Kapitel 7

Randwertprobleme

Anwendungsbeispiel:
Temperaturverteilung in einem dünnen Stab mit isolierter Oberfläche.
$u(x) :=$ Temperatur im Stab an der Stelle $x, x \in [0; L]$.
Im Gleichgewichtszustand genügt u der Differentialgleichung

$$\big(k(x)u'(x)\big)' = f(x), \quad x \in]0; L[$$

wobei $k(x)$ die Wärmeleitfähigkeit des Stabes ist und $f(x)$ Wärmequellen/senken beschreibt.

Je nach Versuchsbedingungen ist eine Lösung u der Differentialgleichung gesucht, die zusätzlich noch eine der folgenden Randbedingungen erfüllt:

* $u(0) = u(L) = 0$ (die Temperatur an den Endpunkten des Stabes wird konstant $= 0$ gehalten)
  allgemeiner: $u(0) = \alpha, u(L) = \beta$.
* $u'(0) = u'(L) = 0$ (die Enden sind isoliert, daher kein Wärmefluss)
* $u'(0) = 0, u(L) = 0$ (Ein Ende ist isoliert; Temperatur am anderen Ende konstant gehalten).

usw.

Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten folgende Differentialgleichung:

$$(Lu)\,(x) := a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a; b]$$

zusammen mit folgender Randbedingung

$$Ru := C \cdot \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} + D \cdot \begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

wobei:

* $a, b \in \mathbb{R}, a < b,\ a_0, a_1, a_2 \in C\left([a; b]\right), a_2(x) \neq 0\ \forall\, x \in [a; b]$

* $C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

* $f \in C([a;b]), \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Beispiele für Randbedingungen:

1) $C = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$ liefert das bekannte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Lu = f \\ \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dann ist $Ru = \begin{bmatrix} u(a) \\ u(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$.

   Dirichlet-Randbedingungen

   Wenn $\eta_1 = \eta_2 = 0$, spricht man von *homogener Dirichlet-Randbedingung.*

3) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dann ist $Ru = \begin{bmatrix} u'(a) \\ u'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$.

   Neumann-Randbedingungen

   Wenn $\eta_1 = \eta_2 = 0$, spricht man von *homogener Neumann-Randbedingung.*

4) $C = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 0 \end{bmatrix}$, dann ist
   $Ru = \begin{bmatrix} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} R_1 u \\ R_2 u \end{bmatrix}$.

   separierte Randbedingung

Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in [a;b] \\ Ru = \eta \end{cases}$$

heißt *Randwertproblem* (RWP). Falls $f = 0, \eta = 0$, dann heißt das Randwertproblem *homogen*, ansonsten *inhomogen.* Falls nur $\eta = 0$, bezeichnet man das Randwertproblem manchmal auch als *halbhomogen.*

Eine Funktion u heißt *klassische Lösung* des Randwertproblems, wenn $u \in C^2([a;b])$ und u Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ auf $[a;b]$ ist und zusätzlich die Randbedingung $Ru = \eta$ erfüllt.

Satz 7.1 (Fredholm-Alternative)
Unter den obigen Voraussetzungen gilt:
Entweder besitzt das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases}$$

genau eine klassische Lösung auf $[a;b]$ für jedes $f \in C([a;b])$ und jedes $\eta \in \mathbb{R}^2$
oder das homogene Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Ru = 0 \end{cases}$$

besitzt eine nicht-triviale klassische Lösung $u \not\equiv 0$.

Beweis:
Sei $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Lu = 0$. Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ von der Form

$$u(x) = u_p(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \quad x \in [a;b], c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

wobei u_p eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ ist. Deshalb erhält man die Lösungsmenge des Randwertproblems durch anpassen der freien Parameter c_1, c_2 an die Randebedingungen:

$$\begin{aligned} \eta &= Ru \\ &= \underbrace{C \begin{bmatrix} u_p(a) \\ u_p'(a) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_p(b) \\ u_p'(b) \end{bmatrix}}_{=:g} \\ &\quad \underbrace{+ C \left(\begin{bmatrix} c_1 u_1(a) \\ c_1 u_1'(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 u_2(a) \\ c_2 u_2'(a) \end{bmatrix} \right) + D \left(\begin{bmatrix} c_1 u_1(b) \\ c_1 u_1'(b) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 u_2(b) \\ c_2 u_2'(b) \end{bmatrix} \right)}_{= \underbrace{\left(C \begin{bmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{bmatrix} \right)}_{=:R} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

