Kapitel 2

Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Anfangswertprobleme

In diesem Kapitel sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Satz 2.1 (Existenzsatz von Peano)
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ offen , $f : D \to \mathbb{K}^N$ eine *stetige* Funktion, $(x_0, y_0) \in D$.
Dann ist das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

lokal lösbar, d.h. es existiert mindestens ein Intervall I mit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ und eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}^N$ des Anfangswertproblems.

Idee zum Beweis:

Konstruktion von Näherungslösungen in einem Raum der stetigen Funktionen von der Integralgleichung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\, ds$$

Studium des Konvergenzverhaltens von Näherungslösungen.

Konstruktion von Näherungslösungen:

Idee: Betrachte das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$, $(N = 1, \mathbb{K} = \mathbb{R}), y(x_0) = y_0$.

Idee: Zerlege das Intervall $[x_0; x_0 + a]$ in n gleichgroße Teilintervalle:

$$\left[x_0; x_0 + \frac{a}{n}\right], \left[x_0 + \frac{a}{n}; x_0 + \frac{2a}{n}\right], \ldots$$

Da die gesuchte Integralkurve durch den Punkt (x_0, y_0) verläuft und das Linienelement in diesem Punkt mit Steigung $f(x_0, y_0)$ tangential zur Integralkurve ist, ist

die Gerade durch den Punkt (x_0, y_0) mit Steigung $f(x_0, y_0)$ eine Approximation der gesuchten Lösung auf dem ersten Teilintervall $\left[x_0; x_0 + \frac{a}{n}\right]$ (jedenfalls, wenn n genügend groß ist).
Insbesondere ist der Endpunkt des Geradenstücks über $\left[x_0; x_0 + \frac{a}{n}\right]$:
$y_1 := y_0 + (x_1 - x_0) \cdot f(x_0, y_0)$, mit $x_1 = x_0 + \frac{a}{n}$, eine Approximation des Punktes $(x_1, y(x_1))$, wobei y Lösung des Anfangswertproblems.

Diese Beobachtung legt nahe, nun induktiv so fortzufahren und jeweils als Startpunkt in jedem Schritt den jeweils im vorhergehenden Schritt gewonnenen Endpunkt des Geradenstücks über dem jeweiligen Teilintervall zu wählen. Die so gewonnene stückweise lineare Funktion p (genannt *Euler-Polygonzug* ist dann induktiv wie folgt definiert:
Seien $x_0, x_1 = x_0 + \frac{a}{n}, x_2 = x_0 + \frac{2a}{n}, \ldots, x_n = x_0 + a$. Damit ist:

$$\begin{cases} p(x) = p(x_i) + (x - x_i) f(x_i, p(x_i)) & \forall\, x \in]x_i; x_{i+1}], i = 0, \ldots, n-1 \\ p(x_0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Bemerkung:</u>
Es kann analog vorgegangen werden, um auf einer linksseitigen Umgebung $[x_0 - a; x_0]$ eine Näherungslösung zu konstruieren. Der entsprechende Euler-Polygonzug auf $[x_0 - a; x_0]$ ist dann definiert durch:
$x_{-n} = x_0 - a, x_{-n+1}, \ldots x_{-1} = x_0 - \frac{a}{n}, x_0$

$$\begin{cases} p(x) = p(x_{i+1}) + (x - x_{i+1}) f(x_{i+1}, p(x_{i+1})) & \forall\, x \in [x_i; x_{i+1}[, i = -n, \ldots, -1 \\ p(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Achtung:
Es ist bei dieser Konstruktion zu überprüfen, ob die Punkte $(x_i, p(x_i)) \in D$. Wenn nicht, macht die Definition keinen Sinn.

Wenn die Definition sinnvoll ist, dann ist klar:

- p ist stetig auf $[x_0 - a; x_0 + a]$
- p ist stückweise differenzierbar auf $[x_0 - a; x_0 + a]$ und

$$p'(x) = \begin{cases} f\left(x_i, p(x_i)\right) & \forall\, x \in]x_0; x_0 + a[, x \neq x_i, i = 1, \ldots, n \\ f\left(x_{i+1}, p(x_{i+1})\right) & \forall\, x \in]x_0 - a; x_0[, x \neq x_{i+1}, i = -n, \ldots, -1 \end{cases}$$

Ziel: Zeige $p'(x) \approx f\left(x, p(x)\right), \quad x \neq x_i, i = -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n.$

Übung:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x), & g: I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Konstruiere eine Folge von Euler-Polygonzügen $(p_n)_n$ und weise nach, dass $(p_n)_n$ gegen die Lösung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$$

konvergiert.

Beweis:

Beweis des Satzes von Peano

1. Schritt:

Da D offen, existiert $a > 0, b > 0$ mit

$$R := [x_0 - a; x_0 + a] \times \left\{ y \in \mathbb{K}^N \,|\, || \, y - y_0|| \leq b \right\} \subseteq D$$

(hier ist $|| \cdot ||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^N$).

Da f stetig auf D, $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ kompakte Menge, ist f auf R beschränkt und gleichmäßig stetig.

Mit anderen Worten:

$$M := \max_{(x,y) \in R} || \, f(x,y)|| \quad (< +\infty)$$

(o.B.d.A. sei $M > 0$, sonst ist nichts zu zeigen)
und

$$\begin{array}{l} \forall \, k \in \mathbb{N} \; \exists \; \delta = \delta(k) > 0 \text{ so dass} \\ || \, f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})|| \leq \frac{1}{k} \quad \forall (x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in R \end{array} \tag{2.1}$$

mit $| \, x - \tilde{x}| \leq \delta$ und $|| \, y - \tilde{y}|| \leq \delta$.

Sei nun $\alpha := \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\}$.
Es gilt:

$$\forall \, k \in \mathbb{N} \; \exists \, n = n(k) \in \mathbb{N} \text{ mit } \frac{\alpha}{n} < \min \left\{ \delta(k); \frac{\delta(k)}{M} \right\} \tag{2.2}$$

Konstruiere nun auf dem Intervall $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ zur Schrittweite (Intervalllänge) $h = \frac{\alpha}{n}$ die zugehörigen Euler-Polygonzüge.
Im Folgenden untersuchen wir nur das Verhalten auf $[x_0; x_0 + \alpha]$, der Fall $[x_0 - \alpha; x_0]$ folgt analog.

Auf $[x_0; x_0 + \alpha]$ sind die Euler-Polygonzüge induktiv definiert:

$$\begin{array}{l} x_0, x_1 = x_0 + \frac{a}{n}, x_2 = x_0 + \frac{2a}{n}, \ldots, x_n = x_0 + a \\ \left\{ \begin{array}{l} p(x) = p(x_i) + (x - x_i) f(x_i, p(x_i)) \quad \forall \, x \in]x_i; x_{i+1}], i = 0, \ldots, n \\ p(x_0) = y_0 \end{array} \right. \end{array} \tag{2.3}$$

Diese Definition ist sinnvoll, da

$$\begin{aligned}
||\, p(x_i) - y_0|| &= \left|\left| \sum_{j=0}^{i-1} \left(p\left(x_{j+1}\right) - p\left(x_j\right)\right) \right|\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} ||\, p\left(x_{j+1}\right) - p\left(x_j\right)|| \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} ||\left(x_{j+1} - x_j\right) f\left(x_j, p\left(x_j\right)\right)|| \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} |\, x_{j+1} - x_j| \cdot ||\, f\left(x_j, p\left(x_j\right)\right)|| \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha}{n} M \\
&< \alpha M \\
&\leq \frac{b}{M} M \\
&= b
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ||\, p\left(x_i\right) - y_0|| < b$$

Damit folgt induktiv, dass $||\, p(x_i) - y_0|| < b$ für alle $i = 0, \ldots, n$ (beachte dabei, dass der Induktionsanfang für y_0 trivialerweise gilt). D.h p ist wohldefiniert.

