Skript zur Vorlesung

MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE

Jürgen Gärtner

Sommer 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Es existieren im wesentlichen zwei sehr unterschiedliche Zugänge zur Darstellung der Grundlagen der Maß– und Integrationstheorie. Beide besitzen verschiedene Vor– und Nachteile, und im Grunde genommen erweist sich für bestimmte Probleme eine Kenntnis sowohl der einen als auch der anderen Theorie und ihrer Wechselbeziehungen als fruchtbar.

Beim *ersten Zugang* wird zunächst der Begriff des Maßes eingeführt und systematisch studiert. Aufbauend auf dieser maßtheoretischen Grundlage wird dann die moderne Integrationstheorie auf abstraktem Niveau entwickelt. Dies gestattet die Integration reellwertiger Funktionen nicht nur auf Euklidischen sondern auch auf sehr abstrakten Räumen.

Der *zweite Zugang* betrachtet Integrale als lineare Funktionale von Funktionen auf (gewissen) topologischen Räumen. Dabei geht man in umgekehrter Reihenfolge vor. Erst nachdem die Integrationstheorie entwickelt wurde, werden maßtheoretische Strukturen eingeführt. Dieses mehr funktionalanalytisch orientierte Vorgehen liefert einen relativ schnellen Einstieg in die Integrationstheorie auf dem Euklidischen Raum und etwas allgemeineren topologischen Räumen. Dabei ist man jedoch von vornherein an die topologische Struktur gebunden und unterliegt zusätzlichen Einschränkungen. Bei der maßtheoretischen Fundierung der Wahrscheinlichkeitstheorie hat sich jedoch z.B. die Postulierung des a-priori-Vorhandenseins einer Topologie als unnötig und komplizierend erwiesen, die Ausgangsobjekte sind Maße und nicht die Integrale.

Die größere Zahl von Lehrbüchern folgt dem (auch historisch) ersten Zugang, dem wir uns im vorliegenden Skript anschließen wollen. Nach einer kurzen historischen Einordnung und einer Motivation des Maßbegriffs (Kapitel 1) wird das Lebesguesche Maß auf dem Euklidischen Raum konstruiert (Kapitel 2). Beginnend mit Kapitel 3 wird dann die abstrakte Maß- und Integrationstheorie systematisch entwickelt.

Als besonders fruchtbar erweist sich oft die Verquickung verschiedener Theorien. Dies trifft auch auf die Maßtheorie und die Theorie topologischer und metrischer Räume zu. In beiden Disziplinen werden in gewissem Grade verwandte Strukturen untersucht. Deshalb würde es sich anbieten, im Anschluß an das vorliegende Skript Maße auf topologischen Räumen zu studieren. Schließlich sei auf die Wahrscheinlichkeitstheorie verwiesen, deren axiomatisches Fundament sich auf die Begriffe und Sätze der Maß- und Integrationstheorie stützt.

Die folgenden Bücher wurden zur Erstellung des Skripts unmittelbar herangezogen: H. Bauer [3], [4], D.L. Cohn [11], A.N. Kolmogorov und S.V. Fomin [31], [32] sowie I.P. Natanson [37]. Zu empfehlen sind insbesondere [4] und [11]. Das Literaturverzeichnis enthält außerdem weiterführende Literatur zur Vertiefung und Ergänzung des Stoffes.

Kapitel 1

Motivation. Inhaltliche Bedeutung des Maßbegriffs

Die Maß– und Integrationstheorie entstand am Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts. Die Entwicklung der Mathematik wurde in dieser Zeit nachhaltig durch die französische und die deutsche Schule mit Henri Poincaré (1854–1912) und David Hilbert (1862–1943) als deren führende Vertreter geprägt. Erinnert sei in diesem Zusammenhang an den Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris, deren Teilnehmern Hilbert seine berühmten 23 Forschungsprobleme unterbreitete.

Eines der wichtigsten Ereignisse bestand darin, daß die Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen eine hervorragende Stellung einzunehmen begann. In Gestalt einer selbständigen Disziplin, die sich mit der Analyse solcher Grundbegriffe wie funktionale Abhängigkeit, Integral, Ableitung usw. beschäftigte, bildete sich die Theorie der reellen Funktionen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts heraus, und zwar in Verbindung mit verfeinerten Fragestellungen, die sich aus der Theorie der trigonometrischen Reihen ergaben. Ende des 19. Jahrhunderts wurde diese Theorie durch Begriffe und Methoden der Mengenlehre bereichert, deren Grundlagen von Georg Cantor (1845–1918) geschaffen wurden. Aufbauend auf diesen Erfolgen und ausgehend von den dabei auftretenden neuen Erfordernissen entstand die Maß– und Integrationstheorie. Der entscheidende Durchbruch wurde in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts vollzogen mit der Schaffung der Maßtheorie für Punktmengen (Borel-Mengen, Lebesguesches Maß einer Menge), der Einführung des Begriffs der meßbaren Funktion (Borel-Funktionen, Bairesche Funktionen) und einer wesentlichen Verallgemeinerung des Integralbegriffes (Lebesgue-Integral).

Diese Entwicklung wurde u.a. von folgenden Mathematikern geprägt:

Emile Borel (1871–1956)	Initiator und Organisator der französischen Schule (u.a. Funktionentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie)
R.-L. Baire (1879–1932)	u.a. Untersuchung unstetiger Funktionen
Henri Lebesgue (1875–1941)	1897–1900 Dissertation zu „Integral–Länge–Fläche"; wurde als zu kühn empfunden und erst 1902 zur Verteidigung zugelassen
N.N. Lusin (1883–1950)	insbesondere trigonometrische Reihen

Viele interessante historische Anmerkungen findet man in der Monographie von J. Elstrodt [21].

Inhaltliche Bedeutung des Maßbegriffs

Ausgangspunkt ist die folgende Situation. Gegeben ist eine Grundmenge Ω, und man möchte einer hinreichend großen Klasse von Teilmengen A von Ω eine *Maßzahl* $m(A)$ zuordnen.

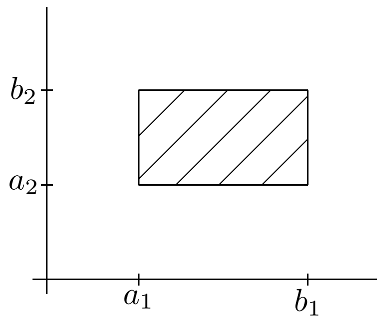
Beispiel 1.1. ELEMENTARGEOMETRIE: $\Omega := \mathbb{R}^d$

(i) Jedem achsenparallelen Quader

$$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

ordnet man als Maßzahl sein Elementarvolumen (Fläche, Länge) zu:

$$m(A) := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$



(ii) Sind die Mengen A und B zueinander kongruent, d.h. durch Drehung und Verschiebung ineinander überführbar, so gelte

$$m(A) = m(B).$$

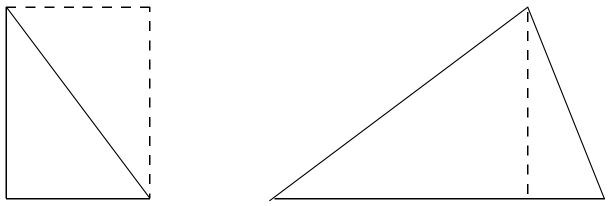
(iii) Setzt sich A aus endlich vielen Teilen $A_1, \ldots, A_n$ zusammen, d.h.

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{und} \quad A_k \cap A_l = \emptyset \quad \text{für} \quad k \neq l,$$

und ist jedem dieser Teile A_i eine Maßzahl $m(A_i)$ zugeordnet, so besitze A die Maßzahl

$$m(A) := \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Dies erlaubt es z.B., allen Dreiecken eine Maßzahl zuzuordnen. Da sich jedes Rechteck aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzt, nimmt man als Maßzahl eines solchen Dreiecks die Hälfte der Maßzahl des Rechtecks. Ein beliebiges Dreieck läßt sich dann in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.



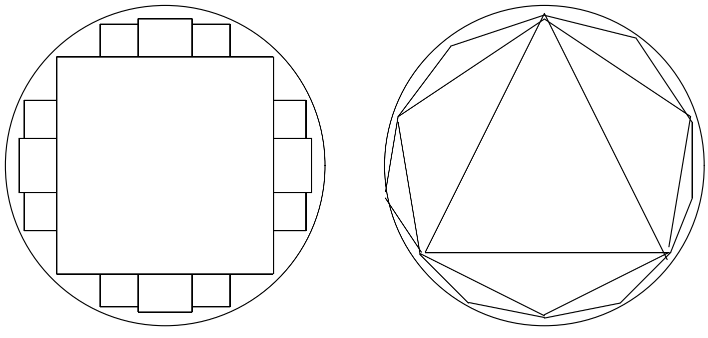
(iv) Um die Maßzahlen nicht elementargeometrischer Mengen approximativ bestimmen zu können, fordert man außerdem folgendes. Sind A_1, A_2, A_3, ... abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen mit den Maßzahlen $m(A_1)$, $m(A_2)$, $m(A_3)$, ..., so besitze

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

ebenfalls eine Maßzahl, und zwar

$$m(A) := \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Auf diese Weise lassen sich z.B. die Maßzahlen von Kreisen bestimmen (siehe Abbildung).



$3 \cdot 2^{n-1}$-Ecke

Dabei muß natürlich noch geprüft werden, ob verschiedene Approximationen zur gleichen Maßzahl führen.

Aufgabe: Man ordne jeder (beschränkten) Teilmenge A des $\mathbb{R}^d$ eine Maßzahl $m(A)$ zu, die die Eigenschaften (i) – (iv) besitzt.

Wie wir später sehen werden, ist diese Aufgabe bei Zugrundelegung der üblichen Axiome der Mengenlehre (Auswahlaxiom, Kontinuumhypothese) *in keiner Dimension lösbar!*

Korrigierte Aufgabe *(H. Lebesgue)*: Man ordne „möglichst vielen" Mengen A eine Maßzahl $m(A)$ zu.

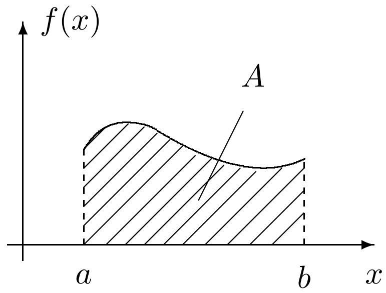
Beispiel 1.2. Integrationstheorie

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und o.B.d.A. nichtnegativ. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(A), \tag{1.1}$$

wobei

$$A := \{(x,y)\colon a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$



die Fläche unter dem Graphen der Funktion f ist. Kann man einer „großen" Klasse von Mengen A eine Maßzahl $m(A)$ zuordnen, so kann man durch (1.1) das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ für eine große Klasse von Funktionen definieren, nicht nur für stetige und Riemann-integrierbare Funktionen, sondern auch für sehr pathologische Funktionen wie die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rational,} \\ 0, & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Dieser Zugang zum Integralbegriff hat Vorteile. So vereinfachen sich die Regeln für die Vertauschung von Grenzübergang und Integration und die Vorschriften für die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ganz wesentlich. Außerdem läßt sich dieses Herangehen problemlos auf die Integration reellwertiger Funktionen auf unendlichdimensionalen Räumen ausdehnen. Im Kapitel 5 werden wir das Integral auf andere Weise einführen. Später (Kapitel 7) werden wir dann sehen, daß dies zum obigen Ansatz äquivalent ist.

Beispiel 1.3. Wahrscheinlichkeitstheorie

Die axiomatisch-maßtheoretische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde 1933 von A.N. Kolmogorov (1903-1987) gegeben. Wir wollen diesen Ansatz anhand von zwei Beispielen illustrieren.

a) *Idealer Würfel:* $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$.
Jeder Teilmenge A von Ω ordnet man die Maßzahl

$$m(A) := \frac{\operatorname{card}(A)}{6}$$

zu, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A genannt wird.

b) *Wienersches Maß* (L. Bachelier 1900, A. Einstein 1912, N. Wiener 1923):

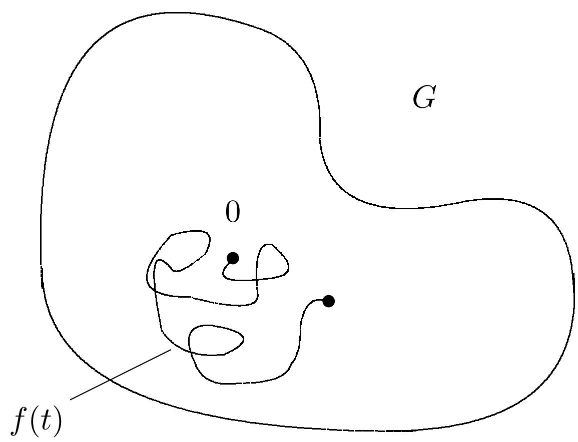
Dies ist ein Modell für die Brownsche Molekularbewegung. In diesem Fall ist

$$\Omega := C([0,T]; \mathbb{R}^3)$$

der Banachraum der stetigen Funktionen $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3$. Ausgehend von den zugrundeliegenden physikalischen Gesetzen ordnet man bestimmten Mengen A stetiger Trajektorien aus Ω eine Maßzahl $m(A)$ zu. Insbesondere wird allen offenen und abgeschlossenen Teilmengen von Ω eine Maßzahl zugeordnet. Ist z.B. G ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^3$ und $0 \in G$, so kann man sich etwa für die Maßzahl der Menge

$$A = \big\{ f \in C([0,T]; \mathbb{R}^3) \colon f(0) = 0,\ f(t) \in G \text{ für alle } t \in [0,T] \big\}$$

interessieren. Die Maßzahl $m(A)$, in der Wahrscheinlichkeitstheorie meist mit $P(A)$ bezeichnet, wird dabei interpretiert als die Wahrscheinlichkeit, daß ein in 0 startendes Brownsches Teilchen das Gebiet G bis zum Zeitpunkt T nicht verläßt.



Trajektorien der Brownschen Bewegung

Die obige Aufzählung läßt sich mit Anwendungsbeispielen aus vielen anderen Gebieten fortsetzen:

Beispiel 1.4. Theorie dynamischer Systeme, Ergodentheorie

Beispiel 1.5. Partielle Differentialgleichungen, Potentialtheorie

Beispiel 1.6. Statistische Mechanik

Beispiel 1.7. Euklidische Quantenfeldtheorie

Kapitel 2

Das Lebesguesche Maß ebener Mengen

Wir beschränken uns im folgenden der Einfachheit halber auf den zweidimensionalen Fall, d.h. wir betrachten als Grundmenge Ω den $\mathbb{R}^2$. Die Definitionen und Resultate lassen sich problemlos auf den $\mathbb{R}^d$ für beliebiges $d \geq 1$ übertragen.

2.1. Das Maß elementarer Mengen

Mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir das System aller *achsenparallelen Rechtecke*, d.h. aller Mengen R der Gestalt

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ a \underset{(=)}{<} x \underset{(=)}{<} b,\ c \underset{(=)}{<} y \underset{(=)}{<} d \right\}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Das Mengensystem $\mathfrak{S}$ enthält somit offene, halboffene und abgeschlossene Rechtecke, Strecken, Punkte und die leere Menge.

Definition 2.1. *(Maß eines Rechtecks aus $\mathfrak{S}$)*

(i) $m(\emptyset) := 0$;

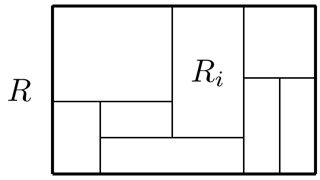
(ii) $m(R) := (b - a)(d - c), \qquad$ falls $R \neq \emptyset$.

Folgerung 2.2.

a) $m(R) \geq 0$ *für alle* $R \in \mathfrak{S}$*;*

b) m *ist* additiv: *Ist das Rechteck* $R \in \mathfrak{S}$ *als disjunkte Vereinigung endlich vieler Rechtecke* $R_1, \ldots, R_n \in \mathfrak{S}$ *darstellbar (d.h.* $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$*,* $R_k \cap R_l = \emptyset$ *für* $k \neq l$*), so gilt*

$$m(R) = \sum_{i=1}^{n} m(R_i).$$



Als nächstes wollen wir das Maß von $\mathfrak{S}$ auf eine umfangreichere Klasse von Mengen unter Beibehaltung der Eigenschaften a) und b) fortsetzen.

Definition 2.3. Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ heiße *elementar*, wenn sie sich als endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{S}$ darstellen läßt. Das System aller elementaren Mengen bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$.

Wir erinnern daran, daß die *symmetrische Differenz* zweier Mengen A und B durch $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ gegeben ist. Die folgende Behauptung erhellt die Struktur des Mengensystems $\mathfrak{E}$.

Behauptung 2.4. *(Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Mengenoperationen) Für zwei beliebige elementare Mengen A und B sind auch die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ und $A \triangle B$ elementar.*

Beweis. Die Mengen A und B besitzen die Gestalt

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{i=1}^{m} P_i, \qquad P_1, \ldots, P_m \in \mathfrak{S}, \quad P_k \cap P_l = \emptyset \quad \text{für } k \neq l, \\ B &= \bigcup_{j=1}^{n} Q_j, \qquad Q_1, \ldots, Q_n \in \mathfrak{S}, \quad Q_k \cap Q_l = \emptyset \quad \text{für } k \neq l. \end{aligned}$$

1^0 *Durchschnitt:* Die Mengen

$$R_{ij} := P_i \cap Q_j \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

sind paarweise disjunkte achsenparallele Rechtecke. Deshalb ist

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} (P_i \cap Q_j) = \bigcup_{i,j} R_{ij}$$

elementar.

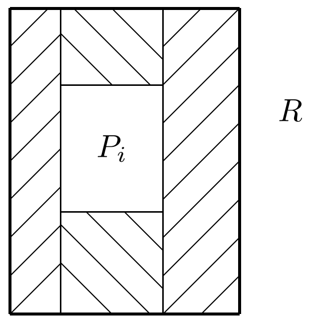
2^0 *Vereinigung:* Es sei R ein achsenparalleles Rechteck, das sowohl A als auch B umfaßt. Dann gilt

$$A \cup B = R \setminus [(R \setminus A) \cap (R \setminus B)].$$

Die Menge auf der rechten Seite ist elementar, da die Differenz aus einem achsenparallelen Rechteck und einer darin enthaltenen elementaren Menge elementar ist. So hat z.B. die Menge $R \setminus A$ die Gestalt

$$R \setminus A = R \setminus \bigcup_{i=1}^{m} P_i = \bigcap_{i=1}^{m} (R \setminus P_i).$$

Die Mengen $R \setminus P_i$ auf der rechten Seite sind offensichtlich elementar (siehe Abbildung), und deren endlicher Durchschnitt ist nach 1^0 gleichfalls elementar.



3^0 *Differenz, symmetrische Differenz:* Übungsaufgabe. □

Folgerung 2.5. *Eine Menge ist genau dann elementar, wenn sie sich als (nicht notwendigerweise disjunkte) endliche Vereinigung achsenparalleler Rechtecke darstellen läßt.*

Definition 2.6. *(Maß elementarer Mengen)*
Sei $A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ eine elementare Menge, dargestellt als disjunkte Vereinigung von Rechtecken $R_1, \dots, R_n \in \mathfrak{S}$. Dann definieren wir

$$\hat{m}(A) := \sum_{i=1}^{n} m(R_i).$$

Bemerkung 2.7.

1. Die Darstellung von A als disjunkte Vereinigung achsenparalleler Rechtecke ist nicht eindeutig. Um die Korrektheit der Definition 2.6 zu sichern, ist noch nachzuweisen, daß verschiedene Darstellungen dieser Art zur gleichen Maßzahl $\hat{m}(A)$ führen (*Übungsaufgabe*).
2. $\hat{m}(A) = m(A)$ für $A \in \mathfrak{S}$.

Behauptung 2.8. *$\hat{m}$ ist nichtnegativ und additiv:*

a) $\hat{m}(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \mathfrak{E}$*;* $\hat{m}(\emptyset) = 0$*;*

b) Sind $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkte *Mengen aus* $\mathfrak{E}$*, so gehört auch*

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

zu $\mathfrak{E}$*, und es gilt*

$$\hat{m}(A) = \sum_{i=1}^{n} \hat{m}(A_i).$$

Beweis. Es ist nur die letzte Gleichung zu zeigen. Da die Mengen A_i zu $\mathfrak{E}$ gehören, besitzen sie Darstellungen der Form

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} R_{ij} \quad \text{mit } R_{ij} \in \mathfrak{S},\ R_{ij} \cap R_{ij'} = \emptyset \text{ für } j \neq j' \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Folglich ist

$$A = \bigcup_{i,j} R_{ij}.$$

Da die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind, ist dies eine *disjunkte* Vereinigung achsenparalleler Rechtecke (d.h. $R_{ij} \cap R_{i'j'} = \emptyset$ für $(i,j) \neq (i',j')$). Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{m}(A) &= \sum_{i,j} m(R_{ij}) = \sum_i \left(\sum_j m(R_{ij}) \right) \\ &= \sum_i \hat{m}(A_i). \end{aligned}$$

□

Unser Ziel ist es, das Maß $\hat{m}$ auf eine „große“ Klasse nichtelementarer Mengen fortzusetzen. Hierzu ist die Erkenntnis fundamental, daß die Additivität von $\hat{m}$ (Behauptung 2.8 b)) nicht nur für endlich viele, sondern auch für abzählbar unendlich viele Mengen gilt.

Theorem 2.9. *Gegeben seien abzählbar viele* paarweise disjunkte *elementare Mengen A_n. Ist*

$$A := \bigcup_n A_n$$

elementar, so gilt

$$\hat{m}(A) = \sum_n \hat{m}(A_n). \tag{2.1}$$

Bemerkung 2.10.

1. Mit „abzählbar“ ist im folgenden stets „endlich“ oder „abzählbar unendlich“ gemeint. Eine endliche Folge $A_1, \ldots, A_n$ von Mengen können wir als unendliche Folge ansehen, indem wir abzählbar unendlich oft die leere Menge anhängen:
$$A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \ldots$$

2. Die Eigenschaft (2.1) der Maßzahl $\hat{m}$ heißt *σ-Additivität* (oder auch abzählbare Volladditivität).

Beweis des Theorems. Wir betrachten o.B.d.A. abzählbar unendlich viele disjunkte Mengen A_1, A_2, ... Nach Behauptung 2.4 ist

$$B_N := A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} A_n$$

elementar, d.h.

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) \cup B_N$$

ist eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter elementarer Mengen ($N = 1, 2, \ldots$). Unter Benutzung der endlichen Additivität von $\hat{m}$ (Behauptung 2.8) erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} \hat{m}(A) &= \sum_{n=1}^{N} \hat{m}(A_n) + \hat{m}(B_N) \\ &\geq \sum_{n=1}^{N} \hat{m}(A_n). \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $N \to \infty$ folgt hieraus

$$\hat{m}(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{m}(A_n).$$

Die entgegengesetzte Ungleichung ist tieferliegend. Wir beweisen die folgende etwas allgemeinere Aussage.

Lemma 2.11. *(Subadditivität)*
Gegeben seien elementare Mengen A, A_1, A_2, ... mit

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Dann gilt

$$\hat{m}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{m}(A_n).$$

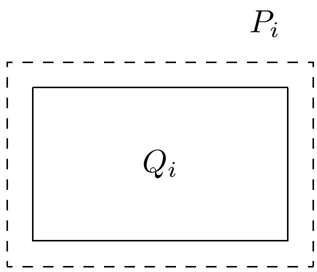
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

1^0 Es existiert eine *kompakte* (d.h. abgeschlossene und beschränkte) elementare Menge $K \subseteq A$ mit

$$\hat{m}(K) \geq \hat{m}(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tatsächlich, da A elementar ist, existieren paarweise disjunkte achsenparallele Rechtecke $P_1, \dots, P_r$ mit

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} P_i.$$



Wir finden zu jedem dieser Rechtecke P_i ein *abgeschlossenes* Rechteck Q_i mit $Q_i \subseteq P_i$ und

$$\hat{m}(Q_i) \geq \hat{m}(P_i) - \frac{\varepsilon}{2r} \qquad (i = 1, \dots, r).$$

Die elementare Menge

$$K := \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$$

ist abgeschlossen und beschränkt und in A enthalten. Außerdem gilt

$$\hat{m}(K) = \sum_{i=1}^{r} \hat{m}(Q_i) \geq \sum_{i=1}^{r} \left[\hat{m}(P_i) - \frac{\varepsilon}{2r}\right] = \hat{m}(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

2^0 Zu beliebigem $\delta > 0$ und jeder elementaren Menge B findet man eine *offene* elementare Menge $G \supseteq B$ mit

$$\hat{m}(G) \leq \hat{m}(B) + \delta.$$

Hierzu sei

$$B = \bigcup_{i=1}^{r} P_i$$

eine Darstellung von B als disjunkte Vereinigung achsenparalleler Rechtecke. Zu jedem P_i findet man ein *offenes* achsenparalleles Rechteck $Q_i \supseteq P_i$ mit

$$\hat{m}(Q_i) \leq \hat{m}(P_i) + \frac{\delta}{r} \qquad (i = 1, \dots, r).$$

Die Menge

$$G := \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$$

ist eine offene elementare Obermenge von B. Man zeigt leicht, daß aus der endlichen Additivität von $\hat{m}$ die endliche Subadditivität folgt (*Übungsaufgabe*). Unter Verwendung dieser Eigenschaft erhält man

$$\hat{m}(G) \leq \sum_{i=1}^{r} \hat{m}(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{r} \left(\hat{m}(P_i) + \frac{\delta}{r}\right) = \hat{m}(B) + \delta.$$

3^0 Da die Mengen A_n elementar sind, findet man wegen 2^0 *offene* elementare Mengen $G_n \supseteq A_n$ mit

$$\hat{m}(G_n) \le \hat{m}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

4^0 Die Mengen G_n bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge K:

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Nach dem Satz von Heine-Borel kann man hieraus eine *endliche* Überdeckung auswählen:

$$K \subseteq G_{n_1} \cup \cdots \cup G_{n_r}.$$

5^0 Unter Verwendung der vorangegangenen Beweisschritte und der endlichen Subadditivität von $\hat{m}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{m}(A) &\le \hat{m}(K) + \frac{\varepsilon}{2} \le \hat{m}(G_{n_1}) + \cdots + \hat{m}(G_{n_r}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \hat{m}(G_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{m}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \hat{m}(A_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt hieraus die Behauptung. □

Damit ist auch der Beweis des Theorems 2.9 abgeschlossen.

Bemerkung 2.12. Als entscheidendes Hilfsmittel bei der Herleitung der σ-Additivität von $\hat{m}$ wurde die endliche Additivität in Verbindung mit topologischen und metrischen Eigenschaften des Euklidischen Raumes (Kompaktheitsargument, Satz von Heine-Borel) benutzt.

2.2. Äußeres Maß. Lebesgue-Maß

Um unendliche Maßzahlen zu vermeiden, werden wir uns zunächst auf die Betrachtung von Teilmengen des Einheitsquadrates $E := [0, 1]^2$ beschränken. Mit $\mathfrak{S}_E$ und $\mathfrak{E}_E$ bezeichnen wir das System aller Teilmengen A von E, die zu $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{E}$ gehören.

Definition 2.13. Die Zahl

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) \colon \bigcup_k R_k \supseteq A,\ R_1, R_2, \ldots \in \mathfrak{S} \right\}$$

heißt *äußeres Maß* der Menge $A \subseteq E$.

Bemerkung 2.14.

1. Der Fall endlich vieler Rechtecke ist in die Infimumbildung eingeschlossen. (Man setze $R_k = \emptyset$ für hinreichend großes k.)

2. Anstelle von achsenparallelen Rechtecken können beliebige elementare Mengen genommen werden:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \hat{m}(A_k) \colon \bigcup_k A_k \supseteq A,\ A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{E} \right\}.$$

Wir leiten zunächst einige Eigenschaften des äußeren Maßes her.

Behauptung 2.15. *Das äußere Maß λ^* ist eine Fortsetzung von $\hat{m}$:*

$$\lambda^*(A) = \hat{m}(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{E}_E.$$

Beweis. Sei $A \subseteq E$ eine elementare Menge. Dann besitzt sie die Darstellung

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \quad \text{mit } R_1, \ldots, R_n \in \mathfrak{S} \text{ und } R_k \cap R_l = \emptyset \text{ für } k \neq l.$$

Hieraus folgt

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{i=1}^{n} m(R_i) = \hat{m}(A).$$

Für beliebige achsenparallele Rechtecke R_1, R_2, ... mit

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \supseteq A$$

folgt andererseits wegen der (nichttrivialen) Subadditivität von $\hat{m}$ (Lemma 2.11)

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) \geq \hat{m}(A).$$

Deshalb gilt

$$\lambda^*(A) \geq \hat{m}(A).$$

□

Lemma 2.16. *(Subadditivität des äußeren Maßes)*
Ist (A_n) eine beliebige Folge von Teilmengen von E und $A \subseteq \bigcup_n A_n$, so gilt

$$\lambda^*(A) \leq \sum_n \lambda^*(A_n).$$

Insbesondere ist λ^* monoton, d.h. aus $A \subseteq B \subseteq E$ folgt $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Beweis.

1^0 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Zu A_n findet man abzählbar viele Rechtecke $R_{nk} \in \mathfrak{S}$ mit

$$A_n \subseteq \bigcup_k R_{nk} \quad \text{und} \quad \sum_k m(R_{nk}) \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Hieraus folgt

$$A \subseteq \bigcup_{n,k} R_{nk}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &\leq \sum_{n,k} m(R_{nk}) = \sum_n \left(\sum_k m(R_{nk}) \right) \\
&\leq \sum_n \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\
&\leq \sum_n \lambda^*(A_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

2^0 Sei $A \subseteq B \subseteq E$. Wählen wir im ersten Teil der Behauptung $A_1 := B$ und $A_n := \emptyset$ für $n \geq 2$, so erhalten wir

$$\lambda^*(A) \leq \sum_n \lambda^*(A_n) = \lambda^*(B),$$

da $\lambda^*(\emptyset) = 0$ ist. □

Definition 2.17. Eine Menge $A \subseteq E$ heißt *Lebesgue-meßbar*, falls zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine elementare Menge $B \subseteq E$ existiert mit

$$\lambda^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

(D.h., A läßt sich im Sinne des äußeren Maßes beliebig genau durch elementare Mengen approximieren.)

Mit $\mathfrak{A}_E$ bezeichnen wir das System der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von E. Die Einschränkung λ des äußeren Maßes λ^* auf $\mathfrak{A}_E$ heißt *Lebesgue-Maß*.

Bemerkung 2.18.

1. Elementare Mengen sind Lebesgue-meßbar, d.h. $\mathfrak{E}_E \subseteq \mathfrak{A}_E$.

2. Die Einschränkung von λ auf $\mathfrak{E}_E$ stimmt mit $\hat{m}$ überein (vgl. Behauptung 2.15).

Die beiden folgenden Theoreme beinhalten die Hauptaussagen dieses Abschnitts.

Theorem 2.19. *(Struktur des Mengensystems $\mathfrak{A}_E$)*
Die abzählbare Vereinigung, der abzählbare Durchschnitt, die Differenz und die symmetrische Differenz Lebesgue-meßbarer Teilmengen von E sind Lebesgue-meßbar. Mit anderen Worten, das Mengensystem $\mathfrak{A}_E$ ist abgeschlossen bezüglich der Ausführung endlicher und abzählbarer Mengenoperationen.

Theorem 2.20. *(σ-Additivität des Lebesgue-Maßes λ)*
Ist (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Lebesgue-meßbarer Mengen und

$$A := \bigcup_n A_n \quad (\in \mathfrak{A}_E),$$

so gilt

$$\lambda(A) = \sum_n \lambda(A_n).$$

Der Beweis der Theoreme 2.19 und 2.20 wird in mehrere Teilschritte zerlegt.

Lemma 2.21. *(Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}_E$ bezüglich endlicher Mengenoperationen)*

a) $A \in \mathfrak{A}_E \Rightarrow E \setminus A \in \mathfrak{A}_E$;

b) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}_E \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{A}_E$;

c) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}_E \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{A}_E$;

d) $A, B \in \mathfrak{A}_E \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{A}_E$;

e) $A, B \in \mathfrak{A}_E \Rightarrow A \triangle B \in \mathfrak{A}_E$.

Beweis. a) Dies folgt aus

$$(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B$$

und der Definition der Lebesgue-Meßbarkeit.

b) Sei o.B.d.A. $n = 2$. A_1, A_2 seien Lebesgue-meßbare Mengen und $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben. Dann existieren elementare Mengen B_1, B_2 mit

$$\lambda^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \lambda^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun gilt

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

wobei $B_1 \cup B_2$ ebenfalls elementar ist. Hieraus folgt aufgrund der Subadditivität von λ^* (Lemma 2.16)

$$\lambda^*\left((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)\right) \le \lambda^*(A_1 \triangle B_1) + \lambda^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon.$$

c) Wegen

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (E \setminus A_i)$$

folgt die Behauptung aus a) und b).

d) Man benutzt

$$A \setminus B = A \cap (E \setminus B).$$

e) die Behauptung folgt mit b) und d) aus

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

□

Lemma 2.22. *(Endliche Additivität von λ)*
Gegeben seien Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}_E$ mit $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$ und

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Dann ist

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i).$$

Die Idee des Beweises besteht darin, die meßbaren Mengen A_i durch elementare Mengen B_i zu approximieren und die endliche Additivität von $\hat{m}$ auszunutzen. Hierzu muß

$$|\lambda(A_i) - \hat{m}(B_i)| = |\lambda^*(A_i) - \lambda^*(B_i)|$$

geeignet abgeschätzt werden.

Behauptung 2.23. *Für beliebige $A, B \subseteq E$ gilt*

$$|\lambda^*(A) - \lambda^*(B)| \leq \lambda^*(A \triangle B).$$

Beweis. Aus

$$A \subseteq (A \triangle B) \cup B$$

folgt mit der Subadditivität von λ^*

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \triangle B) + \lambda^*(B),$$

d.h.

$$\lambda^*(A) - \lambda^*(B) \leq \lambda^*(A \triangle B).$$

Analog zeigt man

$$\lambda^*(B) - \lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \triangle B).$$

□

Beweis von Lemma 2.22. O.B.d.A. sei $n = 2$.

1^0 Gegeben seien Mengen $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_E$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann gehört auch $A := A_1 \cup A_2$ zu $\mathfrak{A}_E$. Zu zeigen ist

$$\lambda(A) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2).$$

Wegen der Subadditivität von λ^* gilt

$$\lambda(A) \leq \lambda(A_1) + \lambda(A_2).$$

Somit bleibt nur die Ungleichung

$$\lambda(A) \geq \lambda(A_1) + \lambda(A_2) \tag{2.2}$$

zu beweisen.

2^0 Wir approximieren A_1 und A_2 durch elementare Mengen: Zu $\varepsilon > 0$ finden wir elementare Mengen B_1 und B_2 mit

$$\lambda^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \lambda^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Mit der Behauptung 2.23 folgt hieraus

$$|\lambda(A_1) - \hat{m}(B_1)| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |\lambda(A_2) - \hat{m}(B_2)| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Die Mengen B_1 und B_2 sind i.a. nicht disjunkt. Um zu sehen, wie „groß“ $B_1 \cap B_2$ ist, benutzen wir die Inklusion

$$B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

die wegen $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt. Hieraus folgt wegen der Subadditivität von λ^* und (2.3):

$$\hat{m}(B_1 \cap B_2) < 2\varepsilon. \tag{2.5}$$

Die Menge $B := B_1 \cup B_2$ ist ebenfalls elementar, und es gilt

$$A \triangle B \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

Unter Ausnutzung der Subadditivität und (2.3) folgt hieraus

$$\lambda^*(A \triangle B) < 2\varepsilon,$$

und mit der Behauptung 2.23

$$|\lambda(A) - \hat{m}(B)| < 2\varepsilon. \tag{2.6}$$

Wenden wir nun nacheinander (2.6), die Additivität von $\hat{m}$, (2.5) und (2.4) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda(A) &> \hat{m}(B) - 2\varepsilon = \hat{m}(B_1) + \hat{m}(B_2) - \hat{m}(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon \\ &> \hat{m}(B_1) + \hat{m}(B_2) - 4\varepsilon \\ &> \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - 6\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, führt dies zur Behauptung (2.2). $\square$

Folgerung 2.24. $\lambda(E \setminus A) = 1 - \lambda(A)$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}_E$.

Wir übertragen nun die Aussagen der Lemmata 2.21 und 2.22 auf abzählbar unendlich viele Mengen.

Lemma 2.25. *Die abzählbare Vereinigung und der abzählbare Durchschnitt Lebesgue-meßbarer Mengen sind Lebesgue-meßbar.*

Beweis.

