Kapitel 1

Grundbegriffe und explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition 1.1
Seien $n, N \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^{nN+1}, f : D \to \mathbb{R}^N$. Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}) \tag{1.1}$$

mit Variablen $x \in \mathbb{R}$ und $y, y', ..., y^{(n)} \in \mathbb{R}^N$ heißt *(N-dimensionale) Differentialgleichung der Ordnung n* (oder *n-ter Ordnung*).
Falls $N = 1$, heißt (1.1) skalare Differentialgleichung ; falls $N > 1$, heißt (1.1) System von Differentialgleichungen.
Eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung der Differentialgleichung (1.1) , wenn

$$\left(x, u(x), u'(x), ..., u^{(n-1)}(x)\right) \in D \quad \forall x \in I$$

und

$$u^{(n)} = f\left(x, u(x), u'(x), ..., u^{(n-1)}(x)\right) \quad \forall x \in I \tag{1.2}$$

Das Intervall I heißt zur Lösung gehöriges *Existenz-* oder *Lösungsintervall* und (1.2) heißt Lösungsidentität.

Bemerkungen:

1) (1.1) ist eine (N-dimensionale) DGL n-ter Ordnung in sogenannter *expliziter Form.* Allgemein kann man auch (N-dimensionale) Differentialgleichungen n-ter Ordnung in sogenannter *impliziter Form* betrachten, die nicht notwendigerweise nach $y^{(n)}$ aufgelöst werden können. Diese sind von der Gestalt

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

mit einer Funktion $F : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)N+1} \to \mathbb{R}^N$.
Diese Art von Differentialgleichungen werden wir im Folgenden nicht betrachten.

2) (1.1) kann Komponentenweise geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
y_1^{(n)} &= f_1\left(x, y_1, \ldots, y_N, y_1', \ldots, y_N', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_N^{(n-1)}\right) \\
&\vdots \\
y_N^{(n)} &= f_N\left(x, y_1, \ldots, y_N, y_1', \ldots, y_N', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_N^{(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

3) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^N$ wird auch *rechte Seite der Differentialgleichung (1.1)* genannt.

4) Ist $u : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) , dann ist trivialerweise auch jede Einschränkung von u auf ein in I liegendes kleineres Intervall J eine Lösung der Differentialgleichung (1.1). Diese werden wir aber nicht als eine neue/andere Lösung ansehen.

Definition 1.2
Seien $n, N \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^{nN+1}, f : D \to \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}^{nN} : (\xi, \eta) \in D$. Das System von Gleichungen

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right) \\ \left(y(\xi), y'(\xi), ..., y^{(n-1)}(\xi)\right) = \eta \end{cases}$$

wird *Anfangswertproblem (AWP)* genannt.

Spezialfall: $n = 1, N = 1, f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Dann lautet das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

Eine Lösung des Anfangswertproblems ist eine auf einem Intervall I, dass ξ enthält, differenzierbare Funktion u, die für alle $x \in I$ die Differentialgleichung erfüllt und zusätzlich die Anfangsbedingung $\left(u(\xi), u'(\xi), \ldots, u^{(n-1)}(\xi)\right) = \eta$.

Wir betrachten zunächst den Fall $n = N = 1$.
In dem Fall kann die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, $(f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ graphisch interpretiert werden.
Bezeichnung:
Der Graph einer Lösung der Differentialgleichung wird auch als *Lösungskurve* oder *Integralkurve* bezeichnet.

Dann ist die Steigung der Tangente an die Lösugskurve von u im Punkt (x_0, y_0): $f(x_0, y_0)$.
Diese Beobachtung gilt für jeden Punkt aus D: wann immer eine Lösungskurve duch einen Punkt $(x, y) \in D$ verläuft, ist die Gerade mit Steigung $f(x, y)$ duch den Punkt (x, y) Tangente an die Lösungskurve.

Wir bezeichnen als *Linienelement* $(x, y(x), f(x, y))$ ein kleines Geradenstück durch den Punkt (x, y) mit Steigung $f(x, y)$ und als *Richtungsfeld* die Menge aller solchen Linienelemente. Dieses Richtungsfeld vermittelt einen Eindruck über den Verlauf der Lösungskurven, indem man versucht in das Richtungsfeld Kurven zu zeichnen, die erfüllen, dass an jedem eingezeichneten Punkt das entsprechende Linienelement tangential an die Kurve ist.

Beispiele:

1) $y' = y$

   Das Richtungsfeld ist translationsinvariant bzgl. der x-Achse.