Damit ist auch klar:

- p ist stetig auf $[x_0; x_0 + \alpha]$
- p ist stückweise differenzierbar auf $]x_0; x_0 + \alpha[$ mit $p'(x_) = f\left(x_i, p\left(x_i\right)\right)$ $\forall\, x \in]x_i; x_{i+1}[, i = 0, \ldots, n-1$

Dann gilt auch: Für alle $x \neq x_i, i = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
\big|\big|\, p'(x) - f(x, p(x))\big|\big| &= \big|\big|\, p'(x) - f(x_j, p(x_j)) + f(x_j, p(x_j)) - f(x, p(x))\big|\big| \\
&\leq \underbrace{\big|\big|\, p'(x) - f(x_j, p(x_j))\big|\big|}_{=0} + ||\, f(x_j, p(x_j)) - f(x, p(x))||
\end{aligned}$$

wenn x_j so geählt, dass $x \in]x_j, x_{j+1}[$.

Nach (2.2) gilt bei dieser Wahl von x_j auch $|\, x - x_j| < \delta(k)$.

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
||\, p(x) - p(x_j)|| &\overset{(2.3)}{=} ||\, p(x_j) + (x - x_j) \cdot f(x_j, p(x_j)) - p(x_j)|| \\
&\leq \underbrace{|\, x - x_j|}_{< \frac{\alpha}{n(k)} \overset{(2.2)}{<} \frac{\delta(k)}{M}} \cdot \underbrace{||\, f(x_j, p(x_j))||}_{\leq M} \\
&\leq \delta(k)
\end{aligned}$$

Also gilt nach (2.1) die Abschätzung

$$|| \, f(x_j, p\,(x_j)) - f(x, p\,(x))|| \leq \frac{1}{k}$$

Somit gilt: $\forall\, x \in]x_0; x_0 + \alpha[, x \neq x_i, i = 1, \ldots, n-1$

$$\big|\big|\, p'\,(x) - f\,(x, p\,(x))\big|\big| \leq \frac{1}{k} \tag{2.4}$$

2. Schritt:
Wir zeige jetzt, dass p eine Näherungslösung der Integralgleichung

$$y\,(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\,(s, y\,(s))\; ds$$

ist.

Sei $x \in [x_0; x_0 + \alpha$. Dann existiert $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $x \in [x_j; x_{j+1}]$.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
& \left|\left| p(x) - \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, p(s))\, ds \right) \right|\right| \\
= \; & \left|\left| p(x) - p(x_j) - \int\limits_{x_0}^{x} f(s, p(s))\, ds + \sum_{i=0}^{j-1} (p(x_{i+1}) + p(x_i)) - \sum_{i=0}^{j-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, p(s))\, ds \right|\right| \\
= \; & \left|\left| \int\limits_{x_j}^{x} \big(p'(s) - f(s, p(s))\big)\; ds + \sum_{i=0}^{j-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \big(p'(s) - f(s, p(s))\big)\, ds \right|\right| \\
\leq \; & \left|\left| \int\limits_{x_j}^{x} \big(p'(s) - f(s, p(s))\big)\, ds \right|\right| + \sum_{i=0}^{j-1} \left|\left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \big(p'(s) - f(s, p(s))\big)\, ds \right|\right| \\
\leq \; & \int\limits_{x_j}^{x} \underbrace{\big|\big|\, p'(s) - f(s, p(s))\big|\big|}_{\overset{(2.4)}{\leq} \frac{1}{k}} ds + \sum_{i=0}^{j-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\big|\big|\, p'(s) - f(s, p(s))\big|\big|}_{\overset{(2.4)}{\leq} \frac{1}{k}} ds \\
\leq \; & (x - x_j)\, \frac{1}{k} + \sum_{i=0}^{j-1} (x_{i+1} - x_i)\, \frac{1}{k} \\
= \; & (x - x_0)\, \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left|\left| p(x) - \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, p(s))\, ds \right) \right|\right| \leq \frac{x - x_0}{k} \quad \forall\, x \in [x_0; x_0 + \alpha] \tag{2.5}$$

3. Schritt:
Studium des Konvergenzverhaltens von einer Folge von Näherungslösungen $(p_k)_k$ für $k \to \infty$.

<u>Beobachtung:</u>
Es reicht zu zeigen, dass eine solche Folge von Näherungslösungen $(p_k)_k$ eine auf dem Intervall $[x_0; x_0+\alpha]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält. In der Tat, wenn $(p_{k_l})_l$ eine solche Teilfolge und p_∞ ihr Grenzwert, dann ist p_∞ eine stetige Funktion auf $[x_0; x_0 + \alpha]$; außerdem konvergiert auch $(f(\cdot, p_{k_l}(\cdot)))_l$ gleichmäßig auf $[x_0; x_0 + \alpha]$, da f stetig. Daher konvergiert auch

$$\int_{x_0}^{x} f(s, p_{k_l}(s))\, ds \xrightarrow{l \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(s, p_\infty(s))\, ds \qquad \forall\, x \in [x_0; x_0 + \alpha].$$

Durch Übergnag zum Limes $l \to \infty$ in (2.5) für $p = p_{k_l}$ erhält man somit:

$$\left|\left| p_\infty(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, p_\infty(s))\, ds \right|\right| \leq 0$$

d.h. p_∞ ist stetige Lösung der Integralgleichung und somit (nach Satz 1.4) Lösung des Anfangswertproblems auf $[x_0; x_0 + \alpha]$.

Um die gleichmäßige Konvergenz auf $[x_0; x_0 + \alpha]$ einer Teilfolge der Folge $(p_k)_k$ zu zeigen, reicht es nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (Satz und Beweis später) zu zeigen, dass:

- $(p_k)_k$ punktweise beschränkt in $[x_0; x_0+\alpha]$, d.h. $\forall\, x \in [x_0; x_0+\alpha]\, \exists\, S = S(x) \geq 0$, so dass $||\, p_k(x)|| \leq S\ \forall k \in \mathbb{N}$, und
- $(p_k)_k$ ist gleichgradig stetig auf $[x_0; x_0 + \alpha]$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ so, dass $||\, p_k(x) - p_k(\tilde{x})|| < \varepsilon\ \forall\, x, \tilde{x} \in [x_0; x_0 + \alpha]$ mit $|\, x - \tilde{x}| < \delta$ und für alle $k \in \mathbb{N}$.

Klar nach Schritt 1:

$$||\, p_k(x) - y_0|| \leq b \quad \forall\, x \in [x_0; x_0 + \alpha], \forall\, k \in \mathbb{N}$$

und daher

$$||\, p_k(x)|| \leq ||\, y_0|| + b \quad \forall\, x \in [x_0; x_0 + \alpha], \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Also ist $(p_k)_k$ punktweise beschränkt auf $[x_0; x_0 + \alpha]$.

Seien nun $x, \tilde{x} \in [x_0; x_0 + \alpha], k \in \mathbb{N}$.
1. Fall: $x, \tilde{x}$ liegen im gleichen Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ für ein $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} ||\, p_k(x) - p_k(\tilde{x})|| &\overset{(2.3)}{=} ||\, p_k(x_i) + (x - x_i) f(x_i, p(x_i)) \\ &\qquad - (p_k(x_i) + (\tilde{x} - x_i) f(x_i, p_k(x_i)))\, || \\ &\leq |\, x - \tilde{x}| \cdot ||\, f(x_i, p_k(x_i))|| \\ &\leq M \cdot |\, x - \tilde{x}| \end{aligned}$$

2. Fall: $x, \tilde{x}$ liegen in unterschiedlichen Intervallen, etwas $x \in [x_i; x_{i+1}]$ und $\tilde{x} \in [x_j; x_{j+1}]$. o.B.d.A: $i < j$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
||\, p_k(x) - p_k(\tilde{x})|| &= \left|\left| p_k(x) - p_k(x_{i+1}) - \sum_{l=i+1}^{j-1} (p_k(x_{l+1}) - p_k(x_l)) + p_k(x_j) - p_k(\tilde{x}) \right|\right| \\
&\leq ||\, p_k(x) - p_k(x_{i+1})|| + \sum_{l=i+1}^{j-1} ||\, p_k(x_{l+1}) - p_k(x_l)|| + ||\, p_k(\tilde{x}) - p_k(x_j)|| \\
&\overset{\text{1. Fall}}{\leq} M(x_{i+1} - x) + \sum_{l=i+1}^{j-1} M(x_{l+1} - x_l) + M(\tilde{x} - x_j) \\
&= M(\tilde{x} - x) \\
&= M\,|\, x - \tilde{x}|
\end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung:

Satz (Satz von Arzelà-Ascoli)
Sei $[a; b]$ ein kompaktes (echtes) Intervall in $\mathbb{R}$. Sei M eine Teilmenge des Banachraums der stetigen Funktionen auf $[a; b]$ mit Werten in $\mathbb{K}^N$ ausgestattet mit der Supremumsnorm: $\left(C\left([a; b]; \mathbb{K}^N\right), ||\cdot||_\infty\right)$[1].
Dann gilt: M ist relativ kompakt in $C\left([a; b]; \mathbb{K}^N\right)$, genau dann wenn M ist punktweise beschränkt[2] und M ist gleichgradig stetig[3].