1^0 *Vereinigung*: (A_n) sei eine Folge meßbarer Mengen,

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

und $\varepsilon > 0$ sei beliebig gewählt. Wir bemerken zunächst, daß sich A als *disjunkte* Vereinigung meßbarer Mengen A'_n darstellen läßt:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$$

mit

$$A'_1 := A_1, \quad A'_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \quad (n \geq 2).$$

Für eine natürliche Zahl N betrachten wir die Zerlegung

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A'_n.$$

Da nach Lemma 2.21 b) die Vereinigung der ersten N Mengen A_n meßbar ist, existiert eine elementare Menge B_N mit

$$\lambda^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} A'_n\right) \triangle B_N\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Außerdem ist

$$A \triangle B_N \subseteq \left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} A'_n\right) \triangle B_N\right) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A'_n.$$

Unter Verwendung der Subadditivität des äußeren Maßes (Lemma 2.16) erhalten wir deshalb

$$\lambda^*(A \triangle B_N) \leq \lambda^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} A'_n\right) \triangle B_N\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^*(A'_n).$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist kleiner als $\varepsilon/2$, unabhängig von N. Um die Lebesgue-Meßbarkeit der Menge A zu zeigen, bleibt deshalb nur nachzuweisen, daß der Rest auf der rechten Seite für hinreichend großes N ebenfalls kleiner als $\varepsilon/2$ ist. Hierzu ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A'_n) < \infty$$

hinreichend. Wegen der endlichen Additivität von λ (Lemma 2.22) gilt aber für beliebiges N

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda^*(A'_n) = \sum_{n=1}^{N} \lambda(A'_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{N} A'_n\right) \leq 1.$$

2^0 *Durchschnitt*: Die Behauptung folgt aus

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

und der bereits bewiesenen Tatsache, daß Komplementbildung und abzählbare Vereinigungen nicht aus der Klasse der Lebesgue-meßbaren Mengen herausführen. □

Lemma 2.26. *Die Mengenfunktion λ ist σ-additiv.*

Beweis. (A_n) sei eine Folge paarweise disjunkter meßbarer Mengen,

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Nach dem vorangegangenen Lemma ist A ebenfalls meßbar. Zu zeigen ist

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Die Subadditivität von λ^* (Lemma 2.16) liefert sofort

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Wegen der endlichen Additivität von λ (Lemma 2.22) und der Monotonie von λ^* ist für jedes N

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \lambda(A)$$

und folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \leq \lambda(A).$$

□

Damit ist der Beweis der Theoreme 2.19 und 2.20 vollständig.

Bemerkung 2.27. Beim Beweis der Theoreme 2.19 und 2.20 wurde nur die endliche Additivität, aber nicht die σ-Additivität von $\hat{m}$ benutzt. Die σ-Additivität von $\hat{m}$ (genauer: die Subadditivität, Lemma 2.11) ist jedoch *fundamental* für den Beweis der Behauptung 2.15, daß λ eine *Fortsetzung* von $\hat{m}$ ist.

Zum Schluß führen wir noch folgende Darstellung des äußeren Maßes an.

Behauptung 2.28. *$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(\Gamma)\colon \Gamma \supseteq A,\ \Gamma \in \mathfrak{A}_E\}$ für alle $A \subseteq E$.*

Beweis. Ist Γ Lebesgue-meßbar und $\Gamma \supseteq A$, so folgt wegen der Monotonie des äußeren Maßes $\lambda^*(\Gamma) \geq \lambda^*(A)$. Deshalb ist

$$\inf\{\lambda(\Gamma)\colon \Gamma \supseteq A,\ \Gamma \in \mathfrak{A}_E\} \geq \lambda^*(A).$$

Andererseits gilt wegen der Subadditivität

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(R_n)\colon \bigcup_n R_n \supseteq A,\ R_n \in \mathfrak{S}\right\} \\
&\geq \inf\left\{\lambda\left(\bigcup_n R_n\right) : \bigcup_n R_n \supseteq A,\ R_n \in \mathfrak{S}\right\}.
\end{aligned}$$

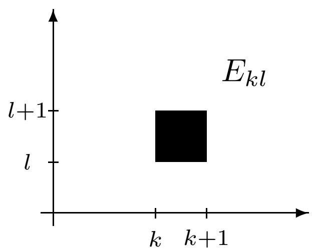
Da hierbei $\bigcup_n R_n$ eine Lebesgue-meßbare Obermenge von A ist, gilt erst recht

$$\lambda^*(A) \geq \inf\{\lambda(\Gamma)\colon \Gamma \supseteq A,\ \Gamma \in \mathfrak{A}_E\}.$$

□

2.3. Das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^2$

Die im vorangegangenen Abschnitt für Teilmengen des Einheitsquadrates $E = [0,1]^2$ durchgeführten Überlegungen lassen sich sinngemäß auf beliebige achsenparallele Quadrate übertragen. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:



$E_{kl} := [k, k+1] \times [l, l+1]$,

$E^0_{kl} := [k, k+1) \times [l, l+1)$, $\qquad (k,l) \in \mathbb{Z}^2$;

$\mathfrak{A}_{kl}$ System aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen von E_{kl};

$\lambda_{kl}\colon \mathfrak{A}_{kl} \to [0,1]$ Lebesgue-Maß in E_{kl}.

Es gilt

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k,l} E_{kl} = \bigcup_{k,l} E^0_{kl},$$

wobei die letzte Vereinigung disjunkt ist.

Definition 2.29. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *Lebesgue-meßbar*, wenn

$$A \cap E_{kl} \in \mathfrak{A}_{kl} \qquad \text{für alle } k, l \tag{2.7}$$

gilt, was gleichbedeutend ist mit

$$A \cap E_{kl}^0 \in \mathfrak{A}_{kl} \qquad \text{für alle } k, l. \tag{2.8}$$

$\mathfrak{A}$ bezeichne das System aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. Für beliebiges $A \in \mathfrak{A}$ definiert man

$$\lambda(A) := \sum_{k,l} \lambda_{kl}\left(A \cap E_{kl}\right) \qquad \left(= \sum_{k,l} \lambda_{kl}\left(A \cap E_{kl}^0\right)\right).$$

Die so definierte Mengenfunktion $\lambda\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ heißt (zweidimensionales) *Lebesgue-Maß.*

Um sich von der Äquivalenz von (2.7) und (2.8) zu überzeugen, benutze man, daß jede Teilmenge einer Menge vom Lebesgue-Maß Null Lebesgue-meßbar ist (*Übungsaufgabe*). Anschließend wende man diese Aussage auf die Mengen $(A \cap E_{kl}) \setminus (A \cap E_{kl}^0) \subseteq E_{kl} \setminus E_{kl}^0$ an.

Die Theoreme 2.19 und 2.20 lassen sich mühelos auf die hier betrachtete Situation übertragen.

Theorem 2.30. *Die leere Menge und der ganze Raum $\mathbb{R}^2$ gehören zu $\mathfrak{A}$. Das Mengensystem $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen bezüglich der Bildung abzählbarer Vereinigungen und Durchschnitte und bezüglich der Bildung der Differenz und der symmetrischen Differenz zweier Mengen.*

Beweis. Wir betrachten nur die Vereinigung. Sei (A_n) eine Mengenfolge aus $\mathfrak{A}$ und $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann gehört

$$A \cap E_{kl} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cap E_{kl}\right)$$

zu $\mathfrak{A}_{kl}$ für alle k und l, d.h. A gehört zu $\mathfrak{A}$. $\square$

Theorem 2.31. *Das zweidimensionale Lebesgue-Maß λ ist σ-additiv, d.h. für eine beliebige Folge (A_n) paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt*

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Beweis. Unter Ausnutzung der Definition von λ und der σ-Additivität von λ_{kl} ($(k,l) \in \mathbb{Z}^2$) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &= \sum_{k,l} \lambda_{kl}(A \cap E^0_{kl}) = \sum_{k,l} \lambda_{kl}\left(\bigcup_n (A_n \cap E^0_{kl})\right) \\
&= \sum_{k,l} \sum_n \lambda_{kl}(A_n \cap E^0_{kl}) = \sum_n \sum_{k,l} \lambda_{kl}(A_n \cap E^0_{kl}) \\
&= \sum_n \lambda(A_n).
\end{aligned}$$

□

Zum Schluß wollen wir der Frage nachgehen, wie „groß“ das System $\mathfrak{A}$ der Lebesgue-meßbaren Mengen ist.

Theorem 2.32. *Alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Lebesgue-meßbar.*

Beweis. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Dann existieren abzählbar viele offene achsenparallele Quadrate R_n mit

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n.$$

(Hierzu kann man o.B.d.A. $G \neq \mathbb{R}^2$ voraussetzen und jedem rationalen Punkt q aus G das größte offene Quadrat mit Mittelpunkt q zuordnen, das in G enthalten ist.) Da achsenparallele Quadrate zu $\mathfrak{A}$ gehören und $\mathfrak{A}$ bezüglich der Bildung abzählbarer Vereinigungen abgeschlossen ist (Theorem 2.30), gehört G ebenfalls zu $\mathfrak{A}$. Abgeschlossene Mengen sind Komplemente offener Mengen und $\mathfrak{A}$ ist bezüglich der Komplementbildung abgeschlossen (Theorem 2.30). Also liegen auch alle abgeschlossenen Mengen in $\mathfrak{A}$. □

Bemerkung 2.33. Alle Mengen, die durch wiederholte Anwendung abzählbarer Mengenoperationen aus offenen und abgeschlossenen Mengen gebildet werden können, sind also Lebesgue-meßbar. Wir merken ohne Beweis an, daß es Lebesgue-meßbare Mengen gibt, die *nicht* auf diese Weise gewonnen werden können.

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir zeigen, daß es Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ gibt, die nicht Lebesgue-meßbar sind. Hierzu benötigen wir das folgende Axiom aus der Mengenlehre.

Zermelosches Auswahlaxiom. Sei M eine Menge paarweise disjunkter nichtleerer Mengen. Dann *existiert* eine Menge, die mit jeder Menge aus M genau ein Element gemeinsam hat (und keine weiteren Elemente enthält).

Zu wichtigen Fakten aus der Mengenlehre verweisen wir auf den Anhang A in Cohn [11] und auf Alexandroff [1].

Wir benötigen noch die folgende fundamentale Eigenschaft des Lebesgue-Maßes.

Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes (Übungsaufgabe). Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-meßbare Menge und $x \in \mathbb{R}^2$, so ist auch die Menge $x+A := \{x+a : a \in A\}$ Lebesgue-meßbar, und es gilt

$$\lambda(A) = \lambda(x + A).$$

Beispiel einer nichtmeßbaren Menge *(G. Vitali 1905)*

$\mathbb{Q}^2$ bezeichne die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^2$ mit rationalen Koordinaten. Durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}^2$$

wird eine Äquivalenzrelation „$\sim$“ im $\mathbb{R}^2$ definiert. Seien

$$[x] = x + \mathbb{Q}^2$$

die zugehörigen Äquivalenzklassen. Aufgrund des Zermeloschen Auswahlaxioms existiert eine Menge $A \subseteq [0,1]^2$, die mit jeder Äquivalenzklasse genau ein Element gemeinsam hat. Deshalb ist

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^2} (q + A) \tag{2.9}$$

eine Überdeckung des $\mathbb{R}^2$ durch paarweise disjunkte Mengen. Tatsächlich, zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ existiert ein $a \in A$ mit $x \sim a$, d.h. $x = q + a \in q + A$ für ein $q \in \mathbb{Q}$. Somit gilt (2.9). Sei nun $(q_1 + A) \cap (q_2 + A) \neq \emptyset$ für gewisse $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Dann existieren $a_1, a_2 \in A$ mit $q_1 + a_1 = q_2 + a_2$, d.h. $a_1 \sim a_2$. Aufgrund der Definition von A ist dies aber nur für $a_1 = a_2$ möglich, was wiederum $q_1 = q_2$ nach sich zieht. Dies beweist, daß die Mengen $q + A$, $q \in \mathbb{Q}$, paarweise disjunkt sind.

Wir zeigen, daß die Menge A *nicht Lebesgue-meßbar* ist. Angenommen, A ist doch Lebesgue-meßbar. Aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes ist dann $q + A$ Lebesgue-meßbar und

$$\lambda(q + A) = \lambda(A)$$

für alle $q \in \mathbb{R}^2$. Für die Menge

$$C := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2} (q + A)$$

erhalten wir deshalb

$$\lambda(C) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2} \lambda(q + A) = \begin{cases} \infty, & \quad \lambda(A) > 0, \\ & \text{falls} \\ 0, & \quad \lambda(A) = 0. \end{cases}$$

Da C in $[0,2]^2$ enthalten ist, gilt $\lambda(C) < \infty$, so daß $\lambda(A) = 0$ sein muß. Dann ist aber

$$\lambda(\mathbb{R}^2) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^2} \lambda(q + A) = 0$$

im Widerspruch zu $\lambda(\mathbb{R}^2) = \infty$.

Aus dem obigen Beweis folgt insbesondere, daß sich das (d-dimensionale) Lebesgue-Maß *nicht* zu einem Maß auf dem System *aller* Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ unter Beibehaltung der σ-Additivität und der Translationsinvarianz fortsetzen läßt. Die folgenden Aussagen belegen, daß dies bei Benutzung der üblichen Axiome der Mengenlehre auch ohne die Forderung der Translationsinvarianz nicht möglich ist. In Dimension $d \geq 3$ ist die Situation noch dramatischer.

In der Mengenlehre benutzt man neben dem Auswahlaxiom als weiteres Axiom die

Kontinuumhypothese Jede Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, ist entweder höchstens abzählbar oder bijektiv auf den $\mathbb{R}^d$ abbildbar.

Im weiteren wird die Gültigkeit *beider* Axiome vorausgesetzt.

Theorem 2.34. *(Ulam 1930) Sei Ω eine überabzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Dann existiert keine nichtnegative σ-additive Mengenfunktion μ auf dem System aller Teilmengen von Ω mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis. Siehe Übung. □

Theorem 2.35. *(Banach-Tarski-Paradoxon 1924) Seien U und V nichtleere, beschränkte und offene Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und Zerlegungen $U_1, \ldots, U_n$ und $V_1, \ldots, V_n$ von U bzw. V in disjunkte Teilmengen derart, daß U_i und V_i kongruent sind für $i = 1, \ldots, n$.*

Einen korrekten Beweis findet man in Stromberg [45], siehe auch Wagon [49]. Der Beweis ist zwar elementar, aber lang und nicht konstruktiv. Es wird nur die *Existenz* einer solchen Zerlegung nachgewiesen. Unter den in Frage kommenden Mengen U_i und V_i müssen sich dann natürlich nicht-Lebesgue-meßbare Mengen befinden.

Folgerung 2.36. *Für $d \geq 3$ läßt sich das Lebesgue-Maß nicht so auf alle Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ fortsetzen, daß die Fortsetzung endlich-additiv ist und kongruenten Mengen die gleiche Maßzahl zuordnet.*

Beweis. Andernfalls wäre (unter Verwendung der Notation des Theorems)

$$\lambda(U) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(U_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(V_i) = \lambda(V),$$

d.h. alle nichtleeren beschränkten und offenen Mengen besäßen das gleiche Maß. □

Wir merken zum Schluß noch an, daß für $d = 1, 2$ endlich-additive Fortsetzungen existieren. Diese sind allerdings nicht eindeutig.

Kapitel 3

Maße auf abstrakten Mengen

In diesem Kapitel soll von den konkreten Eigenschaften des Lebesgue-Maßes abstrahiert werden, indem die wesentlichen Aussagen über die Struktur des Systems der Lebesgue-meßbaren Mengen und die fundamentalen Eigenschaften des Lebesgue-Maßes als Ausgangspunkt für die Entwicklung einer allgemeinen Maßtheorie genommen werden.

3.1. σ-Algebren und Maße

Im weiteren bezeichne Ω eine nichtleere *Grundmenge*. Für eine beliebige Menge $A \subseteq \Omega$ bezeichne $A^{\mathrm{c}} := \Omega \setminus A$ das Komplement der Menge A (in Ω). Das System aller Teilmengen von Ω (einschließlich $\emptyset$ und Ω) heißt *Potenzmenge* von Ω und wird mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ oder 2^{Ω} bezeichnet.

Die Struktur des Systems der Lebesgueschen Mengen (vgl. Theorem 2.30) dient als Grundlage für die folgende Definition.

Definition 3.1. Ein System $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von Ω heißt *σ-Algebra* in Ω, falls folgendes gilt:

(i) $\Omega \in \mathfrak{A}$;

(ii) $A \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; A^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{A}$;

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$.

Die Elemente von $\mathfrak{A}$ werden $\mathfrak{A}$-*meßbar* genannt. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Algebren in Ω und gilt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{A}$ *Teil-σ-Algebra* (oder auch *Unter-σ-Algebra*) von $\mathfrak{B}$.

Beispiel 3.2. (Beispiele für σ-Algebren)

1. $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra.

2. Die σ-Algebra, die nur aus $\emptyset$ und Ω besteht, heißt *triviale* σ-Algebra.

3. Das System aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ ist eine σ-Algebra im $\mathbb{R}^d$ (vgl. Theorem 2.30).

4. $\mathfrak{A} := \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ oder } A^{\mathrm{c}} \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra. Hierzu ist im wesentlichen nur nachzuweisen, daß $\mathfrak{A}$ bezüglich der Bildung abzählbarer Vereinigungen abgeschlossen ist. Sei deshalb (A_n) eine beliebige Mengenfolge aus $\mathfrak{A}$ und $A := \bigcup A_n$. Nach Voraussetzung sind entweder alle Mengen A_n abzählbar oder es existiert (mindestens) ein n_0, für das $A_{n_0}^{\mathrm{c}}$ abzählbar ist. Im ersten Fall ist A als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar und damit ein Element von $\mathfrak{A}$. Im zweiten Fall ist A^{c} abzählbar, da
$$A^{\mathrm{c}} = \bigcap_n A_n^{\mathrm{c}} \subseteq A_{n_0}^{\mathrm{c}}$$
gilt, und somit gehört A ebenfalls zu $\mathfrak{A}$.

5. Gegeben seien Mengen $\Omega \supseteq \Omega' \neq \emptyset$ sowie eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω. Dann wird durch
$$\mathfrak{A}' := \{A \cap \Omega' \colon A \in \mathfrak{A}\}$$
eine σ-Algebra in Ω' definiert. Diese σ-Algebra heißt *Spur* der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω'. Man schreibt dies symbolisch in der Form $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap \Omega'$. Der Beweis ist ebenfalls simpel und wird dem Leser überlassen.

Das System der Lebesgue-meßbaren Mengen des Euklidischen Raumes besitzt nicht nur die Eigenschaften (i) – (iii) der Definition 3.1, sondern ist abgeschlossen bezüglich der Anwendung *beliebiger endlicher und abzählbar unendlicher* Mengenoperationen. Dies gilt für jede σ-Algebra.

Behauptung 3.3. *Für eine beliebige σ-Algebra $\mathfrak{A}$ gilt*

(i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$;

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$;

(iii) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{A}$ *und* $A \triangle B \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Als nächstes führen wir den abstrakten Maßbegriff ein.

Definition 3.4. Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Eine Funktion
$$\mu \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$$
heißt *Maß* auf $\mathfrak{A}$, falls folgendes gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) für jede Folge (A_n) *paarweise disjunkter* Mengen aus $\mathfrak{A}$ ist

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-}\textit{Additivität}).$$

(Laut Definition 3.1, (iii) gehört $\bigcup A_n$ zu $\mathfrak{A}$, so daß der Ausdruck auf der linken Seite wohldefiniert ist.)

Ein Maß μ heißt *endlich* (bzw. *unendlich*), falls $\mu(\Omega) < \infty$ (bzw. $\mu(\Omega) = \infty$) ist.

Beispiel 3.5. (Beispiele für Maße)

1. Seien $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ und λ das d-dimensionale Lebesgue-Maß. Dann ist λ ein unendliches Maß auf $\mathfrak{A}$ im Sinne der Definition 3.4.

2. Gegeben seien $\Omega := \{1, 2, 3, \ldots\}$ und eine Folge $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ nichtnegativer reeller Zahlen. Dann wird durch

$$\mu(A) := \sum_{k \in A} p_k, \qquad A \subseteq \Omega, \tag{3.1}$$

ein Maß μ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ definiert. Tatsächlich, $\mu(\emptyset) = 0$ folgt daraus, daß (in Einklang mit der üblichen Konvention) die Summe über die leere Menge gleich Null ist. Ist (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von Ω, so ist

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{k \in \bigcup_n A_n} p_k = \sum_n \sum_{k \in A_n} p_k = \sum_n \mu(A_n).$$

Hierbei wurde benutzt, daß es bei der Summation nichtnegativer Zahlen nicht auf die Summationsreihenfolge ankommt.

Im Spezialfall $p_k \equiv 1$ ist $\mu(A)$ gleich der Anzahl der Elemente von A: $\mu(A) = \operatorname{card}(A)$. Dies ist ein Beispiel für ein Zählmaß. Ein *Zählmaß* ist eine Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$, welches nur ganzzahlige Werte (einschließlich $+\infty$) annimmt. Solche Maße entstehen, wenn man in Ω eine Punktmenge Ω_0 fixiert und $\mu(A)$ gleich der Anzahl der Punkte aus Ω_0 setzt, die in A liegen:

$$\mu(A) = \operatorname{card}(A \cap \Omega_0), \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Ist $\sum p_k = 1$, so wird durch (3.1) ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* ist ein Maß, dessen „Gesamtmasse“ gleich 1 ist: $\mu(\Omega) = 1$.

3. Gegeben seien eine beliebige nichtleere Grundmenge Ω, eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω und ein Punkt $x \in \Omega$. Dann wird durch
$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A, \end{cases} \qquad A \in \mathfrak{A},$$
ein Wahrscheinlichkeitsmaß δ_x auf $\mathfrak{A}$ definiert. Dieses Maß heißt *Dirac-Maß* im Punkt x.

   Um die σ-Additivität von δ_x nachzuweisen, sei A die Vereinigung abzählbar vieler paarweise disjunkter Mengen A_n aus $\mathfrak{A}$. Ist $\delta_x(A) = 0$, so folgt $x \notin A$ und damit $x \notin A_n$, d.h. $\delta_x(A_n) = 0$ für alle n. Aus $\delta_x(A) = 1$ folgt $x \in A$ und hieraus unter Berücksichtigung der Disjunktheit der Mengen A_n, daß $x \in A_{n_0}$ für ein n_0 und $x \notin A_n$ für alle $n \neq n_0$ gilt. Mit anderen Worten, $\delta_x(A_{n_0}) = 1$ und $\delta_x(A_n) = 0$ für $n \neq n_0$. In beiden Fällen erhalten wir somit
$$\delta_x(A) = \sum_n \delta_x(A_n).$$

4. Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die Spur von $\mathfrak{A}$ in $\Omega' \in \mathfrak{A}$, so wird durch $\mu'(A) := \mu(A)$ für $A \in \mathfrak{A}'$ ($\subseteq \mathfrak{A}$) ein Maß μ' auf $\mathfrak{A}'$ definiert, die *Einschränkung* des Maßes μ auf $\mathfrak{A}'$.

Definition 3.6. Ist Ω eine nichtleere Grundmenge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω, so nennt man das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ einen *meßbaren Raum* (oder kurz *Meßraum*). Ist zusätzlich ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ gegeben, so heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein *Maßraum*. Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ, d.h. mit $\mu(\Omega) = 1$.

Theorem 3.7. *(Stetigkeit von Maßen bezüglich monotoner Mengenfolgen) Gegeben seien ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und eine Folge (A_n) von Mengen aus $\mathfrak{A}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) Aus $A_n \uparrow A$ (d.h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$) folgt
$$\mu(A_n) \uparrow \mu(A).$$

b) Aus $A_n \downarrow A$ (d.h. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$) und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein n_0 folgt
$$\mu(A_n) \downarrow \mu(A).$$

Beweis. a) Um die Behauptung auf die σ-Additivität des Maßes μ zurückzuführen, betrachten wir die paarweise disjunkten $\mathfrak{A}$-meßbaren Mengen
$$A'_1 := A_1 \quad \text{und} \quad A'_n := A_n \setminus A_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Es gilt

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A'_k \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k.$$

Die σ-Additivität des Maßes μ liefert nun die gewünschte Behauptung:

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k) = \mu(A).$$

b) Diese Aussage wird durch Komplementbildung bezüglich A_{n_0} auf a) zurückgeführt: Aus $A_n \downarrow A$ folgt $(A_{n_0} \setminus A_n) \uparrow (A_{n_0} \setminus A)$ und somit

$$\mu(A_{n_0} \setminus A_n) \uparrow \mu(A_{n_0} \setminus A) \qquad \text{für } n \uparrow \infty. \tag{3.2}$$

Da $\mu(A_{n_0}) < \infty$ ist und $A_n \subseteq A_{n_0}$ für $n \geq n_0$ gilt, ist

$$\mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n), \qquad n \geq n_0,$$

und entsprechend

$$\mu(A_{n_0} \setminus A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A).$$

Setzt man dies in (3.2) ein, so erhält man schließlich

$$\mu(A_n) \downarrow \mu(A).$$

□

Beispiel 3.8. (Gegenbeispiel zu b))
Das folgende Beispiel zeigt, daß in der Behauptung b) des Stetigkeitssatzes die Voraussetzung $\mu(A_{n_0}) < \infty$ nicht weggelassen werden kann. Sei μ das Zählmaß auf $\mathfrak{P}(\{1, 2, \ldots\})$, $\mu(A) = \operatorname{card}(A)$, und

$$A_n := \{n, n+1, n+2, \ldots\} \qquad (n \geq 1).$$

Einerseits gilt $A_n \downarrow \emptyset$, aber andererseits ist $\mu(A_n) \equiv \infty$ und $\mu(\emptyset) = 0$.

3.2. Erzeuger von σ-Algebren. Dynkin-Systeme

In vielen Fällen bereitet es Schwierigkeiten, die Mengen einer σ-Algebra konstruktiv zu beschreiben. Insbesondere existieren „exotische“ Lebesgue-meßbare Mengen wie z.B. die Cantorsche Menge. Außerdem kennt man nur wenige Beispiele nicht Lebesgue-meßbarer Mengen, die alle das (nicht konstruktive) Auswahlaxiom der Mengenlehre heranziehen (siehe Abschnitt 2.3).

Oftmals steht man vor der Aufgabe nachzuweisen, daß eine bestimmte Eigenschaft für *alle* Mengen einer vorgegebenen σ-Algebra erfüllt ist. In diesem Zusammenhang ist es wünschenswert Aussagen bereitzustellen, die es gestatten, diese Aufgabe auf die Überprüfung der betrachteten Eigenschaft für *„wenige, überschaubare“* Mengen zurückzuführen.

Dies ist eines der Motive für die Einführung des Begriffs des Erzeugers einer σ-Algebra (siehe unten). Wir beginnen mit dem folgenden Theorem.

Theorem 3.9. *Der Durchschnitt einer beliebigen nichtleeren Familie von σ-Algebren in Ω ist eine σ-Algebra in Ω.*

Beweis. Gegeben sei eine Familie $\{\mathfrak{A}_i; i \in I\}$ von σ-Algebren in Ω indiziert mit einer beliebigen (nicht notwendigerweise abzählbaren) nichtleeren Menge I. Es ist zu zeigen, daß

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$$

ebenfalls eine σ-Algebra in Ω ist. Ist (A_n) eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{A}$, so gehören die Mengen A_n auch zu $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$. Da jedes Mengensystem $\mathfrak{A}_i$ eine σ-Algebra ist, folgt hieraus

$$\bigcup_n A_n \in \mathfrak{A}_i \qquad (i \in I)$$

und damit

$$\bigcup_n A_n \in \mathfrak{A}.$$

Das Mengensystem $\mathfrak{A}$ ist also abgeschlossen bezüglich der Bildung abzählbarer Vereinigungen. Analog zeigt man, daß Ω zu $\mathfrak{A}$ gehört und $\mathfrak{A}$ bezüglich der Komplementbildung abgeschlossen ist. □

Bemerkung 3.10. Die Vereinigung zweier σ-Algebren in Ω ist im allgemeinen keine σ-Algebra (*Übungsaufgabe*).

Als Konsequenz aus dem Theorem 3.9 ergibt sich die Existenz einer „kleinsten“ σ-Algebra, die ein vorgegebenes Mengensystem umfaßt:

Folgerung 3.11. *Sei $\mathfrak{E}$ ein beliebiges System von Teilmengen von Ω. Dann existiert genau eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{E}$;

(ii) für jede σ-Algebra $\mathfrak{B}$ in Ω mit $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{E}$ gilt $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.

Die σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{E}$ umfassenden σ-Algebren.

Beweis. 1^0 (*Existenz*). Sei $\mathfrak{A}$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{E}$ umfassenden σ-Algebren. Da $\mathfrak{P}(\Omega)$ eine $\mathfrak{E}$ umfassende σ-Algebra ist, ist $\mathfrak{A}$ gemäß Theorem 3.9 als Durchschnitt einer nichtleeren Familie von σ-Algebren eine σ-Algebra. Da alle σ-Algebren, über die dieser Durchschnitt gebildet wird, $\mathfrak{E}$ umfassen, muß auch $\mathfrak{A}$ das Mengensystem $\mathfrak{E}$ umfassen, d.h. es gilt (i). Die Behauptung (ii) ist ebenfalls offensichtlich, da jede σ-Algebra $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{E}$ ein Element der Durchschnittsbildung ist.

2^0 (*Einzigkeit*). Seien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zwei σ-Algebren mit den Eigenschaften (i) und (ii). Die Aussagen (i) und (ii) sind deshalb für $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2$ erfüllt, woraus wegen (ii) $\mathfrak{A}_2 \supseteq \mathfrak{A}_1$ folgt. Entsprechend zeigt man $\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}_2$. Also ist $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$. □

Definition 3.12. Die σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in der Folgerung 3.11 heißt die vom Mengensystem $\mathfrak{E}$ *erzeugte* σ-Algebra und wird mit $\sigma(\mathfrak{E})$ bezeichnet. $\mathfrak{E}$ wird *Erzeuger* dieser σ-Algebra genannt.

Beispiel 3.13.

1. Ω bezeichne eine beliebige nichtleere Menge und $\mathfrak{E}$ sei das System aller einpunktigen Teilmengen von Ω:

$$\mathfrak{E} = \{\{x\} : x \in \Omega\}.$$

   Dann ist

$$\sigma(\mathfrak{E}) = \{A \subseteq \Omega\colon A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}. \tag{3.3}$$

   Insbesondere ist $\sigma(\mathfrak{E}) = \mathfrak{P}(\Omega)$ genau dann, wenn Ω abzählbar ist.

   Zum Nachweis von (3.3) bezeichne $\mathfrak{A}$ das Mengensystem auf der rechten Seite. Wir wissen bereits, daß $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{E}$ umfassende σ-Algebra ist, $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{E}$ (Beispiel 3.2, 4.). Sei nun $\mathfrak{B}$ eine beliebige $\mathfrak{E}$ umfassende σ-Algebra. Dann muß $\mathfrak{B}$ alle abzählbaren Vereinigungen einpunktiger Mengen, d.h. alle abzählbaren Mengen, enthalten. Da $\mathfrak{B}$ abgeschlossen bezüglich der Komplementbildung ist, enthält $\mathfrak{B}$ damit auch alle Komplemente abzählbarer Mengen. Also ist $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$. Damit ist (3.3) bewiesen.

2. Seien $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{O}$ das System aller offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O})$ heißt *σ-Algebra der Borelschen Teilmengen des* $\mathbb{R}^d$ (Borel-σ-Algebra, Borelalgebra) und wird mit $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ oder $\mathfrak{B}^d$ bezeichnet. Die Elemente aus $\mathfrak{B}^d$ heißen *Borelmengen*.

   Da nach Theorem 2.32 alle offenen Mengen Lebesgue-meßbar sind, gilt $\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{O}$, wobei $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Lebesgue-Mengen bezeichnet. Deshalb muß auch $\mathfrak{A} \supseteq \sigma(\mathcal{O})$ sein. Mit anderen Worten, alle Borelmengen sind Lebesgue-meßbar. Ohne Beweis sei angemerkt, daß es Lebesgue-meßbare Mengen gibt, die keine Borelmengen sind. Die Einschränkung des im Kapitel 2 konstruierten Lebesgue-Maßes λ auf die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ heißt *Lebesgue-Maß auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ (oder kurz *d-dimensionales Lebesgue-Maß*) und wird ebenfalls mit λ bezeichnet. Für viele Aufgaben ist es völlig ausreichend, diese Einschränkung des ursprünglichen Lebesgue-Maßes zu betrachten.

3. (*Übungsaufgabe*). Die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ wird von folgenden Mengensystemen erzeugt:

   (i) allen abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$;
   (ii) allen kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$;
   (iii) allen achsenparallelen Quadern.

   Die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ wird außerdem von allen Intervallen der Gestalt $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}^1$, erzeugt.

Es ist oftmals schwierig auf direktem Wege festzustellen, ob ein Mengensystem eine σ-Algebra bildet. Ein geeignetes Hilfsmittel hierzu bilden die Dynkin-Systeme, die 1955, also relativ spät, von E.B. Dynkin eingeführt wurden.

Definition 3.14. Ein Mengensystem $\mathfrak{D}$ in Ω heißt *Dynkin-System*, falls

(i) $\Omega \in \mathfrak{D}$;

(ii) $A \in \mathfrak{D} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{D}$;

(iii) (A_n) Folge *paarweise disjunkter*(!) Mengen aus $\mathfrak{D} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathfrak{D}$.

Dynkin-Systeme unterscheiden sich somit von σ-Algebren dadurch, daß die Abgeschlossenheit bezüglich abzählbarer Vereinigungen nur für paarweise disjunkte Mengen gefordert wird.

Beispiel 3.15.

1. Gegeben seien ein meßbarer Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ und endliche Maße μ und ν auf $\mathfrak{A}$ mit $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Dann ist
$$\mathfrak{M} := \{A \in \mathfrak{A}\colon \mu(A) = \nu(A)\}$$
ein Dynkin-System.

2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A eine beliebige Menge aus $\mathfrak{A}$. Dann bildet das Mengensystem
$$\mathfrak{D} := \{B \in \mathfrak{A}\colon \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}$$
ein Dynkin-System. ($\mathfrak{D}$ ist das System aller „von A unabhängigen Ereignisse“.)

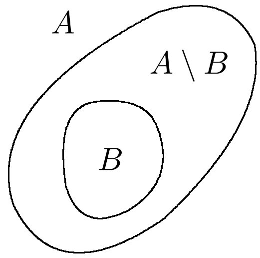
3. (*Übungsaufgabe*). Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System, aber es existieren Dynkin-Systeme, die keine σ-Algebra bilden.

Um die Frage zu beantworten, welche Dynkin-Systeme eine σ-Algebra bilden, führen wir die folgende Sprechweise ein. Ein Mengensystem $\mathfrak{E}$ heißt $\cap$-*stabil*, wenn es abgeschlossen bezüglich der Bildung endlicher Durchschnitte ist: $A, B \in \mathfrak{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{E}$.

Theorem 3.16. *Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist.*

Beweis. $\mathfrak{D}$ bezeichne ein beliebiges Dynkin-System. Es ist nur zu zeigen, daß die $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{D}$ die Abgeschlossenheit bezüglich (nicht notwendigerweise disjunkter) abzählbarer Vereinigungen impliziert.

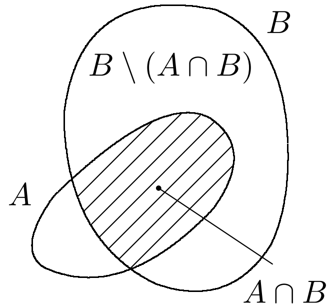
1^0 $A, B \in \mathfrak{D}$ und $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{D}$:
Es gilt



$$A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c,$$

wobei A^c und B disjunkt sind. Damit folgt die Behauptung 1^0 aus der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{D}$ bezüglich der Komplementbildung und der disjunkten Vereinigung zweier Mengen.

2^0 $A, B \in \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}$ $\cap$-stabil $\Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{D}$:
Dies folgt aus der Darstellung



$$A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)],$$

da es sich bei dem Ausdruck auf der rechten Seite um eine disjunkte Vereinigung handelt, wegen der $\cap$-Stabilität $A \cap B \in \mathfrak{D}$ gilt, und der Beweisschritt 1^0 außerdem $B \setminus (A \cap B) \in \mathfrak{D}$ impliziert.

3^0 $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{D}$ und $\cap$-stabil $\Rightarrow \bigcup A_n \in \mathfrak{D}$:
Wir schreiben die Vereinigung der Mengen A_n in der Gestalt

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n = \bigcup_n C_n$$

mit

$$B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$$

und

$$C_1 := B_1 \quad \text{und} \quad C_n := B_n \setminus B_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Wegen 2^0 gehört B_n zu $\mathfrak{D}$ und aufgrund von 1^0 ist auch $C_n \in \mathfrak{D}$ $(n \geq 1)$. Da die Mengen C_n paarweise disjunkt sind, folgt $\bigcup C_n \in \mathfrak{D}$ und somit die Behauptung

$$\bigcup_n A_n \in \mathfrak{D}.$$

□

Wie im Falle von σ-Algebren zeigt man:

- Der Durchschnitt beliebig vieler Dynkin-Systeme (in Ω) ist ein Dynkin-System (in Ω).
- Es existiert (genau) ein kleinstes Dynkin-System, das ein gegebenes Mengensystem $\mathfrak{E}$ umfaßt. Dieses Dynkin-System ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{E}$ umfassenden Dynkin-Systeme und wird mit $d(\mathfrak{E})$ bezeichnet.

  Man nennt $d(\mathfrak{E})$ das von $\mathfrak{E}$ *erzeugte* Dynkin-System, und $\mathfrak{E}$ heißt *Erzeuger* von $d(\mathfrak{E})$.

Wir formulieren nun das Hauptergebnis über Dynkin-Systeme.

Theorem 3.17. *(Hauptsatz über Dynkin-Systeme)*
Für ein beliebiges $\cap$-stabiles Mengensystem $\mathfrak{E}$ gilt

$$d(\mathfrak{E}) = \sigma(\mathfrak{E}).$$

Beweis. $\sigma(\mathfrak{E})$ ist eine $\mathfrak{E}$ umfassende σ-Algebra und somit auch ein $\mathfrak{E}$ umfassendes Dynkin-System. Da $d(\mathfrak{E})$ das kleinste $\mathfrak{E}$ umfassende Dynkin-System ist, erhalten wir die Inklusion $d(\mathfrak{E}) \subseteq \sigma(\mathfrak{E})$. Angenommen, $d(\mathfrak{E})$ ist $\cap$-stabil. Wegen Theorem 3.16 bildet $d(\mathfrak{E})$ dann eine σ-Algebra, die außerdem $\mathfrak{E}$ umfaßt, woraus sich die umgekehrte Inklusion $d(\mathfrak{E}) \supseteq \sigma(\mathfrak{E})$ ergibt. Somit bleibt nur zu zeigen, daß $d(\mathfrak{E})$ $\cap$-stabil ist. Wir teilen den Beweis in mehrere Schritte auf.