   Bemerkung:
   Wir kennen die Lösung von 1) : $y(x) = c\,e^x, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

2) $y'(x) = x^2$
   klar: rechte Seite hängt nicht von y ab, also ist das Richtungsfeld translationsinvariant bzgl. der y-Achse.

   Hier ist klar: Lösungen von 2) sind Stammfunktionen von x^2:
   $y(x) = \frac{x^3}{3} + c, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

3) $y' = sign(x)$
   Diese Differentialgleichung hat auf keinem Intervall, dessen Inneres die 0 enthält eine Lösung.

   Beweis:
   Zwischenwertsatz für Ableitungen:
   Wenn u eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I, dann ist der Wertebereich der Ableitung $u'(I)$ zusammenhängend. □

4) $y' = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ (Indikatorfunktion von $\mathbb{Q}$)
   Diese Differentialgleichung hat überhaupt keine Lösungen.

Bemerkungen:

1) Beispiele 1) - 4) zeigen, dass die Stetigkeit der echten Seite der Differentialgleichung für die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung erforderlich ist.

2) In den Beispielen 1) $y' = y$ und 2) $y' = x^2$ existiert nicht nur eine Lösung, sondern unendlich viele, eine sogenannte *Lösungsschar*:

   1) $y_c(x) = c \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$
      Dies sind alle Lösungen der Differentialgleichung.
      Beweis:
      Sei w eine beliebige andere Lösung der Differentialgleichung $y' = y$, dann gilt

$$\begin{aligned} \big(w(x) \cdot e^{-x}\big)' &= w' \cdot e^{-x} - w \cdot e^{-x} \\ &= w \cdot e^{-x} - w \cdot e^{-x} \\ &= 0 \\ \Rightarrow w \cdot e^{-x} &= c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow w(x) &= c \cdot e^x, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

2) $y_c(x) = \frac{x^3}{3} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

wobei $c \in \mathbb{R}$ der *Lösungsscharparameter* ist.

3) Betrachtet man in den Beispielen 1) und 2) anstelle der Differentialgleichung das jeweils zugehörige Anfangswertproblem: Differentialgleichung + $y(x_0) = y_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, dann existiert *genau eine* Lösung des Anfangswertproblems. In der Tat:

   1)

   $$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   Eine Lösung des Anfangswertproblems ist notwendigerweise von der Form $y(x) = c \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$, für ein $c \in \mathbb{R}$.
   Anfangsbedingung
   $\Rightarrow y_0 = y(x_0) = c \cdot e^{x_0} \Rightarrow c = y_0 \cdot e^{-x_0}$, d.h. $y(x) = y_0 \cdot e^{x-x_0}, x \in \mathbb{R}$ ist eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

   2) Analog

   $$\begin{cases} y' = x^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   Notwendigerweise ist eine Lösung von der Form

   $$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x^3}{3} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \\ y_0 &= y(x_0) = \frac{x_0^3}{3} + c \Rightarrow c = y_0 - \frac{x_0^3}{3} \end{aligned}$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass ein Anfangswertproblem nicht nur eine Lösung besitzen kann.

<u>Beispiel:</u>

$$y' = \sqrt{|y|}$$

Diese Differentialgleichung hat zunächst einmal die triviale Lösung $y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Weitere Lösungen:

Falls $y > 0$, dann

$$\begin{aligned}
& y' = \sqrt{|\,y|} = \sqrt{y} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\sqrt{y}} y' = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (2\sqrt{y})' = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{y(x)} = x + c, \quad x > -c, c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \quad & y(x) = \frac{(x+c)^2}{4}, \quad x > -c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Analog, falls $y < 0$, dann:

$$y(x) = -\frac{(x+c)^2}{4}, \quad x < -c, c \in \mathbb{R}$$

Man rechnet leicht nach, dass die Fortsetzungen dieser Funktionen durch 0 auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \begin{cases} \frac{(x+c)^2}{4} & , x > -c \\ 0 & , x \leq -c \end{cases}, \\
y(x) &= \begin{cases} -\frac{(x+c)^2}{4} & , x < -c \\ 0 & , x \geq -c \end{cases}
\end{aligned}$$

differenzierbar auf $\mathbb{R}$ sind und die Differentialgleichung $y' = \sqrt{|\,y|}$ erfüllen.

Folglich hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|\,y|} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

unendlich viele Lösungen auf $\mathbb{R}$.

Man sieht ebenfalls, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|\,y|} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

keine eindeutige Lösung auf einem kleineren Intervall, das x_0 enthält, besitzt.

