

Kurze Einführung in die Finite-Elemente-Methode

Stefan Girke

Wissenschaftliches Rechnen 2013

1 Die Finite-Elemente-Methode

In diesem Skript soll eine kurze Einführung in die Finite-Elemente-Methode gegeben werden. Wir beschränken unsere Betrachtungen dabei auf elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in 2 Dimensionen.

1.1 Grundlegende Begriffe

Definition 1.1 (Linearform). Ist V ein K -Vektorraum, so nennen wir eine Abbildung $f : V \rightarrow K$ einen **Linearform** auf V , falls sie linear ist, d.h.

$$f(\lambda_1 v + \lambda_2 w) = \lambda_1 f(v) + \lambda_2 f(w).$$

Definition 1.2 (Bilinearform). Seien V, W zwei K -Vektorräume. Eine Abbildung $B : V \times W \rightarrow K$ heißt **Bilinearform**, falls sie bzgl. des ersten bzw. des zweiten Arguments linear ist, d.h.

$$\begin{aligned} B(v_1 + v_2, w) &= B(v_1, w) + B(v_2, w), \\ B(v, w_1 + w_2) &= B(v, w_1) + B(v, w_2), \\ B(\lambda v, w) &= \lambda B(v, w) = B(v, \lambda w). \end{aligned}$$

Definition 1.3 (Divergenz-, Gradient- und Laplace-Operator). Mit

$$\nabla u(x) := (\partial_1 u(x), \partial_2 u(x))^\top$$

bezeichnen wir den **Gradienten** einer Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Mit

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x) := \sum_{i=1}^2 \partial_i \mathbf{v}_i(x)$$

bezeichnen wir die **Divergenz** einer Funktion $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Mit

$$\Delta u(x) := \nabla \cdot (\nabla u(x)) = \sum_{i=1}^2 \partial_i^2 u(x)$$

bezeichnen wir den **Laplace-Operator** einer Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.4. Für zeitabhängige Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ bezieht sich der Gradient (bzw. Divergenz bzw. Laplace) gewöhnlicherweise nur auf die Ortsvariablen, d.h.

$$\nabla u(x, t) := (\partial_1 u(x, t), \partial_2 u(x, t))^\top$$

usw.

Definition 1.5 (L^p -Räume). Sei $p \in [1, \infty)$ und Ω ein Gebiet. Dann bezeichnen wir mit $L^p(\Omega)$ den Raum

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ Lebesgue-messbar, } \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Mit der Norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p}$$

ist $L^p(\Omega)$ ein Banachraum.

Auf $L^2(\Omega)$ ist durch $\int_{\Omega} uv$ ein Skalarprodukt definiert, dass $L^2(\Omega)$ zu einem Hilbertraum macht.

$L^\infty(\Omega)$ bezeichnet den Raum

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ Lebesgue-messbar, ess sup } |u| < \infty\}.$$

Definition 1.6 (Lipschitz-Gebiet). Eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Lipschitz-Gebiet**, genau dann wenn der Rand $\partial\Omega$ sich lokal in einer jeweils geeigneten Richtung als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion schreiben lässt und Ω auf einer Seite des Graphen liegt.

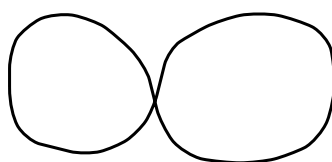


Abbildung 1: Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt

Satz 1.7 (Satz von Gauß für Lipschitz-Gebiete). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Lipschitz-Gebiet und $\mathbf{v} \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2) \cap C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld mit $\nabla \cdot \mathbf{v} \in L^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma(x),$$

wobei \mathbf{n} die äußere Normale an den Rand von Ω bezeichne.

Satz 1.8 (partielle Integration). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, sodass der Satz von Gauß gilt und $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \nabla \cdot (\mathbf{v}(x)) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\sigma(x).$$

Definition 1.9 (Lokale Integrierbarkeit). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Dann definieren wir

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u \in L^1(K) \mid \forall K \subseteq \Omega, K \text{ kompakt}\}.$$

Beispiel 1.10 (Lokale Integrierbarkeit). Für $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ gilt $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, aber $u \notin L^1(\Omega)$.

