Analysis III Problem Sheet 03

Duc (395220), Moritz Bichlmeyer (392374)
Tutor: Fabian - Donnerstag 12-14 Uhr

Exercise 1

(i) $\mathcal{A}_2' \subset \Omega_1$ ist eine σ-Algebra.

(a) $\Omega_1 \in \mathcal{A}_2'$, denn $\Omega_2 \in \mathcal{A}_2$. Dann ist $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \mathcal{A}_2'$ nach Definition von $\mathcal{A}_2'$.

(b) Sei $A \in \mathcal{A}_2'$. Dann gibt es ein $B \in \Omega_2$ mit $f(A) = B$ nach Definition von $\mathcal{A}_2'$. Nun ist $B^c \in \Omega_2$. Wegen $B \cup B^c = \Omega_2$, $A \cup A^c = \Omega_1$ und $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$ gilt, dass $f^{-1}(B^c) = A^c$ (beachte, dass f von Ω_1 nach Ω_2 abbildet). Somit $A^c \in \mathcal{A}_2'$.

(c) Seien $A_i \in \mathcal{A}_2'$ für eine beliebige Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$. Wir wollen schauen, ob $\bigcup A_i \in \mathcal{A}_2'$ gilt. Aus $A_i \in \mathcal{A}_2'$ folgt, dass es ein $B_i \in \mathcal{A}_2$ gibt, sodass $f(A_i) = B_i$. Nun ist auch $\bigcup B_i \in \mathcal{A}_2$. Somit haben wir: $f(\bigcup A_i) = \bigcup B_i \in \mathcal{A}_2$. Also ist $\bigcup A_i \in \mathcal{A}_2'$.

$\mathcal{A}_1'$ ist *keine* σ-Algebra. Seien zwei beliebige σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ auf $\mathbb{R}$ gegeben und beachte die Abbildung $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Offensichtlich ist $\mathbb{R} \notin f(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_1' = \{\{0\}\}$. Daher kann $\mathcal{A}_1'$ keine σ-Algebra sein.

(ii) Sei Ω_3 eine überabzählbare Menge.

(a) $\mathcal{A}_3$ ist ein Ring. Erstens ist $\mathcal{A}_3 \neq \emptyset$, da Ω_3 überabzählbar ist und somit eine endliche Teilmenge besitzt. Zweitens ist die Vereinigung zweier endlicher Mengen wieder endlich. Drittens ist die Differenz zweier endlicher Mengen A, B wieder endlich, wie man an $A \setminus B = A \cap B^c \subset A$ sieht. Es ist *kein* σ-Ring, da die abzählbar unendliche Vereinigung endlicher Mengen A_i, die auch noch paarweise disjunkt sind, nicht endlich ist. Da es kein σ-Ring ist, kann es auch keine σ-Algebra sein.

(b) $\mathcal{A}_4$ ist ein σ-Ring (und somit auch ein Ring). Es gilt, dass $\mathcal{A}_4$ auf jeden Fall nicht leer ist, da eine überabzählbare Menge Ω_3 abzählbare Teilmengen besitzen muss. Die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar. Auch ist die Differenz abzählbar, da man den Schnitt wie bei (a) als Schnitt zweier Mengen darstellen kann, wobei die eine Menge abzählbar ist. Und da eine Teilmenge einer abzählbaren Menge wieder abzählbar ist, muss auch der Schnitt wieder abzählbar sein. $\mathcal{A}_4$ ist keine σ-Algebra, denn $\Omega_3 \notin \mathcal{A}_4$ wegen der Überabzählbarkeit von Ω_3 nach Voraussetzung.

(c) $\mathcal{A}_5$ ist eine σ-Algebra und somit auch ein Ring bzw. ein σ-Ring. Da $\Omega_3^c = \emptyset$ und die leere Menge abzählbar ist, gilt $\Omega_3 \in \mathcal{A}_5$. Sei $A \in \mathcal{A}_5$. Falls A abzählbar ist, so ist $A^c \in \mathcal{A}_5$, da das Komplement von A^c wieder A ist und A ja abzählbar ist. Falls A^c abzählbar ist, so folgt direkt $A^c \in \mathcal{A}_5$. Seien $A_i \in \mathcal{A}_5$. Entweder sind alle A_i abzählbar. Dann ist die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar und somit $\bigcup A_i \in \mathcal{A}_5$. Ansonsten wissen wir, dass auf jeden Fall ein j gibt, sodass A_j^c *abzählbar* ist. Dann ist $(\bigcup A_i)^c$ als Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar, denn

$$(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c \subset A_j^c.$$

Also $\bigcup A_i \in \mathcal{A}_5$.