TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2018/19
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: W. König
Assistent: A. Schmeding Abgabe: 05.11.-09.11.2018

3. Übung Analysis III für Mathematiker(innen)

(mehrdimensionales Riemann Integral)

Themen der großen Übung am 29.10.

Ist Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$, so dass $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, wobei die Q_i eine Familie von volumenfremden Quadern sind (d.h. $Q_j \cap Q_j$ hat leeres Inneres für alle $i \neq j$). Wir beweisen für stetiges $F \colon Q \to \mathbb{R}$ folgende Identität

$$\int_Q F \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} \int_{Q_i} F \, \mathrm{d}x.$$

Daraus schließen wir, dass die Definition des Integrals $\int_Q h \, \mathrm{d}x$ für eine Funktion $h \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ nicht von der Wahl des Quaders Q mit $\operatorname{supp} h \subseteq Q$ abhängt.

Satz *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \colon [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche in U stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist auch*

$$F \colon U \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \int_a^b f(t,v) \, \mathrm{d}t,$$

stetig differenzierbar mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} F = \int_a^b \frac{\partial}{\partial v} f(t,v) \, \mathrm{d}t$.

Satz von Fubini für stetige Funktionen: *Seien $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ein kompakter Quader in $\mathbb{R}^n$ und $f \colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für jede Permutation $i_1, \ldots, i_n$ der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$, dass die folgenden Integrale gleich sind*

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \right) \ldots \right) \mathrm{d}x_n = \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_{i_1} \right) \ldots \right) \mathrm{d}x_{i_n}$$

Tutoriumsvorschläge

5. Aufgabe

$\star$

Sind X, Y topologische Räume, dann definieren wir für eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ den *Träger* $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$. Mit $\mathcal{C}_\mathrm{c}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Beweisen Sie:

(i) Für $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$.

(ii) $\mathcal{C}_\mathrm{c}(X)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}(X)$.

(iii) Ist X kompakt so gilt $\mathcal{C}_\mathrm{c}(X) = \mathcal{C}(X)$.

(iv) Zeigen Sie, dass für $X = \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$F \mapsto \|F\|_1 := \int_Q |F(x)|\,\mathrm{d}x, \quad \text{falls } Q \text{ ein Quader ist mit } \operatorname{supp} F \subseteq Q,$$

eine Norm auf $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^n)$ definiert.

6. Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(i) $I := \int_Q (1 + x\cos(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad$ mit $Q := [0,1] \times [0,\pi]$,

(ii) $J := \int_Q \frac{\mathrm{e}^z}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad$ mit $Q := [1,2] \times [0,1] \times [-1,1]$.

7. Aufgabe

Wir wollen zeigen, dass der normierte Raum $(\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ aus Aufgabe 5 nicht vollständig ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei eine stetige Funktion $f_k\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften gewählt: $f_k(t) = 1$ für $|t| \leq 1 - \frac{1}{k}$ und $f_k(t) = 0$ für $|t| \geq 1$.

Machen Sie sich klar, dass eine solche Folge $(f_k)_k$ existiert (Zeichnung!). Zeigen Sie, dass

(i) $(f_k)_k$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_1$ bildet.

(ii) es kein $f \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ mit $\|f - f_k\|_1 \to_{k\to\infty} 0$ geben kann.

Hausaufgaben

7. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Seien X, Y topologische Räume, $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $f\colon X \times Y \to E$ eine stetige Abbildung. Sei $K \subseteq Y$ kompakt und $r > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ offene Mengen $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und $V \subseteq Y$ mit $K \subseteq V$ existieren, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$\|f(u,v) - f(x,v)\| < r \qquad \forall (u,v) \in U \times V.$$

(ii) Sei P ein topologischer Raum und $a < b$ reelle Zahlen, sowie $f\colon P \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g\colon P \to \mathbb{R}, \quad g(p) := \int_a^b f(p,t)\,\mathrm{d}t$$

wohldefiniert und stetig ist.

8. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f := \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \dots, x_d) \mapsto \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i),$$

in $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ liegt und dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(x_i)\,\mathrm{d}x_i.$$

9. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$J\colon \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad J(f) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(z),$$

wohldefiniert ist, und untersuchen Sie J auf Monotonie, Linearität und Translationsinvarianz.

10. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^3 - x^2)(y-1)\sin(xy), & \text{falls } (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^2)$ liegt, und berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Gesamtpunktzahl: 20