Definition 1.11 (Schwache Ableitung). Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex. Eine Funktion $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ besitzt eine schwache Ableitung $v_\alpha \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, wenn gilt

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir schreiben $v_\alpha = D^\alpha u$ für die schwache Ableitung.

Beispiel 1.12 (Schwache Ableitung von $|x|$).

$$\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx = \int_{-1}^1 \text{sign}(x) \varphi(x) dx$$

Definition 1.13 (Sobolev-Räume). Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$ und $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Wir nehmen an, dass alle schwachen, partiellen Ableitungen $D^\alpha u$ für $|\alpha| \leq m$ existieren. Dann definieren wir die **Sobolevnormen** $\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$ durch

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

für $1 \leq p < \infty$ bzw.

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Hiermit definieren wir die **Sobolev-Räume** $H^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H^{m,p}(\Omega) := \{u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega) \mid \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} < \infty\}.$$

Für $p = 2$ schreiben wir $H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$.

Definition 1.14 (Schwache Nullrandwerte). Für $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Sobolevräume mit Nullrandwerte durch

$$H_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}}.$$

Dies macht $H_0^{m,p}(\Omega)$ zu einem abgeschlossenen Teilraum von $H^{m,p}(\Omega)$.

Beispiel 1.15. Sei $\Omega := B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log |\log |x||$, dann gilt: $u \in H^{1,2}(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$.

Bemerkung 1.16 (Vollständigkeit der Sobolevräume). Klassische Funktionenräume sind bzgl. L^p -Normen nicht vollständig, Sobolevräume schon!

1.2 Das Poisson-Problem

Als Modellbeispiel für elliptische Differentialgleichungen betrachten wir zunächst ein einfaches Poisson-Problem.

Definition 1.17 (Poisson-Problem (klassische Formulierung)). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in C^0(\Omega)$. Gesucht ist die klassische Lösung des Poisson-Problems $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Definition 1.18 (Schwache Formulierung des Poisson-Problems). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems für die Poisson-Gleichung, falls

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

gilt. Fassen wir die linke Seite als Bilinearform und die rechte Seite als Funktional auf, dann können wir mit den Definitionen

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \\ b(v) &:= \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

auch schreiben: Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt **schwache Lösung** des

Randwertproblems für die Poisson-Gleichung, falls

$$a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

gilt.

1.3 Das Rechengitter (konforme Triangulierungen)

Definition 1.19 (Referenzelement). Im \mathbb{R}^2 bezeichnen wir das Dreieck \hat{T} mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ als **Referenzelement**. In diesem Fall sprechen wir auch von dem **Referenzdreieck**.

Definition 1.20 (Entitäten, Subentitäten). Dreiecke bezeichnen wir allgemeiner auch als **Entitäten** und bezeichnen die Kanten eines Dreiecks als **Subentitäten** der Kodimension 1 und Ecken eines Dreiecks als Subentitäten der Kodimension 2.

Definition 1.21 (konforme Triangulierung). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein polygonal beschränktes Gebiet und $\mathcal{T}_h = \{T_i \mid i \in \{1, \dots, M\}\}$, wobei T_1, \dots, T_N Dreiecke sind. \mathcal{T}_h ist eine **konforme Triangulierung**, falls $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \overline{T} = \overline{\Omega}$ und falls für zwei nicht identische Simples $T, T' \in \mathcal{T}_h$ der Schnitt $\overline{T} \cap \overline{T'}$ eine Entität der Kodimension 1 bzw. 2 ist.