Dieses Beispiel motiviert folgende Definition:

Definition 1.3
Seien $n, N \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^{nN+1}, f : D \to \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}^{nN} : (\xi, \eta) \in D$.

i) Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $\xi \in I$.
Das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \\ \left(y(\xi), y'(\xi), ..., y^{(n-1)}(\xi)\right) = \eta \end{cases}$$

ist *(global) eindeutig lösbar auf* I, wenn gilt: sind y_1, y_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblem (AWP) auf I, dann gilt: $y_1(x) = y_2(x) \, \forall x \in I$.

ii) Das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \\ \left(y(\xi), y'(\xi), ..., y^{(n-1)}(\xi)\right) = \eta \end{cases}$$

heißt *lokal eindeutig lösbar*, wenn es ein Intervall J mit ξ im Inneren gibt, so dass (AWP) eindeutig lösbar auf J ist.

Bemerkungen:

1) globale Eindeutigkeit $\Rightarrow$ lokale Eindeutigkeit

2) Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|\, y|} \\ y(0) = 0 \quad (\text{alternativ} y(x_0) = 0, x_0 \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

ist *nicht* lokal eindeutig lösbar.

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|\, y|} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit $y_0 \neq 0$ ist zwar nicht global eindeutig lösbar auf $\mathbb{R}$, wohl aber lokal eindeutig lösbar.

3) Das vorhergehende Beispiel zeigt, dass die Stetigkeit der rechten Seite nicht ausreicht, um die Eindeutigkeit einer Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems zu erhalten.

Bevor wir uns Fragen von Existenz und Eindeutigkeit einer allgemeinen Differentialgleichung 1. Ordnung untersuchen, betrachten wir kurz zwei spezielle Lösungsmethoden für skalare Differentialgleichung 1. Ordnung.

a) mit getrennten Veränderlichen:

Das sind Differentialgleichungen vom Typ

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dabei seien $g : I \to \mathbb{R}, h : J \to \mathbb{R}$ stetig, I, J Intervalle in $\mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in J$.

Falls y_0 eine Nullstelle von h, dann ist $y(x) = y_0 \forall x \in I$ eine triviale Lösung der Differentialgleichung.

Falls y eine Lösung der Differentialgleichung und $h(y) \neq 0$:
formal:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(y)} y' &= g(x) \\ \text{d.h. } \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} &= g(x) \end{aligned}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx$$

Integration:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)}\, ds = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

Auflösen nach y.

Satz 1.1
Sei $y_0 \in \mathring{J}, h(y_0) \neq 0, x_0 \in I$, Dann gibt es eine Umgebung von x_0, in der das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

eine eindeutige Lösung besitzt. (d.h. 1.3 ist lokal eindeutig lösbar).
Die Lösung erhält man aus der Gleichung

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} ds = \int\limits_{x_0}^{x} g(t) dt \tag{1.4}$$

durch auflösen nach y.

Beweis:
Da $h(y_0) \neq 0$, existiert eine Umgebung $V =]y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon[\subset J$, so dass $h(y) \neq 0 \quad \forall\, y \in V$.
Also ist $y \mapsto \frac{1}{h(y)} \neq 0$ auf V, stetig auf V.

Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h(y)}$ auf V.
Klar: H ist strikt monoton (und differenzierbar) auf V, daher ist

$H: V \to H(V)$ bijektiv $(H(y_0) \in H(V))$.
Klar auch: $H(y_0) \in \overset{\circ}{H}(V)$.

$$(1.4) \Rightarrow H(y) = H(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Da g stetig, existiert eine Umgebung U von x_0, so dass

$$H(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \in H(V), \quad \forall\, x \in U$$

D.h. $\forall\, x \in U\, \exists\, y = y(x)$ mit

$$\begin{aligned} H(y) &= H(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \\ \Leftrightarrow y &= H^{-1}\left(H(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right) \quad \forall\, x \in U \end{aligned}$$

Klar: $x \in U \mapsto y(x)$ ist differenzierbar

$$y'(x) = \frac{1}{H'\left(H^{-1}(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right)} \cdot g(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

Eindeutigkeit: nachrechnen:
wenn w beliebige Lösung des Anfangswertproblems (1.3), dann mithilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen nachrechnen, dass w auf Umgebung von x_0 durch Formel gegeben. $\square$

Satz 1.2
Seien $g: I \to \mathbb{R}, h: J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, I, J offene Intervalle in $\mathbb{R}$. Sei η eine Nullstelle von h in J.
Angenommen es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $h\mid_{]\eta;\eta+\varepsilon[} \neq 0$ und $\int\limits_{\eta}^{\eta+\varepsilon} \frac{1}{h(s)} ds$ divergiert.
Dann gilt: falls y eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(x)h(y)$ auf einem Intervall $\tilde{I} \subset I$ ist und $\xi \in \tilde{I}$ mit $y(\xi) > \eta$ existiert, dann ist $y(x) > \eta \quad \forall x \in \tilde{I}$.