1^0 Für jede Menge $D \in d(\mathfrak{E})$ ist

$$\mathfrak{D}_D := \{A \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \cap D \in d(\mathfrak{E})\}$$

ein Dynkin-System.

Offenbar ist $\Omega \in \mathfrak{D}_D$. Ist $A \in \mathfrak{D}_D$, d.h. $A \cap D \in d(\mathfrak{E})$, so ist auch

$$A^{\mathrm{c}} \cap D = ((A \cap D) \cup D^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \in d(\mathfrak{E}),$$

da $A \cap D$ und D^{c} disjunkte Mengen aus dem Dynkin-System $d(\mathfrak{E})$ sind. Also gilt $A^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{D}_D$. Entsprechend zeigt man, daß die disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Mengen aus $\mathfrak{D}_D$ wieder zu $\mathfrak{D}_D$ gehört.

2^0 $\mathfrak{D}_E \supseteq d(\mathfrak{E})$ für beliebiges $E \in \mathfrak{E}$, d.h. $D \cap E \in d(\mathfrak{E})$ für alle $D \in d(\mathfrak{E})$ und alle $E \in \mathfrak{E}$:

Tatsächlich, da $\mathfrak{E}$ $\cap$-stabil ist, gilt $\mathfrak{D}_E \supseteq \mathfrak{E}$. Nach 1^0 ist $\mathfrak{D}_E$ ein Dynkin-System. Also gilt $\mathfrak{D}_E \supseteq d(\mathfrak{E})$.

3^0 Aus 2^0 schließen wir, daß für beliebiges $D \in d(\mathfrak{E})$ die Inklusion $\mathfrak{D}_D \supseteq \mathfrak{E}$ gilt (d.h. $D \cap E \in d(\mathfrak{E})$ für alle $E \in \mathfrak{E}$). Wegen 1^0 folgt hieraus $\mathfrak{D}_D \supseteq d(\mathfrak{E})$ für $D \in d(\mathfrak{E})$. Laut Definition von $\mathfrak{D}_D$ bedeutet dies aber nichts anderes als die $\cap$-Stabilität von $d(\mathfrak{E})$, was zu zeigen war. □

Wir benutzen nun den Hauptsatz über Dynkin-Systeme um zu zeigen, daß Maße „im wesentlichen“ bereits durch ihre Werte auf $\cap$-stabilen Erzeugern der zugrunde liegenden σ-Algebra eindeutig festgelegt sind.

Folgerung 3.18. *Es bezeichne $(\Omega, \mathfrak{A})$ einen meßbaren Raum und $\mathfrak{E}$ einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathfrak{A}$. Weiterhin seien* endliche *Maße μ und ν auf $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

(i) $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$;

(ii) $\mu(A) = \nu(A)$ *für alle* $A \in \mathfrak{E}$.

Dann folgt $\mu = \nu$.

Beweis. Wir wissen bereits, daß

$$\mathfrak{M} := \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System ist, das $\mathfrak{E}$ umfaßt: $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{E}$. Hieraus folgt $\mathfrak{M} \supseteq d(\mathfrak{E})$. Wegen Theorem 3.17 ist aber $d(\mathfrak{E}) = \sigma(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}$, und wir erhalten $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{A}$. Also ist $\mu = \nu$. □

Folgerung 3.19. *Gegeben seien ein meßbarer Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, ein $\cap$-stabiler Erzeuger $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{A}$ und Maße μ und ν auf $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Es existiert eine Folge (E_n) in $\mathfrak{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für alle n.

(ii) $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{E}$.

Dann gilt $\mu = \nu$.

Beweis. Durch

$$\mu_n(A) := \mu(A \cap E_n), \quad \nu_n(A) := \nu(A \cap E_n), \quad A \in \mathfrak{A},$$

werden endliche Maße μ_n und ν_n auf $\mathfrak{A}$ definiert, die für jedes n die Voraussetzungen der Folgerung 3.18 erfüllen. Also ist $\mu_n = \nu_n$, d.h.

$$\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n), \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Wegen $A \cap E_n \uparrow A$ folgt hieraus mit dem Stetigkeitssatz für Maße (Theorem 3.7)

$$\mu(A) = \nu(A), \qquad A \in \mathfrak{A},$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 3.20.

1. Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$. Die Funktion

   $$F_\mu(x) := \mu\left((-\infty, x]\right), \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$

   heißt *Verteilungsfunktion* von μ. Aus der Monotonie und der Stetigkeit von μ folgt, daß F_μ monoton nichtfallend und rechtsseitig stetig ist. Außerdem gilt $0 \le F_\mu \le 1$.

   Da $\mathfrak{E} := \left\{(-\infty, x] \colon x \in \mathbb{R}^1\right\}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}^1$ ist (vgl. Beispiel 3.13, 3.), wird nach Folgerung 3.18 das Wahrscheinlichkeitsmaß μ durch seine Verteilungsfunktion F_μ vollständig beschrieben. Mit anderen Worten, sind μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$, so besteht die Implikation

   $$F_\mu = F_\nu \;\Rightarrow\; \mu = \nu.$$

2. Da das System $\mathfrak{E}$ der achsenparallelen Quader im $\mathbb{R}^d$ einen $\cap$-stabilen Erzeuger der Borelalgebra $\mathfrak{B}^d$ bildet (vgl. Beispiel 3.13, 3.), ist das Lebesgue-Maß λ das einzige Maß auf $\mathfrak{B}^d$, welches achsenparallelen Quadern ihr Elementarvolumen zuordnet. Dies ist eine Konsequenz der Folgerung 3.19 mit $E_n := [-n, n]^d$.

3.3. Fortsetzung von Maßen

Bei der Konstruktion des Lebesgue-Maßes wurde jedem achsenparallelen Quader sein Elementarvolumen zugeordnet. Anschließend wurde diese σ-additive Mengenfunktion schrittweise zu einem Maß auf die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen fortgesetzt:

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{achsenparallele Quader} & & \text{elementare Mengen} & & \text{Lebesguesche Mengen}\\[1em]
\mathfrak{S} & & \mathfrak{E} & \text{äußeres} & \mathfrak{A}\\
 & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\
m & & \hat{m} & \text{Maß } \lambda^* & \lambda.
\end{array}
$$

Um diesen Fortsetzungsprozeß für Mengenfunktionen auf allgemeinere Mengensysteme zu übertragen, abstrahieren wir von den konkreten Systemen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}$, indem wir die zugrunde liegende *Struktur* dieser Mengensysteme zum Ausgangspunkt nehmen. Dies führt auf die nachfolgenden Begriffsbildungen.

$\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{A}$ seien Systeme von Teilmengen einer nichtleeren Grundmenge Ω.

Definition 3.21. $\mathfrak{S}$ heißt *Semiring*, falls

(i) $\emptyset \in \mathfrak{S}$;

(ii) $A, B \in \mathfrak{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{S}$;

(iii) $A, B \in \mathfrak{S}$ und $A \supseteq B \Rightarrow$ es existieren paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{S}$ mit
$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k. \tag{3.4}$$

Bemerkung 3.22.

1. Das System aller achsenparallelen Quader in $[0,1]^d$ (in $\mathbb{R}^d$) ist ein Semiring.

2. Gegeben seien Mengen A, $B_1, \ldots, B_r$ aus einem Semiring $\mathfrak{S}$, wobei $B_1, \ldots, B_r$ paarweise disjunkt und in A enthalten seien. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_s \in \mathfrak{S}$ mit
$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{r} B_i = \bigcup_{j=1}^{s} C_j. \tag{3.5}$$

   Diese Aussage beweist man mit vollständiger Induktion bezüglich r. Nach Definition eines Semirings gilt (3.5) für $r = 1$. Angenommen, (3.5) ist für ein $r \geq 1$ erfüllt. Dann folgt für $A, B_1, \ldots, B_{r+1} \in \mathfrak{S}$, $B_1, \ldots, B_{r+1} \subseteq A$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ wegen (3.5)

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{r+1} B_i = \bigcup_{j=1}^{s} \left[C_j \setminus (C_j \cap B_{r+1})\right].$$

Für jedes j, $1 \leq j \leq s$, existieren wegen $C_j \cap B_{r+1} \in \mathfrak{S}$ paarweise disjunkte Mengen $C_{jk} \in \mathfrak{S}$, $1 \leq k \leq n_j$, mit

$$C_j \setminus (C_j \cap B_{r+1}) = \bigcup_{k=1}^{n_j} C_{jk}.$$

Also gilt

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{r+1} B_i = \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{k=1}^{n_j} C_{jk}.$$

Da die Mengen C_{jk} $(1 \leq j \leq s,\ 1 \leq k \leq n_j)$ paarweise disjunkt sind, ist dies die gewünschte Darstellung (3.5) für $r+1$ anstelle von r.

3. Wegen $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ gilt (3.4) auch dann, wenn die Menge B nicht in A enthalten ist. Aus dem gleichen Grunde braucht man bei der Herleitung von (3.5) nicht zu fordern, daß die Mengen $B_1, \ldots, B_r$ in A enthalten sind.

Definition 3.23. $\mathfrak{R}$ heißt *Ring*, falls

(i) $\emptyset \in \mathfrak{R}$;

(ii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}$;

(iii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$.

Bemerkung 3.24.

1. Wegen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ ist jeder Ring $\cap$-stabil und somit ein Semiring.
2. Man kann auf natürliche Weise aus jedem Semiring $\mathfrak{S}$ einen Ring $\mathfrak{R}$ konstruieren, indem man

$$\mathfrak{R} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \colon A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S} \text{ paarweise disjunkt, } n \in \mathbb{N} \right\}$$

setzt. Dies ist der „kleinste“ Ring, der $\mathfrak{S}$ enthält.

Beweis. Gegeben seien paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{S}$ und paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{S}$. Wir setzen

$$A := \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \quad B := \bigcup_{j=1}^{n} B_j.$$

Es ist zu zeigen, daß $A \setminus B$ und $A \cup B$ sich als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{S}$ darstellen lassen. Es gilt

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{m} \left[A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j) \right].$$

Für jedes i gehören die Mengen $A_i \cap B_j$ zu $\mathfrak{S}$, sind paarweise disjunkt und in A_i enthalten ($j = 1, \dots, n$). Deshalb existieren paarweise disjunkte Mengen C_{ik}, $1 \leq k \leq n_i$, aus dem Semiring $\mathfrak{S}$ mit

$$A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{k=1}^{n_i} C_{ik}.$$

Also gehört $A \setminus B$ als Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen C_{ik} aus $\mathfrak{S}$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n_i$) zu $\mathfrak{R}$. Da $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ ist und nach dem soeben bewiesenen $A \setminus B$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, ist $A \setminus B$ disjunkte Vereinigung von Mengen $C_1, \dots, C_r$ aus $\mathfrak{S}$. Hieraus folgt, daß $A \cup B$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_r$ aus $\mathfrak{S}$ ist und damit ebenfalls zu $\mathfrak{R}$ gehört. $\square$

3. Das System aller elementaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ und von $[0,1]^d$ bilden jeweils einen Ring.

4. Ein Ring braucht die Grundmenge Ω nicht zu enthalten.

Definition 3.25. $\mathfrak{A}$ heißt *Algebra*, falls $\mathfrak{A}$ ein Ring mit $\Omega \in \mathfrak{A}$ ist.

Definition 3.26. $\mathfrak{R}$ heißt *σ-Ring*, falls $\mathfrak{R}$ ein Ring ist und in der Definition 3.23 anstelle von (iii) die Abgeschlossenheit bezüglich *abzählbarer* Vereinigungen gefordert wird:

(iii′) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$.

Eine *σ-Algebra* ist somit ein σ-Ring, der die Grundmenge Ω enthält.

Die Fortsetzung von Maßen besteht in der folgenden

Aufgabe: Gegeben sei eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{S} \to [0, \infty]$ auf einem Semiring $\mathfrak{S}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$ paarweise disjunkt, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$

$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *(σ-Additivität).*

Man setze μ zu einem Maß auf die $\mathfrak{S}$ umfassende σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{S})$ fort.

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß eine solche Mengenfunktion monoton und subadditiv ist.

Lemma 3.27. *Gegeben sei eine σ-additive Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{S} \to [0,\infty]$ auf einem Semiring $\mathfrak{S}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann gilt:*

(i) $A, B \in \mathfrak{S}$ *und* $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \mu(B)$*;*

(ii) $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$ *und* $A \subseteq \bigcup_n A_n \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \sum_n \mu(A_n)$*.*

Beweis. Zum Beweis von (i) benutzt man die Existenz paarweise disjunkter Mengen $C_1, \dots, C_r \in \mathfrak{S}$ mit

$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{r} C_i.$$

Die Additivität und Nichtnegativität von μ liefert dann

$$\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{r} \mu(C_i) \ge \mu(A).$$

Für den Beweis der Behauptung (ii) verwenden wir die Darstellung

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n A'_n$$

mit den paarweise disjunkten Mengen

$$A'_1 := A_1 \quad \text{und} \quad A'_n := A_n \setminus (A'_1 \cup \dots \cup A'_{n-1}) \quad \text{für } n \ge 2.$$

Aufgrund der Bemerkung 3.22 erhält man sukzessive, daß jede Menge A'_n eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen $C_{n1}, \dots, C_{nl_n}$ aus $\mathfrak{S}$ ist. Außerdem gilt

$$A_n \setminus A'_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} D_{nk}$$

mit paarweise disjunkten Mengen $D_{n1}, \dots, D_{nm_n} \in \mathfrak{S}$. Die Mengen $A \cap C_{nj}$ gehören zu $\mathfrak{S}$ und bilden eine abzählbare disjunkte Zerlegung von A. Andererseits bilden für jedes n die Mengen $C_{n1}, \dots, C_{nl_n}, D_{n1}, \dots, D_{nm_n}$ eine disjunkte Zerlegung von A_n. Unter Ausnutzung der σ-Additivität, Monotonie und Nichtnegativität von μ folgt deshalb

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n,j} \mu(A \cap C_{nj}) \le \sum_n \left[\sum_j \mu(C_{nj}) + \sum_k \mu(D_{nk}) \right] \\ &= \sum_n \mu(A_n). \end{aligned}$$

□

Als nächstes geben wir eine axiomatische Definition des äußeren Maßes.

Definition 3.28. Eine Funktion $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ heißt *äußeres Maß* auf Ω, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) $A \subseteq B \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ *(Monotonie);*

(iii) $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ *(Subadditivität).*

Das Kriterium von Carathéodory für die Lebesgue-Meßbarkeit einer Menge kann man als Ausgangspunkt für die μ^*-Meßbarkeit nehmen:

Definition 3.29. *(Carathéodory)*
Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω. Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt μ^**-meßbar*, falls für alle „Testmengen“ $Z \subseteq \Omega$

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^{\mathrm{c}}) \tag{3.6}$$

gilt. Das System aller μ^*-meßbaren Mengen wird mit $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ bezeichnet.

Theorem 3.30. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω. Dann gilt:*
a) $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ist eine σ-Algebra.
b) Die Einschränkung von μ^* auf $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ist ein Maß.

Beweis. 1^0 Wir beweisen zunächst, daß das Mengensystem $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine Algebra in Ω bildet. Die Menge Ω ist offensichtlich μ^*-meßbar, d.h. $\Omega \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Da die Carathéodory-Gleichung (3.6) durch Vertauschen von A und A^{c} in sich übergeht, folgt aus $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ stets $A^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Seien $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Es bleibt zu zeigen, daß dann auch $A_1 \cup A_2$ zu $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ gehört. Hierzu sei $Z \subseteq \Omega$ eine beliebige „Testmenge“. Wegen der μ^*-Meßbarkeit von A_1 ist

$$\begin{aligned}
&\mu^*\left(Z \cap (A_1 \cup A_2)\right)\\
&\quad = \mu^*\left(Z \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1\right) + \mu^*\left(Z \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^{\mathrm{c}}\right)\\
&\quad = \mu^*(Z \cap A_1) + \mu^*(Z \cap A_1^{\mathrm{c}} \cap A_2).
\end{aligned}$$

Addiert man zu beiden Seiten dieser Gleichung $\mu^*(Z \cap (A_1 \cup A_2)^{\mathrm{c}})$ und benutzt man nacheinander die μ^*-Meßbarkeit von A_2 und A_1, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\mu^*\left(Z \cap (A_1 \cup A_2)\right) + \mu^*\left(Z \cap (A_1 \cup A_2)^{\mathrm{c}}\right)\\
&\quad = \mu^*(Z \cap A_1) + \mu^*(Z \cap A_1^{\mathrm{c}} \cap A_2) + \mu^*(Z \cap A_1^{\mathrm{c}} \cap A_2^{\mathrm{c}})\\
&\quad = \mu^*(Z \cap A_1) + \mu^*(Z \cap A_1^{\mathrm{c}})\\
&\quad = \mu^*(Z).
\end{aligned}$$

Da dies für alle „Testmengen“ Z gilt, ist $A_1 \cup A_2$ eine μ^*-meßbare Menge.

2^0 Um zu zeigen, daß $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra ist, müssen wir noch die Abgeschlossenheit dieses Mengensystems bezüglich abzählbar unendlicher Vereinigungen nachprüfen. Dabei genügt es, paarweise disjunkte Mengen zu betrachten. In der Tat, für eine beliebige Folge (A_n) μ^*-meßbarer Mengen ist

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n A'_n$$

mit

$$\begin{aligned} A'_1 &:= A_1, \\ A'_n &:= A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \qquad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Die Mengen A'_n sind paarweise disjunkt und, da $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine Algebra ist, ebenfalls μ^*-meßbar. Sei deshalb (A_n) eine Folge paarweise disjunkter μ^*-meßbarer Mengen und $Z \subseteq \Omega$ eine beliebige „Testmenge“. Durch vollständige Induktion findet man

$$\mu^*(Z) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(Z \cap A_i) + \mu^* \left(Z \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\mathrm{c}} \right) \tag{3.7}$$

für $n \geq 1$. Für $n = 1$ ist dies die Carathéodory-Gleichung, die wegen der μ^*-Meßbarkeit von A_1 gilt. Für den Induktionsschluß von n auf $n+1$ benutzt man

$$\begin{aligned} \mu^* \left(Z \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\mathrm{c}} \right) &= \mu^* \left(Z \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i^{\mathrm{c}} \right) + \mu^* \left(Z \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\mathrm{c}} \cap A_{n+1} \right) \\ &= \mu^* \left(Z \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i^{\mathrm{c}} \right) + \mu^* \left(Z \cap A_{n+1} \right), \end{aligned}$$

was aus der μ^*-Meßbarkeit von A_{n+1} und der paarweisen Disjunktheit der Mengen A_i folgt. Wegen der Monotonie des äußeren Maßes verkleinert sich der letzte Summand auf der rechten Seite von (3.7), wenn man n durch ∞ ersetzt. Läßt man anschließend in der Summe n gegen Unendlich gehen, so folgt

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^* \left(Z \cap A_i \right) + \mu^* \left(Z \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^{\mathrm{c}} \right). \tag{3.8}$$

Durch zweimaliges Anwenden der Subadditivität von μ^* läßt sich diese Ungleichung wie folgt fortsetzen:

$$\begin{aligned} &\geq \mu^* \left(Z \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \mu^* \left(Z \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^{\mathrm{c}} \right) \\ &\geq \mu^*(Z). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Also muß in (3.8) und (3.9) überall Gleichheit gelten. Insbesondere genügt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ der Carathéodory-Gleichung und ist daher μ^*-meßbar.

3^0 Für $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ liefert (3.8) wegen der Gültigkeit des Gleichheitszeichens und $\mu^*(\emptyset) = 0$ schließlich

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* (A_n) .$$

Dies beweist die σ-Additivität von μ^* auf $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. $\square$

Theorem 3.31. *(Fortsetzungssatz)*
Sei $\mu\colon \mathfrak{S} \to [0,\infty]$ eine σ-additive Mengenfunktion auf einem Semiring $\mathfrak{S}$ in Ω und $\mu(\emptyset) = 0$. Dann läßt sich μ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{S})$ fortsetzen.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in folgende Teilschritte:

(i) $\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\colon A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S},\ \bigcup\limits_n A_n \supseteq A \right\}, \quad A \in \mathfrak{P}(\Omega),$
ist ein äußeres Maß.

(ii) Alle Mengen aus $\mathfrak{S}$ sind μ^*-meßbar.

(iii) Die Mengenfunktionen μ und μ^* stimmen auf $\mathfrak{S}$ überein.

Das Infimum in (i) wird gleich $+\infty$ gesetzt, falls keine Überdeckung von A mit Mengen $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$ existiert.

Die Behauptung des Theorems ergibt sich dann wie folgt. Da $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra ist (Theorem 3.30 a)), impliziert (ii), daß $\sigma(\mathfrak{S})$ in $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ enthalten ist. Wegen Behauptung b) von Theorem 3.30 ist die Einschränkung von μ^* auf $\sigma(\mathfrak{S})$ eine Maß, das wegen (iii) eine Fortsetzung von μ darstellt.

Wir beginnen nun mit dem Beweis von (i). Wegen $\mu(\emptyset) = 0$ ist auch $\mu^*(\emptyset) = 0$. Die Monotonie von μ^* ist ebenfalls klar. Zum Beweis der Subadditivität seien $A_1, A_2, \ldots$ beliebige Teilmengen von Ω und $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\mu^*(A_n) < \infty$ für alle n. Wir fixieren $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Definition von μ^* finden wir für jedes n eine abzählbare Überdeckung (A_{nk}) von A_n mit Mengen aus $\mathfrak{S}$, so daß

$$\sum_k \mu(A_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$$

ist. Da die Doppelfolge (A_{nk}) die Menge A überdeckt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\le \sum_n \sum_k \mu(A_{nk}) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt hieraus die Subadditivität von μ^*.

Zum Beweis von (ii) seien $A \in \mathfrak{S}$ und $Z \subseteq \Omega$ beliebig gewählt. Es ist

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c) \leq \mu^*(Z) \tag{3.10}$$

zu zeigen. Da die entgegengesetzte Ungleichung wegen der Subadditivität von μ^* gilt, erfüllt A dann die Carathéodory-Gleichung, d.h. A ist μ^*-meßbar. Zum Beweis von (3.10) sei (B_n) eine beliebige Folge von Mengen aus $\mathfrak{S}$ mit $\bigcup_n B_n \supseteq Z$. (Existiert keine solche Überdeckung, so ist $\mu^*(Z) = +\infty$ und daher (3.10) auch erfüllt.) Da $\mathfrak{S}$ ein Semiring ist, finden wir für jedes n paarweise disjunkte Mengen $C_{n1}, \ldots, C_{nm_n} \in \mathfrak{S}$ mit

$$B_n \cap A^c = B_n \setminus (B_n \cap A) = \bigcup_{k=1}^{m_n} C_{nk}.$$

Die Folgen $(B_n \cap A)$ und (C_{nk}) überdecken $Z \cap A$ beziehungsweise $Z \cap A^c$. Da die Mengen $B_n \cap A$ und C_{nk} außerdem zu $\mathfrak{S}$ gehören, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c) &\leq \sum_n \mu(B_n \cap A) + \sum_n \sum_{k=1}^{m_n} \mu(C_{nk}) \\ &= \sum_n \left[\mu(B_n \cap A) + \sum_{k=1}^{m_n} \mu(C_{nk}) \right] \\ &= \sum_n \mu(B_n). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß für jedes n die Mengen $B_n \cap A, C_{n1}, \ldots, C_{nm_n}$ zu $\mathfrak{S}$ gehören, eine disjunkte Zerlegung von B_n bilden und μ additiv ist. Da hierbei (B_n) eine beliebige abzählbare Überdeckung von Z mit Mengen aus $\mathfrak{S}$ ist, können wir die rechte Seite durch ihr Infimum über alle solche Mengenfolgen ersetzen und erhalten (3.10).

Zum Beweis von (iii) sei $A \in \mathfrak{S}$ beliebig gewählt. Da $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ trivialerweise gilt, bleibt nur $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ zu zeigen. Aufgrund der Definition des äußeren Maßes μ^* ist dies gleichbedeutend mit

$$\mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

für alle Folgen (A_n) aus $\mathfrak{S}$ mit $A \subseteq \bigcup_n A_n$. Dies ist aber die Subadditivität von μ, die wegen Lemma 3.27 aus der σ-Additivität folgt. Wir merken an, daß die σ-Additivität von μ nur an dieser Stelle benutzt wurde. Für den Beweis der Behauptung (ii) genügte die endliche Additivität. $\square$

Bemerkung 3.32. Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß man im Theorem 3.31 die σ-Additivität von μ durch die endliche Additivität und die (abzählbare) Subadditivität ersetzen kann.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt *σ-endlich*, falls eine Folge (E_n) von Mengen aus $\mathfrak{A}$ existiert mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für alle n. (Mit anderen Worten, μ läßt sich monoton durch die endlichen Maße $\mu_n(A) := \mu(A \cap E_n)$, $A \in \mathfrak{A}$, approximieren.)

Entsprechend definiert man die σ-Endlichkeit einer Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{S} \to [0, \infty]$ auf einem Semiring $\mathfrak{S}$: Es existiert eine Folge (E_n) von Mengen aus $\mathfrak{S}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für alle n.

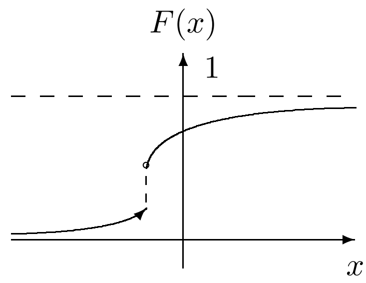
Folgerung 3.33. *Sei $\mu\colon \mathfrak{S} \to [0, \infty]$ eine σ-*endliche *σ-additive Mengenfunktion auf einem Semiring $\mathfrak{S}$, $\mu(\emptyset) = 0$. Dann existiert genau eine Fortsetzung $\hat{\mu}$ von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathfrak{S})$.*

Beweis. Da $\mathfrak{S}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathfrak{S})$ ist und μ als σ-endlich vorausgesetzt wird, ergibt sich die Eindeutigkeit aus der Folgerung 3.19. □

Beispiel 3.34.
Eine reelle Funktion F heißt *Verteilungsfunktion*, falls

(i) F nichtfallend und rechtsstetig (oder linksstetig) ist;

(ii) $F(x)$ für $x \to \pm\infty$ gegen 1 bzw. 0 konvergiert.



Wir wissen bereits folgendes: Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$, so ist

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$

eine Verteilungsfunktion. Da die Intervalle $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}^1$, einen $\cap$-stabilen Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{B}^1$ bilden, entsprechen verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$ verschiedene Verteilungsfunktionen (Folgerung 3.18).

Als Anwendung des Fortsetzungssatzes wollen wir beweisen, daß zu jeder Verteilungsfunktion F ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$ gehört, dessen Verteilungsfunktion F_μ mit F übereinstimmt: $F_\mu = F$. Dies zeigt, daß die Abbildung $\mu \to F_\mu$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen der Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$ und der Klasse der Verteilungsfunktionen herstellt.

Das Mengensystem

$$\mathfrak{S} := \{(a, b] : -\infty < a \leq b < \infty\}$$

bildet einen Semiring, der die σ-Algebra $\mathfrak{B}^1$ erzeugt. Sei F eine beliebige Verteilungsfunktion. Wir zeigen, daß durch

$$\mu((a, b]) := F(b) - F(a) \tag{3.11}$$

eine σ-additive Mengenfunktion μ auf $\mathfrak{S}$ definiert wird. Dann läßt sich μ aufgrund des Fortsetzungssatzes (Theorem 3.31) zu einem Maß $\hat{\mu}$ auf $\mathfrak{B}^1$ fortsetzen. Im Anschluß hieran bleibt dann nur nachzuprüfen, daß $\hat{\mu}((-\infty, b]) = F(b)$ für alle $b \in \mathbb{R}$ und $\hat{\mu}(\mathbb{R}^1) = 1$ gilt.

Um die σ-Additivität von μ auf $\mathfrak{S}$ nachzuweisen, sei $(a, b]$ die disjunkte Vereinigung abzählbar vieler halboffener Intervalle $(a_n, b_n]$:

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]. \tag{3.12}$$

Aufgrund der Monotonie von F erhält man hieraus für jede natürliche Zahl N die Abschätzung

$$F(b) - F(a) \geq \sum_{n=1}^{N} [F(b_n) - F(a_n)]\,,$$

woraus für $N \to \infty$

$$F(b) - F(a) \geq \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)]$$

folgt. Zum Beweis der entgegengesetzten Ungleichung benutzen wir (ähnlich wie bei der Konstruktion des Lebesgue-Maßes) ein Kompaktheitsargument. Hierzu fixieren wird $\varepsilon > 0$ beliebig und wählen $\tilde{b}_n > b_n$ so, daß

$$F(\tilde{b}_n) - F(b_n) < \varepsilon 2^{-n}$$

gilt. Letzteres ist aufgrund der Rechtsstetigkeit von F möglich. Aus (3.12) folgt

$$[a + \varepsilon, b] \subseteq \bigcup_n (a_n, \tilde{b}_n).$$

Also bilden die offenen Intervalle $(a_n, \tilde{b}_n)$ eine Überdeckung des kompakten Intervalls $[a + \varepsilon, b]$. Folglich findet man endlich viele $n_1, \ldots, n_r$ mit

$$[a + \varepsilon, b] \subseteq (a_{n_1}, \tilde{b}_{n_1}) \cup \cdots \cup (a_{n_r}, \tilde{b}_{n_r})$$

(Satz von Heine-Borel). Unter Ausnutzung der Monotonie von F und Verwendung elementarer Betrachtungen erhält man hieraus

$$\begin{aligned} F(b) - F(a + \varepsilon) \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{r} \left[F(\tilde{b}_{n_k}) - F(a_{n_k})\right] \\ &\leq \quad \sum_{k=1}^{r} \left[F(b_{n_k}) - F(a_{n_k}) + \varepsilon 2^{-n_k}\right] \\ &\leq \quad \sum_{n} \left[F\left(b_n\right) - F\left(a_n\right)\right] + \varepsilon. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Rechtsstetigkeit von F folgt hieraus für $\varepsilon \to 0$:

$$F(b) - F(a) \leq \sum_n \left[F(b_n) - F(a_n)\right].$$

Also gilt

$$F(b) - F(a) = \sum_n \left[F(b_n) - F(a_n)\right],$$

d.h.

$$\mu\left((a,b]\right) = \sum_n \mu\left((a_n, b_n]\right).$$

Somit ist μ eine σ-additive Mengenfunktion auf dem Semiring $\mathfrak{S}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$. Aufgrund der Folgerung 3.33 besitzt μ daher eine Fortsetzung $\hat{\mu}$ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{S}) = \mathfrak{B}^1$. Es bleibt zu zeigen, daß $\hat{\mu}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Verteilungsfunktion F ist. Dies ergibt sich wie folgt unter Benutzung des Stetigkeitssatzes für Maße und der Eigenschaften von F:

$$\begin{aligned}
F_{\hat{\mu}}(x) := \hat{\mu}\left((-\infty, x]\right) &= \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}\left((-n, x]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left((-n, x]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[F(x) - F(-n)\right] = F(x), \\
\hat{\mu}\left((-\infty, \infty)\right) &= \lim_{n\to\infty} \mu\left((-n, n]\right) = \lim_{n\to\infty} \left[F(n) - F(-n)\right] = 1.
\end{aligned}$$

Bei der Konstruktion des Lebesgue-Maßes wurde eine Menge Lebesgue-meßbar genannt, wenn sie sich „im Sinne des äußeren Maßes“ beliebig genau durch elementare Mengen (d.h. endliche Vereinigungen paarweise disjunkter Mengen aus dem Semiring der achsenparallelen Quader) approximieren läßt. In einer *Übungsaufgabe* wurde gezeigt, daß sich die Lebesgue-Meßbarkeit mit dem Meßbarkeitskriterium von Carathéodory überprüfen läßt. Bei der Konstruktion von Maßen aus allgemeineren σ-additiven Mengenfunktionen μ auf Semiringen diente das Carathéodory-Kriterium als Definition der μ^*-Meßbarkeit (Definition 3.29). Der folgende Satz zeigt, daß bei σ-Endlichkeit beide Herangehensweisen im wesentlichen äquivalent sind.

Theorem 3.35. *(Approximationssatz)*
Gegeben seien ein Semiring $\mathfrak{S}$ und ein Maß μ auf $\mathfrak{A} := \sigma(\mathfrak{S})$. Die Einschränkung von μ auf $\mathfrak{S}$ sei σ-endlich. Dann existieren zu jeder Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_r \in \mathfrak{S}$ mit

$$\mu\left(A \bigtriangleup \bigcup_{k=1}^{r} B_k\right) < \varepsilon.$$

Beweis. Wie beim Beweis des Fortsetzungssatzes (Theorem 3.31) konstruiert man zur Einschränkung von μ auf $\mathfrak{S}$ ein äußeres Maß μ^* und führt die σ-Algebra $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ der μ^*-meßbaren Mengen ein. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{A}_{\mu^*} \supseteq \mathfrak{A}$. Außerdem ist die Einschränkung von μ^* auf $\mathfrak{A}$ ein Maß, das auf $\mathfrak{S}$ mit μ zusammenfällt.

Aufgrund der Einzigkeit der Fortsetzung (σ-Endlichkeit, Folgerung 3.33) müssen μ^* und μ auf $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{S})$ übereinstimmen.

Seien $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Dann ist $\mu^*(A) = \mu(A) < \infty$. Nach Definition von μ^* existieren daher Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_n A_n$$

und

$$\mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n) < \mu(A) + \varepsilon/2 < \infty. \tag{3.13}$$

Unter Ausnutzung der Subadditivität von μ ergibt sich deshalb

$$\mu\left(A \triangle \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A\right) + \mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen n. Tatsächlich, aus (3.13) folgt, daß der erste Summand auf der rechten Seite kleiner als $\varepsilon/2$ ist. Aufgrund des Stetigkeitssatzes für Maße konvergiert der zweite Summand (unter Berücksichtigung von (3.13)) für $n \to \infty$ gegen 0, ist also kleiner $\varepsilon/2$ für genügend großes n.

Bleibt nur nachzuweisen, daß sich $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ als endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{S}$ schreiben läßt. Dies ist leicht einzusehen, indem man zu den disjunkten Mengen

$$\begin{aligned} A'_1 &:= A_1, \\ A'_k &:= A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i = A_k \setminus \bigcup_{i<k} (A'_i \cap A_k), \qquad k \geq 2, \end{aligned}$$

übergeht. Jede dieser Mengen A'_k läßt sich als endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen aus dem Semiring $\mathfrak{S}$ darstellen (vgl. Bemerkung 3.22, 2.). □

Da jede Algebra ein bezüglich endlicher Vereinigungen abgeschlossener Semiring ist, erhalten wir aus dem Approximationssatz die nachstehende Folgerung.

Folgerung 3.36. *Gegeben seien eine Algebra $\mathfrak{A}_0$ und ein endliches Maß μ auf der σ-Algebra $\mathfrak{A} := \sigma(\mathfrak{A}_0)$. Dann existieren zu jedem $A \in \mathfrak{A}$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_0 \in \mathfrak{A}_0$ mit*

$$\mu(A \triangle A_0) < \varepsilon.$$

Literatur zur Fortsetzung von Maßen:

P. Billingsley [7], A.N. Kolmogorov und S.V. Fomin [31].

Kapitel 4

Abbildungen zwischen meßbaren Räumen

Gegenstand der Mathematik ist nicht in erster Linie die Untersuchung mathematischer Objekte (Strukturen), sondern das Studium von *Wechselbeziehungen* zwischen denselben. In der Funktionalanalysis betrachtet man nicht Banachräume an sich, sondern man interessiert sich für mit der Banachraumstruktur verträgliche Abbildungen (insbesondere lineare stetige Operatoren und Funktionale). Entsprechend studiert man in der Topologie nicht nur topologische Räume, sondern stetige Abbildungen zwischen solchen Räumen. Im folgenden sollen Eigenschaften von Abbildungen zwischen meßbaren Räumen untersucht werden, die mit den zugrundeliegenden σ-Algebren verträglich sind. Dies führt auf den Begriff der meßbaren Abbildung.

4.1. Meßbare Abbildungen

Definition 4.1. Gegeben seien meßbare Räume $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und eine Abbildung

$$f\colon \Omega \to \Omega'.$$

Die Abbildung f heißt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-*meßbar*, wenn

$$f^{-1}(A') \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } A' \in \mathfrak{A}'$$

gilt. Mit anderen Worten, f ist meßbar, wenn das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist. Ist $\Omega' = \mathbb{R}$, so nennt man f auch *meßbare Funktion*.

Bemerkung 4.2. Die Struktur meßbarer Räume ähnelt der topologischer Räume. Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{O})$ besteht aus einer nichtleeren Menge E und einem System $\mathcal{O}$ offener Teilmengen. Bekanntlich sind beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen wieder offen. Damit besitzt $\mathcal{O}$ ähnliche Eigenschaften wie eine σ-Algebra. Eine entsprechende Analogie besteht zwischen meßbaren und stetigen Abbildungen: Eine Abbildung $f\colon E \to E'$ zwischen zwei topologischen Räumen $(E, \mathcal{O})$ und $(E', \mathcal{O}')$ heißt bekanntlich stetig, wenn

$$f^{-1}(G') \in \mathcal{O} \qquad \text{für alle } G' \in \mathcal{O}'$$

gilt.

Da in vielen Fällen die Mengen einer σ-Algebra nicht explizit greifbar sind, kann eine direkte Überprüfung der in der Definition 4.1 angegebenen Meßbarkeitseigenschaft auf Schwierigkeiten stoßen. In diesem Zusammenhang erweist sich das folgende Meßbarkeitskriterium als außerordentlich hilfreich.