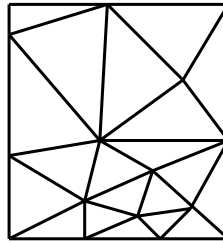


Abbildung 2: konforme Triangulierungen

Definition 1.22 (Referenzabbildung). Zu jedem beliebigem Dreieck T mit den Eckpunkten a_0 , a_1 und a_2 gibt es eine affine Transformation $F_T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass jeder Punkt im Referenzelement \hat{T} auf T abgebildet wird. Diese

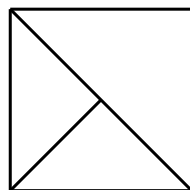


Abbildung 3: nicht konforme Triangulierung (hängender Knoten)

Abbildung nennen wir **Referenzabbildung** und ist gegeben durch $F_T(x) = A_T x + b_T$ mit $A_T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $b_T \in \mathbb{R}^2$.

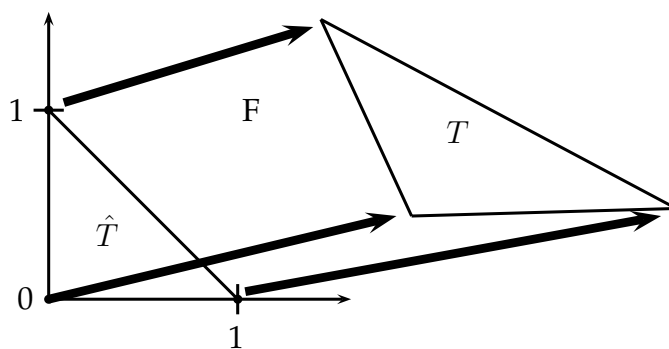


Abbildung 4: Referenzabbildung

1.4 Finite Elemente-Verfahren

Definition 1.23 (Lagrange-Gitter). Wir definieren auf einem Dreieck T das **Lagrange-Gitter** k -ter Ordnung $G_k(T)$ durch „gleichmäßiges Anordnen“ von Punkten, wie in Abbildung 5 skizziert.

Definition 1.24 (Simpliziales Lagrange-Element). Die Anzahl der Punkt in $G_k(T)$ werde mit n bezeichnet. Durch die Angabe von Werten $p(x_i)$ in den Punkten $x_i \in \mathcal{N} := G_k(T)$, $i = 1, \dots, n$ ist eindeutig eine Funktion $p \in \mathbb{P}^k(T)$ definiert. Durch

$$\Phi := \{\varphi_i \mid \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$$

ist eine nodale Basis des Raums $\mathbb{P}^k(T)$ gegeben. Wir nennen das Tripel (T, Φ, \mathcal{N}) **simpliziales Lagrange-Element** vom Grad k .

Definition 1.25 (lokale Freiheitsgrade (degrees of freedom, dofs)). Sei $p_h \in \mathbb{P}^k(T)$ für ein Dreieck T und eine Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ durch das simpliziale Lagrange-Element gegeben, dann gilt

$$p_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x),$$

wobei $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ **lokale Freiheitsgrade**, oder im Englischen „degrees of freedom“, kurz „dofs“ genannt werden.

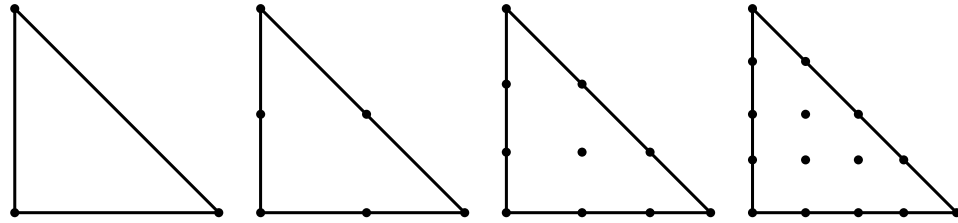


Abbildung 5: Freiheitsgrade lineares/ quadratisches/ kubisches Lagrange-Element/ Lagrange-Element vierter Ordnung

