(tv), v\rangle\mathrm{d}t\,.$$

□

Beispiel 15.6. Mit $A=-\Delta_p$ und $\Phi(0)=0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \int_0^1\langle A(tv), v\rangle\mathrm{d}t = \int_0^1\int_\Omega |\nabla(tv(x))|^{p-2}\nabla(tv(x))\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \underbrace{\int_0^1 t^{p-1}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{p}}\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Lemma 15.7. *Sei $A\colon V\to V^*$ demistetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist ein Potentialoperator.*

(ii) *Für alle $x,y\in V$ gilt*

$$\int_0^1\langle A(tx), x\rangle\mathrm{d}t - \int_0^1\langle A(ty), y\rangle\mathrm{d}t = \int_0^1\Big\langle A(y+t(x-y)), x-y\Big\rangle\mathrm{d}t\,.$$

(iii) *Für alle $x,y\in V$ und $u\in C^1([0,1],V)$ mit $u(0)=y$ und $u(1)=x$ gilt*

$$\int_0^1\langle A(tx), x\rangle\mathrm{d}t - \int_0^1\langle A(ty), y\rangle\mathrm{d}t = \int_0^1\langle Au(t), u'(t)\rangle\mathrm{d}t\,.$$

Beweis. (i)⇒(iii): Es sei $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ ein Potential von A. Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi(x) - \Phi(y) = \Phi(u(1)) - \Phi(u(0)) &= \int_0^1 (\Phi \circ u)'(t)\mathrm{d}t \\ = \int_0^1 \Phi'(u(t))u'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \langle Au(t), u'(t)\rangle \mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

(ii)⇒(i): Wir behaupten, dass

$$\Phi(v) = \int_0^1 \langle A(tv), v\rangle \mathrm{d}t$$

ein Potential von A definiert. Dazu ist

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(\Phi(v+\theta w) - \Phi(v)) = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(\int_0^1 \Big\langle A(tv + t\theta w), v + \theta w\Big\rangle \mathrm{d}t - \int_0^1 \langle A(tv), v\rangle \mathrm{d}t\right)\,.$$

Wir setzen $x = v + \theta w$ und $y = v$. Damit folgt nach Voraussetzung

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(\Phi(v+\theta w) - \Phi(v)) = \int_0^1 \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\langle A(v + t\theta w), \theta w\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 \langle Av, w\rangle \mathrm{d}t = \langle Av, w\rangle\,.$$

(iii)⇒(ii): Folgt mit dem Spezialfall $u(t) = y + t(x-y)$ □

Definition 15.8. Ein Funktional $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $\theta \in [0,1]$ und $v, w \in V$

$$\Phi\Big((1-\theta)v + \theta w\Big) \leq (1-\theta)\Phi(v) + \theta\Phi(w)\,.$$

Das Funktional Φ heißt *schwach folgenunterhalbstetig*, falls für jede Folge $\{u_n\} \subset V$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in V

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n)\,.$$

Beispielsweise ist die Norm ein schwach folgenunterhalbstetiges Funktional.

Lemma 15.9. *Sei $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ schwach folgenunterhalbstetig und sei $K \neq \emptyset$ abgeschlossen, beschränkt und konvex. Dann existiert ein $\overline{v} \in K$ mit*

$$\Phi(\overline{v}) = \min_{v\in K} \Phi(v)\,.$$

Beweis. Sei $\{u_n\} \subset K$ eine Folge mit

$$\Phi(u_n) \to \inf_{v\in K} \Phi(v) =: d\,.$$

Da K beschränkt ist, ist auch $\{u_n\}$ beschränkt. Damit existiert eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$ mit $u_{n'} \to u$ für ein $u \in V$ (V ist reflexiv). Nun folgt $\Phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_{n'})$. Es ist sogar $u \in K$, denn K ist nach dem Satz von Mazur schwach abgeschlossen. Nun haben wir

$$d \leq \Phi(u) \leq \liminf_{n'\to\infty} \Phi(u_{n'}) = d\,,$$

also $\Phi(u) = d \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung 15.10. Die Menge aller Minimierer ist schwach abgeschlossen: Sei $\{v_n\}$ eine schwach gegen v in V konvergierende Folge von Minimierern. Dann gilt

$$\Phi(v) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(v_n) = \min_{w\in K} \Phi(w) \leq \Phi(v)\,.$$

Ist Φ konvex, so auch die Menge aller Minimierer: Es ist

$$\Phi\Big(\theta v + (1-\theta)w\Big) \leq \theta\Phi(v) + (1-\theta)\Phi(w) = \min_{u\in K} \Phi(u)$$

für Minimierer v, w.

Lemma 15.11. *Sei $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ ein schwach folgenunterhalbstetiges und* schwach koerzitives *Funktional, wobei letztere bedeutet, dass $\Phi(v) \xrightarrow{\|v\|\to\infty} \infty$. Sei K nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es ein $\overline{v} \in K$ mit*

$$\Phi(\overline{v}) = \min_{v\in K} \Phi(v)\,.$$

Beispiel 15.12. Sei K ein endlichdimensionaler Unterraum (also insbesondere abgeschlossen und konvex). Sei $\Phi(v) = \|v-u\|$ für ein fest gewähltes $u \in V$. Dann git es also ein $\overline{v} \in K$ mit $\|\overline{v}-u\| = \min_{v\in K}\|v-u\|$. Wir nennen $\overline{v}$ die K-Bestapproximation an u.

Beweis. Sei $w \in K$ beliebig. Dann gibt es ein $R > 0$, so dass für alle $z \in V$ mit $\|z\| > R$ die Ungleichung $\Phi(z) \geq \Phi(w)$, da Φ schwach koerzitiv ist. Betrachte $K_R := \{v \in K : \|v\| \leq R\}$. Dann ist K_R (für genügend großes R) nichtleer mit $w \in K_R$, abgeschlossen, konvex und beschränkt. Damit existiert ein $\overline{v} \in K_R$ mit

$$\Phi(\overline{v}) = \min_{v\in K_R} \Phi(v) \leq \Phi(w) \leq \Phi(z)$$

für alle $z \in K \setminus K_R$. Damit ist auch

$$\Phi(\overline{v}) \leq \inf_{z\in K\setminus K_R} \Phi(z)$$

und $\overline{v} \in K$, da $K_R \subseteq K$. $\square$

Lemma 15.13. *Es besitze $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ den Gradienten (die Gâteaux-Ableitung) $A\colon V \to V^*$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das Funktional Φ ist konvex.*

(ii) *Die Abbildung $t \mapsto \phi(t) := \Phi(v+tw)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ist für alle $v, w \in V$ konvex.*

(iii) *Der Operator A ist monoton.*

(iv) *Es gilt $\langle Av, v-w\rangle \geq \Phi(v) - \Phi(w)$ für alle $v, w \in V$.*

Beweis. (i)⇒(iv). Wir haben

$$\begin{aligned}
\langle Av, v-w\rangle = -\langle Av, w-v\rangle &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}\Big(\Phi(v+\theta(w-v)) - \Phi(v)\Big) \\
&= -\lim_{\theta\searrow 0} \frac{1}{\theta}\Big(\Phi(v+\theta(w-v)) - \Phi(v)\Big) \\
&\geq -\lim_{\theta\searrow 0} \frac{1}{\theta}\Big((1-\theta)\Phi(v) + \theta\Phi(w) - \Phi(v)\Big) \\
&= -\lim_{\theta\searrow 0} (\Phi(w) - \Phi(v)) = \Phi(v) - \Phi(w)\,.
\end{aligned}$$

(iv)⇒(iii). Es ist

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle = \langle Av, v - w\rangle + \langle Aw, w - v\rangle \geq \Phi(v) - \Phi(w) + \Phi(w) - \Phi(v) = 0\,.$$

(iii)⇒(ii). Wir haben $\phi'(t) = \langle \Phi'(v + tw), w\rangle$. Für $t > s$ ist

$$\begin{aligned}\phi(t) - \phi(s) = \langle A(v + tw) - A(v + sw), w\rangle &= \\ \frac{1}{t-s}\Big\langle A(v + tw) - A(v + sw), (v + tw) - (v + sw)\Big\rangle &\geq 0\,.\end{aligned}$$

(ii)⇒(i). Die Monotonie von ϕ bedeutet für $\overline{v}, \overline{w} \in V$

$$\Phi(\overline{v} + t\overline{w} + \theta(s - t)\overline{w}) \leq (1 - \theta)\Phi(\overline{v} + t\overline{w}) + \theta\Phi(\overline{v} + s\overline{w})\,.$$

Wir wählen $\overline{v}, \overline{w} \in V$ und $s, t \in \mathbb{R}$ zu gegebenen $v, w \in V$ so, dass

$$\overline{v} + t\overline{w} = v \qquad\qquad \overline{v} + s\overline{w} = w\,,$$

also

$$\overline{w} = \frac{v - w}{t - s} \qquad\qquad \overline{v} = \frac{sv - tw}{s - t}\,.$$

Damit folgt

$$\Phi\big((1 - \theta)v + \theta w\big) = \Phi(v + \theta(w - v)) \leq (1 - \theta)\Phi(v) + \theta\Phi(w)\,.$$

□

Lemma 15.14. *Es sei $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ konvex und Gâteaux-differenzierbar. Dann ist Φ auch schwach folgenunterhalbstetig.*

Beweis. Für alle $u, v \in V$ haben wir

$$\langle \Phi'(u), u - v)\rangle \geq \Phi(u) - \Phi(v)\,.$$

Sei $\{u_n\} \subset V$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$ in V. Dann gilt

$$\Phi(u) - \Phi(u_n) \leq \langle \Phi'(u), u - u_n\rangle\,,$$

also

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\leq \liminf_{n\to\infty}\Big(\Phi(u_n) + \langle \Phi'(u), u - u_n\rangle\Big) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) + \lim_{n\to\infty} \langle \Phi'(u), u - u_n\rangle = \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n)\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 15.15. *Sei $A\colon V \to V^*$ ein Potentialoperator mit Potential $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ und sei $f \in V^*$. Wenn*

$$\Phi(u) - \langle f, u\rangle = \min_{v\in V}\big(\Phi(v) - \langle f, v\rangle\big)\,,$$

dann gilt auch $Au = f$ in V^*. Die Umkehrung gilt auch, wenn A monoton ist.

Beweis. Für $w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\Big(\Phi(u+\theta w) - \langle f, u+\theta w\rangle - \Phi(u) + \langle f, u\rangle\Big) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(\Phi(u+\theta w) - \Phi(u)) - \langle f, w\rangle \\ &= \langle Au - f, w\rangle\,.\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\frac{1}{\theta}\Big(\Phi(u+\theta w) - \langle f, u+\theta w\rangle - (\Phi(u) - \langle f, u\rangle)\Big)\begin{cases}\geq 0 & \theta > 0\\ \leq 0 & \theta < 0\,,\end{cases}$$

denn das Minimum von $\Phi(v) - \langle f, v\rangle$ wird in u angenommen. Damit folgt

$$\langle Au - f, w\rangle = 0$$

für alle $w \in V$, d.h. $Au = f$.
Zur Umkehrung sei nun A monoton und es gelte $Au = f$. Dann folgt

$$\langle f, u-v\rangle = \langle Au, u-v\rangle \geq \Phi(u) - \Phi(v)$$

für alle $v \in V$, was jedoch gerade

$$\Phi(u) - \langle f, u\rangle \leq \Phi(v) - \langle f, v\rangle$$

ist. □

Lemma 15.16. *Jeder monotone Potentialoperator ist demistetig.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass ein monotoner Operator $A\colon V \to V^*$ genau dann demistetig ist, wenn aus $\langle f - Aw, u-w\rangle \geq 0$ für alle $w \in V$ auch $Au = f$ folgt. Sei nun $f \in V^*$ beliebig, aber fest und es gelte $\langle f - Aw, u-w\rangle \geq 0$ für alle $w \in V$. Dann ist für alle $t > 0$, $v \in V$

$$\begin{aligned}\langle f, u - (u + t(v-u))\rangle &\geq \Big\langle A(u+t(v-u)), u - (u+t(v-u))\Big\rangle \\ &= \Big\langle A(u+t(v-u)), (u+t(v-u)) - (u+t(v-u)+v-u)\Big\rangle\cdot t \\ &\geq \Big(\Phi(u+t(v-u)) - \Phi(u+t(v-u)+v-u)\Big)\cdot t\,.\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$\cancel{t}\langle f, u-v\rangle \geq \cancel{t}\Big(\Phi(u+t(v-u)) - \Phi(v+t(v-u))\Big)\,,$$

also

$$\langle f, u-v\rangle \geq \lim_{t\searrow 0}\Big(\Phi(u+t(v-u)) - \Phi(v+t(v-u))\Big) = \Phi(u) - \Phi(v)\,.$$

Damit ergibt sich

$$\Phi(u) - \langle f, u\rangle \leq \Phi(v) - \langle f, v\rangle\,,$$

Lemma 15.15 liefert also $Au = f$. □

Korollar 15.17. *Sei $A\colon V \to V^*$ ein monotoner Potentialoperator. Dann ist in $u \in V$ genau dann ein Minimum der Abbildung*

$$v \mapsto \int_0^1 \langle A(tv), v\rangle \mathrm{d}t - \langle f, v\rangle\,,$$

wenn $Au = f$ in V^*.

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 15.13 und Lemma 15.15. □

Satz 15.18 (Browder-Minty, Version für Potentialoperatoren)**.** *Sei $A\colon V \to V^*$ ein monotoner, koerzitiver Potentialoperator. Dann gibt es zu jedem $f \in V^*$ mindestens ein $u \in V$ mit $Au = f$ in V^*.*

Beweis. A ist radialstetig und hat das Potential

$$\Phi(v) := \int_0^1 \langle A(tv), v\rangle \mathrm{d}t\,.$$

Es sei $\Phi_f(v) = \Phi(v) - \langle f, v\rangle$. Dann ist Φ_f schwach folgenunterhalbstetig, da Φ diese Eigenschaft bereits besitzt. Es bleibt zu zeigen, dass Φ_f schwach koerzitiv ist. Dann existiert nämlich ein $u \in V$ mit $\Phi_f(u) = \min_{v\in V} \Phi_f(v)$, also $Au = f$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_f(v) &= \int_0^1 \langle A(tv), v\rangle \mathrm{d}t - \langle f, v\rangle = \int_0^1 \underbrace{\langle A(tv) - A(0), tv\rangle}_{\geq 0} \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \langle f - A(0), v\rangle \\
&\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle A(tv) - A(0), v\rangle \mathrm{d}t - \langle f - A(0), v\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\left\langle A\left(\tfrac{1}{2}v\right) - A(0), v\right\rangle - \langle f - A(0), v\rangle = \left\langle A\left(\tfrac{1}{2}v\right), \tfrac{1}{2}v\right\rangle + \left\langle \tfrac{1}{2}A(0) - f, v\right\rangle \\
&\geq \gamma\left(\left\|\tfrac{1}{2}v\right\|\right)\left\|\tfrac{1}{2}v\right\| - \left\|\tfrac{1}{2}A(0) - f\right\|_* \|v\| \xrightarrow{\|v\|\to\infty} \infty\,.
\end{aligned}$$

□

Korollar 15.19. *Sei $A\colon V \to V^*$ ein monotoner, koerzitiver Potentialoperator. Dann ist das Potential Φ von A nach unten beschränkt.*

Beweis. Es gibt ein $u \in V$ mit $Au = 0$, also ist u Minimierer von Φ, also $\Phi(u) \leq \Phi(v)$ für alle $v \in V$. □

Beispiel 15.20. Betrachte

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v\rangle$$

bzw. $Au = f$, $a(u, v) = \langle f, v\rangle$, wobei $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ stark positiv, beschränkt und bilinear ist.

16 Das stationäre Navier-Stokes-Problem

Es bezeichne u ein Geschwindigkeitsfeld eines Fluids. Dieses Fluid habe die Massendichte ρ. Die Bewegung des Fluids lässt sich dann durch die partielle Differentialgleichung

$$\rho_t - \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

beschreiben. Bei konstanter Massendichte ergibt sich

$$\nabla \cdot u = 0\,.$$

Es wird also ein divergenzfreies (*solenoidales*) Geschwindigkeitsfeld gesucht. Die Navier-Stokes-Gleichung lautet dann

$$u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla \pi = f\,,$$

wobei π als Druck (pro Dichte) verstanden werden kann, $\nu > 0$ ist die kinematische Viskosität. Der Term $\nu \Delta u$ ist ein *Diffusionsterm*, $(u \cdot \nabla) u$ ein *Konvektionsterm*. Für nicht-Newtonsche Fluide schreiben wir statt $-\nu \Delta u$ z.B. $-\nabla \cdot (|Du|^{p-2} Du)$, wobei $Du = \frac{1}{2}(\nabla \cdot u + \nabla \cdot u^{\mathrm{T}})$.

Im Eindimensionalen haben wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(x(t),t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x(t),t) + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)}_{=u(x(t),t)} \frac{\partial}{\partial x} u(x(t),t)\,.$$

Für $u = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$ haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1 - \nu \Delta u_1 + \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \pi = f_1\,.$$

Die Entdimensionalisierung im stationären Problem ($u_t = 0$) verwendet

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \qquad\qquad \hat{u} = \frac{u}{U}\,.$$

Daraus erhalten wir $\hat{\Delta} = L^2 \Delta$ und

$$\begin{aligned} -\frac{\nu}{LU} \hat{\Delta} \hat{u} &= -\frac{\nu}{LU} L^2 \frac{1}{U} \Delta u = -\frac{\nu L}{U^2} \Delta u \\ (\hat{u} \cdot \hat{\nabla}) \hat{u} &= \frac{1}{U^2} L (u \cdot \nabla) u \\ \hat{\nabla} \hat{\pi} &= \frac{L}{U^2} \nabla \pi\,, \end{aligned}$$

wobei $\hat{\pi} = \frac{\pi}{U^2}$. Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$-\frac{\nu}{LU} \hat{\nabla} \hat{u} + (\hat{u} \cdot \hat{\nabla}) \hat{u} + \hat{\nabla} \hat{\pi} = \hat{f}\,.$$

Hier kann auch $\frac{1}{\mathrm{Re}}$ verwendet werden, wobei $\mathrm{Re} = \frac{LU}{\nu}$ die *Reynolds-Zahl* ist.

Im folgenden betrachten wir das umgeschriebene Problem

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla \pi &= f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ \nabla \cdot u &= 0 \quad \text{auf } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial \Omega\,. \end{cases}$$

Dies lässt sich auch als

$$\begin{pmatrix} -\nu\Delta & \operatorname{grad} \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. In der schwachen Formulierung ergibt sich nach Multiplikation mit einer Testfunktion v

$$\nu \int_\Omega (\nabla u) \cdot (\nabla v) \mathrm{d}x + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v \mathrm{d}x - \int_\Omega \pi (\nabla \cdot v) \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x$$

für $v \in H_0^1(\Omega)^d$ und

$$\int_\Omega (\nabla u) q \mathrm{d}x = 0$$

für $q \in L^2(\Omega)$. Um den Druck zu eliminieren, fordern wir $\nabla \cdot v = 0$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left\{ v \in C_0^\infty(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0 \right\} \\ V &:= \operatorname{clos}_{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} \mathcal{V} \\ H &:= \operatorname{clos}_{\|\cdot\|_{L^2}} \mathcal{V} \,. \end{aligned}$$

Lemma 16.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann gilt*

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0 \right\} \\ H &= \left\{ v \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0 \text{ und } \gamma_n v = 0 \right\} \,, \end{aligned}$$

wobei $\nabla \cdot v = 0$ für $v \in L^2$ bedeutet, dass $\int_\Omega v \cdot (\nabla \phi) \mathrm{d}x = 0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Für glattes v ist

$$\gamma_n v = (v \cdot n)|_{\partial\Omega} \,,$$

wobei n den äußeren Normalenvektor bezeichnet.

Damit ist V ein abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)^d$.
Schwache Formulierung: Zu $f \in V^*$ finde $u \in V$, so dass

$$a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \,,$$

wobei

$$\begin{aligned} a(v, w) &= \nu \int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla w) \mathrm{d}x = \nu \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} w_i \\ b(u, v, w) &= \big((u \cdot \nabla) v, w \big)_{L^2(\Omega)^d} = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j w_j \,. \end{aligned}$$

Lemma 16.2. *Obiges a ist wohldefiniert auf $V \times V$ und $a \colon V \times V \to \mathbb{R}$ ist linear, beschränkt, stark positiv und symmetrisch.*

Bemerkung 16.3. Nach Lax-Milgram besitzt das stationäre inkompressible Stokes-Problem ($b(\cdot, \cdot, \cdot)$ wird vernachlässigt) genau eine „Geschwindigkeitslösung“.
Der *Stokes-Operator* $A \colon V \to V^*$ mit $\langle Av, w \rangle = a(v, w)$ existiert und ist ebenfalls linear, beschränkt, stark positiv und symmetrisch.

Lemma 16.4. *b ist wohldefiniert auf $L^\alpha(\Omega)^d \times W^{1,\beta}(\Omega)^d \times L^\gamma(\Omega)^d$ mit $\alpha, \beta, \gamma > 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$, multilinear und beschränkt, d.h.*

$$|b(u,v,w)| \leq c\|u\|_{L^\alpha} \cdot \|\nabla v\|_{L^\beta} \cdot \|w\|_{L^\gamma}\,.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\leq \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega |u_i| \left|\frac{\partial}{\partial x_i} v_j\right| |w_j| \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i,j=1}^d \left(\int_\Omega |u_i|^\alpha \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i} v_j\right|^\beta \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_\Omega |w_j|^\gamma \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\leq \left(\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega |u_i|^\alpha \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i} v_j\right|^\beta \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega |w_j|^\gamma \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\leq c\|u\|_{L^\alpha(\Omega)^d} \|\nabla v\|_{L^\beta(\Omega)^{d\times d}} \|w\|_{L^\gamma(\Omega)^d}\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 16.5. *b ist wohldefiniert auf $V \times V \times V$ und darauf beschränkt und bezüglich des zweiten und dritten Arguments schiefsymmetrisch, d.h.*

$$|b(u,v,w)| \leq c\|u\|\|v\|\|w\|\,,$$

wobei

$$\|v\| = \|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}} = \left(\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i} v_j\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v)$$

für alle $u, v, w \in V$.

Beweis. Wir wenden das vorige Lemma mit $\beta = 2$ und $\alpha = \gamma = 4$ (oder $\alpha = 3$, $\gamma = 6$ o.ä.). Zur Schiefsymmetrie haben wir

$$\begin{aligned}
b(u,v,w) &= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j w_j \mathrm{d}x = \underbrace{\sum_{i,j=1}^d \int_\partial u_i w_j (v\cdot n) \mathrm{d}\mathcal{O}}_{=0\,,\ \text{da } v=0 \text{ auf } \partial\Omega} - \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega v_j \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i w_j) \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega v_j \frac{\partial}{\partial x_i} u_i w_j \mathrm{d}x - \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega v_j u_i \frac{\partial}{\partial x_i} w_j = 0 - b(u,w,v)\,,
\end{aligned}$$

denn $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = \operatorname{div} u = 0$. □

Bemerkung 16.6. Die Abbildung $B\colon V \times V \to V^*$ mit $\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w)$ ist bilinear und beschränkt. Wir haben dann $Au + B(u,u) = f$ in V^*.

Satz 16.7. *Zu $f \in V^*$ gibt es mindestens ein $u \in V$, so dass $Au + Bu = f$ in V^*.*

Beweis. Wir wollen Satz 13.8 anwenden. Dafür bleibt zu zeigen:

1. Die Abbildung $B\colon V \mapsto V^*$, $u \mapsto B(u,u)$, ist verstärkt stetig.

2. $A + B$ ist koerzitiv.

Zu 1. Sei $\{v_n\} \subset V$ eine Folge mit $v_n \rightharpoonup v$ in V. Zu zeigen ist $Bv_n = B(v_n, v_n) \to Bv = B(v,v)$ in V^*. Betrachte für $w \in V$

$$\begin{aligned}
\Big|\langle B(v_n,v_n) - B(v,v), w\rangle\Big| &= \big|b(v_n,v_n,w) - b(v,v,w)\big| \\
&= \Big|b(v_n,v_n,w) - b(v_n,v,w) + b(v_n,v,w) - b(v,v,w)\Big| \\
&= \big|b(v_n, v_n - v, w) + b(v_n - v, v, w)\big| \\
&\le \big|b(v_n, w, v_n - v)\big| + \big|b(v_n - v, w, v)\big| \\
&\le c\|v_n\|_{L^4} \cdot \|w\| \cdot \|v_n - v\|_{L^4} + \tilde{c}\|v_n - v\|_{L^4} \cdot \|w\| \cdot \|v\|_{L^4}\,.
\end{aligned}$$

Es ist nun also

$$\begin{aligned}
\|Bv_n - Bv\|_{V^*} &= \sup_{\substack{w\in V\\ w\neq 0}} \frac{|\langle Bv_n - Bv, w\rangle|}{\|w\|} \\
&\le \mathrm{const}\,(\|v_n\|_{L^4} + \|v\|_{L^4})\,\|v_n - v\|_{L^4} \\
&\le \mathrm{const}(\|v_n\| + \|v\|)\|v_n - v\|_{L^4}\,.
\end{aligned}$$

Da $V \overset{c}{\hookrightarrow} L^4$, folgt $\|v_n - v\|_{L^4} \to 0$, außerdem ist $\|v_n\|$ beschränkt.
Zu 2. Es ist

$$\langle Av + Bv, v\rangle = a(v,v) + \underbrace{b(v,v,v)}_{=0} = \nu\|v\|^2\,.$$

□

Satz 16.8. *Für kleine Daten (*$\mathrm{Re} = \frac{1}{\nu}$ *und* $\|f\|_{V^*}$*) existiert höchstens eine Lösung.*

Beweis. Seien $u, \bar{u} \in V$ zwei Lösungen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nu\|u - \bar{u}\|^2 &= a(u - \bar{u}, u - \bar{u}) = a(u, u - \bar{u}) + a(\bar{u}, u - \bar{u}) \\
&= \cancel{\langle f, u - \bar{u}\rangle} - b(u,u,u-\bar{u}) - \cancel{\langle f, u - \bar{u}\rangle} + b(\bar{u},\bar{u},u-\bar{u}) \\
&= b(\bar{u},\bar{u},u-\bar{u}) - b(u,u,u-\bar{u}) = \underbrace{b(\bar{u},\bar{u}-u,u-\bar{u})}_{=0} + b(\bar{u}-u,u,u-\bar{u}) \\
&\le c_b\|u\|\|u-\bar{u}\|^2\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist c_b die Konstante aus der Beschränktheit von $b\colon V \times V \times V \to \mathbb{R}$ ist. Wir verwenden eine a-priori-Abschätzung für u:

$$\nu\|u\|^2 = a(u,u) = \langle f, u\rangle - \underbrace{b(u,u,u)}_{=0} \le \|f\|_{V^*}\|u\|\,.$$

Damit erhalten wir

$$\nu\|u - \bar{u}\|^2 \le c_b\frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}\|u - \bar{u}\|^2\,.$$

Dies zeigt Einzigkeit, wenn $\frac{c_b}{\nu^2}\|f\|_{V^*} < 1$. □

Wir betrachten nun

$$-\nu\Delta u + \nabla\pi = f$$

mit $\nabla\cdot u = 0$. Wir stellen die schwache Formulierung auf $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$. Dabei betrachten wir zunächst $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, also die Menge aller Äquivalenzklassen $\{[q] = q+\text{const}, q \in L^2(\Omega)\}$, ausgestattet mit der Norm

$$\|q\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|q + c\|_{L^2}\,.$$

Außerdem ist

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} \cong L_0^2(\Omega) := \{\tilde{q} \in L^2(\Omega) : \int_\Omega \tilde{q}(x)\mathrm{d}x = 0\}\,.$$

Die schwache Formulierung lautet nun

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x - \int_\Omega \pi \operatorname{div} v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \\ -\int_\Omega \operatorname{div} u \cdot q \mathrm{d}x = 0\,. \end{cases}$$

Wir definieren $c\colon H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)^d \to \mathbb{R}$ über

$$c(v,q) = -\int_\Omega \operatorname{div} v \cdot q \mathrm{d}x\,.$$

Dann ist c bilinear und beschränkt, denn

$$|c(v,q)| \le \|\operatorname{div} v\|_{L^2}\|q\|_{L^2} \le \|\nabla v\|_{L^2}\|q\| = \|v\|_{H_0^1}\|q\|_{L^2}\,.$$

Nun erhalten wir einen Operator $C\colon H_0^1(\Omega) \to \left(L_0^2(\Omega)\right)^*$ mit $\langle Cv, q\rangle = c(v,q)$. Das Stokes-Problem wird dann zu

$$\begin{cases} Au + C^*\pi = f \\ Cu = 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} A & C^* \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei C^* den dualen Operator zu C bezeichnet. Für $f \in H^{-1}(\Omega)^d$ können wir die linke Seite als $\mathcal{A}(u,\pi)$ mit

$$\mathcal{A}\colon H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)^d \to \left(H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)^d\right)^*$$

schreiben und erhalten

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zwar ist $\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ für $f \in H^{-1}(\Omega)^d$ eindeutig lösbar (in $\left(\begin{smallmatrix} u \\ \pi \end{smallmatrix}\right)$), aber der Operator $\mathcal{A}$ ist nicht stark positiv, d.h. Lax-Milgram kann nicht angewendet werden. Es ist

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A}\begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} A & C^* \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} Av + C^*v \\ Cv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle Av, v\rangle + \langle C^*q, v\rangle + \langle Cv, q\rangle\,. \end{aligned}$$

Betrachte $v = 0$. Dann ist

$$\left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \not\geq \text{const}\|q\|^2 = \text{const}(\|v\|^2 + \|q\|^2)\,,$$

d.h. $\mathcal{A}$ ist nicht stark positiv.

Für Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung genügt folgendes: Es gibt ein $\beta > 0$, so dass

$$\inf_{\substack{q \in L_0^2(\Omega) \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega)^d \\ v \neq 0}} \frac{c(v,q)}{\|v\|_{H_0^1} \|q\|_{L_0^2}} \geq \beta > 0\,.$$

Differentialgleichungen III

17 Bochner-Integral

Das Ziel dieses Kapitels ist es, ein Integral von Funktionen auf einem reellen Intervall in einen Banach-Raum zu definieren. Wir wollen dazu auf die bisher dazu benötigte Stetigkeit verzichten und führen stattdessen den Begriff der Bochner-Messbarkeit ein.

17.1 Bochner-Messbarkeit

Es sei im folgenden $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum.

Definition 17.1. Eine Funktion $u\colon [0,T] \to X$, $T > 0$, heißt *einfache Funktion*, falls es endlich viele paarweise disjunkte und Lebesgue-messbare Teilmengen $E_1, \dots, E_N \subset [0,T]$ und Elemente $u_1, \dots, u_N \in X$ mit

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i \, \mathbb{1}_{E_i}$$

gibt.

Definition 17.2. Eine Funktion $u\colon [0,T] \to X$ heißt *Bochner-messbar*, falls es eine Folge einfacher Funktionen (u_n) gibt, die fast überall punktweise gegen u konvergiert, d.h.

$$u_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} u(t)$$

für fast alle $t \in [0,T]$ in X.

Bemerkung 17.3. Bochner-messbare Funktionen heißen auch *stark messbare Funktionen.*

Es besteht der folgende, jedoch nicht umkehrbare Zusammenhang zwischen der so definierten Bochner-Messbarkeit und der uns bereits bekannten Lebesgue-Messbarkeit.

Lemma 17.4. *Ist $u\colon [0,T] \to X$ Bochner-messbar, so ist $t \mapsto \|u(t)\|$ Lebesgue-messbar.*

Beweis. Sei (u_n) eine Folge einfacher Funktionen mit $u_n(t) \to u(t)$ für fast alle $t \in [0,T]$. Also folgt

$$\big|\|u_n(t)\| - \|u(t)\|\big| \le \|u_n(t) - u(t)\| \to 0$$

für fast alle $t \in [0,T]$. Da $\|u_n(\cdot)\|\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ wegen

$$\|u_n(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} u_n^i \, \mathbb{1}_{E_n^i}(t) \right\| = \sum_{i=1}^{N} \|u_n^i\| \, \mathbb{1}_{E_n^i}(t)$$

eine einfache und insbesondere Lebesgue-messbare Funktion ist, erhalten wir die Lebesgue-Messbarkeit von $\|u(\cdot)\|$ als Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen. $\square$

Beispiel 17.5. Wir betrachten $u\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x < t \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Wir definieren $\tilde{u}\colon [0,1] \to L^\infty(0,1)$ durch

$$[\tilde{u}(t)]\,(x) := u(x,t)\,,$$

also $\tilde{u}(t) = \mathbb{1}_{[0,t)}$. Nun ist zwar u Lebesgue-messbar, aber $\tilde{u}$ ist *nicht* Bochner-messbar. Wäre dies der Fall, so gäbe es für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ eine einfache Funktion $v = \sum_{i=1}^N v_i\, \mathbb{1}_{E_i}$ mit

$$\Big|[\tilde{u}(t)](x) - [v(t)](x)\Big| < \varepsilon$$

für $t, x \in M \subset [0,1]$ mit $\lambda(M) = 1$. Sei nun $i \in \{1, \dots, N\}$ und seien $t_1, t_2 \in E_i \cap M$ und $E_i \cap M \cap (t_1, t_2) \neq \emptyset$. Wir wählen $t \in E_i \cap M \cap (t_1, t_2)$. Es ist nun jedoch

$$\frac{1}{2} > \Big|\underbrace{[\tilde{u}(t_1)](t)}_{=u(t,t_1)} - [v(t_1)](t)\Big| = |0 - v_i(t)|$$

und wir erhalten den Widerspruch

$$\frac{1}{2} > \Big|[\tilde{u}(t_2)](t) - [v(t_2)](t)\Big| = |1 - v_i(t)|\,.$$

Wie nach Bemerkung 17.3 zu erwarten war, geben wir nun die Definition schwacher Messbarkeit an.