Theorem 4.3. *(Meßbarkeitskriterium)*
Gegeben seien meßbare Räume $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ sowie ein (nicht notwendigerweise $\cap$-stabiler) Erzeuger $\mathfrak{E}'$ der σ-Algebra $\mathfrak{A}'$. Eine Abbildung $f\colon \Omega \to \Omega'$ ist genau dann $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-meßbar, wenn

$$f^{-1}(E') \in \mathfrak{A} \qquad \textit{für alle } E' \in \mathfrak{E}' \tag{4.1}$$

gilt.

Beweis. Es ist nur zu beweisen, daß (4.1) die Meßbarkeit von f impliziert. Hierzu zeigt man durch direktes Nachprüfen der Eigenschaften (i) – (iii) aus der Definition 3.1 einer σ-Algebra, daß das Mengensystem

$$\mathfrak{F}' := \big\{A' \in \mathfrak{A}' \colon f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\big\}$$

eine σ-Algebra in Ω' bildet. Wegen (4.1) gilt $\mathfrak{F}' \supseteq \mathfrak{E}'$ und damit auch $\mathfrak{F}' \supseteq \sigma(\mathfrak{E}') = \mathfrak{A}'$. Also ist $\mathfrak{F}' = \mathfrak{A}'$, d.h. f ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-meßbar. $\square$

Beispiel 4.4.

1. Eine meßbare Abbildung zwischen zwei Borel-Räumen $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p)$ und $(\mathbb{R}^q, \mathfrak{B}^q)$ heißt *Borel-meßbar.*

2. Stetige Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sind Borel-meßbar. Tatsächlich, das System $\mathcal{O}^q$ der offenen Mengen des $\mathbb{R}^q$ bildet einen Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{B}^q$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(G)$ offen in $\mathbb{R}^p$ und folglich $f^{-1}(G) \in \mathfrak{B}^p$ für alle $G \in \mathcal{O}^q$. Also ist Theorem 4.3 anwendbar.

3. Gegeben seien ein meßbarer Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ und eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$. Die Funktion f ist genau dann $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^1)$-meßbar, wenn eine der folgenden Aussagen für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

   (i) $\{f < t\} \in \mathfrak{A}$;
   (ii) $\{f \le t\} \in \mathfrak{A}$;
   (iii) $\{f > t\} \in \mathfrak{A}$;
   (iv) $\{f \ge t\} \in \mathfrak{A}$.

Hierbei steht $\{f < t\}$ für die Menge $\{\omega \in \Omega\colon f(\omega) < t\}$. Wir werden im folgenden öfters solche abkürzenden Notationen benutzen. Die Meßbarkeit von f folgt z.B. mit Theorem 4.3 aus (i), da $\{f < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$ ist und die Intervalle $(-\infty, t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, die Borelalgebra $\mathfrak{B}^1$ erzeugen.

4. *Komposition meßbarer Abbildungen:*

   Sind $f_1\colon (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $f_2\colon (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \to (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ meßbare Abbildungen, so ist auch die Komposition $f_2 \circ f_1\colon (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ meßbar. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Meßbarkeit.

5. *Von Abbildungen erzeugte σ-Algebren:*

   a) Gegeben seien ein meßbarer Raum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und eine Abbildung $f\colon \Omega \to \Omega'$. Man prüft leicht nach, daß

   $$\mathfrak{A} := \left\{f^{-1}(A')\colon A' \in \mathfrak{A}'\right\}$$

   eine σ-Algebra in Ω ist, das „Urbild" der σ-Algebra $\mathfrak{A}'$ bezüglich der Abbildung f. Offensichtlich ist $\mathfrak{A}$ die kleinste σ-Algebra in Ω mit der Eigenschaft, daß f $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-meßbar ist. Man bezeichnet diese σ-Algebra mit $\sigma(f)$ und spricht von der *von f erzeugten σ-Algebra*. Wir merken an, daß die „Bilder" von σ-Algebren im allgemeinen keine σ-Algebren sind.

   b) Gegeben seien eine nichtleere Familie meßbarer Räume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, und Abbildungen $f_i\colon \Omega \to \Omega_i$, $i \in I$. Dann ist

   $$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)\right)$$

   die kleinste σ-Algebra in Ω bezüglich der alle Abbildungen f_i, $i \in I$, meßbar sind. Diese σ-Algebra wird mit $\sigma(f_i; i \in I)$ bezeichnet.

Theorem 4.5. *Gegeben seien meßbare Räume $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$ und $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, $i \in I$, sowie Abbildungen $f\colon \Omega_0 \to \Omega$ und $f_i\colon \Omega \to \Omega_i$, $i \in I$. Die Abbildung f ist genau dann $(\mathfrak{A}_0, \sigma(f_i; i \in I))$-meßbar, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung $f_i \circ f$ $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_i)$-meßbar ist.*

Beweis.

1^0 Sei f $(\mathfrak{A}_0, \sigma(f_i; i \in I))$-meßbar. Wir fixieren $i \in I$ und $A_i \in \mathfrak{A}_i$ beliebig und müssen zeigen, daß $(f_i \circ f)^{-1}(A_i)$ zu $\mathfrak{A}_0$ gehört. Es ist aber

$$(f_i \circ f)^{-1}(A_i) = f^{-1}(f_i^{-1}(A_i)).$$

Die Behauptung folgt nun daraus, daß $f_i^{-1}(A_i)$ $\sigma(f_i; i \in I)$-meßbar ist.

2^0 Angenommen, $f_i \circ f$ ist $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_i)$-meßbar für alle $i \in I$. Es ist zu zeigen, daß f $(\mathfrak{A}_0, \sigma(f_i; i \in I))$-meßbar ist. Da

$$\mathfrak{E} := \bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)$$

ein Erzeuger von $\sigma(f_i; i \in I)$ ist, genügt es aufgrund des Theorems 4.3 nachzuprüfen, daß für jedes $E \in \mathfrak{E}$ die Menge $f^{-1}(E)$ zu $\mathfrak{A}_0$ gehört. Jede Menge E aus $\mathfrak{E}$ hat aber die Gestalt $E = f_i^{-1}(A_i)$ für ein $i \in I$ und eine Menge $A_i \in \mathfrak{A}_i$. Also ist

$$f^{-1}(E) = f^{-1}\left(f_i^{-1}(A_i)\right) = (f_i \circ f)^{-1}(A_i),$$

und diese Menge gehört wegen der $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_i)$-Meßbarkeit von $f_i \circ f$ zu $\mathfrak{A}_0$. □

4.2. Bildmaße

Wir betrachten eine meßbare Abbildung $f\colon (E, \mathfrak{E}) \to (F, \mathfrak{F})$. Die Abbildung f überführt in natürlicher Weise Maße auf der σ-Algebra $\mathfrak{E}$ in Maße auf der σ-Algebra $\mathfrak{F}$.

Theorem 4.6. *Gegeben seien eine meßbare Abbildung $f\colon (E, \mathfrak{E}) \to (F, \mathfrak{F})$ und ein Maß μ auf dem meßbaren Raum $(E, \mathfrak{E})$. Dann wird durch*

$$\nu(A) := \mu(f^{-1}(A)), \qquad A \in \mathfrak{F},$$

ein Maß ν auf $(F, \mathfrak{F})$ definiert.

Beweis. Wegen der Meßbarkeit von f gehört $f^{-1}(A)$ für beliebiges $A \in \mathfrak{F}$ zur σ-Algebra $\mathfrak{E}$. Also ist $\mu(f^{-1}(A))$ wohldefiniert. Die Nichtnegativität von ν und $\nu(\emptyset) = 0$ sind offensichtlich. Um die σ-Additivität von ν nachzuweisen, sei (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{F}$. Dann ist $(f^{-1}(A_n))$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{E}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_n f^{-1}(A_n)\right) \\ &= \sum_n \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_n \nu(A_n).\end{aligned}$$

□

Definition 4.7. Das im Theorem 4.6 definierte Maß ν heißt *Bild* des Maßes μ bezüglich f und wird mit $\mu \circ f^{-1}$ bezeichnet. Man spricht auch vom „induzierten Maß“ und benutzt Schreibweisen wie $\mu(f)$ oder μ_f.

Da $f^{-1}(A) = \{x \in E\colon f(x) \in A\} = \{f \in A\}$ ist, kann man das Bildmaß auch in der Form

$$(\mu \circ f^{-1})(A) = \mu(f \in A)$$

schreiben.

Beispiel 4.8. (Beispiele für Bildmaße)

1. *Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes:*

   Für einen beliebigen Vektor $a \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $T_a \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die durch

   $$T_a(x) := x + a, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

   definierte *Translationsabbildung*. Diese Abbildung ist Borel-meßbar, da sie stetig ist. Für eine beliebige Menge $A \in \mathfrak{B}^d$ ist

   $$T_a^{-1}(A) = \{T_a \in A\} = \{x \colon x + a \in A\} = A - a.$$

   Da das d-dimensionale Lebesgue-Maß λ translationsinvariant ist,

   $$\lambda(A - a) = \lambda(A),$$

   (*Übungsaufgabe*), gilt

   $$\lambda \circ T_a^{-1} = \lambda.$$

2. *Verteilungsgesetze von Zufallsgrößen:*

   Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ und eine *Zufallsgröße* ζ, d.h. eine meßbare Abbildung

   $$\zeta \colon (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1).$$

   Dann ist $\mathbb{P} \circ \zeta^{-1}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$. $(\mathbb{P} \circ \zeta^{-1})(A) = \mathbb{P}(\zeta \in A)$ wird als die Wahrscheinlichkeit interpretiert, daß die Zufallsgröße ζ Werte in der Borelmenge A annimmt.

4.3. Meßbare numerische Funktionen

Wir nennen eine Funktion *numerisch*, wenn sie in die *erweiterte* Zahlengerade

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

abbildet. Mit $\overline{\mathfrak{B}}$ bezeichnen wir die σ-Algebra der Borelmengen von $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathfrak{B}} := \left\{B \subseteq \overline{\mathbb{R}} \colon B \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}\right\}.$$

Definition 4.9. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Eine Abbildung $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt $\mathfrak{A}$-*meßbare numerische Funktion*, wenn sie $(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}})$-meßbar ist.

Bemerkung 4.10.

1. Jede meßbare Funktion $f\colon (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ kann als meßbare numerische Funktion angesehen werden.

2. Aussagen für meßbare reellwertige Funktionen lassen sich meist sinngemäß auf meßbare numerische Funktionen übertragen und umgekehrt. Zum Beispiel ist eine numerische Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $\mathfrak{A}$-meßbar, wenn

$$\{f < t\} \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

oder

$$\{f \le t\} \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt.

Im folgenden seien $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ numerische Funktionen. Das *Maximum* und das *Minimum* der Funktionen f und g werden mit $f \vee g$ beziehungsweise $f \wedge g$ bezeichnet:

$$(f \vee g)(\omega) := f(\omega) \vee g(\omega), \quad (f \wedge g)(\omega) := f(\omega) \wedge g(\omega) \qquad (\omega \in \Omega).$$

Mit f^+ und f^- bezeichnen wir den *Positivteil* beziehungsweise *Negativteil* von f:

$$f^+(\omega) := f(\omega) \vee 0, \quad f^-(\omega) := -\,(f(\omega) \wedge 0) \qquad (\omega \in \Omega).$$

Es gilt

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-,$$

wobei Addition und Subtraktion „punktweise“ zu verstehen sind.

Behauptung 4.11. *Seien f und g meßbare numerische Funktionen auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$*. Dann sind auch die folgenden Funktionen meßbare numerische Funktionen:*

a) $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+, f^-, $|f|$;

b) $\alpha \cdot f$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g, *falls diese Ausdrücke wohldefiniert sind.*

c) Außerdem sind die folgenden Mengen $\mathfrak{A}$-meßbar:

$$\{f < g\}\,,\ \{f \le g\}\,,\ \{f = g\}\,,\ \{f \ne g\}\,.$$

Beweis. Wir verwenden das Meßbarkeitskriterium aus Bemerkung 4.10, 2.

a) Zum Beispiel folgt die Meßbarkeit von $f \vee g$ aus

$$\{f \vee g < t\} = \{f < t\} \cap \{g < t\}$$

und der $\mathfrak{A}$-Meßbarkeit der Mengen $\{f < t\}$ und $\{g < t\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) *Übungsaufgabe.*

c) Da die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist, folgt die $\mathfrak{A}$-Meßbarkeit der Menge $\{f < g\}$ aus

$$\{f < g\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \{f < t < g\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < t\} \cap \{t < g\}\Big).$$

Die Meßbarkeit der übrigen Mengen ergibt sich aus den Darstellungen

$$\begin{aligned}
\{f \neq g\} &= \{f < g\} \cup \{g < f\}, \\
\{f = g\} &= \{f \neq g\}^{\mathrm{c}}, \\
\{f \leq g\} &= \{f < g\} \cup \{f = g\}.
\end{aligned}$$

□

Behauptung 4.12. *Gegeben sei eine Folge meßbarer numerischer Funktionen* $f_n \colon (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, $n = 1, 2, \ldots$

a) Dann sind auch die (punktweise definierten) Funktionen

$$\inf_n f_n, \ \sup_n f_n, \ \liminf_{n \to \infty} f_n, \ \limsup_{n \to \infty} f_n$$

meßbare numerische Funktionen.

b) Existiert für jedes $\omega \in \Omega$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *der Grenzwert*

$$f(\omega) := \lim_{n \to \infty} f_n(\omega),$$

so ist auch f *eine meßbare numerische Funktion.*

Beweis. Zum Beispiel ist für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\Big\{\inf_n f_n < t\Big\} = \bigcup_n \{f_n < t\}$$

als abzählbare Vereinigung der $\mathfrak{A}$-meßbarer Mengen $\{f_n < t\}$ $\mathfrak{A}$-meßbar, woraus die Meßbarkeit von $\inf_n f_n$ folgt.

Rest der Behauptung: *Übungsaufgabe.* □

Kapitel 5

Integrationstheorie

5.1. Definition des Lebesgue-Integrals

Im folgenden bezeichne λ das (eindimensionale) Lebesgue-Maß. Wir erinnern zunächst an die Definition des *Riemann-Integrals*. Gegeben sei eine (nichtnegative) Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Man betrachtet eine Zerlegungsfolge

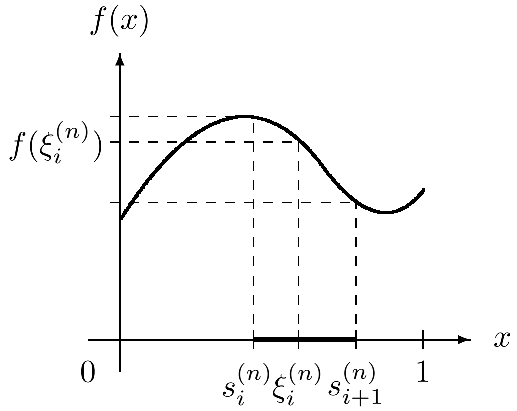
$$\mathfrak{Z}_n\colon 0 = s_0^{(n)} < s_1^{(n)} < \cdots < s_{r_n}^{(n)} = 1$$

des Intervalls $[0,1]$, deren Feinheitsgrad

$$|\mathfrak{Z}_n| := \max_i \left| s_{i+1}^{(n)} - s_i^{(n)} \right|$$

gegen Null konvergiert und wählt Zwischenpunkte

$$\xi_i^{(n)} \in \left[s_i^{(n)}, s_{i+1}^{(n)} \right].$$



Dann setzt man

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx \quad &:= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_i f\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(s_{i+1}^{(n)} - s_i^{(n)}\right) \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_i f\left(\xi_i^{(n)}\right)\lambda\left(\left[s_i^{(n)}, s_{i+1}^{(n)}\right)\right), \end{aligned}$$

falls der (endliche) Limes auf der rechten Seite für alle $(\mathfrak{Z}_n, \xi_i^{(n)})$ mit $|\mathfrak{Z}_n| \to 0$ existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_n)$ und der Zwischenpunkte $\xi_i^{(n)}$ ist. In diesem Falle heißt f *Riemann-integrierbar*.

Der Begriff des Riemann-Integrals besitzt u.a. folgende Nachteile:

- Stark unstetige Funktionen wie z.B. die Dirichlet-Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rational}, \\ 0, & x \text{ irrational}, \end{cases}$$
sind nicht Riemann-integrierbar.

- Grenzübergänge führen „schnell“ aus der Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen heraus. Dies führt u.a. zu Problemen bei der Vertauschung von Integration und Summation, so daß nicht mehr
$$\int \sum_n f_n(x)\,dx = \sum_n \int f_n(x)\,dx$$
gelten muß.

- Man kann „im wesentlichen“ nur Funktionen integrieren, die auf Teilmengen des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, definiert sind.

Die entscheidende Idee zur Überwindung dieser Probleme besteht darin, daß man anstelle von Zerlegungsfolgen im Urbildraum entsprechende Zerlegungsfolgen im Bildraum betrachtet. Dies führt auf den Begriff des *Lebesgue-Integrals*.

Man betrachtet eine Zerlegungsfolge

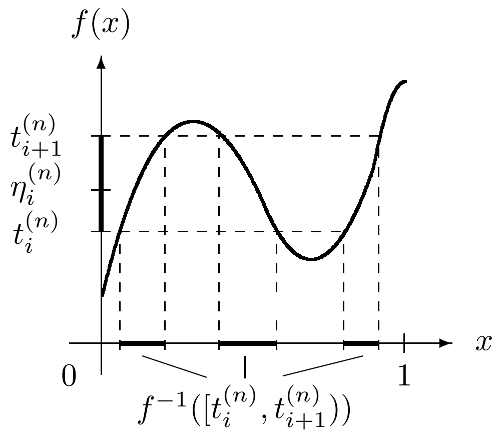
$$\mathfrak{Z}_n\colon 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots \to \infty$$

mit

$$|\mathfrak{Z}_n| := \sup_i \left| t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} \right| \to 0$$

für $n \to \infty$ und Zwischenpunkte

$$\eta_i^{(n)} \in \left[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)} \right).$$



Dann definiert man

$$\int f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum_i \eta_i^{(n)} \lambda\left(f^{-1}\left(\left[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)} \right) \right) \right).$$

Es zeigt sich, daß dieser Limes für alle nichtnegativen beschränkten meßbaren Funktionen f existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_n)$ und der Zwischenpunkte $\eta_i^{(n)}$ ist.

Wir werden im folgenden einen etwas anderen Weg zur Definition des Lebesgue-Integrals beschreiten, der sich zur Entwicklung der Theorie als günstiger erweist. Im Anschluß daran kann man sich leicht überlegen, daß beide Definitionen äquivalent sind (*Übungsaufgabe*).

Im folgenden sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Für eine beliebige Menge $A \subseteq \Omega$ setzen wir

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Die Funktion $\mathbb{1}_A$ wird *Indikatorfunktion* (oder auch charakteristische Funktion) der Menge A genannt. Man überlegt sich leicht, daß die Funktion $\mathbb{1}_A$ genau dann meßbar ist, wenn die Menge A meßbar ist.

Wir wollen eine Funktion $f\colon (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *elementar* nennen, wenn sie meßbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die verschiedenen Werte von f, so sind die Mengen

$$A_k := f^{-1}(\{\alpha_k\}), \qquad k = 1, \dots, r,$$

paarweise disjunkt und meßbar, und die Funktion f besitzt die Gestalt

$$f = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \, \mathbb{1}_{A_k}. \tag{5.1}$$

Wir nennen (5.1) eine *disjunkte Darstellung* der elementaren Funktion f, falls $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (nicht notwendigerweise verschiedene) reelle Zahlen und $A_1, \dots,$ A_r paarweise disjunkte Mengen aus der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ sind.

Im folgenden bezeichne $\mathcal{E}$ die Klasse aller elementaren Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, und $\mathcal{E}_+$ bestehe aus den nichtnegativen elementaren Funktionen. Wir konstruieren das Integral $\int f \, d\mu$ in mehreren Schritten.

1. Integral nichtnegativer elementarer Funktionen

Sei

$$f = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \, \mathbb{1}_{A_k}$$

eine disjunkte Darstellung von $f \in \mathcal{E}_+$. Dann setzt man

$$\boxed{\int f \, d\mu := \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \, \mu(A_k).}$$

Da das Maß μ unendliche Werte annehmen kann, ist $\int f \, d\mu = +\infty$ zugelassen. Damit die Summe auf der rechten Seite auch in diesem Fall Sinn hat, benutzt man die folgenden Konventionen:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \infty &= 0, \quad & x \cdot \infty &= \infty \text{ für } x > 0, \\ \infty + x &= \infty, \quad & \infty + \infty &= \infty. \end{aligned}$$

Die Funktion f kann i.a. verschiedene disjunkte Darstellungen besitzen. Deshalb ist noch nachzuprüfen, daß alle diese Darstellungen zum gleichen Wert des Integrals führen. Seien also zwei disjunkte Darstellungen von f gegeben:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{l=1}^{n} \beta_l \, \mathbb{1}_{B_l}.$$

Wir setzen o.B.d.A. voraus, daß alle α_k und β_l von Null verschieden sind. Dies impliziert

$$\bigcup_k A_k = \bigcup_l B_l.$$

Aufgrund der Disjunktheit der Mengen B_l und der σ-Additivität des Maßes μ erhalten wir deshalb

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \, \mu(A_k \cap B_l).$$

Ist $\mu(A_k \cap B_l) > 0$, so folgt $A_k \cap B_l \neq \emptyset$. Da f auf A_k den Wert α_k und auf B_l den Wert β_l annimmt, muß in diesem Falle $\alpha_k = \beta_l$ sein. Deshalb können wir die obige Gleichung wie folgt fortsetzen:

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \beta_l \, \mu(A_k \cap B_l) = \sum_{l=1}^{n} \beta_l \, \mu(B_l).$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu(A_k) = \sum_{l=1}^{n} \beta_l \, \mu(B_l),$$

was zu zeigen war.

Eigenschaften des Integrals nichtnegativer elementarer Funktionen:

(o) $A \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; \mathbb{1}_A \in \mathcal{E}_+, \; \int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A);$

(i) $\alpha \geq 0, \; f \in \mathcal{E}_+ \;\Rightarrow\; \alpha f \in \mathcal{E}_+, \; \int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ *(Homogenität)*;

(ii) $f, g \in \mathcal{E}_+ \;\Rightarrow\; f + g \in \mathcal{E}_+, \; \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ *(Additivität)*;

(iii) $f, g \in \mathcal{E}_+, \; f \leq g \;\Rightarrow\; \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ *(Monotonie)*.

Wir wollen uns nur ansehen, wie man die Aussage (ii) beweist. Hierzu seien

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{und} \quad g = \sum_{l=1}^{n} \beta_l \, \mathbb{1}_{B_l}$$

disjunkte Darstellungen von f und g. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß

$$\bigcup_k A_k = \bigcup_l B_l = \Omega$$

ist. Dann folgt

$$\mathbb{1}_{A_k} = \sum_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k \cap B_l} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{1}_{B_l} = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k \cap B_l},$$

und wir erhalten für $f+g$ die disjunkte Darstellung

$$f + g = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} (\alpha_k + \beta_l)\, \mathbb{1}_{A_k \cap B_l}.$$

Insbesondere ist $f + g \in \mathcal{E}_+$. Die Definition des Integrals und die σ-Additivität von μ liefern deshalb

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\, d\mu &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} (\alpha_k + \beta_l)\, \mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{l=1}^{n} \mu(A_k \cap B_l) + \sum_{l=1}^{n} \beta_l \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, \mu(A_k) + \sum_{l=1}^{n} \beta_l\, \mu(B_l) \\
&= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.
\end{aligned}$$

Damit ist die Additivität des Integrals bewiesen.

2. Integral nichtnegativer meßbarer numerischer Funktionen

Für eine nichtnegative meßbare Funktion $f\colon (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ definieren wir

$$\boxed{\int f\, d\mu := \sup\left\{ \int g\, d\mu \colon g \in \mathcal{E}_+,\ g \le f \right\}.}$$

Wir merken an, daß für $f \in \mathcal{E}_+$ das so definierte Integral mit dem vorher eingeführten Integral elementarer Funktionen übereinstimmt. Die obige Definition ist aufgrund der Supremumsbildung nicht sehr handlich, wenn man z.B. die Additivität des Integrals nachweisen möchte. Wir wollen deshalb als nächstes eine hierfür geeignetere äquivalente Definition herleiten. Dazu benutzen wir die beiden folgenden Behauptungen.

Behauptung 5.1. *Für jede nichtnegative meßbare numerische Funktion f findet man eine Folge (f_n) aus $\mathcal{E}_+$ mit $f_n \uparrow f$ (d.h. $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$).*

Beweis. Man überzeugt sich leicht davon, daß die Funktionen

$$f_n(\omega) := \begin{cases} k2^{-n} & \text{für } k2^{-n} \le f(\omega) < (k+1)2^{-n},\ k = 0, 1, \ldots, n2^n - 1, \\ n & \text{für } f(\omega) \ge n, \end{cases}$$

die gewünschten Eigenschaften besitzen. □

Behauptung 5.2. $(f_n) \subset \mathcal{E}_+,\ f_n \uparrow f \ \Rightarrow \displaystyle\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu.$

Beweis. Aus der Monotonie des Integrals elementarer Funktionen folgt, daß $\int f_n \, d\mu$ nichtfallend ist und insbesondere $\lim \int f_n \, d\mu \le \infty$ existiert. Aus der obigen Definition von $\int f \, d\mu$ folgt $\int f_n \, d\mu \le \int f \, d\mu$ für alle n. Deshalb bleibt nur folgendes zu zeigen:

(a) Für jedes $g \in \mathcal{E}_+$ mit $g \le f$ gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \ge \int g \, d\mu.$

Hierzu sei $0 < \varepsilon < 1$ beliebig gewählt und

(b) $\displaystyle g = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \, \mathbb{1}_{C_k}$

eine disjunkte Darstellung der elementaren Funktion g. Wegen $f_n \uparrow f \ge g$ gilt

(c) $A_n := \{f_n \ge (1-\varepsilon)\, g\} \uparrow \Omega \qquad$ für $n \uparrow \infty$.

Da $f_n(\omega) \ge (1-\varepsilon)\, g(\omega)$ für alle $\omega \in A_n$ gilt, erhalten wir unter Benutzung von (b) und der Definition des Integrals elementarer Funktionen die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int f_n \, d\mu \quad &\ge \quad \int f_n \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \ge \int (1-\varepsilon)\, g \, \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \\ &= \quad (1-\varepsilon) \int \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \, \mathbb{1}_{C_k \cap A_n} \, d\mu \\ &= \quad (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \, \mu(C_k \cap A_n). \end{aligned}$$

Wegen (c) liefert der Stetigkeitssatz für Maße

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_k \cap A_n) = \mu(C_k), \qquad k = 1, \ldots, r.$$

Geht man in der obigen Ungleichung zum Limes für $n \to \infty$ über, so erhält man deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \ge (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \, \mu(C_k) = (1-\varepsilon) \int g \, d\mu.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt hieraus die Aussage (a). □

Die beiden letzten Behauptungen liefern nun die gewünschte äquivalente Definition des Integrals:

$$\boxed{\int f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \qquad \text{für } (f_n) \subset \mathcal{E}_+ \text{ mit } f_n \uparrow f.} \tag{5.2}$$

Eigenschaften des Integrals nichtnegativer meßbarer numerischer Funktionen:

Für nichtnegative meßbare numerische Funktionen f, g auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt:

(i) $\alpha \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu;$

(ii) $\displaystyle\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu;$

(iii) $f \leq g \Rightarrow \displaystyle\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu.$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich, wenn man f und g in geeigneter Weise monoton durch elementare Funktionen approximiert und dabei benutzt, daß die Eigenschaften (i) – (iii) für nichtnegative elementare Funktionen gelten. □

3. Integral meßbarer numerischer Funktionen

Sei $f\colon (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ meßbar. Wir erinnern daran, daß

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{und} \qquad |f| = f^+ + f^-$$

ist. Deshalb können wir $\int f\,d\mu$ wie folgt definieren:

$$\int f\,d\mu := \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu,$$

falls wenigstens eines der beiden Integrale auf der rechten Seite endlich ist.

Die Funktion f heißt *μ-integrierbar* (oder einfach *integrierbar*), falls beide Integrale endlich sind, d.h. falls

$$\int |f|\,d\mu < \infty.$$

Bezeichnungen: Anstelle von $\int f\,d\mu$ benutzt man oftmals auch die Schreibweisen

$$\int f(\omega)\,\mu(d\omega), \quad \int f(\omega)\,d\mu(\omega), \quad \int_\Omega f\,d\mu.$$

Für eine beliebige Menge $A \in \mathfrak{A}$ definiert man

$$\int_A f\,d\mu := \int (\mathbb{1}_A f)\,d\mu.$$

Ist λ das d-dimensionale Lebesgue-Maß, so schreibt man oft $\int f(x)\,dx$ anstelle von $\int f\,d\lambda$.

Eigenschaften integrierbarer numerischer Funktionen:

Für integrierbare numerische Funktionen f, g auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt

(i) $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f$ integrierbar, $\displaystyle\int (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu$;

(ii) $f+g$ wohldefiniert $\Rightarrow$ $f+g$ integrierbar, $\displaystyle\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$;

(iii) $f \leq g \Rightarrow \displaystyle\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$;

(iv) $\displaystyle\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis. Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung (iv). Da f integrierbar ist, sind die Integrale $\int f^+\,d\mu$ und $\int f^-\,d\mu$ beide endlich. Deshalb erhalten wir unter Verwendung der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen und der Additivität des Integrals

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu\right| &= \left|\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right| \\ &\leq \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int |f|\,d\mu.\end{aligned}$$

□

5.2. Integration bezüglich eines Bildmaßes

Wir betrachten die folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccc} (F,\mathfrak{F}) & \xrightarrow{f} & (G,\mathfrak{G}) & \xrightarrow{g} & (\overline{\mathbb{R}},\overline{\mathfrak{B}}) \\ \mu & \longrightarrow & \nu = \mu \circ f^{-1}. & & \end{array}$$

Theorem 5.3. *(Transformationssatz für Integrale)*
Gegeben seien Maßräume $(F,\mathfrak{F},\mu)$, $(G,\mathfrak{G},\nu)$ und meßbare Abbildungen $f\colon (F,\mathfrak{F}) \to (G,\mathfrak{G})$, $g\colon (G,\mathfrak{G}) \to (\overline{\mathbb{R}},\overline{\mathfrak{B}})$. Ist ν das Bild des Maßes μ bezüglich f und ist $g \geq 0$, so gilt

$$\int g\,d\nu = \int g \circ f\,d\mu.$$

Beweis.
1^0 Sei zunächst g eine nichtnegative elementare Funktion mit der disjunkten Darstellung

$$g = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k\, \mathbb{1}_{C_k}.$$

Dann ist $g \circ f$ ebenfalls elementar und besitzt die disjunkte Darstellung

$$g \circ f = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k\, \mathbb{1}_{f^{-1}(C_k)}.$$

Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned} \int g \circ f\,d\mu &= \sum_{k=1}^{r} \gamma_k\, \mu(f^{-1}(C_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \gamma_k\, \nu(C_k) = \int g\,d\nu. \end{aligned}$$

2^0 Der allgemeine Fall folgt durch monotone Approximation. Wir finden eine Folge (g_n) nichtnegativer elementarer Funktionen mit $g_n \uparrow g$. Dann sind die Funktionen $g_n \circ f$ ebenfalls elementar, und $g_n \circ f \uparrow g \circ f$. Aufgrund des Beweisschrittes 1^0 haben wir

$$\int g_n \circ f\,d\mu = \int g_n\,d\nu$$

für alle n. Hieraus folgt durch Grenzübergang für $n \to \infty$ die Behauptung

$$\int g \circ f\,d\mu = \int g\,d\nu.$$

□

Folgerung 5.4. *Die Voraussetzungen des Theorems 5.3 seien erfüllt, wobei jedoch g eine beliebige meßbare numerische Funktion auf $(G, \mathfrak{G})$ sei. Dann gilt*

$$g \ \nu\text{-integrierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad g \circ f \ \ \mu\text{-integrierbar}.$$

Ist eine der beiden Bedingungen erfüllt, so folgt

$$\int g \, d\nu = \int g \circ f \, d\mu.$$

Beweis. Die Behauptung läßt sich unter Benutzung der Zerlegung $g = g^+ - g^-$ leicht auf das Theorem 5.3 zurückführen. $\square$

Beispiel 5.5. Wir betrachten die folgende Situation:

$$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \quad \underset{\text{Zufallsgröße}}{\overset{\xi}{\longrightarrow}} \quad (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \quad \underset{\text{Borel-meßbar}}{\overset{f}{\longrightarrow}} \quad (\mathbb{R}, \mathfrak{B}).$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie heißt das Bildmaß

$$\mu_\xi := \mathbb{P} \circ \xi^{-1}$$

Verteilungsgesetz der Zufallsgröße ξ. Da μ_ξ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist, wird dieses Maß vollständig durch die zugehörige Verteilungsfunktion

$$F_\xi(x) = \mu_\xi((-\infty, x]) = \mathbb{P}(\xi \leq x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

beschrieben. Als *Erwartungswert* $\mathbb{E}\, f(\xi)$ von $f(\xi)$ bezeichnet man das Integral $\int f(\xi)\, d\,\mathbb{P}$, falls dieses existiert. Aufgrund des Transformationssatzes für Integrale fällt dieses Integral mit $\int f(x)\, \mu_\xi(dx)$ zusammen, das man auch in der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, F_\xi(dx)$$

schreibt. Ein solches Integral bezüglich einer Verteilungsfunktion nennt man *Lebesgue-Stieltjes-Integral.* Darunter versteht man also ein Integral bezüglich des von der Verteilungsfunktion erzeugten Maßes. Wir haben folgendes erhalten:

$$\mathbb{E}\, f(\xi) = \int f(\xi)\, d\,\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu_\xi(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, F_\xi(dx).$$

Insbesondere folgt für $f(x) \equiv x$:

$$\mathbb{E}\, \xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \mu_\xi(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, F_\xi(dx).$$

5.3. Fast überall bestehende Eigenschaften

Im folgenden bezeichne $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ einen Maßraum. Eine Menge $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt *μ-Nullmenge.*

Definition 5.6. Man sagt, daß eine Eigenschaft für Punkte aus Ω *μ-fast überall* (μ-f.ü.) gilt, falls eine μ-Nullmenge N existiert derart, daß alle Punkte, die diese Eigenschaft nicht besitzen, in N enthalten sind.

Beispiel 5.7.

1. Sind f und g meßbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so gilt

$$f = g \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(f \neq g) = \mu\left(\{\omega \in \Omega \colon f(\omega) \neq g(\omega)\}\right) = 0.$$

2. Sind $f, f_1, f_2, \ldots$ meßbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so gilt

   a)
$$f_n \uparrow f \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\left(\Omega_0^c\right) = 0$$
   für $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega \colon f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \ldots \text{ und } f(\omega) = \lim f_n(\omega)\}$;

   b)
$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\left(\Omega_0^c\right) = 0$$
   für $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega \colon f(\omega) = \lim f_n(\omega)\}$. Man sagt in diesem Falle, daß die Funktionenfolge (f_n) μ-f.ü. gegen die Funktion f konvergiert.

Behauptung 5.8. *Seien f und g meßbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $f = g$ μ-f.ü. Dann existiert $\int f\,d\mu$ genau dann, wenn $\int g\,d\mu$ existiert, und in diesem Falle ist*

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu. \tag{5.3}$$

Beweis. Aus $f = g$ μ-f.ü. folgt $f^+ = g^+$ μ-f.ü. und $f^- = g^-$ μ-f.ü. Wegen

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu$$

und

$$\int g\,d\mu = \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu$$

kann o.B.d.A. angenommen werden, daß f und g nichtnegativ sind. Also bleibt nur folgendes zu zeigen:

$$f \geq 0,\ g \geq 0,\ f = g\ \mu\text{-f.ü.} \quad \Rightarrow \quad \int f\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Hierzu benutzen wir die grobe Abschätzung $|f - g| \leq h$ mit

$$h(\omega) := \begin{cases} \infty & \text{für } \omega \in N, \\ 0 & \text{für } \omega \notin N, \end{cases}$$

wobei $N := \{f \neq g\}$ eine μ-Nullmenge ist. Wegen $n\,\mathbb{1}_N \uparrow h$ für $n \uparrow \infty$ und $\int n\,\mathbb{1}_N\,d\mu = n\,\mu(N) = 0$ ist $\int h\,d\mu = 0$. Deshalb erhalten wir wegen $f \leq g + h$ unter Benutzung der Monotonie und Additivität des Integrals:

$$\int f\,d\mu \leq \int (g+h)\,d\mu = \int g\,d\mu + \int h\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Analog folgt aus $g \leq f + h$:

$$\int g\,d\mu \leq \int f\,d\mu.$$

Zusammen ergibt dies (5.3). □

Behauptung 5.9. *Sei f eine μ-integrierbare numerische Funktion auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$*. Dann gilt $|f| < \infty$ μ-f.ü., und es existiert eine reellwertige μ-integrierbare Funktion g mit $f = g$ μ-f.ü. Insbesondere gilt*

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

5.4. Konvergenzsätze

Dieser Abschnitt ist fundamental für die Anwendung des Lebesgue-Integrals. Die im folgenden vorgestellten Konvergenzsätze gelten unter wesentlich schwächeren und natürlicheren Voraussetzungen als vergleichbare Sätze für Riemann-Integrale.

Für das Weitere fixieren wir einen beliebigen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Ist (f_n) eine Folge nichtnegativer elementarer Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $f_n \uparrow f$, so ist f meßbar und

$$\int f_n\,d\mu \uparrow \int f\,d\mu.$$

Dies folgt aus (5.2), einer der (äquivalenten) Definitionen des Lebesgue-Integrals. Es zeigt sich, daß diese Aussage nicht nur für elementare, sondern auch für beliebige meßbare Funktionen f_n gilt.

