Technische Universität Berlin **SS 2019**

Fakultät II – Institut für Mathematik

Dozent: Prof. Dr. Wilhelm Stannat

Assistent: Alexander Vogler — Ausgabe: Mi 17.04.2019

https://isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=16264 — Abgabe: Mi 24.04.2019

1. Hausaufgabenblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie I“

Mengenoperationen, σ-Algebren, Wahrscheinlichkeitsmaß, diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

---

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: 5 Punkte

Sei Ω ein nichtleerer Ergebnisraum und seien $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse. Drücken Sie die folgenden Ereignisse $E_1, ..., E_5$ durch geeignete Mengenoperationen mit Hilfe von A, B, C und Ω aus:

a) E_1 = keines der Ereignisse A, B, C tritt ein,

b) E_2 = genau eines der Ereignisse A, B, C tritt ein,

c) E_3 = höchstens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein,

d) E_4 = mindestens eines der Ereignisse A, B, C tritt nicht ein,

e) E_5 = genau zwei der Ereignisse A, B, C treten ein.

2. Hausaufgabe: 5 Punkte

a) Sei $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, seien $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \Omega\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{\emptyset, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \Omega\}$ Mengensysteme. Welche der drei folgenden Aussagen ist wahr? Geben Sie nur den Lösungsbuchstaben an:

(A) $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ sind σ-Algebren über Ω, $\mathcal{A}_2$ ist keine σ-Algebra über Ω

(B) $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind σ-Algebren über Ω, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ist keine σ-Algebra über Ω

(C) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ sind σ-Algebren über Ω.

b) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und sei $C \subset \Omega, C \neq \emptyset$, eine beliebige Teilmenge. Wir definieren das Mengensystem

$$\mathcal{A}_C := \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(C).$$

Zeigen Sie: $\mathcal{A}_C$ ist eine σ-Algebra über C.

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ mit $n \in \mathbb{N}$ Ereignisse.

a) Es gelte $\mathbb{P}(A) = 1$. Zeigen Sie: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ für alle $B \in \mathcal{A}$.

b) Zeigen Sie:
$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

4. Hausaufgabe: **6 Punkte**

a) Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment:

> Eine faire Münze wird geworfen. Fällt dabei Kopf, so wird dieses Ergebnis notiert. Fällt jedoch Zahl, so wird die Münze ein zweites Mal geworfen und das Ergebnis des zweiten Wurfes notiert.

Geben Sie *zwei verschiedene* diskrete Ergebnisräume Ω_1, Ω_2 mit den dazugehörigen möglichen Ausgängen ω an, um dieses Zufallsexperiment zu modellieren.
Bestimmen Sie für beide Ergebnissräume die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}_i(\{\omega\})$ der jeweiligen einzelnen Elementarereignisse $\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega_i, i = 1, 2$. Berechnen Sie damit jeweils die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse

Kopf wird notiert, **Zahl wird notiert**.

b) Eine Frau hat 2 Kinder, wovon eines ein Mädchen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind ein Junge ist? Geben Sie hierzu einen geeigneten diskreten Ergebnisraum Ω mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\{\omega\})$ der einzelenen Elementarereignisse $\{\omega\}$ für $\omega \in \Omega$ an. Nehmen Sie dabei an, dass alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich sind.