Also:

$$\eta = g + R \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Im homogenen Fall ist $\eta = 0, u_p = 0$, und das Gleichungssystem lautet dann einfach:

$$R \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Somit folgt: das homogene Randwertproblem besitzt nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ genau dann, wenn $\det(R) \neq 0$, und in diesem Fall besitzt dann auch (7.1) eine eindeutige Lösung $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ für jedes $\eta \in \mathbb{R}^2$, für alle $f \in C([a;b])$ (das in die Gleichung (7.1) in Form der partikulären Lösung u_p eingeht), d.h. das nicht-homogene Randwertproblem besitzt eine eindeutige klassisce Lösung für alle $\eta \in \mathbb{R}^2, f \in C([a;b])$. □

Bemerkung:
Der Beweis geht vollkommen analog für Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung .

Allgemein gilt: Randwertprobleme können:

* *eindeutig lösbar* sein
  Beispiel:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

  $\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $\{\cos(x), \sin(x)\}$
  $\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$,

$$\text{Randbedingung} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 1 = y(0) = c_1 \\ 1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

* *unlösbar* sein
  Beispiel:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = 1$$

  $\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$,

$$\text{Randbedingung} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 1 = y(0) = c_1 \\ 1 = y(\pi) = -c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

* *unendlich viele Lösungen* besitzen
  Beispiel:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1$$

  besitzt die unendlich vielen Lösungen: $y(x) = \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad c_2 \in \mathbb{R}$ freier Parameter.

Wir betrachten nun einige Beispiele, in denen das homogene Randwertproblem nur trivial lösbar ist:

Satz 7.2
Betrachte das Randwertproblem

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + cy' + dy = 0, \quad c, d \in \mathbb{R} \\ y(a) = y(b) = 0 \end{array}\right.$$

Dann gilt:

i) Falls $\frac{c^2}{4} - d \geq 0$, dann besitzt das Randwertproblem nur die triviale Lösung $y \equiv 0$.

ii) Falls $\frac{c^2}{4} - d < 0$, dann besitzt das Randwertproblem nur die triviale Lösung, falls $\sqrt{d - \frac{c^2}{4}} \cdot (b-a)$ *kein* ganzzahliges Vielfaches von π ist, andernfalls besitzt das Randwertproblem unendlich viele nicht-triviale Lösungen.

Beweis:
Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + \lambda c + d = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - d} \end{aligned}$$

1. Fall: $\frac{c^2}{4} - d > 0 \Rightarrow$ Fundamentalsystem: $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$, wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$
$\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$
$$\text{Randbedingung} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 a} & e^{\lambda_2 a} \\ e^{\lambda_1 b} & e^{\lambda_2 b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 a} & e^{\lambda_2 a} \\ e^{\lambda_1 b} & e^{\lambda_2 b} \end{bmatrix} \right) = e^{\lambda_1 a + \lambda_2 b} - e^{\lambda_1 b + \lambda_2 a} \neq 0$$
$$\text{da } \lambda_1 a + \lambda_2 b \neq \lambda_1 b + \lambda_2 a \Leftrightarrow \lambda_1 \underbrace{(a-b)}_{\neq 0} \neq \lambda_2 (a-b)$$

$\Rightarrow$ es gibt nur die Lösung $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, d.h. die triviale Lösung.

2. Fall: $\frac{c^2}{4} = d$.
$\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \quad \lambda = -\frac{c}{2}$
$\Rightarrow$ Randbedingung:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda a} & a e^{\lambda a} \\ e^{\lambda b} & e^{\lambda b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} e^{\lambda a} & a e^{\lambda a} \\ e^{\lambda b} & e^{\lambda b} \end{bmatrix} \right) \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Fall: $\frac{c^2}{4} - d < 0$
$\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $e^{-\frac{c}{2} x} \cos\left(x \sqrt{d - \frac{c^2}{4}} \right), e^{-\frac{c}{2} x} \sin\left(x \sqrt{d - \frac{c^2}{4}} \right)$

Randbedingung

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\frac{c}{2}a}\cos\left(a\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right) & e^{-\frac{c}{2}a}\sin\left(a\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right) \\ e^{-\frac{c}{2}b}\cos\left(b\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right) & e^{-\frac{c}{2}b}\sin\left(b\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right) \end{bmatrix}}_{=:R} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det(R) &= e^{-\frac{c}{2}(a+b)}\cos\left(a\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right)\sin\left(b\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right) \\ &\quad -e^{-\frac{c}{2}(a+b)}\cos\left(b\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right)\sin\left(a\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\right) \\ = \quad & e^{-\frac{c}{2}(a+b)}\sin\left(\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}\,(b-a)\right) \end{aligned}$$

□

Weitere Beispiele von homogenen Randwertproblemen, die nur trivial lösbar sind: siehe Übungsblatt 11, Aufgaben 1Ü, 2Ü.

