Aufgabe 11.1

Zweite Teilaufgabe

Zu zeigen: Sei $t_0 \in [0,T) \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $a, b \in L^\infty(0,t_0)$ und $\lambda \in L^1(0,t_0)$ mit $\lambda(t) \geq 0$ fast überall in $t \in (0,t_0)$. Falls für fast alle $t \in (0,t_0)$ folgendes gilt:

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)a(s)ds, \tag{1}$$

so folgt für fast alle $t \in (0,t_0)$, dass

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)ds.$$

Beweis. Wir führen dies auf den Lemma von Gronwall für $t > t_0$ zurück. Die Idee ist eine Substitution der Form $z = t_0 - t$. Da $t \in (0,t_0)$, gilt auch $z \in (0,t_0)$. Durch Einsetzen von $t = t_0 - z$ in (1), erhält man

$$\begin{aligned}
a(t) &\leq b(t) + \int_{t_0}^{t_0-z} \lambda(s)a(s)ds \\
&= b(t) - \int_{t_0-z}^{t_0} \lambda(s)a(s)ds \\
&= b(t) - (\int_0^{t_0} \lambda(s)a(s)ds - \int_0^{t_0-z} \lambda(s)a(s)ds) \\
&= \underbrace{b(t) - \int_0^{t_0} \lambda(s)a(s)ds}_{:=\tilde{b}(t)} + \int_0^{t} \lambda(s)a(s)ds.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist also äquivalent zu (1). Es gilt $\tilde{b} \in L^\infty(0,t_0)$, da $\int_0^{t_0} \lambda(s)a(s)ds$ nur eine Konstante ist und b bereits in $L^\infty(0,t_0)$ ist. Wir können hierauf den Lemma von Gronwall für $t > t_0$ anwenden. Das Lemma besagt:

Lemma 1. *Sei $u_0 \in [0,U) \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $a, b \in L^\infty(u_0,U)$ und $\lambda \in L^1(u_0,U)$ mit $\lambda(u) \geq 0$ fast überall in $u \in (u_0,U)$. Falls für fast alle $u \in (u_0,U)$ folgendes gilt:*

$$a(u) \leq b(u) + \int_{u_0}^{u} \lambda(s)a(s)ds, \tag{2}$$

so folgt für fast alle $u \in (u_0,U)$, dass

$$a(u) \leq b(u) + \int_{u_0}^{u} e^{\Lambda(u)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)ds.$$

Um das Lemma anzuwenden, setzen wir $u_0 = 0$ und $U = t_0$ und somit folgt für fast alle $t \in (0,t_0)$, dass

$$a(t) \leq \tilde{b}(t) + \int_0^{t} e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)\tilde{b}(s)ds = b(t) - \int_0^{t_0} \lambda(s)a(s)ds + \int_0^{t} e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)ds.$$

Wir vereinfachen den Term auf der rechten Seite und erhalten

$$\begin{aligned}
a(t) &\leq b(t) - (\int_0^{t_0} \lambda(s)a(s)ds + \int_t^{0} e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)ds) \\
&= b(t) +
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Erste Teilaufgabe

Wir wissen unter diesen Voraussetzungen, dass es auf jeden Fall globale Lösung $u : [0,T] \to X$ gibt mit $u(t_0) = u_0$ und $v : [0,T] \to X$ mit $v(t_0) = v_0$ aufgrund von Picard Lindelöf. O.B.d.A. sei $t_0 > t$. Mit dem Haupsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir die Abschätzung

$$||v(t) - u(t)|| \leq ||v_0 - u_0|| + \int_t^{t_0} ||f(s, v(s)) - f(s, u(s))||ds.$$

Mit der Lipschitz-Bedingung erhalten wir

$$||v(t) - u(t)|| \leq ||v_0 - u_0|| + L \int_t^{t_0} ||v(s) - u(s)||ds.$$

Mit dem Lemma von Gronwall aus der VL und dem Lemma von Gronwall aus Aufgabe 1ii erhalten wir, dass für alle $t \in [0,T]$ gilt

$$||u(t) - v(t)|| \leq e^{L(t_0 - t)}||u_0 - v_0||.$$

Da $0 \leq t_0 \leq T$ gilt nun

$$||u(t) - v(t)|| \leq e^{LT}||u_0 - v_0||.$$

Zweite Teilaufgabe

Für f und g gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöf zwei globale Lösungen u und v mit dem selben Anfangswert $u(t_0) = v(t_0)$. O.b.d.A. sei $t_0 > t$. Wie in der ersten Teilaufgabe erhalten wir die Abschätzung

$$||v(t) - u(t)|| \leq ||v_0 - u_0|| + \int_t^{t_0} ||f(s, v(s)) - f(s, u(s))||ds = \int_t^{t_0} ||f(s, v(s)) - f(s, u(s))||ds.$$

Nun folgt,

$$||v(t) - u(t)|| \leq \int_t^{t_0} ||f(s, v(s)) - f(s, u(s))||ds + \underbrace{\int_t^{t_0} ||f(s, v(s)) - g(s, v(s))||ds}_{\geq 0}.$$

Mit der Lipschitz-Bedingung erhalten wir

$$||v(t) - u(t)|| \leq L_f \int_t^{t_0} ||v(s) - u(s)||ds + \sup_{(s,\alpha)\in[0,T]\times X} (||f(s,\alpha) - g(s,\alpha)||) \cdot (t_0 - t).$$

Ganz analog erhalten wir eine Abschätzung für g mit

$$||v(t) - u(t)|| \leq L_g \int_t^{t_0} ||v(s) - u(s)||ds + \sup_{(s,\alpha)\in[0,T]\times X} (||f(s,\alpha) - g(s,\alpha)||) \cdot (t_0 - t).$$

Sei L das Minimum von L_g und L_f. So ist dann

$$||v(t) - u(t)|| \leq L \int_t^{t_0} ||v(s) - u(s)||ds + \sup_{(s,\alpha)\in[0,T]\times X} (||f(s,\alpha) - g(s,\alpha)||) \cdot (t_0 - t).$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt dann

$$||v(t) - u(t)|| \leq e^{L(t_0 - t)} \sup_{(s,\alpha)\in[0,T]\times X} (||f(s,\alpha) - g(s,\alpha)||) \cdot (t_0 - t) \leq e^{LT} \sup_{(s,\alpha)\in[0,T]\times X} (||f(s,\alpha) - g(s,\alpha)||) \cdot T.$$