Definition 17.6. Eine Funktion $u\colon [0,T] \to X$ heißt *schwach Bochner-messbar*, falls für jedes $f \in X^*$ die Funktion $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle$ Bochner-messbar ist.

Die Funktion $u\colon [0,T] \to X$ heißt *wesentlich separabel-wertig*, falls es eine Nullmenge $N \subset [0,T]$ gibt, so dass $u([0,T] \setminus N)$ eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Der Begriff der wesentlich separabel-wertigen Funktion ordnet sich mit dem folgenden Satz in die Begriffe der Messbarkeit ein.

Satz 17.7 (Pettis)**.** *Die Funktion $u\colon [0,T] \to X$ ist genau dann Bochner-messbar, wenn u schwach Bochner-messbar und wesentlich separabel-wertig ist.*

Da eine Teilmenge eines separablen Raumes stets eine abzählbare Teilmenge besitzt, erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 17.8. *Ist X ein separabler Banach-Raum, so ist eine Funktion $u\colon [0,T] \to X$ genau dann Bochner-messbar, falls u schwach Bochner-messbar ist.*

17.2 Bochner-Integral

Nachdem wir nun den Begriff der Bochner-Messbarkeit eingeführt haben, möchten wir im nächsten Schritt das Bochner-Integral definieren.

Definition 17.9. Es sei $u\colon [0,T] \to X$ Bochner-messbar. Dann heißt die Funktion u *Bochner-integrierbar*, falls es eine Folge einfacher Funktionen (u_n) gibt, so dass $u_n(t) \to u(t)$ fast überall gilt und

$$\int_0^T \|u_n(t) - u(t)\| \mathrm{d}t \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Das Integral $\int_0^T \|u_n(t) - u(t)\| \mathrm{d}t$ ist als Lebesgue-Integral einer nichtnegativen Lebesgue-messbaren Funktion wohldefiniert.

Ist $v\colon [0,T] \to X$ eine einfache Funktion mit $v = \sum_{i=1}^N v_i \, \mathbb{1}_{E_i}$, so ist

$$\int_0^T v(t)\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^N v_i \lambda(E_i) \in X\,.$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^T u_n(t)\mathrm{d}t - \int_0^T u_m(t)\mathrm{d}t \right\| &\le \int_0^T \|u_n(t) - u_m(t)\|\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|\mathrm{d}t + \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|\mathrm{d}t \to 0\,.\end{aligned}$$

Wir können daher

$$\int_0^T u(t)\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t)\mathrm{d}t$$

definieren. Das so definierte *Bochner-Integral* ist linear, es gilt außerdem der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz.

Wir fassen einige weitere Eigenschaften des Bochner-Integrals im folgenden Satz zusammen.

Satz 17.10. *Sei* $u\colon [0,T] \to X$.

(i) *Ist u Bochner-messbar, so ist u genau dann Bochner-integrierbar, wenn die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ Lebesgue-integrierbar ist.*

(ii) *Wir setzen für eine messbare Teilmenge $B \subset [0,T]$ und eine Bochner-integrierbare Funktion $u\colon [0,T] \to X$*

$$\int_B u(t)\mathrm{d}t := \int_0^T u(t) \, \mathbb{1}_B(t)\mathrm{d}t\,.$$

Dann gilt für jedes messbare $B \subset [0,T]$ und jedes $f \in X^*$

$$\left\| \int_B u(t)\mathrm{d}t \right\| \le \int_B \|u(t)\|\mathrm{d}t$$

und außerdem ist

$$\left\langle f, \int_B u(t)\mathrm{d}t \right\rangle = \int_B \langle f, u(t)\rangle \mathrm{d}t\,.$$

(iii) *Es sei Y ein weiterer Banach-Raum. Ist $A \in L(X,Y)$, so gilt*

$$A \int_0^T u(t)\mathrm{d}t = \int_0^T Au(t)\mathrm{d}t$$

für jede Bochner-integrierbare Funktion $u\colon [0,T] \to X$.

Beweis. Zu (i): Es sei zunächst u Bochner-integrierbar. Aus der Bochner-Messbarkeit von u folgt nun die Lebesgue-Messbarkeit von $t \mapsto \|u(t)\|$. Sei (u_n) eine Folge einfacher Funktionen, die punktweise fast überall gegen u konvergiert. Dann gilt

$$\left| \int_0^T \|u_n(t)\|\mathrm{d}t - \int_0^T \|u_m(t)\|\mathrm{d}t \right| \le \int_0^T \|u_n(t) - u_m(t)\|\mathrm{d}t \to 0\,.$$

Damit konvergiert $\int_0^T \|u_n(t)\| \mathrm{d}t$ in $\mathbb{R}$. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int_0^T \|u(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^T \lim_{n\to\infty} \|u_n(t)\| \mathrm{d}t \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u_n(t)\| \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Nun sei $t \mapsto \|u(t)\|$ Lebesgue-integrierbar. Wieder sei (u_n) eine Folge einfacher Funktionen, die punktweise fast überall gegen u konvergiert. Wir setzen

$$v_n(t) := \begin{cases} u_n(t) & \text{falls } \|u_n(t)\| \leq 2\|u(t)\| \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann ist v_n, $n \in \mathbb{N}$, eine einfache Funktion. Es sei nun

$$M := \{t \in [0,T] : u_n(t) \to u(t)\}\,.$$

Ist nun $t \in M$ mit $u(t) \neq 0$, so wählen wir für $\varepsilon \in (0, \|u(t)\|)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|\|u(t)\| - \|u_n(t)\|\big| \leq \|u(t) - u_n(t)\| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Dann ist

$$\|u_n(t)\| \leq \|u(t)\| + \varepsilon < 2\|u(t)\|\,.$$

Es ist also $v_n(t) = u_n(t) \to u(t)$. Ist $u(t) = 0$ für $t \in [0,T]$, so folgt $v_n(t) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, also ebenfalls $v_n(t) \to u(t)$. Wir erhalten damit, dass v_n fast überall gegen u konvergiert. Weiterhin ist $\|v_n(t) - u(t)\| \leq 3\|u(t)\|$. Mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|v_n(t) - u(t)\| \mathrm{d}t = 0\,.$$

Zu (iii): Wie oben sei (u_n) eine Folge einfacher Funktionen, die punktweise fast überall gegen u konvergiert. Dann ist auch Au_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Funktion. Mit der Beschränktheit von A folgt für fast alle $t \in [0,T]$

$$\|Au_n(t) - Au(t)\| \leq \|A\|\|u_n(t) - u(t)\| \to 0\,.$$

Ebenso gilt

$$\int_0^T \|Au_n(t) - Au(t)\| \mathrm{d}t \leq \|A\| \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\| \mathrm{d}t \to 0\,,$$

d.h. Au ist Bochner-integrierbar. Letztlich haben wir

$$\int_0^T Au(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T Au_n(t)\mathrm{d}t = A \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t)\mathrm{d}t = A \int_0^T u(t)\mathrm{d}t\,.$$

Zu (ii): Die zweite Aussage folgt aus (iii) mit $Y = \mathbb{R}$. Mit dem Satz von Hahn-Banach erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \int_B u(t)\mathrm{d}t \right\| &= \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\langle f, \int_B u(t)\mathrm{d}t \rangle}{\|f\|_*} \\ &\leq \sup_f \frac{\int_B |\langle f, u(t)\rangle| \mathrm{d}t}{\|f\|_*} \leq \sup_f \frac{\int_B \|f\|_* \|u(t)\| \mathrm{d}t}{\|f\|_*} \\ &= \int_B \|u(t)\| \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 17.11. Ist $u \in C([0,T],X)$, so ist u Bochner-integrierbar und das Bochner-Inegral von u stimmt mit dem in Lemma 2.1.4 definierten Integral überein.
Insbesondere gilt

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \in \overline{\mathrm{co}}\{u([0,T])\}\,.$$

Satz 17.12. *Sei* $u\colon [0,T] \to X$ *Bochner-integrierbar. Dann gelten für fast alle* $t \in [0,T]$ *die folgenden Aussagen:*

(i) *Es gilt*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in[0,T]}} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)\mathrm{d}s = u(t)\,.$$

(ii) *Es gilt*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in[0,T]}} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|u(t)-u(s)\|\mathrm{d}s = 0\,.$$

Beweis. Wir merken zunächst an, dass (i) aus (ii) mit $u(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(t)\mathrm{d}s$ und der Dreiecksungleichung folgt.
Zu (ii): Die Funktion u ist wesentlich separabel-wertig. Es sei also $N \subset [0,T]$ eine Nullmenge, so dass $u([0,T]\setminus N)$ die abzählbare dichte Teilmenge $\{x_n\}$ hat. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $s \mapsto \|u(s)-x_n\|$ Lebesgue-integrierbar. Damit gilt für fast alle $t \in [0,T]$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|u(s)-x_n\|\mathrm{d}s = \|u(t)-x_n\|\,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|u(s)-u(t)\|\mathrm{d}s &\le \limsup \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|u(s)-x_n\|\mathrm{d}s + \|u(t)-x_n\|\\ &= 2\|u(t)-x_n\| < 2\varepsilon\,,\end{aligned}$$

wobei wir $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $\|u(t)-x_n\| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. ☐

Definition 17.13. Eine Funktion $u\colon [0,T] \to X$ heißt *absolut stetig*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ git, so dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Intervalle $(a_i,b_i) \subset [0,T]$, $i = 1,\dots,N$ mit $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$

$$\sum_{i=1}^N \|u(b_i)-u(a_i)\| < \varepsilon$$

gilt.

Satz 17.14 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Es sei* $u\colon [0,T] \to X$ *Bochner-integrierbar. Dann ist* $U\colon [0,T] \to X$*,*

$$U(t) := \int_0^t u(s)\mathrm{d}s\,,$$

absolut stetig und fast überall (klassisch) differenzierbar mit $U'(t) = u(t)$ *– insbesondere in Stetigkeitspunkten von* u.

Beweisskizze. Wir haben fast überall

$$\frac{U(t+h)-U(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)\mathrm{d}s \to u(t)\,.$$

Für paarweise disjunkte Intervalle $(a_i, b_i) \subset [0,T]$ haben wir außerdem

$$\sum \|U(b_i) - U(a_i)\| \le \sum \int_{a_i}^{b_i} \|u(s)\|\mathrm{d}s\,.$$

Da $\|u(\cdot)\|$ Lebesgue-integrierbar ist, ist $t \mapsto \int_0^t \|u(s)\|\mathrm{d}s$ absolut stetig, woraus die Behauptung folgt. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch nicht, das heißt aus Absolutstetigkeit folgt im allgemeinen nicht die Differenzierbarkeit fast überall.

Beispiel 17.15. Es sei u die Funktion aus Beispiel 17.5. Wir betrachten $\tilde{u}\colon [0,1] \to L^1(0,1)$,

$$[\tilde{u}(t)](x) := u(x,t)\,.$$

Dann ist $\tilde{u}$ absolut stetig: Für $s,t \in [0,1]$, $s < t$, haben wir

$$\|\tilde{u}(t) - \tilde{u}(s)\|_{L^1} = \int_0^1 \Big|[\tilde{u}(t)](x) - [\tilde{u}(s)](x)\Big|\mathrm{d}x = \int_0^s 0\mathrm{d}x + \int_s^t 1\mathrm{d}x + \int_t^1 0\mathrm{d}x = t - s\,,$$

also sogar Lipschitz-Stetigkeit von $\tilde{u}$. Angenommen, es gäbe nun eine Funktion $v\colon [0,1] \to L^1(0,1)$, so dass $\tilde{u}'(t) = v(t)$ für fast alle $\in [0,1]$ gilt. Dann wäre

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\searrow 0} \left\|\frac{\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)}{h} - v(t)\right\| \\
&= \lim \left(\int_0^t |[v(t)](x)|\mathrm{d}x + \int_t^{t+h} |\frac{1}{h} - [v(t)](x)|\mathrm{d}x + \int_{t+h}^1 |[v(t)](x)|\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 |[v(t)](x)|\mathrm{d}x + \lim \int_t^{t+h} |\frac{1}{h} - [v(t)](x)|\mathrm{d}x \ge \|v(t)\|\,,
\end{aligned}$$

also $v = 0$. Es ist jedoch

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)}{h}\right\| = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(0+h+0) = 1 \ne 0\,.$$

Ist der betrachtete Banach-Raum jedoch reflexiv, so gilt die Umkehrung.

Satz 17.16 (Komura)**.** *Sei X reflexiv. Ist nun $v\colon [0,T] \to X$ absolut stetig, so gibt es eine Bochner-integrierbare Funktion $u\colon [0,T] \to X$, so dass $v'(t) = u(t)$ und $v(t) = v(0) + \int_0^t u(s)\mathrm{d}s$ für fast alle $t \in [0,T]$ gelten.*

17.3 Die Räume $L^p(0,T;X)$

Wir führen analog zum Fall reellwertiger Funktionen die L^p-Räume ein.

Definition 17.17. Sei $1 \le p < \infty$. Dann bezeichne $L^p(0,T;X)$ die Menge (von Äquivalenzklassen) von Bochner-messbaren Funktionen $u\colon (0,T) \to X$, für die

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\,.$$

Für $p=\infty$ setzen wir
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\| .$$

Mit $L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;X)$ bezeichnen wir den Raum aller $u\colon (0,T)\to X$, so dass $u\,\mathbb{1}_K \in L^1(0,T;X)$ für beliebige kompakte Mengen $K\subset(0,T)$.

Diese Räume besitzen diverse aus dem Fall $X=\mathbb{R}$ bekannte Eigenschaften.

Satz 17.18. *Es gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Für $1\le p\le\infty$ ist $L^p(0,T;X)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}$ ein Banach-Raum.*

(ii) *Für $1\le p<\infty$ liegen die einfachen Funktionen dicht in $L^p(0,T;X)$.*

(iii) *Für $1\le p<\infty$ gilt*
$$C([0,T],X) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} L^p(0,T;X) .$$

(iv) *Ist X separabel und ist $1\le p<\infty$, so ist auch $L^p(0,T;X)$ separabel.*

(v) *Es gelte $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Sei $u\in L^p(0,T;X)$ und sei $v\in L^q(0,T;X^*)$. Dann ist $t\mapsto\langle v(t),u(t)\rangle\in L^1(0,T)$ und es gilt die* Hölder-Ungleichung
$$\int_0^T |\langle v(t),u(t)\rangle|\mathrm{d}t \le \|v\|_{L^q(0,T;X^*)}\|u\|_{L^p(0,T;X)} .$$

(vi) *Ist $1<p<\infty$ und ist X reflexiv, so ist $L^p(0,T;X)$ reflexiv.*

(vii) *Ist $1\le p<\infty$ und ist entweder X reflexiv oder X^* separabel, dann ist*
$$L^q(0,T;X^*) \cong \big(L^p(0,T;X)\big)^* ,$$
wobei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(viii) *Ist $\mathcal{H}=X$ ein Hilbert-Raum, so ist auch $L^2(0,T;\mathcal{H})$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*
$$(u,v)_{L^2(0,T;\mathcal{H})} := \int_0^T (u(t),v(t))_{\mathcal{H}}\mathrm{d}t .$$

(ix) *Ist Y ein weiterer Banach-Raum mit $X\hookrightarrow Y$, so ist*
$$L^p(0,T;X)\hookrightarrow L^r(0,T;Y) ,$$
falls $p\ge r\ge 1$.

Beweis. Analog zum Standardfall. □

Lemma 17.19. *Ist $\tilde{u}\colon(0,T)\to L^p(\Omega)$, wobei $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ offen ist und $1\le p\le\infty$, Bochner-messbar, so ist*
$$u\colon(0,T)\times\Omega\to\mathbb{R}\,,\ u(x,t) := [\tilde{u}(t)](x) ,$$
$t\in[0,T]$, $x\in\Omega$, so ist u Lebesgue-messbar.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 17.20. Beispiel 17.5 zeigt, dass die Umkehrung zumindest für $p = \infty$ nicht gilt.

Lemma 17.21. *Für* $1 \leq p < \infty$ *gilt*

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) \cong L^p((0, T) \times \Omega) \, .$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 17.22. Für $p = \infty$ gilt nur

$$L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) \subsetneq L^\infty((0, T) \times \Omega) \, .$$

18 Zeitableitungen und der Raum $\mathcal{W}(0,T)$

Im Folgenden sei $(X, \|\cdot\|)$ ein *reflexiver* Banach-Raum.

18.1 Zeitableitung

Wir führen den Begriff der schwachen Ableitung wie in Differentialgleichungen IIA ein.

Definition 18.1. Seien $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;X)$. Dann heißt v *schwache Ableitung* von u und wird mit u' bezeichnet, falls

$$\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = -\int_0^T v(t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt.

Auch das Fundamentallemma der Variationsrechnung gilt in diesem Fall.

Satz 18.2 (Fundamentallemma)**.** *Es sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;X)$ mit*

$$\int_0^T u(t)\phi(t)\mathrm{d}t = 0$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(0,T)$. Dann folgt $u = 0$ fast überall auf $(0,T)$.

Langer, „lustiger“ Beweis für einen Spezialfall. Wir betrachten nur den Fall $u \in L^1(0,T)$. Es seien $t_0 \in (0,T)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig und $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ mit $\psi(t) \in [0,1]$ und

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (\varepsilon, t_0 - \varepsilon) \\ 0 & \text{für } t < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } t > t_0 - \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{cases}$$

Dann ist $0 = \int_0^T u(t)\psi(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} u(t)\psi(t)\mathrm{d}t$, also

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t_0} u(t)\mathrm{d}t \right\| &= \left\| \int_0^{t_0} u(t)\mathrm{d}t - \int_0^{t_0} u(t)\psi(t)\mathrm{d}t \right\| \\ &\le \int_0^{\varepsilon} \|u(t)\|(1-\psi(t))\mathrm{d}t + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \|u(t)\|(1-\psi(t))\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^{\varepsilon} \|u(t)\|\mathrm{d}t + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \|u(t)\|\mathrm{d}t \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0\,. \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\int_0^{t_0} u(t)\mathrm{d}t = 0$$

für alle $t_0 \in (0,T)$, d.h. $u(t) = 0$ als Ableitung einer konstanten Funktion fast überall auf $(0,T)$. $\square$

Kurzer Beweis für den allgemeinen Fall. Für beliebiges $f \in X^*$ folgt wegen

$$\int_0^T \langle f, u(t)\rangle \phi(t)\mathrm{d}t = \left\langle f, \int_0^T u(t)\phi(t)\mathrm{d}t \right\rangle = 0$$

und dem bereits bekannten Fundamentallemma 5.5, dass $\langle f, u(t)\rangle$ und damit auch $u(t)$ fast überall Null ist. $\square$

Aus dem Fundamentallemma erhalten wir wieder das folgende Korollar.

Korollar 18.3. *Gilt*
$$\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = 0$$
für alle $\phi \in C_0^\infty(0,T)$, so gibt es ein $u_0 \in X$ mit $u(t) = u_0$ fast überall auf $(0,T)$.

Nun geben wir einige Charakterisierungen der schwachen Ableitung an.

Satz 18.4. *Es seien $u, v \in L^1(0,T;X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Funktion v ist schwache Ableitung von u.*

(ii) *Für alle $f \in X^*$ ist $t \mapsto \langle f, v(t)\rangle$ schwache Ableitung von $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle$.*

(iii) *Es gibt ein $u_0 \in X$ mit*
$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s$$
für fast alle $t \in (0,T)$.

Beweis. (i)$\Leftrightarrow$(ii): Für ein beliebiges $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt
$$\int_0^T v(t)\phi(t)\mathrm{d}t = -\int u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$
genau dann, wenn
$$\begin{aligned}\int_0^T \langle f, v(t)\rangle \phi(t)\mathrm{d}t &= \left\langle f, \int_0^T v(t)\phi(t)\mathrm{d}t\right\rangle = \left\langle f, -\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t\right\rangle \\ &= -\int_0^T \langle f, u(t)\rangle \phi'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$
für alle $f \in X^*$ erfüllt ist.
(i)$\Rightarrow$(iii): Für beliebiges $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ betrachten wir
$$\begin{aligned}\int_0^T \left(u(t) - \int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right)\phi'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t - \int_0^T\int_0^t v(s)\phi'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^T v(t)\phi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T v(s)\underbrace{\int_s^T \phi'(t)\mathrm{d}t}_{=\phi(T)-\phi(s)=-\phi(s)}\mathrm{d}s = 0\,.\end{aligned}$$
Mit Korollar 18.3 folgt die Existenz eines $u_0 \in X$ mit $u(t) - \int_0^t v(s)\mathrm{d}s = u_0$.
(iii)$\Rightarrow$(i): Ist fast überall $u(t) - \int_0^t v(s)\mathrm{d}s = \text{const}$, so folgt für beliebiges $\phi \in C_0^\infty(0,T)$
$$\int_0^T \left(u(t) - \int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right)\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T u(t)\phi'(t) + \int_0^T u(s)\phi(s)\mathrm{d}s = 0\,.$$
$\square$

Wir definieren nun den Räume $W^{1,1}$ analog zum bekannten Fall.

Definition 18.5. Mit $W^{1,1}(0,T;X)$ bezeichnen wir den Raum aller $u \in L^1(0,T;X)$, welche eine schwache Ableitung u' besitzen, welche in $L^1(0,T;X)$ liegt. Durch

$$\|u\|_{W^{1,1}(0,T;X)} := \|u\|_{L^1(0,T;X)} + \|u'\|_{L^1(0,T;X)}$$

wird eine Norm auf $W^{1,1}(0,T;X)$ definiert.

Auch die erwarteten Eigenschaften von $W^{1,1}$ lassen sich zeigen.

Satz 18.6. *Der Raum* $(W^{1,1}(0,T;X)$ *mit der Norm* $\|\cdot\|_{W^{1,1}(0,T;X)}$ *ist ein Banach-Raum. Jedes* $u \in W^{1,1}(0,T;X)$ *ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion und es gilt*

$$W^{1,1}(0,T;X) \hookrightarrow C([0,T];X)\,.$$

Beweisskizze. Zur Vollständigkeit: Es sei $\{u_n\}$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,1}(0,T;X)$. Dann sind $\{u_n\}$ und $\{u_n'\}$ Cauchy-Folgen in $L^1(0,T;X)$, es gibt also u und v, so dass $u_n \to u$ und $u_n' \to v$ in $L^1(0,T;X)$. Für $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt nu

$$-\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t \leftarrow -\int_0^T u_n(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T u_n'(t)\phi(t)\mathrm{d}t \to \int_0^T v(t)\phi(t)\mathrm{d}t\,,$$

da z.B. nach Hölder

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^T u_n'(t)\phi(t)\mathrm{d}t - \int v(t)\phi(t)\mathrm{d}t\right\| &\le \int_0^T \|u_n'(t) - v(t)\||\phi(t)|\mathrm{d}t \\ &\le \|\phi\|_\infty \|u_n' - v\|_{L^1(0,T;X)} \to 0\,.\end{aligned}$$

Da $u, u' \in L^1(0,T;X)$, gibt es ein $u_0 \in X$, so dass

$$u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s)\mathrm{d}s\,,$$

d.h. u ist absolut stetig.

Falls der Mittelwertsatz für Bochner-Integrale gilt, folgt

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(s)\mathrm{d}s = u(t_0)$$

für ein $t_0 \in (0,T)$. Damit gilt

$$u(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t u'(s)\mathrm{d}s$$

und es folgt

$$\|u(t)\| \le \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|\mathrm{d}s + \int_0^T \|u'(s)\|\mathrm{d}s \le \max\left\{\frac{1}{T}, 1\right\}\|u\|_{W^{1,1}(0,T;X)}$$

für alle $t \in (0,T)$. $\square$

18.2 Der Raum $\mathcal{W}(0,T)$

Definition 18.7. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller reflexiver und separabler Banach-Raum und $(H, |\cdot|, (\cdot\,,\cdot))$ sei ein Hilbert-Raum mit

$$V \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} H\,.$$

Es gilt dann $H^* \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} V^*$. Dann heißt

$$V \subset H \cong H^* \subset V^*$$

Gelfand-Dreier bzw. *Evolutionstripel*.

Bemerkung 18.8. Der Raum H heißt *Pivot-Raum*. Wir schreiben $V \subset H \subset V^*$. In V haben wir die Norm $\|\cdot\|$, in H die Norm $|\cdot|$ und das Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)$, in V^* die Norm $\|\cdot\|_*$ und für V und V^* die duale Paarung $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

$$\begin{array}{ccccc} V & \subset & H & \subset & V^* \\ \|\cdot\| & & |\cdot| & & \|\cdot\|_* \\ & & (\cdot\,,\cdot) & & \\ \langle\cdot & & & & \cdot\rangle \end{array}$$

Es gilt für $g \in H = H^* \subset V^*$ und $u \in V$

$$\langle g, u\rangle = (g, u)\,.$$

Beispiel 18.9. (1) Für $V = H_0^1(\Omega)$ und $V^* = H^{-1}(\Omega)$ haben wir $H = L^2(\Omega)$.

(2) Für $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ und $V^* = W^{-1,q}(\Omega)$ haben wir $H = L^2(\Omega)$.

(3) Wir wählen $V = L^p(\Omega)$, $V^* = L^q(\Omega)$. Dann können wir $H = H^{-1}(\Omega)$, $H^* = H_0^1(\Omega)$ wählen.

Definition 18.10. Es sei $V \subset H \subset V^*$ ein Gelfand-Dreier. Wir definieren $\mathcal{W}(0,T)$ als die Menge aller Funktionen $u \in L^2(0,T;V)$, welche eine schwache Ableitung besitzen, die in $L^2(0,T;V^*)$ liegt. Darauf definieren wir die Norm

$$\|u\|_{\mathcal{W}(0,T)}^2 := \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T;V^*)}^2\,.$$

Weiterhin ist $\mathcal{W}_p(0,T)$ der Raum aller $u \in L^p(0,T;V)$, für die eine schwache Ableitung u' in $L^q(0,T;V^*)$ existiert (wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{W}_p(0,T)} := \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V^*)}\,.$$

Satz 18.11. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Der Raum $\mathcal{W}(0,T)$ ist ein Banach-Raum.*

(ii) *Es gilt*
$$\mathcal{W}(0,T) \hookrightarrow C([0,T],H)\,.$$

(iii) *Der Raum $C^\infty([0,T],V)$ ist dicht in $\mathcal{W}(0,T)$.*

(iv) *Es gilt die Regel der partiellen Integration, d.h. für alle $u, v \in \mathcal{W}(0,T)$ und $0 \le s \le t \le T$ gilt*

$$\int_s^t (\langle u'(\tau), v(\tau)\rangle + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle)\mathrm{d}\tau = (u(t), v(t)) - (u(s), v(s))\,.$$

Beweis. (i): Zunächst ist $\mathcal{W}(0,T)$ wohldefiniert, denn es gilt $L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;V^*) \hookrightarrow L^1(0,T;V^*)$. Insbesondere liegen sowohl $u \in \mathcal{W}(0,T)$ und $v = u'$ in $L^1(0,T;V^*)$. Wir verstehen die schwache Ableitung also als Ableitung von Funktionen $(0,T) \to V^*$.

Zur Vollsändigkeit: Ist $\{u_n\} \subset \mathcal{W}(0,T)$ eine Cauchy-Folge, so ist $\{u_n\}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(0,T;V)$ und $\{u_n'\}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(0,T;V^*)$, d.h. es gibt $u \in L^2(0,T;V)$ und $v \in L^2(0,T;V^*)$ mit $u_n \to u$ in $L^2(0,T;V)$ und $u_n' \to v$ in $L^2(0,T;V^*)$. Für $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt nun

$$\begin{aligned}\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T (u(t) - u_n(t))\phi'(t)\mathrm{d}t - \int_0^T (u_n'(t) - v(t))\phi(t)\mathrm{d}t - \int v(t)\phi(t)\mathrm{d}t \\ &\to -\int_0^T v(t)\phi(t)\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

also $u' = v$.

(iii): Wie üblich mittels Glättung: Sei $u \in \mathcal{W}(0,T)$, $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$. Wir setzen

$$u_\varepsilon := \rho_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}, V)\,.$$

Dann folgt $u_\varepsilon \to u$ in $L^2(\varepsilon_0, T-\varepsilon_0, V)$. Außerdem ist $(u_\varepsilon)' = (u')_\varepsilon$ und $u_\varepsilon' \to u'$ in $L^2(\varepsilon_0, T-\varepsilon_0, V^*)$, was die Konvergenz von u_ε gegen u in $\mathcal{W}(\varepsilon_0, T-\varepsilon_0)$ zeigt. Z.B. durch Zerlegung der Eins können wir das ε_0 loswerden.

(ii): Es sei $u \in C^1([0,T];V)$. Es sei $\phi\colon [0,T] \to [0,1]$ mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(T) = 1$ glatt. Wir zerlegen nun

$$u = \underbrace{\phi u}_{=:u_1} + \underbrace{(1-\phi)u}_{=:u_2}\,.$$

Dann ist $u_1(0) = u_2(T) = 0$. Mit der üblichen Regel der partiellen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}(u_1(t), u(t)) &= (u_1(0), u(0)) + \int_0^t [\langle u_1'(s), u(s)\rangle + \langle u'(s), u_1(s)\rangle]\mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^t \phi(s)\langle u'(s), u(s)\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \phi'(s)|u(s)|^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

und analog

$$(u_2(t), u(t)) = \int_t^T \phi'(s)|u'(s)|^2\mathrm{d}s + 2\int_t^T (1-\phi(s))\langle u'(s), u(s)\rangle \mathrm{d}s\,.$$

Damit erhalten wir

$$|u(t)|^2 = (u(t), u(t)) = \int_0^T \phi'(s)|u(s)|^2\mathrm{d}s + 2\int_0^T \phi(s)\langle u'(s), u(s)\rangle\mathrm{d}s - 2\int_t^T \langle u'(s), u(s)\rangle\mathrm{d}s\,.$$

Mit $|\cdot| \le \alpha\|\cdot\|$ (denn $V \hookrightarrow H$) erhalten wir

$$\begin{aligned}|u(t)|^2 &\le \|\phi'\|_\infty \alpha^2 \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + 4\int_0^T \|u'(s)\|_*\|u(s)\|\mathrm{d}s \\ &\le (\|\phi'\|_\infty\alpha^2 + 2)\|u\|^2_{L^2(0,T;)} + 2\|u'\|^2_{L^2(0,T;V^*)} \le \mathrm{const}\|u\|^2_{\mathcal{W}(0,T)}\,.\end{aligned}$$

Ist nun $u \in \mathcal{W}(0,T)$, so gibt es $\{u_n\} \subset C^\infty(0,T;V)$, so dass $u_n \to u$ in $\mathcal{W}(0,T)$. Wir erhalten

$$\|u_n - u_m\|_{C([0,T];H)} \leq \text{const}\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}(0,T)}\,.$$

Somit ist $\{u_n\}$ eine Cauchy-Folge in $C([0,T];H)$, konvergiert also gegen $\tilde{u}$ in $C([0,T];H)$. Damit erhalten wir $u = \tilde{u}$ fast überall.

(iv): Für $u, v \in C^1([0,T],V)$ gilt diese Regel, für $u, v \in \mathcal{W}(0,T)$ folgt sie mit einem Dichtheitsargument. □

Korollar 18.12. *Für $u \in \mathcal{W}(0,T)$ gilt*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2 = \langle u'(t), u(t)\rangle\,.$$

Hierbei ist die Ableitung im schwachen Sinne und im klassischen Sinne fast überall zu verstehen.

Beweis. Es gilt $u \in L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$, d.h. $t \mapsto |u(t)|^2$ und $t \mapsto \langle u'(t), u(t)\rangle$ sind Funktionen aus $L^1(0,T)$. Wir erhalten für $\phi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle u'(t), \phi(t)u(t)\rangle \mathrm{d}t + \int_0^T \langle (\phi v)'(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle \phi(t)\mathrm{d}t + \int_0^T \phi'(t)|u(t)|^2 \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Da $t \mapsto |u(t)|^2$ und $t \mapsto \langle u'(t), u(t)\rangle$ Lebesgue-integrierbar snd, ist $t \mapsto |u(t)|^2$ absolut stetig und damit fast überall (klassisch) differenzierbar. □

Satz 18.13 (Lions-Aubin)**.** *Es sei $T > 0$, $1 < r, s < \infty$ und V_1, V_0 und V_{-1} Banach-Räume mit $V_1 \overset{c}{\hookrightarrow} V_0 \hookrightarrow V_{-1}$. Dann ist der Raum der Funktionen $u \in L^r(0,T;V_1)$ mit schwacher Ableitung in $L^s(0,T;V_{-1})$ mit der Norm $\|u\|_{L^r(0,T;V_1)} + \|u'\|_{L^s(0,T;V_{-1})}$ kompakt in $L^r(0,T;V_0)$ eingebettet.*

Beweis. (Ruzicka) □

Korollar 18.14. *Ist $V \subset H \subset V^*$ ein Gelfand-Dreier mit $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$, so ist $\mathcal{W}(0,T)$ kompakt in $L^2(0,T;H)$ eingebettet.*

19 Lineare Evolutionsgleichungen erster Ordnung

19.1 Voraussetzungen und Formulierung

Nachdem nun die Grundlagen bekannt sind, beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit der Lösbarkeit von Evolutionsgleichungen. Zunächst sammeln wir dazu einige allgemeine Voraussetzungen.