Ebenfalls zur Erinnerung:

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von X.
M heißt *relativ kompakt* in X :⇔ jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert nicht unbedingt in M liegen braucht.
M heißt *kompakt* in X :⇔ jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ besitzt eine konvergente Teilfolge, und der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge liegt wieder in M.

Bemerkungen:

1. M ist relativ kompakt ⇔ $\overline{M}$ ist kompakt.

2. Falls $\dim(X) < +\infty$, dann gilt:
   M ist kompakt ⇔ M ist beschränkt und abgeschlossen

3. Falls $\dim(X) = +\infty$, dann gilt nur noch:
   M ist kompakt ⇒ M ist beschränkt und abgeschlossen
   Die Umkehrung gilt i.a. nicht mehr!

[1] hier ist $||f||_\infty = \max_{x\in[a;b]} ||f(x)||$ für eine beliebige Norm $||\cdot||$ in $\mathbb{K}^N$.

[2] M heißt punktweise beschränkt :⇔ $\forall x \in [a; b]\ \exists S = S(x) > 0$ mit $||f(x)|| \leq S\ \forall f \in M$.

[3] M heißt gleichgradig stetig :⇔ $\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a; b]$ mit $|x - y| < \delta$ und $\forall f \in M$: $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$.

Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Funktionen in M.

1. Schritt: Zeige, dass eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, die punktweise auf $[a;b]\cap\mathbb{Q}$ konvergiert.

Idee: Diagonalfolgenprinzip.
Klar: $[a;b]\cap\mathbb{Q}$ ist abzählbar, also etwa: $[a;b]\cap\mathbb{Q}=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$.
Betrachte die Folge $(f_n(x_1))_n$. Nach Voraussetzung an M ist $(f_n(x_1))_n$ beschränkt in $\mathbb{K}^N$ (endlich-dimensional!), und daher existiert eine Teilfolge, nennen wir sie $(f_{1,n}(x_1))_n$, die in $\mathbb{K}^N$ konvergiert.
Betrachte jetzt $(f_{1,n}(x_2))_n$. Es gilt wieder: $(f_{1,n}(x_2))_n$ ist beschränkt in $\mathbb{K}^N$, da M punktweise beschränkt. Also existiert ein Teilfolge $(f_{2,n})_n$ von $(f_{1,n})_n$ so, dass $(f_{2,n}(x_2))_n$ konvergent in $\mathbb{K}^N$, usw.
Im Allgemeinen erhalten wir so, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, aus einer Teilfolge $(f_{k,n})_n$ eine Teilfolge $(f_{k+1,n})_n$, für die gilt: $(f_{k+1,n}(x_i))_n$ konvergiert in $\mathbb{K}^N, \forall\, i=1,\ldots,k+1$.

Schema:

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \ldots & f_{1,k} & \ldots & f_{1,n} & \ldots \\
x_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \ldots & f_{2,k} & \ldots & f_{2,n} & \ldots \\
\vdots & & & & & & & & \\
x_k: & f_{k,1} & f_{k,2} & f_{k,3} & \ldots & f_{k,k} & \ldots & f_{k,n} & \ldots \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Dann gilt (Diagonalfolgenprinzip):
die Folge $(f_{n,n})_n$ erfüllt: $(f_{n,n}(x_i))_n$ ist konvergent in $\mathbb{K}^N \quad \forall\, i\in\mathbb{N}$.

$$x_i: (f_{n,n})_n \subseteq (f_{i,n})_n \quad \forall\, n>i$$

Also konvergiert $(f_{n,n})_n$ für alle $x\in[a;b]\cap\mathbb{Q}$.

2. Schritt:
Zeige, dass $(f_{n,n})_n$ gleichmäßig auf $[a;b]$ konvergiert.

Sei $\varepsilon>0$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit existiert $\delta>0$ so, dass

$$||\, f_{n,n}(x)-f_{n,n}(y)|| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, x,y\in[a;b] \text{ mit } |x-y|<\delta\ \forall\, n\in\mathbb{N} \tag{2.6}$$

Zerlege nun das Intervall $[a;b]$ in endlich viele nicht-leere Teilintervalle $I_1,\ldots,I_R$ der Länge $<\delta$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, kann man nun für alle $k=1,\ldots,R$ einen Punkt $x_k\in I_k\cap\mathbb{Q}$ wählen.

Nach Schritt 1 existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$ so, dass

$$||\, f_{n,n}(x_k)-f_{m,m}(x_k)|| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, m,n\geq n_0, \forall\, k=1,\ldots,R \tag{2.7}$$

Sei nun $x \in [a;b]$. Dann existiert $k \in \{1, \dots, R\}$ mit $x_k \in I_k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & ||\, f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)|| \\ = \;& ||\, f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_k) + f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k) + f_{m,m}(x_k) - f_{m,m}(x)|| \\ \leq \;& \underbrace{||\, f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_k)||}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{nach}(2.6)} + \underbrace{||\, f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)||}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{nach}(2.7)} + \underbrace{||\, f_{m,m}(x_k) - f_{m,m}(x)||}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{nach}(2.6)} \\ < \;& \varepsilon \qquad \forall\, m,n \geq n_0 \end{aligned}$$

Da $x \in [a;b]$ beliebig war, gilt damit:

$$\underbrace{\sup_{x\in[a;b]} ||\, f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)||}_{=||\, f_{n,n}, - f_{m,m}||_\infty} \leq \varepsilon \quad \forall\, n,m \geq n_0$$

Mit anderen Worten:
$(f_{n,n})_n$ ist eine Cauchy-Folge im Banachraum $\left(C\left([a;b];\mathbb{K}^N\right), ||\cdot||_\infty\right)$ und somit konvergiert $(f_{n,n})_n$ gleichmäßig auf $[a;b]$ gegen ein Element in $C\left([a;b];\mathbb{K}^N\right)$. □

<u>Beispiel:</u>

$$F = \{f_n | n \in \mathbb{N}\}, f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto n \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

Ist F relativ kompakt, kompakt?

Beschränktheit: $x \in [0;1]$:

$$f_n(x) = n \arctan\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} & , x \in]0;1] \end{cases}$$

Erinnerung: mit der Regel von l'Hospital folgt:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y^2}}{1} = 1$$

Daher gilt für $x \in]0;1] : f_n(x) \to x, n \to \infty$, d.h. insbesondere, dass die Zahlenfolge $(f_n(x))_n$ beschränkt für alle $x \in [0;1]$ ist.
Außerdem gilt: $(f_n)_n$ konvergiert punktweise auf $[0;1]$ gegen die identische Funktion $f : [0;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.

Gleichgradige Stetigkeit:
f_n ist differenzierbar auf $[0;1]\;\forall\, n$ und

$$f_n'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} \quad \forall\, x \in [0;1],$$

d.h. $||\, f_n'||_\infty \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Also nach dem Mittelwertsatz:

$$|\, f_n(x) - f_n(y)| \leq |\, x - y| \quad \forall\, x, y \in [0;1], \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und daher ist F gleichgradig stetig.
Konsequenz aus dem Satz von Arzelà-Ascoli: F ist relativ kompakt, aber da $f \notin F$ ist F nicht kompakt.