Zurück zum nicht-homogenen Randwertproblem:

$$\begin{cases} Lu := u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f \\ Ru := C\begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

im Spezialfall von separierten Randbedingungen:

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix},$$

d.h. die Randbedingung lautet:

$$\begin{aligned} R_1u &:= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1 \\ R_2u &:= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_2 \end{aligned}$$

Wir setzen nun voraus, dass das homogene Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ R_1u = 0 \\ R_2u = 0 \end{cases}$$

auf $[a;b]$ nur trivial lösbar ist, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} & \det\left(C\begin{bmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{bmatrix}\right) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \det\left(\begin{bmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{bmatrix}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

wobei $\{u_1, u_2\}$ ein beliebiges Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Lu = 0$. Notwendigerweise muss also gelten: $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ und $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$.

Bmerkung:
Achtung! Die Bedingung $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0), (\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$ ist keine hinreichende Bedingung.

Beispiel:

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$$

besitzt die unendlich vielen nicht-trivialen Lösungen

$$u(x) = c \cdot \sin(x), \quad c \in \mathbb{R},$$

aber

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2) = (1,0) \neq (0,0) \\ (\beta_1, \beta_2) = (1,0) \neq (0,0) \end{cases}$$

Bemerkungen:

1) Wir können stets annehmen, dass $[a;b] = [0;1]$.
In der Tat: ist u Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1 \qquad \text{auf } [a;b] \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_2 \end{cases} \tag{7.2}$$

dann ist $v(x) := u\left((b-a)\,x + a\right), \quad x \in [0;1]$ Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} v'' + b_1(x)v' + b_0(x)v = \tilde{f} \\ \tilde{\alpha}_1 v(0) + \tilde{\alpha}_2 v'(0) = \tilde{\eta}_1 \qquad \text{in } [0;1] \\ \tilde{\beta}_1 v(1) + \tilde{\beta}_2 v'(1) = \tilde{\eta}_2 \end{cases} \tag{7.3}$$

wobei

$$\begin{aligned} b_1(x) &= (b-a)a_1(x) \\ b_0(x) &= (b-a)^2 a_0(x) \\ \tilde{f}(x) &= (b-a)^2 f((b-a)x+a) \\ \tilde{\alpha}_1 &= (b-a)\alpha_1 \\ \tilde{\alpha}_2 &= \alpha_2 \\ \tilde{\eta}_1 &= (b-a)\eta_1 \\ \tilde{\beta}_1 &= (b-a)\beta_1 \\ \tilde{\beta}_2 &= \beta_1 \\ \tilde{\eta}_2 &= (b-a)\eta_2 \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt:
Ist v Lösung von (7.3) auf $[0;1]$, dann ist $u(x) = v\left(\frac{x-a}{b-a}\right), x \in [a;b]$ Lösung von (7.2) auf $[a;b]$.

Außerdem ist das zu (7.2) gehörige homogene Randwertproblem nur trivial lösbar $\Leftrightarrow$ das zu (7.3) gehörige homgene Randwertproblem ist nur trivial lösbar.

Beweis:
Nachrechnen! $\square$

2) Wir können uns auf das Studium des halbhomogenen Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = 0 \\ R_2 u = 0 \end{cases}$$

beschränken.