Es sei ein Gelfand-Dreier $V \subset H \subset V^*$ gegeben und es gelten in diesem Kapitel die folgenden Voraussetzungen:

(a) Es sei $a\colon [0,T] \times V \times V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass für festes $t \in [0,T]$ durch $a(t;\cdot\,,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform gegeben ist und für feste $u, v \in V$ die Abbildung $a(\cdot\,;u,v)\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.

(b) Die Abbildung a ist bezüglich des ersten Argumentes gleichmäßig beschränkt im zweiten und dritten Argument, d.h. es gibt ein $\beta \geq 0$, so dass

$$|a(t;u,v)| \leq \beta \|u\| \|v\|$$

für alle $u, v \in V$ und $t \in [0,T]$.

(c) Die Abbildung a genügt einer *Gårdingschen Ungleichung*, d.h. es gebe $\mu > 0$ und $\kappa \geq 0$, so dass

$$a(t;u,u) \geq \mu \|u\|^2 - \kappa |u|^2$$

für alle $u \in V$ und $t \in [0,T]$. Ist $\kappa = 0$, so ist also $a(t;\cdot\,,\cdot)$ stark positiv für beliebiges $t \in [0,T]$.

Für festes $t \in [0,T]$ und $u \in V$ ist also

$$A(t)u := a(t;u,\cdot) \in V^*$$

mit $\|A(t)u\|_* \leq \beta \|u\|$.
Für festes $t \in [0,T]$ ist dann

$$A(t)\colon V \to V^*\,,\ u \mapsto A(t)u$$

ein linearer beschränkter Operator mit $\|A(t)\|_{L(V,V^*)} \leq \beta$.
Schließlich setzen wir

$$A\colon [0,T] \to L(V,V^*)\,,\ t \mapsto A(t)\,.$$

Die Gårdingsche Ungleichung ist dann äquivalent dazu, dass

$$A(t) + \kappa I \in L(V,V^*)$$

stark positiv ist, wobei wir $I\colon V \to V^*$ über $(Iv)w := (v,w)$ definieren. Es ist nämlich

$$\big\langle (A(t) + \kappa I)u, u \big\rangle = \langle A(t)u, u\rangle + \kappa \langle Iu, u\rangle = a(t;u,u) + \kappa |u|^2\,.$$

Für $u\colon [0,T] \to V$ definieren wir den Nemyzki-Operator $u \mapsto \mathcal{A}u$, $\mathcal{A}u\colon [0,T] \to V^*$, über $(\mathcal{A}u)(t) := A(t)u(t)$.

Lemma 19.1. *Dieser Nemyzki-Operator $u \mapsto \mathcal{A}u$ bildet Bochner-messbare Funktionen auf Bochner-messbare Funktionen ab. Weiterhin ist die so definierte Abbildung*

$$\mathcal{A}\colon L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V^*)$$

linear und beschränkt.

Beweis. Es sei für die Bochner-messbare Funktion $u\colon [0,T] \to V$ eine Folge $\{u_n\}$ einfacher Funktionen gegeben, so dass $u_n \to u$ fast überall gilt. Dann haben wir

$$(\mathcal{A}u_n)(t) = A(t)u_n(t) = A(t)\sum_{k=1}^{N_n} u_n^{(k)} \, \mathbb{1}_{E_n^{(k)}}(t) = \sum_{k=1}^{N_n} A(t)u_n^{(k)} \, \mathbb{1}_{E_n^{(k)}}(t) \, .$$

Für alle $w \in V$ gilt damit

$$\langle (\mathcal{A}u_n)(t), w\rangle = \sum_{k=1}^{N_n} a(t; u_n^{(k)}, w) \, \mathbb{1}_{E_n^{(k)}}(t) \, .$$

Nach der Messbarkeitsvoraussetzung ist damit die Abbildung $t \mapsto \langle (\mathcal{A}u_n)(t), w\rangle$ für jedes $w \in V$ Lebesgue-messbar. Da $A(t) \in L(V, V^*)$, folgt

$$(\mathcal{A}u_n)(t) = A(t)u_n(t) \to A(t)u(t) = (Au)(t)$$

in V^* für fast alle $t \in [0,T]$, insbesondere also $\langle (\mathcal{A}u_n)(t), w\rangle \to \langle (\mathcal{A}u)(t), w\rangle$ für alle $w \in V$. Damit ist $t \mapsto \langle (\mathcal{A}u)(t), w\rangle$ für alle $w \in V$ Lebesgue-messbar, d.h. Au ist schwach Bochner-messbar. Da V^* separabel ist, ist $\mathcal{A}u$ nach dem Satz 17.7 von Pettis Bochner-messbar.

Für $u \in L^2(0,T;V^*)$ ist

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}u\|^2_{L^2(0,T;V^*)} &= \int_0^T \|(\mathcal{A}u)(t)\|_*^2 \mathrm{d}t = \int_0^T \|A(t)u(t)\|_*^2 \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^T \beta^2 \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t = \beta^2 \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} \, .\end{aligned}$$

□

Mit der Gårdingschen Ungleichung ist außerdem

$$\mathcal{A} + \kappa I\colon L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V^*)$$

beschränkt und stark positiv, wobei I punktweise anzuwenden ist.

Wir formulieren nun das zu untersuchende Problem:

$$\begin{gathered}\text{Zu } f \in L^2(0,T;V^*) \text{ und } u_0 \in H \text{ finde } u \in \mathcal{W}(0,T) \text{ mit} \\ u' + \mathcal{A}u = f \\ \text{in } L^2(0,T;V^*) \text{ und } u(0) = u_0 \, .\end{gathered} \tag{P$_L$}$$

Da $\mathcal{W}(0,T) \hookrightarrow C([0,T],H)$, ist der Ausdruck $u(0) = u_0$ wohldefiniert und als Gleichheit in H zu verstehen.

Für $u \in \mathcal{W}(0,T)$ ist insbesondere $u' \in L^2(0,T;V^*) \subset L^1(0,T;V^*)$. Damit ist u absolut stetig als Funktion $u\colon [0,T] \to V^*$. Mit der Reflexivität und dem Satz 17.16 von Komura folgt die Existenz einer klassischen Ableitung $u'(t)$ fast überall, welche mit der schwachen Ableitung übereinstimmt, es soll also

$$u'(t) + (\mathcal{A}u)(t) = f(t)$$

für fast alle $t \in [0,T]$ in V^* gelten.
Da $L^2(0,T;V^*) = \big(L^2(0,T;V)\big)^*$, ist die Gleichung aus (P_L) äquivalent zu

$$\langle u' + \mathcal{A}u, v\rangle_{\left(L^2(0,T;V)\right)^* \times L^2(0,T;V)} = \langle f, v\rangle_{\left(L^2(0,T;V)\right)^* \times L^2(0,T;V)}$$

für alle $v \in L^2(0,T;V)$. Dies schreibt sich als

$$\int_0^T \langle u'(t) + (\mathcal{A}u)(t), v(t)\rangle_{V^* \times V} \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle_{V^* \times V} \mathrm{d}t\,.$$

Da $C_0^\infty(0,T) \otimes V$ dicht in $L^2(0,T;V)$ liegt (Übung), reicht es, mit $v(t) = \phi(t)w$, $\phi \in C_0^\infty(0,T)$, $w \in V$, zu testen. Dafür erhalten wir

$$\int_0^T \langle u'(t) + (\mathcal{A}u)(t), w\rangle \phi(t) \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f(t), w\rangle \phi(t) \mathrm{d}t$$

für alle $w \in V$ und $\phi \in C_0^\infty(0,T)$. Nach dem Fundamentallemma 18.2 erhalten wir $\langle u'(t) + (\mathcal{A}u)(t), w\rangle = \langle f(t), w\rangle$ für alle $w \in V$ und fast alle $t \in [0,T]$. Die Gleichung aus (P_L) ist damit äquivalent zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u(t), w\rangle + \langle (\mathcal{A}u)(t), w\rangle = \langle f(t), w\rangle$$

für alle $w \in V$.

19.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Satz 19.2 (Lions)**.** *Das Problem* (P_L) *ist wohlgestellt: Es ist eindeutig lösbar und es gibt Stabilitätsabschätzungen.*

Bemerkung 19.3 (Tartar/Temam)*.* Es können rechte Seiten aus $L^1(0,T;H) + L^2(0,T;V^*)$ zugelassen werden.

Beweis zu Satz 19.2*.* (1). Wir führen eine Zeitdiskretisierung durch. Zu $N \in \mathbb{N}$ setzen wir $\tau = \frac{T}{N}$. Wir zerlegen damit $[0,T]$ mit den Stellen $t_n = n\tau$, $n = 0, \ldots, N$. Nun wenden wir das implizite Eulerverfahren an. Weiter setzen wir

$$f^n := \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t) \mathrm{d}t \in V^*\,,$$

$n = 1, \ldots, N$. Wir betrachten nun das diskrete Problem, zu $u^{n-1} \in V$ ein $u^n \in V$ zu finden, so dass

$$\frac{Iu^n - Iu^{n-1}}{\tau} + A^n u^n = f^n\,, \quad n = 1, \ldots, N\,,$$

wobei $u^0 := u_0$. Wir klären nun, welche Diskretisierung A^n für A verwendet wird. Ist A zeitabhängig, so sei z.B.

$$A^n := \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} A(t) \mathrm{d}t \in L(V, V^*)\,.$$

Im Folgenden betrachten wir jedoch zeitlich konstantes A, d.h. $A^n = A$ und wir betrachten

$$\frac{Iu^n - Iu^{n-1}}{\tau} + Au^n = f^n \,. \tag{19.1}$$

Weiter nehmen wir $\kappa = 0$ an, d.h. A sei stark positiv.

(2). Für $n = 1, \dots, N$ betrachten wir

$$\left(\frac{1}{\tau}I + A\right) u^n = f^n + \frac{1}{\tau} I u^{n-1} \tag{19.2}$$

in V^* mit $u^0 = u_0$. Es ist $\frac{1}{\tau}I + A \colon V \to V^*$ ein linearer, beschränkter Operator, wobei wir die Beschränktheit aus

$$\langle (\tfrac{1}{\tau}I + A)v, w\rangle = \frac{1}{\tau}(v,w) + \langle Av, w\rangle \le \frac{1}{\tau}|v||w| + \beta\|v\|\|w\| \le \left(\frac{1}{\tau}\text{const} + \beta\right)\|v\|\|w\|$$

für alle $v, w \in V$ erhalten. Außerdem ist $\frac{1}{\tau}I + A$ stark positiv, denn für $v \in V$ haben wir

$$\left\langle \left(\frac{1}{\tau}I + A\right) v, v\right\rangle \ge \frac{1}{\tau}|v|^2 + \mu\|v\|^2 \ge \mu\|v\|^2 \,.$$

Nach dem Lemma ??? von Lax-Milgram gibt es für $n = 1, \dots, N$ also genau eine Lösung $u_n \in V$ von (19.2).

Nummer des Lemmas einzufügen. Lemma ebenfalls einzufügen.

Im Folgenden verzichten wir darauf, $Iu^n \in V^*$ zu schreiben und identifizieren stattdessen u^n bereits mit Iu^n.

(3). Wir wollen nun eine diskrete a-priori-Abschätzung machen. Wir testen (19.1) mit $u^n \in V$:

$$\frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1}, u^n) + \langle Au^n, u^n\rangle = \langle f^n, u^n\rangle \,.$$

Mit der Nebenrechnung

$$(a-b)a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 \,,$$

welche sich analog auf Hilbert-Räume übertragen lässt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\tau}\left(|u^n|^2 - |u^{n-1}| + |u^n - u^{n-1}|^2\right) + \mu\|u^n\|^2 &\le \frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1}, u^n) + \underbrace{\langle Au^n, u^n\rangle}_{\ge \mu\|u^n\|^2} \\
&= \langle f^n, u^n\rangle \le \|f^n\|_*\|u^n\| \\
&\le \frac{\mu}{2}\|u^n\|^2 + \frac{1}{2\mu}\|f^n\|_*^2 \,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies

$$|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2 + \tau\mu\|u^n\|^2 \le \frac{\tau}{\mu}\|f^n\|_*^2 \,.$$

Aufsummieren über n von 1 bis $m \in \mathbb{N}$ liefert

$$|u^m|^2 - |u_0|^2 + \sum_{i=1}^m |u^i - u^{i-1}|^2 + \mu\tau \sum_{i=1}^m \|u^i\|^2 \le \frac{\tau}{\mu}\sum_{i=1}^m \|f^i\|_*^2 \,.$$

Somit ist für $m = 1, \dots, N$

$$|u^m|^2 \le \frac{\tau}{\mu}\sum_{i=1}^N \|f^i\|_*^2 + |u_0|^2$$

und ebenso

$$\sum_{i=1}^{N}|u^i - u^{i-1}|^2 + \mu\tau\sum_{i=1}^{N}\|u^i\|^2 \leq \frac{\tau}{\mu}\sum_{i=1}^{N}\|f^i\|_*^2 + |u_0|^2 .$$

Weiter folgt

$$\left\|\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}\right\|_* = \|f^n - Au^n\|_* \leq \|f^n\|_* + \beta\|u^n\| .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tau\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}\right\|_*^2 &\leq 2\tau\sum_{i=1}^{N}\|f^i\|_*^2 + 2\beta\tau\sum_{i=1}^{N}\|u^i\|^2 \\
&\leq 2\tau\sum_{i=1}^{N}\|f^i\|_*^2 + 2\frac{\beta}{\mu^2}\tau\sum_{i=1}^{N}\|f^i\|_*^2 + \frac{1}{\mu}|u_0|^2 \\
&\leq 2\tau\left(1+\frac{\beta}{\mu^2}\right)\sum_{i=1}^{N}\|f^i\|_*^2 + \frac{1}{\mu}|u_0|^2 .
\end{aligned}$$

(4). Für $t \in (t_{n-1}, t_n]$ setzen wir

$$u_\tau(t) := u^n .$$

Weiter sei $\hat{u}_\tau(t)$ die stückweise lineare Funktion, d.h. für $t \in (t_{n-1}, t]$ setzen wir

$$\hat{u}_\tau(t) := u^{n-1} + (t - t_{n-1})\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} .$$

Wir setzen jeweils $u_\tau(0) = \hat{u}_\tau(0) = u_0$. Analog definieren wir die stückweise konstante Funktion f_τ durch $f_\tau(t) := f^n$.

Dann ist $\hat{u}_\tau$ schwach differenzierbar. mit $\hat{u}_\tau'(t) = \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}$ für $t \in (t_{n-1}, t_n]$. Die Gleichung (19.1) lässt sich nun als

$$\hat{u}_\tau' + \mathcal{A}u_\tau = f_\tau$$

schreiben.

(5). Wir geben nun a-priori-Abschätzungen für die Näherungslösungen an. Zu $N_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, betrachten wir die Diskretisierung in N_l Teilintervalle, d.h. $\tau_l := \frac{T}{N_l}$. Außerdem seien $(u_l^0) \subset V$ mit $u_l^0 \to u_0$ in H. Für $l \in \mathbb{N}$ seien u_{τ_l}, $\hat{u}_{\tau_l}$ und f_{τ_l} wie in (4) definiert (mit $u^0 = u_l^0$). Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f_{\tau_l}\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 &= \int_0^T \|f_{\tau_l}(t)\|_*^2 \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N_l}\int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l}\|f_l^i\|_*^2 \\
&= \tau_l\sum_{i=1}^{N_l}\|f_l^i\|_*^2 = \tau_l\sum_{i=1}^{N_l}\left\|\frac{1}{\tau_l}\int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l} f(s)\mathrm{d}s\right\|_*^2 \\
&\leq \frac{1}{\tau_l}\sum_{i=1}^{N_l}\tau\int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l}\|f(s)\|^2\mathrm{d}s_* = \|f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 .
\end{aligned}$$

Da $u_l^0 \to u_0$ in H gilt, ist $\{|u_l^0|\}$ beschränkt. Wir erhalten dann aus den diskreten a-priori-Abschätzungen

$$\|u_{\tau_l}\|_{L^\infty(0,T;H)} = \max_{i=1,\ldots,N_l}|u_i| \leq \mathrm{const}\left(\tau_l\sum_{i=1}^{N_l}\|f^i\|_*^2 + |u_l^0|^2\right) \leq \mathrm{const} < \infty .$$

Analog erhalten wir $\|\hat{u}_{\tau_l}\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \text{const}$ und

$$\|u_{\tau_l}\|^2_{L^2(0,T;V)} = \sum_{i=1}^{N_l} \int_{t^l_{i-1}}^{t^l_i} \|u_{\tau_l}(t)\|^2 \mathrm{d}t = \tau \sum_i \|u^i_l\|^2 \leq \text{const}\,.$$

(6). Es ist für $t \in (t_{n-1}, t_n]$

$$\hat{u}'_{\tau_l}(t) = \frac{u^n_l - u^{n-1}_l}{\tau_l}\,,$$

also

$$\begin{aligned}\|\hat{u}'_{\tau_l}(t)\|^2_{L^2(0,T;V^*)} &= \int_0^T \|\hat{u}'_{\tau_l}(t)\|^2_* \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N_l} \int_{t^l_{i-1}}^{t^l_i} \left\| \frac{u^i_l - u^{i-1}_l}{\tau_l} \right\|^2_* \mathrm{d}t \\ &= \tau \sum_{i=1}^{N_l} \left\| \frac{u^i_l - u^{i-1}_l}{\tau_l} \right\|^2_* \leq \text{const}\,.\end{aligned}$$

(7). Die Räume $L^2(0,T;V)$ und $L^2(0,T;V^*)$ sind reflexiv und

$$L^\infty(0,T;H) = \left(L^1(0,T;H)\right)^*$$

ist der Dualraum eines separablen Raumes. Somit gibt es konvergente Teilfolgen (o.B.d.A. konvergiere jeweils die ganze Folge) von $(u_\tau) = (u_{\tau_l})$ und $(\hat{u}_\tau) = (\hat{u}_{\tau_l})$ mit Grenzwerten $\hat{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, $u \in L^\infty(0,T;H)$ und $v \in L^2(0,T;V^*)$ mit

$$\begin{aligned}&\hat{u}_\tau \rightharpoonup \hat{u} \text{ in } L^2(0,T;V)\,,\\ &u_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(0,T;H)\,,\\ &\hat{u}_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{u} \text{ in } L^\infty(0,T;H) \text{ und}\\ &\hat{u}'_\tau \rightharpoonup v \text{ in } L^2(0,T;V^*)\,.\end{aligned}$$

Wir zeigen $u = \hat{u}$: Für $t \in (t_{n-1}, t_n]$ gilt

$$\hat{u}_\tau(t) - u_\tau(t) = u^{n-1} + (t - t_{n+1})\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} - u^n\,.$$

Damit haben wir

$$|\hat{u}_\tau(t) - u_\tau(t)| \leq |u^n - u^{n-1}| + \underbrace{\frac{t - t_{n-1}}{\tau}}_{\leq 1}|u^n - u^{n-1}| \leq 2|u^n - u^{n-1}|\,.$$

Nun folgt

$$\|\hat{u}_\tau - u_\tau\|^2_{L^2(0,T;H)} \leq 4\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u^i - u^{i-1}| \mathrm{d}t \leq 4\tau \sum_{i=0}^{N} |u^i - u^{i-1}|^2 \leq 4\tau \text{const} \xrightarrow{\tau \to 0} 0\,.$$

Wir zeigen nun $v = u'$: Es sei $w \in V$, $\phi \in C_0^\infty(0,T)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle v(t), w\rangle \phi(t) \mathrm{d}t + \int_0^T \langle u(t), w\rangle \phi'(t) &= \int_0^T \langle v(t) - \hat{u}'_\tau(t), w\rangle \phi(t) \mathrm{d}t \\ &\quad + \underbrace{\int_0^T \langle \hat{u}'_\tau(t), w\rangle \phi(t) \mathrm{d}t}_{= -\int_0^T \langle \hat{u}_\tau(t), w\rangle \phi'(t) \mathrm{d}t} + \int_0^T \langle u(t), w\rangle \phi'(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \underbrace{\langle v(t) - \hat{u}'_\tau(t), \phi(t) w\rangle}_{\to 0\,,\ \text{da}\ \hat{u}'_\tau \rightharpoonup v\ \text{in}\ L^2(0,T;V^*)} \mathrm{d}t + \int_0^T \underbrace{\langle u(t) - \hat{u}_\tau(t), \phi'(t) w\rangle}_{\to 0\,,\ \text{da}\ \hat{u}_\tau \rightharpoonup u\ \text{in}\ L^2(0,T;V)} \mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

d.h. $t \mapsto \langle v(t), w\rangle$ ist schwache Ableitung von $t \mapsto \langle u(t), w\rangle$, also $u' = v$. Damit ist $u \in \mathcal{W}(0,T)$.

(8). Es ist $f_\tau \to f$ in $L^2(0,T;V^*)$ für $\tau \to 0$ (Übungsaufgabe). Weiter ist der Operator $A\colon L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V^*)$ linear und beschränkt, also auch schwach-schwach stetig. Zusammen ergibt sich

$$\begin{array}{ccccc} \hat{u}_\tau' & + & Au_\tau & = & f_\tau \\ \rightharpoondown & & \rightharpoondown & & \rightharpoondown \\ u' & + & Au & = & f \end{array}$$

in $L^2(0,T;V^*)$.

(9). Nach Konstruktion ist $\hat{u}_{\tau_l}(0) = u_l^0$ in V. Da $\mathcal{W}(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$, gibt es einen stetigen Spuroperator $\Gamma\colon \mathcal{W}(0,T) \to H$, $\Gamma v := v(0)$. Dieser ist offenbar auch linear und somit schwach-schwach stetig. Da $\hat{u}_\tau \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V)$ und $\hat{u}_\tau' \rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;V^*)$, folgt $\hat{u}_\tau \rightharpoonup u$ in $\mathcal{W}(0,T)$. Damit erhalten wir $\Gamma\hat{u}_\tau \rightharpoonup \Gamma u$ in H, d.h. $u_l^0 \rightharpoonup u_0$.

Alternativ können wir statt des Spuroperators auch partielle Integration verwenden. Für beliebige $w \in V$ und $\phi \in C^1([0,T])$ betrachten wir

$$\begin{aligned} (\hat{u}_\tau(T), \phi(T)w) - \underbrace{(\hat{u}_\tau(0), \phi(0)w)}_{\to(u_0,\phi(0)w)} &= \langle \hat{u}_\tau(T), \phi(T)w\rangle - \langle \hat{u}_\tau(0), \phi(0)w\rangle \\ &= \int_0^T \langle \hat{u}_\tau'(s), w\rangle \phi(s)\mathrm{d}s + \int_0^T \langle \hat{u}_\tau(s), w\rangle\phi'(s)\rangle \mathrm{d}s \\ &\to \int_0^T \langle u'(s), w\rangle\phi(s)\mathrm{d}s + \int_0^T \langle u(s), w\rangle \phi'(s)\mathrm{d}s \\ &= \langle u(T), \phi(T)w\rangle - \langle u(0), \phi(0)w\rangle\,. \end{aligned}$$

Da $\hat{u}_{\tau_l}(T) = u^{N_l}$, folgt aus den a-priori-Abschätzungen die Beschränktheit von $\hat{u}_{\tau_l}(T)$ in H. Es gibt also ein $\xi \in H$, so dass bis auf Wahl einer Teilfolge $\hat{u}_{\tau_l}(T) \rightharpoonup \xi$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (\hat{u}_\tau(T), \phi(T)w) - (\hat{u}_\tau(0), \phi(0)w) &\to (\xi, \phi(T)w) - (u_0, \phi(0)w) \\ &= (u(T), \phi(T)w) - (u(0), \phi(0)w)\,. \end{aligned}$$

Wählen wir ϕ so, dass $\phi(T) = 0$ und $\phi(0) = 1$, folgt $(u_0, w) = (u(0), w)$ für alle $w \in V$, also $u(0) = u_0$.

Nun haben wir die Existenz einer Lösung bewiesen.

(10). Wir zeigen Stabilitätsabschätzungen: Für jede Lösung $w \in \mathcal{W}(0,T)$ von (P_L) zu rechter Seite $g \in L^2(0,T;V^*)$ und Anfangswert $w_0 \in H$ gilt

$$|w(t)|^2 + \mu\int_0^T \|w(s)\|^2\mathrm{d}s \le \mathrm{const}\left(|w_0|^2 + \|g\|^2_{L^2(0,T;V^*)}\right)\,.$$

Dazu erhalten wir fast überall

$$\langle w'(t), w(t)\rangle + \langle Aw(t), w(t)\rangle = \langle g(t), w(t)\rangle\,,$$

also

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w(t)|^2 + \mu\|w(t)\|^2 - \kappa|w(t)|^2 \le \|g(t)\|_*\|w(t)\| \le \frac{\mu}{2}\|w(t)\|^2 + \frac{1}{2\mu}\|g(t)\|_*^2\,.$$

Dies ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w(t)|^2 + \mu\|w(t)\|^2 - 2\kappa|w(t)|^2 \le \mathrm{const}\|g(t)\|_*^2\,.$$

Multiplizieren mit $\mathrm{e}^{-2\kappa t}$ liefert

$$\mathrm{e}^{-2\kappa t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w(t)|^2 - 2\kappa\mathrm{e}^{-2\kappa t}|w(t)|^2 + \mu\|w(t)\|^2\mathrm{e}^{-2\kappa t} \le \mathrm{const}\cdot\mathrm{e}^{-2\kappa t}\|g(t)\|_*^2\,.$$

Wir erhalten durch Integrieren von 0 bis t

$$\mathrm{e}^{-2\kappa t}|w(t)|^2 - |w(0)|^2 + \mu\int_0^t \mathrm{e}^{-2\kappa s}\|w(s)\|^2\mathrm{d}s \le \mathrm{const}\int_0^t \mathrm{e}^{-2\kappa s}\|g(s)\|_*^2\mathrm{d}s\,.$$

Damit ergibt sich

$$|w(t)|^2 + \mu\int_0^t \underbrace{\mathrm{e}^{2\kappa(t-s)}}_{\ge 1}\|w(s)\|^2\mathrm{d}s \le \mathrm{const}\int_0^T \underbrace{\mathrm{e}^{2\kappa(t-s)}}_{\le \mathrm{e}^{2\kappa T}}\|g(s)\|_*^2\mathrm{d}s + \underbrace{\mathrm{e}^{2\kappa t}}_{\le \mathrm{e}^{2\kappa T}}|w(0)|^2\,.$$

Letztlich erhalten wir

$$|w(t)|^2 + \mu\int_0^t \|w(s)\|^2\mathrm{d}s \le \mathrm{const}\left(|w(0)|^2 + \int_0^t \|g(s)\|_*^2\mathrm{d}s\right)\,. \tag{19.3}$$

(11). Damit folgt insbesondere auch die Eindeutigkeit der Lösung: Sind $u, \tilde{u} \in \mathcal{W}(0,T)$ zwei Lösungen, so folgt mit $w = u - \tilde{u}$, $g \equiv 0$ und $w(0) = w_0 = 0$, dass $w \equiv 0$.

(12). Nun konvergiert nach dem üblichen Teilfolgenprinzip auch die ganze Folge der $\hat{u}_{\tau_l}$ in $\mathcal{W}(0,T)$ schwach gegen u (und nicht nur eine Teilfolge).

(13). Als a-priori-Abschätzung für w' haben wir (Übungsaufgabe)

$$\|w'\|_{L^2(0,T;V^*)} \le \mathrm{const}\left(|w_0|^2 + \|g\|_{L^2(0,T;V^*)}\right)\,.$$

□

19.3 Regularität und Glättungseigenschaft

Wir betrachten weiterhin die Gleichung

$$u' = f - \mathcal{A}u\,.$$

Leiten wir beide Seiten formal ab, so erhalten wir

$$u'' = f' - \mathcal{A}u' - \mathcal{A}'u$$

und

$$u''' = f'' - \mathcal{A}u'' - 2\mathcal{A}'u' - \mathcal{A}''u\,. \tag{19.4}$$

Allgemein ergibt sich für $j \in \mathbb{N}$

$$u^{(j+1)} = f^{(j)} - \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\mathcal{A}^{(l)}u^{(j-l)}\,.$$

Durch Auswerten an der Stelle Null ergibt sich z.B.

$$u_0' := u'(0) = f(0) - A(0)u_0\,.$$

Allgemein haben wir also

$$u_0^{(j+1)} = f^{(j)}(0) - \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} A^{(l)}(0) u_0^{(j-l)} . \tag{19.5}$$

Um dies durchführen zu können, wollen wir die folgenden „erweiterten Standardvoraussetzungen" verwenden: Neben den Standardvoraussetzungen vom Beginn des Kapitels sei für $k \in \mathbb{N}$ und für feste $u, v \in V$ die Abbildung $t \mapsto a(t; u, v)$ sogar k-mal differenzierbar und habe die Lebesgue-messbaren Ableitungen $t \mapsto a^{(j)}(t; u, v)$, $j = 1, \dots, k$. Entsprechend sei $A^{(j)} \colon [0, T] \times V \to V^*$ definiert. Die Formen $a^{(j)}(t) \colon V \times V \to \mathbb{R}$ seien gleichmäßig in t beschränkt, d.h. es existiere ein $\beta \geq 0$, so dass

$$|a^{(j)}(t; u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\|$$

für alle $u, v \in V$, $t \in [0, T]$ und $j = 0, \dots, k$. Die rechte Seite $f \in L^2(0, T; V^*)$ habe ebenfalls Ableitungen $f^{(j)} \in L^2(0, T; V^*)$ für $j = 0, \dots, k$. Wir stellen weiterhin die Kompatibilitätsbedingungen, dass für $j = 0, \dots, k$ Elemente $u_0^{(j)}$ wie in (19.5) definiert. Dann gelte $u_0^{(j)} \in V$ für $j = 0, \dots, k-1$ und $u^{(k)} \in H$.

Diese Kompatibilitätsbedingungen sind Bedingungen an f, A und deren Ableitungen, aber auch an V und H.

Satz 19.4. *Unter den erweiterten Standardvoraussetzungen sei $u \in \mathcal{W}(0, T)$ die eindeutige Lösung von (P_L). Dann besitzt u schwache Ableitungen $u^{(j)} \in L^2(0, T; V)$ für $j = 0, \dots, k$ und $u^{(k+1)} \in L^2(0, T; V^*)$. Insbesondere ist die Ableitungen der Ordnung j eine Funktion in $\mathcal{W}(0, T)$.*

Beweis. Für $k = 1$ betrachten wir in Anlehnung an (19.4) das Problem

$$v' + \mathcal{A} v = f' - A' u \tag{19.6}$$

mit $v(0) = u_0'$. Nach Voraussetzungen ist $f' \in L^2(0, T; V^*)$ und $A'(t) \colon V \to V^*$ gleichmäßig beschränkt. Da $u \in L^2(0, T; V)$, ist $A' u \in L^2(0, T; V^*)$. Weiter ist $u_0' \in H$, nach dem Satz 19.2 von Lions gibt es also genau eine Lösung $v \in \mathcal{W}(0, T)$ von (19.6).

Wir wollen nun zeigen, dass $v = u'$ gilt. Da $v \in \mathcal{W}(0, T)$, können wir zunächst

$$\begin{aligned} v(t) &= u_0' + \int_0^t (f'(s) - A'(s) u(s) - A(s) v(s)) \mathrm{d}s \\ &= -A(0) u_0 + f(t) - \int_0^t (A'(s) u(s) + A(s) v(s)) \mathrm{d}s \\ &= -A(0) u_0 + A(t) u(t) + u'(t) - \int_0^t (A'(s) u(s) + A(s) v(s)) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

beobachten. Wir setzen

$$w(t) = \int_0^t v(s) \mathrm{d}s - u(t) + u_0 .$$

Dann ist $w' = v - u' \in L^2(0, T; V^*)$, ebenso $w \in L^2(0, T; V)$ und damit $w \in \mathcal{W}(0, T)$. Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} A(t)w(t) &= A(t)u_0 + \int_0^t A(t)v(s)\mathrm{d}s - A(t)u(t) \\ &= A(t)u_0 + \int_0^t (A(t)-A(s))v(s)\mathrm{d}s + \int_0^t A(s)v(s)\mathrm{d}s - A(t)u(t) \\ &= A(t)u_0 + \int_0^t (A(t)-A(s))v(s)\mathrm{d}s - v(t) - A(0)u_0 + u'(t) - \int_0^t A'(s)u(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t A'(s)(u_0 - u(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (A(t)-A(s))v(s)\mathrm{d}s - w'(t)\,. \end{aligned}$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_0^t (A(t)-A(s))v(s)\mathrm{d}s = \int_0^t A'(s)\int_0^s v(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \underbrace{(A(t)-A(s))\int_0^s v(\tau)\mathrm{d}\tau\Big|_{s=0}^t}_{=0}\,.$$

Damit erhalten wir

$$w'(t) + A(t)w(t) = \int_0^t A'(s)\left(u_0 - u(s) + \int_0^s v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s = \int_0^t A'(s)w(s)\mathrm{d}s\,.$$

Weiter ist $w(0) = 0$ und die rechte Seite $t \mapsto \int_0^t A'(s)w(s)\mathrm{d}s$ liegt in $L^2(0,T;V^*)$, denn $w \in L^2(0,T;V)$ und $\mathcal{A}'w \in L^2(0,T;V^*)$. Damit ist die rechte Seite sogar absolut stetig. Somit ist w die eindeutige Lösung von

$$\tilde{w}'(t) + A\tilde{w}(t) = \int_0^t A'(s)w(s)\mathrm{d}s$$

mit $\tilde{w}(0) = 0 = w(0)$. Mit (19.3) erhalten wir

$$|w(t)|^2 + \mu\int_0^t \|w(s)\|^2\mathrm{d}s \le \text{const}\int_0^t \left\|\int_0^s A'(\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|_*^2\mathrm{d}s\,.$$

Da

$$\left\|\int_0^s A'(\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|_*^2 \le s\int_0^s \|A'(\tau)w(\tau)\|_*^2\mathrm{d}\tau \le \beta^2 s\int_0^s \|w(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\,,$$

ergibt sich

$$\underbrace{\mu\int_0^t \|w(s)\|^2\mathrm{d}s}_{a} \le \underbrace{-|w(t)|^2}_{b} + \underbrace{\frac{\text{const}\cdot\beta^2 T}{\mu}}_{\lambda}\int_0^t \underbrace{\left(\mu\int_0^s \|w(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\right)}_{a}\mathrm{d}s\,.$$

Mit dem Lemma von Gronwall erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu\int_0^t \|w(s)\|^2\mathrm{d}s &\le -|w(t)|^2 + \int_0^t \mathrm{e}^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)\mathrm{d}s \\ &= -|w(t)|^2 - \lambda\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\int_0^t |w(s)|^2\mathrm{d}s \le 0\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $t \mapsto \int_0^t \|w(s)\|^2\mathrm{d}s \equiv 0$, also $u' = v$.

