Maß- und Integrationstheorie: Hausaufgabe 0

Gruppe: Jacky Behrendt (391049), Viktor Glombik (392636) und Viet Duc Nguyen (395220)

Aufgabe 1

> To prove
>
> Seien X eine Menge, I eine nichtleere Indexmenge und $A, B_i \subset X$ für alle $i \in I$. Dann gilt
>
> $$A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i).$$

Proof. "⊂": Sei x in der linken Seite enthalten, d.h. $x \in A$ und $x \notin \bigcup_{i\in I} B_i$. Somit gilt $x \notin B_i$, also folgt $x \in A \setminus B_i$ für alle $i \in I$ und somit ist x in der rechten Seite enthalten. ✓

"⊃": Sei x in der rechten Seite enthalten, d.h. $x \in A \setminus B_i$ gilt für alle $i \in I$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B_i$ für alle $i \in I$, d.h. es existiert ein $j \in I$, sodass $x \in B_j$ gilt. Somit ist x in der linken Seite enthalten. □

kein

Proof. Alternativ gilt mit den deMorganschen Regeln

$$A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^{\complement} = A \cap \left(B_1^{\complement} \cap B_2^{\complement} \cap \ldots\right) = (A \cap B_1^{\complement}) \cap (A \cap B_1^{\complement}) \cap \ldots = \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i).$$

✓

□

Aufgabe 2

Seien X und Y Mengen, I eine nichtleere Indexmenge und $A, A_i \subset Y$ für alle $i \in I$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$
2. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$
3. $f^{-1}(A^{\complement}) = (f^{-1}(A))^{\complement}$

Lösung.

> To prove
>
> $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

Proof. Sei $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Das ist äquivalent zu $f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i$, d.h. es existiert ein $i \in I$ mit $f(x) \in A_i$ bzw. $x \in f^{-1}(A_i)$. Das ist wiederum dazu äquivalent, dass $x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ gilt. □

To prove

$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

Proof. Sei $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, d.h. $f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Das ist äquivalent dazu, dass $f(x) \in A_i$, d.h. $x \in f^{-1}(A_i)$ für alle $i \in I$ gilt, was wiederum dazu äquivalent ist, dass $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ gilt. □

To prove

$f^{-1}(A^\complement) = (f^{-1}(A))^\complement$.

Proof. Sei $x \in f^{-1}(A^\complement)$, dann ist $f(x) \in A^\complement$, d.h. $f(x) \notin A$, d.h. $x \notin f^{-1}(A)$, was dazu äquivalent ist, dass $x \in f^{-1}(A)^\complement$ gilt. □

Aufgabe 3

Formuliere das sogenannte Maßproblem. Auf wen geht es zurück?

Lösung. Finde eine Funktion m auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, welche allen (beschränkten) Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ein Maß für ihre Größe (analog zu Flächeninhalt und Volumen) $m(A)$ zuordnet. Die Funktion soll

1. allen elementargeometrischen Objekten, wie z.B. Quadern, ihr elementargeometrisches Volumen zuordnen,
2. kongruente Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ das selbe Maß zuordnen (Translationsinvarianz),
3. einer abzählbaren Vereinigung paarweise disjunkten Mengen als Maß die Summe der Maße der disjunkten "Teile" zuordnen.

Das Maßproblem geht auf Henri-Léon Lebesgue zurück. Giuseppe Vitali zeigt 1905, dass das Maßproblem für $n = 1$ nicht lösbar ist, indem er die Vitali-Menge konstruierte, der keine Maßzahl im oben genannten Sinne zugeordnet werden kann.

Aufgabe 4

Formuliere den Satz von Banach-Tarski. Erläutere mit eigenen Worten, warum dieses Resultat zunächst widersprüchlich erscheint.

Lösung. Der Satz von Banach-Tarski besagt das eine Kugel in endlich viele Teile zerlegt werden kann und dann so zusammengesetzt werden kann, dass man zwei Kugeln erhält, die identisch zu der Anfänglichen sind.

Dieses Resultat widerspricht offensichtlich der geometrischen Intuition und kann damit erklärt werden, dass die Kugeln als Punktmengen verstanden werden und sich damit anders verhalten, als die Objekte der echten Welt.