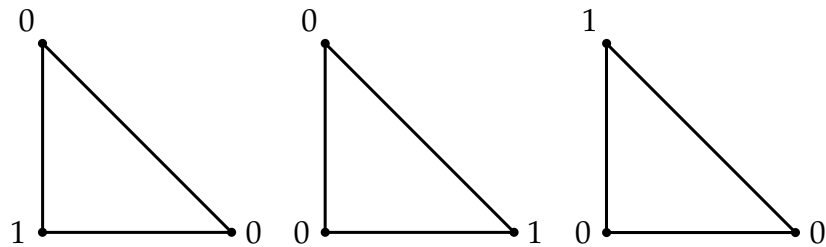


Abbildung 6: Basisfunktionen des linearen Lagrange-Elements festgelegt durch Freiheitsgrade

Beispiel 1.26 (Lineares simpliziales Lagrange-Element). Durch die Vorgabe von Funktionswerten in den Eckpunkten eines Dreiecks T , ist eindeutig eine lineare Funktion bestimmt. Setzt man die Funktionswerte wie in Abbildung 6, so erhält man drei linear unabhängige Basisfunktionen.

Beispiel 1.27 (quadratisches simpliziales Lagrange-Element). Analog zu dem linearen Fall setzt man die 6 unterschiedlichen Freiheitsgrade auf 0 bzw.

1 und erhält so 6 linear unabhängige Basisfunktionen. In Abbildung 7 ist eine Basisfunktion skizziert.

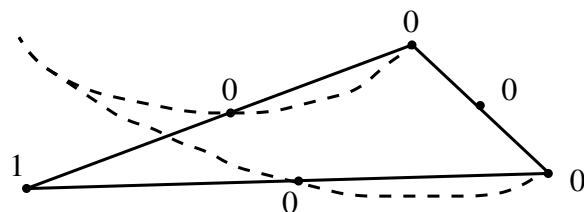


Abbildung 7: Basisfunktion eines quadratischen Lagrange-Elements

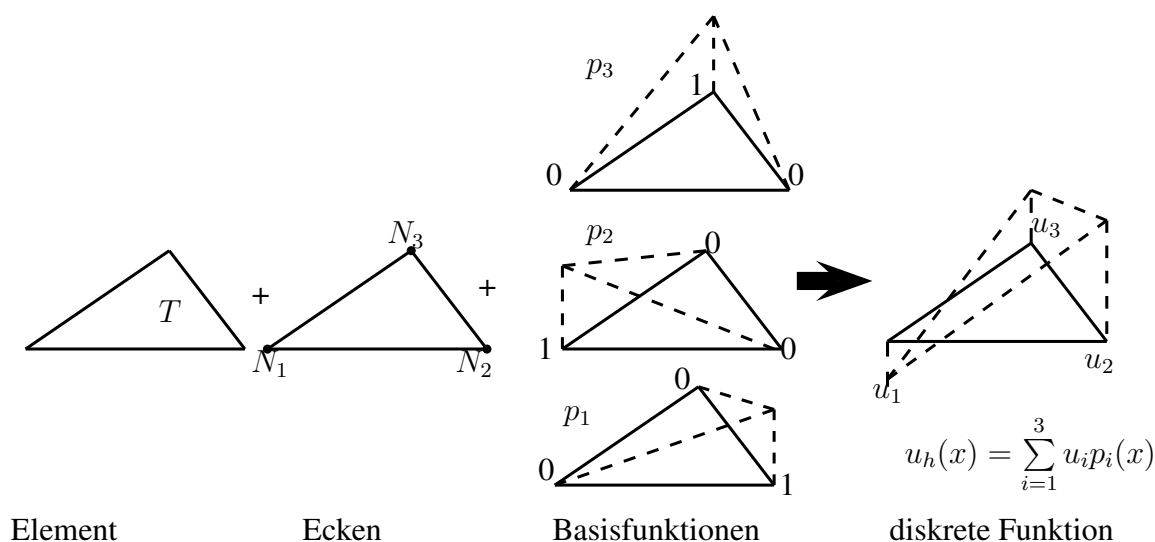


Abbildung 8: vom simplizialen Lagrange-Element zur diskreten Funktion

Definition 1.28 (Lagrange-Finite-Elemente-Raum). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und \mathcal{T}_h eine konforme Triangulierung von Ω . Wir definieren den Raum der Lagrange-Finite-Elemente auf simplizialem Gitter S_h^k durch

$$S_h^k := \{v_h \in C^0(\Omega) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T), T \in \mathcal{T}_h\}$$