Funktionalanalytischer Zugang zum Beweis des Satzes von Peano

Das Problem reduziert sich auf die Fragestellung, ob $u \in C\left([x_0; x_0+\alpha]; \mathbb{K}^N\right)$ (Notation und Voraussetzungen: siehe Satz und Beweis des Satzes von Peano) existiert mit

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\, ds \quad \forall\, x \in [x_0; x_0+\alpha]$$

und so, dass $||\, u(x) - y_0|| \leq b \quad \forall\, x \in [x_0; x_0+\alpha]$.

Dies ist ein Fixpunktproblem. In der Tat wähle

$$K := \left\{ u \in C\left([x_0; x_0+\alpha]; \mathbb{K}^N\right) \mid ||\, u(x) - y_0|| \leq b \;\forall\, x \in [x_0; x_0+\alpha] \right\}$$

und

$$F : K \to C\left([x_0; x_0+\alpha]; \mathbb{K}^N\right)$$

die Abbildung mit

$$F(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\, ds, \quad x \in [x_0; x_0+\alpha]$$

Dann ist das Problem einen Fixpunkt $u \in K$ der Abbildung F zu finden: $u = F(u)$. Die Existenz eines solchen Fixpunktes folgt aus dem

Satz (Satz von Schauder)
Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, M eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge von X und sei $F : M \to X$ eine stetige Abbildung.
Wenn gilt, dass die Bildmenge $F(M) \subseteq M$ (d.h. F ist eine selbstabbildung in M) und $F(M)$ kompakt, dann besitzt F mindestens einen Fixpunkt $u \in M$.

ohne Beweis.

Man sieht leicht, dass K nicht-leer, konvex und abgeschlossen ist. Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung F definiert wie oben stetig ist, $F(K) \subset K$ und $F(K)$ kompakt ist.

Der Satz von Peano liefert eine *lokale* Lösung. Eine natürliche Fragestellung ist nun, ob diese lokalen Lösungen zu Lösungen der Differentialgleichung auf einem größeren Intervall fortgesetzt werden können, und ob eine „maximale“ Fortsetzung dieser lokalen Lösung existiert.

Definition 2.1
Sei $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N, (x_0, y_0) \in D$.
Sei weiter $y : I \to \mathbb{K}^N$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

i) Eine Lösung des Anfangswertproblems $u : J \to \mathbb{K}^N, J \subset \mathbb{R}$ Intervall, heißt *Fortsetzung* (bzw. *echte Fortsetzung*) der Lösung y, wenn $I \subseteq J$ (bzw. $I \subsetneq J$) und $u|_I = y$.

ii) Die Lösung $y : I \to \mathbb{K}^N$ ist *maximale Lösung* des Anfangswertproblems, wenn keine echte Fortsetzung von y existiert.

Satz 2.2
Voraussetzungen von Satz 2.1: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ offen , $f : D \to \mathbb{K}^N$ eine stetige Funktion, $(x_0, y_0) \in D$.
Jede lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

kann zu einer maximalen Lösung des Anfangswertproblems fotgesetzt werden.

Beweis:
mit *Lemma von Zorn*

Erinnerung: Sei M eine nicht-leere Menge mit Ordnung $\leq$ (also mit einer transitiven[4], antisymmetrischen[5] Relation).
Wenn jede *geordnete Teilmenge*[6] von M eine *obere Schranke*[7] in M besitzt, dann besitzt M ein *maximales Element* m (d.h. ein Element $m \in M$ mit der Eigenschaft, dass kein $x \in M, x \neq m$, existiert mit $m \leq x$).

Sei M die Menge aller Graphen von Lösungen des Anfangswertproblems:

$$M = \{\Gamma \,|\, \Gamma = \{(x, y(x)) \,|\, x \in I\} \text{ wobei } y : I \to \mathbb{K}^N \text{ eine Lösung des Anfangswertproblems auf } I\}$$

Betrachte auf M die Relation:

$$\Gamma_1 \leq \Gamma_2 :\Leftrightarrow \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \quad (\text{Mengeninklusion in } \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n)$$

Klar:

- $M \neq \emptyset$ (nach dem Satz von Peano)
- „$\leq$“ ist eine Ordnung auf M

[4] $(x, y, z \in M : x \leq y, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
[5] $(x, y \in M : x \leq y, y \leq x) \Rightarrow x = y$
[6] Eine Teilmenge ist *geordnet*, wenn für alle x, y aus der Teilmenge entweder gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$.
[7] Ein Element $y \in M$ heißt *obere Schranke einer Teilmenge*, wenn $x \leq y$ für alle x aus der Teilmenge.

- Jede geordnete Teilmenge E von M besitzt eine obere Schranke in M ($\bigcup_{\Gamma \in E} \Gamma$, das ist der Graph einer Lösung des Anfangswertproblems).

Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\Gamma \in M$, d.h. die zu Γ gehörige Funktion y (die Funktion deren Graph Γ ist) ist maximale Lösung. $\square$

Frage: Verhalten von Lösungen am Rande ihres maximalen Existenzintervalls ?

Beispiele:

1)

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Die rechte Seite $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 + y^2$ ist stetig.

Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} & \int_1^{y(x)} \frac{1}{1+s^2}\, ds = \int_0^x 1\, ds \\ \Rightarrow \quad & \arctan(y(x)) - \arctan(1) = x \\ \Rightarrow \quad & y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{für } x + \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

d.h. die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y : \left]-\frac{3}{4}\pi; \frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Das maximale Existenzintervall ist beschränkt, offen und die maximale Lösung auf diesem Intervall strebt in den Randpunkten des Existenzintervalls gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

2)

$$\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Die rechte Seite $f :]-1; 1[\times]-1; 1[\to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ ist stetig.

Lösung des Anfangswertproblems mittels Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \\
\Rightarrow\quad & \arcsin\left(y(x)\right) - \underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{=\frac{\pi}{4}} = \arcsin(x) - \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} \\
\Rightarrow\quad & y(x) = \sin\left(\arcsin(x) + \frac{\pi}{4}\right) \\
& \qquad\qquad \text{und } x \in]-1;1[\text{ aber } y(x) \neq 1 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Die Integralkurve strebt in diesem Fall an den Randpunkten des (offenen) Existenzintervalls gegen den Rand des Definitionsbreiches der rechten Seite.

Diese Beobachtungen sind nicht zufällig, sondern beschreiben typische Fälle des Randverhaltens von maximalen Lösungen.

Allgemein gilt:
Wenn $f : D^{\text{ offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig, $(x_0, y_0) \in D$, y eine maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ist und I der Definitionsbereich von y, dann gilt:

1) I ist ein offenes Intervall.

   Beweis:
   durch Widerspruch: angenommen I ist z.B. rechtsseitig abgeschlossen, d.h. von der Form $]a;b]$ oder $[a;b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}, a < b$.

   Nach dem Satz von Peano besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} w' = f(x,y) \\ w(b) = y(b) \end{cases} \tag{2.8}$$

   eine lokale Lösung (da $(b, y(b)) \in D$, f stetig auf D), d.h. es existiert $\alpha > 0$ und eine Funktion $w : [b-\alpha; b+\alpha] \to \mathbb{R}$, die Lösung des Anfangswertproblems (2.8) ist.
   Sei nun

$$u(x) := \begin{cases} y(x), & x \in I \\ w(x), & x \in [b; b+\alpha] \end{cases}$$

   Da $w(b) = y(b)$ und y und w auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig sind, ist u stetig. Es ist auch klar, dass u in allen Punkten mit Ausnahme eventuell von b differenzierbar ist und die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ erfüllt.