Theorem 5.10. *(Satz über monotone Konvergenz)*
Gegeben seien nichtnegative *meßbare numerische Funktionen* $f, f_1, f_2, \ldots$ *auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$, *und es gelte*

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \quad \mu\text{-}f.ü. \quad \text{und} \quad f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-}f.ü. \tag{5.4}$$

Dann folgt

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Beweis.

1^0 Wir nehmen zunächst an, daß (5.4) nicht μ-f.ü., sondern punktweise gilt. Aus der Monotonie des Integrals folgt dann

$$\int f_1\, d\mu \leq \int f_2\, d\mu \leq \cdots \leq \int f\, d\mu.$$

Insbesondere existiert $\lim \int f_n\, d\mu$, und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu.$$

Also bleibt nur die entgegengesetzte Ungleichung zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq \int f\, d\mu. \tag{5.5}$$

Wir finden für jedes n Funktionen $g_{nk} \in \mathcal{E}_+$ mit $g_{nk} \uparrow f_n$ und $\int g_{nk}\, d\mu \uparrow \int f_n\, d\mu$ für $k \uparrow \infty$. Die Funktionen

$$h_n := g_{1n} \vee g_{2n} \vee \cdots \vee g_{nn}$$

sind ebenfalls elementar, da sie meßbar sind und nur endlich viele Werte annehmen. Aus $g_{in} \leq f_i \leq f_n$ für $i \leq n$ folgt

$$h_n \leq f_n. \tag{5.6}$$

Außerdem gilt

$$h_n \uparrow f. \tag{5.7}$$

Tatsächlich, sei $\omega \in \Omega$ beliebig fixiert. Wegen $h_n(\omega) \geq g_{in}(\omega)$ für alle $n \geq i$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\omega) \geq \lim_{n\to\infty} g_{in}(\omega) = f_i(\omega) \uparrow f(\omega) \qquad \text{für } i \uparrow \infty.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\omega) \geq f(\omega).$$

Zusammen mit (5.6) ergibt dies (5.7). Unter Benutzung von (5.6) und (5.7) und der Tatsache, daß die Funktionen h_n elementar sind, erhalten wir schließlich die Behauptung (5.5):

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

2^0 Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Hierzu bezeichne N die Menge aller Punkte aus Ω, für die mindestens eine der Beziehungen in (5.4) nicht gilt. Die Menge N ist (als abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen) eine μ-Nullmenge. Nun gilt

$$f_n \, \mathbb{1}_{N^c} \uparrow f \, \mathbb{1}_{N^c}.$$

Hieraus folgt aufgrund des Beweisschrittes 1^0

$$\int f_n \, \mathbb{1}_{N^c} \, d\mu \uparrow \int f \, \mathbb{1}_{N^c} \, d\mu. \tag{5.8}$$

Wegen $f_n = f_n \, \mathbb{1}_{N^c}$ μ-f.ü. ist aber

$$\int f_n \, \mathbb{1}_{N^c} \, d\mu = \int f_n \, d\mu$$

und entsprechend

$$\int f \, \mathbb{1}_{N^c} \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Deshalb folgt aus (5.8)

$$\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu,$$

was zu beweisen war. □

Folgerung 5.11. *(Satz von Beppo Levi)*
Für eine beliebige Folge (f_n) nichtnegativer *meßbarer numerischer Funktionen auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *gilt*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Wegen

$$\sum_{n=1}^{N} f_n \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \qquad \text{für } N \uparrow \infty$$

folgt aus der Additivität des Integrals und dem Satz über monotone Konvergenz (Theorem 5.10)

$$\sum_{n=1}^{N} \int f_n \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu \uparrow \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \qquad \text{für } N \uparrow \infty$$

und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

□

Der Satz von B. Levi ermöglicht, ausgehend vom Maß μ, die Konstruktion einer großen Klasse neuer Maße.

Folgerung 5.12. *Sei f eine* nichtnegative *meßbare numerische Funktion auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$. *Dann wird durch*

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A}, \tag{5.9}$$

ein Maß ν auf $\mathfrak{A}$ definiert.

Bemerkung 5.13.

1. ν endlich $\iff$ f μ-integrierbar.
2. Man sagt, ν besitzt die *Radon-Nikodym-Ableitung* (*Dichte*) f bezüglich μ.
3. Ist μ σ-endlich, so ist f durch (5.9) μ-f.ü. eindeutig bestimmt. (D.h. aus

   $$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}$$

   folgt $f = g$ μ-f.ü.)

Beweis der Folgerung. Offenbar ist $\nu(A) \geq 0$ und $\nu(\emptyset) = 0$. Es bleibt nachzuweisen, daß ν σ-additiv ist. Hierzu sei (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $A := \bigcup A_n$. Dann gilt

$$\mathbb{1}_A = \sum_n \mathbb{1}_{A_n},$$

und der Satz von Beppo Levi liefert

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A f \, d\mu = \int \mathbb{1}_A f \, d\mu \\ &= \int \sum_n \mathbb{1}_{A_n} f \, d\mu = \sum_n \int \mathbb{1}_{A_n} f \, d\mu \\ &= \sum_n \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_n \nu(A_n). \end{aligned}$$

□

Die folgende Aussage erweist sich bei der asymptotischen Abschätzung von Integralen als nützlich.

Theorem 5.14. *(Lemma von Fatou)*
Für eine beliebige Folge (f_n) nichtnegativer *meßbarer numerischer Funktionen auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Die Funktionen

$$g_n := \inf_{k\ge n} f_k$$

sind meßbar, und es gilt $g_n \le f_n$ für alle n sowie

$$g_n \uparrow \liminf_{m\to\infty} f_m \qquad \text{für } n \uparrow \infty.$$

Hieraus folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz (Theorem 5.10) und der Monotonie des Integrals

$$\int \liminf_{m\to\infty} f_m \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

□

Bemerkung 5.15. Die analoge Aussage für den lim sup ist im allgemeinen falsch (*Übungsaufgabe*).

Wir wollen nun von der Nichtnegativität der betrachteten Funktionen abgehen. Der folgende Satz kann als Hauptsatz über die Vertauschung von Integration und Limesbildung angesehen werden.

Theorem 5.16. *(Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz)*
Gegeben seien meßbare numerische Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ *auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$. *Es gelte*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \qquad \mu\text{-f.ü.}, \tag{5.10}$$

und es existiere eine nichtnegative μ-integrierbare *Funktion* g *mit*

$$|f_n| \le g \qquad \mu\text{-f.ü. für jedes } n. \tag{5.11}$$

Dann sind $f, f_1, f_2, \ldots$ μ*-integrierbar, und*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu. \tag{5.12}$$

Beweis. Man kann $f, f_1, f_2, \dots$ auf einer Nullmenge so abändern, daß die Beziehungen (5.10) und (5.11) punktweise gelten. Dabei ändern sich die Werte der betrachteten Integrale nicht. Wir wollen deshalb im folgenden o.B.d.A. annehmen, daß (5.10) und (5.11) punktweise erfüllt sind.

Aus (5.11) und der μ-Integrierbarkeit von g folgt die μ-Integrierbarkeit der Funktionen f_n. Kombiniert man (5.10) und (5.11), so erhält man $|f| \leq g$, weshalb auch f μ-integrierbar ist.

Die Voraussetzungen (5.11) und (5.10) implizieren

$$0 \leq g + f_n \longrightarrow g + f \qquad \text{(punktweise)}.$$

Deshalb liefert das Lemma von Fatou (Theorem 5.14) die Ungleichung

$$\int (g+f)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n)\, d\mu.$$

Benutzt man die Additivität der Integrale und die Endlichkeit von $\int g\, d\mu$, so folgt hieraus

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu. \tag{5.13}$$

Ganz analog gilt

$$0 \leq g - f_n \longrightarrow g - f \qquad \text{(punktweise)},$$

woraus

$$\int (-f)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)\, d\mu$$

folgt. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\int f\, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu. \tag{5.14}$$

Durch Kombination von (5.13) und (5.14) gelangt man schließlich zur Behauptung (5.12) . □

Ist das Maß μ endlich, so kann man im Theorem 5.16 $g \equiv$ const wählen. Dies führt auf die nachstehende Folgerung.

Folgerung 5.17. *(Satz über beschränkte Konvergenz)*
Gegeben seien meßbare numerische Funktionen $f, f_1, f_2, \dots$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Das Maß μ sei endlich. *Es gelte*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \qquad \mu\text{-f.ü.},$$

und es existiere eine positive Konstante c mit

$$|f_n| \leq c \qquad \mu\text{-f.ü. für alle } n.$$

Dann sind $f, f_1, f_2, \dots$ μ-integrierbar, und

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

5.5. Lebesgue- und Riemann-Integral

Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Im folgenden wollen wir die Begriffe Lebesgue-Integrierbarkeit und Riemann-Integrierbarkeit und die entsprechenden Integrale miteinander vergleichen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ und setzen

$$\mathfrak{A}_{[a,b]} := \mathfrak{A} \cap [a,b] = \{A \in \mathfrak{A} \colon A \subseteq [a,b]\}.$$

$\mathfrak{A}_{[a,b]}$ ist die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $[a,b]$. Weiterhin sei $\lambda_{[a,b]}$ das Lebesgue Maß auf $[a,b]$, d.h. die Einschränkung des auf $\mathfrak{A}$ definierten Lebesgue-Maßes λ auf die σ-Algebra $\mathfrak{A}_{[a,b]}$.

Definition 5.18. Die Funktion f heißt *Lebesgue-integrierbar* auf $[a,b]$, falls sie $(\mathfrak{A}_{[a,b]}, \mathfrak{B})$-meßbar ist und

$$\int_{[a,b]} |f| \, d\lambda_{[a,b]} < \infty$$

gilt. In diesem Fall heißt $\int_{[a,b]} f \, d\lambda_{[a,b]}$ *Lebesgue-Integral* der Funktion f auf $[a,b]$.

Bemerkung 5.19. Sei

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}_{[a,b]}, \mathfrak{B})\text{-meßbar} \iff \tilde{f} \text{ ist } (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\text{-meßbar},$$

$$\int_{[a,b]} |f| \, d\lambda_{[a,b]} < \infty \iff \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}| \, d\lambda < \infty.$$

Sind beide Bedingungen erfüllt, so folgt

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda_{[a,b]} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} \, d\lambda \quad \left(= \int_{[a,b]} \tilde{f} \, d\lambda \right).$$

Man zeigt diese Behauptung zunächst für elementare Funktionen und benutzt anschließend die übliche Fortsetzungsprozedur. Aufgrund der angegebenen Eigenschaften benutzt man für $\int_{[a,b]} f \, d\lambda_{[a,b]}$ auch die Schreibweisen

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda, \ \int_a^b f(x) \, \lambda(dx), \ \int_a^b f(x) \, dx, \ \ldots$$

Definition 5.20. Die Funktion f heißt *Riemann-integrierbar* auf $[a, b]$, falls für jede Zerlegungsfolge

$$\mathfrak{Z}_n \colon a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{r_n}^{(n)} = b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mit

$$|\mathfrak{Z}_n| := \max_{1 \le k \le r_n} \left[t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right] \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

und jede Folge von Zwischenpunkten

$$\xi_k^{(n)} \in \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)} \right] \qquad (n \in \mathbb{N};\ k = 1, \ldots, r_n)$$

der endliche Grenzwert

$$I := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{r_n} f\left(\xi_k^{(n)}\right) \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right)$$

existiert und von der speziellen Wahl der Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_n)$ und der Zwischenpunkte $\xi_k^{(n)}$ unabhängig ist.

Ist f Riemann-integrierbar, so heißt der Grenzwert I *Riemann-Integral* der Funktion f auf $[a, b]$.

Bemerkung 5.21. Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist Riemann-integrierbar.

Der folgende ohne Beweis angeführte Satz zeigt, daß das Lebesgue-Integral eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals ist.

Theorem 5.22. *Ist die Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist sie beschränkt und $(\mathfrak{A}_{[a,b]}, \mathfrak{B})$-meßbar und damit auch Lebesgue-integrierbar. Das Riemann-Integral und das Lebesgue-Integral der Funktion f stimmen überein.*

Bemerkung 5.23. Jede Borelsche Teilmenge von $[a, b]$ ist Lebesgue-meßbar, d.h. $\mathfrak{B}_{[a,b]} \subseteq \mathfrak{A}_{[a,b]}$. Es existieren jedoch Lebesgue-meßbare Mengen, die nicht Borelsch sind, d.h. $\mathfrak{B}_{[a,b]} \neq \mathfrak{A}_{[a,b]}$. Außerdem kann man Riemann-integrierbare Funktionen $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ angeben, die *nicht* $(\mathfrak{B}_{[a,b]}, \mathfrak{B})$-meßbar sind.

Kapitel 6

Räume integrierbarer Funktionen. Konvergenzarten

6.1. Fundamentale Ungleichungen

In diesem Abschnitt fixieren wir einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und meßbare numerische Funktionen $f, g\colon (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$.

Wir benötigen die folgende Hilfsaussage.

Behauptung 6.1. $\displaystyle\int |f|\, d\mu = 0 \Leftrightarrow |f| = 0 \;\; \mu\text{-}f.ü. \; \Big(\Leftrightarrow \; f = 0 \;\; \mu\text{-}f.ü. \Big)$

Beweis. Wir wissen bereits aus Abschnitt 5.3, daß $|f| = 0$ μ-f.ü. $\int |f|\, d\mu = 0$ impliziert. Zum Beweis der Umkehrung sei $\int |f|\, d\mu = 0$. Aufgrund der Ungleichung

$$\frac{1}{n}\, \mathbb{1}_{\{|f|>1/n\}} \leq |f|$$

folgt hieraus

$$\frac{1}{n}\, \mu\,(|f| > 1/n) = \int \frac{1}{n}\, \mathbb{1}_{\{|f|>1/n\}}\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu = 0.$$

Also ist

$$\mu\,(|f| > 1/n) = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\{|f| > 1/n\} \uparrow \{|f| > 0\}$$

erhalten wir deshalb

$$\mu(|f| > 0) = 0,$$

d.h. $|f| = 0$ μ-f.ü. $\square$

Höldersche Ungleichung. *Für reelle Zahlen $p > 1$ und $q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt*

$$\int |f\,g|\,d\mu \le \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Beweis.

1^0 Da f und g meßbar sind, ist auch $f\,g$ meßbar. Da außerdem die Abbildung $x \to |x|$ meßbar ist, ist auch $|f\,g|$ als Komposition zweier meßbarer Abbildungen meßbar. Ebenso sind $|f|^p$ und $|g|^q$ meßbar. Insbesondere existieren alle betrachteten Integrale.

2^0 Der Beweis beruht wesentlich auf der Konkavität des Logarithmus: Für beliebige $\alpha > 0$, $\beta > 0$ gilt

$$\frac{1}{p}\log\alpha + \frac{1}{q}\log\beta \le \log\left(\frac{1}{p}\,\alpha + \frac{1}{q}\,\beta\right).$$

Wendet man auf beide Seiten dieser Ungleichung die Exponentialfunktion an und benutzt man deren Monotonie, so folgt

$$\alpha^{1/p}\,\beta^{1/q} \le \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} \qquad (\alpha, \beta \ge 0). \tag{6.1}$$

3^0 Wir setzen

$$\sigma := \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}, \quad \tau := \left(\int |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}$$

und beweisen die Höldersche Ungleichung zunächst für die „trivialen“ Fälle, wenn σ bzw. τ entweder den Wert 0 oder $+\infty$ annimmt. Ist $\sigma = 0$, so folgt $|f|^p = 0$ μ-f.ü., d.h. $|f| = 0$ μ-f.ü. Dann ist auch $|f\,g| = |f|\,|g| = 0$ μ-f.ü., so daß das Integral auf der linken Seite der Ungleichung verschwindet und diese offensichtlich erfüllt ist. Entsprechend verfährt man im Falle $\tau = 0$. Ist $\sigma = \infty$ und $\tau > 0$ oder $\sigma > 0$ und $\tau = \infty$, so ist der Ausdruck auf der rechten Seite der Hölderschen Ungleichung gleich $+\infty$, so daß die Ungleichung auch in diesem Falle gilt.

4^0 Es bleibt der „eigentliche“ Fall $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$ zu betrachten. Wir wenden die Ungleichung (6.1) für

$$\alpha = \left(\frac{|f(\omega)|}{\sigma}\right)^p \quad \text{und} \quad \beta = \left(\frac{|g(\omega)|}{\tau}\right)^q$$

an und erhalten

$$\frac{|f\,g|}{\sigma\tau} \le \frac{|f|^p}{p\,\sigma^p} + \frac{|g|^q}{q\,\tau^q}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma\tau}\int |f\,g|\,d\mu &\leq \frac{1}{p}\,\frac{\int |f|^p\,d\mu}{\sigma^p}+\frac{1}{q}\,\frac{\int |g|^q\,d\mu}{\tau^q}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\end{aligned}$$

d.h.

$$\int |f\,g|\,d\mu \leq \sigma\,\tau = \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

□

Spezialfälle:

1. $p = q = 2$:
$$\left(\int |f\,g|\,d\mu\right)^2 \leq \int |f|^2\,d\mu \int |g|^2\,d\mu$$
(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

2. $g \equiv 1$, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (d.h. $\mu(\Omega) = 1$):
$$\left(\int |f|\,d\mu\right)^p \leq \int |f|^p\,d\mu.$$

Minkowskische Ungleichung. *Sei $p \geq 1$ und sei $f + g$ auf ganz Ω definiert (d.h. „$\infty - \infty$“ tritt nicht auf). Dann gilt*

$$\left(\int |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Beweis. Wegen $|f + g| \leq |f| + |g|$ ist

$$\int |f+g|^p\,d\mu \leq \int (|f|+|g|)^p\,d\mu.$$

Deshalb genügt es, die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\left(\int (|f|+|g|)^p\,d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}. \tag{6.2}$$

Für $p = 1$ gilt in (6.2) das Gleichheitszeichen. Wir setzen deshalb o.B.d.A. voraus, daß $p > 1$ ist und die Integrale auf der rechten Seiten von (6.2) endlich sind. Dann ist auch

$$\int (|f|+|g|)^p\,d\mu < \infty.$$

Tatsächlich, aus

$$|f| + |g| \leq 2(|f| \vee |g|)$$

folgt

$$(|f| + |g|)^p \leq 2^p(|f|^p \vee |g|^p) \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

und hieraus

$$\int (|f| + |g|)^p \, d\mu \leq 2^p \left[\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right] < \infty.$$

Wir definieren $q > 1$ so, daß $1/p + 1/q = 1$ ist. Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int (|f| + |g|)^p \, d\mu \\
&= \int |f|(|f| + |g|)^{p-1} \, d\mu + \int |g|(|f| + |g|)^{p-1} \, d\mu \\
&\leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int (|f| + |g|)^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int (|f| + |g|)^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} \\
&= \left[\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right] \left(\int (|f| + |g|)^p \, d\mu \right)^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß $(p-1)q = p$ und $1/q = 1 - 1/p$ ist. Aus der letzten Ungleichung folgt die Behauptung. □

Verallgemeinerung auf endlich viele Summanden. *Gegeben seien eine reelle Zahl $p \geq 1$ und meßbare numerische Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Außerdem sei $\sum_{k=1}^n f_k$ auf ganz Ω definiert. Dann gilt*

$$\left(\int \Big| \sum_{k=1}^n f_k \Big|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^n \left(\int |f_k|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Beweis. Vollständige Induktion nach n. □

Verallgemeinerung auf unendlich viele Summanden. *Gegeben seien eine reelle Zahl $p \geq 1$ und eine Folge (f_n) meßbarer numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k$ sei auf ganz Ω definiert. (D.h. $\sum_{k=1}^n f_k(\omega)$ ist für jedes n definiert, und es existiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f_k(\omega) \in \overline{\mathbb{R}}$ für jedes $\omega \in \Omega$). Dann gilt*

$$\left(\int \Big| \sum_{k=1}^\infty f_k \Big|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^\infty \left(\int |f_k|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Beweis. Die Dreiecksungleichung liefert

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k|$$

für jedes n, und damit

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|.$$

Folglich genügt es, die Ungleichung

$$\left(\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\right)^p d\mu\right)^{1/p} \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int |f_k|^p \, d\mu\right)^{1/p} \tag{6.3}$$

zu beweisen. Wir wissen aber bereits, daß die analoge Ungleichung für endlich viele Summanden gilt:

$$\left(\int \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right)^p d\mu\right)^{1/p} \le \sum_{k=1}^{n} \left(\int |f_k|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Die Behauptung (6.3) folgt hieraus durch Grenzübergang für $n \to \infty$ unter Verwendung des Satzes über monotone Konvergenz. □

Zum Schluß führen wir eine etwas andersgeartete Ungleichung an, die zwar sehr grob, aber trotzdem ungemein nützlich ist.

Chebyshevsche Ungleichung. *Für beliebiges $\alpha > 0$ gilt*

$$\mu(|f| \ge \alpha) \le \frac{1}{\alpha} \int |f| \, d\mu.$$

Beweis. Wegen

$$\mathbb{1}_{\{|f| \ge \alpha\}} \le \frac{1}{\alpha} |f|$$

gilt

$$\mu(|f| \ge \alpha) = \int \mathbb{1}_{\{|f| \ge \alpha\}} \, d\mu \le \frac{1}{\alpha} \int |f| \, d\mu.$$

□

6.2. Räume integrierbarer Funktionen

Wir fixieren einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und eine reelle Zahl $p \geq 1$.

Definition 6.2. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *p-fach μ-integrierbar*, falls f $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-meßbar und $|f|^p$ μ-integrierbar ist (d.h. $\int |f|^p \, d\mu < \infty$).

Ist f meßbar, so gilt

$$\begin{aligned} f \ p\text{-fach } \mu\text{-integrierbar} \quad &\Leftrightarrow \quad |f| \ p\text{-fach } \mu\text{-integrierbar} \\ &\Leftrightarrow \quad f^+ \text{ und } f^- \ p\text{-fach } \mu\text{-integrierbar.} \end{aligned}$$

Ist f einfach (zweifach) μ-integrierbar, so sagt man, f sei *integrierbar (quadratisch integrierbar).*

Beispiel 6.3.

1. Seien $\Omega := [0,1]$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_{[0,1]}$ die Borelalgebra auf $[0,1]$ und $\mu := \lambda$ das Lebesguesche Maß auf $\mathfrak{B}_{[0,1]}$.

   a) Für beliebiges $r > 0$ betrachten wir die meßbare Funktion

$$\begin{aligned} f(x) \quad &:= \quad \begin{cases} 2^{nr} & \text{für } 2^{-n} < x \leq 2^{-(n-1)} \quad (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \\ &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{nr} \, \mathbb{1}_{\left(2^{-n}, 2^{-(n-1)}\right]}(x). \end{aligned}$$

   Wir erhalten

$$|f|^p = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{nrp} \, \mathbb{1}_{\left(2^{-n}, 2^{-(n-1)}\right]}$$

   und mit dem Satz von B. Levi

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int 2^{nrp} \, \mathbb{1}_{\left(2^{-n}, 2^{-(n-1)}\right]} \, d\lambda \\ &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(rp-1)} \begin{cases} < \infty & \text{für } rp - 1 < 0, \\ = \infty & \text{für } rp - 1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Also ist f genau dann p-fach integrierbar, wenn $p < 1/r$ ist.

   b) Wir betrachten ein zu a) stetiges Analogon:

$$f(x) := \begin{cases} x^{-r} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Diese Funktion ist als monotoner Limes stetiger Funktionen meßbar. Da sie unbeschränkt ist, ist sie nicht Riemann-integrierbar. Jedoch ist die Einschränkung von f auf $[n^{-1}, 1]$ Riemann-integrierbar für jedes n. Deshalb erhalten wir

$$\int_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda = \int_{(0,1]} |f|^p \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[n^{-1},1]} |f|^p \, d\lambda,$$

und die Berechnung des Riemann-Integrals ergibt

$$\int_{[n^{-1},1]} |f|^p \, d\lambda = \int_{n^{-1}}^{1} x^{-rp} \, dx = \begin{cases} \dfrac{1-(1/n)^{1-rp}}{1-rp} & \text{für } rp \neq 1, \\ \log n & \text{für } rp = 1. \end{cases}$$

Also ist

$$\int_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda \begin{cases} < \infty & \text{für } 1-rp > 0, \\ = \infty & \text{für } 1-rp \leq 0, \end{cases}$$

d.h. f ist genau dann p-fach integrierbar, wenn $p < 1/r$ ist.

2. Die Funktionen im Beispiel 1 erwiesen sich nur für kleine p als p-fach integrierbar. Im folgenden betrachten wir eine Funktion, die nur für große p p-fach integrierbar ist. Hierzu seien $\Omega := [1,\infty)$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_{[1,\infty)}$, $\mu := \lambda$ das Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{B}_{[1,\infty)}$ und

$$f(x) := x^{-r} \qquad (x \geq 1).$$

In diesem Falle erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{[1,\infty)} |f|^p \, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} |f|^p \, d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-rp} \, dx \begin{cases} < \infty & \text{für } rp > 1, \\ = \infty & \text{für } rp \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

D.h., f ist genau dann p-fach μ-integrierbar, wenn $p > 1/r$ ist.

Mit $\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ bezeichnen wir den Raum aller p-fach μ-integrierbaren reellwertigen Funktionen auf Ω $(p \geq 1)$.

Behauptung 6.4. *$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, d.h.*

(i) $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{L}^p(\mu) \ \Rightarrow\ \alpha f \in \mathcal{L}^p(\mu)$;

(ii) $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) \ \Rightarrow\ f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Beweis.

(i) Nach Definition gehört f genau dann zu $\mathcal{L}^p(\mu)$, wenn f meßbar ist und $\int |f|^p \, d\mu < \infty$ gilt. Dann ist auch αf meßbar und

$$\int |\alpha f|^p \, d\mu = |\alpha|^p \int |f|^p \, d\mu < \infty,$$

d.h. $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

(ii) Aus $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ folgt die Meßbarkeit von $f+g$, und die Minkowskische Ungleichung liefert

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

Also gehört auch $f+g$ zu $\mathcal{L}^p(\mu)$. □

Behauptung 6.5. *Durch*

$$\| f \|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \qquad f \in \mathcal{L}^p(\mu),$$

ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ *gegeben:*

(i)	$0 \leq \| f \|_p < \infty$	$(f \in \mathcal{L}^p(\mu))$;
(ii)	$\| \alpha f \|_p = \lvert\alpha\rvert \, \| f \|_p$	$(\alpha \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{L}^p(\mu))$;
(iii)	$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$	$(f, g \in \mathcal{L}^p(\mu))$.

Beweis.

(i) ist klar.

(ii) folgt aus der Homogenität des Integrals.

(iii) ist die Minkowskische Ungleichung. □

$\| \cdot \|_p$ ist im allgemeinen keine Norm: $\| f \|_p = 0$ ist gleichbedeutend mit $f = 0$ μ-f.ü., woraus nicht unbedingt $f \equiv 0$ folgen muß.

Definition 6.6. Gegeben seien Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ aus $\mathcal{L}^p(\mu)$. Man sagt, die Folge (f_n) *konvergiert im p-ten Mittel (im Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$) gegen* f, falls

$$\| f_n - f \|_p \to 0,$$

d.h. falls

$$\int |f_n - f|^p \, d\mu \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Schreibweisen: $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ (im p-ten Mittel).

Bemerkung 6.7. Der Limes im p-ten Mittel ist nur μ-f.ü. eindeutig bestimmt. Aus $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f$ und $f = g$ μ-f.ü. folgt $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} g$. Gilt andererseits $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f$ und $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} g$, so folgt $f = g$ μ-f.ü. Tatsächlich, da die beiden Summanden auf der rechten Seite der Dreiecksungleichung

$$\| f - g \|_p \leq \| f - f_n \|_p + \| f_n - g \|_p$$

gegen Null konvergieren, ist $\| f - g \|_p = 0$, d.h. $f - g = 0$ μ-f.ü.

Definition 6.8. (f_n) heißt *Cauchyfolge im $\mathcal{L}^p(\mu)$*, falls $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ für jedes n und $\| f_m - f_n \|_p \to 0$ für $m, n \to \infty$. (D.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 derart, daß $\| f_m - f_n \|_p < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$ ist.)

Theorem 6.9. *Sei $p \geq 1$. Jede Cauchyfolge (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu)$ konvergiert im p-ten Mittel gegen eine Funktion aus $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

Beweis. Es existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) mit

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p \leq 2^{-k} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Wir setzen

$$g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$$

und

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$

Die Minkowskische Ungleichung für unendlich viele Summanden liefert

$$\| g \|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Insbesondere ist g p-fach μ-integrierbar und $0 \leq g < \infty$ μ-f.ü. Deshalb konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ μ-f.ü. absolut. Also existiert eine meßbare reellwertige Funktion f mit

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \qquad \mu\text{-f.ü.}$$

Die Funktion f ist der erwartete Limes der Cauchyfolge (f_n). Zunächst erhalten wir

$$|f| \leq |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| = |f_{n_1}| + |g| \qquad \mu\text{-f.ü.},$$

weshalb f zu $\mathcal{L}^p(\mu)$ gehört. Es gilt

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{l=1}^{k-1} g_l \to f \qquad \mu\text{-f.ü. für } k \to \infty$$

und

$$|f_{n_k} - f|^p \leq (|f_{n_k}| + |f|)^p \leq (|f_{n_1}| + g + |f|)^p \qquad \mu\text{-f.ü.}$$

Also konvergiert die Folge $|f_{n_k} - f|^p$ μ-f.ü. gegen Null und wird durch die integrierbare Funktion $(|f_{n_1}| + g + |f|)^p$ majorisiert. Deshalb liefert der Satz von Lebesgue

$$\int |f_{n_k} - f|^p \, d\mu \to 0,$$

d.h. $\| f_{n_k} - f \|_p \to 0$ für $k \to \infty$. Nun ist aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\| f_n - f \|_p \leq \| f_n - f_{n_k} \|_p + \| f_{n_k} - f \|_p \,.$$

Wir haben gerade gezeigt, daß der zweite Summand auf der rechten Seite für $k \to \infty$ beliebig klein wird. Da (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist, wird auch der erste Summand auf der rechten Seite beliebig klein, falls nur n und k genügend groß gewählt werden. Daraus folgt insgesamt $\| f_n - f \|_p \to 0$ für $n \to \infty$. □

Mit $L^p(\mu)$ bezeichnen wird den Raum aller Äquivalenzklassen $[f]$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, bezüglich der Äquivalenzrelation

$$f \sim g \qquad :\Leftrightarrow \qquad f = g \ \ \mu\text{-f.ü.}$$

Theorem 6.10. *Für jedes $p \geq 1$ ist $L^p(\mu)$ ein Banachraum bezüglich der Norm*

$$\| [f] \|_p := \| f \|_p, \qquad f \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Beweis. Wir skizzieren nur kurz die wesentlichen Beweisschritte.

(i) $L^p(\mu)$ ist ein Vektorraum bezüglich der Operationen

$$\alpha[f] := [\alpha f] \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{L}^p(\mu))$$

und

$$[f] + [g] := [f + g] \qquad (f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)).$$

(ii) $\| [f] \|_p$ ist eine Norm (nicht nur eine Halbnorm):

$$\begin{aligned} \| [f] \|_p = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \| f \|_p = 0 \ \Leftrightarrow \ f = 0 \ \ \mu\text{-f.ü.} \\ &\Leftrightarrow \quad [f] = [0]. \end{aligned}$$

(iii) Der Raum $L^p(\mu)$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge $([f_n])$ in $L^p(\mu)$ konvergiert:

$\| [f_m] - [f_n] \|_p \to 0$ für $m, n \to \infty$ ist gleichbedeutend mit $\| f_m - f_n \|_p \to 0$ für $m, n \to \infty$. Also ist (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Aufgrund des Theorems 6.9 existiert deshalb eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\| f_n - f \|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $\| [f_n] - [f] \|_p \to 0$, d.h. $[f_n] \to [f]$ in $L^p(\mu)$ für $n \to \infty$.

□

6.3. Verschiedene Konvergenzarten für Folgen meßbarer Funktionen

Wir fixieren einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und betrachten meßbare Funktionen f, f_1, $f_2, \ldots : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Definition 6.11. Man sagt, daß die Funktionenfolge (f_n) *dem Maße nach* gegen die Funktion f *konvergiert*, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Schreibweisen: $f_n \xrightarrow{\mu} f, \; f = \mu - \lim_{n\to\infty} f_n$.

Bemerkung 6.12. Der Limes f ist nur μ-f.ü. eindeutig bestimmt.

Behauptung 6.13. *μ endlich, $f_n \to f$ μ-f.ü. $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$N := \{\omega \in \Omega \colon f_n(\omega) \not\to f(\omega)\}$$

eine Nullmenge. Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und setzen

$$A_n := \{|f_n - f| > \varepsilon\}.$$

Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_m \bigcup_{n \geq m} A_n \subseteq N.$$

Wegen der Endlichkeit des Maßes μ folgt hieraus (*Übungsaufgabe*)

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mu(N) = 0.$$

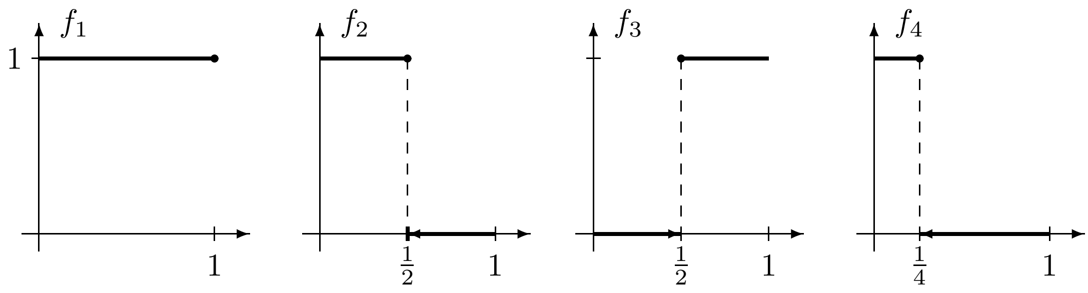
Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0,$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung 6.14. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Um dies zu sehen, setzen wir $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := ([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda)$ und definieren einen Funktionenfolge (f_n) auf $[0,1]$ durch

$$f_{2^n+k} := \mathbb{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \; 0 \leq k < 2^n).$$



Da für beliebiges ε mit $0 < \varepsilon < 1$

$$\lambda\left(|f_{2^n+k}| > \varepsilon\right) = \lambda\left([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]\right) = 2^{-n} \to 0$$

für $n \to \infty$, erhalten wir einerseits

$$f_n \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Andererseits existiert aber für jedes $x \in [0,1]$ eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $f_{n_k}(x) = 1$ für alle k, d.h. es gilt nicht $f_n \to 0$ λ-f.ü.

Trotz dieser Bemerkung läßt sich die Behauptung 6.13 „teilweise" umkehren.

Theorem 6.15. *(Riesz)*
Es gelte $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Dann existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $f_{n_k} \to f$ μ-f.ü.

Beweis. Wir wählen die Teilfolge (f_{n_k}) so, daß für die Mengen

$$A_k := \{|f_{n_k} - f| > 1/k\}$$

die Ungleichung

$$\mu(A_k) < 2^{-k} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

erfüllt ist. Wir führen die Menge

$$N := \{f_{n_k} \not\to f\}$$

ein. Es ist $\mu(N) = 0$ zu zeigen. Hierzu benutzen wir die für alle j gültige Inklusion

$$N \subseteq \bigcup_{k \geq j} A_k.$$

Dann folgt

$$\mu(N) \leq \sum_{k \geq j} \mu(A_k) \leq \sum_{k \geq j} 2^{-k} \to 0 \qquad \text{für } j \to \infty$$

und damit $\mu(N) = 0$. □

Aus der Konvergenz fast überall folgt im allgemeinen nicht die punktweise und erst recht nicht die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge. Der folgende Satz von Egorov zeigt, daß dies aber zumindest auf einer „dem Maße nach beliebig großen Teilmenge" der Fall ist.

Theorem 6.16. *(Egorov)*
Das Maß μ sei endlich und (f_n) konvergiere μ-f.ü. gegen f. Dann findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $\Omega_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf Ω_ε, d.h.

$$\sup_{\omega\in\Omega_\varepsilon} |f_n(\omega) - f(\omega)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Beweis. Wir fixieren $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $f_n \to f$ μ-f.ü. folgt

$$g_m := \sup_{n\geq m} |f_n - f| \to 0 \qquad \mu\text{-f.ü. für } m \to \infty$$

und hieraus (unter Berücksichtigung der Endlichkeit des Maßes μ) $g_m \xrightarrow{\mu} 0$. Deshalb finden wir eine Teilfolge (g_{m_k}) mit

$$\mu\left(g_{m_k} > 1/k\right) < \varepsilon 2^{-k} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Wir setzen abkürzend

$$B_k := \{g_{m_k} > 1/k\}$$

und erhalten

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) < \varepsilon.$$

Für die Menge

$$\Omega_\varepsilon := \left(\bigcup_k B_k\right)^{\mathrm{c}} = \bigcap_k B_k^{\mathrm{c}}$$

gilt deshalb

$$\mu(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$$

und

$$\sup_{n\geq m_k} |f_n - f| = g_{m_k} \leq 1/k \qquad \text{für alle } k \text{ auf } \Omega_\varepsilon.$$

Mit anderen Worten, zu jedem k existiert ein m_k mit

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| < 1/k \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega_\varepsilon \text{ und alle } n \geq m_k,$$

d.h. $f_n \to f$ gleichmäßig auf Ω_ε. $\square$

Behauptung 6.17. *Sei $p \geq 1$. Dann gilt die Implikation*

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f \;\Rightarrow\; f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Beweis. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ erhält man unter Verwendung der Chebyshevschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) &= \mu(|f_n - f|^p > \varepsilon^p) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

□

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht (*Übungsaufgabe*).