Da das simpliziale Lagrange-Element nur lokale Informationen bereitstellt, müssen ein paar weitere Überlegungen gemacht werden, um eine Basis des

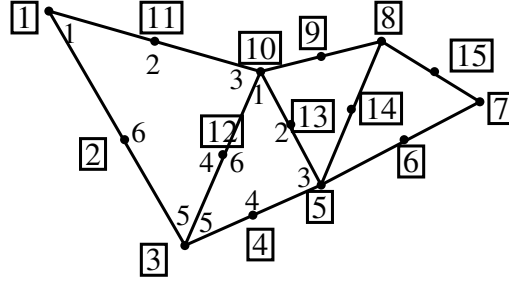


Abbildung 9: Vergleich lokale/globale Dof-Nummerierung

Lagrange-Finite-Elemente-Raums mithilfe von Lagrange-Elementen darstellen zu können. Insbesondere muss die Stetigkeitsbedingung zwischen den Elementrändern erfüllt sein. Dies geschieht automatisch, indem lokale Dofs unterschiedlicher Elemente miteinander indentifiziert werden. Man erhält eine globale Nummerierung für globale Freiheitsgrade.

Bemerkung 1.29 (Abbildung von lokale in globale Freiheitsgrade). Sei $T \in \mathcal{T}_h$ ein Dreieck. Wir definieren $\nu_T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ als injektive Funktion, die jedem lokalen Freiheitsgrad eine eindeutige globale Nummer/Freiheitsgrad (wie in Abbildung 9) zuordnet.

Definition 1.30 (Basis des Lagrange-Finite-Elemente-Raums/Diskrete Funktionen). Eine Basis kann nun aus den lokalen Lagrange-Elementen bestimmt werden. Bezeichne N die Anzahl der Freiheitsgrade von S_h^k . Nun lässt sich jede diskrete Funktion $v_h \in S_h^k$ darstellen als

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x),$$

wobei $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}$ die Freiheitsgrade von S_h^k seien. Mithilfe der Abbildung ν_T können wir dies auch lokal formulieren

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^n u_{\nu_T(i)} \varphi_i(x).$$

Diese Formulierung können wir mithilfe des Referenzdreiecks \hat{T} mit Basis

$\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n$ und zugehöriger Referenzabbildung F_T darstellen:

$$v_h(F_T(\hat{x})) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^n u_{\nu_T(i)} \hat{\varphi}_i(\hat{x}).$$

Abbildung 10 zeigt eine globale Basis von S_h^k für $k = 1$.

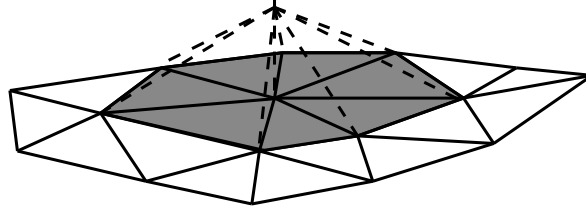


Abbildung 10: globale Basisfunktion

Definition 1.31 (Finite-Elemente-Verfahren). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und \mathcal{T}_h eine konforme Triangulierung von Ω . Wir definieren $S_{h,0}^k := S_h^k \cap \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$. Dann ist $S_{h,0}^k \subseteq H_0^1(\Omega)$ und $u_h \in S_{h,0}^k$ heißt **Lösung des Finite-Elemente-Verfahrens** für das Poisson-Problem, falls gilt

$$a(u_h, v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h \in S_{h,0}^k.$$

1.5 Aufstellen des Gleichungssystems

Da die Gleichung $a(u_h, v_h) = b(v_h)$ für alle Testfunktionen $v_h \in S_{h,0}^k$ gilt, ist sie insbesondere auch für Testfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ einer Basis von S_h^k erfüllt, d.h. wir fordern für die Lösung $u_h \in S_h^k$

$$a(u_h, \varphi_j) = b(\varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Mit der Darstellung von u_h durch die Basis können wir $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$ schreiben, d.h.

