Kapitel 3

Abhängigkeitssätze

Satz 3.1
Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^N$ stetig, lokal Lipschitzstetig bzgl. y in D, $(x_0, y_0) \in D$, $R_{a,b} = [x_0 - a; x_0 + a] \times \left\{ y \in \mathbb{K}^N | \; || y - y_0 || \leq b \right\} \subset D$, $M := \max\limits_{R_{a,b}} || f(x,y) ||$.
Sei weiter $\tilde{f} : R_{a,b} \to \mathbb{K}^N$ eine stetige Funktion.
Sei y die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

auf dem Intervall $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, wobei $\alpha = \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\}$. Sei außerdem $\tilde{y}$ irgendeine auf einem abgeschlossenen Intervall $J \subset [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ definierte, ganz in $R_{a,b}$ liegende Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} w' = \tilde{f}(x,w) \\ w(x_0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Wenn für gewisse Zahlen $\sigma, \omega > 0$ gilt:

$$|| y_0 - \tilde{y}_0 || \leq \sigma$$

und

$$\left|\left| f(x,y) - \tilde{f}(x,y) \right|\right| \leq \omega \text{ auf } R_{a,b}$$

dann gilt:

$$|| y(x) - \tilde{y}(x) || \leq \sigma e^{L|x - x_0|} + \frac{\omega}{L} \cdot \left(e^{L|x-x_0|} - 1 \right) \quad \forall x \in J$$

wobei L eine Lipschitzkonstante von f bezgl. y auf $R_{a,b}$ ist.

Beweis:
Setze $\tilde{y}$ stetig und ganz in $R_{a,b}$ verbleibend auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ fort. Nenne die Fortsetzung weiter $\tilde{y}$. Sei weiter $u_0(x) := \tilde{y}(x) \; \forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$. Nach Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf (Satz 2.3) wissen wir, dass die Folge der Picard-Iterierten beginnend mit $u_0 = \tilde{y}$ gegen die (eindeutige) Lösung y des Anfangswertproblems (3.1) auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ konvergiert.
Es gilt:

$$u_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, \tilde{y}(s)\right) ds \quad \forall x \in J$$

Außerdem gilt:

$$u_0(x) = \tilde{y} = \tilde{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \tilde{f}\,(s, \tilde{y}(s))\,ds \quad \forall x \in J$$

da $\tilde{y}$ Lösung des Anfangswertproblems (3.2) auf J.
Also folgt:

$$\begin{aligned} ||\,u_1(x) - u_0(x)|| &\leq ||\,y_0 - \tilde{y}_0|| + \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left|\left| f\,(s, \tilde{y}(s)) - \tilde{f}\,(s, \tilde{y}(s)) \right|\right| ds \right| \\ &\leq \sigma + \omega\,|\,x - x_0| \quad \forall x \in J \quad \text{(nach Voraussetzung)} \end{aligned}$$

Behauptung:

$$||\,u_{n+1}(x) - u_n(x)|| \leq \sigma \frac{(L\,|\,x - x_0|)^n}{n!} + \frac{\omega}{L} \cdot \frac{(L\,|\,x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.3}$$

$$\forall\, x \in J, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Beweis durch Induktion:
$n = 0$: oben gezeigt.
Angenommen (3.3) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt, da f Lipschtiz-stetig auf $R_{a,b}$:

$$\begin{aligned} ||\,u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)|| &\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} ||\,f\,(s, u_{n+1}(s)) - f\,(s, u_n(s))||\,ds \right| \\ &\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} L\,||\,u_{n+1}(x) - u_n(x)||\,ds \right| \\ &\overset{\text{I.V.}}{\leq} L \cdot \left| \int\limits_{x_0}^{x} \sigma \frac{(L\,|\,s - x_0|)^n}{n!} ds \right| + L \cdot \left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\omega}{L} \cdot \frac{(L\,|\,s - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} ds \right| \\ &= L\sigma L^n \frac{|\,x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} + L\frac{\omega}{L} L^{n+1} \frac{|\,x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= \sigma \frac{(L\,|\,x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\omega}{L} \frac{(L\,|\,x - x_0|)^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} ||u_n(x) - \underbrace{u_0(x)}_{=\tilde{y}(x)}|| &\leq ||u_n(x) - u_{n-1}(x)|| + ||u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)|| \\ &\quad + \cdots + ||u_1(x) - u_0(x)|| \\ &\leq \sigma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} + \frac{\omega}{L} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall x \in J \end{aligned}$$

Für $n \to \infty : u_n(x) \longrightarrow y(x)$ und

$$\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} \longrightarrow \sigma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} = \sigma \cdot \exp\left(L|x - x_0|\right)$$

und

$$\frac{\omega}{L}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \longrightarrow \frac{\omega}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\omega}{L}\left(\exp\left(L|x-x_0|\right)-1\right)$$

$\square$

Satz 3.2
Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^N$ stetig, lokal Lipschitzstetig bzgl. y in D, $(x_0, y_0) \in D$.
Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

habe eine Lösung $y = \Phi(y_0, x)$ auf $[x_0; x_0 + T], T > 0$.