Definition 6.18. Die Funktionenfolge (f_n) heißt *p-fach gleichgradig μ-integrierbar*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine p-fach μ-integrierbare Funktion $g_\varepsilon \geq 0$ existiert mit

$$\int_{\{|f_n| > g_\varepsilon\}} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon \qquad \text{für alle } n.$$

Ist (f_n) p-fach gleichgradig μ-integrierbar, so gehören die Funktionen f_n alle zu $\mathcal{L}^p(\mu)$ und $\sup_n \| f_n \|_p < \infty$. In der Tat, für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned} \int |f_n|^p \, d\mu &= \int_{\{|f_n| \leq g_\varepsilon\}} |f_n|^p \, d\mu + \int_{\{|f_n| > g_\varepsilon\}} |f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \int g_\varepsilon^p \, d\mu + \varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

Beispiel 6.19. (Hinreichende Bedingungen für die gleichgradige Integrierbarkeit)

1. $|f_n| \leq g$ μ-f.ü. für alle n, $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $\Rightarrow$ (f_n) p-fach gleichgradig μ-integrierbar. (Man wähle $g_\varepsilon \equiv g$).
2. Das Maß μ sei endlich, $1 \leq p < p' < \infty$, und es existiere eine Konstante c mit
$$\int |f_n|^{p'} \, d\mu \leq c < \infty \qquad \text{für alle } n.$$
Dann ist (f_n) p-fach gleichgradig μ-integrierbar: Für beliebiges $\alpha > 0$ gilt
$$1\!\!1_{\{|f_n| > \alpha\}} \leq \frac{1}{\alpha^{p'-p}} \, |f_n|^{p'-p}.$$
Deshalb ist
$$\begin{aligned} \int_{\{|f_n| > \alpha\}} |f_n|^p \, d\mu &= \int 1\!\!1_{\{|f_n| > \alpha\}} |f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \frac{1}{\alpha^{p'-p}} \int |f_n|^{p'} \, d\mu \leq \frac{c}{\alpha^{p'-p}}. \end{aligned}$$
Die Behauptung folgt nun aus der p-fachen μ-Integrierbarkeit konstanter Funktionen ($g_\varepsilon \equiv \alpha$) und der Tatsache, daß der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Abschätzung für $\alpha \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Theorem 6.20. *Sei $p \geq 1$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f$*;*

(ii) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *und* (f_n) *p-fach gleichgradig* μ*-integrierbar.*

Beweis. Vergleiche Heinz Bauer [4], Kap. II, § 21. □

Bemerkung 6.21. Ist das Maß μ endlich, so kann das Theorem 6.20 als eine Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz angesehen werden. Um dies zu sehen, setzen wir $f_n \to f$ μ-f.ü. und $|f_n| \leq g$ μ-f.ü. für alle n und eine μ-integrierbare Funktion g voraus. Aus der Endlichkeit von μ und $f_n \to f$ μ-f.ü. folgt $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Wegen $|f_n| \leq g$ ist die Folge (f_n) gleichgradig μ-integrierbar. Also ist Theorem 6.20 anwendbar, und wir erhalten

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1(\mu)} f,$$

d.h.

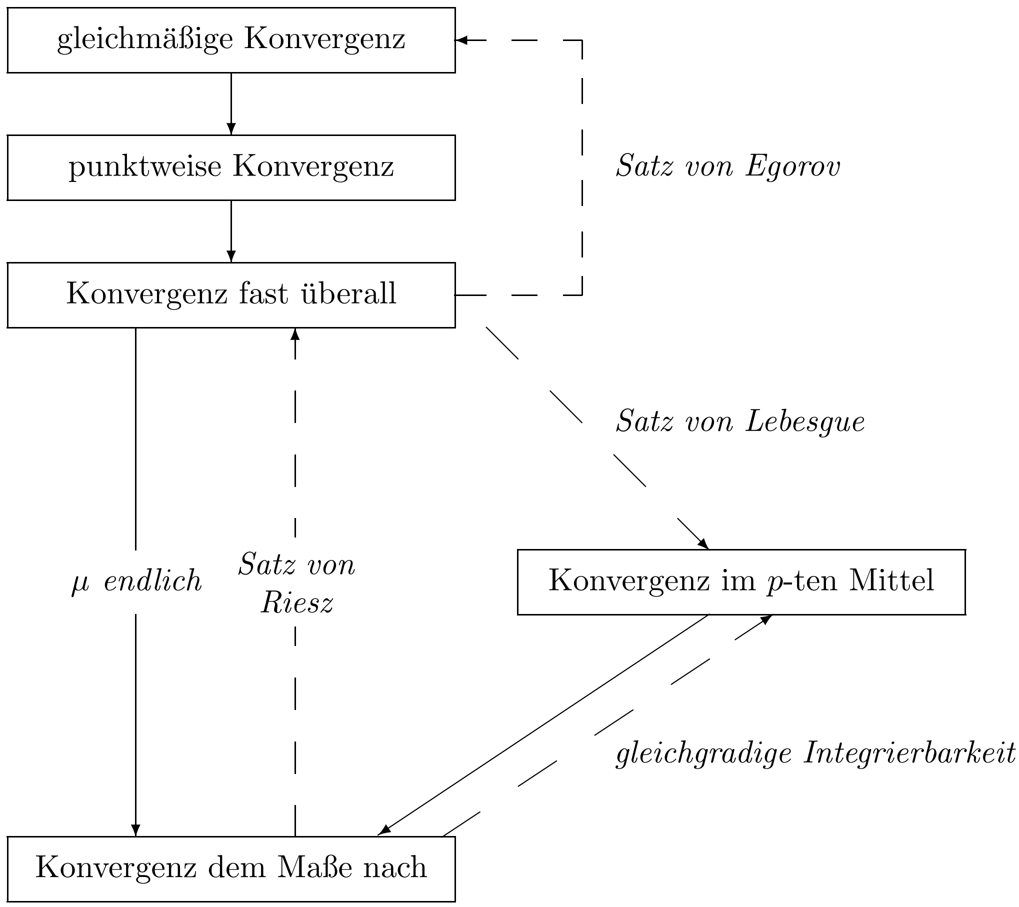
$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \to 0,$$

woraus

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$$

folgt.

Zum Abschluß dieses Abschnittes fassen wir die Beziehungen zwischen den verschiedenen Konvergenzarten in einem Diagramm zusammen:



Kapitel 7

Integration bezüglich eines Produktmaßes

7.1. Produkt von Maßräumen

Gegeben seien zwei Maßräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$. Unser Ziel besteht in der Konstruktion eines *Produktraumes* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := (\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1) \otimes (\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \colon \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\}$ ist das kartesische Produkt der Mengen Ω_1 und Ω_2;

(ii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ist die kleinste σ-Algebra in Ω, die alle Mengen der Gestalt $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ enthält (*Produkt-σ-Algebra*);

(iii) $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ ist dasjenige Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, für das

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2)$$

für alle $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ gilt (*Produktmaß*).

Das Problem besteht im Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit des Produktmaßes μ, wobei die Einzigkeit von μ im allgemeinen nur für *σ-endliche* Maße μ_1 und μ_2 gezeigt werden kann.

Hierzu führen wir das Mengensystem

$$\mathfrak{S} := \{A_1 \times A_2 \colon A_1 \in \mathfrak{A}_1,\ A_2 \in \mathfrak{A}_2\}$$

ein. $\mathfrak{S}$ ist ein Semiring in $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (*Übungsaufgabe*), und nach Definition der Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist

$$\sigma(\mathfrak{S}) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2.$$

Zunächst ist μ eine auf $\mathfrak{S}$ definierte Mengenfunktion, die zu einem Maß auf $\sigma(\mathfrak{S})$ fortgesetzt werden soll. Ist μ σ-endlich auf $\mathfrak{S}$, so existiert aufgrund der Folgerung 3.33 höchstens eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Sind die Maße μ_1 und μ_2 σ-endlich, so ergibt sich deshalb die Eindeutigkeit des Produktmaßes $\mu_1 \otimes \mu_2$ (falls es überhaupt existiert) aus der folgenden Behauptung.

Behauptung 7.1. *Sind die Maße μ_1 und μ_2 σ-endlich, so ist die Mengenfunktion μ σ-endlich auf $\mathfrak{S}$.*

Beweis. Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ_i existieren Mengen $\Omega_i^{(n)} \in \mathfrak{A}_i$ mit $\Omega_i^{(n)} \uparrow \Omega_i$ für $n \uparrow \infty$ und $\mu_i(\Omega_i^{(n)}) < \infty$ für alle n $(i = 1,2)$. Wir setzen $\Omega^{(n)} := \Omega_1^{(n)} \times \Omega_2^{(n)}$. Diese Mengen gehören zum Semiring $\mathfrak{S}$, $\Omega^{(n)} \uparrow \Omega$ und $\mu(\Omega^{(n)}) = \mu_1(\Omega_1^{(n)})\, \mu_2(\Omega_2^{(n)}) < \infty$. $\square$

Eine Möglichkeit zur Konstruktion des Produktmaßes besteht im Nachweis der σ-Additivität von μ auf dem Semiring $\mathfrak{S}$ und der Anwendung des Fortsetzungssatzes (Theorem 3.31). Wir wollen jedoch einen anderen Weg beschreiten, der gleichzeitig eine explizite Darstellung des Produktmaßes liefert und für die Integration in Bezug auf Produktmaße von Bedeutung ist.

Hierzu führen wir Schnitte von Mengen und Funktionen ein. Es sei A eine Teilmenge von $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Als *Schnitte* der Menge A bezeichnet man die Mengen

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 \colon (\omega_1, \omega_2) \in A\}\,, \qquad \omega_1 \in \Omega_1,$$

und

$$A^{\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 \colon (\omega_1, \omega_2) \in A\}\,, \qquad \omega_2 \in \Omega_2.$$

Als *Schnitte* einer Funktion $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet man die Funktionen

$$f_{\omega_1}(\omega_2) := f(\omega_1, \omega_2), \qquad \omega_1 \in \Omega_1,$$

und

$$f^{\omega_2}(\omega_1) := f(\omega_1, \omega_2), \qquad \omega_2 \in \Omega_2,$$

die dadurch entstehen, daß man $f(\omega_1, \omega_2)$ bei fixiertem ω_1 als Funktion von ω_2 betrachtet und umgekehrt.

Zwischen Schnitten von Mengen und Funktionen besteht der folgende natürliche Zusammenhang. Ist $f = \mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion einer Menge $A \subseteq \Omega$, so gilt

$$f_{\omega_1} = \mathbb{1}_{A_{\omega_1}} \quad \text{und} \quad f^{\omega_2} = \mathbb{1}_{A^{\omega_2}}\,. \tag{7.1}$$

Behauptung 7.2. *(Meßbarkeit von Schnitten)*

a) Aus $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ folgt $A_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ und $A^{\omega_2} \in \mathfrak{A}_1$ für alle $\omega_2 \in \Omega_2$.

b) Aus der Meßbarkeit der Funktion $f \colon (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ folgt die Meßbarkeit der Funktionen $f_{\omega_1} \colon (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ und die Meßbarkeit der Funktionen $f^{\omega_2} \colon (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ für alle $\omega_2 \in \Omega_2$.

Beweis. a) Wir fixieren $\omega_1 \in \Omega_1$ beliebig und betrachten das Mengensystem

$$\mathfrak{F} := \{A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \colon A_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2\}.$$

Es ist $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ zu zeigen. Für $A = A_1 \times A_2 \in \mathfrak{S}$ gilt

$$A_{\omega_1} = \begin{cases} A_2, & \text{falls } \omega_1 \in A_1, \\ \emptyset, & \text{falls } \omega_1 \notin A_1, \end{cases} \tag{7.2}$$

woraus in beiden Fällen $A_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2$ und damit $A \in \mathfrak{F}$ folgt. Also ist $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{S}$. Wegen $\sigma(\mathfrak{S}) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ bleibt nur noch nachzuweisen, daß $\mathfrak{F}$ eine σ-Algebra ist. Offenbar gehört Ω zu $\mathfrak{F}$. Aus $A \in \mathfrak{F}$ folgt $A_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2$ und damit

$$\left(A^{\mathrm{c}}\right)_{\omega_1} = A^{\mathrm{c}}_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2,$$

d.h. $A^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{F}$. Sei nun $A = \bigcup_n A^{(n)}$ und $A^{(n)} \in \mathfrak{F}$ für alle n. Dann folgt $A^{(n)}_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2$ für alle n und deshalb

$$A_{\omega_1} = \bigcup_n A^{(n)}_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2, \tag{7.3}$$

d.h. $A \in \mathfrak{F}$.

b) Wegen a) und (7.1) gilt die Behauptung für Indikatorfunktionen $f = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Mit Hilfe der üblichen Fortsetzungsprozedur zeigt man die Behauptung nacheinander für elementare Funktionen, nichtnegative meßbare numerische Funktionen und schließlich für alle meßbaren numerischen Funktionen. □

Behauptung 7.3. *Die Maße μ_1 und μ_2 seien σ-endlich. Für eine beliebige Menge A aus $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ist*

$$\omega_1 \mapsto \mu_2(A_{\omega_1}) \text{ eine } \mathfrak{A}_1\text{-meßbare numerische Funktion auf } \Omega_1$$

und

$$\omega_2 \mapsto \mu_1(A^{\omega_2}) \text{ eine } \mathfrak{A}_2\text{-meßbare numerische Funktion auf } \Omega_2.$$

Beweis. Wir zeigen nur den ersten Teil der Behauptung.

1^0 Wir setzen zunächst $\mu_2(\Omega_2) < \infty$ voraus. Es ist zu zeigen, daß das Mengensystem

$$\mathfrak{F} := \{A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \colon \omega_1 \mapsto \mu_2\left(A_{\omega_1}\right) \text{ meßbar}\}$$

die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ enthält. Als erstes überzeugen wir uns von der Gültigkeit der Inklusion $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{S}$. Hierzu sei $A = A_1 \times A_2 \in \mathfrak{S}$. Dann folgt mit (7.2)

$$\mu_2(A_{\omega_1}) = \mu_2(A_2)\, \mathbb{1}_{A_1}(\omega_1).$$

Wegen $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ ist dies eine meßbare Funktion von ω_1, d.h. $A \in \mathfrak{F}$. Als nächstes zeigen wir, daß $\mathfrak{F}$ ein Dynkin-System ist. Offenbar ist $\Omega \in \mathfrak{F}$. Das Mengensystem $\mathfrak{F}$ ist abgeschlossen bezüglich der Komplementbildung. Tatsächlich, für beliebiges A aus $\mathfrak{F}$ ist

$$\mu_2\left(\left(A^{\mathrm{c}}\right)_{\omega_1}\right) = \mu_2\left(A^{\mathrm{c}}_{\omega_1}\right) = \mu_2(\Omega_2) - \mu_2\left(A_{\omega_1}\right)$$

eine $\mathfrak{A}_1$-meßbare Funktion von ω_1, d.h. $A^c \in \mathfrak{F}$. Hierbei wurde die Endlichkeit von $\mu_2(\Omega_2)$ benutzt. Sei nun $A = \bigcup_n A^{(n)}$ die abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{F}$. Die Schnitte $A^{(n)}_{\omega_1}$ sind dann auch paarweise disjunkt, es gilt (7.3), und

$$\mu_2(A_{\omega_1}) = \mu_2\left(\bigcup_n A^{(n)}_{\omega_1}\right) = \sum_n \mu_2\left(A^{(n)}_{\omega_1}\right)$$

ist (als Summe nichtnegativer meßbarer numerischer Funktionen) eine $\mathfrak{A}_1$-meßbare numerische Funktion von ω_1, d.h. $A \in \mathfrak{F}$. Also ist $\mathfrak{F}$ abgeschlossen bezüglich der Bildung paarweise disjunkter abzählbarer Vereinigungen. Da $\mathfrak{S}$ $\cap$-stabil ist, folgt unter Benutzung des Hauptsatzes über Dynkin-Systeme (Theorem 3.17) aus $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{S}$ schließlich

$$\mathfrak{F} \supseteq d(\mathfrak{S}) = \sigma(\mathfrak{S}) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2.$$

2^0 Sei nun μ_2 σ-endlich. Dann existieren Mengen $\Omega_2^{(n)} \in \mathfrak{A}_2$ mit $\Omega_2^{(n)} \uparrow \Omega_2$ und $\mu_2(\Omega_2^{(n)}) < \infty$. Durch

$$\mu_2^{(n)}(A_2) := \mu_2\left(A_2 \cap \Omega_2^{(n)}\right), \qquad A_2 \in \mathfrak{A}_2,$$

werden *endliche* Maße $\mu_2^{(n)}$ auf $\mathfrak{A}_2$ definiert. Für beliebiges $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ liefert deshalb der Beweisschritt 1^0 die $\mathfrak{A}_1$-Meßbarkeit der numerischen Funktionen

$$\omega_1 \mapsto \mu_2^{(n)}\left(A_{\omega_1}\right).$$

Wegen

$$\mu_2^{(n)}\left(A_{\omega_1}\right) = \mu_2\left(A_{\omega_1} \cap \Omega_2^{(n)}\right) \uparrow \mu_2\left(A_{\omega_1}\right)$$

für $n \uparrow \infty$ folgt hieraus die $\mathfrak{A}_1$-Meßbarkeit der Funktion

$$\omega_1 \mapsto \mu_2\left(A_{\omega_1}\right).$$

□

Theorem 7.4. *(Konstruktion von Produktmaßen auf σ-endlichen Maßräumen) Gegeben seien* σ-endliche *Maßräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ mit*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) \qquad \textit{für } A_1 \in \mathfrak{A}_1,\ A_2 \in \mathfrak{A}_2. \tag{7.4}$$

Dieses Maß ist durch

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1})\,\mu_1(d\omega_1) \qquad (7.5)\\ &= \int_{\Omega_2} \mu_1(A^{\omega_2})\,\mu_2(d\omega_2), \qquad A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Aufgrund der Behauptungen 7.2 und 7.3 sind die Integrale in (7.5) wohldefiniert.

1^0 Die durch die erste Hälfte von (7.5) definierte Mengenfunktion μ ist ein Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$:
$\mu \geq 0$ und $\mu(\emptyset) = 0$ sind offensichtlich. Zum Beweis der σ-Additivität seien $A^{(n)}$ abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen aus $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und $A := \bigcup_n A^{(n)}$. Dann sind auch die $\mathfrak{A}_2$-meßbaren Schnitte $A^{(n)}_{\omega_1}$ paarweise disjunkt, und

$$A_{\omega_1} = \bigcup_n A^{(n)}_{\omega_1}.$$

Hieraus folgt

$$\mu_2(A_{\omega_1}) = \sum_n \mu_2(A^{(n)}_{\omega_1}),$$

wobei unter dem Summenzeichen nichtnegative meßbare numerische Funktionen von ω_1 stehen. Unter Verwendung des Satzes von B. Levi (Folgerung 5.11) erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\Omega_1} \sum_n \mu_2(A^{(n)}_{\omega_1})\, \mu_1(d\omega_1) \\ &= \sum_n \int_{\Omega_1} \mu_2(A^{(n)}_{\omega_1})\, \mu_1(d\omega_1) = \sum_n \mu(A^{(n)}), \end{aligned}$$

d.h. μ ist σ-additiv.

2^0 Das durch die erste Hälfte von (7.5) definierte Maß μ erfüllt (7.4):
Für $A = A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ ist

$$\mu_2\left(A_{\omega_1}\right) = \mu_2(A_2) \mathbb{1}_{A_1}(\omega_1)$$

und deshalb

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_2)\, \mathbb{1}_{A_1}(\omega_1)\, \mu_1(d\omega_1) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2).$$

3^0 Die zu 1^0 und 2^0 analogen Behauptungen gelten auch für die durch das zweite Integral in (7.5) definierte Mengenfunktion. Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ_1 und μ_2 ist aber die Fortsetzung der Mengenfunktion (7.4) zu einem Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ eindeutig. Deshalb stimmen die beiden Integrale in (7.5) überein. □

Beispiel 7.5. Sei λ^p das p-dimensionale Lebesgue-Maß auf der Borelalgebra $\mathfrak{B}^p$. Für beliebige natürliche Zahlen p und q gilt

$$(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p, \lambda^p) \otimes (\mathbb{R}^q, \mathfrak{B}^q, \lambda^q) = \left(\mathbb{R}^{p+q}, \mathfrak{B}^{p+q}, \lambda^{p+q}\right).$$

Wir zeigen als erstes $\mathfrak{B}^p \otimes \mathfrak{B}^q = \mathfrak{B}^{p+q}$. Es ist $\mathfrak{B}^{p+q} = \sigma(\mathfrak{F})$, wobei $\mathfrak{F}$ das System der achsenparallelen Quader in $\mathbb{R}^{p+q}$ bezeichnet. Jeder solche Quader

R hat die Gestalt $R = P \times Q$, wobei P und Q achsenparallele Quader in $\mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{R}^q$ sind. Folglich ist $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}^p \otimes \mathfrak{B}^q$ und daher $\mathfrak{B}^{p+q} \subseteq \mathfrak{B}^p \otimes \mathfrak{B}^q$. Zum Beweis der entgegengesetzten Inklusion benutzt man $\mathfrak{B}^p \otimes \mathfrak{B}^q = \sigma(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{S} = \{A \times B \colon A \in \mathfrak{B}^p,\ B \in \mathfrak{B}^q\}$. Mit π_1 und π_2 bezeichnen wir die kanonischen Projektionen $\mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$. Diese Abbildungen sind stetig und somit Borel-meßbar. Jede Menge $A \times B$ aus $\mathfrak{S}$ hat die Gestalt

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times B) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B)$$

und gehört deshalb zu $\mathfrak{B}^{p+q}$. D.h., $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{B}^{p+q}$ und folglich $\mathfrak{B}^p \otimes \mathfrak{B}^q \subseteq \mathfrak{B}^{p+q}$.

Bleibt $\lambda^p \otimes \lambda^q = \lambda^{p+q}$ zu zeigen. Da λ^p und λ^q σ-endlich sind, ist das Produktmaß $\lambda^p \otimes \lambda^q$ wohldefiniert. Für beliebige achsenparallele Quader P und Q in $\mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{R}^q$ ist nach Definition des Produktmaßes und der Lebesgue-Maße

$$(\lambda^p \otimes \lambda^q)(P \times Q) = \lambda^p(P)\, \lambda^q(Q) = \lambda^{p+q}(P \times Q).$$

Da die achsenparallelen Quader $P \times Q$ einen $\cap$-stabilen Erzeuger der Borelalgebra $\mathfrak{B}^{p+q}$ bilden, folgt hieraus $\lambda^p \otimes \lambda^q = \lambda^{p+q}$ (Folgerung 3.19).

7.2. Der Satz von Fubini

Gegeben seien *σ-endliche* Maßräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$. Die folgenden Versionen des Satzes von Fubini erlauben die Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei Mehrfachintegralen.

Theorem 7.6. *(Satz von Fubini für nichtnegative meßbare Funktionen)*
Sei $f \colon (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ nichtnegativ und meßbar. Dann sind

$$\omega_1 \longmapsto \int f_{\omega_1}\, d\mu_2 \quad \textit{und} \quad \omega_2 \longmapsto \int f^{\omega_2}\, d\mu_1$$

nichtnegative $\mathfrak{A}_1$- bzw. $\mathfrak{A}_2$-meßbare numerische Funktionen auf Ω_1 bzw. Ω_2, und es gilt

$$\begin{aligned} \int f\, d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \int \left(\int f_{\omega_1}\, d\mu_2 \right) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int \left(\int f^{\omega_2}\, d\mu_1 \right) d\mu_2(\omega_2). \end{aligned} \tag{7.6}$$

D.h.,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\ (\mu_1 \otimes \mu_2)(d(\omega_1, \omega_2)) \\ &\quad = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \right) \mu_1(d\omega_1) \\ &\quad = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1) \right) \mu_2(d\omega_2). \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Hälfte der Gleichung (7.6).

1^0 Die Behauptung gilt für Indikatorfunktionen $f = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$: Wegen $f_{\omega_1} = \mathbb{1}_{A_{\omega_1}}$ ist nämlich

$$\int f_{\omega_1} \, d\mu_2 = \mu_2 \left(A_{\omega_1} \right),$$

und diese Funktion von ω_1 ist $\mathfrak{A}_1$-meßbar (Behauptung 7.3). Deshalb erhalten wir mit dem Theorem 7.4

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 &= (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int \mu_2 \left(A_{\omega_1} \right) \, \mu_1(d\omega_1) \\ &= \int \left(\int f_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) \, \mu_1(d\omega_2). \end{aligned}$$

2^0 Die Behauptung gilt für nichtnegative elementare Funktionen f: Dies ergibt sich aus 1^0 unter Ausnutzung der Linearität und Homogenität der Integrale.

3^0 Die Behauptung gilt für beliebige nichtnegative meßbare Funktionen f: Es existieren elementare Funktionen $f^{(n)}$ mit $0 \leq f^{(n)} \uparrow f$ (Behauptung 5.1). Dann gilt auch für die Schnitte $0 \leq f^{(n)}_{\omega_1} \uparrow f_{\omega_1}$, woraus mit dem Satz über monotone Konvergenz (Theorem 5.10)

$$\int f^{(n)}_{\omega_1} \, d\mu_2 \uparrow \int f_{\omega_1} \, d\mu_2$$

folgt. Insbesondere ist $\int f_{\omega_1} \, d\mu_2$ als monotoner Limes meßbarer Funktionen eine $\mathfrak{A}_1$-meßbare Funktion von ω_1. Aufgrund des Beweisschrittes 2^0 gilt für jedes n:

$$\int f^{(n)} \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int \left(\int f^{(n)}_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) \, d\mu_1(\omega_1).$$

Geht man in dieser Gleichung zum Limes für $n \to \infty$ über und benutzt dabei auf beiden Seiten den Satz über monotone Konvergenz, so folgt

$$\int f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int \left(\int f_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) \, d\mu_1(\omega_1),$$

was zu zeigen war. $\square$

Um die Aussage des Theorems 7.6 auf beliebige $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbare Funktionen f zu übertragen, zerlegt man die Funktion f in ihren Positivteil und ihren Negativteil, $f = f^+ - f^-$, und wendet das Theorem 7.6 separat auf f^+ und f^- an. Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \int f^+ \, d\mu_1 \otimes \mu_2 - \int f^- \, d\mu_1 \otimes \mu_2 \\ &= \int \left(\int (f^+)_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) \, d\mu_1(\omega_1) - \int \left(\int (f^-)_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) \, d\mu_1(\omega_1). \end{aligned}$$

Diese Gleichung möchte man wie folgt fortsetzen:

$$
\begin{aligned}
&= \int \left[\int (f^+)_{\omega_1} \, d\mu_2 - \int (f^-)_{\omega_1} \, d\mu_2 \right] \mu_1(d\omega_1) \\
&= \int \left(\int \left((f^+)_{\omega_1} - (f^-)_{\omega_1} \right) \, d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1) \\
&= \int \left(\int f_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1),
\end{aligned}
$$

wobei $f^+_{\omega_1} - f^-_{\omega_1} = f_{\omega_1}$ benutzt wurde. Wegen der Endlichkeit der Integrale von f^+ und f^- bezüglich $\mu_1 \otimes \mu_2$ sind dabei die Integrale

$$
\int (f^+)_{\omega_1} \, d\mu_2 \qquad \text{und} \qquad \int (f^-)_{\omega_1} \, d\mu_2
$$

für μ_1-f.a. ω_1 endlich. Aber zumindest auf einer μ_1-Nullmenge können beide Integrale den Wert $+\infty$ annehmen, so daß bei der obigen Fortsetzung der Gleichung in der eckigen Klammer ein Ausdruck der Gestalt „$\infty - \infty$“ auftreten kann. Für solche ω_1 ist daher

$$
\int f_{\omega_1} \, d\mu_2
$$

nicht erklärt. Da dies jedoch nur auf einer Nullmenge passiert, kann man das Problem lösen, indem man dieses Integral auf der betrachteten Ausnahmemenge durch Null ersetzt. Dies führt zu folgendem Ergebnis.

Theorem 7.7. *(Satz von Fubini)*
Die Funktion $f\colon (\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ sei meßbar und $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Für μ_1-f.a. $\omega_1 \in \Omega_1$ ist f_{ω_1} μ_2-integrierbar, und für μ_2-f.a. $\omega_2 \in \Omega_2$ ist f^{ω_2} μ_1-integrierbar.

b) Die Funktionen

$$
I_f^{(1)}(\omega_1) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2, & \textit{falls } f_{\omega_1} \ \mu_2\textit{-integrierbar ist,} \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}
$$

und

$$
I_f^{(2)}(\omega_2) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_1} f^{\omega_2} \, d\mu_1, & \textit{falls } f^{\omega_2} \ \mu_1\textit{-integrierbar ist,} \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}
$$

sind μ_1-bzw. μ_2-integrierbar.

c)

$$
\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} I_f^{(1)} \, d\mu_1 = \int_{\Omega_2} I_f^{(2)} \, d\mu_2.
$$

Anstelle von $\int I_f^{(1)}\,d\mu_1$ schreibt man oft etwas lax

$$\int\left(\int f(\omega_1,\omega_2)\,\mu_2(d\omega_2)\right)\,\mu_1(d\omega_1).$$

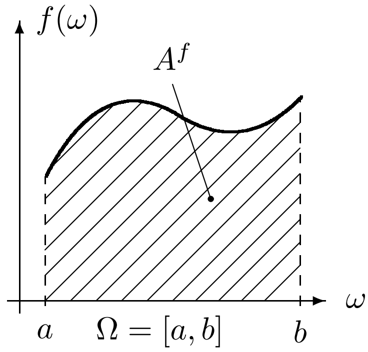
Entsprechendes gilt für $\int I_f^{(2)}\,d\mu_2$.

Beispiel 7.8. (Integral als Maß einer Menge)

$(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ bezeichne einen σ-endlichen Maßraum, und λ sei das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Wir betrachten eine nichtnegative meßbare Funktion $f\colon(\Omega,\mathfrak{A})\to(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ und führen die Menge

$$A^f := \{(\omega,y)\in\Omega\times\mathbb{R}\colon 0\le y<f(\omega)\}$$

ein.



Behauptung 7.9. $\displaystyle\int f\,d\mu=(\mu\otimes\lambda)(A^f).$

Beweis.

1^0 A^f ist $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-meßbar:
Hierzu führen wir zwei Abbildungen Φ und Ψ ein:

$$\begin{array}{lclcl}(\Omega\times\mathbb{R},\,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}\times\mathbb{R},\,\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B})=(\mathbb{R}^2,\mathfrak{B}^2) & \xrightarrow{\Psi} & (\mathbb{R},\mathfrak{B})\\ (\omega,y) & \longmapsto & (f(\omega),y) & \longmapsto & f(\omega)-y.\end{array}$$

Dann ist

$$A^f=\{\Psi\circ\Phi>0\}\cap(\Omega\times[0,\infty))\,.$$

Um die $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-Meßbarkeit der Menge A^f zu beweisen, genügt es deshalb, die Meßbarkeit der Abbildungen Φ und Ψ zu verifizieren. Die Meßbarkeit von Φ folgt aus der Tatsache, daß die Mengen $A\times B$ ($A\in\mathfrak{B}$, $B\in\mathfrak{B}$) einen Erzeuger von $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B}$ bilden und

$$\Phi^{-1}(A\times B)=f^{-1}(A)\times B$$

zu $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ gehört. Die Abbildung $\Psi(x,y)=x-y$ ist stetig und deshalb Borel-meßbar.

2^0 die Schnitte der Menge A^f besitzen die Gestalt

$$A^f_\omega=[0,f(\omega)),$$

weshalb

$$\lambda\left(A^f_\omega\right)=f(\omega)$$

ist. Das Theorem 7.4 (oder Theorem 7.6) liefert deshalb

$$(\mu \otimes \lambda)(A^f) = \int \lambda\left(A^f_\omega\right)\,\mu(d\omega) = \int f(\omega)\,\mu(d\omega).$$

□

Beispiel 7.10. (Faltung von Funktionen)
λ sei das d-dimensionale Lebesgue-Maß, $\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d, \lambda)$ und $\|\cdot\|_1$ bezeichne die Halbnorm in $\mathcal{L}^1$. Die *Faltung* $f * g$ zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1$ wird wie folgt definiert:

$$(f * g)(x) := \begin{cases} \displaystyle\int f(x-y)\,g(y)\,\lambda(dy), & \text{falls } y \mapsto f(x-y)\,g(y) \\ & \text{Lebesgue-integrierbar ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung 7.11. *Sind f und g Funktionen aus $\mathcal{L}^1$, so gehört auch die Faltung $f * g$ zu $\mathcal{L}^1$ und es gilt*

$$\|f * g\|_1 \;\leq\; \|f\|_1\,\|g\|_1\,.$$

Beweis.

1^0 Die Funktion $h(x,y) := f(x-y)\,g(y)$ ist $(\mathfrak{B}^{2d}, \mathfrak{B})$-meßbar, d.h. sie ist $(\mathfrak{B}^d \otimes \mathfrak{B}^d, \mathfrak{B})$-meßbar (*Übungsaufgabe*).

2^0 h ist $\lambda \otimes \lambda$-integrierbar:
Der Satz von Fubini für nichtnegative meßbare Funktionen liefert

$$\begin{aligned} \int |h|\,d\lambda \otimes \lambda &= \int \left(\int |h(x,y)|\,\lambda(dx)\right)\,\lambda(dy) \\ &= \int \left(\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,\lambda(dx)\right)\,\lambda(dy) \\ &= \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)|\,\lambda(dx)\right)\,\lambda(dy). \end{aligned}$$

Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes ist

$$\int |f(x-y)|\,\lambda(dx) = \int |f(x)|\,\lambda(dx) = \|f\|_1\,.$$

Deshalb läßt sich die obige Gleichung wie folgt fortsetzen:

$$= \|f\|_1 \int |g(y)|\,dy = \|f\|_1\,\|g\|_1 < \infty.$$

Also ist h tatsächlich $\lambda \otimes \lambda$-integrierbar.

3^0 Wegen 2^0 können wir nun den Satz von Fubini auf die Funktion h selbst anwenden. Die Schnitte von h haben die Gestalt

$$h_x(y) = f(x-y)\,g(y)$$

und sind als Funktionen von y Lebesgue-integrierbar für Lebesgue-f.a. Punkte x. Insbesondere ist $f * g$ Borel-meßbar. Wegen

$$|(f*g)(x)| \leq \int |f(x-y)\,g(y)|\,\lambda(dy) = \int |h(x,y)|\,\lambda(dy)$$

erhalten wir wie in 2^0:

$$\|\,f*g\,\|_1 \; = \int |(f*g)(x)|\,\lambda(dx) \leq \int \left(\int |h(x,y)|\,\lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \; \|\,f\,\|_1 \, \|\,g\,\|_1 \; .$$

□

Kapitel 8

Signierte Maße

In diesem Abschnitt wird die Voraussetzung der Nichtnegativität von Maßen fallengelassen.

Definition 8.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *signiertes Maß*, falls folgendes gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) μ ist σ-additiv: Ist (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $A := \bigcup A_n$, so gilt

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(Genauer, $\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}$, wobei in den Summen keine Ausdrücke der Gestalt „ $\infty - \infty$“ auftreten.)

Aus der σ-Additivität von μ und $\mu(\emptyset) = 0$ folgt für eine beliebige Menge $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^{\mathrm{c}}),$$

wobei auf der rechten Seite „ $\infty - \infty$“ nicht auftreten darf. Deshalb erhalten wir

(i) $|\mu(\Omega)| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad |\mu(A)| < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{A}$;

(ii) $\mu(\Omega) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A) > -\infty$ für alle $A \in \mathfrak{A}$;

(iii) $\mu(\Omega) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A) < +\infty$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Ist die Eigenschaft (i) erfüllt, so sagt man, das signierte Maß μ sei *endlich*.

Beispiel 8.2. (Standardbeispiel)
$(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann wird durch

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A},$$

ein endliches signiertes Maß ν auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ definiert. Die Endlichkeit von ν folgt aus der Integrierbarkeit von f. Um die σ-Additivität nachzuweisen, sei (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $A := \bigcup A_n$. Dann konvergieren die Summen $\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} f$ für $n \to \infty$ punktweise gegen $\mathbb{1}_A f$ und werden durch die integrierbare Funktion $|f|$ majorisiert. Deshalb erhält man mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz (Theorem 5.16) für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \nu(A_k) &= \sum_{k=1}^n \int \mathbb{1}_{A_k} f\, d\mu = \int \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} f\, d\mu \\ &\to \int \mathbb{1}_A f\, d\mu = \nu(A).\end{aligned}$$

Wir werden auf dieses Beispiel im folgenden öfter als *Standardbeispiel* zurückgreifen.

Wir geben nun zwei verschiedene Charakterisierungen signierter Maße an.

Theorem 8.3. *(Hahnsche Zerlegung)*
Sei μ ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann existieren Mengen $\Omega_-, \Omega_+ \in \mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\Omega_- \cap \Omega_+ = \emptyset$, $\Omega_- \cup \Omega_+ = \Omega$;

(ii) $\mu(A) \leq 0$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$ *mit* $A \subseteq \Omega_-$;

(iii) $\mu(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$ *mit* $A \subseteq \Omega_+$.

Beweis. Siehe z.B. D.L. Cohn [11], Chap. 4. □

Das Paar (Ω_-, Ω_+) im Theorem 8.3 heißt *Hahnsche Zerlegung* für das signierte Maß μ. Diese Zerlegung von Ω ist im allgemeinen nicht eindeutig. So kann man im obigen Standardbeispiel

$$\Omega_- = \{f < 0\}, \quad \Omega_+ = \{f \geq 0\}$$

oder auch

$$\Omega_- = \{f \leq 0\}, \quad \Omega_+ = \{f > 0\}$$

als Hahnsche Zerlegung für ν wählen.