In der Tat: Ist $v \in C^2([a;b])$ für die gilt $R_1 v = \eta_1, R_2 v = \eta_2$ (eine solche Funktion ist leicht zu finden: z.B.: Ansatz: $v(x) = c_0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3$ mit $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$) und w ist Lösung des halbhomogenen Randwertproblems

$$\begin{cases} Lw = f - Lv \\ R_1 w = 0 \\ R_2 w = 0 \end{cases}$$

dann ist $u = v + w$ Lösung des nicht-homogenen Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = \eta_1 \\ R_2 u = \eta_2 \end{cases}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Lu &= L(v+w) = Lv + \underbrace{Lw}_{=f-Lv} = f \\ R_1 u &= R_1 v + R_1 w = \eta_1 + 0 = \eta_1 \\ R_2 u &= R_2 v + R_2 w = \eta_2 + 0 = \eta_2 \end{aligned}$$

$\square$

Also: „nicht homogene Randbedingungen können in die rechte Seite der Differentialgleichung gesteckt werden.“

Berechnung der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = 0 \quad \text{auf } [0;1] \\ R_2 u = 0 \end{cases}$$

Sei dazu $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$$

Dann ist $\{v_1, v_2\}$ mit

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2, \quad c_{11} = R_1u_2, c_{12} = -R_1u_1 \\ v_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2, \quad c_{21} = R_2u_2, c_{22} = -R_2u_1 \end{aligned}$$

wieder ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Lu = 0$ und es gilt $R_1v_1 = 0$ und $R_2v_2 = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} R_1v_1 &= R_1u_2 \cdot R_1u_1 + (-R_1u_1) \cdot R_1u_2 = 0 \\ R_2v_2 &= R_2u_2 \cdot R_2u_1 + (-R_2u_1) \cdot R_2u_2 = 0 \end{aligned}$$

□

Es gilt: $Lv_1 = 0 = Lv_2$, und v_1, v_2 sind linear unabhängig, da:

$$[v_1 \mid v_2] = \underbrace{[u_1 \mid u_2]}_{\text{regulär}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}}_{\text{regulär, da}}$$

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} R_1u_2 & R_2u_2 \\ -R_1u_1 & -R_2u_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\det\left(\begin{bmatrix} R_1u_2 & R_2u_2 \\ R_1u_1 & R_2u_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} R_1u_1 & R_2u_1 \\ R_1u_2 & R_2u_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{bmatrix}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung (siehe oben).

Bemerkung:
Wenn $\det\left(\begin{bmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{bmatrix}\right) = 0$ (d.h., dass das homogene Randwertproblem nicht-trivial lösbar ist), dann existiert i.a. kein Fundamentalsystem $\{v_1, v_2\}$ mit $R_1v_1 = 0, R_2v_2 = 0$.

Beispiel:

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Fundamentalsystem: $\{u_1, u_2\} = \{\sin(x), \cos(x)\}$.
Besitzt kein Fundamentalsystem $\{v_1, v_2\}$ mit $R_1v_1 = R_2v_2 = 0$.

Wir wissen: eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ ist gegeben ducrh die 1. Komponente von

$$\begin{aligned}
y(x) &= \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \\
&= \int\limits_0^x \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \frac{1}{\underbrace{v_1(s)v_2'(s) - v_2(s)v_1'(s)}_{=:W(s)\neq 0}} \begin{bmatrix} v_2'(s) & -v_2(s) \\ -v_1'(s) & v_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \end{bmatrix} ds \\
& \quad W(s)\text{heißt } \textit{Wronski-Determinante} \\
&= \int\limits_0^x \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \frac{1}{W(s)} \begin{bmatrix} -v_2(s)f(s) \\ v_1(s)f(s) \end{bmatrix} ds \\
&= \int\limits_0^x \begin{bmatrix} \frac{v_1(s)v_2(x) - v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) \\ \frac{v_1(s)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) \end{bmatrix} ds
\end{aligned}$$

d.h.

$$y_1(x) = \int\limits_0^x \frac{v_1(s)f(s)}{W(s)}\, ds \cdot v_2(x) - \int\limits_0^x \frac{v_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds \cdot v_1(x)$$

ist partikuläre Lösung von $Lu = f$. Außerdem ist

$$\left(\int\limits_0^1 \frac{v_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds \right) \cdot v_1(x)$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$. Somit ist auch

$$y_p(x) = y_1(x) + \int\limits_0^1 \frac{v_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds\, v_1(x)$$

eine partikuläre Lösung von $Lu = f$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y_p(x) &= \int\limits_0^x \frac{v_1(s)f(s)}{W(s)} v_2(x)\, ds + \int\limits_x^1 \frac{v_2(s)f(s)v_1(x)}{W(s)}\, ds \\
&= \int\limits_0^1 G(x,s)f(s)\, ds
\end{aligned}$$