Mit der gleichen Argumentation lässt sich die Behauptung induktiv für $k \in \mathbb{N}$ zeigen. Existieren $u^{(j)} \in L^2(0,T;V)$, $u^{(k+1)} \in L^2(0,T;V^*)$. Mit $g_j = f^{(j)} - \sum_{l=1}^{j} \binom{j}{l} A^{(l)} u^{(j-l)}$ erhalten wir

$$u^{(j+1)} + Au^{(j)} = g_j\,.$$

Dann ist $g_j = g'_{j-1} - A'u^{(j-1)}$. Wir betrachten

$$v' + Av = g'_k - Au^{(k)}$$

mit $v(0) = u_0^{(k+1)}$. Wieder gibt es eine eindeutige Lösung $v \in \mathcal{W}(0,T)$ und es gilt $v = u^{(k+1)}$, denn ähnlich wie oben ist $w = w(t) = u_0^{(k)} + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s - u^{(k)}(t)$ die eindeutige Lösung von

$$\tilde{w}'(t) + A\tilde{w}(t) = \int_0^t A'(s)w(s)\mathrm{d}s$$

mit $\tilde{w}(0) = 0$ und wieder folgt mit $w = 0$ die Behauptung. □

Bemerkung 19.5. Für $k = 1$ sind die Voraussetzungen, dass $f' \in L^2(0,T;V^*)$, A' existiert und $u'_0 = f(0) - A(0)u_0 \in H$. Letzteres ist z.B. erfüllt, falls $f(0) \in H$ und $u_0 \in \{v \in V : A(0)v \in H\} =: \mathscr{D}(A(0))$. Dann ist $A(0)\colon H \supset \mathscr{D}(A(0)) \to H$.

Bemerkung 19.6. Der Einfachheit halber sei $A(t) \equiv A$ konstant. Es gelte $\mathcal{A}^j f^{(k-j)} \in L^2(0,T;V^*)$, z.B. falls $f^{(k-j)} \in L^2(0,T;V)$. Dann folgt aus $Au = f - u'$, dass

$$\mathcal{A}^2 u = \mathcal{A}(f - u') = \mathcal{A}f - \mathcal{A}u' = \mathcal{A}f - f' + u''\,.$$

Allgemein ist

$$\mathcal{A}^{k+1} u = (-1)^{k+1}\left(u^{(k+1)} - \sum_{j=0}^{k} (-\mathcal{A})^i f^{(k-j)}\right) \in L^2(0,T;V^*)\,.$$

Das ist eine Aussage über die räumliche Regularität.

Entspricht A also einer zweiten Ableitung $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, so bedeutet dies, dass sogar die $(2k+2)$-te Ableitung (im Raum) von u noch in $V^* = H^{-1}(a,b)$ leben.

Satz 19.7 (Fehlerabschätzung)**.** *Unter den erweiterten Standardvoraussetzungen für $k = 1$. Dann gilt für das implizite Eulerverfahren aus dem Beweis des Satzes 19.2 von Lions die Fehlerabschätzung*

$$|u(t_n) - u^n|^2 + \mu\tau \sum_{j=1}^{n} \|u(t_j) - u^j\|^2 \le \text{const}\left(|u_0^\tau - u_0|^2 + \frac{\tau^2}{\mu}\|(f - u')'\|^2_{L^2(0,T;V^*)}\right).$$

Beweis. Da $(f - u')' = f' - u'' \in L^2(0,T;V^*)$ nach dem Regularitätssatz ist, ist die rechte Seite wohldefiniert. Außerdem ist $f - u' \in L^2(0,T;V^*)$, weshalb $f - u'$ absolut stetig auf $[0,T]$ ist. Wir setzen

$$e^k := u(t_k) - u^k$$

und nehmen wieder $A \equiv \text{const}$ und $\kappa = 0$ an. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{e^n - e^{n-1}}{\tau} + Ae^n &= \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau} + Au(t_n) - f^n \\
&= \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau} + (f - u')(t_n) - f^n \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} u'(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\mathrm{d}t + (f - u')(t_n) \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} (f - u')'(t)(t - t_{n-1})\mathrm{d}t =: \rho^n\,,
\end{aligned}$$

wobei ρ^n der *Konsistenzfehler* ist. Es ist also

$$\frac{e^n - e^{n-1}}{\tau} + Ae^n = \rho^n \in V^*\,.$$

Mit den bereits bewiesenen a-priori-Abschätzungen haben wir

$$|e^n|^2 + \sum_{j=1}^n |e^j - e^{j-1}|^2 + \mu\tau \sum_{j=1}^n \|e^j\|^2 \le \text{const}\left(|e^0|^2 + \frac{\tau}{\mu}\sum_{j=1}^n \|\rho^j\|_*^2\right)\,.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\tau\sum_{j=1}^n \|\rho^j\|_*^2 &= \tau \sum_{j=1}^n \left\| \frac{1}{\tau}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (f-u')'(t)(t-t_{j-1})\mathrm{d}t\right\|_*^2 \\ &\le \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(f-u')'(t)\|_*^2 \mathrm{d}t \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t-t_j)^2 \mathrm{d}t \\ &\le \frac{\tau^2}{3}\|(f-u')'\|_{L^2(0,T;V^*)}^2\,.\end{aligned}$$

□

Satz 19.8 (Glättungseigenschaft)**.** *Es gelten die erweiterten Standardvoraussetzungen ohne die Kompatibilitätsbedingungen. Weiter sei*

$$t \mapsto t^j f^{(j)}(t) \in L^2(0,T;V^*)$$

für alle $j = 1,\dots,k$*. Für die eindeutige Lösung* $u \in \mathcal{W}(0,T)$ *von* (P_L) *gilt dann, dass*

$$\begin{gathered} t \mapsto t^j u^{(j)}(t) \in \mathcal{W}(0,T)\,, \\ t \mapsto t^j u^{(j+1)}(t) \in L^2(0,T;V^*) \text{ und} \\ t \mapsto t^{j-\frac{1}{2}} u^{(j)}(t) \in L^2(0,T;H)\,. \end{gathered}$$

Bemerkung 19.9. „Für $t > 0$ Für $t > 0$ sind die Lösungen dann glatt“: Sei $\delta > 0$. Dann ist

$$\int_\delta^T \|u^{(j)}(t)\|^2 \mathrm{d}t \le \frac{1}{\delta^{2j}}\int_\delta^T t^{2j}\|u^{(j)}(t)\|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\delta^{2j}}\int_\delta^T \|t^j u^{(j)}\|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\delta^{2j}}\|t^j u^{(j)}\|_{L^2(\delta,T;V)} < \infty\,,$$

$j = 1,\dots,k$, also $u^{(j)} \in \mathcal{W}(\delta,T)$.
Sind also f und A beliebig oft differenzierbar (z.B. $u' - \Delta = 0$), so ist $u \in C^\infty(0,T)$.

Beweis. Aus $u' + \mathcal{A}u = f$ erhalten wir $tu' + t\mathcal{A}u = tf$ und durch Ableiten

$$(tu')' + \mathcal{A}(tu') = \underbrace{f - \mathcal{A}u}_{=u'} - t\mathcal{A}'u + tf'\,.$$

Wir betrachten also das Problem

$$\begin{cases} v' + \mathcal{A}v = u' - t\mathcal{A}'u + tf' \\ v(0) = 0\,. \end{cases} \tag{19.7}$$

Die rechte Seite ist dabei tatsächlich in $L^2(0,T;V^*)$. Somit existiert genau eine Lösung v von (19.7). Wir zeigen $v = tu'$: Es ist $u'(s) + sf'(s) = f(s) - A(s)u(s) + sf'(s) = (sf(s))' - A(s)u(s)$, also

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \Big(u''(s) - s\big(A'(s)u(s) - f'(s)\big) - A(s)v(s)\Big)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \Big(-sA'(s)u(s) + (sf(s))' - A(s)\big(u(s)+v(s)\big)\Big)\mathrm{d}s \\ &= tf(t) - \int_0^t \Big(sA'(s)u(s) + A(s)\big(u(s)+v(s)\big)\Big)\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$w(t) = \int_0^t (v(s)+u(s))\mathrm{d}s - tu(t)\,.$$

Dann erhalten wir $w(0) = 0$, $w \in L^2(0,T;V)$ und $w'(t) = v(t) - tu'(t)$, also auch $w' \in L^2(0,T;V^*)$, d.h. $w \in \mathcal{W}(0,T)$. Es ist weiter

$$\begin{aligned} (Aw)(t) &= \int_0^t A(t)(v(s)+u(s))\mathrm{d}s - t\,\underbrace{A(t)u(t)}_{=f(t)-u'(t)} \\ &= \int_0^t (A(t)-A(s))(v(s)+u(s))\mathrm{d}s + \int_0^t A(s)(v(s)+u(s))\mathrm{d}s - tf(t) + tu'(t) \\ &= \int_0^t A'(s)\int_0^s (v(\tau)+u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t sA'(s)u(s)\mathrm{d}s - v(t) + tu'(t) \\ &= \int_0^t A'(s)w(s)\mathrm{d}s - w'(t)\,. \end{aligned}$$

Nun ist w die eindeutige Lösung des Problems

$$\begin{cases} \tilde{w}'(t) + A\tilde{w}(t) = \int_0^t A'(s)w(s)\mathrm{d}s \\ w(0) = 0\,. \end{cases}$$

Wie üblich folgt nun $w \equiv 0$, d.h. $w' \equiv u$ und damit $v(t) = tu'(t)$.

Der Induktionsschritt $k \mapsto k+1$ ist Übungsaufgabe und erfolgt analog zum bereits vorgestellten aus dem vorigen Beweis.

Dies zeigt $t \mapsto t^j u^{(j)}(t) \in \mathcal{W}(0,T)$.

Um $t \mapsto t^j u^{(j+1)}(t) \in L^2(0,T;V^*)$ zu zeigen, wählen wir zunächst $k=1$. Dafür haben wir $tu''(t) = (tu'(t))' - u'(t)$, also folgt die Behauptung aus der gerade bewiesenen Aussage. Im Induktionsschritt $k \mapsto k+1$ haben wir

$$\underbrace{\Big(t^{k+1}u^{(k+1)}(t)\Big)'}_{\in L^2} = (k+1)\underbrace{t^k u^{(k+1)}(t)}_{\in L^2} + t^{k+1}u^{(k+2)}(t)\,.$$

Um $t \mapsto t^{j-\frac{1}{2}}u^{(j)}(t) \in L^2(0,T;H)$ zu zeigen, beobachten wir

$$\begin{aligned} \left|t^{j-\frac{1}{2}}u^{(j)}(t)\right|^2 &= (t^j u^{(j)}(t), t^{j-1}u^{(j)}(t)) \le \langle t^j u^{(j)}(t), t^{j-1}u^{(j)}(t)\rangle \\ &\le \|t^{j-1}u^{(j)}(t)\|_*\|t^j u^{(j-1)}(t)\| \le \frac{1}{2}\left(\|t^{j-1}u^{(j)}(t)\|_*^2 + \|t^j u^{(j)}(t)\|^2\right)\,. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\int_0^T |t^{j-\frac{1}{2}} u^{(j)}(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2} \left(\|t^{j-1} u^{(j)}\|^2_{L^2(0,T;V^*)} + \|t^j u^{(j)}\|^2_{L^2(0,T;V)} \right) < \infty\,.$$

□

20 Nichtlineare Evolutionsgleichungen erster Ordnung

20.1 Existenz von Lösungen

Beispiel 20.1. Wir betrachten

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \nabla \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = f \quad \text{auf } \Omega \times [0,T] \\ u(\cdot, t) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ für alle } t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \,. \end{cases}$$

Dazu haben wir einen Gelfand-Dreier $V \subset H \cong H^* \subset V^*$ mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $V^* = W^{-1,p'}(\Omega)$ und $H = L^2(\Omega)$, wobei $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. Die variationelle Formulierung des Problems lautet nun, zu $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ ein $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ mit $u' + Au = f$ und $u(0) = u_0$, $u_0 \in H$, zu finden, wobei

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \,.$$

Satz 20.2. *Auf $\mathcal{W}^p(0,T)$ ist durch*

$$\|u\|_{\mathcal{W}^p(0,T)} := \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^{p'}(0,T;V^*)}$$

eine Norm definiert, mit der $\mathcal{W}^p(0,T)$ ein Banach-Raum ist. Dann gilt $\mathcal{W}^p(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$. Weiter gilt die Regel der partiellen Integration:

$$\int_0^T \left(\langle u'(t), v(t) \rangle + \langle v'(t), u(t) \rangle \right) \mathrm{d}t = (u(T), v(T)) - (u(0), v(0))$$

für $u, v \in \mathcal{W}^p(0,T)$. Schließlich gilt auch, dass $C^\infty([0,T];V)$ dicht in $\mathcal{W}^p(0,T)$ liegt.

Beweis. Analog zu $\mathcal{W}(0,T)$. □

Wir wollen nun die folgenden Standardvoraussetzungen annehmen: Es sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und es sei ein Gelfand-Dreier $V \subset H \subset V^*$ gegeben. Weiter seien $A_0, B \colon V \to V^*$ zwei Operatoren. Wir setzen $(\mathcal{A}_0 u)(t) = A_0 u(t)$ und $(\mathcal{B}u)(t) = Bu(t)$ für $u \colon [0,T] \to V$ und $A = A_0 + B$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$. Es sei $\mathcal{A}_0 \colon L^p(0,T;V) \to L^{p'}(0,T;V^*)$ hemistetig und monoton, $\mathcal{B} \colon L^p(0,T;V) \to L^{p'}(0,T;V^*)$ sei verstärkt stetig und $\mathcal{A} \colon L^p(0,T;V) \to L^{p'}(0,T;V^*)$ sei beschränkt, d.h. es gebe ein $\beta \geq 0$ mit

$$\|\mathcal{A}v\|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq \beta \left(1 + \|v\|_{L^p(0,T;V)}^{p-1} \right) ,$$

und koerzitiv, d.h. es gebe ein $\mu > 0$ und ein $\lambda \geq 0$, so dass

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle_{L^{p'}(0,T;V^*) \times L^p(0,T;V)} \geq \mu \|v\|_{L^p(0,T;V)}^p - \lambda$$

für alle $v \in L^p(0,T;V)$.

Lemma 20.3. *Ist $A_0 \colon V \to V^*$ monoton, hemistetig und koerzitiv mit $\tilde{\mu} > 0$ und $\tilde{\lambda} \geq 0$, so dass*

$$\langle A_0 v, v \rangle \geq \tilde{\mu} \|v\|^p - \tilde{\lambda}$$

für $v \in V$, und $\tilde{\beta} \geq 0$, so dass

$$\|A_0 v\|_{V^*} \leq \tilde{\beta} \left(1 + \|v\|^{p-1} \right)$$

für $v \in V$, so ist $\mathcal{A}_0\colon L^p(0,T;V) \to L^{p'}(0,T;V^*)$ hemistetig, monoton, koerzitiv mit $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$, so dass

$$\langle \mathcal{A}_0 v, v\rangle_{L^{p'}(0,T;V^*)\times L^p(0,T;V)} \geq \mu \|v\|^p_{L^p(0,T;V)} - \lambda$$

und beschränkt mit $\beta \geq 0$, so dass

$$\|\mathcal{A}_0 v\|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq \beta \left(1 + \|v\|^{p-1}_{L^p(0,T;V)}\right) .$$

Bemerkung 20.4. Ist $B = 0$, so folgen bereits die Standardvoraussetzungen.

Eine analoge Aussage, um Eigenschaften des Operators $B\colon V \to V^*$ auf den Operator $\mathcal{B}\colon L^p(0,T;V) \to L^{p'}(0,T;V^*)$ zu übertragen, ist schwieriger und erfordert z.B. Kompaktheitsargumente.

Es können auch zeitabhängige Operatoren $A(t)$, $B(t)$ betrachtet werden. Dann sind die Konstanten λ, μ, β gleichmäßig in der Zeit zu wählen.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Operator $\mathcal{A}_0$ Bochner-messbare Funktionen auf Bochner-messbare Funktionen abbildet. Sei u Bochner-messbar, $\{u_n\}$ eine Folge einfacher Funktionen, so dass $u_n(t) \to u(t)$ fast überall gilt. Dann ist für disjunkte E_i^n

$$(\mathcal{A}_0 u_n)(t) = A_0 \sum_i u_i^n \,\mathbb{1}_{E_i^n}(t) = \sum_i A_0 u_i^n \,\mathbb{1}_{E_i^n}(t) + A_0(0)\,\mathbb{1}_{(\bigcup E_i^n)^c}(t) .$$

Da A_0 hemistetig und monoton, also insbesondere demistetig ist, folgt für beliebige $w \in V$

$$\sum_i \langle A_0 u_i^n, w\rangle \,\mathbb{1}_{E_i^n}(t) + \langle A_0(0), w\rangle \,\mathbb{1}_{(\bigcup E_i^n)^c}(t) = \langle \mathcal{A}_0 u_n(t), w\rangle \to \langle \mathcal{A}_0 u(t), w(t)\rangle$$

für fast alle $t \in [0,T]$. Mit der Messbarkeit der linken Seite folgt die der rechten Seite, also ist A_0 schwach Bochner-messbar und damit Bochner-messbar, da V separabel ist.

Für $q > 1$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $|1+x|^q \leq 2^{q-1}(1+|x|^q))$, was aus der Konvexität von $\xi \mapsto |\xi|^q$ folgt.

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\mathcal{A}_0 v(t)\|_*^{p'} \mathrm{d}t &\leq \int_0^T \left|\tilde\beta\left(1 + \|v(t)\|^{p-1}\right)\right|^{p'} \mathrm{d}t \leq \tilde\beta^{p'} \mathrm{const} \int_0^T \left(1 + \|v(t)\|^{(p-1)p'}\right) \mathrm{d}t \\ &= \tilde\beta^{p'} \mathrm{const} \int_0^T (1 + \|v(t)\|^p) \mathrm{d}t = \tilde\beta^{p'} \mathrm{const} \left(T + \|v\|^p_{L^p(0,T;V)}\right) .\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_0 v\|_{L^{p'}(0,T;V^*)} &\leq \tilde\beta \mathrm{const} \left(T + \|v\|^p_{L^p(0,T;V)}\right)^{\frac{1}{p'}} = \tilde\beta \mathrm{const} T^{\frac{1}{p'}} \left(1 + \frac{1}{T}\|v\|^p_{L^p(0,T;V)}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq ??? \leq \beta \left(1 + \|v\|^p_{L^p(0,T;V)}\right) .\end{aligned}$$

Hemistetigkeit, Monotonie und Koerzitivität zu zeigen ist Übungsaufgabe. □

Satz 20.5. *Unter den Standardvoraussetzungen hat das Problem*

$$\begin{cases} \text{Zu } f \in L^{p'}(0,T;V^*)\,,\ u_0 \in H \text{ finde } u \in \mathcal{W}^p(0,T) \text{ mit} \\ u(0) = u_0 \text{ und } u' + \mathcal{A}u = f \text{ in } L^{p'}(0,T;V^*) \end{cases}$$

mindestens eine Lösung.

Beweis. (1). Wir führen eine Zeitdiskretisierung durch. Wie im linearen Fall setzen wir $\tau = \frac{T}{N}$, $t_n = n\tau$, $n = 0, \dots, N$. Wir betrachten wieder das diskrete Problem

$$\begin{cases} \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} + Au^n = f^n \\ u^0 = u_0 \end{cases},$$

wobei $f^n = \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\mathrm{d}t \in V^*$, $n = 1, \dots, N$. Es ist

$$\left(A + \frac{1}{\tau}I\right)u^n = \left(A_0 + \frac{1}{\tau}I\right)u^n + Bu^n = f^n + \frac{1}{\tau}Iu^{n-1} \tag{20.1}$$

zu lösen. Nun ist B verstärkt stetig und $A_0 + \frac{1}{\tau}I$ monoton und hemistetig. Weiter ist $A + \frac{1}{\tau}I$ beschränkt und koerzitiv. Der Satz 14.2 von Brezis liefert mindestens eine Lösung $u^n \in V$, $n = 1, \dots, N$ von (20.1).
(2). Wir machen a-priori-Abschätzungen. Testen von (20.1) mit u^n liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}\left(|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2\right) + \mu\|u^n\|^p - \lambda &\le \frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1}, u^n) + \langle Au^n, u^n\rangle \\ &= \langle f^n, u^n\rangle \\ &\le \|f^n\|_*\|u^n\| \le \mathrm{const}\|f^n\|_*^{p'} + \frac{\mu}{2}\|u^n\|^p, \end{aligned}$$

also

$$|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2 + \tau\mu\|u^n\|^p \le 2\lambda\tau + \mathrm{const}\tau\|f^n\|_*^{p'}.$$

Aufsummieren ergibt

$$|u^n|^2 - |u^0|^2 + \sum_{i=1}^{N}|u^i - u^{i-1}|^2 + \mu\tau\sum_{i=1}^{n}\|u^i\|^p \le \mathrm{const}\tau\sum_{i=1}^{n}\|f^i\|_*^{p'} + 2\tau\lambda n.$$

Damit erhalten wir

$$|u^n|^2 + \sum_{i=1}^{n}|u^i - u^{i-1}|^2 + \mu\tau\sum_{i=1}^{n}\|u^i\|^p \le |u_0|^2 + \mathrm{const}\tau\sum_{i=1}^{N}\|f^i\|_*^{p'} + 2\lambda T. \tag{20.2}$$

(3). Fü $N_l \to \infty$ setzen wir $\tau_l = \frac{T}{N_l}$ und wählen $(u_l^0) \subset V$ mit $u_l^0 \to u_0$ in H. Wieder seien u_l, f_l die stückweise konstanten und $\hat{u}_l$ die stückweise lineare Prolongation. Die Folge $(|u_l^0|)$ ist beschränkt und

$$\begin{aligned} \tau_l\sum_{i=1}^{N_l}\|f_l^i\|_*^{p'} &= \tau_l\sum_{i=1}^{N_l}\left\|\frac{1}{\tau_l}\int_{t_{i-1}} t_i f(s)\mathrm{d}s\right\|_*^{p'} \\ &\le \tau_l^{1-p'}\sum_{i=1}^{N_l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f(s)\|^{p'}\mathrm{d}s\left(\tau_l^{frac1p}\right)^{p'} \\ &= \tau_l^{1-p'+\frac{p'}{p}}\|f\|_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'} = \|f\|_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'}. \end{aligned}$$

Damit ist die rechte Seite der a-priori-Abschätzung (20.2) unabhängig von l beschränkt und wir erhalten

$$\|\hat{u}_l\|_{L^\infty(0,T;H)}, \|u_l\|_{L^\infty(0,T;H)} \le \mathrm{const}$$

und

$$\|u_l\|^p_{L^p(0,T;V)} \le \sum_{i=1}^{N_l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|u_l\|^p \mathrm{d}t = \tau \sum_{i=1}^{N_l} \|u_l^i\|^p \le \text{const}\,.$$

Wieder ist $\hat{u}_l$ schwach differenzierbar und $\hat{u}_l'(t) = \frac{u_l^i - u_l^{i-1}}{\tau_l}$ für $t \in (t_{i-1}, t_i]$. Schließlich ist

$$\|\mathcal{A}u_l\|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \le \beta\left(1 + \|u_l\|^{p-1}_{L^p(0,T;V)}\right) \le \text{const}\,.$$

Somit gibt es $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$, $\hat{u} \in L^\infty(0,T;H)$ und $a \in L^{p'}(0,T;V^*)$, so dass bei Übergang zu Teilfolgen $l \mapsto l'$

$$\begin{aligned} u_{l'} &\overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(0,T;H)\,,\\ \hat{u}_{l'} &\overset{*}{\rightharpoonup} \hat{u} \text{ in } L^\infty(0,T;H)\,,\\ u_{l'} &\rightharpoonup u \text{ in } L^p(0,T;V) \text{ und}\\ \mathcal{A}u_{l'} &\rightharpoonup a \text{ in } L^{p'}(0,T;V^*)\,. \end{aligned}$$

(4). Wir zeigen $u = \hat{u}$. Dazu ist für $t \in (t_{i-1}, t_i]$

$$u_{l'}(t) - \hat{u}_{l'}(t) = u_{l'}^i - \left(u_{l'}^{i-1} + (t - t_{i-1})\frac{u_{l'}^i - u_{l'}^{i-1}}{\tau_l}\right) = (u_{l'}^i - u_{l'}^{i-1})\left(1 - \frac{t - t_{i-1}}{\tau_{l'}}\right)\,,$$

also

$$\begin{aligned} \|u_{l'} - \hat{u}_{l'}\|^2_{L^2(0,T;H)} &= \sum_{i=1}^{N_{l'}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|u_{l'}(t) - \hat{u}_{l'}(t)\right|^2 \mathrm{d}t\\ &= \sum_{i=1}^{N_{l'}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Bigg|\underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{t - t_{i-1}}{\tau_{l'}}}^{0\le\ \le 1}\right)}_{0\le\ \le 1}(u^i - u^{i-1})\Bigg|^2 \mathrm{d}t\\ &\le \tau_{l'} \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{l'}} |u_{l'}^i - u_{l'}^{i-1}|^2}_{\le \text{const}} \to 0\,. \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $v \in L^1(0,T;H)$, dass $\langle u_{l'} - u, v\rangle \to 0$ und $\langle \hat{u}_{l'} - \hat{u}, v\rangle \to 0$. Insbesondere gilt dies für alle $v \in L^2(0,T;H)$. Damit erhalten wir

$$u - \hat{u} = \underbrace{u - u_{l'}}_{\rightharpoonup 0} + \underbrace{u_{l'} - \hat{u}_{l'}}_{\to 0} + \underbrace{\hat{u}_{l'} - \hat{u}}_{\rightharpoonup 0} \rightharpoonup 0$$

in $L^2(0,T;H)$, also $u = \hat{u}$.

(5). Wir zeigen $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$. Seien dazu $v \in V$, $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ beliebig. Dann ist

$$\int_0^T \left(-\langle \hat{u}_{l'}(t), v\rangle \phi'(t) + \langle (\mathcal{A}u_{l'})(t), v\rangle \phi(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f_{l'}(t), v\rangle \phi(t)\mathrm{d}t\,.$$

Da $Au_{l'} \rightharpoonup a$ in $L^{p'}(0,T;V^*)$, $\hat{u}_{l'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(0,T;H)$ und $f_{l'} \to f$ in $L^{p'}(0,T;V^*)$ (Übung) und außerdem $t \mapsto v\phi(t) \in L^p(0,T;V)$ und $t \mapsto v\phi'(t) \in L^1(0,T;H)$, folgt im Grenzwert

$$-\int_0^T \langle u(t), v\rangle \phi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f - a, v\rangle \phi(t)\mathrm{d}t\,.$$

Damit ist u schwach differenzierbar mit $u' = f - a \in L^{p'}(0,T;V^*)$.
(6). Wir betrachten den Anfangswert. Aus der a-priori-Abschätzung (20.2) folgt, dass die Folge $\{|u_{l'}^{N_{l'}}|\}$ beschränkt ist. Es existiert also ein $\xi \in H$, so dass bis auf Übergant zu Teilfolgen $u_{l'}^{N_{l'}} \rightharpoonup \xi$ in H. Für beliebige $v \in V$ und $\phi \in C^1([0,T])$ folgt

$$\begin{aligned}(u(t),v)\phi(t) - (u(0),v)\phi(0) &= \int_0^T (\langle u'(t),v\rangle\phi(t) + \langle u(t),v\rangle\phi'(t))\mathrm{d}t \\ &= \lim_{l'\to\infty}\int_0^T (\langle \hat{u}_{l'}'(t),v\rangle\phi(t) + \langle \hat{u}_{l'}(t),v\rangle\phi'(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{l'\to\infty}\Big((\hat{u}_{l'}(T),v)\phi(T) - (\hat{u}_{l'}(0),v)\phi(0)\Big) \\ &= (\xi,v)\phi(T) - (u_0,v)\phi(0)\,.\end{aligned}$$

Mit $\phi(T)=0$, $\phi(0)=1$ folgt $u(0)=u_0$ (analog $\xi = u(T)$).
(7). Es bleibt $a = \mathcal{A}u$ zu zeigen. Da $\mathcal{B}\colon L^p(0,T;V) \to L^{p'}(0,T;V^*)$ verstärkt stetig ist, folgt $\mathcal{B}u_{l'} \to \mathcal{B}u$ in $L^{p'}(0,T;V^*)$. Wir zeigen $a - \mathcal{B}u = \mathcal{A}_0 u$. Es sei $w \in L^p(0,T;V)$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle A_0 u_{l'}(t), u_{l'}(t)\rangle\mathrm{d}t &= \int_0^T \Big\langle A_0 u_{l'}(t) - A_0 w(t), u_{l'}(t) - w(t)\Big\rangle\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_0^T \langle A_0 w(t), u_{l'}(t) - w(t)\rangle\mathrm{d}t + \int_0^T \langle A_0 u_{l'}(t), w(t)\rangle\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^T \langle A_0 w(t), u_{l'}(t) - w(t)\rangle\mathrm{d}t + \int_0^T \langle A_0 u_{l'}(t), w(t)\rangle\mathrm{d}t \\ &\to \int_0^T \langle A_0 w(t), u(t) - w(t)\rangle\mathrm{d}t + \int_0^T \langle a(t) - Bu(t), w(t)\rangle\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\int_0^T \langle A_0 u_{l'}(t), u_{l'}(t)\rangle\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^T \langle f_{l'}(t), u_{l'}(t)\rangle\mathrm{d}t}_{\to\int_0^T\langle f(t),u(t)\rangle\mathrm{d}t} - \int_0^T \langle \hat{u}_{l'}'(t), u_{l'}(t)\rangle\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^T \langle Bu_{l'}(t), u_{l'}(t)\rangle\mathrm{d}t}_{\to\int_0^T\langle Bu(t),u(t)\rangle\mathrm{d}t}$$

Zur Untersuchung des mittleren Terms beobachten wir

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \hat{u}_{l'}'(t), u_{l'}(t)\rangle\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{N_{l'}} \frac{1}{\tau_{l'}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle u_{l'}^i - u_{l'}^{i-1}, u_{l'}^i\rangle\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{N_{l'}} (u_{l'}^i - u_{l'}^{i-1}, u^i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_{l'}}\Big(|u_{l'}^i|^2 - |u_{l'}^{i-1}|^2 + |u_{l'}^i - u_{l'}^{i-1}|^2\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}|u_{l'}^{N_{l'}}|^2 - \frac{1}{2}|u_{l'}^0|^2\,.\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich – da die Norm schwach unterhalbfolgenstetig ist –

$$\begin{aligned}\limsup_{l\to\infty}\int_0^T \langle A_0 u_{l'}(t), u_{l'}(t)\rangle &\leq \limsup_{l\to\infty}\int_0^T \langle f_{l'}(t) - Bu_{l'}(t), u_{l'}(t)\rangle\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_{l'}^0|^2 - \frac{1}{2}|u_{l'}^{N_{l'}}|^2 \\ &\leq \int_0^T \langle f(t) - Bu(t), u(t)\rangle\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle f(t) - Bu(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 \\ \geq \int_0^T \langle A_0 w(t), u(t) - w(t)\rangle \mathrm{d}t + \int_0^T \langle a(t) - Bu(t), w(t)\rangle \mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Wegen $u' = f - a$, d.h. $f - Bu = u' + a - Bu$, und $\frac{1}{2}|u(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 = \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle a(t) - Bu(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t &= \int_0^T \langle f(t) - Bu(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t - \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^T \langle A_0 w(t), u(t) - w(t)\rangle \mathrm{d}t + \int_0^T \langle a(t) - Bu(t), w(t)\rangle \mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Es ergibt sich (für alle $w \in L^p(0,T;V)$)

$$\int_0^T \langle a(t) - Bu(t), u(t) - w(t)\rangle \mathrm{d}t \geq \int_0^T \langle A_0 w(t), u(t) - w(t)\rangle \mathrm{d}t\,.$$

Es ist also

$$\langle a - \mathcal{B}u, u - w\rangle_{L^{p'}(0,T;V^*)\times L^p(0,T;V)} \geq \langle \mathcal{A}_0 w, u - w\rangle_{L^{p'}(0,T;V^*)\times L^p(0,T;V)}\,.$$

Wir wenden den Trick von Minty an, d.h. für $\theta \in (0,1)$ und $v \in L^p(0,T;V)$ setzen wir $w := u - \theta v$. Wir erhalten damit

$$\cancel{\theta}\langle a - \mathcal{B}u, v\rangle \geq \cancel{\theta}\langle \mathcal{A}_0(u - \theta v), v\rangle\,.$$

Für $\theta \to 0$ folgt mit der Radialstetigkeit von A_0

$$\langle a - \mathcal{B}u, v\rangle \geq \langle \mathcal{A}_0 u, v\rangle\,.$$

Mit $w = u + \theta v$ erhalten wir analog

$$\langle a - \mathcal{B}u, v\rangle \leq \langle \mathcal{A}_0 u, v\rangle\,,$$

also $a - Bu = A_0$. □

Bemerkung 20.6. Im allgemeinen ist die Lösung nicht eindeutig bestimmt.

