Aufgabe 1

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei f absolut stetig. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein δ, sodass für jedes endliche disjunkte Mengensystem $(a_i, b_i)_{i=1,...,n}$ mit Gesamtlänge $\sum b_i - a_i$ kleiner δ gilt, dass auch $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$. Mit der Dreiecksungleichung gilt somit auch $|\sum f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$, was wir zeigen wollten.

$\Longleftarrow$: Sei f eine Funktion und für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein δ, sodass für jedes endliche disjunkte Mengensystem $(a_i, b_i)_{i=1,...,n}$ mit Gesamtlänge $\sum b_i - a_i$ kleiner δ gilt, dass auch $|\sum f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ gelten muss $(\star)$.

Sei $\epsilon > 0$ und sei $[n] := \{1, ..., n\}$. Nach Voraussetzung existiert ein δ, sodass für jedes $(a_i, b_i)_{i=1,...,n}$ mit Gesamtlänge kleiner als δ gilt: $|\sum f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$. Angenommen, f wäre nicht absolut stetig. Dann gibt es für das δ ein endliches disjunktes Mengensystem $(\xi_i, \zeta_i)_{i=1,...,n}$ mit $\sum \zeta_i - \xi_i < \delta$, sodass $\sum |f(\zeta_i) - f(\xi_i)| \geq 2\epsilon$ (wenn das nicht so gilt, dann wählt man einfach ϵ hinreichend groß). Andererseits gilt wegen der Voraussetzung $(\star)$, dass $|\sum f(\zeta_i) - f(\xi_i)| < \epsilon$. Sei $\Delta_+ := \{i \in [n] : f(\zeta_i) - f(\xi_i) \geq 0\}$ und $\Delta_- := \{i \in [n] : f(\xi_i) - f(\zeta_i) > 0\}$. Wegen $\sum |f(\zeta_i) - f(\xi_i)| \geq 2\epsilon$ gilt entweder $\sum_{i\in\Delta_+} |f(\zeta_i) - f(\xi)_i| = |\sum_{i\in\Delta_+} f(\zeta_i) - f(\xi)_i| \geq \epsilon$ oder $\sum_{i\in\Delta_-} |f(\zeta_i) - f(\xi_i)| = |\sum_{i\in\Delta_-} f(\zeta_i) - f(\xi_i)| \geq \epsilon$. Damit haben wir ein disjunktes endliches Mengensystem gefunden, das die Voraussetzung $(\star)$ verletzt. Widerspruch und f muss absolut stetig sein. $\square$

Aufgabe 2

Sei $\epsilon > 0$. Weil $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $(a_i, b_i)_{i\in[n]}$ mit Gesamtlänge kleiner δ gilt, dass $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$. Seien nun $(c_i, d_i)_{i\in[n]}$ mit Gesamtlänge kleiner δ und seien $\xi_{i,1} = c_i < \xi_{i,2} < ... < \xi_{i,j_i} = d_i$ für alle $i \in [n]$ beliebig. Dann ist $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j_i-1} \xi_{i,j+1} - \xi_{i,j} < \delta$ und somit gilt $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j_i-1} |f(\xi_{i,j+1}) - f(\xi_{i,j})| < \epsilon$ wegen der absoluten Stetigkeit von f. Nun ist das Supremum von $\sum_{j=1}^{j_i-1} |f(\xi_{i,j+1}) - f(\xi_{i,j})|$ über alle möglichen Intervalle $\xi_{i,1} = c_i < \xi_{i,1} < ... < \xi_{i,j_i} = d_i$ gleich $|F(d_i) - F(c_i)|$. Angenommen, dem wäre nicht so, dann gäbe es eine Unterteilung von a bis d_i mit $|(\sum_{j=1}^{j_i-1} |f(\xi_{i,j+1}) - f(\xi_{i,j})|) + F(c_i)| > |F(d_i)|$, was ein Widerspruch zur Definition von $F(d_i)$ ist. Damit erhalten wir $\sum_{i=1}^n |F(d_i) - F(c_i)| \leq \epsilon$. Wir haben also ein passendes δ gefunden, da die Unterteilung der (c_i, d_i) beliebig war.

Zeige, dass $F + f$ absolut stetig ist, falls f absolut stetig ist. Sei $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Dann gibt es wieder δ, sodass für alle disjunkte endlichen Mengensysteme mit Gesamtlänge kleiner δ gilt, dass $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$. Wie wir im Beweis vorhin gesehen haben, kann man dasselbe δ wählen, um die absolute Stetigkeit von F zu zeigen. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\sum |F(b_i) - F(a_i) + f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum (|F(b_i) - F(a_i)| + |f(b_i) - f(a_i)|) < \epsilon.$$

Dies zeigt die absolute Stetigkeit von $F + f$.

Zeige, dass $F - f$ absolut stetig ist, falls f absolut stetig ist. $-f$ ist absolut stetig, denn wir können für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ das gleiche δ wie für f wählen, sodass gilt $\sum |f(b_i) - f(a_i)| = \sum |f(a_i) - f(b_i)| < \epsilon$. Sei $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Dann gibt es wieder δ, sodass für alle disjunkte endlichen Mengensysteme mit Gesamtlänge kleiner δ gilt, dass $\sum |f(a_i) - f(b_i)| < \epsilon$. Man man dasselbe δ wählen, um die absolute Stetigkeit von F zu zeigen, denn das δ von $-f$ ist das gleiche wie für

f. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\sum |F(b_i) - F(a_i) + f(a_i) - f(b_i)| \leq \sum (|F(b_i) - F(a_i)| + |f(a_i) - f(b_i)|) < \epsilon.$$

Dies zeigt die absolute Stetigkeit von $F - f$.

Aufgabe 3

Sei f absolut stetig. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein δ, sodass für alle endlichen disjunkten Mengen $(a_i, b_i)_{i \in [n]}$ mit Gesamtlänge kleiner δ gilt, dass $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$. Setze $n = 1$ und es ergibt sich die gleichmäßige Stetigkeit von f.

Sei f Lipschitz-stetig. Dann ist auch f absolut stetig, denn für jedes $\epsilon > 0$ wählt man einfach $\delta = \epsilon \mathfrak{L}^{-1}$, wobei $\mathfrak{L}$ die Lipschitzkonstante ist. Es gilt dann nämlich $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \mathfrak{L} \sum b_i - a_i < \epsilon$.

Sei g Lipschitz-stetig mit Lipschitz Konstante $\mathfrak{G}$ und f absolut stetig. Dann gibt es ein δ, sodass $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\epsilon}{\mathfrak{G}}$. Nun folgt, dass $\sum |g(f(b_i)) - g(f(a_i))| \leq \mathfrak{G} \sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ für alle disjunkten endlichen Mengen (a_i, b_i) mit Gesamtlänge kleiner als δ.