Aufgabe 10.1

Existenz: Da f einer Carathéodory Bedingung genügt und eine Majorante existiert, wissen wir, dass es eine lokale Lösung im Sinne von Carathéodory gibt.

Eindeutigkeit: Für ein hinreichend kleines Intervall $[0, \tilde{t}]$ und eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ gelte nun

$$|f(t,v) - f(t,w)| \leq l(t)\omega(|v-w|) \quad \forall t \in [0,\tilde{t}], \forall v, w \in U. \tag{1}$$

Betrachte zwei Lösungen u_1, u_2 des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = 0 \end{cases}.$$

Wir wollen zeigen, dass $u_1 = u_2$ gilt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, es gebe ein t_0, sodass $u_1(t_0) \neq u_2(t_0)$. Dann gilt für die Differenzfunktion $u := u_2 - u_1$, dass $u(t_0) \neq 0$. Definiere $U(v) := \int_c^v \frac{1}{\omega(\tau)} d\tau$ mit einem beliebigen $c \in U \setminus \{0\}$ für alle $v \in U$. Wir betrachten als nächstes die Komposition von U und u, das heißt

$$U(u(t)) = \int_c^{u(t)} \frac{1}{\omega(\tau)} d\tau, \qquad \forall t \in [0, \tilde{t}].$$

Als nächstes leiten wir $U(u(t))$ nach t ab und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt}(u(t)) = \frac{dU}{dv}\Big|_{v=u(t)} \frac{du}{dt}(t) &= \frac{1}{\omega(u(t))} \cdot \frac{d}{dt}[u_2(t) - u_1(t)] \\
&\Downarrow u_1'(t) = f(t, u_1(t)) \text{ und } u_2'(t) = f(t, u_2(t)) \text{ fast überall} \\
&= \frac{1}{\omega(u(t))} \cdot [f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))] \\
&\Downarrow \text{wegen Abschätzung (1)} \\
&\leq \frac{1}{\omega(u(t))} \omega(|u_1(t) - u_2(t)|) \cdot l(t) \\
&= l(t).
\end{aligned}$$

Nun integrieren wir die gerade gewonnene Abschätzung und erhalten

$$U(u(t_0)) - U(u(t')) \leq \int_{t'}^{t_0} l(\tau) d\tau < \infty \qquad \forall t' \text{ mit } 0 < t' < t_0.$$

Beachte, dass l integrierbar ist auf $(0, \tilde{t})$. Damit ist insbesondere auch $\int_0^{t_0} l(\tau)d\tau$ endlich! Der Widerspruch ist derfolgende: lassen wir t' gegen null laufen, so konvergiert $u(t')$ gegen 0 aufgrund der Anfangswertbedingung, d.h. $u(0) = u_2(0) - u_1(0) = 0 - 0 = 0$. Damit gilt

$$\lim_{t' \to 0} U(u(t_0)) - U(u(t')) = \lim_{\xi \to 0} \int_\xi^{u(t_0)} \frac{1}{\omega(\tau)} d\tau = \infty.$$

Widerspruch, denn wir haben gerade erst bewiesen, dass $\lim\limits_{t' \to 0} U(u(t_0)) - U(u(t')) < \infty$. Damit kann es kein t_0 geben mit $u(t_0) \neq 0$. Beachte, dass wir die Annahme $u(t_0) \neq 0$ für den Widerspruchsbeweis im letzten Schritt beim Integral brauchten, denn das Integral $\lim\limits_{\xi \to 0} \int_\xi^{u(t_0)} \frac{1}{\omega(\tau)} d\tau$ kann durchaus null werden, falls $u(t_0) = 0$ ist. Dies beendet den Beweis.

Aufgabe 10.2

(i) Mit dem Satz von Peano erhalten wir eine lokale Lösung, denn f ist stetig. Um zu überprüfen, ob es eine globale Lösung gibt, verfolgen wir den Ansatz der Trennung der Veränderlichen.

$$\frac{d}{dt} u = -u^2 \cos^2(u) \implies t = \int_{u_0}^u \frac{1}{-s^2 \cos^2(s)} ds + \text{const} \leq \int_{u_0}^u \frac{1}{-\cos^2(s)}.$$

Das Integral $\int_{u_0}^{u} \frac{1}{-\cos^2(s)}$ ist aber nur für $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3}{2}\pi$ definiert. Das heißt, es kann keinen Blowup geben, da u durch $\frac{3}{2}\pi$ und $\frac{\pi}{2}$ von oben und unten beschränkt ist. Es gibt also eine globale Lösung.

Aufgabe 10.3

Zu zeigen: Es gibt genau eine maximal fortgesetzte Lösung auf $[0, T]$ für das angegebene Anfangswertproblem.

Existenz einer maximal fortgestetzten Lösung: Um die Existenz einer maximal fortgesetzten Lösung $u : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ zu zeigen, müssen wir beweisen, dass es für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion $m : [0, T] \to \mathbb{R}$ gibt mit, sodass für alle $t \in [0, T]$ und alle $v \in K$ die Abschätzung $\|f(t, v)\| \leq m(t)$ gilt. Falls dies gilt, dann gibt es nach der Vorlesung eine maximal fortgesetzte Lösung.

Sei also irgendeine kompakte Menge K gegeben. Seien $v \in K$ und $t \in [0, T]$ beliebig. Wir machen folgende Abschätzung:

$$\|f(t, v)\| = \|f(t, v) - f(t, 0) + f(t, 0)\| \leq \|f(t, v) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \leq l(t)\|v - 0\| + l(t).$$

Dann haben wir für die Menge K eine Majorante m gefunden mit $m(t) := l(t)(1 + \sup_{v \in K} \|v\|)$. Die Majorante ist wohldefiniert, da das Supremum über eine kompakte Menge genommen wird. Die Majorante ist auch Lebesgue-integrierbar, da m das Produkt zweier Lebesgue-integrierbarer Funktionen ist: l ist eine Lebesgue-integrierbare Funktion nach Voraussetzung und Konstanten sind Lebesgue-integrierbar.

Eindeutigkeit: Wir sehen, dass f die verallgemeinerte Lipschitzbedingung erfüllt. Deswegen ist die maximal fortgesetzte Lösung eindeutig (nach der Vorlesung).

Globales Existenzintervall: Sei also $(\alpha, \beta) \subset [0, T]$ das maximale Existenzintervall für eine Lösung u. Wir wollen zeigen, dass $\alpha = 0$ und $\beta = T$. Die Beweisidee ist, dass es keinen Blowup geben kann, da die Steigung von u für jede echte Teilmenge von $[0, T]$ durch einen Faktor von $l(t)$ beschränkt ist. Damit es einen Blowup gibt, muss jedoch die Steigung von u unendlich werden, wenn u gegen β läuft.

Angenommen, es gelte $\beta < T$. Dann gibt es ein kompaktes Intervall $K \supset (\alpha, \beta)$, sodass

$$\|f(t, u(t))\| \leq l(t)[1 + \sup_{v \in K} \|v\|] < \infty \quad \text{wegen } l(t) < \infty$$

für alle $t \in (\alpha, \beta)$. Dann ist aber für ein beliebiges $a \in (\alpha, \beta)$:

$$\lim_{t \to \beta} \|u(t)\| \leq (l(t) + \sup_{v \in K} \|v\|)(\beta - a) + \|u(a)\| < \infty.$$

Es gibt also keinen Blowup und somit ist das Existenzintervall ganz $[0, T]$. u ist ist also eine globale Lösung.