Satz 20.7. *Ist $B = 0$, so ist die Lösung eindeutig.*

Damit konvergiert die gesamte Folge der Näherungslösungen; wir müssen nicht auf eine Teilfolge l' übergehen.

Beweis. Es seien $u, v \in \mathcal{W}^p(0,T)$ zwei Lösungen, d.h. $u' + \mathcal{A}_0 u = f$, $u(0) = u_0$ und $v' + A_0 u = f$, $v(0) = u_0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t) - v(t)|^2 &= \langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)\rangle \\ &\leq \langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)\rangle + \langle A_0 u(t) - A_0 v(t), u(t) - v(t)\rangle \\ &= \langle f(t) - f(t), u(t) - v(t)\rangle = 0\,.\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$|u(t) - v(t)|^2 = |u(0) - v(0)|^2 + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|u(\tau) - v(\tau)|^2 \mathrm{d}t = 0\,.$$

□

20.2 Abhängigkeit von den Daten

In diesem Unterabschnitt beschränken wir uns auf den Fall $B = 0$.

Es seien $f, \tilde{f} \in L^{p'}(0,T;V^*)$ und $u_0, \tilde{u}_0 \in H$ gegeben. Die Funktionen $u, \tilde{u} \in \mathcal{W}^p(0,T)$ seien die eindeutig bestimmten Lösungen von

$$\begin{cases} u' + \mathcal{A}u = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} \tilde{u}' + \mathcal{A}\tilde{u} = \tilde{f} \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 \,. \end{cases}$$

Wir betrachten die Differenz der Gleichungen

$$(u - \tilde{u})' + \mathcal{A}u - \mathcal{A}\tilde{u} = f - \tilde{f}$$

und testen mit $u - \tilde{u}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}t|u(t) - \tilde{u}(t)|^2 &= \langle u'(t) - \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \\ &\leq |u'(t) + Au(t) - \tilde{u}(t) - A\tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \\ &= \langle f(t) - \tilde{f}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \leq \|f(t) - \tilde{f}(t)\|_*\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \\ &\leq \|f(t) - \tilde{f}(t)\|_*(\|u(t)\| + \|\tilde{u}(t)\|)\,. \end{aligned}$$

Integrieren ergibt

$$\begin{aligned} |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 &\leq |u_0 - \tilde{u}_0|^2 + 2\int_0^t \|f(s) - \tilde{f}(s)\|_*(\|u(s)\| + \|\tilde{u}(s)\|)\mathrm{d}s \\ &\leq |u_0 - \tilde{u}_0|^2 + 2\|f - \tilde{f}\|_{L^{p'}(0,T;V^*)}\left(\int_0^T (\|u(s)\| + \|\tilde{u}(s)\|)^p\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |u_0 - \tilde{u}_0|^2 + 2\|f - \tilde{f}\|_{L^{p'}(0,T;V^*)}(\|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|\tilde{u}\|_{L^p(0,T;V)})\,. \end{aligned}$$

Wir haben nun die a-priori-Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2 + \mu\|u(t)\|^p - \lambda &\leq \langle u'(t), u(t)\rangle + \langle Au(t), u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle \\ &\leq \|f(t)\|_*\|u(t)\| \leq \frac{\mu}{2}\|u(t)\|^p + \mathrm{const}\|f(t)\|_*^{p'}\,. \end{aligned}$$

Dies liefert uns

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 + \mu\int_0^t \|u(s)\|^p\mathrm{d}s &\leq |u_0|^2 + 2\lambda T + \mathrm{const}\int_0^t \|f(s)\|_*^{p'}\mathrm{d}s \\ &\leq \mathrm{const}\left(1 + |u_0|^2 + \|f\|_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'}\right) =: \mathcal{M}_0(u_0, f)^p\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} \leq \mathrm{const}\mathcal{M}_0(u_0, f)$$

und analog

$$\|\tilde{u}\|_{L^p(0,T;V)} \leq \mathrm{const}\mathcal{M}_0(\tilde{u}_0, \tilde{f})\,.$$

Es ergibt sich also

$$|u(t) - \tilde{u}(t)|^2 \leq |u_0 - \tilde{u}_0|^2 + \mathrm{const}\|f - \tilde{f}\|_{L^{p'}(0,T;V^*)}(\mathcal{M}_0(u_0, f) + \mathcal{M}_0(\tilde{u}_0, f))\,.$$

Betrachten wir den Lösungsoperator, der $(u_0, f) \in H \times L^{p'}(0,T;V^*)$ auf die eindeutige Lösung $u \in \mathcal{W}^p(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$, so ist dieser Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen von $H \times L^{p'}(0,T;V^*)$ als Abbildung nach $C([0,T];H)$. Denn dann sind $\mathcal{M}_0(u_0, f)$ und $\mathcal{M}_0(\tilde{u}_0, \tilde{f})$ beschränkt.

Satz 20.8. *Ist $A = A_0$ sogar p-monoton, d.h. $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \tilde{\mu}\|u - v\|^p$ für alle $u, v \in V$, so ist der Lösungsoperator stetig als Abbildung nach $C([0,T]; H) \cap L^p(0,T;V)$.*

Beweis. Zunächst ist auch $\mathcal{A}\colon L^p(0,T;V) \to L^{p'}(0,T;V^*)$ ein p-monotoner Operator:

$$\int_0^T \langle Au(t) - Av(t), u(t) - v(t)\rangle \mathrm{d}t \geq \tilde{m}u \int_0^T \|u(t) - v(t)\|^p \mathrm{d}t = \tilde{\mu}\|u - v\|^p_{L^p(0,T;V)} \,.$$

Dann folgt wie oben

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|}u(t) - \tilde{u}(t)|^2 + \tilde{\mu}\|u(t) - \tilde{u}(t)\|^p &\leq \|f(t) - \tilde{f}(t)\|\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \\ &\leq \mathrm{const}\|f(t) - \tilde{f}(t)\|^{p'} + \frac{\tilde{\mu}}{2}\|u(t) - \tilde{u}(t)\|^p \,, \end{aligned}$$

also

$$|u(t) - \tilde{u}(t)|^2 + \tilde{\mu}\int_0^t \|u(s) - \tilde{u}(s)\mathrm{d}s \leq \mathrm{const}\left(|u_0 - \tilde{u}_0|^2 + \|f - \tilde{f}\|^{p'}_{L^{p'}(0,T;V^*)}\right) \,.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^p(0,T;V)} \leq \mathrm{const}\left(|u_0 - \tilde{u}_0|^2 + \|f - \tilde{f}\|^{p'}_{L^{p'}(0,T;V^*)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\|u - \tilde{u}\|_{C([0,T];H)} \leq \mathrm{const}\left(|u_0 - \tilde{u}_0|^2 + \|f - \tilde{f}\|^{p'}_{L^{p'}(0,T;V^*)}\right) \,.$$

□

Bisher haben wir nur schwache bzw. schwache* Konvergenz der Näherungslösungen u_l gegen u. Wir wollen nun Voraussetzungen finden, die sogar starke Konvergenz liefern.

Unter stärkeren Monotonieanforderungen erhalten wir starke Konvergenz in $L^q(0,T;V)$ mit $q \leq p$. Unter einer Kompaktheitsanforderung erhalten wir starke Konvergenz in $L^r(0,T;H)$ mit $r < \infty$.

Sei wieder A ein p-monotoner Operator. Wegen $u_l \rightharpoonup u$ in $L^p(0,T;V)$ und $\mathcal{A}u_l \rightharpoonup \mathcal{A}u$ in $L^{p'}(0,T;V^*)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{\mu}\int_0^T \|u(t) - u_l(t)\|^p \mathrm{d}t &\leq \int_0^T \langle Au(t) - Au_l(t), u(t) - u_l(t)\rangle \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_0^T \langle Au(t), u(t) - u_l(t)\rangle \mathrm{d}t}_{=:I_1} - \underbrace{\int_0^T \langle Au_l(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t}_{=:I_2} + \underbrace{\int_0^T \langle Au_l(t), u_l(t)\rangle \mathrm{d}t}_{=:I_3} \,. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass I_1 gegen das Integral $\int_0^T \langle Au(t), u(t) - u(t)\rangle \mathrm{d}t = 0$ konvergiert und I_2 gegen $\int_0^T \langle Au(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t$. Außerdem ist

$$I_3 = \underbrace{\int_0^T \langle f_l(t), u_l(t)\rangle \mathrm{d}t}_{\to \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t} - \int_0^T \langle \hat{u}_l'(t), u_l(t)\rangle \mathrm{d}t \,.$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T \langle \hat{u}_l'(t), u_l(t)\rangle \mathrm{d}t &= -\sum_{i=1}^{N_l} \frac{1}{\tau}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle u_l^i - u_l^{i-1}, u_l^i\rangle \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_l}\Big(|u_l^i|^2 - |u_l^{i-1}|^2 + |u_l^i - u_l^{i-1}|^2\Big) \\
&\le -\frac{1}{2}\big(|u_l^{N_l}|^2 - |u_l^0|^2\big)\,.
\end{aligned}
$$

Mit $u_l^0 \to u_0$ und $u_l^{N_l} \rightharpoonup \xi$ in H und der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm haben wir wieder

$$
\limsup\left(-\int_0^T \langle \hat{u}_l'(t), u_l(t)\rangle \mathrm{d}t\right) \le \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = -\int_0^T < u'(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t\,.
$$

Wir erhalten

$$
0 \le \limsup_{l\to\infty} \tilde{\mu}\|u - u_l\|^p_{L^p(0,T;V)} \le \int_0^T \langle -Au(t) + f(t) - u'(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t = 0\,,
$$

also $\|u - u_l\|_{L^p(0,T;V)} \to 0$.

Fordern wir nun $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$, dann erhalten wir für $1 < p < \infty$

$$
\mathcal{W}^p(0,T) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;H)
$$

nach dem Satz 18.13 von Lions-Aubin. Es ist $(\hat{u}_l)$ sowohl in $L^\infty(0,T;H)$ als auch in $\mathcal{W}^p(0,T)$ (Übung) beschränkt. Damit gibt es eine Teilfolge $(\hat{u}_{l'})$ und ein $\overline{u} \in L^p(0,T;H)$ mit $\hat{u}_{l'} \to \overline{u}$ in $L^p(0,T;H)$. Da auch $\hat{u}_{l'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(0,T;H)$ und damit $\hat{u}_{l'} \rightharpoonup u$ in $L^p(0,T;H)$, folgt $u = \overline{u}$ und die gesamte Folge konvergiert. Weiterhin ist für $1 \le p < q \le \infty$, $p < r < q$, $\theta \in (0,1)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$

$$
\|u\|_{0,r} \le \|u\|^\theta_{0,q}\|u\|^{1-\theta}_{0,p}
$$

für alle $u \in L^q(0,T)$. Wir wählen $q = \infty$, $r \in (p,\infty)$ beliebig. Dann erhalten wir

$$
\|u - \hat{u}_l\|_{L^r(0,T;H)} \le \underbrace{\|u - \hat{u}_l\|^\theta_{L^\infty(0,T;H)}}_{\le \text{const}}\underbrace{\|u - \hat{u}_l\|^{1-\theta}_{L^p(0,T;H)}}_{\to 0}\,.
$$

21 Das instationäre Navier-Stokes-Problem

21.1 Erinnerung an das stationäre Navier-Stokes-Problem

Es sei ein Raumgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d = 2, 3$ gegeben, so dass Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet sei. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{auf } \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Dabei ist

$$u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$$

das Geschwindigkeitsfeld der Strömung. Mit

$$p\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

bezeichnen wir den wirkenden Druck, mit

$$f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$$

Die Reynolds-Zahl ist $\mathrm{Re} = \frac{1}{\nu}$, wobei ν die Viskosität ist. Wir betrachten inkompressible Fluide, was wir in der Modellierung durch Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes umsetzen, also $\operatorname{div} u = 0$. Wir betrachten daher die solenoidalen Räume

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^d : \operatorname{div}\phi = 0\}\,, \\ V &:= \operatorname{clos}_{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}} \mathcal{V} = \{v \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0\} \text{ und} \\ H &:= \operatorname{clos}_{\|\cdot\|_{L^2}} \mathcal{V} = \{v \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0 \; textund \; \gamma_n v = 0\},. \end{aligned}$$

Dabei ist $\nabla \cdot v = 0$ im distributionellen Sinne zu verstehen, d.h. $\int_\Omega v \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x = 0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Hier ist $\nabla \cdot v = 0 \in L^2(\Omega)$. Auf der Menge E der $v \in L^2(\Omega)^d$ mit distributioneller Ableitung ∇v, die in $L^2(\Omega)$ liegt, können wir die Spur in Normalenrichtung definieren. Für glatte $v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ haben wir

$$\gamma_n \cdot v(x)$$

für $x \in \overline{\Omega}$. Dies können wir auf E, versehen mit $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\operatorname{div}\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, fortsetzen. Dann ist H ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)^d$. Analog ist V ein abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)^d$. Es bildet $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ einen Gelfand-Dreier mit $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ (vgl. $H_0^1 \overset{c}{\hookrightarrow} L^2$ für $d = 2, 3$). Wir setzen $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$,

$$a(v, w) = ((v, w)) = (\nabla v, \nabla w)_{L^2(\Omega)^d}\,,$$

und $b\colon V \times V \times V \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= \int_\Omega (u \cdot \nabla)v \cdot w \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^d \int_\Omega ((u \cdot \nabla)v)_i w_i \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^d \int_\Omega \left(\left(\sum_{j=1}^d u_j \partial_j \right) v \right)_i w_i \mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega u_j \partial_j v_i w_i \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Dann ist a bilinear, stark positiv und beschränkt. Die Abbildung b ist trilinear, beschränkt und schiefsymmetrisch im zweiten und dritten Argument, d.h. $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$.

Insbesondere ist $b(u,w,w) = 0$ für alle $u, w \in V$. Mit diesen Abbildungen definieren wir $A\colon V \to V^*$ mit $\langle Av, w\rangle := a(v,w)$ und $B\colon V \to V^*$ mit $\langle B(u), w\rangle = b(u,u,w)$.

Wir hatten bereits gezeigt, dass A linear, beschränkt und stark positiv ist, dass B verstärkt stetig ist und $A+B$ beschränkt und koerzitiv ist. Es existiert also mindestens eine Lösung $u \in V$. Eindeutigkeit ist nur bei kleinen Daten gegeben.

21.2 Formulierung des instationären Problems

Wir betrachten das folgende Problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f & \text{auf } \Omega\times(0,T) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{auf } \Omega\times(0,T) \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t\in(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & x\in\Omega\,. \end{cases}$$

In der schwachen Formulierung bilden V und H wie oben einen Gelfand-Dreier $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$. Auch $A, B\colon V \to V^*$ seien wie oben definiert. Wir untersuchen nun deren Nemyzki-Operatoren.

Lemma 21.1. *Der Operator $A\colon V \to V^*$ induziert via $(\mathcal{A}u)(t) := Au(t)$ für $u\colon [0,T] \to V$ einen Operator $\mathcal{A}\colon L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V^*)$.*

Beweis. Da A beschränkt und linear, also stetig ist, bildet $\mathcal{A}$ messbare Bochner-Funktionen auf Bochner-messbare Funktionen ab. Für $u \in L^2(0,T;V)$ ist außerdem

$$\|\mathcal{A}u\|^2_{L^2(0,T;V^*)} = \int_0^T \|(\mathcal{A}u)(t)\|_*^2 \mathrm{d}t \le \|A\| \int_0^T \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t = \|u\|^2_{L^2(0,T;V)}\,.$$

□

Lemma 21.2. *Der Operator $\mathcal{B}$, der durch $(\mathcal{B}u)t = Bu(t)$ für $u\colon [0,T] \to V$ definiert ist, bildet $L^2(0,T;V)$ nach $L^1(0,T;V^*)$ ab.*

Beweis. Es sei $u \in L^2(0,T;V)$ und (u_n) sei eine Folge einfacher Funktionen $[0,T] \to V$, d.h. $u_n(t) = \sum_{i=1}^N u_i^n\, \mathbb{1}_{E_i^n}(t)$, mit $u_n(t) \to u(t)$ fast überall. Dann ist

$$(\mathcal{B}u_n)(t) = Bu_n(t) = b(u_n(t), u_n(t), \cdot) = \sum_{i,j=1}^N b(u_i^n, u_j^n, \cdot)\, \mathbb{1}_{E_i^n \cap E_j^n}(t)\,.$$

Erinnerung: Für $\alpha, \beta, \gamma > 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$ gilt

$$b(u,v,w) \le \text{const}\|u\|_{0,\alpha}\|\nabla v\|_{0,\beta}\|w\|_{0,\gamma}\,.$$

Damit erhalten wir

$$b(u,v,w) \le |u|\|v\||w| \le \text{const}\|u\|\|v\|\|w\|\,.$$

Wir haben

$$\Big|b(u,u,w) - b(\overline{u},\overline{u},w)\Big| = \Big|b(u-\overline{u},u,w) - b(\overline{u},\overline{u}-u,w)\Big| \le \text{const}\|u-\overline{u}\|\big(\|u\| + \|\overline{u}\|\big)\|w\|\,.$$

Also ist

$$\|Bu - B\overline{u}\|_* \le \text{const}\|u-\overline{u}\|\big(\|u\| + \|\overline{u}\|\big)\,.$$

Dies ergibt

$$\big\|Bu(t) - Bu_n(t)\big\|_* \le \text{const}\,\underbrace{\|u(t) - u_n(t)\|}_{\to 0}(\|u(t)\| + \|u_n(t)\|) \to 0\,.$$

Dann folgt

$$\|\mathcal{B}u\|_{L^1(0,T;V^*)} = \int_0^T \|Bu(t)\|_* \mathrm{d}t \le \text{const} \int_0^T \|u(t)\|\|u(t)\|\mathrm{d}t = \text{const}\|u\|^2_{L^2(0,T;V)}\,.$$

□

Da $L^2(0,T;V^*) \subset L^1(0,T;V^*)$, können wir $\mathcal{A}+\mathcal{B}\colon L^1(0,T,V^*)$ betrachten. Wir können also keinen $\mathcal{W}^p(0,T)$-Raum betrachten und nicht mit der Lösung testen. Die bisher verwendeten Ideen lassen sich aber ähnlich einbringen.

Die schwache Formulierung lautet nun wie folgt:

$$\begin{cases} \text{Zu } u_0 \in H \text{ und } f \in L^2(0,T;V^*) \text{ finde } u \in L^2(0,T;V) \text{ mit} \\ \langle u'(t), v\rangle + \nu\langle Au(t), v\rangle + \langle Bu(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle \\ \text{für alle } v \in V \text{für fast alle } t \in (0,T) \text{ und } u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{21.1}$$

Dann ist $u' = f - \nu\mathcal{A}u - \mathcal{B}u$ für fast alle $t \in (0,T)$ in V^*. Also ist $u' \in L^1(0,T;V^*)$. Da $u \in L^2(0,T;V) \subset L^1(0,T;V^*)$. Damit ist u absolut stetig von $[0,T]$ nach V^*. Die Gleichheit $u(0) = u_0$ ist also in V^* zu verstehen. Wir erhalten eine weitere schwache Formulierung:

$$\begin{cases} \text{Zu } u_0 \in H\,,\ f \in L^2(0,T;V^*) \text{ finde } u \in L^2(0,T;V) \text{ mit } u' \in L^1(0,T;V^*)\,, \\ \text{so dass } u' + \nu\mathcal{A}u + \mathcal{B}u = f \\ \text{in } L^1(0,T;V*) \text{ und } u(0) = u_0 \text{ in } V^*\,. \end{cases} \tag{21.2}$$

Lemma 21.3. *Der Operator $\mathcal{B}$ bildet $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ nach $L^p(0,T;V^*)$ ab, wobei*

$$p = \begin{cases} 2 & \textit{falls } d = 2 \\ \frac{4}{3} & \textit{falls } d = 3\,. \end{cases}$$

Beweis. Einnerung: Für $\alpha,\beta,\gamma > 1$ mit $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 1$ gilt

$$\big|b(u,v,w)\big| \le \|u\|_{0,\alpha}\|\nabla v\|_{0,\beta}\|w\|_{0,\gamma}\,.$$

Hier setzen wir $\alpha = \gamma = 4$ und $\gamma = 2$ und erhalten

$$\big|b(u,u,v)\big| = \big|b(u,v,u)\big| \le \|u\|^2_{0,4}|v|_{1,2}\,.$$

Damit ist für $u \in L^4(\Omega)^d$

$$\|Bu\|_* \le \|u\|^2_{L^4(\Omega)^d}\,.$$

Wir benutzen außerdem die interpolatorische Ungleichung (siehe Übung)

$$\|u\|_{L^4(\Omega)^d} \le \text{const}\begin{cases} |u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}} = |u|_{L^2(\Omega)^d}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d} & d = 2 \\ |u|^{\frac{1}{4}}\|u\|^{\frac{3}{4}} & d = 3\,. \end{cases}$$

Für $d = 2$ und für $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$[3] ist nun

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}u\|^2_{L^2(0,T;V^*)} &= \int_0^T \|Bu(t)\|_*^2 \mathrm{d}t \le \int_0^T \|u(t)\|^4_{L^4(\Omega)^d} \mathrm{d}t \\ &\le \mathrm{const} \int_0^T |u(t)|^2 \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t \le \mathrm{const} \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \int_0^T \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} .\end{aligned}$$

Für $d = 3$ ist

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}u\|^{\frac{4}{3}}_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*)} &= \int_0^t \|Bu(t)\|_*^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}t \le \int_0^T \|u(t)\|^{\frac{8}{3}}_{L^4(\Omega)^d} \mathrm{d}t \\ &\le \mathrm{const} \int_0^T |u(t)|^{\frac{2}{3}} \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t \le \mathrm{const} \|u\|^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(0,T;H)} \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} .\end{aligned}$$

□

Für $d = 2$ ist nun $u \in \mathcal{W}(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$, wir können also $u(0) = u_0$ in H betrachten. Für $d = 3$ ist u zunächst nur absolut stetig von $[0,T]$ nach V^* und in $L^\infty(0,T;H)$. Dann ist $u \in C_w([0,T];H)$, wobei $C_w([0,T];H)$ die Menge aller demistetigen Funktionen $u\colon [0,T] \to H$ ist (stetige Funktionen bezüglich der schwachen Topologie im Bildraum). (Übung) Es ist dann $u(t) \rightharpoonup u_0$ in H für $t \to 0$.

Wir haben nun die folgende Formulierung:

$$\begin{cases}\text{Zu } f \in L^2(0,T;V^*)\,,\ u_0 \in H \text{ finde} \\ u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \text{ mit } u' \in L^1(0,T;V^*) \\ \text{und } u' + \nu \mathcal{A}u + \mathcal{B}u = f \text{ in } L^1(0,T;V^*)\,.\end{cases} \tag{21.3}$$

Als Anfangsbedingungen haben wir für $d = 2$, dass $u \in C([0,T];H)$ und können $u(t) \to u_0$ in H für $t \to 0$ fordern. In $d = 3$ haben wir $u \in C_w([0,T];H)$ und können $u(t) \rightharpoonup u_0$ in H fordern.

21.3 Existenz globaler Lösung

Satz 21.4. *Es gibt mindestens eine Lösung von (21.3).*

Beweis. (1). Wir führen eine Raumdiskretisierung mit dem Galerkin-Schema durch. Der Raum V ist separabel, es existiert eine Galerkin-Basis $\{\phi_i\} \subset V$, d.h. je endlich viele ϕ_i sind linear unabhängig und für $V_m := \mathrm{span}\{\phi_1, \phi_m\}$ gilt

$$\bigcup_{m=1}^\infty V_m$$

liegt dicht in V. Wir betrachten das diskrete Ersatzproblem

$$\begin{cases}\text{Finde } u_m\colon [0,T] \to V_m \text{ mit} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_m(t), v(t)) + \nu \langle Au_m(t), v_m\rangle + b(u_m(t), u_m(t), v_m) = \langle f(t), u_m\rangle \\ \text{für alle } v_m \in V_m \text{ und } u_m(0) = u_m^0\,.\end{cases} \tag{21.4}$$

[3] Von nun an ist u also eine Funktion in der Zeit.

Dabei ist $u_m^0 \in V_m$, so dass $|u_0 - u_m^0| \to 0$ für $m \to \infty$. Es kann z.B. $u_m^0 = P_m u_0$ gewählt werden, wobei P_m die Orthogonalprojektion in H auf V_m ist. Dann ist $|P_m u_0| \leq |u_0|$. Wir schreiben $u_m(t) = \sum_{j=1}^m u_j^m(t)\phi_j$, $u_j^m\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, und damit (bei Differenzierbarkeit)

$$u_m'(t) = \sum_{j=1}^m (u_j^m)'(t)\phi_j \in V_m\,.$$

Ebenso ist

$$u_m^0 = \sum_{j=1}^m u_j^{0,m}\phi_j$$

für gewisse $u_j^{0,m} \in \mathbb{R}$. Es genügt wieder, mit ϕ_j, $j = 1, \ldots, m$, zu testen. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_m(t) &:= \begin{pmatrix} u_1^m(t) \\ \vdots \\ u_m^m(t) \end{pmatrix}\,, \\
\mathcal{U}_m^0 &:= \begin{pmatrix} u_1^{0,m} \\ \vdots \\ u_m^{0,m} \end{pmatrix}\,, \\
\mathcal{M}_m &:= \big((\phi_j, \phi_k)\big)_{j,k=1}^m
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{F}_m(t, \mathcal{U}_m(t)) := \left(\langle f(t), \phi_k \rangle - \nu \sum_{j=1}^m u_j^m(t)((\phi_j, \phi_k)) - \sum_{i,j=1}^m u_j^m(t) u_i^m(t) b(\phi_i, \phi_j, \phi_k) \right)_{k=1}^m\,.$$

Dann ist folgendes Problem zu lösen:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_m'(t) = \mathcal{M}_m^{-1}\mathcal{F}_m(t, \mathcal{U}(t) bigr) & t \in [0,T] \\ \mathcal{U}_m(0) = \mathcal{U}_m^0\,. \end{cases} \tag{21.5}$$

Dies ist ein Anfangswertproblem in $\mathbb{R}^m$. Es ist $\mathcal{M}_m$ tatsächlich invertierbar und $\mathcal{F}$ erfüllt eine Carathéodory- und eine Majorantenbedingung (Übung). Nach dem Satz 2.7.7 bzw. Satz 2.7.9 existiert mindestens eine Lösung $\mathcal{U}_m\colon [0,T] \to \mathbb{R}$. Diese ist insbesondere absolutstetig. Da auf $\mathbb{R}^m$ alle Normen äquivalent sind, können wir die durch $\|\cdot\|$ induziere Norm auf $\mathbb{R}^m$ wählen, d.h.

$$|\mathcal{U}_m(t)| = \|u_m(t)\|\,.$$

Damit folgt, dass auch u_m eine Lösung von (21.4) und absolutstetig mit Werten in V_m ist. Insbesondere ist $u_m' \in L^1(0,T;V_m)$.

(2). Wir machen a-priori-Abschätzungen. Hier dürfen wir mit $v_m = u_m(t)$ testen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m(t)|^2 + \nu\|u_m(t)\| &\leq (u_m'(t), u_m(t)) + \nu((u_m(t), u_m(t))) + \underbrace{b(u_m(t), u_m(t), u_m(t))}_{=0} \\
&= \langle f(t), u_m(t) \rangle \leq \|f(t)\|_* \|u_m(t)\| \leq \mathrm{const}\|f(t)\|_*^2 + \frac{\nu}{2}\|u_m(t)\|^2\,,
\end{aligned}$$

wir erhalten also

$$|u_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 \mathrm{d}s \leq |u_m^0|^2 + \mathrm{const}\int_0^t \|f(s)\|_*^2 \mathrm{d}s\,.$$

Da $(|u_m^0|)$ beschränkt ist, folgt

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \mathrm{const}\big(1 + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)}\big)$$

und ebenso

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq \mathrm{const}\big(1 + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)}\big)\,.$$

Es gibt daher $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ mit $u_{m'} \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V)$ und $u_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(0,T;H)$. Es gilt für alle ϕ_k, $k = 1,\ldots,m'$, also für alle ϕ_k mit $k = 1,\ldots,l$ und $l \leq m'$

$$(u'_{m'}(t),\phi_k) + \nu((u'_{m'}(t),\phi_k)) + b(u_{m'}(t),u_{m'}(t),\phi_k) = \langle f(t),\phi_k\rangle\,.$$

Nun folgt für beliebige $\psi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u_{m'},\phi_k)\psi'(t)\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((u_{m'}(t),\phi_k))\psi(t)\mathrm{d}t&\\ + \int_0^T b(u_{m'}(t),u_{m'}(t),\phi_k)\psi(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T \langle f(t),\phi_k\rangle\psi(t)\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Da $t \mapsto \phi_k\psi(t)$ und $t \mapsto \phi_k\psi'(t)$ in $L^2(0,T;V^*) \cap L^1(0,T;H)$ sind, folgt (wie noch zu zeigen ist) für festes k und $m' \to \infty$

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u(t),\phi_k)\psi'(t)\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((u(t),\phi_k))\psi(t)\mathrm{d}t&\\ + \int_0^T (u(t),u(t),\phi_k)\psi(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T \langle f(t),\phi_k\rangle\psi(t)\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Dichtheit von $\overline{\bigcup_m V_m} = V$

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\mathrm{d}t + \int_0^T b(u(t),u(t),v)\psi(t)\mathrm{d}t&\\ = \int_0^T \langle f(t),v\rangle\psi(t)\mathrm{d}t\,.&\end{aligned}$$

Damit ist tatsächlich $u' \in L^1(0,T;V^*)$ mit

$$u'(t) + \nu Au(t) + Bu(t) = f(t)$$

für fast alle $t \in [0,T]$ in V^*. Dass die Anfangswertbedingung erfüllt ist, lässt sich wie immer zeigen.

Wir untersuchen die Konvergenz von

$$\int_0^T b(u_{m'},u_{m'},\phi_k)\psi(t)\mathrm{d}t \to \int_0^T (u(t),u(t),\phi_k)\psi(t)\mathrm{d}t\,. \tag{21.6}$$

(3). Zunächst zeigen wir, dass (bis auf Übergang zu Teilfolgen)

$$u_{m'} \to u$$

in $L^2(0,T;H)$.

Dazu verwenden wir die Theorie gebrochener Sobolw-Räume (Sobolew-Slobodezki-Räume) Es sei $1 \leq p < \infty$, $\sigma \in (0,1)$,

$$W^{\sigma,p}(0,T;H) := \left\{u \in L^p(0,T;H) : |u|_{\sigma,p} < \infty\right\},$$

wobei

$$|u|^p_{\sigma,p} = \int_0^T \int_0^T \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{1+\sigma p}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Außerdem ist

$$\|u\|_{\sigma,p} = \left(\|u\|^p_{0,p} + |u|^p_{\sigma,p}\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Insbesondere setzen wir

$$H^\sigma(0,T;H) := W^{\sigma,2}(0,T;H)\,.$$

Es gilt nun

$$W^{1,p}(0,T;H) \hookrightarrow W^{\sigma,p}(0,T;H) \hookrightarrow L^p(0,T;H)\,.$$

Weiterhin ist $H^\sigma(0,T;H) = H^\sigma_0(0,T;H) = \mathrm{clos}_{\|\cdot\|_{\sigma,2}} C_0^\infty(0,T;H)$, falls $\sigma < \frac{1}{2}$. Wir werden insbesondere benutzen, dass

$$L^2(0,T;V) \cap H^\sigma(0,T;H) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H)$$

für beliebiges $\sigma > 0$ gilt.