Da y eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ auf $I =]a;b]$ ($[a;b]$) ist, gilt insbesondere , dass y linksseitig differenzierbar in b ist mit

$$\frac{d^-}{dx^-} y(b) = f\left(b, y(b)\right) = f\left(b, u(b)\right).$$

Analog gilt für w: w ist rechtsseitig differenzierbar in b und es gilt:

$$\frac{d^+}{dx^+} w(b) = f\left(b, w(b)\right) = f\left(b, u(b)\right).$$

Also ist u auch in b differenzierbar und genügt der Differentialgleichung. Daher ist u eine echte Fortsetzung von y. Widerspruch zur Maximalität von y. □

2) Enweder ist das Existenzintervall I der maximalen Lösung y unbeschränkt oder rechtsseitig beschränkt: $I =]a;b[, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und in diesem Fall gilt:[8]

$$\begin{cases} \limsup\limits_{y \to b^-} ||\, y(x)|| = +\infty \\ \text{oder } \liminf\limits_{x \to b^-} \ \operatorname{dist}\left((x, y(x)); \partial D\right) = 0 \end{cases}$$

oder I ist linksseitig beschränkt, d.h. $I =]a;b[, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$, und es gilt dann

$$\begin{cases} \limsup\limits_{y \to a^+} ||\, y(x)|| = +\infty \\ \text{oder } \liminf\limits_{x \to a^+} \ \operatorname{dist}\left((x, y(x)); \partial D\right) = 0 \end{cases}$$

Beweis:
Angenommen, I ist rechtsseitig beschränkt: $I =]a;b[$ mit $b \in \mathbb{R}$ und nehmen wir an, dass $\limsup\limits_{x \to b^-} ||\, y(x)|| < +\infty$. Dann existiert eine linksseitige Umgebung von b: $[b - \varepsilon; b[, \varepsilon > 0$ genügend klein, so dass $a < b - \varepsilon$, und y ist beschränkt auf $[b - \varepsilon; b[$.

Sei $\Gamma = \{(x, y(x))\, | x \in [b - \varepsilon; b[\}$. Dann ist also Γ eine beschränkte Teilmenge von D.
Also ist $\overline{\Gamma}$ kompakt in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$.
Angenommen $\overline{\Gamma} \subseteq D$. Da f stetig auf D ist, ist f beschränkt auf $\overline{\Gamma}$. Insbesondere ist dann, da $y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \ \forall\, x \in [b - \varepsilon; b[$, die Ableitung y' von y beschränkt auf $[b - \varepsilon; b[$. Nach dem Mittelwertsatz ist die Funktion y dann gleichmäßig stetig auf $[b - \varepsilon; b[$ und daher existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to b^-} y(x) =: z$, und es gilt $(b, z) \in D$.

Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} y(x), & x \in I \\ z, & x = b \end{cases}$$

[8] Ist $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $a \in X, M \subset X$, dann ist $\operatorname{dist}(a, M) := \inf\limits_{m \in M} ||\, a - m\,||$

ist dann eine stetige Fortsetzung von y. Tatsächlich ist u eine Lösung des Anfangswertproblems auf $I \cup b$. In der Tat gilt

$$\begin{cases} y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right)\, ds \quad \forall\, x \in I$$

Durch Übergang zum Limes $x \to b^-$ in der integralen Formulierung erhält man

$$u(b) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{b} f\left(s, u(s)\right) ds,$$

also erfüllt u die Integralidentität auf $I \cup \{b\}$. Damit ist u eine Fortsetzung von y. Da y maximale Lösung ist, ist dies nicht möglich.

Also gilt notwendigerweise: $\exists\, (b, z) \in \overline{\Gamma}$ mit $(b, z) \notin D$.

Dann existiert $\left(x_n, y(x_n)\right)_n \subseteq \overline{\Gamma} \subseteq D$ mit $\left(x_n, y(x_n)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (b, z)$ und $(b, z) \in \partial D$, d.h. aber gerade $\operatorname{dist}(\left(x_n, y(x_n)\right), \partial D) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also gilt:

$$\liminf_{x \to b^-} \operatorname{dist}\left(\left(x, y(x)\right); \partial D\right) = 0$$

$\square$

Korollar 2.1
Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}, D = I \times \mathbb{K}^N \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N, f : D \to \mathbb{K}^N$ stetig, $(x_0, y_0) \in D$.
Wenn f auf D beschränkt ist, dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

mindestens eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis:
Nach dem Satz von Peano besitzt das Anfangswertproblem mindestens eine lokale Lösung, die sich nach Satz 2.2 zu einer maximalen Lösung y des Anfangswertproblems auf einem offenen maximalen Existenzintervall $I_{\max} =]c; d[$ fortsetzen lässt, $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, c < d$.
Das Intervall I ist von der Form $]a; b[$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, a < b$.

Angenommen, $d < b$. Dann gilt notwendigerweise $\limsup\limits_{x \to d^-} ||\, y(x)|| = +\infty$.

Nach der Voraussetzung ist $\sup\limits_{(x,z) \in D} ||\, f(x, z)|| =: M < \infty$.
Da $y'(x) = f(x, y)\ \forall\, x \in]c; d[$ gilt, erhalten wir somit $||\, y'(x)|| \leq M\ \forall\, x \in]c; d[$.
Deshalb gilt, nach dem Mittelwertsatz für Vektorwertige Funktionen,

$$||\, y(x) - y(x_0)|| \leq M\, |\, x - x_0| \quad \forall\, x \in]c; d[$$

Also:

$$||\,y(x)|| \leq M\,|\,x - x_0| + ||\,y_0|| \quad \forall\, x \in]c; d[$$

im Widerspruch zu $\limsup\limits_{x \to d^-} ||\,y(x)|| = +\infty$.
Genauso folgt, dass $a = b$. $\square$

Beispiel:

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sin(x) \arctan(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, besitzt nach Korollar 2.1 mindestens eine maximale Lösung y auf $\mathbb{R}$, d.h. das Anfangswertproblem ist global auf $\mathbb{R}$ lösbar.

Definition 2.2
Sei $f : D \subseteq \mathbb{K}^{M+n} \to \mathbb{K}^P$ eine Funktion, $M, N, P \in \mathbb{N}$.

i) Falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass

$$||f(x, y) - f(x, z)|| \leq L \cdot ||y - z|| \quad \forall (x, y), (x, z) \in D$$

dann heißt f (*global*) *Lipschtiz-stetig* bezüglich $y \in \mathbb{K}^N$ in der Menge D mit *Lipschitz-Konstante* L.

ii) Wenn für alle $(x, y) \in D$ eine Umgebung $U_{(x,y)}$ in D existiert, so dass die Einschränkung von f auf $U_{(x,y)}$ Lipschitz-stetig auf $U_{(x,y)}$ bezüglich y ist, dann wird f *lokal Lipschitz-stetig bzgl.* y *in* D genannt.

Beispiele:

i) Wenn $f : D^{\text{ offen}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x, y)$ stetig partiell differenzierbar nach y in D ist, dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y in D.

Beweis:
Wenn $(x_0, y_0) \in D$, dann existiert

$$R := [x_0 - a; x_0 + a] \times [y_0 - b; y_0 + b] \subseteq D \quad (a < b).$$

Da nach Voraussetzung

$$(x, y) \in D \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

stetig, ist diese Funktion $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ insbesondere auf R beschränkt.
Sei

$$M := \sup_{(x,y) \in R} \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|.$$

Dann gilt nach dem Mittelwertsatz

$$|\,f(x,y)-f(x,z)| \leq M\,|\,y-z| \quad \forall\,(x,y),(x,z)\in R$$

$\square$

ii) Übungsaufgabe:
Wenn $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl y in D, dann ist f global Lipschitz-stetig bzgl. y auf D.

iii)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\times]0;+\infty[\;&\to\; \mathbb{R} \\ (x,y) \;&\mapsto\; x\sqrt{y} \end{aligned}$$

Klar: f ist stetig auf $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$.
f ist *nicht* global Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$, denn

$$\begin{aligned} |\,f(x,y)-f(x,z)| &= \left|\,x\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\right| \\ &= |\,x|\,\frac{|\,y-z|}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} \end{aligned}$$

d.h. aber $\forall\, y \neq z$

$$\frac{|\,f(x,y)-f(x,z)|}{|\,y-z|} = \frac{|\,x|}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} \overset{x,z\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

also kann der Differenzenquotient $\frac{|\,f(x,y)-f(x,z)|}{|\,y-z|}$ nicht nach oben durch eine Konstante abgeschätzt werden auf $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$. Allerdings ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y in $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$ da f in $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$ stetig partiell nach y differenzierbar ist:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$$

ist stetig in $(x,y)\in\mathbb{R}\times]0;+\infty[$.