Dann gilt:

1. Es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{K}^N$, Umgebung von y_0, so, dass für alle $z \in U$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = z \end{cases}$$

   genau eine auf $[x_0; x_0 + T]$ definierte Lösung besitzt. Bezeichne diese Lösung mit $\Phi(z, x), x \in [x_0; x_0 + T]$

2. $\Phi(z, x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $\Phi(y_0, x)$ auf $[x_0; x_0 + T]$ falls $z, y_0 \in U$ und $z \longrightarrow y_0$.

Beweis:

1. Die Menge $\{(x, x(x)) \, | x \in [x_0; x_0 + T]\}$ ist eine kompakte Teilmenge von D.
   Daher existiert $R > 0$ so, dass

$$S := \{(x, y) \mid x \in [x_0; x_0 + T], ||y - \Phi(y_0, x)|| \leq R\} \subseteq D$$

   Ziel ist es, $0 < r < R$ (genügend klein) zu finden, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = z \end{cases}$$

   für alle $z \in B_r(y_0) := \left\{y \in \mathbb{K}^N \mid ||y - y_0|| \leq r\right\}$ auf $[x_0; x_0 + T]$ lösbar ist.

   Sei zunächst $0 < r < R$ beliebige.
   Für $z \in B_r(y_0)$ sei $\Phi(z, x)$ die maximale Lösung auf einem Intervall I des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = z \end{cases}, (x, y) \in S$$

Es gilt:

$$[x_0; x_0+\beta[\subseteq I \subseteq [x_0; x_0+\beta] \subset [x_0; x_0+T]$$

für ein $\beta > 0$.
Wir müssen zeigen, dass $\beta = T$ und $I = [x_0; x_0+\beta]$ ist.

Es gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned}
||y(x) - \phi(z,x)|| &= ||\Phi(y_0,x) - \Phi(z,x)|| \\
&= \left|\left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, \Phi(y_0,s)\right) ds - \left(z + \int_{x_0}^{x} f\left(s, \Phi(z,s)\right) ds \right) \right|\right| \\
&\leq ||y_0 - z|| + \left| \int_{x_0}^{x} ||f\left(s, \Phi(y_0,s)\right) ds - f\left(s, \Phi(z,s)\right)||ds \right| \\
&\leq r + L \left| \int_{x_0}^{x} ||\Phi(y_0,s) - \Phi(z,s)||ds \right|
\end{aligned}$$

Wobei L Lipschitz-konstante von f bzgl. y auf der kompakten Menge S. Also folgt

$$\begin{aligned}
|| \underbrace{y(x)}_{=\phi(y_0,x)} - \Phi(z,x)|| &\leq r + L \left| \int_{x_0}^{x} ||\Phi(y_0,s) - \Phi(z,s)|| e^{-2Ls} e^{2Ls} ds \right| \\
&\leq r + \underbrace{L \max_{s \in I} \left\{ ||\Phi(y_0,s) - \Phi(z,s)|| e^{-2Ls} \right\}}_{=|||\Phi(y_0,\cdot)-\Phi(z,\cdot)|||_\infty} \underbrace{\int_{x_0}^{x} e^{2Ls} ds}_{\leq \frac{e^{2Lx}}{2L}} \\
&\leq r + \frac{e^{2Lx}}{2L} |||\Phi(y_0,\cdot) - \Phi(z,\cdot)|||_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{-2Lx}||\Phi(y_0,x) - \Phi(z,x)|| &\leq re^{-2Lx} + \frac{1}{2} |||\Phi(y_0,\cdot) - \Phi(z,\cdot)|||_\infty \\
&\leq re^{-2Lx_0} + \frac{1}{2} |||\Phi(y_0,\cdot) - \Phi(z,\cdot)|||_\infty
\end{aligned}$$

$$\forall x \in I$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underbrace{\max_{x \in I} e^{-2Lx}||\Phi(y_0,x) - \Phi(z,x)||}_{|||\Phi(y_0,\cdot)-\Phi(z,\cdot)|||_\infty} &\leq re^{-2Lx_0} + \frac{1}{2} |||\Phi(y_0,\cdot) - \Phi(z,\cdot)|||_\infty \\
\Rightarrow \frac{1}{2} |||\Phi(y_0,\cdot) - \Phi(z,\cdot)|||_\infty &\leq re^{-2Lx_0}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\max_{x \in I} e^{-2Lx}||\Phi(y_0,x) - \Phi(z,x)|| &\leq 2re^{-2Lx_0} \\
\Rightarrow e^{-2Lx}||\Phi(y_0,x) - \Phi(z,x)|| &\leq 2re^{-2Lx_0} \qquad \forall x \in I
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$||\Phi(y_0,x)-\Phi(z,x)|| \leq 2re^{+2L(x-x_0)} \leq \underbrace{2re^{2LT}}_{<\frac{R}{2}} \qquad \forall x \in I$$