Da $\{u_{m'}\}$ in $L^2(0,T;V)$ beschränkt ist, genügt es, Beschränktheit in $H^\sigma(0,T;H)$ für ein beliebiges $\sigma > 0$ nachzuweisen, um starke Konvergenz in $L^2(0,T;H)$ zu erhalten. Wir betrachten dazu den Zähler, wobei o.B.d.A. $s \le t$

$$\begin{aligned}
|u_{m'}(t) - u_{m'}(s)|^2 &= (u_{m'}(t) - u_{m'}(s), u_{m'}(t) - u_{m'}(s)) \\
&= \left(\int_s^t u'_{m'}(\tau)\mathrm{d}\tau, u_{m'}(t) - u_{m'}(s)\right) \\
&= \int_s^t (u'_{m'}(\tau), u_{m'}(t) - u_{m'}(s))\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \langle f(\tau), u_{m'}(t) - u_{m'}(s)\rangle \mathrm{d}\tau - \nu \int_s^t ((u_{m'}(\tau), u_{m'}(t) - u_{m'}(s)))\mathrm{d}\tau \\
&\qquad - \int_s^t b(u_{m'}(\tau), u_{m'}(\tau), u_{m'}(t) - u_{m'}(s))\mathrm{d}\tau \\
&\le \underbrace{\int_s^t \|f(\tau)\|_*(\|u_{m'}(t)\| + \|u_{m'}(s)\|)\mathrm{d}\tau}_{=:I_1} \\
&\qquad + \underbrace{\nu \int_s^t \|u_{m'}(\tau)\|(\|u_{m'}(t)\| + \|u_{m'}(s)\|)\mathrm{d}\tau}_{=:I_2} \\
&\qquad + \underbrace{c\int_s^t |u_{m'}(\tau)|^{\frac{1}{2}}\|u_{m'}(\tau)\|^{\frac{3}{2}}(\|u_{m'}(t)\| + \|u_{m'}(s)\|)\mathrm{d}\tau}_{=:I_3}\,.
\end{aligned}$$

Für die Abschätzung des letzten Terms haben wir $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$ und $b(u,v,w) \le \|u\|_{0,4}\|w\|_{0,4}\|\nabla v\|_{0,2}$ und für $d=3$ die Ungleichung $\|u\|_{0,4} \le |u|^{\frac{1}{4}}\|u\|^{\frac{3}{4}}$ benutzt.

Zur Untersuchung von I_1 beobachten wir

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^T \frac{1}{|t-s|^{1+2\sigma}}\int_s^t \|f(\tau)\|_*\|u_{m'}(t)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ \leq \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T |t-s|^{-1-2\sigma}\int_s^t \|f(\tau)\|_*^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}t}_{=:I_{1,1}} \\ + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T |t-s|^{-1-2\sigma}\int_s^t \|u_{m'}(t)\|_*^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}t}_{=:I_{1,2}}\,.\end{aligned}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}I_{1,1} &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t \underbrace{\int_0^\tau |t-s|^{-1-2\sigma}\mathrm{d}s}_{=-\frac{1}{2\sigma}(t-s)^{-2\sigma}\big|_{s=0}^{\tau}}\|f(\tau)\|_*^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\sigma}\int_0^T\int_0^t \left(t^{-2\sigma}-(t-\tau)^{-2\sigma}\right)\|f(\tau)\|_*^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\sigma}\int_0^T \underbrace{\int_\tau^T \left(t^{-2\sigma}-(t-\tau)^{-2\sigma}\right)\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{1-2\sigma}\left(t^{1-2\sigma}\big|_\tau^T-(t-\tau)^{1-2\sigma}\big|_\tau^T\right)=\frac{1}{1-2\sigma}\left(T^{1-2\sigma}-\tau^{1-2\sigma}-(T-\tau)^{1-2\sigma}\right)\leq\frac{1}{1-2\sigma}T^{1-2\sigma}}\|f(\tau)\|_*^2\mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{1}{4\sigma}\frac{1}{1-2\sigma}T^{1-2\sigma}\|f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 < \infty\,.\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise haben wir

$$\begin{aligned}I_{1,2} &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T |t-s|^{-2\sigma}\mathrm{d}s\|u_{m'}(t)\|^2\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2(1-2\sigma)}T^{1-2\sigma}\|u_{m'}\|_{L^2(0,T;V)}^2 < \infty\,.\end{aligned}$$

Mit den anderen Summanden verfahren wir analog. Für I_3 (bzw. den ersten Summanden aus I_3) ist jedoch

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^T\int_s^t |t-s|^{-1-2\sigma}\underbrace{|u_{m'}(\tau)|^{\frac{1}{2}}}_{\leq\|u_{m'}\|_{L^\infty(0,T;H)}\leq\mathrm{const}}\|u_{m'}(\tau)\|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\tau\|u_{m'}(t)\|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ \leq \mathrm{const}\int_0^T\int_0^t\int_0^\tau |t-s|^{-1-\sigma}\mathrm{d}s\|u_{m'}(\tau))\|^{\frac{3}{2}}\|u_{m'}(t)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ = \frac{\mathrm{const}}{2\sigma}\int_0^T\int_0^t \left(t^{-2\sigma}-(t-\tau)^{-2\sigma}\right)\|u_{m'}(\tau)\|^{\frac{3}{2}}\|u_{m'}(t)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ \leq \frac{\mathrm{const}}{2\sigma}\int_0^T\int_0^t t^{-2\sigma}\|u_{m'}(\tau)\|^{\frac{3}{2}}\|u_{m'}(t)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ \leq \frac{\mathrm{const}}{2\sigma}\left(\int_0^T\int_0^t t^{-8\sigma}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T\int_0^t \|u_{m'}(\tau)\|^2\|u_{m'}(t)\|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\right)^{\frac{3}{4}} \\ \leq \frac{\mathrm{const}}{2\sigma(2-8\sigma)}t^{2-8\sigma}\big|_0^T\|u_{m'}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;V)}\|u_{m'}\|_{L^2(0,T;V)}^{\frac{3}{2}} \\ \leq \frac{\mathrm{const}}{2\sigma(2-8\sigma)}T^{2-8\sigma}\|u_{m'}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;V)}\|u_{m'}\|_{L^2(0,T;V)}^{\frac{3}{2}} \leq \mathrm{const}\,,\end{aligned}$$

falls $\sigma < \frac{1}{4}$. Insgesamt erhalten wir also

$$|u_{m'}|^2_{\sigma,2} \leq \text{const}\left(\|u_{m'}\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u_{m'}\|_{L^2(0,T;V^*)}\right)$$

für $\sigma < \frac{1}{4}$. Damit ist $\{u_{m'}\}$ in $H^\sigma(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ beschränkt und es gibt ein $\tilde{u} \in L^2(0,T;H)$ und eine Teilfolge, so dass $u_{m''} \to \tilde{u}$ in $L^2(0,T;H)$. Da $u_{m''} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(0,T;H)$, folgt $\tilde{u} = u$.

(4). Um (21.6) zu zeigen, beobachten wir für $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ und $\phi_k \in V_m$, dass

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^T \Big| b(u_{m'}(t), u_{m'}(t), \phi_k) - b(u(t), u(t), \phi_k) \Big| |\psi(t)| \mathrm{d}t \\ &\leq \text{const} \int_0^T |\psi(t)| \|u_{m'}(t) - u(t)\|_{0,4} (\|u_{m'}(t)\|_{0,4} + \|u(t)\|_{0,4}) \|\phi_k\| \mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

denn

$$b(\tilde{u}, \tilde{u}, v) - b(u, u, v) = b(\tilde{u} - u, \tilde{u}, v) + b(u, \tilde{u} - u, v)\,.$$

In $d = 3$ ist nun

$$\begin{aligned} I &\leq \text{const} \int_0^T |\psi(t)| \|u_{m'}(t) - u(t)\|^{\frac{3}{4}} |u_{m'}(t) - u(t)|^{\frac{1}{4}} (\|u_{m'}(t)\| + \|u(t)\|) \|\phi_k\| \mathrm{d}t \\ &\leq \text{const} \|\psi\|_\infty \left(\int_0^T |u_{m'}(t) - u(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_0^T \|u_{m'} - u(t)\|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{3}{8}} \\ &\qquad \cdot \left(\int_0^T (\|u_{m'}(t)\| + \|u(t)\|)^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi_k\| \\ &\leq \text{const} \|\psi\|_\infty \underbrace{\|u_{m'} - u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(0,T;H)}}_{\to 0} \|u_{m'} - u\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(0,T;V)} \left(\|u_{m'}\|_{L^2(0,T;V)} + \|u\|_{L^2(0,T;V)} \right) \|\phi_k\| \\ &\to 0\,. \end{aligned}$$

□

Somit gibt es mindestens eine Lösung $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ mit

$$u' \in \begin{cases} L^2(0,T;V^*) & d = 2 \\ L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*) & d = 3\,, \end{cases} \qquad u \in \begin{cases} C([0,T];H) & d = 2 \\ C_w([0,T];H) & d = 3 \end{cases}$$

und $u \in H^\sigma(0,T;H)$ für $\sigma < \frac{1}{4}$.

21.4 Einschub: Kompaktheit in $L^p(0,T;H)$)

Satz 21.5. *Es seien V, H und W Banach-Räume, wobei $V \overset{c}{\hookrightarrow} H \hookrightarrow W$. Weiter sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für beliebiges $\sigma > 0$*

$$L^p(0,T;V) \cap W^{\sigma,p}(0,T;W) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;H)\,.$$

Bemerkung 21.6. Für unsere Zwecke benötigen wir insbesondere $V \cong H^1_0(\Omega)^d$, $W = H \cong L^2(\Omega)^d$ und $p = 2$, also

$$L^2(0,T;V) \cap H^\sigma(0,T;H) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H)\,.$$

Statt $W^{\sigma,p}$ können wir auch $W^{\sigma,r}$ für $r \geq p$ wählen. Soll $r < p$ sein, so muss weiter $\sigma > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ gefordert werden.
Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung des Satzes von Lions-Aubin dar.

Beweis. (1). Sei $U \subset L^p(0,T;V) \cap W^{\sigma,p}(0,T;W)$ beschränkt. Zu zeigen ist, dass U relativ kompakt in $L^p(0,T;H)$ ist.
(2). Wir nehmen zunächst an, dass U relativ kompakt in $L^p(0,T;W)$ ist. Wir benötigen hierzu die folgende interpolatorische Ungleichung: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $c_\varepsilon > 0$, so dass

$$\|u\|_H \leq \varepsilon \|u\|_V + c_\varepsilon \|u\|_w$$

für alle $u \in V$. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$H_n := \{v \in H : \|v\|_H < \varepsilon + n\|v\|_W\} .$$

Dann sind die Mengen H_n offen und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n = H .$$

Da $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$, ist

$$S_V = \{v \in V : \|v\|_V = 1\}$$

relativ kompakt in H. Somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $S_V \subset H_N$. Es ist also $\|v\|_H \leq \varepsilon\|v\|_V + N\|v\|_W$ für alle $v \in S_V$. Die Aussage für $v \in V$ ergibt sich durch Skalierung.
Sei nun $\eta > 0$. Da U relativ kompakt in $L^p(0,T;W)$, gibt es ein endliches η-Netz, also $u_1, \dots, u_N \in U$ mit

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{N} B\big(u_i, \eta, L^p(0,T;W)\big) .$$

Zu $u \in U$ gibt es also $u_i \in U$, $i \in \{1, \dots, N\}$, mit $\|u - u_i\|_{L^p(0,T;W)} < \eta$. Für vorerst beliebiges $\varepsilon > 0$ ist

$$\|u - u_i\|^p_{L^p(0,T;H)} \leq \int_0^T \Big(\varepsilon\|u(t) - u_i(t)\|_V + c_\varepsilon\|u(t) - u_i(t)\|_W\Big)^p \mathrm{d}t .$$

Dies ergibt

$$\|u - u_i\|_{L^p(0,T;H)} \leq \varepsilon\|u - u_i\|_{L^p(0,T;V)} + c_\varepsilon\|u - u_i\|_{L^p(0,T;W)} .$$

Da U in $L^p(0,T;V)$ beschränkt ist, gibt es ein $D > 0$ mit $\|u - u_i\|_{L^p(0,T;V)} \leq D$. Also ist

$$\|u - u_i\|_{L^p(0,T;H)} \leq D\varepsilon + c_\varepsilon \eta .$$

Für $\delta > 0$ wählen wir zunäcst $\varepsilon < \frac{\delta}{2D}$ und $\eta < \frac{\delta}{2c_\varepsilon}$. Somit bilden die entsprechenden u_i ein δ-Netz von U in $L^p(0,T;H)$, d.h. U ist relativ kompakt in $L^p(0,T;H)$.
(3). Wir zeigen nun, dass U relativ kompakt in $L^p(0,T;W)$ ist. Für $u \in U$ und $0 < t_1 < t_2 < T$ gilt

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} u(t)\mathrm{d}t \right\|_V \leq \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|_V \mathrm{d}t \leq (t_2 - t_1)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L^p(0,T;V)} \leq T^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L^p(0,T;V)} .$$

Also ist
$$\left\{\int_{t_1}^{t_2} u(t)\mathrm{d}t : u \in U\right\}$$
beschränkt in V. Wegen $V \overset{c}{\hookrightarrow} H \hookrightarrow W$, also $V \overset{c}{\hookrightarrow} W$, folgt:
$$\left\{\int_{t_1}^{t_2} u(t)\mathrm{d}t : u \in U\right\} \text{ ist relativ kompakt in } W \text{ für alle } 0 < t_1 < t_2 < T\,. \tag{21.7}$$
Für $h > 0$, $u\colon [0,T] \to W$ setzen wir $(\tau_h u)(t) := u(t+h)$, $\tau_h u\colon [0,T] \to V$. Wir nehmen zunächst an, dass
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)} \to 0 \tag{21.8}$$
gleichmäßig in U für $h \to 0$ gilt, d.h. für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $u \in U$ und $h < \delta$
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-H;W)} < \varepsilon\,.$$
(4). Aus (21.7) und (21.8) folgt die Behauptung: Für $u \in U$ und $\xi > 0$ definieren wir das rechtsseitige *Steklov-Mittel*
$$S_\xi^+ u(t) := \frac{1}{\xi}\int_t^{t+\xi} u(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{\xi}\left(\int_0^{t+\xi} u(s)\mathrm{d}s - \int_0^t u(s)\mathrm{d}s\right) = \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \tau_h u(t)\mathrm{d}h\,.$$
Da $u \in L^p(0,T;W) \subset L^1(0,T;W)$, ist $S_\xi^+ u \in C([0,T-\xi];W)$[4]. Für $0 < t_1 < t_2 < T-\xi$ gilt
$$\begin{aligned}\left\|S_\xi^+ u(t_2) - S_\xi^+ u(t_1)\right\|_W &= \frac{1}{\xi}\left\|\int_{t_2}^{t_2+\xi} u(s)\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t_1+\xi} u(s)\mathrm{d}s\right\|_W \\ &\le \frac{1}{\xi}\int_{t_1}^{t_1+\xi} \left\|(\tau_{t_2-t_1}u - u)(s)\right\|_W \mathrm{d}s \\ &\le \frac{1}{\xi}\|T_{t_2-t_1}u - u\|_{L^1(0,T-t_2+t_1;W)} \to 0\end{aligned}$$
gleichmäßig in U für $t_2 \to t_1$ wegen (21.8). Also ist $S_\xi^+(U)$ gleichgradig stetig im Raum $C([0,T-\xi];W)$. Nach (21.7) ist für beliebiges $t \in [0,T-\xi]$
$$\left\{S_\xi^+ u(t) : u \in U\right\} = \frac{1}{\xi}\left\{\int_t^{t+\xi} u(s)\mathrm{d}s : u \in U\right\}$$
relativ kompakt in W. Nach dem verallgemeinerten Satz 2.4.10 von Arzelà-Ascoli ist $S_\xi^+(U)$ relativ kompakt in $C([0,T-\xi];W)$, also auch in $L^p(0,T-\xi;W)$ für $\xi > 0$.

(5). Wir verwenden die folgende Aussage (siehe Übung): Eine Menge K ist relativ kompakt, falls sie gleichmäßiger Grenzwert einer Folge relativ kompakter Mengen ist, wobei die gleichmäßige Konvergenz hier im folgenden Sinne zu verstehen ist: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine relativ kompakte Menge K_ε, so dass für jedes $x \in U$ ein $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ mit $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ gibt.

Für festes $\xi > 0$ ist $[0,\xi] \ni h \mapsto \tau_h u - u \in L^p(0,T-h;W)$ stetig nach (21.8), also integrierbar und
$$(S_\xi^+ u - u)(t) = \frac{1}{\xi}\int_0^\xi (\tau_h u - u)(t)\mathrm{d}h \in L^p(0,T-\xi;W)\,.$$

[4] Es ist sogar $S_\xi^+ u$ absolutstetig und $(S_\xi^+ u)'(t) = \frac{u(t+\xi)-u(t)}{\xi}$

Somit ist

$$\begin{aligned}\left\|S_\xi^+ u - u\right\|^p_{L^p(0,T-\xi;W)} &\le \frac{1}{\xi^p}\int_0^{T-\xi}\left(\int_0^\xi \|(\tau_h u - u)(s)\|_W \mathrm{d}h\right)^p \mathrm{d}s\\ &\le \xi^{-p+\frac{p}{p'}}\int_0^{T-\xi}\int_0^\xi \|(\tau_h u-u)(s)\|_W^p \mathrm{d}h\mathrm{d}s\\ &= \xi^{-1}\int_0^\xi\int_0^{T-\xi}\|(\tau_h u-u)(s)\|^p_W\mathrm{d}s\mathrm{d}h\\ &\le \sup_{0\le h\le\xi}\|\tau_h u-u\|^p_{L^p(0,T-h;W)} \to 0\end{aligned}$$

gleichmäßig in U für $\xi\to 0$ nach (21.8).
Ist nun $T_1<T$ beliebig, so folgt für $\xi<T-T_1$

$$\|S_\xi^+ u - u\|_{L^p(0,T_1;W)} \to 0$$

gleichmäßig in U für $\xi\to 0$. Damit ist U relativ kompakt in $L(0,T_1;W)$.
(6). Wir setzen $\tilde{u}(t) = u(T-t)$ für $u\in U$ und $\tilde{U} := \{\tilde{u} : u\in U\}$. Dann erfüllt $\tilde{U}$ ebenfalls (21.7) und (21.8), d.h. analog zu obiger Argumentation ist $\tilde{U}$ relativ kompakt in $L^p(0,T_1;W)$, also ist U relativ kompakt in $L^p(T-T_1,T;W)$. Mit $T_1=\frac{T}{2}$ folgt, dass U relativ kompakt in $L^p(0,T;W)$ ist.
(7). Wir zeigen nun (21.8). Dazu zeigen wir folgende Aussage: Ist $W^{\sigma,p}(0,T;W)$ für ein $\sigma>0$, so gibt es ein $c>0$ mit

$$\|\tau_h u-u\|_{L^p(0,T-h;W)} \le c|h|^\sigma\|u\|_{W^{\sigma,p}(0,T;W)}\,. \tag{21.9}$$

Da U beschränkt in $W^{\sigma,p}(0,T;W)$ ist, folgt (21.8) aus (21.9). Wir zeigen:

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{N}^{\sigma,p}(0,T;W)} := \sup_{0<h<T}\frac{\|\tau_h u-u\|_{L^p(0,T-h;W)}}{|h|^\sigma} &\le \frac{2}{\sigma}\|u\|_{W^{\sigma,p}(0,T;W)}\\ = \frac{2}{\sigma}\left(\int_0^1\frac{\|\tau_h u-u\|^p_{L^p}}{|h|^{\sigma p+1}}\mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{p}}&\,.\end{aligned}$$

Für $u\in L^p(0,T;W)$ definieren wir den *Stetigkeitsmodul*

$$\omega_u(h) := \sup_{0<t\le h}\|\tau_t u-u\|_{L^p(0,T-t,W)}\,.$$

Nun setzen wir

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{N}}^{\sigma,p}(0,T;W)} := \sup_{h>0}\frac{\omega_u(h)}{|h|^\sigma}$$

und

$$\|u\|_{\tilde{W}^{\sigma,p}(0,T;W)} := \left(\int_0^\infty\frac{\omega_u(h)^p}{|h|^{\sigma p}}\frac{\mathrm{d}h}{h}\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

(8). Es gilt

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{N}}^{\sigma,p}(0,T;W)} \le (\sigma p)^{\frac{1}{p}}\|u\|_{\tilde{W}^{\sigma,p}(0,T;W)}\;:$$

Die Abbildung $h\mapsto\omega_u(h)$ ist monoton wachsend, d.h. für $t>0$ ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\omega_u(h)^p}{h^{1+\sigma p}}\mathrm{d}h \ge \int_t^\infty\frac{\omega_u(h)^p}{h^{1+\sigma p}}\mathrm{d}h &\ge \omega_u(t)^p\int_t^\infty h^{-1-\sigma p}\mathrm{d}h\\ = -\frac{1}{\sigma p}h^{-\sigma p}\big|_{h=t}^\infty\omega_u(t)^p &= \frac{1}{\sigma p}t^{-\sigma p}\omega_u(t)^p\,.\end{aligned}$$

Also folgt

$$\frac{\omega_u(t)}{t^\sigma} \leq (\sigma p)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \frac{\omega_u(h)^p}{h^{1+\sigma p}} \mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dies zeigt

$$\|u\|_{\tilde{W}^{\sigma,p}(0,T;W)} \leq (\sigma p)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{\tilde{W}^{\sigma,p}(0,T;W)} .$$

(9). Für $h \in (0,T)$ gilt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)} \leq \omega_u(h) = \sup_{t\leq h} \|\tau_t u - u\|_{L^p(0,T-t;W)} .$$

Damit ist

$$\|u\|_{\tilde{N}^{\sigma,p}(0,T;W)} = \sup_{0<h<T} \frac{\|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)}}{h^\sigma} \leq \sup_{0<h<T} \frac{\omega_u(h)}{h^\sigma} = \|u\|_{\tilde{N}^{\sigma,p}(0,T;W)} .$$

(10). Für $h \leq t \leq 2h$ gilt

$$\tau_t u - u = \tau_h u - u + \tau_h\big(\tau_{t-h} u - u\big) .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\|\tau_t u - u\|_{L^p(0,T-t;W)} &= \left(\int_0^{T-t} \|(\tau_t u - u)(s)\|_W^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^{T-h} \|(\tau_h u - u)(s)\|_W^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{T-t} \|\tau_h(\tau_{t-h} u - u)(s)\|_W^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)} + \sup_{u\leq r\leq h} \|\tau_r u - u\|_{L^p(0,T-r;W)} \\
&= \|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)} + \omega_u(h) ,
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-t} \|\tau_h(\tau_{t-h} u - u)(s)\|_W^p \mathrm{d}s &= \int_0^{T-t} \|\tau_{t-h} u(s+h) - u(s+h)\|_W^p \mathrm{d}s \\
&\underset{\tilde{s}=s+h}{\leq} \int_0^{T-(t-h)} \|\tau_{t-h} u(\tilde{s}) - u(\tilde{s})\|_W^p \mathrm{d}\tilde{s} .
\end{aligned}$$

Für $h \leq t \leq 2h$ gilt also

$$\|\tau_t u - u\|_{L^p(0,T-t;W)} \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)} + \omega_u(h) .$$

Die gleiche Abschätzung gilt auch für $t \leq h$, da dann schon $\|\tau_t u - u\|_{L^p(0,T-t;W)} \leq \omega_u(h)$. Durch Supremumsbildung erhalten wir

$$\omega_u(2h) = \sup_{t\leq 2h} \|\tau_t u - u\|_{L^p(0,T-t;W)} \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)} + \omega_u(h) .$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
2^\sigma \|u\|_{\tilde{W}^{\sigma,p}(0,T;W)} &= \left(2^{-1+\sigma p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \frac{\omega_u(\tilde{h})}{\tilde{h}^{1+\sigma p}} \mathrm{d}\tilde{h}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\underset{\tilde{h}=2h}{=} \left(\int_0^\infty \frac{\omega_u(2h)^p}{h^{\sigma p+1}} \mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \frac{\|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;W)}^p}{h^{\sigma p+1}} \mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \frac{\omega_u(h)^p}{h^{\sigma p+1}} \mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{\sigma,p}(0,T;W)} + \|u\|_{\tilde{W}^{\sigma,p}(0,T;W)} .
\end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\|u\|_{\tilde{W}^{\sigma,p}(0,T;W)} \leq \frac{1}{2^\sigma - 1} \|u\|_{W^{\sigma,p}(0,T;W)} \,.$$

Also ist

$$\|u\|_{N^{\sigma,p}(0,T;W)} \leq \underbrace{\frac{(\sigma p)^{\frac{1}{p}}}{2^\sigma - 1}}_{\leq \frac{2}{\sigma}} \|u\|_{W^{\sigma,p}(0,T;W)} \,.$$

□

21.5 Eindeutigkeit

Satz 21.7 (Energie(un)gleichung)**.** *Für eine Lösung u gilt*

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 \mathrm{d}s \leq |u_0|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle \mathrm{d}s$$

fast überall in $(0,T)$. Ist $d = 2$, so gilt sogar die Gleichheit.

Beweis. Für $d = 2$ ist $u \in \mathcal{W}(0,T)$, also dürfn wir mit u testen:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 = (u'(t), u(t)) + \nu\big((u(t), u(t))\big) + \underbrace{b\big(u(t), u(t), u(t)\big)}_{=0} = \langle f(t), u(t) \rangle \,.$$

Integrieren liefert die zu zeigende Gleichheit.
Für $d = 3$ können wir nicht mit u testen. Es gilt allerdings für die diskreten Ersatzlösungen, dass $u_m \in \mathcal{W}(0,T)$, also

$$|u_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 \mathrm{d}s = |u_m^0|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u_m(s) \rangle \mathrm{d}s \,.$$

Da (für eine Teilfolge) $u_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(0,T;H)$, $u_{m'} \rightharpoonup u$ in $L^p(0,T;V)$ (also auch in $L^p(0,t;V)$) und $u_{m'}^0 \to u_0$ in H. Die schwache Folgenunterhalbstetigkeit der Normen liefert

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 \mathrm{d}s &\leq \liminf |u_{m'}^0|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u_{m'}(s) \rangle \mathrm{d}s \\ &= |u_0|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle \mathrm{d}s \,. \end{aligned}$$

□

Lemma 21.8. *Ist $d = 2$, so ist $u \in L^4(0,T;L^4(\Omega)^d)$.*
Ist $d = 3$, so ist $u \in L^{\frac{8}{3}}(0,T;L^4(\Omega)^d)$.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $d = 3$. Dafür ist

$$\int_0^T \|u(t)\|_{L^4(\Omega)^d}^{\frac{8}{3}} \mathrm{d}t \leq \int_0^T |u(t)|^{\frac{2}{3}} \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t \leq \|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 < \infty \,.$$

□

Satz 21.9 (Eindeutigkeit)**.** *Die Lösung ist in $d = 2$ eindeutig.*

Beweis. Es seien u und $\bar{u}$ zwei Lösungen. Wir dürfen mit $u-\bar{u} \in \mathcal{W}(0,T)$ testen. Zunächst beobachten wir

$$\begin{cases} (u-\bar{u})' + \nu\mathcal{A}(u-\bar{u}) + \mathcal{B}u - \mathcal{B}\bar{u} = 0 \\ (u-\bar{u})(0) = 0\,. \end{cases}$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)-\bar{u}(t)|^2+\nu\|u(t)-\bar{u}(t)\|^2+\underbrace{b(u(t),u(t),u(t)-\bar{u}(t)) - b(\bar{u}(t),\bar{u}(t),u(t)-\bar{u}(t))}_{=b(u-\bar{u},u,u-\bar{u})+b(\bar{u},u-\bar{u},u-\bar{u})} = 0\,,$$

also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)-\bar{u}(t)|^2+\nu\|u(t)-\bar{u}(t)\|^2 &\leq b(\bar{u}(t)-u(t),u(t),u(t)-\bar{u}(t)) \\ &\leq \|u(t)-\bar{u}(t)\|_{0,4}^2\|u(t)\| \\ &\leq \mathrm{const}\|u(t)\||u(t)-\bar{u}(t)|\|u(t)-\bar{u}(t)\| \\ &\leq \mathrm{const}\frac{1}{2\nu}\|u(t)\|^2|u(t)-\bar{u}(t)|^2 + \frac{\nu}{2}\|u(t)-\bar{u}(t)\|^2\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$|u(t)-\bar{u}(t)|^2 \leq -\nu\int_0^t \|u(s)-\bar{u}(s)\|^2\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{const}}{2\nu}\int_0^t \|u(s)\|^2|u(s)-\bar{u}(s)|^2\mathrm{d}s\,.$$

Mit dem Lemma von Gronwall erhalten wir

$$|u(t)-\bar{u}(t)|^2 \leq -\nu\int_0^t \|u(s)-\bar{u}(s)\|^2\mathrm{d}s \exp\left(\frac{\mathrm{const}}{2\nu}\int_0^t \|u(s)\|^2\mathrm{d}s\right) \leq 0\,,$$

also $u=\bar{u}$ fast überall. □

Satz 21.10 (Serrin)**.** *Es gibt höchstens eine Lösung $u \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$ mit $u \in L^s(0,T;L^r(\Omega)^d)$ für $s>2$, $r>d$ und $\frac{2}{s}+\frac{d}{r}\leq 1$. Eine solche Lösung ist dann aus $\mathcal{W}(0,T)$ und erfüllt die Energiegleichung.*

Beispiel 21.11. Standardwerte für s und r in $d=2$ sind $s=r=4$, für welche $u \in L^4(0,T;L^4(\Omega)^d)$ ist, und $s=\infty$, $r=2$. Standardwerte in $d=3$ sind $s=8$ und $r=4$. Die Existenz einer Lösung in $L^{\frac{8}{3}}(0,T;L^4(\Omega)^3)$ ist also gesichert, die Eindeutigkeit nur in $L^8(0,T;L^4(\Omega)^3)$ (und es ist $L^8 \subsetneq L^{\frac{8}{3}}$).

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $d=3$, $s=8$ und $r=4$. Sei also $u \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)\cap L^8(0,T;L^4(\Omega)^3)$. Dann folgt

$$\|\mathcal{B}u\|_{L^2(0,T;V^*)} = \int_0^T \|Bu(t)\|_*^2\mathrm{d}t \leq \int_0^T \|u(t)\|_{0,4}^4\mathrm{d}t = \|u\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega)^d)}^4 < \infty\,.$$

Damit ist $u' \in L^2(0,T;V^*)$, also $u \in \mathcal{W}(0,T)$. Sind u und $\bar{u}$ zwei Lösungen, so folgt ähnlich wie oben

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)-\bar{u}(t)|^2+\nu\|u(t)-\bar{u}(t)\|^2 &\leq b(u(t)-\bar{u}(t),u(t)-\bar{u}(t),\bar{u}(t)) \\ &\leq \|u(t)-\bar{u}(t)\|_{0,4}\|u(t)-\bar{u}(t)\|\|\bar{u}(t)\|_{0,4} \\ &\leq \mathrm{const}|u(t)-\bar{u}(t)|^{\frac{1}{4}}\|u(t)-\bar{u}(t)\|^{\frac{7}{4}}\|\bar{u}(t)\|_{0,4} \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|u(t)-\bar{u}(t)\|^2 + \mathrm{const}|u(t)-\bar{u}(t)|^2\|\bar{u}(t)\|_{0,4}^8\,.\end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall liefert

$$|u(t)-\bar{u}(t)| \leq -\nu \int_0^t \|u(s)-baru(s)\| \mathrm{d}s \underbrace{\exp\left(\int_0^t \|\bar{u}(s)\|_{0,4}^8 \mathrm{d}s\right)}_{<\text{const}} \leq 0\,.$$

□

21.6 Lokale Existenz und Eindeutigkeit

Wir brauchen hier nur den Fall $d=3$ zu betrachten. Wir wollen nun eine Abschätzung für $\|u(t)\|$ machen können. Die Frage ist, für welche v

$$\|v\|^2 = \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} = ((v,v)) = \langle Av, v\rangle \stackrel{?}{=} (Av,v)_{0,2}$$

gilt, d.h. wann $Av \in H$ ist.

Vorbereitungen: Es sei $A\colon V \to V^*$ beschränkt, linear, stark positiv und symmetrisch mit einem Gelfand-Dreier $V \overset{c}{\hookrightarrow} H \overset{c}{\hookrightarrow} V^*$. Mit Lax-Milgram gibt es ein $A^{-1}\colon V^* \to V$ und diese Inverse ist ebenfalls linear, beschränkt, stark positiv und symmetrisch. Wir setzen

$$A^{-1}|_H =: A_F^{-1}\colon V^* \supset\!\to \mathscr{D}(A) \subset H\,,$$

wobei $\mathscr{D}(A) = \operatorname{ran} A^{-1}|_H$. Dann ist A_F^{-1} linear und beschränkt in H, denn für $v \in H$ ist

$$|A_F^{-1}v| \leq \text{const}\|A_F^{-1}v\| = \text{const}\|A^{-1}v\| \leq \text{const}\mu^{-1}\|v\|_* \leq \text{const}\mu^{-1}|v|\,.$$

Außerdem ist A_F^{-1} symmetrisch, denn für $u, v \in H$ ist

$$(A_F^{-1}u, v) = \langle A^{-1}u, v\rangle = \langle A^{-1}v, u\rangle = (A_F^{-1}v, u)\,.$$

Damit ist A_F^{-1} selbstadjungiert. Wir zeigen, dass A_F^{-1} sogar kompakt ist. Sei dazu $(v_n) \subset H$ beschränkt, d.h. (v_n) ist auch in V^* beschräkt. Dann ist $(A^{-1}v_n)$ in V beschränkt und es ist $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. Somit gibt es eine in H konvergente Teilfolge $(A_F^{-1}v_{n'})$. Wegen $v_n \in H$ ist auch $A^{-1}v_n = A_F^{-1}v_n$.