Theorem 8.4. *(Jordansche Zerlegung)*
Sei μ ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann existieren eindeutig bestimmte (nichtnegative) Maße μ^+ und μ^- auf $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu = \mu^+ - \mu^-$;

(ii) für jede Hahnsche Zerlegung (Ω_-, Ω_+) *zu* μ *gilt*

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap \Omega_+),\ \mu^-(A) = -\mu(A \cap \Omega_-) \qquad (A \in \mathfrak{A});$$

(iii) mindestens eines der Maße μ^+ und μ^- ist endlich.

Beweis. (Ω_-, Ω_+) bezeichne eine beliebige Hahnsche Zerlegung für μ. Wir setzen

$$\mu^+(A) := \mu(A \cap \Omega_+), \quad \mu^-(A) := -\mu(A \cap \Omega_-) \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

1^0 μ^+ und μ^- sind Maße auf $\mathfrak{A}$: $\mu^+(\emptyset) = 0$ ist klar. Wegen $A \cap \Omega_+ \subseteq \Omega_+$ ist $\mu^+(A) \geq 0$ (siehe Theorem 8.3, (iii)). Sei $A = \bigcup A_n$ die abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter meßbarer Mengen. Wegen der σ-Additivität von μ gilt

$$\mu^+(A) = \mu\left(\bigcup_n (A_n \cap \Omega_+)\right) = \sum_n \mu\,(A_n \cap \Omega_+) = \sum_n \mu^+(A_n).$$

Also ist μ^+ σ-additiv und somit ein Maß. Analog geht man für μ^- vor.

2^0 $\mu = \mu^+ - \mu^-$: Für beliebiges $A \in \mathfrak{A}$ ist

$$A = (A \cap \Omega_+) \cup (A \cap \Omega_-)$$

eine disjunkte Vereinigung meßbarer Mengen, woraus

$$\mu(A) = \mu(A \cap \Omega_+) + \mu(A \cap \Omega_-) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$$

folgt.

3^0 Da insbesondere für $A = \Omega$ auf der rechten Seite der letzten Gleichung „$\infty - \infty$“ nicht auftreten darf, muß mindestens eines der beiden Maße μ^+ und μ^- endlich sein.

4^0 Es bleibt die Einzigkeit der Zerlegung (μ^-, μ^+) nachzuweisen. Für beliebiges $A \in \mathfrak{A}$ und alle meßbaren Mengen $B \subseteq A$ gilt wegen (i)

$$\mu(B) = \mu^+(B) - \mu^-(B) \leq \mu^+(B) \leq \mu^+(A).$$

Außerdem gilt für $B = A \cap \Omega_+$ wegen (ii)

$$\mu(B) = \mu^+(A).$$

Deshalb ist

$$\mu^+(A) = \sup\left\{\mu(B)\colon B \subseteq A,\, B \in \mathfrak{A}\right\}, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Analog zeigt man

$$\mu^-(A) = \sup\left\{-\mu(B)\colon B \subseteq A,\, B \in \mathfrak{A}\right\}, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Diese Formeln zeigen, daß μ^+ und μ^- durch μ und die Eigenschaften (i) und (ii) eindeutig festgelegt sind (obwohl die Hahnsche Zerlegung im allgemeinen nicht eindeutig ist). $\square$

Beispiel 8.5. Für das obige Standardbeispiel ist

$$\Omega_- = \{f < 0\}\,, \quad \Omega_+ = \{f \geq 0\}$$

als Hahnsche Zerlegung für das signierte Maß ν wählbar. Hieraus folgt

$$\nu^+(A) = \int_A f^+\, d\mu, \quad \nu^-(A) = \int_A f^-\, d\mu \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

Sind μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $\mathfrak{A}$ mit $\mu_1(\Omega) < \infty$ oder $\mu_2(\Omega) < \infty$, so ist $\mu := \mu_1 - \mu_2$ ein signiertes Maß. Zusammen mit der Jordanschen Zerlegung erhalten wir deshalb die folgende einfache Charakterisierung signierter Maße.

Folgerung 8.6. $(\Omega, \mathfrak{A})$ *sei ein meßbarer Raum. Eine Mengenfunktion* $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist genau dann ein signiertes Maß, wenn sie sich als Differenz zweier Maße darstellen läßt, von denen mindestens eines endlich ist.*

Es sei μ ein signiertes Maß und $(\mu^-,\, \mu^+)$ die zugehörige Jordansche Zerlegung. Das Maß μ^- (μ^+) heißt *Negativteil* (*Positivteil*) von μ. Das Maß

$$|\mu| := \mu^+ + \mu^-$$

heißt *Variation* von μ. Die Zahl

$$\|\mu\| := |\mu|(\Omega) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega)$$

wird *Totalvariation* von μ genannt. Es gilt

$$\mu \text{ endlich} \;\Leftrightarrow\; |\mu| \text{ endlich} \;\Leftrightarrow\; \|\mu\| < \infty.$$

Aus $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ folgt

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Behauptung 8.7.

$$\|\mu\| = \sup\left\{\sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k)|\colon r \in \mathbb{N} \textit{ und } A_1, \ldots, A_r \in \mathfrak{A} \textit{ paarweise disjunkt}\right\}.$$

Beweis. Für beliebige paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k)| \leq \sum_{k=1}^{r} |\mu|\,(A_k) = |\mu|\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\right) \leq |\mu|(\Omega) = \|\mu\|\,.$$

Außerdem erhalten wir für eine beliebige Hahnsche Zerlegung $(\Omega_-,\, \Omega_+)$ und $A_1 = \Omega_-$, $A_2 = \Omega_+$:

$$\sum_{k=1}^{2} |\mu(A_k)| = \mu^-(\Omega) + \mu^+(\Omega) = |\mu|(\Omega) = \|\mu\|\,.$$

□

Beispiel 8.8. Im Standardbeispiel ist

$$|\nu|(A) = \int_A |f|\,d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A},$$

und folglich

$$\|\,\nu\,\| \;= \int |f|\,d\mu.$$

Mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnen wir den Raum der *endlichen* signierten Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Behauptung 8.9. *Das Paar $(\mathfrak{M}, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum. D.h., $\mathfrak{M}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, und die Totalvariation $\|\cdot\|$ ist eine Norm in $\mathfrak{M}$ bezüglich der jede Cauchyfolge konvergiert.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Zum Schluß dieses Abschnitts erörtern wir kurz die *Integration bezüglich signierter Maße.* Gegeben seien ein signiertes Maß μ und eine meßbare numerische Funktion f auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. (μ^-, μ^+) bezeichne die Jordansche Zerlegung von μ. Unter der Endlichkeitsvoraussetzung

$$\int |f|\,d|\mu| = \int |f|\,d\mu^+ + \int |f|\,d\mu^- < \infty \tag{8.1}$$

definiert man

$$\boxed{\int f\,d\mu := \int f\,d\mu^+ - \int f\,d\mu^-}$$

und für beliebiges $A \in \mathfrak{A}$

$$\boxed{\int_A f\,d\mu := \int_A f\,d\mu^+ - \int_A f\,d\mu^-.}$$

Unter der Voraussetzung (8.1) wird durch

$$\nu(A) := \int_A f\,d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A},$$

ein endliches signiertes Maß ν definiert. $(\Omega_-(\mu), \Omega_+(\mu))$ sei eine Hahnsche Zerlegung für μ. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \int_A f\,d\mu^+ - \int_A f\,d\mu^- \\
&= \left(\int_A f^+\,d\mu^+ + \int_A f^-\,d\mu^-\right) - \left(\int_A f^-\,d\mu^+ + \int_A f^+\,d\mu^-\right).
\end{aligned}$$

Das Maß in der ersten Klammer auf der rechten Seite ist auf

$$\Omega_+(\nu) := \bigl(\Omega_+(\mu) \cap \{f \geq 0\}\bigr) \cup \bigl(\Omega_-(\mu) \cap \{f < 0\}\bigr)$$

konzentriert (d.h. das Komplement ist eine Nullmenge), und das Maß in der zweiten Klammer ist auf

$$\Omega_-(\nu) := \bigl(\Omega_+(\mu) \cap \{f < 0\}\bigr) \cup \bigl(\Omega_-(\mu) \cap \{f \geq 0\}\bigr)$$

konzentriert. Da außerdem $\Omega_+(\nu)$ und $\Omega_-(\nu)$ eine meßbare Zerlegung von Ω bilden, ist $(\Omega_-(\nu), \Omega_+(\nu))$ eine Hahnsche Zerlegung des signierten Maßes ν. Hieraus folgt

$$\nu^+(A) = \int_A f^+ \, d\mu^+ + \int_A f^- \, d\mu^-, \qquad A \in \mathfrak{A},$$

und

$$\nu^-(A) = \int_A f^- \, d\mu^+ + \int_A f^+ \, d\mu^-, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Damit erhalten wir

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \, d|\mu|, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Insbesondere gilt

$$\|\,\nu\,\| = \int |f| \, d|\mu|$$

und

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d|\mu| \qquad \textit{(Dreiecksungleichung).}$$

Kapitel 9

Absolutstetigkeit und Singularität von Maßen

Definition 9.1. Es seien μ und ν Maße auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Das Maß ν heißt *absolutstetig* bezüglich μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), falls jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist:

$$A \in \mathfrak{A},\ \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

Im Abschnitt 10.2 werden wir sehen, wie der Begriff der Absolutstetigkeit von Maßen mit dem Begriff der Stetigkeit von Funktionen zusammenhängt. Die nächste Behauptung läßt bereits eine Ähnlichkeit mit der „Stetigkeit" erahnen.

Behauptung 9.2. *Gegeben seien Maße μ und ν auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Das Maß ν sei* endlich. *Unter dieser Voraussetzung ist ν genau dann absolutstetig zu μ, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ findet man ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ stets $\nu(A) < \varepsilon$ folgt.*

Beweis. Wir beweisen als erstes die Implikation „$\Rightarrow$". Wir gehen indirekt vor. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ mit

$$\mu(A_n) < 2^{-n} \quad \text{und} \quad \nu(A_n) \geq \varepsilon.$$

Wir setzen

$$A := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

Dann folgt

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right) \leq \sum_{n\geq m} \mu(A_n) < \sum_{n\geq m} 2^{-n}.$$

Da der Reihenrest auf der rechten Seite für $m \to \infty$ gegen Null konvergiert, erhalten wir $\mu(A) = 0$. Da ν endlich ist, gilt

$$\nu(A) = \nu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \varepsilon$$

(*Übungsaufgabe*). Also ist einerseits $\mu(A) = 0$ und andererseits $\nu(A) \geq \varepsilon$ im Widerspruch zu $\nu \ll \mu$.

Der Beweis der Implikation „$\Leftarrow$" ist simpel: Aus $\mu(A) = 0$ folgt aufgrund unserer Voraussetzung $\nu(A) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und damit $\nu(A) = 0$. Also ist $\nu \ll \mu$. $\square$

Beispiel 9.3. Sei f eine nichtnegative meßbare numerische Funktion auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann ist das durch

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A},$$

definierte Maß ν absolutstetig bezüglich μ. Tatsächlich, aus $\mu(A) = 0$ folgt $\mathbb{1}_A f = 0$ μ-f.ü. und hieraus

$$\nu(A) = \int \mathbb{1}_A f\, d\mu = 0.$$

Beispiel 9.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum, dessen σ-Algebra $\mathfrak{A}$ alle einpunktigen Mengen enthalte. Dann sind für $x \neq y$ die Dirac-Maße δ_x und δ_y auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ nicht zueinander absolutstetig. D.h. es gilt weder $\delta_x \ll \delta_y$ noch $\delta_y \ll \delta_x$. Zum Beweis betrachte man die einpunktige Testmenge $A = \{x\}$ beziehungsweise $A = \{y\}$.

Der folgende fundamentale Satz zeigt, daß sich die absolutstetigen Maße alle durch die im Beispiel 9.3 gegebene Konstruktion charakterisieren lassen.

Theorem 9.5. *(Radon-Nikodym, 1930)*
Gegeben seien σ-endliche Maße μ und ν auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Das Maß ν ist genau dann absolutstetig bezüglich μ, wenn eine nichtnegative meßbare numerische Funktion f auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ existiert mit

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Die Funktion f ist μ-f.ü. eindeutig bestimmt und kann reellwertig gewählt werden.

Bezeichnung: Die Funktion f im Theorem 9.5 heißt *Radon-Nikodym-Ableitung* oder auch *Dichte* von ν bezüglich μ und wird mit $d\nu/d\mu$ bezeichnet.

Beweis des Theorems 9.5. Wir beschränken uns auf den Fall *endlicher* Maße μ und ν. Es ist nur die Implikation „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen. Die Umkehrung wurde bereits im Beispiel 9.3 betrachtet. Sei also $\nu \ll \mu$.

1^0 Wir führen das Funktionensystem

$$\mathcal{G} := \left\{ g \colon g \geq 0, \text{ meßbar, } \int_A g \, d\mu \leq \nu(A) \text{ für alle } A \in \mathfrak{A} \right\}$$

ein. Da $g \equiv 0$ zu $\mathcal{G}$ gehört, ist $\mathcal{G}$ nichtleer. Wir zeigen, daß mit zwei Funktionen g_1 und g_2 auch deren Maximum $g_1 \vee g_2$ zu $\mathcal{G}$ gehört. Dies ergibt sich aus der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\int_A (g_1 \vee g_2) \, d\mu &= \int_{A \cap \{g_1 \leq g_2\}} (g_1 \vee g_2) \, d\mu + \int_{A \cap \{g_1 > g_2\}} (g_1 \vee g_2) \, d\mu \\
&= \int_{A \cap \{g_1 \leq g_2\}} g_2 \, d\mu + \int_{A \cap \{g_1 > g_2\}} g_1 \, d\mu \\
&\leq \nu \left(A \cap \{g_1 \leq g_2\} \right) + \nu \left(A \cap \{g_1 > g_2\} \right) \\
&= \nu(A).
\end{aligned}$$

2^0 Wir zeigen, daß eine Funktion $f \in \mathcal{G}$ existiert mit

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu \colon g \in \mathcal{G} \right\} =: S.$$

Hierzu wählen wir eine Folge $(\tilde{g}_n)$ in $\mathcal{G}$ mit

$$\int \tilde{g}_n \, d\mu \to S$$

und setzen

$$g_n := \tilde{g}_1 \vee \cdots \vee \tilde{g}_n.$$

Die Funktionen g_n gehören zu $\mathcal{G}$ (Beweisschritt 1^0) und

$$g_n \uparrow f$$

für eine gewisse meßbare numerische Funktion $f \geq 0$. Aufgrund des Satzes über monotone Konvergenz (Theorem 5.10) und wegen $g_n \geq \tilde{g}_n$ erhalten wir

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\mu \geq \lim_{n \to \infty} \int \tilde{g}_n \, d\mu = S,$$

d.h.

$$\int f \, d\mu \geq S. \tag{9.1}$$

Andererseits folgt für beliebiges $A \in \mathfrak{A}$ wegen $\mathbb{1}_A\, g_n \uparrow \mathbb{1}_A\, f$ mit dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n\, d\mu.$$

Wegen $g_n \in \mathcal{G}$ sind die Integrale auf der rechten Seite durch $\nu(A)$ nach oben beschränkt, d.h.

$$\int_A f\, d\mu \leq \nu(A).$$

Also gehört f zu $\mathcal{G}$, und insbesondere ist

$$\int f\, d\mu \leq S. \tag{9.2}$$

Die Behauptung 2^0 folgt nun aus (9.1) und (9.2).

3^0 Als nächstes zeigen wir, daß für die Funktion f aus dem Beweisschritt 2^0

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A},$$

ist. Wir wissen bereits:

$$\nu_0(A) := \nu(A) - \int_A f\, d\mu \geq 0 \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Also ist ν_0 ein Maß auf $\mathfrak{A}$, und es bleibt nur $\nu_0(\Omega) = 0$ zu zeigen (woraus $\nu_0(A) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ folgt). Wir führen den Beweis indirekt, indem wir $\nu_0(\Omega) > 0$ annehmen. Da μ als endlich vorausgesetzt wurde, finden wir ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\nu_0(\Omega) > \varepsilon\mu(\Omega).$$

Sei (Ω_-, Ω_+) eine Hahnsche Zerlegung des signierten Maßes $\nu_0 - \varepsilon\mu$. Dann erhalten wir

$$\nu_0(A) \geq \nu_0(A \cap \Omega_+) \geq \varepsilon\mu(A \cap \Omega_+)$$

und folglich

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu + \nu_0(A) \geq \int_A f\, d\mu + \int_A \varepsilon \mathbb{1}_{\Omega_+}\, d\mu.$$

Also gehört $f + \varepsilon\mathbb{1}_{\Omega_+}$ zu $\mathcal{G}$. Wegen $\int f\, d\mu = S$ und der Definition von S muß deshalb auch $\int (f + \varepsilon\mathbb{1}_{\Omega_+})\, d\mu = S$ sein, woraus $\mu(\Omega_+) = 0$ folgt. Wegen $\nu \ll \mu$ impliziert dies $\nu(\Omega_+) = 0$ und $\nu_0(\Omega_+) = 0$. (Wir merken an, daß dies die einzige Stelle im Beweis ist, an der die Absolutstetigkeit des Maßes ν bezüglich μ benutzt wird.) Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu_0(\Omega) - \varepsilon\mu(\Omega) &= (\nu_0 - \varepsilon\mu)(\Omega_+) + (\nu_0 - \varepsilon\mu)(\Omega_-) \\ &= (\nu_0 - \varepsilon\mu)(\Omega_-) \leq 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Definition von ε.

4^0 Es ist noch die Einzigkeit der Radon-Nikodym-Ableitung nachzuweisen. Seien also f und g nichtnegative meßbare numerische Funktionen mit

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu < \infty \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}. \tag{9.3}$$

Es ist zu zeigen, daß hieraus $f = g$ μ-f.ü. folgt. Wählt man $A := \{f \geq g\}$, so erhält man

$$\int \mathbb{1}_{\{f\geq g\}}(f-g)\,d\mu = 0.$$

Mit der Behauptung 6.1 folgt $f \leq g$ μ-f.ü. Analog zeigt man $f \geq g$ μ-f.ü. □

Als nächstes beweisen wir zwei Rechenregeln für Radon-Nikodym-Ableitungen.

Theorem 9.6. *Es seien μ und ν zwei σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu \ll \mu$. Dann gilt für alle meßbaren numerischen Funktionen g auf $(\Omega, \mathfrak{A})$*

$$\int g\,d\nu = \int g\,\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu$$

im folgenden Sinne: Existiert eines der beiden Integrale, so existiert auch das andere, und beide sind gleich.

Beweisidee. Die Behauptung gilt für Indikatorfunktionen $g = \mathbb{1}_A$ $(A \in \mathfrak{A})$:

$$\int \mathbb{1}_A\,d\nu = \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu = \int \mathbb{1}_A\,\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu.$$

Hiervon ausgehend überlegt man sich schrittweise, daß die Behauptung für elementare Funktionen, nichtnegative meßbare Funktionen und schließlich im allgemeinen Fall gilt. □

Folgerung 9.7. *Gegeben seien σ-endliche Maße μ_1, μ_2, μ_3 auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\mu_3 \ll \mu_2$ und $\mu_2 \ll \mu_1$. Dann ist $\mu_3 \ll \mu_1$, und es gilt die Produktregel*

$$\frac{d\mu_3}{d\mu_1} = \frac{d\mu_3}{d\mu_2}\,\frac{d\mu_2}{d\mu_1}.$$

Genauer gesagt, für jede Version f der Radon-Nikodym-Ableitung $d\mu_2/d\mu_1$ und jede Version g der Radon-Nikodym-Ableitung $d\mu_3/d\mu_2$ ist $f\,g$ eine Version von $d\mu_3/d\mu_1$.

Beweis.

1^0 Aus $\mu_1(A) = 0$ folgt wegen $\mu_2 \ll \mu_1$ zunächst $\mu_2(A) = 0$. Wegen $\mu_3 \ll \mu_2$ impliziert dies $\mu_3(A) = 0$. Also ist $\mu_3 \ll \mu_1$.

2^0 Sei

$$\mu_2(A) = \int_A f\,d\mu_1 \quad \text{und} \quad \mu_3(A) = \int_A g\,d\mu_2$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$. Dann folgt mit dem Theorem 9.6

$$\mu_3(A) = \int_A g \, \frac{d\mu_2}{d\mu_1} \, d\mu_1 = \int_A g \, f \, d\mu_1 .$$

□

Man sagt, daß ein Maß μ auf einer Menge $A \in \mathfrak{A}$ *konzentriert* ist, falls $\mu(A^c) = 0$ (und damit $\mu(B) = 0$ für alle meßbaren $B \subseteq A^c$) gilt. Wir führen nun den Begriff der Singularität zweier Maße ein, der in gewisser Weise konträr zum Begriff der Absolutstetigkeit ist.

Definition 9.8. Gegeben seien Maße μ und ν auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Die Maße μ und ν heißen zueinander *singulär* (in Zeichen: $\mu \perp \nu$), falls μ und ν auf zueinander disjunkten meßbaren Mengen konzentriert sind (d.h. falls eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ existiert mit $\mu(A^c) = 0$ und $\nu(A) = 0$).

Beispiel 9.9. Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Mit μ bezeichnen wir ein *diskretes* Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, d.h. ein Maß, das in abzählbar vielen Punkten konzentriert ist:

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \delta_{x_n}$$

$(\alpha_n \geq 0,\ x_n \in \mathbb{R})$. Für die Menge $A := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ erhalten wir

$$\lambda(A) = \sum_n \lambda\left(\{x_n\}\right) = 0$$

und

$$\mu(A^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \delta_{x_n}(A^c) = 0.$$

Folglich ist $\mu \perp \lambda$.

Theorem 9.10. *(Lebesguescher Zerlegungssatz)*
Es seien μ und ν Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Das Maß ν sei σ-endlich. Dann existieren eindeutig bestimmte Maße ν_a und ν_s auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\nu_a \ll \mu$;

(ii) $\nu_s \perp \mu$;

(iii) $\nu_a + \nu_s = \nu$.

Die Zerlegung (iii) heißt *Lebesguesche Zerlegung* von ν in den *absolutstetigen Teil* ν_a und den *singulären Teil* ν_s bezüglich des Referenzmaßes μ.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall eines *endlichen* Maßes ν.

1^0 Konstruktion der Maße ν_a und ν_s:

$$\mathfrak{N}_\mu := \{A \in \mathfrak{A} \colon \mu(A) = 0\}$$

bezeichne das System aller μ-Nullmengen. Wir wählen eine Folge (A_n) in $\mathfrak{N}_\mu$ so, daß

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \sup\{\nu(A) \colon A \in \mathfrak{N}_\mu\} =: S$$

gilt und setzen

$$N := \bigcup_n A_n.$$

Dann ist $\mu(N) = 0$, d.h. $N \in \mathfrak{N}_\mu$, und $\nu(N) = S$. Wir definieren ν_a und ν_s wie folgt:

$$\nu_a(A) := \nu(A \cap N^{\mathrm{c}}), \quad \nu_s(A) := \nu(A \cap N), \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Offenbar ist $\nu_a + \nu_s = \nu$. Das Maß ν_s ist singulär zu μ, da μ auf N^{c} und ν_s auf N konzentriert sind. Die Absolutstetigkeit des Maßes ν_a bezüglich μ erhält man wie folgt. Aus $\mu(A) = 0$ folgt $A \cup N \in \mathfrak{N}_\mu$, d.h. $\mu(A \cup N) = 0$ und daher

$$\nu(A \cup N) \leq S = \nu(N).$$

Wegen der Endlichkeit von ν ist $\nu(A \cup N) = \nu(A) + \nu(N) - \nu(A \cap N)$. Setzt man dies in die obige Ungleichung ein, so ergibt sich

$$\nu_a(A) + \nu_s(A) = \nu(A) \leq \nu(A \cap N) = \nu_s(A)$$

und damit $\nu_a(A) = 0$. Dies beweist die Absolutstetigkeit von ν_a bezüglich μ.

2^0 Einzigkeit der Zerlegung $\nu = \nu_a + \nu_s$:
Seien

$$\nu_a + \nu_s = \tilde{\nu}_a + \tilde{\nu}_s \tag{9.4}$$

zwei derartige Zerlegungen, wobei ν_s und $\tilde{\nu}_s$ auf einer μ-Nullmenge N bzw. $\tilde{N}$ konzentriert sind. Hieraus folgt sofort, daß ν_s und $\tilde{\nu}_s$ auf der μ-Nullmenge $\hat{N} := N \cup \tilde{N}$ konzentriert sind. Unter Berücksichtigung von (9.4) erhält man für alle $A \in \mathfrak{A}$:

$$\tilde{\nu}_s(A) - \nu_s(A) = \tilde{\nu}_s(A \cap \hat{N}) - \nu_s(A \cap \hat{N}) = \nu_a(A \cap \hat{N}) - \tilde{\nu}_a(A \cap \hat{N}).$$

Wegen $\mu(A \cap \hat{N}) = 0$ und der Absolutstetigkeit von ν_a und $\tilde{\nu}_a$ bezüglich μ sind beide Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung gleich Null. Also ist $\tilde{\nu}_s(A) = \nu_s(A)$ und damit auch $\tilde{\nu}_a(A) = \nu_a(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. $\square$

Kapitel 10

Maße und Funktionen auf der reellen Achse

10.1. Signierte Maße und Funktionen von beschränkter Variation

Im Abschnitt 3.3 haben wir gesehen, daß eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und Verteilungsfunktionen besteht. Diese Zuordnung läßt sich ohne Schwierigkeiten auf *endliche* Maße auf der reellen Achse ausdehnen. Hierzu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$\mathfrak{M}_+$ Menge aller endlichen Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$;

Φ_+ Menge aller nichtfallenden rechtsstetigen und beschränkten Funktionen $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) \to 0$ für $x \to -\infty$.

Jedem Maß $\mu \in \mathfrak{M}_+$ ordnen wir die Funktion

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R},$$

zu (*Belegungsfunktion* des Maßes μ).

Behauptung 10.1. *Durch die Zuordnung $\mu \mapsto F_\mu$ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}_+$ auf Φ_+ definiert.*

Beweis. Analog zu Abschnitt 3.3. □

Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese Zuordnung auf *signierte* Maße zu erweitern. Wie wir später sehen werden, sind die zugeordneten Funktionen solche von *beschränkter Variation*.

Definition 10.2. Für eine beliebige reelle Funktion F und $a < b$ setzen wir

$$V_F[a,b] := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| : a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_r \leq b \right\}.$$

$V_F[a,b]$ heißt *Variation* der Funktion F auf dem Intervall $[a,b]$. Ist $V_F[a,b] < \infty$, so heißt F Funktion von *endlicher* (oder auch *beschränkter*) *Variation* auf $[a,b]$. Analog definiert man $V_F(-\infty,b]$ und $V_F(-\infty,\infty)$. Ist $V_F(-\infty,\infty) < \infty$, so heißt F von *endlicher* (*beschränkter*) *Variation*. In diesem Falle nennt man

$$V_F(x) := V_F(-\infty,x], \qquad x \in \mathbb{R},$$

Variation und $V_F(-\infty,\infty)$ *Totalvariation* von F.

Beispiel 10.3.

1. F sei nichtfallend. Dann ist für eine beliebige Zerlegung $-\infty < t_0 < t_1 < \cdots < t_r < \infty$

$$\sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| = F(t_r) - F(t_0),$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} V_F(-\infty,\infty) &= \sup\{F(t) - F(s) \colon -\infty < s < t < \infty\} \\ &= \lim_{t\to\infty} F(t) - \lim_{s\to-\infty} F(s). \end{aligned}$$

Daher ist eine solche Funktion genau dann von beschränkter Variation, wenn sie beschränkt ist. In diesem Falle ist

$$V_F(x) = F(x) - \lim_{s\to-\infty} F(s), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt die Implikation

$$F \in \Phi_+ \quad \Rightarrow \quad F \text{ von beschränkter Variation und } V_F = F.$$

2. a) Ist F von beschränkter Variation und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist auch αF von beschränkter Variation, und es gilt

$$V_{\alpha F} = |\alpha|\, V_F.$$

Tatsächlich,

$$\begin{aligned}
&V_{\alpha F}(-\infty,\infty)\\
&= \sup\left\{\sum_{k=1}^{r}|\alpha F(t_k)-\alpha F(t_{k-1})| :\ -\infty<t_0<t_1<\cdots<t_r<\infty\right\}\\
&= \sup\left\{|\alpha|\sum_{k=1}^{r}|F(t_k)-F(t_{k-1})| :\ -\infty<t_0<t_1<\cdots<t_r<\infty\right\}\\
&= |\alpha|\sup\left\{\sum_{k=1}^{r}|F(t_k)-F(t_{k-1})| :\ -\infty<t_0<t_1<\cdots<t_r<\infty\right\}\\
&= |\alpha|\, V_F(-\infty,\infty)<\infty.
\end{aligned}$$

Analog beweist man

$$V_{\alpha F}(x)=|\alpha|\,V_F(x), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

b) Sind F und G zwei Funktionen von beschränkter Variation, so ist auch $F+G$ von beschränkter Variation und

$$V_{F+G}\le V_F+V_G.$$

Zum Beweis sei $-\infty<t_0<t_1<\cdots<t_r<\infty$ eine beliebige Zerlegung der reellen Achse. Dann ergibt sich mit der Dreiecksungleichung und der Definition der Totalvariation

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{r}\big|(F+G)(t_k)-(F+G)(t_{k-1})\big|\\
&\quad\le \sum_{k=1}^{r}|F(t_k)-F(t_{k-1})|+\sum_{k=1}^{r}|G(t_k)-G(t_{k-1})|\\
&\quad\le V_F(-\infty,\infty)+V_G(-\infty,\infty),
\end{aligned}$$

woraus

$$V_{F+G}(-\infty,\infty)\le V_F(-\infty,\infty)+V_G(-\infty,\infty)<\infty$$

folgt. Analog zeigt man

$$V_{F+G}(x)\le V_F(x)+V_G(x), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation bildet somit einen linearen Raum.

3. Sei μ ein endliches signiertes Maß auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Dann ist

$$F_\mu(x):=\mu((-\infty,x]), \qquad x\in\mathbb{R},$$

eine Funktion von endlicher Variation. In der Tat,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r} |F_\mu(t_k) - F_\mu(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{r} |\mu((t_{k-1}, t_k])| \\ \leq \sum_{k=1}^{r} |\mu|((t_{k-1}, t_k]) &= |\mu|((t_0, t_r]) \leq |\mu|(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

woraus

$$V_{F_\mu}(-\infty, \infty) \leq |\mu|(\mathbb{R}) < \infty$$

folgt.

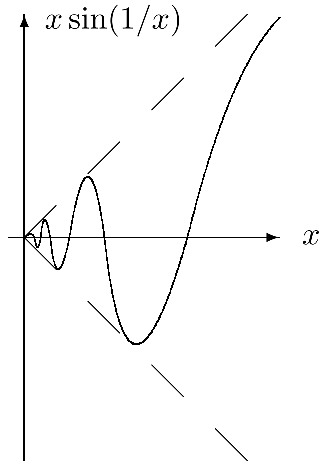
4. Die Funktion

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x\sin(1/x), & x \in (0,1], \end{cases}$$

ist stetig auf $[0,1]$, aber nicht von beschränkter Variation. Für die Zwischenpunkte

$$t_k := \frac{2}{k\pi}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

gilt nämlich



$$|F(t_k) - F(t_{k+1})| = |t_k \sin(1/t_k) - t_{k+1}\sin(1/t_{k+1})| \geq t_{k+1},$$

da entweder $\sin(1/t_k) = 0$ und $\sin(1/t_{k+1}) = \pm 1$ oder $\sin(1/t_k) = \pm 1$ und $\sin(1/t_{k+1}) = 0$ ist. Hiermit folgt

$$\begin{aligned} V_F[0,1] &\geq \sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k+1})| \geq \sum_{k=1}^{r} t_{k+1} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Da die Summe auf der rechten Seite für $r \to \infty$ gegen Unendlich konvergiert, erhalten wir $V_F[0,1] = \infty$.

Behauptung 10.4. *Für eine Funktion F von beschränkter Variation gilt:*

(i) *F ist beschränkt;*

(ii) $V_F(-\infty, b] = V_F(-\infty, a] + V_F[a,b]$ *für beliebige $a < b$ (*Additivität der Variation*).*

Beweis. Die Behauptung (i) folgt aus der für alle t geltenden Ungleichung

$$\infty > V_F(-\infty, \infty) \geq |F(t) - F(0)|\,.$$

Zum Beweis von (ii) fixieren wir $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Definition der Variationen $V_F(-\infty, a]$ und $V_F[a, b]$ folgt die Existenz von Zerlegungen

$$-\infty < t_0 < t_1 < \cdots < t_q \leq a \quad \text{und} \quad a \leq t_{q+1} < t_{q+2} < \cdots < t_r \leq b$$

mit

$$\sum_{k=1}^{q} |F(t_k) - F(t_{k-1})| > V_F(-\infty, a] - \frac{\varepsilon}{2}$$

beziehungsweise

$$\sum_{k=q+2}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| > V_F[a, b] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hiermit erhalten wir

$$V_F(-\infty, b] \geq \sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| > V_F(-\infty, a] + V_F[a, b] - \varepsilon,$$

und, da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann,

$$V_F(-\infty, b] \geq V_F(-\infty, a] + V_F[a, b].$$

Um die entgegengesetzte Ungleichung zu beweisen, wählen wir eine Zerlegung

$$-\infty < t_0 < \cdots < t_q = a < t_{q+1} < \cdots < t_r \leq b$$

des Intervalls $(-\infty, b]$ mit

$$\sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| > V_F(-\infty, b] - \varepsilon,$$

wobei o.B.d.A. angenommen wurde, daß a Zerlegungspunkt ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & V_F(-\infty, a] + V_F[a, b] \\ \geq\; & \sum_{k=1}^{q} |F(t_k) - F(t_{k-1})| + \sum_{k=q+1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| \\ >\; & V_F(-\infty, b] - \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h., da $\varepsilon > 0$ wiederum beliebig klein gewählt werden kann,

$$V_F(-\infty, a] + V_F[a, b] \geq V_F(-\infty, b].$$

□

Behauptung 10.5. *Für eine Funktion F von beschränkter Variation gilt:*

(i) V_F *ist nichtfallend und beschränkt;*

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} V_F(x) = 0$*;*

(iii) ist F *rechtsstetig, so ist auch* V_F *rechtsstetig.*

Beweis.

(i) Die Behauptung 10.4 liefert für $b > a$:

$$V_F(b) = V_F(a) + V_F[a,b] \geq V_F(a).$$

Also ist V_F nichtfallend. Die Beschränktheit dieser Funktion folgt aus

$$0 \leq V_F(x) = V_F(-\infty, x] \leq V_F(-\infty, \infty) < \infty.$$

(ii) Wir fixieren $\varepsilon > 0$ beliebig und wählen Punkte $-\infty < t_0 < t_1 < \cdots < t_r \leq 0$ so, daß

$$V_F(-\infty, 0] - \varepsilon < \sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| \tag{10.1}$$

gilt. Für beliebiges $x < t_0$ erhalten wir mit (10.1) und Behauptung 10.4

$$V_F(-\infty, 0] - \varepsilon < V_F[x, 0] = V_F(-\infty, 0] - V_F(-\infty, x],$$

d.h.

$$0 \leq V_F(-\infty, x] < \varepsilon \qquad \text{für alle } x < t_0.$$

(iii) Wir wählen $\varepsilon > 0$ und $x < y$ beliebig. Wir finden eine Zerlegung

$$x \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_r \leq y$$

des Intervalls $[x, y]$ mit

$$\sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| > V_F[x, y] - \varepsilon. \tag{10.2}$$

Da F rechtsstetig ist, können wir hierbei o.B.d.A. $t_0 > x$ annehmen, so daß aus (10.2) für $\tilde{x} \in [x, t_0]$

$$V_F[\tilde{x}, y] > V_F[x, y] - \varepsilon$$

folgt. Wegen der Additivität der Variation (Behauptung 10.4) ist dies gleichbedeutend mit

$$V_F(-\infty, y] - V_F(-\infty, \tilde{x}] > V_F(-\infty, y] - V_F(-\infty, x] - \varepsilon.$$

Also ist

$$V_F(-\infty, x] \leq V_F(-\infty, \tilde{x}] < V_F(-\infty, x] + \varepsilon$$

für alle $\tilde{x} \in [x, t_0]$. Dies beweist die Rechtsstetigkeit von $V_F(x) = V_F(-\infty, x]$. □

Die folgende Behauptung liefert eine einfache Charakterisierung der Funktionen von beschränkter Variation.

Behauptung 10.6. *Eine reelle Funktion ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie sich als Differenz zweier beschränkter monoton nichtfallender Funktionen darstellen läßt.*

Beweis. Es ist nur die Richtung „⇒“ zu beweisen. Sei F von beschränkter Variation. Wir setzen

$$F_+ := \frac{1}{2}(V_F + F), \quad F_- := \frac{1}{2}(V_F - F).$$

Offenbar ist $F = F_+ - F_-$. Es bleibt also nur nachzuweisen, daß die Funktionen F_+ und F_- nichtfallend und beschränkt sind. Für $b > a$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F_+(b) - F_+(a) &= \frac{1}{2}\big(V_F[a,b] + F(b) - F(a)\big) \\ &\geq \frac{1}{2}\big(V_F[a,b] - |F(b) - F(a)|\,\big) \geq 0, \end{aligned}$$

d.h. F_+ ist nichtfallend. Da F von beschränkter Variation ist, sind V_F und F beschränkt (Behauptungen 10.4 und 10.5). Also ist auch F_+ beschränkt. Die entsprechenden Aussagen für F_- beweist man analog. □

Bemerkung 10.7. Zusätzlich zur obigen Behauptung gilt:

$$F \text{ rechtsstetig} \quad \Rightarrow \quad F_+,\ F_- \text{ rechtsstetig},$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} F_\pm(x) = 0$$

(siehe Behauptung 10.5).