Beweis:
Angenommen die Behauptung gilt nicht.
Dann existiert also eine Lösung u der Differentialgleichung $y' = g(x)h(y)$ auf einem Intervall $\tilde{I} \subset I$ und Stellen $\xi \in \tilde{I}, x_0 \in \tilde{I}$ so, dass $u(\xi) > \eta$ und $u(x_0) = \eta$.

Angenommen $x_0 < \xi$.
Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von u ein $x_1 \in]x_0; \xi[$ so, dass $\eta < u(x_1) < \eta + \varepsilon$.

Sei dann $\overline{x}$ die erste Stelle links von x_1 mit $u(\overline{x}) = \eta$. Dann existiert wiederum aus Stetigkeitsgründen $\tilde{x} \in]\overline{x}; x_1]$ so, dass $\eta < u(x) < \eta + \varepsilon \quad \forall\, x \in]\overline{x}; \tilde{x}]$.

Nach Vorausstzung an h gilt dann: $h(u(\tilde{x})) \neq 0$.
Daher besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(\tilde{x}) = u(\tilde{x}) \end{cases}$$

nach Satz 1.1 eine eindeutige Lösung in einer Umgebung von $\tilde{x}$. Dies ist dann also u. Genauer gilt dann außerdem, dass u durch die Integralgleichung

$$\int\limits_{u(\tilde{x})}^{u(x)} \frac{1}{h(s)}\,ds = \int\limits_{\tilde{x}}^{x} g(s)\,ds$$

gegeben ist und zwar für alle x in einer Umgebung von $\tilde{x}$, auf der $h(u(x)) \neq 0$. Insbesondere gilt die Integralgleichung für alle $x \in]\overline{x}; \tilde{x}]$. Der Übergang zum Limes $x \to \overline{x}$ in der Integralgleichung liefert dann

$$\underbrace{\int\limits_{u(\tilde{x})}^{\eta} \frac{1}{h(s)}\,ds}_{\text{divergiert nach Voraussetzung}} = \underbrace{\int\limits_{\tilde{x}}^{\overline{x}} g(s)\,ds}_{\text{konvergiert}}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\square$

Korollar 1.1
Voraussetzungen wie in Satz 1.1, $y_0 \in J$ sei isolierte Nullstelle von h und h sei Lipschitzstetig[1] auf J.
Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung, die konstante Funktion $y \equiv y_0$.

Beweis:
Mit $h(y_0) = 0$ folgt

$$\frac{1}{|\,h(s)|} = \frac{1}{|\,h(s) - h(y_0)|} \geq \frac{1}{L \cdot |\,s - y_0|}$$

und $\int\limits_{y_0}^{y_0 \pm \varepsilon} \frac{1}{|\,s - y_0|}\,ds$ divergiert. $\square$

[1] $f : J \to \mathbb{R}$ heißt Lipschtizstetig $:\Leftrightarrow \exists L > 0 : \forall y_1, y_2 \in J : |\,h(y_1) - h(y_2)| \leq L \cdot |\,y_1 - y_2|$.

b) lineare Differentialgleichungen

Dies sind Differentialgleichungen vom Typ

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{1.5}$$

Im folgenden seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ steige Funktonen und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Man nennt die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y \tag{1.6}$$

die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung.
(1.6) ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.

Lösung von (1.6) durch Trennung der Variablen: $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int a(x)\,dx \\
\Rightarrow \ln(|\,y|) &= \int a(x)\,dx \\
\Rightarrow |\,y| &= \exp\left(\int a(x)\,dx\right) \\
\Rightarrow |\,y| &= \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(s)\,ds + c\right), \quad x_0, x \in I, c \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow y(x) &= c \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(s)\,ds + c\right), \quad x_0, x \in I, c \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung von (1.6), d.h. die Menge aller Lösungen von (1.6), von der Form

$$y_h(x) = c \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(s)\,ds + c\right), \quad x_0 \in I, x \in I, c \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:
Das dies alle Lösungen der Differentialgleichung (1.6) liefert, folgt aus den Sätzen 1.1 und 1.2, kann aber auch elementar nachgerechnet werden: sei nämlich

w eine beliebige Lösung von (1.6), dann gilt $w'(x) = a(x)w(x)$ und somit:

$$\begin{aligned}
\left(w(x) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)\right)' &= w'(x) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \\
&\quad -a(x)w(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \\
&= a(x)w(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \\
&\quad -a(x)w(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad w(x) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) = c, \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad w(x) \text{ ist von der gewünschten Gestalt.}
\end{aligned}$$