mit der Funktion

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{v_1(s)v_2(x)}{W(s)}, & s \leq x \\ \frac{v_2(s)v_1(x)}{W(s)}, & x \leq s \end{cases}, (x,s) \in [0;1]^2$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
R_1 y_p &= \alpha_1 y_p(0) + \alpha_2 y_p'(0) \\
&= \alpha_1 \left(\int_0^1 \frac{v_2(s) f(s)}{W(s)} \, ds \; v_1(0) \right) + \\
&\quad \alpha_2 \, \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{v_1(s) f(s)}{W(s)} v_2(x) \, ds + \int_x^1 \frac{v_2(s) f(s) v_1(x)}{W(s)} \, ds \right) \Bigg|_{x=0} \\
&= \alpha_1 \left(\int_0^1 \frac{v_2(s) f(s)}{W(s)} \, ds \; v_1(0) \right) \\
&\quad + \alpha_2 \left(\frac{v_1(0) v_2(0) f(0)}{W(0)} + 0 - \frac{v_1(0) v_2(0) f(0)}{W(0)} + v_1'(0) \int_0^1 \frac{v_2(s) f(s)}{W(s)} \, ds \right) \\
&= \left(\int_0^1 \frac{v_2(s) f(s)}{W(s)} \, ds \right) \underbrace{\left(\alpha_1 v_1(0) + \alpha_2 v_1'(0) \right)}_{= R_1 v_1 = 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Analog folgt aus $R_2 v_2 = 0$, dass $R_2 y_p = 0$.

Mit anderen Worten:

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) \, ds, \quad x \in [0;1]$$

ist die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = f \\ R_1 u_1 = R_2 u_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{auf } [0;1].$$

Die Eigenschaften der Funktion G sind:

$$D_1 := \left\{ (x,s) \in [0;1]^2 \,|\, s \le x \right\}$$
$$D_2 := \left\{ (x,s) \in [0;1]^2 \,|\, x \le s \right\}$$

1) G ist *stetig* auf $[0;1] \times [0;1]$, und *2-mal stetig partiell differenzierbar* nach x auf D_1 bzw. D_2.

2)

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \ge 0}} \frac{G(x+h,x) - G(x,x)}{h} = G_x(x+0,x)$$

Es gilt:

$$G_x(x+0,x) - G_x(x-0,x) = 1$$

In der Tat:

$$\left.\begin{array}{l} G_x(x+0,x) = \frac{v_1(x)v'_{(}x)}{W(x)} \\ G_x(x-0,x) = \frac{v'_1(x)v_2(x)}{W(x)} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad G_x(x+0,x) - G_x(x-0,x) = \frac{v_1(x)v'_2(x) - v'_1(x)v_2(x)}{\underbrace{W(x)}_{=v_1(x)v'_2(x)-v'_1(x)v_2(x)}} = 1$$

3) $\forall\, s \in [0;1] : LG(x,s) = 0, \quad \forall\, x \neq s, x \in [0;1]$

4) $\forall\, s \in]0;1[\colon R_1G(\cdot,s) = 0, R_2G(\cdot,s) = 0.$

Satz 7.3
Falls eine Funktion $\gamma : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften 1) - 4) erfüllt, dann gilt: $\forall\, f \in C\,([0;1])$ ist die Funktion

$$y(x) = \int_0^1 \gamma(x,s)f(s)\,ds, \quad x \in [0;1]$$

die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\left\{\begin{array}{l} Lu = f \text{ auf } [0;1] \\ R_1u = R_2u = 0 \end{array}\right.$$

und γ ist die einzige Funktion mit den Eigenschaften 1) - 4).

Beweis:
Die 2. Behauptung folgt aus der 1. Behauptung. In der Tat gilt dann nämlich

$$\int_0^1 \gamma(x,s)f(s)\,ds = \int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds \quad \forall\, x \in [0;1]$$

wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

$$\left\{\begin{array}{l} Lu = f \\ R_1u = R_2u = 0 \end{array}\right.$$

$\forall\, f \in C\,([0;1])$, d.h. es gilt:

$$\int_0^1 (\gamma(x,s) - G(x,s))\,f(s)\,ds = 0 \quad \forall\, x \in [0;1], \forall\, f \in C\,([0;1])$$

Wähle $f(s) = \gamma(x,s) - G(x,s)$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \underbrace{(\gamma(x,s) - G(x,s))^2}_{\geq 0}\,ds = 0 \quad \forall\, x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(x,s) = G(x,s) \quad \forall\, s \in [0;1], \forall\, x \in [0;1]$$