Es gilt somit für obige Wahl von r, dass

$$||\Phi(y_0,x)-\Phi(z,x)|| \leq \frac{R}{2} \qquad \forall x \in I, \forall z \in B_r(y_0)$$

$$[x_0; x_0+\beta[\subset I \subset [x_0; x_0+\beta] \subset [x_0; x_0+T].$$

Daher folgt, dass $\Phi'(z,x)$ beschränkt auf I ist.
(In der Tat $\{(x,\Phi(z,x)) \mid x \in I\} \subset S$, S kompakt, und f ist beschränkt auf S, außerdem gilt $\Phi'(z,x) = f(x,\Phi(z,x)) \forall x \in I$).
Daher ist $\Phi(z,x)$ gleichmäßig stetig auf I und daher existiert

$$\lim_{x\to x_0+\beta} \Phi(z,x) =: \eta$$

und es gilt $||\Phi(y_0,x_0+\beta)-\eta|| \leq \frac{R}{2}$. Damit kann die Funktion $\Phi(z,x)$ in den Punkt $x_0+\beta$ stetig als Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x,y) \in S$$

fortgesetzt werden.
Da aber $\Phi(z,\cdot)$ maximale Lösung, folgt somit $x_0+\beta \in I$, d.h. $I = [x_0; x_0+\beta]$.

Angenommen, $\beta < T$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0+\beta) = \Phi(z,x_0+\beta) = \eta \end{cases} \quad (x,y) \in S$$

eine lokal eindeutige Lösung auf einem $x_0+\beta$ enthaltenden Intervall. Also ist $\Phi(z,x)$ rechtsseitig von $x_0+\beta$ fortsetzbar. Widerspruch zur Maximalität von $\Phi(z,\cdot)$. Also: $\beta = T$.

2. Sei $z \in B_r(y_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
||\Phi(y_0,x)-\Phi(z,x)|| &\leq ||y_0-z|| + L\int_{x_0}^{x} ||\Phi(y_0,s)-\Phi(z,s)||ds \\
&\leq ||y_0-z|| + |||\Phi(y_0,\cdot)-\Phi(z,\cdot)|||_\infty L\int_{x_0}^{x} e^{2Ls}ds \\
\Rightarrow ||\Phi(y_0,x)-\Phi(z,x)|| &\leq ||y_0-z|| + \frac{1}{2}e^{2Lx}|||\Phi(y_0,\cdot)-\Phi(z,\cdot)|||_\infty \\
\Rightarrow |||\Phi(y_0,\cdot)-\Phi(z,\cdot)|||_\infty &\leq e^{-2Lx_0}||y_0-z|| + \frac{1}{2}|||\Phi(y_0,\cdot)-\Phi(z,\cdot)|||_\infty \\
\Rightarrow |||\Phi(y_0,\cdot)-\Phi(z,\cdot)|||_\infty &\leq 2e^{-2Lx_0}||y_0-z||
\end{aligned}$$

d.h.

$$e^{-2Lx}||\Phi(y_0,x)-\Phi(z,x)|| \leq 2e^{-2Lx_0}||y_0-z|| \qquad \forall x \in [x_0;x_0+T]$$

d.h.

$$\max_{x\in[x_0;x_0+T]} ||\,\Phi(y_0,x)-\Phi(z,x)|| \leq 2e^{2LT}\,||\,y_0-z||$$

Für z gegen y_0 folgt nun die Behauptung.

$\square$

Nun wollen wir uns der Frage der *Parameterabhängigkeit* zuwenden.

$$y' = f(x,y,\alpha) \quad ,\alpha \text{ Parameter}$$

z.B.

$$\begin{aligned} y' &= \gamma y(S-y) \text{ logistisches Modell des Populationswachstums,} \\ \gamma &= \alpha-\beta \end{aligned}$$

α: Geburtenrate, β: Sterberate, S: maximale Trägerkapazität des Raumes.
S,α,β: Parameter, die nur geschätzt , bzw. nur näherungsweise bestimmt werden können.

Wichtig wäre die stetige Abhängigeit der Lösung einer Differentialgleichung vom Typ $y' = f(x,y,\alpha)$ von dem Parameter α.
Dies folgt aus Satz 3.2 und folgendem

Satz 3.3
Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{K}^N\times\mathbb{K}^M$, $f: D\to\mathbb{K}^N$ stetig, $(x_0,y_0,\alpha)\in D$.
Das N-dimensionale parameterabhängige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y,\alpha) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ist gleichwertig zum Anfangswertproblem (nicht parameterabhängig)

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = 0 \\ y(x_0) = y_0, z(x_0) = \alpha \end{cases}$$