Wir verwenden das folgende Resultat aus der Spektraltheorie:

(1). Es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_n \in \mathbb{R}$, die sich nur in 0 häufen können. Die Eigenräume $\ker(A_F^{-1} - \lambda\,\mathrm{Id})$ sind endlichdimensional. Zählt man die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit, so gibt es ein abzählbares Orthonormalsystem $(\phi_n) \subset H$ aus Eigenfunktionen von A_F^{-1} mit $A_F^{-1}\phi_n = \lambda_n\phi_n$. Es gilt

$$H = \overline{\operatorname{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}} \oplus \ker A_F^{-1}\,.$$

Da A^{-1} bijektiv ist, folgt wegen $0 \in H$

$$(A_F^{-1})^{-1}0 = \{v \in H : A_F^{-1}v = 0\} = \{v \in H : v = A0 = 0\} = \{0\}\,.$$

Damit ist

$$H = \overline{\operatorname{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}}\,,$$

d.h. $\{\phi_n\}$ bildet eine Orthonormalbasis von H. Auch ist $\phi_n = \frac{1}{\lambda_n}A_F^{-1}\phi_n \in \mathscr{D}(A)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\lambda_n|\phi_n|^2 &= \lambda_n(\phi_n,\phi_n) = (\phi_n, A_F^{-1}\phi_n) = (\phi_n, A^{-1}\phi_n)\\ &= (AA^{-1}\phi_n, A^{-1}\phi_n) \geq \mu\|A^{-1}\phi_n\|^2 \geq 0\,.\end{aligned}$$

Da $A_F^{-1}\colon H \to \mathscr{D}(A)$ bijektiv ist, können wir A_F^{-1} invertieren und erhalten die *Friedrichs-Erweiterung*

$$A_F\colon \mathscr{D}(A) \to H\,.$$

Es ist

$$\mathscr{D}(A) = \{u \in V : Au \in H\}\,.$$

Bei uns ist $\mathscr{D}(A) = V \cap H^2(\Omega)^d$. Dann ist ϕ_n eine Eigenfunktion von A_F zum Eigenwert λ_n^{-1}, denn

$$\lambda_n A_F \phi_n = A_F \lambda_n \phi_n = A_F A_F^{-1} \phi_n = \phi_n\,.$$

(2). Wir setzen $V_M := \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_m\} \subset H$ und definieren $P_m\colon H \to V_m$ als die Orthogonalprojektion auf V_m in H, also $P_m v = \sum_{i=1}(v, \phi_i)\phi_i$ für $v \in H$. Da $\{\phi_i\}$ eine Orthonormalbasis ist, folgt $P_m v \to v$ in H für $m \to \infty$. Mit $\phi_i \in \mathscr{D}(A)$ folgt $V_m \subset \mathscr{D}(A) \subset$.

(3). Die Folge (V_m) bildet ein Galerkin-Schema in V: Es ist $v = \sum_{i=1}^{\infty}(v, \phi_i)\phi_i$, also $A_F v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}(v, \phi_i)\phi_i$. Für $f\colon \{\frac{1}{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$f(A_F)v = \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)(v, \phi_i)\phi_i$$

für $v \in \mathscr{D}(f(A_F)) = \{v \in H : (f(\frac{1}{\lambda_i})(v, \phi_i))_i \in \ell^2\}$. Wir wählen $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, erhalten also

$$A_F^{\frac{1}{2}} v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}(v, \phi_i)\phi_i\,,$$

falls $(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}(v, \phi_i)) \in \ell^2$. Nun erhalten wir

$$|A_F^{\frac{1}{2}} v|^2 = (A_F^{\frac{1}{2}} v, A_F^{\frac{1}{2}} v) = (A_F v, v) = \|v\|^2\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_F^{\frac{1}{2}} P_m v &= A_F^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{m}(v, \phi_i)\phi_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}(v, \phi_i)\phi_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}(v, A_F^{\frac{1}{2}}\phi_i)\phi_i = \sum_{i=1}^{m}(A_F^{\frac{1}{2}} v, \phi_i)\phi_i = P_m A_F^{\frac{1}{2}} v\,.
\end{aligned}$$

Da $A_F^{\frac{1}{2}} v \in H$, also $P_m A_F^{\frac{1}{2}} v \to A_F^{\frac{1}{2}} v$ in H für $m \to \infty$. Damit folgt $P_m v \to v$ in V für $v \in \mathscr{D}(A) \subset V$. Somit bildet (V_m) tatsächlich ein Galerkin-Schema in V.

(4).

Lemma 21.12 (Cattabriga)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein C^2-Gebiet. Dann gibt es ein $c > 0$, so dass*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^d} \le c|Au|$$

für $u \in \mathscr{D}(A) = V \cap H^2(\Omega)^d$.

Bemerkung 21.13. Für $u \in \mathscr{D}(A)$ gilt stets

$$|Au|^2 = \int_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} |\partial_{ii} u(x)|^2 \mathrm{d}x \le \|u\|^2_{H^2(\Omega)^d}\,.$$

Damit ist $u \mapsto |Au|$ eine äquivalente Norm auf $V \cap H^2(\Omega)^d$.

Beweisidee. Für $\Omega = (0,1)^2$, $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ und A als Laplace-Operator verfahren wir folgendermaßen:
(1). Für glattes $u \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$u(x,y) = \int_0^x \partial_x u(\xi,y)\mathrm{d}\xi = \int_0^x (\partial_x u(\xi,y) - \partial_x u(\xi,0))\mathrm{d}\xi = \int_0^x \int_0^y \partial_{xy} u(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\,,$$

also

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\partial_{xy} u\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

(2). Weiterhin ist

$$\|\nabla u\|_{0,2}^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}x = -\int_\Omega (\Delta u) u \mathrm{d}x \leq \|u\|_{0,2}\|\Delta u\|_{0,2}\,.$$

(3). Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\partial_{xy} u\|_{0,2}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (\partial_{xy} u)(\partial_{xy} u)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^1 \int_0^1 (\partial_{xyy} u)(\partial_x u)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\partial_{yy} u)(\partial_{xx} u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \|\mathrm{const}\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 21.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein (beschränktes) C^2-Gebiet und es seien $u_0 \in V$, $f \in L^\infty(0,T;H)$. Dann gibt es $0 < T_0 := \min(T, T_*)$ mit*

$$T_* \leq \frac{\mathrm{const}\nu}{(1+\|u_0\|^2)^2} \min\left(\nu^2, \frac{1}{\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}^2}\right)\,,$$

$c = \frac{3}{4}\max\left(\frac{16}{27\beta_{0,3}^4}, 1\right)$, *so dass das Problem eine eindeutige (schwache) Lösung u auf $[0,T_0]$ mit $u \in L^\infty(0,T_0;V) \cap L^2(0,T_0,\mathscr{D}(A))$ besitzt.*

Bemerkung 21.15. Falls die Daten $\|u_0\|$, $\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}$ und $\mathrm{Re} = \frac{1}{\nu}$ also hinreichend klein sind, so existiert auf ganz $[0,T]$ eine eindeutige Lösung.

Beweis. Wir verwenden das oben konstruierte Galerkin-Schema (V_m) und setzen $u_0^m := P_m u_0$, also $u_0^m \to u_0$ in V. Wir betrachten wieder das diskrete Eratzproblem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_m(t), v_m) + \nu\big((u_m(t), v_m)\big) + b\big(u_m(t), u_m(t), v_m\big) = (f(t), v_m)$$

für $v_m \in V_m$. Es genügt wieder, mit $v_m = \phi_i$ zu testen. Nach Carathéodory gibt es wieder eine Lösung u_m auf einem Intervall $[0,T]$, wobei $u_m(t) \in \mathscr{D}(A)$.
(2). Wir dürfen nun mit $v_m = Au_m(t)$ testen. Dann erhalten wir

$$(u_m'(t), Au_m(t)) = ((u_m'(t), u_m(t))) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m(t)\|^2$$

und

$$\nu\big((u_m(t), Au_m(t))\big) = \nu\big(Au_m(t), Au_m(t)\big) = \nu|Au_m(t)|^2\,.$$

Für $d = 3$ ist $W^{1,2} \hookrightarrow L^q$, falls $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Damit ist

$$\begin{aligned}\big|b(u_m(t), u_m(t), Au_m(t))\big| &\leq \|u_m(t)\|_{0,6} \|\nabla u_m(t)\|_{0,3} |Au_m(t)| \\ &\leq \|u_m(t)\| \|\nabla u_m(t)\|_{0,3} |Au_m(t)|\,.\end{aligned}$$

Hölder liefert

$$\|w\|_{0,3}^3 = \int |w(t)|^{\frac{3}{2}} |w(t)|^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}t \leq \left(\int |w(t)|^6 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int |w(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{3}{4}} ,$$

also

$$\begin{aligned}\big|b(u_m(t), u_m(t), Au_m(t))\big| &\leq \|u_m(t)\| \underbrace{\|\nabla u_m(t)\|_{0,6}^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|u_m(t)\|_{2,2}^{\frac{1}{2}} \leq c|Au_m(t)|^{\frac{1}{2}}} \|u_m(t)\|^{\frac{1}{2}} |Au_m(t)| \\ &\leq c\|u_m(t)\|^{\frac{3}{2}} |Au_m(t)|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{c}{\nu^3} \|u_m(t)\|^6 + \frac{\nu}{4} |Au_m(t)|^2\,.\end{aligned}$$

Letztlich ist

$$(f(t), Au_m(t)) \leq |f(t)||Au_m(t)| \leq \frac{2}{\nu} |f(t)|^2 + \frac{\nu}{4} |Au_m(t)|^2\,.$$

Wir erhalten für die A-priori-Abschätzung

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u_m(t)\|^2 + \nu |Au_m(t)|^2 \leq \frac{c}{\nu^3} \|u_m(t)\|^6 + \frac{c}{\nu} |f(t)|^2 \leq \frac{c}{\nu} (1 + \|u_m(t)\|^6) \max\left\{\frac{1}{\nu^2}, |f(t)|^2\right\}\,.$$

Wir setzen $y(t) := 1 + \|u_m(t)\|^2$. Mit $\lambda(t) := \frac{c}{\nu} \max\left\{\frac{1}{\nu^2}, |f(t)|^2\right\}$ folgt

$$y'(t) \leq \lambda(t)(1 + \|u(t)\|^6) \leq \lambda(t) y^3(t)\,,$$

also

$$\frac{y'(t)}{y^3(t)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2(t)}\right)' \leq \lambda(t)\,.$$

Wir erhalten

$$\left(\frac{1}{y^2(t)}\right)' \geq -2\lambda(t)$$

und nach Integration

$$\frac{1}{y^2(t)} - \frac{1}{y^2(0)} \geq -2 \int_0^t \lambda(s) \mathrm{d}s\,,$$

was

$$\frac{1}{y^2(t)} \geq \frac{1 - 2y^2(0) \int_0^t \lambda(s) \mathrm{d}s}{y^2(0)}$$

bedeutet. Wir wählen $t > 0$ so klein, dass $2y^2(0) \int_0^t \lambda(s) \mathrm{d}s < 1$. Dann erhalten wir

$$y^2(t) = (1 + \|u_m(t)\|^2)^2 \leq \frac{y^2(0)}{1 - 2y^2(0) \int_0^t \lambda(s) \mathrm{d}s}\,.$$

Es ist $y(0) = 1 + \|u_m(0)\|^2 = 1 + \|u_0^m\|^2 \leq 1 + \|u_0\|^2$ und

$$\int_0^t \lambda(s) \mathrm{d}s \leq \frac{c}{\nu} \max\left\{\frac{t}{\nu^2}, \int_0^t |f(s)|^2 \mathrm{d}s\right) \leq \frac{ct}{\nu} \max\left\{\frac{1}{\nu^2}, \|f\|_{L^\infty(0,T;H)}\right\}\,.$$

Wir fordern also

$$2(1+\|u_0\|^2)^2\frac{c}{\nu}t\max\left\{\frac{1}{\nu^2},\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}\right\} overset! < 1\,,$$

d.h.

$$t<\frac{\nu}{2c(1+\|u_0\|^2)^2}\min\left\{\nu^2,\frac{1}{\|f\|^2_{L^\infty(0,T;H)}}\right\}.$$

Für jedes T_0, welches kleiner als dieser Ausdruck ist folgt also

$$\|u_m(t)\|\le \mathrm{const}$$

und damit auch

$$\int_0^t |Au_m(t)|^2\mathrm{d}s\le \mathrm{const}$$

für $t\le T_0$. Damit folgt $u\in L^\infty(0,T_0;V)\cap L^2(0,T_0;\mathscr{D}(A))$. Insbesondere ist dann $u\in L^2(0,T_0;V)$ und $u'\in L^2(0,T_0;H)$, womit wie üblich die Einzigkeit folgt. □

Bemerkung 21.16. Ist $d=2$, so erhalten wir auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned}\big|b(u_m(t),u_m(t),Au_m(t))\big| &\le \|u_m(t)\|_{0,4}\|\nabla u_m(t)\|_{0,4}|Au_m(t)|\\ &\le |u_m(t)|^{\frac12}\|u_m\|^{\frac12}\|u_m(t)\|^{\frac12}\|u_m(t)\|^{\frac12}_{2,2}|Au_m(t)|\\ &\le c|u_m(t)|^{\frac12}\|u_m(t)\||Au_m(t)|^{\frac32}\\ &\le \frac{2}{\nu^3}|u_m(t)|^2\|u_m(t)\|^4+\frac{\nu}{4}|Au_m(t)|^2\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m(t)\|^2\le\frac{1}{n}u\|f\|^2_{L^\infty(0,T;H)}+\frac{c}{\nu^3}\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;H)}\|u_m(t)\|^4\,.$$

Mit $y(t)=1+\|u_m(t)\|^2$ folgt

$$y'(t)\le y^2(t)\lambda(t)$$

mit $\lambda(t)=\frac{1}{\nu}\max\left\{\|f\|^2_{L^\infty(0,T;H)},\frac{c}{\nu^2}\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;H)}\right\}=\mathrm{const}$. Wie bei dem Lemma von Gronwall erhält man

$$y(t)\le \mathrm{e}^{\Lambda(t)}(1+\|u_0\|^2)\le\exp\left(\lambda\cdot(T+\|u_m\|^2_{L^2(0,T;V)})\right)(1+\|u_0\|^2)$$

mit $\Lambda(t)\le\lambda\cdot\left(1+\int_0^t\|u_m(s)\|^2\mathrm{d}s\right)$. Somit ist hier $\|u_m(t)\|\le\mathrm{const}$ für alle $t\le T$. Hieraus folgt $uiL^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;\mathscr{D}(A))$.

21.7 Wiedereinführung des Drucks

Das ursprüngliche Problem lautete

$$\begin{cases}u'-\nu\Delta u+(u\circ\nabla)u+\nabla\pi=f\\ \operatorname{div}u=0\end{cases}.$$

In der variationellen Form verschwindet der Druck π. Wir setzen

$$\nabla\pi=f-u'+\nu\Delta u-(u\cdot\nabla)u=:g\,.$$

Wenn wir nun mit $v \in \mathcal{V} \subset V$ testen, erhalten wir

$$0 = \langle \nabla\pi, v\rangle = \langle g, v\rangle \,.$$

Wir verwenden den folgenden Satz von deRham: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $g = (g_1, \dots, g_\alpha)$, $g_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\langle g, v\rangle = 0$ für alle $v \in \mathcal{V}$. Dann gibt es ein $\pi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $g = \nabla\pi$.

In einer etwas schwächeren Version lautet der Satz folgendermaßen: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet, $g \in H^{-1}(\Omega)^d$ mit $\langle g, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Dann gibt es ein $\pi \in L^2(\Omega)$ mit $g = \nabla\pi$.

Ist nun $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^d)$ (beachte: $H^{-1}(\Omega)^d \subsetneq V^*$), so gibt es $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ mit

$$(u'(t), v) + \nu((u(t), v)) + b\big(u(t), u(t), v\big) = \langle f(t), v\rangle$$

für $v \in V$. Hieraus folgt

$$u'(t) - \nu\Delta u(t) + (u(t)\cdot\nabla)u(t) \in H^{-1}(\Omega)^d$$

fast überall, also $g(t) \in H^{-1}(\Omega)^d$ fast überall. Der Satz von deRham liefert die Existenz einer Distribution $\pi(t) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\nabla\pi(t) = g(t) \in H^{-1}(\Omega)^d$. Damit ist $\pi(t) \in L^2(\Omega)$.

Satz 21.17 (Simon)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Lipschitz-Gebiet, $u_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^d)$. Dann gibt es mindestens ein Paar*

$$(u,\pi) \in \Big(L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap C_w([0,T];H)\Big) \times W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \,,$$

so dass

$$u' - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = f$$

gilt und $u(t) \rightharpoonup u_0$ für $t \to 0$ in H.

Bemerkung 21.18. Es ist im allgemeinen nicht möglich, den Druck für $f \in L^2(0,T;V^*)$ zu rekonstruieren.

21.8 Regularität

Wir vergleichen mit den Kompatibilitätsbedingungen.

Satz 21.19 (Temam, Heywood)**.** *Es seien $E_m := H^m(\Omega)^d \cap H$ und*

$$W_m := \left\{v \in C\big([0,T];E_m\big) : \exists v^{(j)} \in C\big([0,T];E_{m-2j}\big) \text{ für } j = 0,\dots,\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right\}.$$

Es sei Ω ein C^{m+2}-Gebiet, $u_0 \in E_m \cap V$, $f^{(j)} \in C\Big([0,T];H^{m-2j-2}(\Omega)^d \cap H\Big)$ für $j = 0,\dots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - 1$ und

$$f^{(\lfloor\frac{m}{2}\rfloor)} \in \begin{cases} L^2(0,T;V^*) & \text{falls } m \text{ gerade} \\ L^2(0,T;H) & \text{falls } m \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Dann gilt $u \in W_m$, falls $u^{(j)}(0) \in V$ für $j = 0\dots,\lfloor m2\rfloor - 1$ und

$$u^{(\lfloor\frac{m}{2}\rfloor)}(0) \in \begin{cases} H & \text{falls } m \text{ gerade} \\ V & \text{sonst}. \end{cases}$$

Bemerkung 21.20. Für $m = 3$ lauten die letzten Bedingungen folgendermaßen: $u_0 \in V$ und $u'(0) = f(0) + \nu\Delta u(0) - (u_0 \cdot \nabla)u_0 \in V$. Insbesondere $\operatorname{div} u_0 = 0$ und $\operatorname{div} u'(0) = 0$. Es ist

$$\nabla\pi = f - u' + \nu\Delta u - (u \cdot \nabla)u\,.$$

Wir erhalten

$$\Delta\pi = \nabla \cdot f - \nabla \cdot u' + \nabla \cdot \Delta u - \nabla \cdot (u \cdot \nabla)u\,.$$

Dies ergibt

$$\Delta\pi(0) = \nabla \cdot \big(f(0) + \nu\Delta u_0 - (u_0 \cdot \nabla)u_0\big)$$

und

$$\nabla\pi(0) = f(0) - u'(0) + \nu\Delta u_0 - (u_0 \cdot \nabla)u_0\,.$$

Auf $\partial\Omega$ ist $u'(0) = 0$ und $u_0 = 0$, also

$$\nabla\pi(0) = f(0) + \nu\Delta u_0$$

auf $\partial\Omega$. Wir haben nun drei Neumann-Randbedingungen; das entsprechende Problem ist im allgemeinen nicht lösbar.

22 Lineare Evolutionsgleichungen zweiter Ordnung

22.1 Standardvoraussetzungen

Wir betrachten das Problem
$$\begin{cases} u'' + \mathcal{A}u = f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \,. \end{cases}$$
Wir fordern:

- Es sei $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ ein Gelfand-Dreier, wobei V separabel sei.
- Die Abbildung $a\colon [0,T] \times V \times V \to \mathbb{R}$ sei so, dass $a(t;\cdot,\cdot)$ bilinear und symmetrisch ist.
- Es sei a gleichmäßig beschränkt, d.h. es gebe $\beta \geq 0$ mit
$$a(t;u,v) \leq \beta\|u\|\|v\|$$
für alle $t \in [0,T]$ und $u, v \in V$ gilt.
- Die Abbildung a erfülle eine Gårdingsche Ungleichung, d.h. es gebe ein $\mu \geq 0$ und ein $\kappa \geq 0$ mit
$$a(t;u,u) \geq \mu\|u\|^2 - \kappa|u|^2$$
für alle $t \in [0,T]$ und $u \in V$.
- Für alle $u, v \in V$ sei $t \mapsto a(t;u,v)$ in $C^1(0,T)$. Die Ableitung bezeichnen wir mit $a'(t;u,v)$. Es gebe nun $\beta' \geq 0$ mit
$$|a'(t;u,v)| \leq \beta'\|u\|\|v\|$$
für alle $t \in [0,T]$ und $u, v \in V$.

Der Nemyzki-Operator ist als
$$\mathcal{A}\colon L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V^*)\,,\ (\mathcal{A}u)(t) := Au(t) = a(t,u(t),\cdot)$$
gegeben.

22.2 Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Daten

Satz 22.1. *Unter den Standardvoraussetzungen (siehe oben) gibt es zu jedem $u_0 \in V$, $v_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;H)$ genau eine Lösung $u \in C([0,T];V)$ mit $u' \in C([0,T];H)$ und $u'' \in L^2(0,T;V^*)$. Diese hängt stetig von den Daten u_0, v_0 und f ab.*

Beweis. (1). Wir zeigen zunächst: Es gibt genau eine Lösung $u \in L^\infty(0,T;V)$ mit $u' \in L^\infty(0,T;H)$ und $u'' \in L^2(0,T;V^*)$. Es sei $\{\phi_n\} \subset V$ ein Galerkin-Schema und es sei $V_m = \operatorname{span}\{\phi_1,\ldots,\phi_m\}$ für $m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das diskrete Ersatzproblem: Wir suchen $u_m(t) \in V_m$, so dass für alle $v_m \in V_m$
$$(u_m''(t), v_m) + a(t;u_m(t),v_m) = (f(t),v_m)\,.$$

Es seien weiter $u_0^m \in V_m$ und $v_0^m \in V_m$, so dass $u_0^m \to u_0$ in V und $v_0^m \to v_0 \in H$. Es ergibt sich dann ein System der Form

$$\begin{cases} \mathcal{U}_m''(t) - \mathcal{M}_m^{-1}\mathcal{A}_m(t)\mathcal{U}_m(t) = \mathcal{M}_m^{-1} f_m(t) \\ \mathcal{U}_m(0) = \mathcal{U}_0^m \\ \mathcal{U}_m'(0) = \mathcal{V}_0^m \,. \end{cases}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_m &= \big((\phi_i, \phi_j)\big)_{i,j}\,, \\ \mathcal{A}_m(t) &= \big(a(t;\phi_i,\phi_j)\big)_{i,j}\,, \\ f_m(t) &= \big((f(t),\phi_j)\big)_j \text{ und} \\ \mathcal{U}_m(t) &= \big(u_j^m(t)\big)_j\,, \end{aligned}$$

wobei $u_m(t) = \sum_{i=1}^m u_j^m(t)\phi_j$. Dieses diskrete Ersatzproblem ist eindeutig lösbar. Da $u_m(t), u_m'(t), u_m''(t) \in V_m \subset V \subset H \subset V^*$, dürfen wir im diskreten Ersatzproblem mit $v_m = u_m'(t)$ testen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\big(t;u_m(t),u_m(t)\big) &= (u_m''(t), u_m'(t)) + a\big(t;u_m(t),u_m'(t)\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}a'\big(t;u_m(t),u_m(t)\big) \\ &\le (f(t),u_m'(t)) + \frac{1}{2}\beta'\|u_m(t)\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}|f(t)|^2 + \frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\beta'\|u_m(t)\|^2\,. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} |u_m'(t)|^2 + a\big(t;u_m(t),u_m(t)\big) \le |v_0^m|^2 + a(0,u_0^m,u_0^m) + \int_0^t |f(s)|^2\mathrm{d}s + \int_0^t |u_m'(s)|^2\mathrm{d}s \\ + \int_0^t \|u_m(s)\|^2\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |u_m'(t)| + \mu\|u_m(t)\|^2 \le |v_0^m|^2 + \beta\|u_0^m\|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)} + \int_0^t |u_m'(s)|^2\mathrm{d}s \\ + \int_0^t \|u_m(s)\|^2\mathrm{d}s + \kappa|u_m(t)|^2\,. \end{aligned}$$

Da $v_0^m \to v_0$ in H und $u_0^m \to u_0$ in V, sind $|v_0^m|$ und $\|u_0^m\|$ beschränkt. Nun ist

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^2 = \left|u_0^m + \int_0^t u_m'(s)\mathrm{d}s\right|^2 &\le 2|u_0^m|^2 + 2t\int_0^t |u_m'(s)|^2\mathrm{d}s \\ &\le 2|u_0^m|^2 + 2T\int_0^t |u_m'(s)|^2\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \le \text{const}\left(1 + \int_0^t \Big(|u_m'(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2\Big)\,\mathrm{d}s\right)\,.$$

Somit ist (u_m) beschränkt in $L^\infty(0,T;V)$ und (u'_m) beschränkt in $L^\infty(0,T;H)$. Auch A ist beschränkt und es ist $u''_m = f - \mathcal{A}u_m$, womit (u''_m) beschränkt in $L^2(0,T;V^*)$. Es gibt also $u \in L^\infty(0,T;V)$ und $v \in L^\infty(0,T;H)$ mit $u_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(0,T;V)$ und $u'_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} v$ in $L^\infty(0,T;H)$. Es folgt dann $v = u'$ in $L^\infty(0,T;H)$, denn für beliebige $w \in H$, $\phi \in C_0^\infty(0,T)$, d.h. $t \mapsto \phi w \in L^1(0,T;H)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^T (v(t),w)\phi(t)\mathrm{d}t \leftarrow \int_0^T (u'_{m'}(t),w)\phi(t)\mathrm{d}t \\ = -\int_0^T (u_{m'}(t),w)\phi'(t)\mathrm{d}t \to -\int_0^T (u(t),w)\phi'(t)\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Dies zeigt $v = u'$ in $L^\infty(0,T;H)$.

(2). Wir zeigen, dass u die Differentialgleichung löst: Für $k \le m'$ ist $V_k \subset V_{m'}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v_k)\phi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T a(t;u_{m'},v_k)\phi(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T \langle u''_{m'}(t),v_k\rangle\phi(t)\mathrm{d}t \\ &= (u'_{m'}(T),v_k)\phi(T) - (u_{m'}(0),v_k)\phi(0) \\ &\quad - \int_0^T (u'_{m'}(t),v_k)\phi'(t)\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Für $\phi(T) = 0$ können wir zum Grenzwert übergehen und erhalten

$$\int_0^T (f(t),v_k)\phi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T a(t;u(t),v_k)\phi(t)\mathrm{d}t = -(v_0,v_k)\phi(0) - \int_0^T (u'(t),v_k)\phi'(t)\mathrm{d}t \tag{22.1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $v_k \in V_k$, also auch für alle $v_k = v \in V$. Wählen wir nun $\phi \in C_0^\infty(0,T)$, so erhalten wir, dass u die Differentialgleichung löst.

Da $u'_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ in $L^\infty(0,T;H)$, ist auch $u'_{m'} \rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;H)$. Aus $u_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(0,T;H)$ folgt analog $u_{m'} \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H)$. Also gilt $u_{m'} \to u$ in $H^1(0,T;H) \hookrightarrow C([0,T];H)$. Nun ist $u^0_{m'} = u_{m'}(0) \rightharpoonup u(0)$ in H und wegen $u_{m'}(0) = u^0_{m'} \to u_0$ in V folgt $u(0) = u_0$. Da $u'' = f - \mathcal{A}u \in L^1(0,T;V^*)$, ergibt sich $u' \in \mathrm{AC}([0,T];V^*)$. Wegen (22.1) und

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v)\phi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T a(t;u(t),v)\phi(t)\mathrm{d}t \\ = \int_0^T \langle u''(t),v\rangle\phi(t)\mathrm{d}t \\ = -(u'(0),v)\phi(0) - \int_0^T (u'(t),v)\phi'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

für $v \in V$ und $\phi(T) = 0$ folgt $(v_0,v)\phi(0) = (u'(0),v)\phi(0)$ für alle $v \in V$. Mit $\phi(0) \neq 0$ folgt

$u'(0) = v_0$.

$$\begin{tikzcd}
u \in L^\infty(0,T;V) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
& u \in \mathrm{AC}([0,T];H) \arrow[r] & u \in C_w([0,T];V) \\
u' \in L^\infty(0,T;H) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
& u' \in \mathrm{AC}([0,T];V^*) \arrow[r] & u' \in C_w([0,T];H) \\
u'' \in L^2(0,T;V^*) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

(3). Eindeutigkeit: Es seien u und $\bar{u}$ Lösungen Wir betrachten für $w = u - \bar{u}$

$$\begin{cases} w'' + \mathcal{A}w = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Da $w'' + \mathcal{A}w = 0$, dürfen wir $\langle w'' + \mathcal{A}w, w\rangle$ betrachten. Für $s > 0$ setzen wir

$$v(t) := v_s(t) := \begin{cases} \int_t^s w(r)\mathrm{d}r & t \leq s \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Da $w \in L^2(0,T;V)$, ist $v \in \mathrm{AC}([0,T];V)$. Zum einen ist

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle w''(t), v(t)\rangle \mathrm{d}t &= \int_0^s \left\langle w''(t), \int_t^s w(r)\mathrm{d}r \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^s \int_t^s \langle w''(t), w(r)\rangle \mathrm{d}r\mathrm{d}t \\
&= \int_0^s \int_0^r \langle w''(t), w(r)\rangle \mathrm{d}t\mathrm{d}r = \int_0^s \langle w'(r), w(r)\rangle \mathrm{d}r = \frac{1}{2}|w(s)|^2\,.
\end{aligned}$$

Andererseits ist wegen $v' = -w$ auf $(0,s)$

$$\begin{aligned}
\int_0^T a(t; w(t), v(t))\mathrm{d}t &= -\int_0^s a\left(t; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t), v(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t; v(t), v(t))\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^s a'(t; v(t), v(t))\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{1}{2}a(0, v(0), v(0)) - \beta'\frac{1}{2}\int_0^s \|v(t)\|^2\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{1}{2}\mu\left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 - \kappa\frac{1}{2}\left|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right|^2 - \beta'\frac{1}{2}\int_0^s \underbrace{\left\|\int_t^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2}_{\substack{=\left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r - \int_0^t w(r)\mathrm{d}r\right\| \\ \leq 2\left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 + 2\left\|\int_0^t w(r)\mathrm{d}r\right\|^2}}\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}\mu\left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 &\leq \int_0^T \Big(\langle w''(t), v(t)\rangle + a(t, w(t), v(t))\Big)\mathrm{d}t + \frac{\kappa}{2}\left|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right|^2 \\ &\quad + \beta' \int_0^s \left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 \mathrm{d}t + \beta' \int_0^s \left\|\int_0^t w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{\kappa}{2}\left|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right|^2 + \beta' s \left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 \\ &\quad + \beta' \int_0^s \left\|\int_0^t w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 \mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\left|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right|^2 \leq s\int_0^s |w(r)|^2 \mathrm{d}r\,.$$

Damit erhalten wir

$$|w(s)|^2 + (\mu - 2\beta' s)\left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 \leq \kappa s \int_0^s |w(r)|^2\mathrm{d}r + 2\beta' \int_0^s \left\|\int_0^t w(r)\mathrm{d}r\right\| \mathrm{d}t\,.$$

Sei $s_0 := \frac{\mu}{2\beta'}$. Dann ist $(\mu - 2\beta' s) = 0$ für $s < s_0$. In diesem Fall haben wir

$$\begin{aligned}|w(s)|^2 + (\mu - 2\beta' s)\left\|\int_0^s w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 &\leq \max\{\kappa s_0, 2\beta'\}\left(\int_0^s |w(r)|^2\mathrm{d}r\right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \left\|\int_0^t w(r)\mathrm{d}r\right\|^2 \mathrm{d}t\right)\,.\end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall liefert für $s < s_0$, dass $|w(s)|^2 \leq 0$, also $u = \bar{u}$ auf $(0, s_0)$. Da s_0 nicht von s_0 abhängt, sondern eine konstante Größe ist, kann man jetzt schrittweise ganz $[0,T]$ „abklappern" (durchlaufen). Es bleibt $u \in C([0,T]; V)$ und $u' \in C([0,T]; H)$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|}u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t, u(t), u(t)) = (f(t), u'(t)) + \frac{1}{2}a(t; u(t), u(t))\,.$$

(4). Wir benutzen nun das zentrierte Steklov-Mittel:

$$(S_h u)(t) := \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \bar{u}(s)\mathrm{d}s$$

mit

$$\bar{u}(t) := \begin{cases} u(t) & t \in [0,T] \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\,.$$