Satz 2.3 (Satz von Picard-Lindelöf - lokal quantitative Version)
Sei $f : D^{\text{ offen}} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig, $(x_0,y_0)\in D$,
$R_{a,b} = [x_0-\alpha;x_0+\alpha]\times\left\{y\in\mathbb{K}^N |\, ||\,y-y_0|| \leq b\right\} \subset D$, $(a<b)$. Sei außerdem f Lipschitz-stetig bzgl, y auf $R_{a,b}$.
Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

im Rechteck $R_{a,b}$ genau eine Lösung y auf dem Intervall $[x_0-\alpha;x_0+\alpha]$, wobei $\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ und $M := \max\limits_{(x,y)\in R_{a,b}} ||\,f(x,y)||$.

Beweis:
1. Methode:
Nach dem Satz von Peano (und seinem Beweis) existiert mindestens eine Lösung y des Anfangswertproblems auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$. Sei z eine weitere Lösung des Anfangswertproblems auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, die ganz in $R_{a,b}$ verläuft.

Dann erfüllen y und z insbesondere die zum Anfangswertproblem äquivalenten Integralgleichungen auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$. Also folgt

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) - f(s, z(s)) \, ds \quad \forall \, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$$

Also gilt

$$\begin{aligned} ||\, y(x) - z(x)|| \quad &\leq \quad \left| \int_{x_0}^{x} ||\, f(s, y(s)) - f(s, z(s))|| \, ds \right| \quad \forall \, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \\ &\leq \quad \left| \int_{x_0}^{x} L \, ||\, y(s) - z(s)|| \, ds \right| \end{aligned}$$

wobei L eine Lipschitz-Konstante von f bzgl. y auf $R_{a,b}$.

$$\Rightarrow ||\, y(x) - z(x)|| \quad \leq \quad \underbrace{\alpha L \max_{s \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]} ||\, y(s) - z(s)||}_{\text{unabhängig von } x} \quad \forall \, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$$

Daher ist

$$\sup_{x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]} ||\, y(x) - z(x)|| \leq L\alpha \max_{x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]} ||\, y(x) - z(x)||$$

Falls $\alpha \cdot L < 1$, dann folgt sofort $y(x) = z(x) \quad \forall \, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$.

Fall: $\alpha \cdot L \geq 1$:
Dann wähle man $0 < \alpha' < \alpha$ mit $\alpha' L < 1$ und zeige zunächst wie im 1. Fall, dass $y \equiv z$ auf $[x_0 - \alpha'; x_0 + \alpha']$. Danach muss y und z iterativ auf den Intervallen $[x_0; x_0 + 2\alpha']$, $[x_0 + \alpha'; x_0 + 3\alpha']$, etc. verglichen werden (analog linksseitig von x_0).

2. Methode: Picard-Approximationen
Definiere die Picard-Iterierten:

$$\begin{aligned} u_0(x) &:= y_0, \quad x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \\ u_{n+1}(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u_n(s)) \, ds, \quad x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], \forall \, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- u_n ist wohldefiniert $\forall \, n \in \mathbb{N}$:
  Beweis durch Induktion:

$n = 0$: klar.
$n = 1$:

$$u_1(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0)\; ds$$

ist wohldefiniert, da $y_0 \in \{y \,|\, ||\, y - y_0|| \leq b\}$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$:

Angenommen, u_n ist wohldefiniert und $||\, u_n(x) - y_0|| \leq b, \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
||\, u_{n+1}(x) - y_0|| &= \left|\left| \int\limits_{x_0}^{x} f(s, u_n(s))\; ds \right|\right| \\
&\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{||\, f(s, u_n(s))||}_{\leq M}\; ds \right| \\
&\leq |\, x - x_0|\, M \\
&\leq \alpha M \\
&\leq b
\end{aligned}$$

für alle $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$.

- u_n ist stetig auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]\,, \forall\, n$
(Beweis mit Induktion, klar).

- Es gilt:

$$||\, u_{n+1}(x) - u_n(x)|| \leq M L^n \frac{|\, x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \quad (2.9)$$

Beweis mit Induktion:

$n = 0$:

$$\begin{aligned}
||\, u_1(x) - u_0(x)|| &= \left|\left| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0)\; ds - y_0 \right|\right| \\
&\leq M\, |\, x - x_0| \qquad \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]
\end{aligned}$$

Induktionsschritt $n \to n + 1$: Angenommen, die Abschätzung (2.9) gilt für ein

n, dann gilt:

$$\begin{aligned}
||\, u_{n+1}(x) - u_{n+1}(x)|| &= \left|\left| \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, u_{n+1}(s)\right) - f\left(s, u_n(s)\right)\, ds \right|\right| \\
&\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} ||\, f\left(s, u_{n+1}(s)\right) - f\left(s, u_n(s)\right)||\, ds \right| \\
&\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} L\, ||\, u_{n+1}(s) - u_n(s)||\, ds \right| \\
&\leq L \left| \int\limits_{x_0}^{x} ||\, u_{n+1}(s) - u_n(s)||\, ds \right| \\
&\overset{\text{I.A.}}{\leq} M L^{n+1} \left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{|\, s - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\, ds \right| \\
&= M L^{n+1} \left| \left[\frac{|\, s - x_0|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{s - x_0}{|\, s - x_0|} \right]_{x_0}^{x} \right| \\
&= M L^{n+1} \frac{|\, x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!}, \quad \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]
\end{aligned}$$

- $(u_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ gegen eine stetige Funktion

  Es gilt:

$$u_n(x) - y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}(x) - u_k(x)\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$$

  Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig, $n > m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
||\, u_n(x) - u_m(x)|| &= \left|\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}(x) - u_k(x)\right) - \sum_{k=0}^{m-1} \left(u_{k+1}(x) - u_k(x)\right) \right|\right| \\
&= \left|\left| \sum_{k=m}^{n-1} \left(u_{k+1}(x) - u_k(x)\right) \right|\right| \\
&\overset{(2.9)}{\leq} \sum_{k=m}^{n-1} M L^k \frac{|\, x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} M L^k \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{M}{L} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ konvergent $\forall\, x \in \mathbb{R}$, also insbesondere ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}$ konvergent (mit Wert $e^{L\alpha} - 1$), d.h. die Partialsummen $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} \right)_n$ bilden eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Mit anderen Worten, für $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} \right| < \varepsilon \cdot \frac{L}{M} \qquad \forall\, n > m > n_0$$

Also folgt $\forall\, n > m > n_0$:

$$||\, u_n(x) - u_m(x)|| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$$

d.h.

$$\sup_{x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]} ||\, u_n(x) - u_m(x)|| < \varepsilon \quad \forall\, n > m > n_0.$$

Also ist $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge im Banachraum der stetigen Funktionen $\left(C\left([x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]\, ; \mathbb{K}^N \right), || \cdot ||_\infty \right)$ wobei

$$||\, f||_\infty := \sup_{x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]} ||\, f(x)||\,, \quad f \in C\left([x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]\, ; \mathbb{K}^N \right),$$

und daher konvergiert $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion u_∞ auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$.

- u_∞ ist eine Lösung des Anfangswertproblems

  Erinnerung:

  $$u_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, u_n(s) \right)\, ds \quad \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]\,, \forall\, n \tag{2.10}$$

  Außerdem gilt $\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \forall\, s \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$:

  $$||\, f\left(s, u_n(s) \right) - f\left(s, u_m(s) \right)|| \leq L\, ||\, u_n(s) - u_m(s)||$$

  Da $(u_n)_n$ gleichmäßig konvergente Folge, folgt daher sofort, dass auch $f\left(s, u_n(s) \right)$ gleichmäßig auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ gegen $f\left(s, u_\infty(s) \right)$ für $n \to \infty$ konvergiert. Daher darf beim Übergang zum Limes für $n \to \infty$ in (2.10) Limes und Integration vertauscht werden.

  $$\begin{aligned} u_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x) &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\left(s, u_n(s) \right)\, ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f\left(s, u_n(s) \right)\, ds \end{aligned}$$

Man erhält so

$$u_\infty(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, u_\infty(s)\right)\, ds \quad \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$$

d.h. aber gerade, dass u_∞ Lösung des Anfangswertproblems ist.

