Measure- and Integrationtheory - Assignment 01

Duc (395220), Viktor (392636), Jacky (391049)

April 28, 2020

Aufgabe 1

Let $(X, \mathcal{A}, \mu)$ be a measure space. Show that $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \text{ or } \mu(A^c) = 0\}$ is a σ algebra on X.

Proof. We show the three properties from definition 3.3.

(i) We have $\mu(X^{\complement}) = \mu(\emptyset) = 0$ by definition 3.4, implying $X \in \mathcal{B}$.

(ii) Let $A \in \mathcal{B}$. Then either $\mu(A) = 0$ or $\mu(A^{\complement}) = 0$ holds.

In the first case $A^{\complement} \in \mathcal{B}$ as $\mu((A^{\complement})^{\complement}) = \mu(A) = 0$ holds. In the second case $A^{\complement} \in \mathcal{B}$ is immediate.

(iii) Let $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$. We first show that μ is monotone, i.e. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ for $A, B \in \mathcal{A}$. As $B = (B \setminus A) \cup A$ is a disjoint union, we have $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$ as $\mu(C) \geq 0$ for all $C \in \mathcal{A}$. (We have $B \setminus A = B \cap A^{\complement} = (B^{\complement} \cup A)^{\complement} \in \mathcal{A}$ by properties two and three). This argument holds for countable families, too.

Next we show that $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$. We can rewrite

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_k \right)$$

as a disjoint union, implying the statement by the monotonicity of μ.

<u>Case 1: $\mu(A_k) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$.</u> We have

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) = 0.$$

<u>Case 2: There exists a subset $A \subset \mathbb{N}$ such that $\mu(A_k^{\complement}) = 0$ for $k \in A$.</u> By de-Morgans laws and the monotonicity of μ it holds

$$\mu\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^{\complement}\right) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k^{\complement}\right) \leq \mu(A_i^{\complement}) = 0$$

for some $i \in A$, as $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \subset B_i$.

$\square$

Let $(X, \mathcal{A})$ be a measurable space and $X_0 \subset X$ a non-emptyset. Show that the trace σ algebra $\mathcal{B} \coloneqq \{A \cap X_0 : A \in \mathcal{A}\}$ is a σ-algebra.

Proof. We show the three properties from definition 3.3.

(i) We have $X_0 = X \cap X_0 \in \mathcal{B}$, as $X \in \mathcal{A}$ as $\mathcal{A}$ is a σ algebra $(\star)$.

(ii) For $B \coloneqq A \cap X_0 \in \mathcal{B}$ with $A \in \mathcal{A}$

$$X_0 \setminus B = X_0 \setminus (A \cap X_0) = X_0 \setminus A = X_0 \cap A^{\complement} \in \mathcal{B}$$

holds, as by $(\star)$, $A^{\complement} \in \mathcal{A}$.

(iii) For $(B_k \coloneqq A_k \cap X_0)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ with $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \cap X_0) = X_0 \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{B},$$

holds, as $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ by $(\star)$.

$\square$

Aufgabe 2

To show:

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \overset{(1)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \overset{(2)}{\leq} \limsup \mu(A_n) \overset{(3)}{\leq} \mu(\limsup A_n).$$

Zur Erinnerung:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$$

Proof. Seien $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(1) Sei $B_n \coloneqq \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$. Dann ist die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend: $B_n \subset B_{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Satz 3.7 (a) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mu(\liminf_{n\to\infty} A_n).$$

Nun ist $B_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \subset A_k$ für alle $k \geq n$. Daher $\mu(B_n) \leq \mu(A_k)$ für alle $k \geq n$. Somit auch $\mu(B_n) \leq \inf_{k\geq n} \mu(A_k)$. Grenzwertbildung ergibt

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_k).$$

(2) Das ist klar aus der Definition des Limes superiors und Limes inferiors, da für alle $\varepsilon > 0$ und für fast alle Folgenglieder einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n - \varepsilon < x_n < \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$$

gilt.

(3) Das Maß ist endlich. Daher ist $\mu(A_i)$ endlich für alle Mengen A_i. Damit können wir die Stetigkeit von oben von μ ausnutzen $(*)$. Definiere die Menge $B_n \coloneqq \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$. Aus der Definition folgt, dass $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absteigend ist. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \overset{(*)}{=} \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right).$$

Nun ist $B_n \supset A_i$ für alle $i \geq n$. Damit ist $\mu(B_n) \geq \mu(A_i)$ für alle $i \geq n$. Sodann haben wir $\mu(B_n) \geq \sup_{i\geq n} \mu(A_i)$. Grenzwertbildung ergibt dann

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right).$$

$\square$

Zum Schluss noch ein Beispiel, wo $\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$ gilt. Betrachte die Lebesge-messbaren Mengen mit dem Lebesguemaß in $\mathbb{R}^2$. Sei $A_i = [0,1]^2$, falls i gerade ist; andernfalls sei $A_i = [42,43]^2$. $\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 0$, da $\liminf_{n\to\infty} A_n$ die leere Menge ist. Wir sehen, dass $\liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1$ ist.