Dieses besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$(S_h u)'(t) = \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h} \in V$$

für $t \in [h, T-h]$. Außerdem ist

$$\|S_h u\|_{L^2(0,T;V)} \leq \|u\|_{L^2(0,T;H)}$$

und schließlich ist
$$S_h u \to u$$
in $L^2(0,T;H)$.
Wir testen mit $S_h u' = (S_h u)' = S_h(u')$ und betrachten
$$\Big((S_h u')'(t), (S_h u')(t)\Big) + a\Big(t; K(S_h u')(t), (S_h u')(t)\Big)$$
mit
$$(Kv)(t) := u_0 + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s\,,$$
d.h. $(Kv)' = v$. Es folgt
$$((S_h u')'(t), (S_h u')(t)) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|(S_h u')(t)|^2$$
und weiter
$$\begin{aligned} a\Big(t; K(S_h u')(t), (S_h u')(t)\Big) &= a\Big(t; K(S_h u')(t), (K(S_h u'))'(t)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a\Big(t; K(S_h u')(t), K(S_h u')(t)\Big) \\ &\quad - \frac{1}{2} a'\Big(t; K(S_h u')(t), K(S_h u')(t)\Big)\,. \end{aligned}$$
Insgesamt ist
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|(S_h u')(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a\Big(t; K(S_h u')(t), K(S_h u')(t)\Big) \\ &\qquad = \Big((S_h u')'(t), (S_h u')(t)\Big) + a\Big(t; K(S_h u')(t), (S_h u')(t)\Big) \\ &\qquad\quad + \frac{1}{2} a'\Big(t; K(S_h u')(t), K(S_h u')(t)\Big)\,. \end{aligned} \tag{22.2}$$
Es gilt
$$K(S_h u')(t) = S_h(Ku')(t) + (S_h K u')(0)$$
und ebenso
$$(Ku')(t) = u(t)\,.$$
Wir können (22.2) also mit
$$\underbrace{\Big((S_h u')'(t), (S_h u')(t)\Big) + a\Big(t; (S_h u)(t), (S_h u')(t)\Big)}_{=\left\langle (S_h u')'(t) + A(S_h u)(t), (S_h u')(t)\right\rangle} + \frac{1}{2} a'\Big(t; (S_h u)(t), (S_h u)(t)\Big) + \ldots\,.$$
Im Grenzwert $h \searrow 0$ erhalten wir
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a(t; u(t), u(t)) &= \langle u''(t) + Au(t), u'(t)\rangle + \frac{1}{2} a'(t; u(t), u(t)) \\ &= (f(t), u'(t)) + \frac{1}{2} a'(t; u(t), u(t))\,. \end{aligned}$$
Weiter ist $(t \mapsto (f(t), u'(t))) \in L^1(0,T)$ und ebenso $(t \mapsto a'(t; u(t), u(t))) \in L^1(0,T)$, denn $a'(t; u(t), u(t)) \le \beta' \|u(t)\|^2$ und $u \in L^2(0,T;V)$. Somit folgt
$$t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(|u'(t)|^2 + a(t; u(t), u(t))\Big) \in L^1(0,T)\,.$$

Also ist

$$t \mapsto |u'(t)|^2 + a(t; u(t), u(t)) \in W^{1,1}(0,T) \subset \mathrm{AC}([0,T])\,.$$

Sei $t \in [0,T]$ beliebig und $t_n \to t$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &\le |u'(t_n) - u'(t)|^2 + \mu \|u(t_n) - u(t)\|^2 \\
&\le |u'(t_n) - u'(t)|^2 + a\big(t; u(t_n) - u(t), u(t_n) - u(t)\big) + \kappa |u(t_n) - u(t)|^2 \\
&= |u'(t_n)|^2 - 2\big(u'(t_n), u'(t)\big) + |u(t)|^2 + a\big(t; u(t_n), u(t_n)\big) \\
&\qquad - 2a\big(t; u(t_n), u(t)\big) + a\big(t; u(t), u(t)\big) + \kappa |u(t_n) - u(t)|^2\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist nach gerade Gezeigtem

$$|u'(t_n)|^2 + a\big(t; u(t_n), u(t_n)\big) \to |u(t)|^2 + a\big(t; u(t), u(t)\big)$$

und

$$\big(u'(t_n), u'(t)\big) \to \big(u'(t), u'(t)\big)\,,$$

denn $u' \in C_w([0,T]; H)$. Auch gilt

$$a\big(t; u(t_n), u(t)\big) \to a\big(t; u(t), u(t)\big)\,,$$

da $u \in C_w([0,T]; V)$ und a schwach-schwach-stetig ist. Letztlich gilt $|u(t_n) - u(t)|^2 \to 0$, da $u' \in L^1(0,T; H)$, also $u \in \mathrm{AC}([0,T]; H)$. Dies zeigt

$$|u'(t_n) - u'(t)|^2 + \mu \|u(t_n) - u(t)\|^2 \to 0\,,$$

also $u \in C([0,T]; V)$ und $u' \in C([0,T]; H)$. $\square$

23 Halbgruppen

23.1 Grundlagen

Es sei X ein Banach-Raum, $A \in C(I; L(X))$, $f \in C(I; X)$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und es seien $t_0 \in I$ und $u_0 \in X$. Wir betrachten

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = f(t) & t \in I \\ u(t_0) = u_0 \,. \end{cases}$$

Dieses Problem ist eindeutig lösbar, wobei für die Lösung nach Duhamel

$$u(t) = U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, s)f(s)\mathrm{d}s$$

gilt. Dabei ist $U\colon I \times I \to L(X)$ der Propagator. Ist $A(t) \equiv A \in L(X)$ zeitlich konstant, so ist $U(t, s) = S(t - s)$ mit

$$S(r) = \mathrm{e}^{-rA} \,.$$

Dann gilt

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)f(s)\mathrm{d}s \,.$$

Wir sammeln nun die folgenden Eigenschaften von $S\colon \mathbb{R} \to L(X)$:

(1) Es ist $S(0) = \mathrm{Id}$.

(2) Es gilt $S(t + s) = S(t)S(s) = S(s)S(t)$.

(3) Der Operator $S(t)$ ist mit $S(t)^{-1} = S(-t)$ invertierbar.

Damit bildet $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset L(X)$ eine Gruppe.

(4) Es gilt weiterhin
$$\|S(t) - S(0)\|_{L(X)} = \|S(t) - \mathrm{Id}\|_{L(X)} \to 0$$
für $t \to 0$.

Also bildet $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine gleichmäßig stetige Gruppe. Mit (2) folgt die Stetigkeit auch in von Null verschiedenen Punkten. Betrachten wir nun Evolutionsgleichungen wie

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x)\,, & t > 0\,,\ x \in \Omega \\ u(t, x) = 0 & t > 0\,,\ x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega\,. \end{cases}$$

Nun ist $\Delta\colon X \to X$ kein beschränkter Operator. Wir können jedoch den unbeschränkten Operator $A\colon X \supset \mathscr{D}(A) \to X$ definieren. Z.B. kann $Au = -\Delta u$ mit $X = L^2(\Omega)$ für $u \in \mathscr{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dann ist $\mathscr{D}(A) \subset X$ dicht in X. Die Abstrakte Formulieren für $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ lautet

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \,. \end{cases}$$

Die Idee ist, $S(t) := \mathrm{e}^{-tA}$ zu definieren. Wir können jedoch nicht $\mathrm{e}^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k A^k}{k!}$ schreiben.

Definition 23.1. Eine Familie $S = (S(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ heißt *Halbgruppe*, falls

a) für $t = 0$ die Gleichung $S(0) = \mathrm{Id}$ gilt und

b) für alle $s, t \geq 0$ die Beziehung $S(t+s) = S(t)S(s)$ gilt („Halbgruppeneigenschaft").

Die Halbgruppe S heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\|S(t) - \mathrm{Id}\|_{L(X)} \to 0$$

für $t \searrow 0$.

Die Halbgruppe S heißt *stark stetige* bzw. *C_0-Halbgruppe*, falls

$$\|S(t)x - x\| \to 0$$

für alle $x \in X$ und $t \searrow 0$.

Bemerkung 23.2. Es lässt sich zeigen, dass jede gleichmäßig stetige Halbgruppe von der Form $S(t) = \mathrm{e}^{-tA}$ für ein $A \in L(X)$.

Die Halbgruppeneigenschaft liefert die Stetigkeit von $t \mapsto S(t)x$ auch in $t \neq 0$.

Beispiel 23.3. Natürlich bildet $S(t) = \mathrm{e}^{-tA}$, $A \in L(X)$, ein Beispiel.

Betrachten wir $X = C(\mathbb{R})$ und defineren $S(t) \colon X \to X$, $t > 0$, durch

$$(S(t)f)(x) := f(x - t)$$

für $f \in X$, so bildet $(S(t))$ die stark stetige *Translationshalbgruppe*.

Lemma 23.4. *Sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X. Dann gibt es ein $M \geq 1$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis. (1). Wir zeigen zunächst, dass ein $\delta > 0$ und ein $M \geq 1$ existieren, so dass für alle $t \in [0, \delta]$

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq M$$

gilt. Angenommen, solche Konstanten gäbe es nicht. Dann gibt es eine Nullfolge (t_n) mit $\|S(t_n)\|_{L(X)} \to \infty$. Andererseits folgt aus der Halgruppeneigenschaft für alle $x \in X$

$$\|S(t_n)x - x\|_X \to 0\,,$$

womit insbesondere $(S(t_n)x)_n$ beschränkt ist. Nach dem Satz ??? von Banach-Steinhaus ist damit auch $\|S(t_n)\|$ beschränkt ist, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

(2). Wir setzen $\omega := \frac{\ln M}{\delta}$. Ein beliebiges $t \geq 0$ schreiben wir als $t = n\delta + \sigma$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \sigma < \delta$. Damit ist

$$\|S(t)\|_{L(X)} = \|S(n\delta + \sigma)\|_{L(X)} \leq M^{n+1} \leq M \cdot M^{\frac{t}{\delta}} = M\mathrm{e}^{\frac{t \ln M}{\delta}} = M\mathrm{e}^{\omega t}\,.$$

□

Es sei eine Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ gegeben. Wir wollen in einem gewissen Sinne $S(t) = \mathrm{e}^{tA}$ schreiben. Formal bzw. für $A \in L(X)$ können wir

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)\big|_{t=0} = \lim_{h \searrow 0} \frac{S(h) - \mathrm{Id}}{h}$$

schreiben.

Definition 23.5. Es sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe. Wir definieren $\mathscr{D}(A)$ als den Raum aller $x \in X$, für welche $\lim_{h\searrow 0} \frac{S(h)x-x}{h}$ existiert. Für $x \in \mathscr{D}(A)$ setzen wir

$$Ax := \lim_{h\searrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}\,.$$

Der so definierte Operator A heißt *(infinitesimale) Erzeuger bzw. Generator der Halbgruppe* $(S(t))$.

Bemerkung 23.6. Ist $A \in L(X)$ und $S(t) = \mathrm{e}^{tA}$, so ist A der Erzeuger von $(S(t))_{t\geq 0}$ und $\mathscr{D}(A) = X$.

Wir wissen noch nicht, ob $\mathscr{D}(A)$ nicht nur $\{0\}$ ist.

Lemma 23.7. *Es sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für beliebige $x \in X$ und $t \geq 0$ ist*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x\mathrm{d}s = S(t)x\,.$$

(ii) *Für beliebige $x \in X$ und $t \geq 0$ ist*

$$\int_0^t S(s)x\mathrm{d}s \in \mathscr{D}(A) \qquad \text{und} \qquad A\left(\int_0^t S(s)x\mathrm{d}s\right) = S(t)x - x\,.$$

(iii) *Für $x \in \mathscr{D}(A)$ ist $S(t)x \in \mathscr{D}(A)$ und $t \mapsto S(t)x$ ist differenzierbar mit*

$$S'(t)x = AS(t)x = S(t)Ax\,.$$

(iv) *Für $x \in \mathscr{D}(A)$ ist*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(r)Ax\mathrm{d}r = \int_s^t AS(r)x\mathrm{d}r\,.$$

Beweis. (i). Dies ist aufgrund der Stetigkeit des Integranden bereits in DGL I gezeigt worden.

(ii). Wir beobachten

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)-\mathrm{Id}}{h}\left(\int_0^t S(s)x\mathrm{d}s\right) &= \frac{1}{h}\int_0^t (S(s+h)x - S(s)x)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} S(\tilde{s})x\mathrm{d}\tilde{s} - \int_0^t S(s)x\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h S(s)x\mathrm{d}s \to S(t)x - S(0)x \\
&= S(t)x - x\,.
\end{aligned}$$

(iii). Es ist

$$\frac{S(h)-\mathrm{Id}}{h}(S(t)x) = \frac{1}{h}(S(t+h)x - S(t)x) = S(t)\frac{S(h)x-x}{h} \to S(t)Ax\,.$$

(iv). Dies ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. $\square$

Satz 23.8. *Es sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A. Dann ist $\mathscr{D}(A)$ dicht in X und A ist abgeschlossen.*

Dabei heißt ein Operator $A\colon X \supset \mathscr{D}(A) \to Y$ *abgeschlossen*, falls für $(x_n) \subset \mathscr{D}(A)$ mit $x_n \to x \in X$ und $Ax_n \to y \in Y$ folgt, dass $x \in \mathscr{D}(A)$ und $Ax = y$. Sind zwei der drei Eigenschaften Abgeschlossenheit des Operators, Stetigkeit des Operators und Abgeschlossenheit des Definitionsbereiches erfüllt, so gilt auch die dritte. Ein Operator ist genau dann abgeschlossen, wenn sein Graph als Teilmenge von $X \times Y$ abgeschlossen ist. Summen abgeschlossener Operatoren müssen im allgemeinen nicht abgeschlossen sein.

Beweis. Für $x \in X$ gilt

$$x = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h S(s)x\mathrm{d}s$$

und es ist $\int_0^h S(s)x\mathrm{d}s \in \mathscr{D}(A)$. Dies zeigt bereits die Dichtheit von $\mathscr{D}(A)$ in X.
Sei nun $(x_n) \subset \mathscr{D}(A)$ mit $x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in Y. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(S(h)x - x) \xleftarrow{n\to\infty} \frac{1}{h}(S(h)x_n - x_n) &= \frac{1}{h}\int_0^h S(s)Ax_n\mathrm{d}s \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(s)y\mathrm{d}s \xrightarrow{h\to\infty} S(0)y = y\,.\end{aligned}$$

Damit ist $x \in \mathscr{D}(A)$ und per Definition ist $Ax = y$. □

Beispiel 23.9. Wir betrachten $X = L^2(\mathbb{R})$ und $(S(t)u)(x) := u(x+t)$. Dann ist $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ der Erzeuger mit $\mathscr{D}(A) = H^1(\mathbb{R})$.

23.2 Milde Lösungen

Es sei im Folgenden X ein Banach-Raum und $(S(t))_{t\geq 0}$ sei eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger $-A$. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t)\,, & t > 0 \\ u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{23.1}$$

Wir nehmen $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ und $f \in C([0,\infty);X)$ an. Ist $u \in C([0,\infty);\mathscr{D}(A)) \cap C^1([0,\infty);X)$, wobei wir $\mathscr{D}(A)$ mit der Graphennorm $\|\cdot\|_X + \|A\cdot\|_X$ versehen, eine Lösung des Problems, so gilt die Formel von Duhamel, d.h.

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s\,. \tag{23.2}$$

Beweis. Es sei $g(s) = S(t-s)u(s)$. Dann ist

$$g'(s) = S(t-s)Au(s) + S(t-s)u'(s) = S(t-s)Au(s) + S(t-s)(f(s) - Au(s)) = S(t-s)f(s)\,.$$

Also ist

$$\underbrace{g(t)}_{=u(t)} - \underbrace{g(0)}_{=S(t)u_0} = \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s\,.$$

□

Die Formel (23.2) ist jedoch auch unter schwächeren Voraussetzungen zu verstehen.

Definition 23.10. Es sei $f \in L^1(0,\infty;X)$ und es sei $u_0 \in X$. Dann heißt u *milde Lösung* von (23.1), falls (23.2) gilt.

Bemerkung 23.11. Jede klassische Lösung ist auch eine milde Lösung.

Satz 23.12. *Es sei $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ und $f \in C([0,\infty);X)$. Gilt $f \in L^1(0,\infty;\mathscr{D}(A))$ oder $f \in W^{1,1}(0,\infty;X)$, so ist jede milde Lösung u auch eine klassische Lösung.*

Beweis. Insbesondere ist zu zeigen, dass $u \in C([0,\infty),\mathscr{D}(A)) \cap C^1(0,\infty;X)$. Der Summand $t \mapsto S(t)u_0$ erfüllt diese Anforderungen, denn $S(t)u_0 \in \mathscr{D}(A)$ und $t \mapsto S(t)u_0$ ist stetig und $S'(t)u_0 = AS(t)u_0$. Für den zweiten Term

$$v(t) := \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} S(h)v(t) &= \int_0^t S(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s = \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s - \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s \\ &= v(t+h) - S(h)\int_t^{t+h} S(t-s)f(s)\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{S(h)-\mathrm{Id}}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}S(h)\int_t^{t+h} S(t-s)f(s)\mathrm{d}s\,.$$

Es gilt

$$S(h)\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t-s)f(s)\mathrm{d}s \to f(t)\,.$$

Nehmen wir Differenzierbarkeit von v an, so gilt $v(t) \in \mathscr{D}(A)$ mit $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Nehmen wir an, dass $v(t) \in \mathscr{D}(A)$, d.h. $\frac{S(h)-\mathrm{Id}}{h}v(t)$ konvergiert, so folgt die Differenzierbarkeit von v in t mit $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Damit ist v genau dann differenzierbar, d.h. $v \in C^1(0,\infty;X)$, wenn $v \in C([0,\infty),\mathscr{D}(A))$.

Ist $f \in L^1(0,\infty;\mathscr{D}(A))$, so folgt unmittelbar $v \in C([0,\infty);\mathscr{D}(A))$. Ist $f \in W^{1,1}(0,\infty;X)$, so folgt mit $v(t) = \int_0^t S(s)f(t-s)\mathrm{d}s$, dass

$$v'(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(s)f'(t-s)\mathrm{d}s\,.$$

Es ist also $v \in C^1([0,\infty);X)$. □

23.3 Der Satz von Hille-Yosida

Wir betrachten

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t) \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Es gibt eine Lösung, falls A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist. Notwendige Bedingungen dazu sind Dichtheit von $\mathscr{D}(A)$ und Abgeschlossenheit von A. Dies sind jedoch noch keine hinreichenden Bedingungen.

Satz 23.13 (Hille-Yosida)**.** *Ein Operator $A\colon \mathscr{D}(A) \to X$ ist genau dann Erzeuger einer C_0-Halbgruppe mit $\|S(t)\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}$, falls*

(i) *der Definitionsbereich $\mathscr{D}(A)$ dicht in X ist und A abgeschlossen ist und*

(ii) *jedes $\lambda > \omega$ in der Resolventenmenge $\rho(A)$ ist und für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\|R_\lambda(A)^n\| \le M(\lambda - \omega)^{-n}$$

gilt.

Bemerkung 23.14. Für einen linearen Operator $A\colon X \supset \mathscr{D}(A) \to X$ definieren wir die *Resolventenmenge* $\rho(A)$ als

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\,\mathrm{Id} \text{ ist bijektiv und } (A - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} \in L(X)\}$$

und das *Spektrum* $\sigma(A)$ als

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)\,.$$

Die *Resolvente* $R_\lambda(A)$ für $\lambda \in \rho(A)$ ist $R_\lambda(A) := (A - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} \in L(X)$.

Spektralwerte $\lambda \in \sigma(A)$, für welche $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ nicht injektiv ist, heißen *Eigenwerte* und bilden das *Punktspektrum* $\sigma_\mathrm{p}(A)$. Im Gegensatz zum Endlichdimensionalen kann nun jedoch $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ zwar injektiv sein, muss dann jedoch nicht surjektiv sein. Auch wenn $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ bijektiv ist, muss $(A - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$ nicht stetig sein.

Sowohl $\rho(A) = \mathbb{C}$ als auch $\rho(A) = \emptyset$ können auftreten. Die Menge $\rho(A)$ ist jedoch stets offen, d.h. $\sigma(A)$ ist immer abgeschlossen.

Beweis. Zur Richtung „$\Rightarrow$“: Dass (i) gelten muss, haben wir bereits gezeigt. Es seien nun M und ω wie in der Voraussetzung, d.h. $\|S(t)\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}$. Wir setzen für $x \in X$

$$I_n(\lambda)x := \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\mathrm{d}t\,.$$

Dieser Ausdruck ist für $\lambda > \omega$ wohldefiniert mit

$$\|I_n(\lambda)x\| \le \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-(\lambda-\omega)t}\mathrm{d}t\|x\| = \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}\|x\|\,.$$

Dies zeigt $\|I_n(\lambda)\| \le \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$.

Für $x \in \mathscr{D}(A)$ und $n > 1$ folgt

$$\begin{aligned} I_n(\lambda)Ax &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\underbrace{S(t)Ax}_{=(S(t)x)'}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n-2)!}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{n-2}\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\mathrm{d}t \\ &= \lambda I_n(\lambda)x - I_{n-1}(\lambda)x\,. \end{aligned}$$

Damit ist $I_n(\lambda)(A - \lambda\,\mathrm{Id})x = -I_{n-1}(\lambda)x$. Für $n = 1$ und $x \in \mathscr{D}(A)$ ist

$$I_1(\lambda)Ax = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)Ax\mathrm{d}t = \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x)'\mathrm{d}t + \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\mathrm{d}t = -x + \lambda I_1(\lambda)x\,.$$

Dies zeigt $I_1(\lambda)(A - \lambda \operatorname{Id}) = -x$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\frac{S(h) - \operatorname{Id}}{h} I_1(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t+h)x\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)} S(t+h)x\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t)x\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t)x\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t)x\mathrm{d}t \\
&\xrightarrow{h \searrow 0} \lambda I_1(\lambda)x - x\,.
\end{aligned}$$

Dies zeigt $I_1(\lambda)x \in \mathscr{D}(A)$ und $AI_1(\lambda)x = \lambda I_1(\lambda)x - x$, also $\lambda \in \rho(A)$ und

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda \operatorname{Id})^{-1} = -I_1(\lambda) \in L(X)\,.$$

Ähnlich zeigt man

$$\frac{S(h) - \operatorname{Id}}{h} I_n(\lambda)x \to \lambda I_n(\lambda)x - I_{n-1}(\lambda)x\,.$$

Damit ist

$$-I_{n-1}(\lambda)x = (A - \lambda \operatorname{Id})I_n(\lambda)x = I_n(\lambda)(A - \lambda \operatorname{Id})x\,,$$

also

$$I_n(\lambda = -(A - \lambda \operatorname{Id})^{-1} I_{n-1}(\lambda) = (-1)^n (A - \lambda \operatorname{Id})^{-n}\,.$$

Zur Rückrichtung „$\Leftarrow$“: Wir setzen

$$\mathcal{U}_n(t) := \left(\operatorname{Id} - \frac{t}{n}A\right)^{-n} = \left(\frac{t}{n}\right)^{-n} \left(\frac{n}{t}\operatorname{Id} - A\right)^{-n} = \left(\frac{t}{n}\right)^{-n} (-1)^n R_{\frac{n}{t}}(A)^n\,.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{U}_n(t)$ für genügend großes n stets wohldefiniert (falls $n > t\omega$) und es gilt

$$\|\mathcal{U}_n(t)\| \le \left(\frac{t}{n}\right)^{-n} M \left(\frac{n}{t} - \omega\right)^{-n} = M\left(1 - \frac{\omega t}{n}\right)^{-n} \to M\mathrm{e}^{\omega t}\,.$$

Insbesondere ist $\|\mathcal{U}_n(t)\|$ gleichmäßig in n beschränkt. Wir können $t \mapsto \mathcal{U}_n(t)$ differenzieren und erhalten

$$\mathcal{U}_n'(t) = \left(\operatorname{Id} - \frac{t}{n}A\right)^{-n-1} A\,.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{U}_n(t)x$ für $x \in \mathscr{D}(A^2)$ konvergiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_n(t)x - \mathcal{U}_m(t) &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathcal{U}_m(t-s)\mathcal{U}_n(s)x)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Bigg(\left(\operatorname{Id} - \frac{t-s}{n}A\right)^{-m} A \left(\operatorname{Id} - \frac{s}{n}A\right)^{-n-1} \\
&\qquad - A\left(\operatorname{Id} - \frac{t-s}{m}A\right)^{-m-1} \left(\operatorname{Id} - \frac{s}{n}A\right)^{-n}\Bigg) x\mathrm{d}s \\
&= \lim_{h\to 0} \int_h^{t+h} \underbrace{\left(\operatorname{Id} - \frac{t-s}{m}A\right)^{-m-1} \left(\operatorname{Id} - \frac{s}{n}A\right)^{-n-1}}_{\|\cdot\| \le \mathrm{const}_t} \\
&\qquad \left(\operatorname{Id} - \frac{t-s}{m}A - \operatorname{Id} + \frac{s}{n}A\right) Ax\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}_n(t)x - \mathcal{U}_m(t)x\| &\le \mathrm{const}_t \int_0^t \left(\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m}\right) \mathrm{d}s \|A^2x\| \\ &= \mathrm{const}_t \|A^2x\| \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0\,.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Folge $(\mathcal{U}_n(t)x)_n \subset X$ eine Cauchy-Folge ist und damit einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(t)x =: S(t)x$ für $x \in \mathscr{D}(A)$ besitzt. Da $\|\mathcal{U}_n(t)x\| \le M\left(1 - \frac{\omega t}{n}\right)^{-n} \|x\| \to M\mathrm{e}^{\omega t}\|x\|$, gilt auch $\|S(t)x\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}\|x\|$. Wir setzen $S(t)$ stetig und linear auf ganz X fort, d.h. wir erhalten $S(t) \in L(X)$ mit $\|S(t)\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}$.

Wir zeigen, dass $(S(t))$ eine Halbgruppe ist: Zunächst ist $\mathcal{U}_n(0) = \mathrm{Id}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $S(0) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(0) = \mathrm{Id}$ (auf einem dichten Unterraum, also auf ganz X). Wie oben sehen wir, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathcal{U}_n(t-s)\mathcal{U}_n(s)x) = \frac{2s-t}{n}\left(\mathrm{Id} - \frac{t-s}{n}A\right)^{-n-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{s}{n}A\right)^{-n-1} A^2x \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Es ist also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S(t-s)S(s)x) = 0$, also ist $S(t-s)S(s)x$ kostant in s, d.h. $S(t-s)S(s)x = S(t-0)S(0)x = S(t)$.

Für $x \in \mathscr{D}(A^2)$ ist $t \mapsto \mathcal{U}_n(t)x$ stetig in Null (folgt aus $(\mathrm{Id} - \frac{t}{n}A)^{-1}x \to x$). Da $t \mapsto \|S(t)\|$ auf beschränkten Intervallen beschränkt ist, folgt auch die Stetigkeit von $t \mapsto S(t)x$ in Null für alle $x \in X$.

Wir zeigen nun, dass A Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\ge 0}$ ist: Dazu beobachen wir $\mathcal{U}_n'(t)x = A\left(\mathrm{Id} - \frac{t}{n}A\right)^{-1}\mathcal{U}_n(t)x$, d.h.

$$\frac{S(h) - \mathrm{Id}}{h}x \xrightarrow{h\to 0} Ax$$

für $x \in \mathscr{D}(A)$. Bezeichnen wir den Erzeuger von $(S(t))_{\ge 0}$ mit $\tilde{A}$, so haben wir $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(\tilde{A})$ und auf $\mathscr{D}(A)$ ist $A = \tilde{A}$. Es gilt aber auch $\mathscr{D}(\tilde{A}) \subset \mathscr{D}(A)$: Nach der bereits gezeigten Richtung $\Rightarrow$ ist $\lambda \in \rho(\tilde{A})$, falls $\lambda > \omega$, also insbesondere $(\tilde{A} - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} \in L(X)$. Nach Voraussetzung gilt jedoch auch $\lambda \in \rho(A)$ und $(A - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} \in L(X)$. Mit $A = \tilde{A}$ auf $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(\tilde{A})$ und

$$\begin{aligned}&(\tilde{A} - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} \colon X \to \mathscr{D}(\tilde{A})\,, \\ &(A - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} \colon X \to \mathscr{D}(A)\end{aligned}$$

ist

$$\mathscr{D}(\tilde{A}) = (\tilde{A} - \lambda)^{-1}(X) \subset (\tilde{A} - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}(\tilde{A} - \lambda\,\mathrm{Id})(\mathscr{D}(A))\,,$$

also auch $\mathscr{D}(\tilde{A}) \subset \mathscr{D}(A)$. □

Aufgrund dieses Satzes schreibt man häufig $S(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

23.4 Der Satz von Lumer-Phillips

Für die Voraussetzungen des Satzes von Hille-Yosida ist u.a. nachzuprüfen, dass die Ungleichung $\|R_\lambda(A)^n\| \le M(\lambda - \omega)^{-n}$ erfüllt ist, was sich oft als schwierig erweist. Ist aber $M = 1$, so folgt dies bereits aus $\|R_\lambda(A)\| \le \frac{1}{\lambda - \omega}$.

Definition 23.15. Es sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit $\|S(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$. Dann heißt $(S(t))_{t\geq 0}$

(i) *Quasikontraktionshalbgruppe*, falls $M = 1$ ist und

(ii) *Kontraktionshalbgruppe*, falls $\|S(t)\| \leq 1$ (z.B. $\omega \leq 0$ und $M = 1$).

Satz 23.16. *Für jede C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ gibt es eine äquivalente Norm auf X, bezüglich der $(S(t))_{t\geq 0}$ eine Quasikontraktionshalbgruppe ist.*

Beweis. $\rightsquigarrow$ Pazy. □

Satz 23.17 (Lumer-Phillips)**.** *Es sei H ein Hilbert-Raum und $A\colon H \supset \mathscr{D}(A) \to H$ sei ein Operator, für welchen es ein $\omega > 0$ gibt, so dass*

(i) *der Definitionsbereich $\mathscr{D}(A)$ dicht in H ist,*

(ii) *die Abschätzung $\mathrm{Re}(x, Ax) \leq \omega\|x\|^2$ gilt und*

(iii) *es ein $\lambda_0 > \omega$ gibt, so dass $A - \lambda_0 \,\mathrm{Id}$ surjektiv ist.*

Dann ist A der Erzeuger einer Quasikontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ mit $\|S(t)\| \leq \mathrm{e}^{\omega t}$.

Beweis. Für $\lambda > \omega$ und $x \in \mathscr{D}(A)$ gilt

$$\|(A - \lambda \,\mathrm{Id})x\|\|x\| \geq \mathrm{Re}(x, (A - \lambda \,\mathrm{Id})x) \geq \lambda\|x\|^2 - \omega\|x\|^2 = (\lambda - \omega)\|x\|^2 \,.$$

Dies zeigt $\|(A - \lambda \,\mathrm{Id})x\| \geq (\lambda - \omega)\|x\|$, d.h. $A - \lambda \,\mathrm{Id}$ ist injektiv für $\lambda > \omega$. Ist $A - \lambda_0 \,\mathrm{Id}$ auch surjektiv, so folgt mit dieser Abschätzung auch die Stetigkeit der Umkehrabbildung, d.h. $\|(A - \lambda \,\mathrm{Id})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0 - \omega}$. Damit ist $\lambda_0 \in \rho(A)$ und

$$\|R_{\lambda_0}(A)^n\| \leq (\lambda - \omega)^{-n}\| \,.$$

Insbesondere ist $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, also ist A abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass $A - \lambda \,\mathrm{Id}$ für alle $\lambda > \omega$ surjektiv.

Fredholm-Operatoren: Es seien X und Y zwei Banach-Räume. Dann heißt $A \in L(X, Y)$ *Semi-Fredholm-Operator*, falls $\mathrm{ran}(A)$ abgeschlossen in Y ist und entweder $\dim\ker A < \infty$ oder $\operatorname{codim}\operatorname{ran} A < \infty$. Der Operator A heißt *Fredholm-Operator*, falls sowohl $\dim\ker A < \infty$ als auch $\operatorname{codim}\operatorname{ran} A < \infty$ gilt. Man setzt $\mathrm{ind}(A) := \dim\ker A - \operatorname{codim}\operatorname{ran} A$. Die Menge der Semi-Fredholm-Operatoren aus $L(X)$ ist offen in $L(X)$ und der Index ist lokalkonstant.

Es sei also $\lambda > \omega$. Wir wissen bereits, dass $A - \lambda \,\mathrm{Id}$ injektiv ist, d.h. $\dim\ker(A - \lambda \,\mathrm{Id}) = 0$. Es ist $\mathrm{ran}(A - \lambda \,\mathrm{Id})$ abgeschlossen, denn für $x_n \to x$ mit $(A - \lambda \,\mathrm{Id})x_n \to y$ folgt aus der Abgeschlossenheit von A und der Stetigkeit von Id, dass $x \in \mathscr{D}(A)$ und $(A - \lambda \,\mathrm{Id})x = y$, d.h. $A - \lambda \,\mathrm{Id}$ ist abgeschlossen. Ist nun $(y_n) \subset \mathrm{ran}(A - \lambda \,\mathrm{Id})$ mit $y_n = (A - \lambda \,\mathrm{Id})x_n$, so folgt

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}\|y_n - y_m\| \to 0 \,,$$

d.h. es gibt ein $x \in X$ mit $x_n \to x$. Also ist $x \in \mathscr{D}(A)$ mit $(A - \lambda \,\mathrm{Id})x = y$ und somit $y \in \mathrm{ran}\, A$.

Für alle $\lambda > \omega$ ist also $A - \lambda \,\mathrm{Id}$ ein Semi-Fredholm-Operator mit $\dim\ker(A - \lambda \,\mathrm{Id}) = 0$. Da $\mathrm{ind}(A - \lambda_0 \,\mathrm{Id}) = 0$, folgt $\mathrm{ind}(A - \lambda \,\mathrm{Id}) = 0$ und somit $\operatorname{codim}(A - \lambda \,\mathrm{Id}) = 0$, d.h. $A - \lambda \,\mathrm{Id}$ ist surjektiv. □

Index