Noch zu zeigen:

$$y(x) = \int\limits_0^1 \gamma(x,s) f(s)\, ds, \quad x \in [0;1]$$

ist Lösung des Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f \text{ auf } [0;1] \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

$(Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u)$.
Es gilt:

$$y(x) = \int\limits_0^x \underbrace{\gamma(x,s) f(s)}_{\text{in } D_1}\, ds + \int\limits_x^1 \underbrace{\gamma(x,s) f(s)}_{\text{in } D_2}\, ds$$

Da γ in D_1 bzw. in D_2 2-mal stetig differenzierbar bzgl. x, ist auch y 2-mal stetig differenzierbar nach x auf $[0;1]$, und es gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \gamma(x,x)f(x) + \int\limits_0^x \underbrace{\gamma_x(x,s) f(s)}_{\text{in } D_1}\, ds - \gamma(x,x)f(x) + \int\limits_x^1 \underbrace{\gamma_x(x,s) f(s)}_{\text{in } D_2}\, ds \\ \Rightarrow y'(x) &= \int\limits_0^1 \gamma_x(x,s) f(s)\, ds \end{aligned}$$

und

$$y''(x) = \gamma_x(x+0,x)f(x) + \int\limits_0^x \gamma_{xx}(x,s) f(s)\, ds - \gamma_x(x-0,x)f(x) + \int\limits_x^1 \gamma_{xx}(x,s) f(s)\, ds$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} Ly(x) &= \underbrace{(\gamma_x(x+0,x) - \gamma_x(x-0,x))}_{=1 \text{ nach Vor.}} f(x) + \int\limits_0^1 \gamma_x x(x,s) f(s)\, ds \\ &\quad + a_1(x) \int\limits_0^1 \gamma_x(x,s) f(s)\, ds + a_0(x) \int\limits_0^1 \gamma(x,s) f(s)\, ds \\ \Rightarrow Ly(x) &= f(x) + \int\limits_0^1 \underbrace{(\gamma_{xx}(x,s) + a_1(x)\gamma_x(x,s) + a_0(x)\gamma(x,s))}_{=L\gamma(x,s)=0 \quad \forall\, x \neq s \text{ nach 3)}} f(s)\, ds \\ \Rightarrow Ly(x) &= f(x) \quad \forall\, x \in [0;1] \end{aligned}$$

Überprüfung der Randbedingung:

$$\begin{aligned}
R_1 y &= \alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) \\
&= \alpha_1 \int_0^1 \gamma(0,s) f(s)\, ds + \alpha_2 \int_0^1 \gamma_x(0,s) f(s)\, ds \\
&= \int_0^1 \underbrace{(\alpha_1 \gamma(0,s) + \alpha_2 \gamma_x(0,s))}_{=R_1\gamma(\cdot,s)=0 \text{ nach 4) } \forall s\in]0;1[} f(s)\, ds \\
\Rightarrow R_1 y &= 0
\end{aligned}$$

Analog sieht man:

$$R_2 y = 0$$

□

Definition 7.1
Die eindeutige Funktion G, die die Eigenschaften 1) - 4) besitzt, heißt die *Green'sche Funktion* des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f \text{ auf } [0;1] \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

Beispiel:
Randwertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \quad R_1 y = y(0), R_2 y = y(1) \end{cases}$$

Bestimmung der Green'schen Funktion des Randwertproblems:
Fundamentalsystem: $\{1, x\} =: \{u_1, u_2\}$.

$$\begin{bmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ist regulär, also ist das homogene Randwertproblem nur trivial lösbar und G existiert.

Modifiziere Fundamentalsystem:
Fundamentalsystem: $\{x, x-1\} =: \{v_1, v_2\}$.

Es gilt: $R_1 v_1 = 0, R_2 v_2 = 0$

$$\Rightarrow G(x,s) = \begin{cases} s(x-1), & s \le x \\ x(s-1), & s \ge x \end{cases}, (x,s) \in [0;1]^2$$

ist die Green'sche Funktion.

