1 Mathematische Modellierung von Zufallsexperimenten

1.1 Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die mathematische Beschreibung von ***Zufallsexperimenten***, das heißt zeitlich wie örtliche fest umrissene Vorgänge mit unbestimmten Ausgang.

Beispiel 1.1

- Werfen eines Würfels oder einer Münze
- Zufälliges Ziehen einer Kugel aus einer Urne
- Kartenspiele
- Wahlergebnis der nächsten Europawahl
- Temperatur am Alexanderplatz am 11. April 2019 um 12:00 Uhr
- Lebensdauer von technischen Geräten

Die Gesamtheit aller möglichen Ausgänge/ Ergebnisse eines Zufallsexperimentes heißt ***Ergebnisraum*** oder ***Stichprobenraum*** (letzteres wird eher in der Statistik verwendet). Dies wird mit Ω bezeichnet. Ein Element $\omega \in \Omega$ heißt ***Ergebnis*** oder ***Stichprobe***.

Beispiel 1.2

- einmaligen Würfeln:
$$\Omega = \{1, ..., 6\}, \quad |\Omega| = 6$$
- zweimaligen Würfeln:
$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,...,6\}\} = \{1,...,6\} \times \{1,...,6\} = \{1,...,6\}^2, \quad |\Omega| = 36$$
- Münzwurf: $\Omega = \{\text{Kopf, Zahl}\}$ oder $\Omega = \{0, 1\}$.
- Anzahl der Autos am Funkturm am 11. April 2019: $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- Temperatur in Grad Kelvin am Alexanderplatz, d.h. $\Omega = [0, \infty)$ oder realistischer $\Omega = [270, 310]$

In den ersten drei Beispielen ist der Ergebnisraum *endlich*, im vorletzten Beispiel *abzählbar unendlich* und im letzten Beispiel *kontinuierlich* (d.h. überabzählbar unendlich). (i)-(iv) nennt man **diskrete** Ergebnisräume.

Ereignisse sind Teilmengen $A \subset \Omega$. Die Gesamtheit aller Ereignisse wird mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet (Potenzmenge). Besonders hervorzuheben sind

- das *sichere Ereignis*: Ω
- das *unmögliche Ereignis*: $\emptyset$
- die *Elementarereignisse*: $\{\omega\}$ für $\omega \in \Omega$

Beispiel 1.3

1. $A = \{1, 3, 5\} =$ "Augenzahl ungerade"
2. $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} =$ "Augensumme > 10"
3. $A = \{n : n \geq 40000\} =$ "ungewöhnlich hohes Verkehrsaufkommen"

Operationen auf Ereignissen

1. $A \cup B = A$ oder B tritt ein

2. $A \cup ... \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k =$ mindestens eins der A_k tritt ein

3. $A \cap B$ = A und B treten ein

4. $A \cap ... \cap A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k =$ alle A_k treten ein

5. $A^c := \Omega \setminus A = \{\omega : \omega \notin A\} = A$ tritt *nicht* ein ($\emptyset^c = \Omega, \Omega^c = \emptyset$)

Wichtig 1

Insbesondere im Falle kontinuierlicher Mengen ist es im allgemeinen unmöglich *jedem* Ereignis in konsistenter Weise Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen (siehe Satz 1.15). Daher schränkt man sich auf *kleinere* Mengensysteme ein.

Dies führt auf den Begriff der ***σ-Algebra***.

Definition 1.1

Es sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra, falls gilt

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^C = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt ***messbarer Raum***. Eine Teilmenge $A \in \Omega$ heißt ***$\mathcal{A}$-messbar***, falls $A \in \mathcal{A}$

Lemma 1.1

Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Dann gilt

1. $\Omega \notin \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

Proof. Siehe Skript. □

Beispiel 1.4

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra und zwar die *größtmögliche*.
2. $\{\emptyset, \Omega\}$ ist σ-Algebra und zwar die kleinstmögliche, *triviale* σ-Algebra.
3. Ist $A \subset \Omega$ ein Ereignis, so ist $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ eine σ-Algebra und zwar die kleinste, die A enthält.
4. **Hüllenoperator:** Ist $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem, so ist
$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra auf }\Omega \\ \text{mit } \mathcal{C} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}$$
eine σ-Algebra (Beweis!). Sie ist die kleinste die $\mathcal{C}$ enthält. Sie heißt die ***von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra***. $\sigma(\mathcal{C})$ ist wohldefiniert, da der Schnitt nicht leer ist (siehe $\mathcal{P}(\Omega)$).

Es gelten für den Hüllenoperator:

1. $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$
2. $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \implies \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$

3. $\mathcal{C}$ ist eine σ-Algebra genau dann, wenn $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Wahrscheinlichkeiten

Nicht gottgegeben!!! Im nächsten Schritt wollen wir für jedes messbare Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ angeben zwischen 0 und 1. $P(A)$ soll ein Maß dafür sein, dass A auftritt:

- tritt A niemals ein, so setzen wir $P(A) = 0$,
- tritt A sicher sein, so setzen wir $P(A) = 1$.

Zusätzlich sollte gelten: Sind A und B *disjunkte* Ereignisse, d.h. $A \cap B = \emptyset$, so ist

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad . \qquad \text{(Additivität)}$$

Unmittelbare Folgerung $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkte Ereignisse, so gilt

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + ... + P_(A_n).$$