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $\mathfrak{M}$ Menge aller endlichen signierten Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$;
- Φ Menge aller rechtsstetigen Funktionen F von beschränkter Variation mit $F(x) \to 0$ für $x \to -\infty$.

Für $\mu \in \mathfrak{M}$ setzen wir

$$F_\mu(x) := \mu\left((-\infty, x]\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wir nennen F_μ *Belegungsfunktion* des signierten Maßes μ.

Theorem 10.8. *Die Zuordnung $\mu \mapsto F_\mu$ definiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf Φ.*

Beweis. Es ist folgendes zu zeigen:

(i) $F_\mu \in \Phi$ für alle $\mu \in \mathfrak{M}$;

(ii) $F_\mu = F_\nu \Rightarrow \mu = \nu \quad (\mu, \nu \in \mathfrak{M})$;

(iii) zu jedem $F \in \Phi$ existiert ein $\mu \in \mathfrak{M}$ mit $F = F_\mu$.

Wir benutzen, daß die Behauptung für $\mathfrak{M}_+$ und Φ_+ anstelle von $\mathfrak{M}$ und Φ gilt (Behauptung 10.1). Zum Beweis von (i) sei $\mu = \mu^+ - \mu^-$ die Jordansche Zerlegung von $\mu \in \mathfrak{M}$. Dann gilt $F_\mu = F_{\mu^+} - F_{\mu^-}$. Wegen μ^+, $\mu^- \in \mathfrak{M}_+$ gehören F_{μ^+} und F_{μ^-} zu Φ_+, d.h. diese Funktionen sind nichtfallend, rechtsstetig und beschränkt und

$$\lim_{x \to -\infty} F_{\mu^+}(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} F_{\mu^-}(x) = 0.$$

Insbesondere sind F_{μ^+} und F_{μ^-} von beschränkter Variation. Damit ist auch F_μ von beschränkter Variation, rechtsstetig und

$$\lim_{x \to -\infty} F_\mu(x) = 0.$$

Mit anderen Worten, F_μ gehört zu Φ.

Zum Beweis von (ii) sei $F_\mu = F_\nu$, d.h.

$$\mu\left((-\infty, x]\right) = \nu\left((-\infty, x]\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Unter Benutzung der Jordanschen Zerlegungen $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $\nu = \nu^+ - \nu^-$ der signierten Maße μ und ν folgt hieraus

$$(\mu^+ + \nu^-)\left((-\infty, x]\right) = (\nu^+ + \mu^-)\left((-\infty, x]\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$F_{\mu^+ + \nu^-} = F_{\nu^+ + \mu^-}.$$

Da $\mu^+ + \nu^-$ und $\nu^+ + \mu^-$ nichtnegative endliche Maße sind, folgt hieraus

$$\mu^+ + \nu^- = \nu^+ + \mu^-,$$

d.h.

$$\mu = \nu.$$

Zum Beweis von (iii) sei $F \in \Phi$ beliebig gewählt. Es existieren Funktionen $F_1, F_2 \in \Phi_+$ mit $F = F_1 - F_2$ (Behauptung 10.6 und Bemerkung 10.7). Außerdem finden wir Maße $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_+$ mit

$$F_{\mu_1} = F_1 \text{ und } F_{\mu_2} = F_2.$$

Für $\mu := \mu_1 - \mu_2$ gilt dann

$$F_\mu = F_{\mu_1} - F_{\mu_2} = F_1 - F_2 = F.$$

□

Behauptung 10.9. *Sei $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ die zugehörige Jordansche Zerlegung und $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Dann gilt*

$$F_{\mu^+} = \frac{1}{2}\left(V_{F_\mu} + F_\mu\right), \quad F_{\mu^-} = \frac{1}{2}\left(V_{F_\mu} - F_\mu\right)$$

und

$$F_{|\mu|} = V_{F_\mu}.$$

Beweis. Wegen

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

ist im wesentlichen nur

$$F_{|\mu|} = V_{F_\mu}$$

zu zeigen. Der (nichttriviale) Beweis wird dem Leser überlassen. □

10.2. Absolutstetige Maße und Funktionen

Analog zum Lebesgueschen Zerlegungssatz für Maße (Theorem 9.10) läßt sich jedes endliche signierte Maß auf der reellen Achse in einen absolutstetigen und einen singulären Anteil bezüglich des Lebesgue-Maßes zerlegen. Andererseits wissen wir aus dem vorangegangenen Abschnitt, daß jedem endlichen signierten Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ in umkehrbar eindeutiger Weise eine Funktion von beschränkter Variation (mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften) zugeordnet werden kann, die wir Belegungsfunktion nennen. In diesem Zusammenhang entsteht die Frage, wie absolutstetige und singuläre Maße in Termini der zugeordneten Belegungsfunktion charakterisiert werden können. Wir wollen zunächst den Begriff der Absolutstetigkeit diesbezüglich näher untersuchen. Die vollständige Antwort auf die obigen Fragen wird dann im Abschnitt 10.4 gegeben.

Definition 10.10. Eine reelle Funktion F heißt *absolutstetig*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, daß für alle endlichen Folgen paarweise disjunkter offener Intervalle $(s_1, t_1), \ldots, (s_r, t_r)$ die folgende Implikation gilt:

$$\sum_{k=1}^{r}(t_k - s_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{r}|F(t_k) - F(s_k)| < \varepsilon.$$

Beispiel 10.11.

1. Jede absolutstetige Funktion ist gleichmäßig stetig. (Man betrachte in der obigen Definition ein einzelnes Intervall (a, b).)

2. Jede absolutstetige Funktion ist von endlicher Variation auf jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall (jedoch i.a. nicht auf $\mathbb{R}$; man betrachte z.B. $F(x) = x$). Zum Beweis sei F absolutstetig und $[a, b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Wir finden eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß folgendes gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{r} (t_k - s_k) \leq \delta \\ (s_k, t_k) \quad \text{paarweise disjunkt} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(s_k)| \leq 1.$$

Hieraus folgt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & V_F[x, x+\delta] \\ & \quad = \quad \sup\left\{\sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(t_{k-1})| : x \leq t_0 < t_1 \cdots < t_r \leq x + \delta\right\} \\ & \quad \leq \quad 1, \end{aligned}$$

da die summarische Länge der Intervalle $(t_0, t_1), \ldots, (t_{r-1}, t_r)$ kleiner oder gleich δ ist. Wählen wir nun die natürliche Zahl m so, daß

$$a + m\delta < b \leq a + (m+1)\delta$$

ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V_F[a, b] &= V_F[a, a+\delta] + V_F[a+\delta, a+2\delta] + \cdots + V_F[a+m\delta, b] \\ &\leq m + 1 < \infty. \end{aligned}$$

Also ist F von beschränkter Variation auf $[a, b]$.

3. Jede Lipschitz stetige reelle Funktion ist absolutstetig. Sei F Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante L:

$$|F(x) - F(y)| \leq L\,|x - y|\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und beliebige disjunkte offene Intervalle $(s_1, t_1), \ldots, (s_r, t_r)$:

$$\sum_{k=1}^{r} |F(t_k) - F(s_k)| \leq L \sum_{k=1}^{r} (t_k - s_k) < \varepsilon,$$

falls

$$\sum_{k=1}^{r} (t_k - s_k) < \delta$$

ist mit $\delta := \varepsilon / L$.

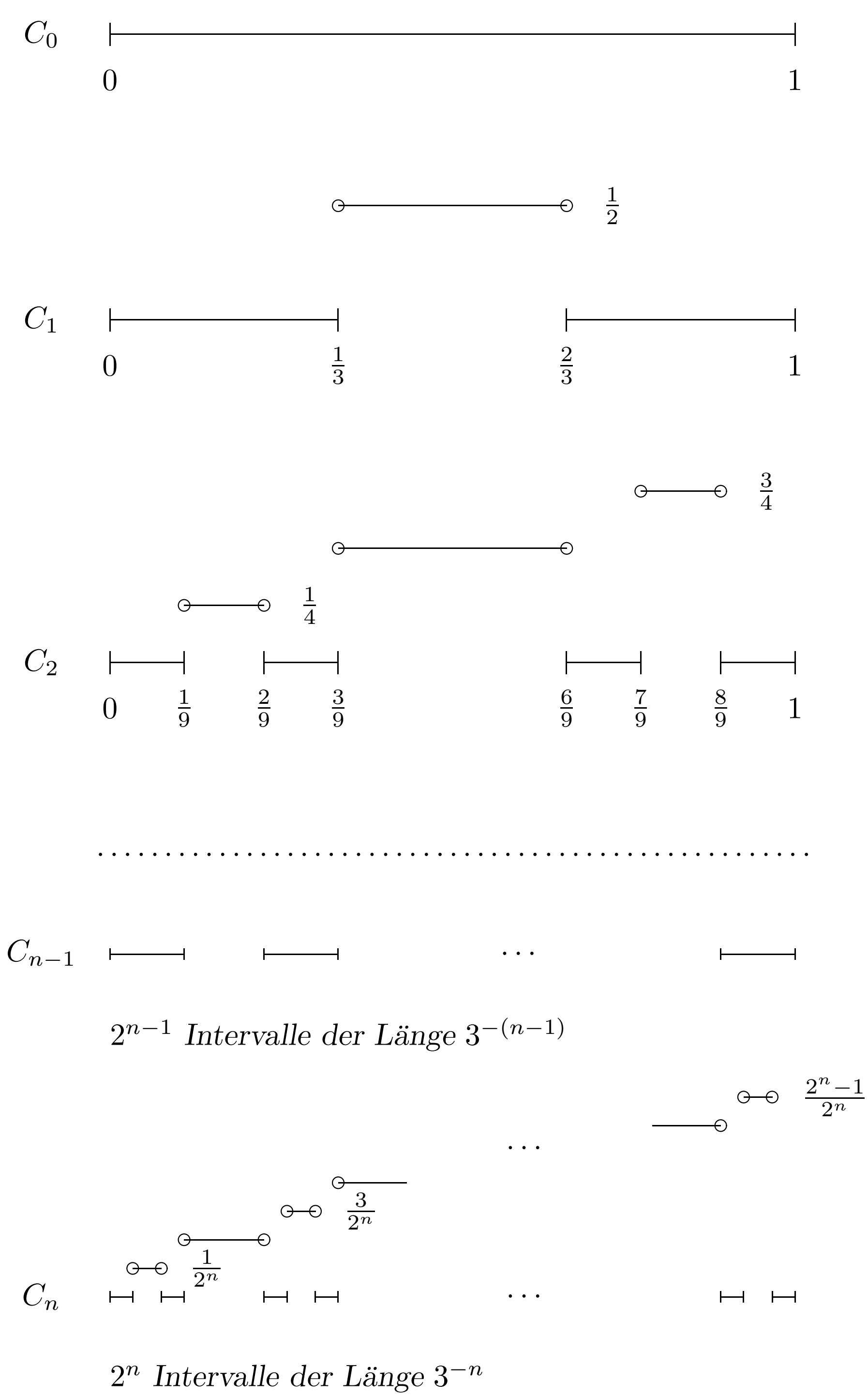
4. Es existieren gleichmäßig stetige Funktionen von beschränkter Variation, die nicht absolutstetig sind. Hierzu betrachten wir die *Cantorsche Funktion* $F\colon [0,1] \to [0,1]$. Es sei

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

die Cantorsche Menge. Wir definieren F zunächst sukzessive auf den Komplementen der Mengen C_n. Die Menge C_1 entsteht aus $C_0 = [0,1]$, indem wir das innere offene Drittel $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ herausnehmen. Auf $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ setzen wir $F = 2^{-1}$. Die Menge C_2 entsteht aus $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, indem wir aus $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ und $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ jeweils das innere offene Drittel $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ beziehungsweise $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ herausschneiden. Auf $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ setzen wir $F = 2^{-2}$ und auf $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ wird $F = 3 \cdot 2^{-2}$ gesetzt. Allgemein gehen wir beim Übergang von C_{n-1} zu C_n wie folgt vor. Die Menge C_{n-1} besteht aus 2^{n-1} Intervallen der Länge $3^{-(n-1)}$. Die Menge C_n erhalten wir, indem wir aus jedem dieser Intervalle das innere offene Drittel (der Länge 3^{-n}) herausnehmen. Auf diesen herausgenommenen Intervallen setzen wir F in ansteigender Reihenfolge gleich

$$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Damit ist F auf $[0,1] \setminus C$ definiert und dort nichtfallend:



Wir setzen F auf $[0,1]$ fort, indem wir $F(0) := 0$ und

$$F(x) := \sup\{F(t)\colon t < x,\, t \in [0,1] \setminus C\} \qquad \text{für } x \in C \setminus \{0\}$$

setzen.

Die so definierte Cantorsche Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) F ist nichtfallend, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$;

(ii) F ist gleichmäßig stetig;

(iii) F ist *nicht* absolutstetig.

Die Behauptung (i) ist klar. Wegen der Monotonie von F ist zum Beweis von (ii) nur zu zeigen, daß kein $x \in [0,1]$ mit $F(x+0) - F(x-0) > 0$ existiert. Für $x \notin C$ ist F in einer Umgebung von x konstant und damit $F(x+0) = F(x-0)$. Sei nun $x \in C$, d.h. $x \in C_n$ für alle n. Für jedes n gehört x zu einem Intervall $[a_n, b_n] \subseteq C_n$ der Länge $b_n - a_n = 3^{-n}$, und

$$F(b_n + 0) - F(a_n - 0) = \frac{1}{2^n}.$$

Durch Grenzübergang für $n \to \infty$ folgt hieraus

$$F(x+0) - F(x-0) = 0.$$

Bleibt nur zu zeigen, daß F nicht absolutstetig ist. Die Menge C_n zerfällt in 2^n abgeschlossene Intervalle der Länge 3^{-n}. Jedes dieser Intervalle überdecken wir durch ein offenes Intervall der Länge $< 3^{-(n-1)}$ derart, daß sich die so konstruierten Intervalle nicht überschneiden:

$\left(s_1^{(n)}, t_1^{(n)}\right), \ldots, \left(s_r^{(n)}, t_r^{(n)}\right)$ sind also $r = r_n = 2^n$ paarweise disjunkte offene Intervalle der Länge $< 3^{-(n-1)}$. Deshalb gilt

$$\sum_{k=1}^{r_n} \left(t_k^{(n)} - s_k^{(n)}\right) < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Wäre F absolutstetig, so müßte auch

$$\sum_{k=1}^{r_n} \left| F\left(t_k^{(n)}\right) - F\left(s_k^{(n)}\right) \right|$$

gegen Null konvergieren. Jeder der Summanden ist aber gleich 2^{-n}, so daß die Summe gleich 1 ist.

Behauptung 10.12. *Ist F absolutstetig und von beschränkter Variation, so ist auch V_F absolutstetig.*

Beweis. Wir fixieren $\varepsilon > 0$ beliebig und wählen $\delta > 0$ so, daß die folgende Implikation gilt:

$$\left.\begin{array}{l}(s_1,t_1),\ldots,(s_r,t_r)\\ \text{paarweise disjunkt}\\ \sum\limits_{k=1}^{r}(t_k-s_k)<\delta\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{k=1}^{r}|F(t_k)-F(s_k)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.3}$$

Wir wollen hieraus auf die Gültigkeit der Implikation

$$\left.\begin{array}{l}(s_1,t_1),\ldots,(s_r,t_r)\\ \text{paarweise disjunkt}\\ \sum\limits_{k=1}^{r}(t_k-s_k)<\delta\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{k=1}^{r}|V_F(t_k)-V_F(s_k)|<\varepsilon \tag{10.4}$$

schließen.

Seien also $(s_1,t_1),\ldots,(s_r,t_r)$ paarweise disjunkte offene Intervalle mit

$$\sum_{k=1}^{r}(t_k-s_k)<\delta. \tag{10.5}$$

Zu jedem $k\in\{1,\ldots,r\}$ existiert eine Zerlegung

$$s_k\le u_0^{(k)}<u_1^{(k)}<\cdots<u_{r_k}^{(k)}\le t_k$$

mit

$$V_F(t_k)-V_F(s_k)=V_F[s_k,t_k]<\sum_{j=1}^{r_k}\left|F\left(u_j^{(k)}\right)-F\left(u_{j-1}^{(k)}\right)\right|+\frac{\varepsilon}{2r}. \tag{10.6}$$

Die Intervalle $\left(u_{j-1}^{(k)},u_j^{(k)}\right)$ sind paarweise disjunkt, und ihre Gesamtlänge ist höchstens gleich der Summe in (10.5). Unter Benutzung von (10.6) und (10.3) (angewandt auf $\left(u_{j-1}^{(k)},u_j^{(k)}\right)$ anstelle von (s_k,t_k)) folgt schließlich die Behauptung (10.4):

$$\sum_{k=1}^{r}|V_F(t_k)-V_F(s_k)|<\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r_k}\left|F\left(u_j^{(k)}\right)-F\left(u_{j-1}^{(k)}\right)\right|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

□

Wir erweitern nun die Definition der Absolutstetigkeit von Maßen auf den Fall signierter Maße.

Definition 10.13. Gegeben seien ein Maß μ und ein signiertes Maß ν auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt ν *absolutstetig* bezüglich μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), wenn $|\nu|$ absolutstetig bezüglich μ ist.

Theorem 10.14. *(Satz von Radon-Nikodym für signierte Maße)*
Gegeben seien ein σ-endliches Maß μ und ein endliches signiertes Maß ν auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Das signierte Maß ν ist genau dann absolutstetig bezüglich μ, wenn eine μ-integrierbare Funktion f auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ existiert mit

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Die Funktion f ist μ-f.ü. eindeutig bestimmt, heißt *Radon-Nikodym-Ableitung* von ν bezüglich μ und wird mit $d\nu/d\mu$ bezeichnet.

Beweis. Mit Hilfe der Zerlegungen $\nu = \nu^+ - \nu^-$ und $f = f^+ - f^-$ läßt sich die Behauptung auf den Fall nichtnegativer Maße zurückführen. Die Einzelheiten werden dem Leser überlassen. □

Wir kommen nun zur Charakterisierung der Absolutstetigkeit von signierten Maßen auf der reellen Achse in Termini der zugehörigen Belegungsfunktionen. Wie früher bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Theorem 10.15. *Für beliebiges $\mu \in \mathfrak{M}$ gilt:*

$$\mu \ll \lambda \Leftrightarrow F_\mu \text{ absolutstetig.}$$

Beweis.
a) „$\Rightarrow$“: Sei $\mu \ll \lambda$, d.h. $|\mu| \ll \lambda$, und sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Wir finden ein $\delta > 0$ mit

$$\lambda(A) < \delta \Rightarrow |\mu|(A) < \varepsilon.$$

Seien nun $(s_1, t_1), \ldots, (s_r, t_r)$ paarweise disjunkte Intervalle mit

$$\sum_{k=1}^{r} (t_k - s_k) < \delta.$$

Dann folgt

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{r} (s_k, t_k]\right) < \delta$$

und damit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r} \left|F_\mu(t_k) - F_\mu(s_k)\right| &= \sum_{k=1}^{r} \left|\mu\left((s_k, t_k]\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} |\mu|\left((s_k, t_k]\right) = |\mu|\left(\bigcup_{k=1}^{r} (s_k, t_k]\right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist F_μ absolutstetig.

b) „$\Leftarrow$“: Aus der Absolutstetigkeit und Endlichkeit der Variation von F_μ folgt die Absolutstetigkeit von

$$F_{|\mu|} = V_{F\mu}$$

(Behauptung 10.12). Es ist zu zeigen, daß dies die Absolutstetigkeit von $|\mu|$ bezüglich λ impliziert. Hierzu fixieren wir $\varepsilon > 0$ beliebig und wählen $\delta > 0$ so, daß die folgende Implikation gilt:

$$\left.\begin{array}{l} (s_1,t_1),\ldots,(s_r,t_r) \\ \text{paarweise disjunkt} \\ \sum\limits_{k=1}^{r}(t_k - s_k) < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{r}\left|F_{|\mu|}(t_k) - F_{|\mu|}(s_k)\right| < \varepsilon. \tag{10.7}$$

Sei nun A eine beliebige Borelmenge mit $\lambda(A) < \delta$. Es ist $|\mu|(A) \le \varepsilon$ zu zeigen. Hierzu bemerken wir, daß eine offene Menge $G \supseteq A$ existiert mit $\lambda(G) < \delta$ (*Übungsaufgabe*; man benutze die Definition des äußeren Maßes $\lambda^*(A)$). Die offene Menge G läßt sich als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle (s_k, t_k) darstellen (*Übungsaufgabe*):

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(s_k, t_k).$$

Also ist für beliebiges n,

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - s_k) \le \lambda(G) < \delta,$$

woraus mit (10.7)

$$\begin{aligned} |\mu|\left(\bigcup_{k=1}^{n}(s_k,t_k)\right) &\le \sum_{k=1}^{n}|\mu|\left((s_k,t_k]\right) = \sum_{k=1}^{n}\left|F_{|\mu|}(t_k) - F_{|\mu|}(s_k)\right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

und für $n \to \infty$

$$|\mu|(A) \le |\mu|(G) \le \varepsilon$$

folgt. $\square$

Eine Kombination des letzten Theorems mit dem Satz von Radon-Nikodym und der umkehrbar eindeutigen Zuordnung $\mathfrak{M} \leftrightarrow \Phi$ liefert die nachstehende Charakterisierung von absolutstetigen Funktionen von beschränkter Variation.

Folgerung 10.16. *Sei F eine reelle Funktion. Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) F ist absolutstetig und von beschränkter Variation, und es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(ii) Es existiert eine Lebesgue-integrierbare Funktion f auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

10.3. Differentiation von Funktionen

Wir erinnern an den folgenden fundamentalen Satz aus der Analysis.

Theorem 10.17. *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)*
a) Für jede stetig differenzierbare reelle Funktion F auf $[a, b]$ gilt

$$F(x) = F(a) + \int_{a}^{x} F'(y)\, dy, \qquad x \in [a, b].$$

b) Für jede stetige reelle Funktion f auf $[a, b]$ ist die Funktion

$$F(x) := \int_{a}^{x} f(y)\, dy, \qquad x \in [a, b],$$

stetig differenzierbar, und es gilt $F' = f$.

In diesem Abschnitt soll eine „natürlichere“ Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung im Rahmen der Maß- und Integrationstheorie gefunden werden. Insbesondere wird untersucht, ob dabei „stetig differenzierbar“ durch „Lebesgue-fast überall differenzierbar“ und „stetig“ durch „Lebesgue-integrierbar“ ersetzt werden kann. Ausgangspunkt hierfür ist das folgende Theorem.

Theorem 10.18. *(Lebesgue)*
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei nichtfallend. Dann ist F Lebesgue-f.ü. differenzierbar, und es existiert eine Borel-meßbare Funktion $f \geq 0$ mit

$$F'(x) = f(x) \qquad \textit{für Lebesgue-f.a. } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Vgl. D.L. Cohn [11], Theorem 6.3.3. □

Im folgenden bezeichne F' die (Lebesgue-f.ü. eindeutig bestimmte) Funktion f aus dem obigen Theorem.

Da sich jede Funktion von beschränkter Variation als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellen läßt (Behauptung 10.6), erhalten wir das folgende Resultat.

Folgerung 10.19. *Ist F von beschränkter Variation, so ist F Lebesgue-f.ü. differenzierbar und die Ableitung F' stimmt Lebesgue-f.ü. mit einer Borel-meßbaren Funktion überein.*

Behauptung 10.20. *Für $F \in \Phi_+$ und $a < b$ gilt*

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leq F(b) - F(a)$$

und

$$\int_{-\infty}^b F'(x)\,dx \leq F(b).$$

Beweis. Da F Borel-meßbar ist, ist auch

$$G(x) := \liminf_{n\to\infty} n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right]$$

eine Borel-meßbare numerische Funktion. Außerdem gilt

$$G = F' \geq 0 \qquad \text{Lebesgue-f.ü.}$$

Mit dem Lemma von Fatou (Theorem 5.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x)\,dx &= \int_a^b G(x)\,dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right]\,dx. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} &\int_a^b n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right]\,dx \\ &\quad = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - n\int_a^b F(x)\,dx \\ &\quad = n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,dx \\ &\quad \leq F\left(b + \frac{1}{n}\right) - F(a). \end{aligned} \tag{10.9}$$

Hierbei wurde die Monotonie von F ausgenutzt. Durch Kombination von (10.8) und (10.9) erhalten wir wegen der Rechtsstetigkeit von F schließlich

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty}\left[F\left(b + \frac{1}{n}\right) - F(a)\right] = F(b) - F(a).$$

Die zweite Ungleichung der Behauptung erhält man aus der ersten durch Grenzübergang für $a \to -\infty$. $\square$

Beispiel 10.21. Seien

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

die Cantorsche Menge und F die Cantorsche Funktion auf $[0,1]$ (siehe Beispiel 10.11, 4). Ist $x \in [0,1] \setminus C$, so folgt $x \notin C_n$ für ein n, und F ist in einer Umgebung von x konstant. Für solche x ist daher $F'(x) = 0$. Da

$$\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

ist, folgt hieraus

$$F' = 0 \qquad \text{Lebesgue-f.ü. auf } [0,1].$$

Somit gilt

$$\int_0^1 F'(x)\,dx = 0 < F(1) - F(0).$$

Dieses Beispiel zeigt, daß Funktionen F existieren, die stetig und von beschränkter Variation sind, für die aber in der letzten Behauptung keine Gleichheit gilt.

Die folgenden Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung führen wir ebenfalls ohne Beweis an.

Theorem 10.22.

a) Für eine Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) F ist absolutstetig;

(ii) F ist Lebesgue-f.ü. auf $[a,b]$ differenzierbar, F' ist Lebesgue-integrierbar auf $[a,b]$ und

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(y)\,dy \qquad \textit{für alle } x \in [a,b].$$

b) Für eine Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) F ist absolutstetig, von beschränkter Variation und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;

(ii) F ist Lebesgue-f.ü. auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, F' ist Lebesgue-integrierbar und

$$F(x) = \int_{-\infty}^x F'(y)\,dy \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Theorem 10.23.
a) Sei f eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ und

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy, \qquad x \in [a,b].$$

Dann ist F absolutstetig auf $[a,b]$ und

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für Lebesgue-f.a. } x \in [a,b].$$

b) Sei f eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ und

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist F absolutstetig, von beschränkter Variation, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für Lebesgue-f.a. } x \in \mathbb{R}.$$

Literatur:

Eine ausführliche Darstellung der in diesem Abschnitt behandelten Thematik findet man in I.P. Natanson [37] und D.L. Cohn [11].

10.4. Zerlegung von Funktionen von beschränkter Variation

Nach der Betrachtung absolutstetiger Funktionen von beschränkter Variation wollen wir in diesem Abschnitt die Klassifikation der Funktionen von beschränkter Variation fortsetzen. Angestrebt wird ein Zerlegungssatz, der in etwa der Zerlegung von Maßen in ihren absolutstetigen und singulären Anteil entspricht.

Definition 10.24. Eine Funktion $F \in \Phi$ heißt *diskret*, falls höchstens abzählbar viele Punkte $x_n \in \mathbb{R}$ und zugehörige Zahlen $h_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum |h_n| < \infty$ existieren, so daß F die Darstellung

$$F(x) = \sum_{n:\, x_n \le x} h_n, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{10.10}$$

besitzt.

Bemerkung 10.25. Für beliebige Folgen reeller Zahlen (x_n) und (h_n) mit

$$\sum |h_n| < \infty$$

gehört die durch (10.10) definierte Funktion F zu Φ, und es gilt

$$V_F(x) = \sum_{n\colon x_n \le x} |h_n|, \quad V_F(-\infty, \infty) = \sum_n |h_n|.$$

Die Funktion F ist Belegungsfunktion des durch

$$\mu(A) = \sum_{n\colon x_n \in A} h_n, \qquad A \in \mathfrak{B},$$

definierten endlichen signierten Maßes μ, das man mit Hilfe von Dirac-Maßen in der Form

$$\mu = \sum_n h_n\, \delta_{x_n}$$

schreiben kann.

Definition 10.26. $F \in \Phi$ heißt *singulärstetig*, falls F stetig ist und $F'(x) = 0$ für Lebesgue-f.a. x gilt.

Beispiel 10.27. Die Cantorsche Funktion ist singulärstetig auf $[0,1]$, siehe Beispiel 10.21.

Wir erinnern daran, daß Φ die Menge aller rechtsstetigen Funktionen von beschränkter Variation ist, die in $-\infty$ verschwinden. Die Menge Φ bildet einen linearen Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Wir führen die folgenden linearen Unterräume von Φ ein:

$$\begin{aligned} \Phi^d &:= \{F \in \Phi\colon F \text{ diskret}\}; \\ \Phi^s &:= \{F \in \Phi\colon F \text{ stetig}\}; \\ \Phi^{as} &:= \{F \in \Phi\colon F \text{ absolutstetig}\}; \\ \Phi^{ss} &:= \{F \in \Phi\colon F \text{ singulärstetig}\}. \end{aligned}$$

Behauptung 10.28. *$\Phi = \Phi^d \oplus \Phi^s$, d.h. zu jeder Funktion $F \in \Phi$ findet man eindeutig bestimmte Funktionen $F_d \in \Phi^d$ und $F_s \in \Phi^s$ mit*

$$F = F_d + F_s.$$

(Zerlegung einer Funktion von beschränkter Variation in ihren diskreten und ihren stetigen Anteil.)

Beweis. Sei $F \in \Phi$ beliebig fixiert.

a) *Existenz der Zerlegung.* Da jede monotone Funktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat (*Übungsaufgabe*) und F die Differenz zweier monotoner Funktionen ist, hat auch F höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen x_n. Mit

$$h_n := F(x_n) - F(x_n - 0)$$

bezeichnen wir die Sprunghöhe von F im Punkte x_n. (Die Funktion F ist rechtsstetig, d.h. $F(x_n) = F(x_n + 0)$. Die Existenz des linksseitigen Grenzwertes $F(x_n - 0)$ folgt wiederum aus der Tatsache, daß F Differenz zweier monotoner Funktionen ist.) Unter Benutzung der Definition der Variation einer Funktion erhält man

$$\sum_n |h_n| \leq V_F(-\infty, \infty) < \infty.$$

Wir setzen

$$F_d(x) := \sum_{n:\, x_n \leq x} h_n,$$

$x \in \mathbb{R}$, und

$$F_s := F - F_d.$$

Die Funktion F_d gehört offensichtlich zu Φ^d. Da F und F_d rechtsstetig sind, ist auch F_s rechtsstetig. Um zu beweisen, daß F_s zu Φ^s gehört, ist nachzuweisen, daß F_s linksstetig ist. Hierzu benutzen wir die Tatsache, daß F_d Belegungsfunktion des endlichen signierten Maßes

$$\mu_d(A) := \sum_{n:\, x_n \in A} h_n, \qquad A \in \mathfrak{B},$$

ist. Da μ_d (als Differenz zweier endlicher Maße) stetig bezüglich monotoner Mengenlimites ist, erhalten wir für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_s(x) - F_s(x-0) &= \lim_{\delta \downarrow 0} [F_s(x) - F_s(x-\delta)] \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \left\{ F(x) - F(x-\delta) - \mu_d((x-\delta, x]) \right\} \\ &= F(x) - F(x-0) - \mu_d(\{x\}) = 0. \end{aligned}$$

b) *Einzigkeit der Zerlegung.* Es seien

$$F = F_d + F_s = \tilde{F}_d + \tilde{F}_s$$

zwei solche Zerlegungen. Dann ist

$$F_d - \tilde{F}_d = \tilde{F}_s - F_s.$$

Die linke Seite ist diskret, die rechte stetig. Eine Funktion, die gleichzeitig diskret und stetig ist, muß aber identisch verschwinden. Deshalb ist $F_d = \tilde{F}_d$ und $F_s = \tilde{F}_s$. $\square$

Behauptung 10.29. *$\Phi^s = \Phi^{as} \oplus \Phi^{ss}$, d.h. zu jeder Funktion $F \in \Phi^s$ findet man eindeutig bestimmte Funktionen $F_{as} \in \Phi^{as}$ und $F_{ss} \in \Phi^{ss}$ mit*

$$F = F_{as} + F_{ss}.$$

(Zerlegung einer stetigen Funktion von beschränkter Variation in ihren absolutstetigen und ihren singulärstetigen Anteil.)

Beweis. Sei F eine beliebige Funktion aus Φ^s.

a) *Existenz der Zerlegung.* Die Funktion F ist Differenz zweier nichtfallender *stetiger* beschränkter Funktionen, die im Punkt $-\infty$ verschwinden. (Aus der Stetigkeit von F folgt analog zur Behauptung 10.5, (iii) die Stetigkeit von V_F und damit auch die Stetigkeit von $F_\pm = \frac{1}{2}(V_F \pm F)$, und der Rest ist aus dem Beweis der Behauptung 10.6 ersichtlich.) Wir nehmen deshalb o.B.d.A. an, daß F selbst nichtfallend ist. Wir betrachten

$$F_{as}(x) := \int_{-\infty}^{x} F'(y)\,dy \le F(x) \tag{10.11}$$

(siehe Behauptung 10.20). Da $F'(y) \ge 0$ ist (Lebesgue-f.ü.), ist F_{as} nichtnegativ und nichtfallend. Aus der Beschränktheit von F folgt die Lebesgue-Integrierbarkeit von F' und die Beschränktheit von F_{as}. Die Absolutstetigkeit von F_{as} läßt sich aus der Absolutstetigkeit des endlichen Maßes

$$\mu(A) := \int_A F'(y)\,dy, \qquad A \in \mathfrak{B},$$

bezüglich des Lebesgue-Maßes ableiten (siehe Theorem 10.15). Somit gehört F_{as} zu Φ^{as}. Es bleibt zu zeigen, daß die Funktion

$$F_{ss} := F - F_{as}$$

nichtfallend, beschränkt und singulärstetig ist. Für beliebige Zahlen $a < b$ gilt wegen (10.11) und Behauptung 10.20

$$F_{ss}(b) - F_{ss}(a) = F(b) - F(a) - \int_a^b F'(y)\,dy \ge 0,$$

d.h. F_{ss} ist nichtfallend. Die Stetigkeit und Beschränktheit von F_{ss} ist aus der Definition ersichtlich. Wir müssen uns somit nur noch davon überzeugen, daß $F'_{ss} = 0$ Lebesgue-f.ü. gilt. Aufgrund der Absolutstetigkeit und der Definition von F_{as} ist

$$F_{as}(x) = \int_{-\infty}^{x} F'_{as}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} F'(y)\,dy \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hieraus schließt man, daß

$$\int_A F'_{as}(y)\,dy = \int_A F'(y)\,dy \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{B}$$

gilt, d.h. das durch beide Integrale definierte Maß besitzt einerseits F'_{as} und andererseits F' als Radon-Nikodym-Ableitung bezüglich des Lebesgue-Maßes. Hieraus folgt

$$F'_{as} = F' \qquad \text{Lebesgue-f.ü.}$$

und damit

$$F'_{ss}(x) = F'(x) - F'_{as}(x) = 0 \qquad \text{für Lebesgue-f.a. } x \in \mathbb{R}.$$

b) *Einzigkeit der Zerlegung.* Seien

$$F = F_{as} + F_{ss} = \tilde{F}_{as} + \tilde{F}_{ss}$$

zwei Zerlegungen von F in einen absolutstetigen und einen singulärstetigen Anteil. Dann gehört die Funktion

$$G := F_{as} - \tilde{F}_{as} = \tilde{F}_{ss} - F_{ss}$$

zu $\Phi^{as} \cap \Phi^{ss}$. Also ist einerseits

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} G'(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R},$$

und andererseits

$$G'(y) = 0 \qquad \text{für Lebesgue-f.a. } y \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt $G \equiv 0$, d.h.

$$F_{as} = \tilde{F}_{as}, \quad F_{ss} = \tilde{F}_{ss}.$$

□

Durch Zusammenfassen der obigen Teilbehauptungen erhalten wir schließlich das folgende Ergebnis.

Theorem 10.30. $\Phi = \Phi^d \oplus \Phi^{as} \oplus \Phi^{ss}$, *d.h. jede Funktion F aus Φ läßt sich in eindeutiger Weise als Summe*

$$F = F_d + F_{as} + F_{ss}$$

mit $F_d \in \Phi^d$, $F_{as} \in \Phi^{as}$ und $F_{ss} \in \Phi^{ss}$ darstellen.

Bemerkung 10.31.

a) Der Zerlegung

$$F = F_d + F_s$$

von $F \in \Phi$ in den diskreten und den stetigen Anteil entspricht eine Zerlegung des zugehörigen signierten Maßes μ in ein diskretes signiertes Maß μ_d und ein stetiges signiertes Maß μ_s:

$$\mu = \mu_d + \mu_s.$$

Ein signiertes Maß μ heißt dabei *diskret*, wenn es die Gestalt

$$\mu(A) = \sum_{n:\, x_n \in A} h_n, \qquad A \in \mathfrak{B},$$

mit gewissen Folgen reeller Zahlen (x_n) und (h_n) besitzt. Das signierte Maß μ heißt *stetig*, wenn

$$\mu\left(\{x\}\right) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

b) Die Zerlegung

$$F = F_{as} + (F_{ss} + F_d)$$

korrespondiert mit der Lebesgueschen Zerlegung

$$\mu = \mu_{as} + \mu_{sing}$$

des zugehörigen signierten Maßes μ in seinen absolutstetigen Anteil μ_{as} und seinen singulären Anteil μ_{sing}.