Nebenrechnung:

$$W(x) = \det\left(\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x & x-1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

Anwendung:
Bestimmung der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} y'' = 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(x) &= \int_0^1 G(x,s) \cdot 1 \, ds \\ &= (x-1) \int_0^x s \, ds + x \int_x^1 (s-1) \, ds \\ &= \dots \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Bedeutung der Green'schen Funktion für semi-lineare Probleme

Betrachte Randwertprobleme vom Typ

$$\begin{cases} Ly = f(x, y, y') \quad \text{auf } [0;1] \\ R_1 y = 0, R_2 y = 0 \end{cases}$$

mit $Ly = y'' + a_1(x)y'a_0(x)y,\ a_0, a_1 \in C([0;1]), f : [0;1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

Ein solches Randwertproblem heißt *semi-linear*: die Differentialgleichung ist linear in der höchsten Ableitung aber nicht-linear in den niedrigeren Ableitungen.
Wir nehmen an, dass das homogene Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

nur trivial lösbar ist. Somit existiert die Green'sche Funktion G des Randwertproblems.

Angenommen, $u \in C^2([0;1])$ ist (klassische) Lösug des semi-linearen Randwertproblems. Setze $g(x) := f(x, u(x), u'(x)), x \in [0;1]$. Klar: g ist stetig und u ist die eindeutige klassische Lösung des linearen Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = g \\ R_1 u = R_2 = u = 0 \end{cases}$$

Daher ist u gegeben durch die Integralformel:

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s) g(s) \, ds \quad \forall\, x \in [0;1]$$

d.h. es gilt:

$$\begin{cases} u \in C^1([0;1]) \\ u(x) = \int\limits_0^1 G(x,s) f(s, u(s), u'(s)) \, ds \end{cases} \tag{7.4}$$

Umgekehrt gilt: erfüllt u (7.4), dann ist u die eindeutige Lösung des semi-linearen Randwertproblems. D.h. die Lösbarkeit des semi-linearen Randwertproblems ist äquivalent zur Existenz eines Fixpunktes der Abbildung

$$\begin{aligned} T : C^1([0;1]) &\longrightarrow C^1([0;1]) \\ u &\longmapsto \left\{ x \in [0;1] \mapsto \int_0^1 G(x,s) f(s, u(s), u'(s))\, ds \right. \end{aligned}$$

Spezialfall:

Satz 7.4
Sei $f : [0;1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, global Lipschitz-stetig bzgl. u:

$$|f(x,u) - f(x,\tilde{u})| \le L\,|u - \tilde{u}| \quad \forall\, x \in [0;1], \forall\, u, \tilde{u} \in \mathbb{R}.$$

Gilt $L < 8$, dann gibt es genau eine klassische Lösung des semi-linearen Randwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = f(x,u) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

Beweis:
u ist eindeutige klassische Lösung des semi-linearen Randwertproblems
$\Leftrightarrow$ u ist eindeutiger Fixpunkt der Abbildung

$$\begin{aligned} T : C([0;1]) &\longrightarrow C([0;1]) \\ u &\longmapsto \left\{ x \in [0;1] \mapsto \int_0^1 G(x,s) f(s, u(s))\, ds \right. \end{aligned}$$

Es gilt: $(C([0;1]); ||\cdot||_\infty)$[1] ist ein Banachraum und für $u, v \in C([0;1]), x \in [0;1]$ gilt:

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tv(x)| &= \left| \int_0^1 G(x,s)\left(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\right) ds \right| \\ &\le L \int_0^1 |G(x,s)| \cdot \underbrace{|u(s) - v(s)|}_{\le ||u-v||_\infty} ds \\ &\le L\, ||u - v||_\infty \int_0^1 |G(x,s)|\, ds \end{aligned}$$

[1] $||u||_\infty = \max\limits_{x\in[0;1]} |u(x)|$

und

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 |\, G(x,s)|\; ds &= \int\limits_0^x s(1-x)\, ds + \int\limits_x^1 x(1-s)\, ds \\
&= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \\
&\le \max_{x\in[0;1]} \left\{ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\
\Rightarrow ||\, Tu(x) - Tv(x)||_\infty &= \max_{x\in[0;1]} |\, Tu(x) - Tv(x)| \\
&\le \frac{L}{8}\, ||\, u - v||_\infty
\end{aligned}
$$

nach Voraussetzung ist $\frac{L}{8} < 1$, d.h. T ist strikte Kontraktion in $C\,([0;1])$. Somit folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $u \in C\,([0;1])$ von T: $u = Tu$. □

Anwendungsbeispiel:

$$
\begin{cases} y' = \sin(y)e^x \quad \text{auf } [0;1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}
$$

Hier gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sin(y)e^x \\
f_y(x,y) &= \cos(y)e^x
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow |\, f(x,y) - f(x,z)| \overset{\text{MWS}}{\le} \underbrace{e}_{<8} |\, y - z|
$$

$\overset{\text{Satz 7.4}}{\Rightarrow}$ $\exists!$ klassische Lösung des semi-linearen Randwertproblems.

