Aufgabe 1

Beweis. Sei $G \in \mathbb{R}$. Gesucht ist ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (r-\delta, r)$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k > G$. Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \infty$, weil alle $a_k \geq 0$ und $r > 0$. Dann gibt es ein Index $J \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{J} a_k r^k = \overset{\text{♔}}{P} > G$. Sei $p(x) := \sum_{k=0}^{J} a_k x^k$. Die Funktion p ist ein Polynom und somit stetig in r. Wegen der Stetigkeit von p gibt es für $\epsilon := \overset{\text{♔}}{P} - G$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (r-\delta, r)$ gilt $|p(x) - \overset{\text{♔}}{P}| < \epsilon$. Also für alle $x \in (r-\delta, r)$: $\overset{\text{♔}}{P} - \epsilon = G < p(x) \underset{(*)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, wobei sich (*) ergibt wegen $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit haben wir ein solches δ gefunden. $\square$

Aufgabe 2

(i) 1.Fall: n ist gerade.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2}+1) \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2}-1) \cdot \ldots \cdot 1 > \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2}+1)}_{\frac{n}{2}\,Faktoren} > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$$

2.Fall: n ist ungerade.

$$n! > \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{2}}_{\frac{n+1}{2}\,Faktoren} > (\frac{n+1}{2})^{\frac{n+1}{2}} > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$$

Wir untersuchen nun $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = \infty$ und $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

(ii) Die Reihe $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n} x^i$ hat die Koeffizienten

$$a_{i,n} := \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k!(n+k)!}, & \text{falls } i = n+2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne den Konvergenzradius von J_n, indem wir $\limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_{i,n}|}$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ betrachten. Wegen $|\frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k!(n+k)!}| > 0$ brauchen wir nur den lim betrachten, also

$$\limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_{i,n}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^{n+2k} k!(n+k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2^n} \cdot 4 \underbrace{\sqrt[k]{k!}\sqrt[k]{(n+k)!}}_{=\infty}} = 0.$$

Der Konvergenzradius beträgt $R = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $J_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ konvergiert.

(iii) Es gilt $y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + (1 - \frac{n^2}{x^2})y(x) = 0 \iff x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$. Gliedweises Differenzieren von J_n ergibt

$$\begin{aligned} xJ_n'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k) \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}, \\ x^2 J_n''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k-1)(n+2k) \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} \\ (x^2-n^2)J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2(k+1)}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^2(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{n+2k}}{2^{n+2k-2}(k-1)!(n+k-1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^2(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} \end{aligned}$$

Betrachte Koeffizienten von $x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2-n^2)J_n(x)$. Für $k = 0$ ergibt sich $\frac{n}{2^n n!} + \frac{(n-1)n}{2^n n!} - \frac{n^2}{2^n n!} = 0$. Für $k > 0$ ergibt sich für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^k (n+2k)}{2^{n+2k} k!(n+k)!} + \frac{(-1)^k (n+2k-1)(n+2k)}{2^{n+2k} k!(n+k)!} + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{n+2k-2}(k-1)!(n+k-1)!} - \frac{(-1)^k n^2}{2^{n+2k} k!(n+k)!} \\ &= \frac{(-1)^k(n+2k) + (-1)^k(n+2k-1)(n+2k) + (-1)^{k-1} 4k(n+k) - (-1)^k n^2}{2^{n+2k} k!(n+k)!} \\ &= \frac{(-1)^k(n+2k+n^2+2kn+2kn+4k^2-n-2k-n^2-4kn-4k^2)}{2^{n+2k} k!(n+k)!} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2-n^2)J_n(x) = 0$ und die Bessel'sche Gleichung ist erfüllt.