Es bleibt zu zeigen, dass u_∞ die einzige Lösung des Anfangswertproblems in $R_{a,b}$ auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ ist.

Sei z eine beliebige Lösung des Anfangswertproblems in $R_{a,b}$ auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$; dann gilt also:

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, z(s)\right)\, ds \quad \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$$

Behauptung:

$$||\, z(x) - y_0|| \leq ML^n \frac{|\, x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall\, n, \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \tag{2.11}$$

Beweis mit Induktion:
$n = 0$:

$$||\, z(x) - y_0|| \;=\; \left\| \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, z(s)\right)\, ds \right\| \leq M\, |\, x - x_0|$$

$n \to n+1$:
Angenommen, (2.11) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} ||\, z(x) - u_{n+1}(x)|| &= \left\| \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, z(s)\right) - f\left(s, u_n(s)\right)\, ds \right\| \\ &\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} L\, ||\, z(s) - u_n(s)||\, ds \right| \\ &\overset{\text{I.A.}}{\leq} \left| \int\limits_{x_0}^{x} ML^{n+1} \frac{|\, s - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\, ds \right| \\ &= ML^{n+1} \frac{|\, x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

Da $ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ $(n \to \infty)$, folgt durch Übergang zum Limes in (2.11), dass $||\, z(x) - u_\infty(x)|| = 0 \quad \forall\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, d.h. $z \equiv u_\infty$ und somit ist u_∞ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. □

Satz 2.4 (Satz von Picard-Lindelöf - lokal qualitative Version)
Seien $f : D^{\text{ offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bezüglich y in D,

$(x_0, y_0) \in D$.
Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h. es existiert $\alpha = \alpha(x_0, y_0) > 0$ derart, dass das Anfangswertproblem auf dem Intervall $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis:
Da D offen, $(x_0, y_0) \in D$ und f loakl Lipschitz-stetig bezüglich y auf D, existieren $a, b > 0$ so, dass

$$R_{a,b} := [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \times \left\{ y \in \mathbb{K}^N \mid ||\, y - y_0|| \leq b \right\} \subseteq D$$

und die Einschränkung von f auf $R_{a,b}$ Lipschitz-stetig ist.

Nach Satz 2.3 existiert daher genau eine Lösung des Anfangswertproblems in $R_{a,b}$ auf dem Intervall $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ mit $\alpha = \min\left\{a; \frac{b}{M}\right\}, M = \sup\limits_{(x,y) \in R_{a,b}} ||\, f(x,y)||$.

Sei nun z eine beliebige Lösung des Anfangswertproblems auf $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$.

Es reicht zu zeigen, dass $\{(x, z(x)) \,|\, x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]\} \subseteq R_{a,b}$,
d.h. $||\, z(x) - y_0|| \leq b \quad \forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ gilt.

Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, es existiert $x_1 \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ mit $||\, z(x_1) - y_0|| > b$.
o.B.d.A. $x_1 > x_0$.

Sei $\overline{x} := \sup \{x \in [x_0; x_1] \,|\, ||\, z(s) - y_0|| \leq b \,\forall\, s \in [x_0; x_1]\}$.
Da z stetig, gilt:

$$||\, z(\overline{x}) - y_0|| = b.$$

Außerdem gilt:

$$\overline{x} < x_1 \leq x_1 + \alpha.$$

Andererseits gilt:

$$z'(x) = f\,(x, z(x)) \quad \forall\, x \in [x_0; \overline{x}]$$

(denn dort gilt $||\, z(x) - y_0|| \leq b$!).
Also folgt nach dem Mittelwertsatz

$$||\, z(x) - y_0|| = ||\, z(x) - z(x_0)|| \leq M \,|\, x - x_0| \quad \forall\, x \in [x_0; \overline{x}]\,.$$

Insbesondere folgt für $x = \overline{x}$:

$$b = ||\, z(\overline{x}) - y_0|| \leq M \,|\, x - x_0| < M\alpha \leq b$$

Widerspruch. $\square$

Satz 2.5 (Satz von Picard-Lindelöf (globale Version))
Seien $f : D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}\times\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y in D, $(x_0, y_0) \in D$.
Dann existiert ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $]I^-, I^+[\subseteq \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung y auf $]I^-, I^+[$.

ii) Ist $z : J \to \mathbb{K}^N$ eine beliebige Lösung des Anfangswertproblems, so gilt $J \subset]I^-, I^+[$ und $z = y|_J$.

Beweis:
Nach Satz 2.4 ist das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar; nach Satz 2.2 ist die lokale Lösung zu einer maximalen Lösung y auf ein offenes maximales Existenzintervall $]I^-; I^+[$ fortsetzbar.

Sei nun $z : J \to \mathbb{K}^N$ eine beliebige weitere Lösung des Anfangswertproblems. Zeige zunächst: $z = y$ auf $J \cap]I^-; I^+[$.

Angenommen dies gilt nicht. Dann existiert $x^* \in J \cap]I^-; I^+[$ mit $z(x^*) \neq y(x^*)$. o.B.d.A $x^* > x_0$ (der Fall $x^* < x_0$ wird analog behandelt).

Sei nun $\overline{x} := \sup\{x \in [x_0; x^*] \,|\, y(s) = z(s)\ \forall\, s \text{ mit } x_0 \leq s \leq x\}$. Dann gilt natürlich: $y(\overline{x}) = z(\overline{x})$, und nach Satz 2.4 besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} w' = f(x,w) \\ w(\overline{x}) = y(\overline{x}) \end{cases}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung w auf einem Intervall $[\overline{x} - \beta; \overline{x} + \beta]$ für ein geeignetes $\beta > 0$. Da aber y und z Lösungen dieses Anfangswertproblems, müssten y und z auch noch in einer rechtsseitigen Umgebung von $\overline{x}$ übereinstimmen. Widerspruch zur Definition von $\overline{x}$.

Zeige nun: $J \subset]I^-; I^+[$
Angenommen, $I^+ \in J$; dann wäre y in I^+ durch $y(I^+) := z(I^+)$ fortsetzbar und diese Fortsetzung wäre Lösung des Anfangswertproblems. Widerspruch zur Maximalität von y. Analog zeigt man: $I^- \notin J$.
Da $x_0 \in J \cap]I^-; I^+[$, folgt somit: $J \subset]I^-; I^+[$.

Damit folgt dann auch, dass $z = y|_J$.

Die Eindeutigkeit des maximalen Existenzintervalls folgt leicht aus ii):
Wären $I^1_{\max}, I^2_{\max}$ zwei offene Intervalle, die i) + ii) erfüllen, gilt nach ii) insbesondere, dass $I^1_{\max} \subseteq I^2_{\max}$ und $I^2_{\max} \subseteq I^1_{\max}$, also $I^1_{\max} = I^2_{\max}$. □

Bemerkung:
$]I^-; I^+[$ ist das maximale Existenzintervall für das Anfangswertproblem und y ist

die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems.
Bezeichnung daher: $I_{\max} =]I^-; I^+[\,, y_{\max} = y$.

Im Allgemeinen kann ein Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

bei nur stetiger rechter Seite f mehrere maximale Lösungen besitzen, die auf unterschiedlichen maximalen Existenzintervallen definiert sein können.

Beispiel: (modifiziertes Beispiel aus dem 2. Tutoriumsblatt, Aufgabe 2)

$$y' = f(y) \text{ mit } F(y) = \begin{cases} y^2, & y > 1 \\ \sqrt{y}, & 0 < y \leq 1 \\ \sqrt{-y}, & -1 < y \leq 0 \\ y^2, & y \leq -1 \end{cases}$$

Klar: F ist stetig, aber F ist nicht lokal Lipschitz-stetig bzgl. y in 0:

$$\frac{|\,F(y) - F(0)|}{|\,y - 0|} = \frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \overset{y \to 0}{\longrightarrow} \infty$$

Tatsächlich besitzt das Anfangswertproblem verschiedene Maximale Lösungen:
etwa:

$$\begin{aligned} y^1_{\max} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y^2_{\max} :]-3;3[\;&\to\; \mathbb{R} \\ y^2_{\max}(x) \;&=\; \begin{cases} \frac{1}{3-x}, & 2 < x < 3 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{4}, & -2 < x <\leq 0 \\ -\frac{1}{x+3}, & -3 < x \leq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Frage: Wann sind maximale Lösungen globale Lösungen?