Maximumsprinzip für lineare Randwertprobleme

$$
\begin{cases} Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}
$$

Lemma 7.1
Sei $u \in C^2(I)$, I offenes Intervall, u sei nicht konstant auf I und u besitze in einem Punkt $x_0 \in I$ ein Maximum.
Dann existiert $x^* \in I$ mit $u''(x^*) + a_1(x^*)u'(x*) < 0$.

Beweis:
Es reicht zu zeigen, dass $x^* \in I$ existiert mit

$$
\left(e^{\int a_1(x)\, ds} u'(x)\right)' < 0
$$

Nebenrechnung:

$$
\left(e^{\int a_1(x)\, dx} u'(x)\right)' = a_1(x)e^{\int a_1(x)\, dx} u'(x) + e^{\int a_1(x)\, dx} u''(x)
$$

Nach Voraussetzung existiert $x_1 \in I$ mit: $u(x_1) < u(x_0)$.

1. Fall: $x_1 > x_0$.
Dann existiert nach MWS $x_2 \in]x_0; x_1[$ mit

$$\underbrace{u(x_1) - u(x_0)}_{<0} = u'(x_2) \underbrace{(x_1 - x_0)}_{>0}$$

d.h. $u'(x_2) < 0$
$\Rightarrow p(x) \cdot u'(x_2) < 0 \qquad$ (wobei $p(x) \cdot \exp\left(\int a_1(x)\, ds\right) > 0$).

Andererseits: $p(x) \cdot u'(x_0) = 0$.

Wieder existiert nach MWS $x^* \in]x_0; x_2[$ mit:

$$\underbrace{p(x_2)u'(x_2) - p(x_0)u'(x_0)}_{<0} = \big(p(x^*)u'(x^*)\big)' \underbrace{(x_2 - x_0)}_{>0}$$

$\Rightarrow (p(x^*)u'(x^*))' < 0$.

2. Fall: $x_1 < x_0$
analog.

□

Satz 7.5 (Schwaches Maximumsprinzip)
Sei $u \in C^2([a; b])$.

i) Es gelte: $a_0 \equiv 0$ und $Lu \geq 0$ auf $[a; b]$.
Dann folgt:

$$\max_{[a;b]} u = \max\{u(a), u(b)\}$$

ii) Es gelte: $a_0 \leq 0$ auf $[a; b]$ und $Lu \geq 0$ auf $[a; b]$. Dann gilt:

$$\max_{[a;b]} u^+ = \max\{u^+(a), u^+(b)\},$$

wobei $r^+ := \max\{0, r\}, \quad \forall\, r \in \mathbb{R}$.

Beweis:

i) Angenommen: es existiert $x_0 \in]a; b[$ mit $u(x_0) = \max_{[a;b]} u > \max\{u(a), u(b)\}$.
Dann ist insbesondere u auf $]a; b[$ nicht konstant. Nach Lemma 7.1 existiert daher $x^* \in]a; b[$ mit

$$Lu(x^*) = u''(x^*) + a_1(x^*)u'(x^*) < 0$$

Widerspruch zu $Lu \geq 0$ auf $[a; b]$.

ii) Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann existiert $x_0 \in]a;b[$ mit der Eigenschaft

$$u(x_0) = \max_{[a;b]} u^+ > \max\{u^+(a), u^+(b)\} \geq 0$$

Wende nun Lemma 7.1 auf ein Intervall I um x_0 an, auf dem gilt: $u > 0$ auf I und u nicht konstant auf I
$\Rightarrow \exists\, x^* \in I$ mit $u(x^*) > 0$ und

$$u''(x^*) + a_1(x^*)u'(x^*) < 0$$

$$\Rightarrow Lu(x^*) = \underbrace{u''(x^*) + a_1(x^*)u'(x^*)}_{<0} + \underbrace{a_0(x^*)}_{\leq 0}\underbrace{u(x^*)}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung.

$\square$