Aufgabe 1

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 14 \\ 3 & 14 & 44 \end{pmatrix}$. Wir suchen $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $LL^T = A$ und L ist eine untere Dreiecksmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 14 \\ 3 & 14 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ * & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ * & * & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

Also

$$l_{11}^2 = 1 \implies l_{11} = 1, \quad l_{21} = 2, \quad l_{31} = 3$$
$$4 + l_{22}^2 = 6 \implies l_{22} = \sqrt{2}, \quad 6 + \sqrt{2}l_{32} = 14 \implies l_{32} = 4\sqrt{2}$$
$$9 + 32 + l_{33}^2 = 44 \implies l_{33} = \sqrt{3}$$

Damit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 4\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Nun suchen wir $\tilde{L}$ und D, wobei D eine Diagonalmatrix ist und $\tilde{L}$ eine untere Dreiecksmatrix mit $\operatorname{diag}\tilde{L} = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 14 \\ 3 & 14 & 44 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ l_{21}d_{11} & d_{22} & 0 \\ l_{31}d_{11} & l_{32}d_{22} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & * & * \\ l_{21}d_{11} & l_{21}^2 d_{11} + d_{22} & * \\ l_{31}d_{11} & l_{31}d_{11}l_{21} + l_{32}d_{22} & l_{31}^2 d_{11} + l_{32}^2 d_{22} + d_{33}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$d_{11} = 1, \quad l_{21} = 2, \quad l_{31} = 3$$
$$4 + d_{22} = 6 \implies d_{22} = 2, \quad 3 \cdot 2 + l_{32}2 = 14 \implies l_{32} = 4$$
$$9 + 16 \cdot 2 + d_{33} = 44 \implies d_{33} = 3.$$

Schlussendlich

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit vollem Rang. Bezeichne $(v_1, ..., v_m)$ die Spalten von A. Dann ist $A^T A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,...,m}$. Wir wollen zeigen, dass $A^T A$ vollen Rang besitzt.

Beweis. Kontraposition. $A^TA \in \mathbb{R}^{m\times m}$ besitze keinen vollen Rang. Wir wissen, dass $v_1, ..., v_m$ ein Erzeugendensystem von A ist (aber wir wissen nicht, ob es eine Basis ist). Wegen der linearen Abhängigkeit von A^TA gibt es λ_i mit $i = 1, ..., m$ und mindestens ein $\lambda_j \neq 0$ für ein $j = 1, ..., m$, sodass die Spalten von A^TA mit $\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v_m, v_1\rangle \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \langle v_1, v_m\rangle \\ \langle v_2, v_m\rangle \\ \vdots \\ \langle v_m, v_m\rangle \end{pmatrix}$ linear abhängig sind. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\langle v_1, v_1\rangle + \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle + ... + \lambda_m\langle v_1, v_m\rangle &= \langle v_1, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i\rangle = 0 \\
\lambda_1\langle v_2, v_1\rangle + \lambda_2\langle v_2, v_2\rangle + ... + \lambda_m\langle v_2, v_m\rangle &= \langle v_2, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i\rangle = 0 \\
&\quad ... \\
\lambda_1\langle v_m, v_1\rangle + \lambda_2\langle v_m, v_2\rangle + ... + \lambda_m\langle v_1, v_m\rangle &= \langle v_m, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i\rangle = 0
\end{aligned}$$

Wir haben einen Vektor $w := \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in \mathrm{Im}(A)$ gefunden, der orthogonal zu jedem Erzeugendenvektor $v_1, ..., v_m$ steht. Damit gilt

$$\langle w, w\rangle = \langle w, \sum \lambda_i v_i\rangle = \sum \lambda_i \underbrace{\langle w, v_i\rangle}_{=0} = 0 \iff w = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0.$$

Also sind die $v_1, ..., v_m$ linear abhängig und A besitzt keinen vollen Rang.

$\square$

Nun zeigen wir, dass AA^T nicht vollen Rang besitzen muss.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Wir wissen, dass eine Cholesky-Zerlegung von A genau dann existiert, wenn A positiv definit ist. Die komplexe Matrix $A := (-1)$ ist nicht positiv definit, da die Eigenwerte nicht positiv sind. Denn zum Beispiel ist $(-i)A(i) = -1 < 0$ und $(1)A(1) = -1 < 0$. Damit existiert für (-1) keine Cholesky Zerlegung. Es existiert also keine Matrix L mit $(-1) = LL^* = L\bar{L}^T$.

Aufgabe 4

Beweis. Zu beweisen: H ist hermitesch, also $H = H^*$.

$$\overline{(I - 2\frac{n\overline{n}^T}{\overline{n}^T n})}^T = I - 2\left(\frac{\overline{n\overline{n}^T}}{\overline{\overline{n}^T n}}\right)^T = I - 2\left(\frac{\overline{n}n^T}{n^T\overline{n}}\right)^T = I - 2\frac{n\overline{n}^T}{\overline{n}^T n} = I - 2\frac{nn^*}{n^*n}.$$

$\square$

Beweis. Zu beweisen: H ist unitär, also $HH^* = I$. Da $H = H^*$, folgt

$$(I - \frac{2nn^*}{n^*n})^2 = I - 4\frac{nn^*}{n^*n} + 4\frac{(nn^*)(nn^*)}{(n^*n)(n^*n)} = I - 4\frac{nn^*}{n^*n} + 4\frac{nn^*(nn^*)}{n^*(nn^*)n} = I - 4\frac{nn^*}{n^*n} + 4\frac{nn^*}{n^*n} = I.$$

Damit haben wir gezigt, dass $HH = I$ und das $\|Hv\| = \|v\|$. Letzteres ergibt sich aus der Linearen Algebra, denn wir wissen dass unitär ($AA^* = I$) und längenerhaltende Abbildungen das gleiche sind. □

Es muss $r = \|v\|$ gewählt werden, denn $\|e^{i\theta}e_1\| = 1$.