Beispiel:

$$\begin{cases} y' = y^2 =: f(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

besitzt die Lösung y gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_1^y \frac{1}{s^2}\, ds &= \int_0^x 1\, ds \\ \Rightarrow -\frac{1}{y} + 1 &= x \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{1-x}, \quad x < 1 \end{aligned}$$

•

$$\begin{array}{rcl} y :]-\infty;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

ist die eindeutige Lösung maximale Lösung des Anfangswertproblems.

• Das Anfangswertproblem ist nicht global auf $\mathbb{R}$ lösbar.

Das vorige Beispiel zeigt, dass, wenn $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, f stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $I \times \mathbb{K}^N$, dann ist im Allgemeinen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

mit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$ nicht global auf I lösbar. Mit anderen Worten: im Allgemeinen ist $I_{\max} \subsetneq I$.

Satz 2.6 (Existenz von globalen Lösungen)
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$, Falls f für jedes kompakte Intervall $J \subset I$ Lipschitz-stetig bzgl. y auf $J \times \mathbb{K}^N$ ist, dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

genau eine globale Lösung y auf I.

Beweis:
Man sieht leicht, dass unter den Voraussetzungen des Satzes f insbesondere lokal Lipschitz-stetig auf ganz $I \times \mathbb{K}^N$ ist.

Nach Satz 2.5 besitzt das Anfangswertproblem also eine eindeutige maximale Lösung y auf einem maximalen Intervall $]I^-;I^+[$.

Zeige: $]I^-;I^+[= I$
Seien $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $I =]c;d[$.

Angenommen: $I^+ < d$.

Sei $T^+ \in]I^+;d[$. Ziel ist zu zeigen, dass y auf $[I^+;T^+[$ fortgesetzt werden kann zu einer Lösung auf $]I^+;T^+[$, was der Maximalität von y widerspricht.
Sei außerdem $T^- \in]I^-;x_0[$. Dann ist nach Voraussetzung f Lipschitz-stetig bzgl. y auf $[T^-;T^+] \times \mathbb{K}^N$. Sei L eine zugehörige Lipschitz-Konstante. Dann gilt für alle $(x,y) \in [T^+;T^-] \times \mathbb{K}^N$:

$$\begin{aligned} \|f(x,y)\| &\leq \|f(x,y) - f(x,y_0)\| + \|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\| + \|f(x_0,y_0)\| \\ &\leq L\|y - y_0\| + \underbrace{\max_{x\in[T^-;T^+]} \|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\|}_{=:c_2} + \underbrace{\|f(x_0,y_0)\|}_{=:c_3} \\ &\leq L\|y\| + \underbrace{L\|y_0\|}_{=:c_1} + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

Sei $c := c_1 + c_2 + c_3$. Dann gilt:

$$|| f(x,y)|| \le L\,||y|| + c \quad \forall\,(x,y) \in \left[T^-;T^+\right] \times \mathbb{K}^N$$

(„d.h. f wächst höchstens linear in y auf dem Streifen $[T^-;T^+] \times \mathbb{K}^N$“).

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ genügend groß gewählt so, dass

$$h := \frac{T^+ - x_0}{n} < \frac{1}{L}$$

o.B.d.A. : $x_0 - h > T^-$.

Behauptung:
Jedes der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

mit $(\xi,\eta) \in [x_0;T^+ - h] \times \mathbb{K}^N$ hat genau eine Lösung auf dem Intervall $[\xi - h;\xi + h]$.

Da die Längen der Lösungsintervalle hierbei nicht vom Anfangswertepaar abhängen, lässt sich so die maximale Lösung y zum Anfangswertepaar (x_0,y_0) in n Schritten von x_0 nach rechts bis zum Punkt $T^+ = x_0 + nh$ fortsetzen. Widerspruch.

Beweis der Behauptung:
Sei $(\xi,\eta) \in [x_0;T^+ - h] \times \mathbb{K}^N$. Sei

$$b := \frac{L\,||\eta|| + c}{1 - Lh}h \;(> 0\,!) \tag{2.12}$$

Dann gilt sicherlich:

$$R_{h,b} = [\xi - h;\xi + h] \times \left\{y \in \mathbb{K}^N \mid ||\,y - \eta|| \le b\right\} \subseteq I \times \mathbb{K}^N$$

(sogar $\subset [T^-;T^+] \times \mathbb{K}^N$.) und die Funktion f erfüllt auf $R_{h,b}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||\,f(x,y)|| &\le L\,(||\,\eta|| + b) + c \\ &= (L\,||\,\eta|| + c) + Lb \\ &\overset{(2.12)}{=} \frac{(1 - Lh)b}{h} + Lb \\ &= \frac{b}{h}, \end{aligned}$$

d.h.

$$M := \max_{R_{j,b}} ||\,f(x,y)|| \le \frac{b}{h} \Rightarrow \frac{b}{M} \ge L.$$

Deshlab:

$$\alpha = \min\left\{h, \frac{b}{M}\right\} = h.$$

Die Behauptung folgt somit aus dem Satz 2.4 von Picard-Lindelöf. □

Satz 2.7
Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$ und f sei lokal Lipschitz-stetig bzgl. y in $I \times \mathbb{K}^N$.
Ist das Wachstum von f linear beschränkt in y auf $I \times \mathbb{K}^N$ im folgenden Sinne:
es existieren stetige Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}_0^+ = [0; +\infty[$ so, dass

$$||\, f(x,y)|| \leq a(x) \cdot ||\, y(x)||\,| + b(x) \quad \forall (x,y) \in I \times \mathbb{K}^N$$

dann existiert genau eine globale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I.

Beweis:
Wie Beweis von Satz 2.6, wobei L, c die jeweiligen Maxima der stetigen Funktionen a bzw. b auf $[T^-; T^+]$ sind. □

<u>Beispiel:</u>

$$y' = \underbrace{x^4 y \sin(y) + e^{x^2}}_{=: f(x,y)}$$

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, loakl Lipschitz-stetig in y auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (da die partielle Ableitung von f nach y existiert:

  $$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^4 \left(\sin(y) + y \cos(y)\right)$$

  und stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist).

- f hat linear beschränktes Wachstum in y:

  $$|\, f(x,y)| \leq \underbrace{x^4}_{=: a(x)} |\, y| + \underbrace{e^{x^2}}_{=: b(x)}$$

  mit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Achtung:
f erfüllt nicht die globale Lipschitz-Bedingung aus Satz 2.6:

$$\frac{|\, f(x,y) - f(x,z)|}{|\, y - z|} = \frac{x^4\, |\, y \sin(y) - z \sin(z)|}{|\, y - z|}$$

mit

$$\begin{aligned} y &= (4k+1)\tfrac{\pi}{2} \\ z &= (4k+3)\tfrac{\pi}{2} \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}$$

gilt:

$$\frac{|\, f(x,y) - f(x,z)|}{|\, y - z|} = x^4 \frac{(4k+1)\frac{\pi}{2} + (4k+3)\frac{\pi}{2}}{\pi} \xrightarrow{k \to \infty} \infty$$

Aber nach Satz 2.7 kann man nun folgern, dass für jedes beliebige Anfangswertepaar $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x^4 y \sin(y) + e^{x^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

genau eine globale Lösung auf $\mathbb{R}$ besitzt.

Bemerkung:
Dies ist insofern interessant, als dass das Anfangswertproblem nicht explizit für uns lösbar ist und das Richtungsfeld der Differentialgleichung eher vermuten lässt, dass die maximalen Lösungen in endlicher Zeit „explodieren “.