Lösung von (1.5):

Bemerkungen:

1) Wenn y_p eine spezielle Lösung von (1.5) auf I ist, dann ist

$$x \in I \mapsto y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)$$

eine weitere Lösung von (1.5), $\forall\, c \in \mathbb{R}$.
Beweis:
trivial:

$$\begin{aligned}
(y_p + y_h)'(x) &= a(x)y_p(x) + b(x) + a(x)y_h(x) \\
&= a(x)\left(y_p + y_h\right)(x) + b(x)
\end{aligned}$$

□

2) Umgekehrt gilt: wenn y eine weitere Lösung von (1.5) ist, dann ist $y - y_p$ eine Lösung von (1.6).
Beweis:
trivial:

$$\begin{aligned}
(y - y_p)'(x) &= a(x)y(x) + b(x) - a(x)y_p(x) - b(x) \\
&= a(x)\left(y - y_p\right)(x)
\end{aligned}$$

$\square$

d.h. $y - y_p$ ist von der Form:

$$y(x) - y_p(x) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right), \quad c \in \mathbb{R}, x, x_0 \in I$$

Mit anderen Worten: die Menge aller Lösungen von (1.5) ist von der Form:

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right), \quad x \in I$$

mit beliebigen $x_0 \in I, c \in \mathbb{R}$.

Die folgende *Methode der Variation der Konstanten* erlaubt die Berechnung einer speziellen Lösung y_p von (1.5).
Man sucht dabei nach Lösungen von (1.5) von der Gestalt

$$y_p(x) = c(x) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \tag{1.7}$$

mit einer differenzierbaren Funktion $c : I \to \mathbb{R}$.

y_p von der Gestalt (1.7) ist Lösung von (1.5)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad y_p'(x) = a(x)y_p(x) + b(x) \quad \forall\, x \in I \\
&\Leftrightarrow \quad c'(x) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) + \underbrace{c(x) \cdot a(x) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)}_{=a(x)\cdot y_p(x)} \\
&\qquad = a(x) \cdot y_p(x) + b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad c'(x) = b(x) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \\
&\Rightarrow \quad y_p(x) = c(x) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

ist spezielle Lösung von (1.5), wenn

$$\begin{aligned}
c(x) \quad &= \quad \int b(x) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) dx \\
\text{z.B. } c(x) \quad &= \quad \int_{x_0}^{x} b(s) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)\,d\sigma\right) ds
\end{aligned}$$

Bevor wir mit der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie für beliebige Differentialgleichungen beginnen, wollen wir noch folgende nützliche Ergebnisse festhalten:

Satz 1.3
Seien $n, N \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^{nN+1}, f : D \to \mathbb{R}^N$.
Dann gilt:
Das System der Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{1.8}$$

ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, ..., z_{n-1}) \end{cases} \tag{1.9}$$

Die Äquivalenz der Systeme (1.8) und (1.9) ist in dem folgenden Sinn zu verstehen:
Wenn y eine Lösung von (1.8) auf I ist, dann ist

$$\begin{cases} z_1 := y \\ z_2 := y' \\ \vdots \\ z_n := y^{(n-1)} \end{cases}$$

eine Lösung von (1.9) auf I.
Umgekehrt: wenn $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ eine Lösung von (1.9) auf einem Intervall I, dann ist $y := z_1$ eine Lösung von (1.8) auf I.

Beweis:
klar. □

Satz 1.4
Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ stetig, D offen, $(x_0, y_0) \in D, I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $u : I \to \mathbb{R}^N$ eine Funktion.
Dann sind äquivalent:

(i) u ist eine Lösung auf I des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(ii) $u \in C\left(I; \mathbb{R}^N\right)$ und es gilt:

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\, ds \quad \forall x \in I$$

Beweis:
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. $\square$

Bemerkung:
Die beiden letzten Ergebnisse gelten auch für Differentialgleichungen im Komplexen, also für $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N, u : I \to \mathbb{C}^N$. Dies gilt auch für die folgenden Existenz- und Eindeutigkeitsresultate. Daher werden wir von nun an $\mathbb{K}$ anstelle von $\mathbb{R}$ schreiben, wobei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ darstellt.