$$a\left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i, \varphi_j\right) = b(\varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = b(\varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Definieren wir also die Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ durch

$$\mathbf{S}_{ji} := a(\varphi_i, \varphi_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

und die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &:= u_i & \forall i = 1, \dots, N, \\ \mathbf{f}_i &:= b(\varphi_i) & \forall i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

so ist u_h genau dann Lösung des Finite-Elemente-Verfahrens, wenn \mathbf{u} das folgende lineare Gleichungssystem löst

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Wir möchten nun die rechte Seite des linearen Gleichungssystems aufstellen (=assemblieren). Dabei treten Integrale über nicht triviale Funktionen auf, die nur mithilfe numerischer Quadraturen berechnet werden können.

Definition 1.32 (Quadraturen). Eine **Quadratur** $\hat{Q} = (W, X)$ der Ordnung r mit Gewichten $W = (\hat{w}_\alpha)_{\alpha=1}^r \subseteq \mathbb{R}$ und Quadraturpunkten $X = (\hat{x}_\alpha)_{\alpha=1}^r \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\hat{Q}(\hat{g}) := \sum_{\alpha=1}^r \hat{w}_\alpha \hat{g}(\hat{x}_\alpha),$$

approximiert für $\hat{g} \in C^0(\hat{T})$ das Integral $\int_{\hat{T}} g(x) dx$. Für $g \in C^0(T)$ wird mittels

$$Q_T(g) := \sum_{\alpha=1}^r |\det A_T| \hat{w}_\alpha g(F_T(\hat{x}_\alpha))$$

eine Quadratur für $T \in \mathcal{T}_h$ induziert.

Definition 1.33 (Assemblieren der rechten Seite).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_i &= \int_{\Omega} f \varphi_i \approx \sum_{T \in \mathcal{T}_h} Q_T(f \varphi_i) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\alpha=1}^r |\det A_T| \hat{w}_{\alpha} f(F_T(\hat{w}_{\alpha})) \varphi_i(F_T(\hat{x}_{\alpha})) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\alpha=1}^r |\det A_T| \hat{w}_{\alpha} f(F_T(\hat{w}_{\alpha})) \hat{\varphi}_i(\hat{x}_{\alpha}) \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

Aus Effizienzgründen kann man auch zunächst nur die lokalen rechten Seiten berechnen

$$\mathbf{f}_i^T = \int_T f \varphi_i \approx Q_T(f \varphi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

und dann

$$\mathbf{f} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^T e_{\nu_T(i)}.$$

Definition 1.34 (Assemblieren der Systemmatrix). Die Einträge der Matrix

$$\mathbf{S}_{ij} := \int_{\Omega} \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_i(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N$$

können wir durch lokale Systemmatrizen darstellen

$$\mathbf{s}^T := \left(\int_T \nabla \varphi_j^T(x) \cdot \nabla \varphi_i^T(x) dx \right)_{i,j=0}^n.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{S} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{k,l=0}^n \mathbf{s}_{kl}^T E_{\nu_T(k)\nu_T(l)},$$

mit der Matrix $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{k,l=0}^N$. Zur Berechnung der Systemmatrix \mathbf{s}^T

verwenden wir die Transformation auf das Referenzelement

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{ij}^T &= \int_T \nabla \varphi_i^T \cdot \nabla \varphi_j^T \\ &= \int_T |\det A_T| A_T^{-\top} \nabla \hat{\varphi}_i \cdot A_T^{-\top} \nabla \hat{\varphi}_j.\end{aligned}$$

und berechnen die nicht konstanten Terme $\nabla \hat{\varphi}_i$ bzw. $\nabla \hat{\varphi}_j$ wieder mit numerischen Quadraturen.

1.6 Lösung des Gleichungssystems

Zum Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

verwendet man keine direkten Löser (z.B. Gauß-Elimination), sondern numerische Löser, z.B. das cg-Verfahren für positiv definite und symmetrische Matrizen.