Geometria Analítica – MAT A01 2023.1
Março de 2023 UFBA
Professor Andreas ♯contrafascismo

Primeira lista de exercícios

"*Na Europa está circulando um fantasma - o fantasma do comunismo.*"[1]
(Karl Marx, filósofo alemão, 1818 - 1883)

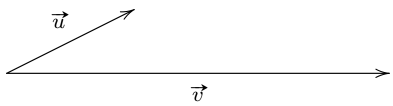
1. Sejam A, B, C, D e E, pontos. Prove que:

   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
   (b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$

2. Prove, usando as propriedades da soma entre vetores, que, para todos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no espaço, as seguintes propriedades são verdadeiras:

   (a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{w}$,
   (b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

3. Dados representantes de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura:

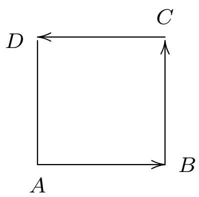
   

   Ache um representante de $\vec{x}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$.

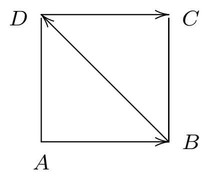
4. Justifique a seguinte regra. Para calcular $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ tome um representante (A, B) de $\vec{u}$, um representante (B, C) de $\vec{v}$, um representante (C, D) de $\vec{w}$. Então $\vec{x}$ tem como representante (A, D).

5. Ache a soma dos vetores indicados na figura nos casos:

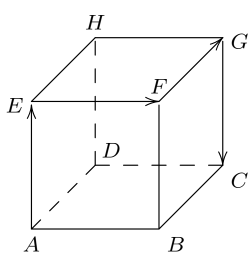
   (a) Quadrado:

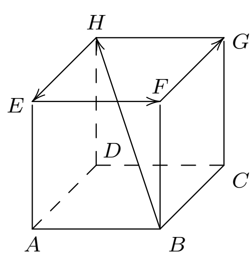
   (c) Quadrado:

   (b) Cubo:

   (d) Cubo:

[1] Original: *Ein Gespenst geht um in Europa - das Gespenst des Kommunismus*, em Manifest der Kommunistischen Partei, 1872, Karl Marx e Friedrich Engels.

6. Prove que, para todos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço e para todo escalar $k, m \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

   (a) $-(\vec{u}+\vec{v}) = -\vec{u}-\vec{v}$,

   (b) $k(\vec{u}-\vec{v}) = k\vec{u}-k\vec{v}$,

   (c) $(k-m)\vec{u} = k\vec{u}-m\vec{u}$,

   (d) $k\vec{v} = \vec{0} \implies k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$,

   (e) $k\vec{u} = k\vec{v}$ e $k \neq 0 \implies \vec{u} = \vec{v}$,

   (f) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$,

   (g) $2\vec{v} = \vec{v}+\vec{v}$,

7. Resolva a equação na incognita $\vec{x}$:

$$2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x}+\vec{v})$$

8. Sejam A e B pontos, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Prove que, se $A+\vec{u} = B+\vec{v}$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AB}+\vec{v}$.

9. Determine $\overrightarrow{AB}$ em função de $\vec{u}$, sabendo que $A+(-\vec{u}) = B+\vec{u}$.

10. Determine a relação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que, para um dado ponto A, $(A+\vec{u})+\vec{v} = A$.

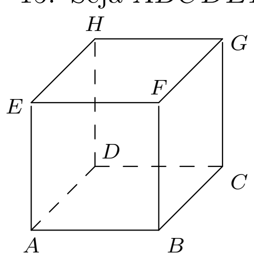
11. Dados os pontos A, B e C, determine X, sabendo que $(A+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{CX} = C+\overrightarrow{CB}$.

12. Prove que, se $B = A+\overrightarrow{DC}$, então $B = C+\overrightarrow{DA}$.

13. Prove que $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

14. Prove que, se $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, então $A = B$.

15. Seja $ABCDEFGH$ o cubo:



   Determine:

   (a) $A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

   (b) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}$

   (c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{BF}$

   (d) $\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BH}$

16. (a) Seja ABC um triângulo e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e λ.

    (b) Seja ABC um triângulo e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = \mu\overrightarrow{YC}$ e $\overrightarrow{CZ} = \rho\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

17. Sejam M, N e P os pontos médios respetivamente dos lados AB, BC e AC de um triângulo ABC. Mostre que
$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$$

18. Seja $OABC$ um tetraedro e X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX}=m\overrightarrow{BC}$ por um $m\in\mathbb{R}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

19. Seja ABC um triângulo, X um ponto na reta AB tal que $\overrightarrow{AX}=2\overrightarrow{XB}$ e Y um ponto na reta BC tal que $\overrightarrow{BY}=3\overrightarrow{YC}$. Prove que as retas CX e AY se cortam num ponto.

20. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer no espaço, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ em função de $\overrightarrow{MN}$.

21. Seja $ABCD$ um quadrilátero e O um ponto qualquer no espaço. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que
$$P=O+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

22. Sejam A, B e C e D três pontos quaisquer com $A\neq B$. Prove que:
$$X \text{ é um ponto do segmento } AB \iff \begin{array}{l}\overrightarrow{CX}=a\overrightarrow{C}A+b\overrightarrow{C}B\\ \text{com } a\geq 0,\ b\geq 0,\ \text{ e } a+b=1.\end{array}$$

23. Prove que, o conjunto $\{\vec{v}\}$ é LD, se e somente se a equação $x\vec{v}=\vec{0}$ admite solução não trivial.

24. Prove que, se o conjunto $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é LI, então os conjuntos $\{\vec{u}+\vec{v}+\vec{w},\vec{u}-\vec{v},3\vec{v}\}$ e $\{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w}\}$ também são LI.

25. Seja $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ um conjunto LI. Dado um vetor $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem escalares $a,b,c\in\mathbb{R}$ tais que $\vec{t}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$. Prove que:
$$\{\vec{u}+\vec{t},\vec{v}+\vec{t},\vec{w}+\vec{t}\} \text{ é LD} \iff a+b+c+1=0$$

26. Prove que, se o conjunto $\{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\}$ é LI, então o conjunto $\{\vec{u},\vec{v}\}$ é LI.

Segunda lista de exercícios

"*A burguesia tirou da relação familiar o seu véu sentimental e a reduziu a uma pura condição monetária.*"[2]
(Karl Marx, filósofo alemão, 1818 - 1883)

27. Prove que, para qualquer base $\mathcal{B}$, $\vec{0} = (0,0,0)_{\mathcal{B}}$.

28. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u} = (1,-1,3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1,-1,4)_{\mathcal{B}}$. Ache as coordenadas de:
    (a) $\sqrt{2}\vec{u}$,
    (b) $\vec{u} + \vec{v}$,
    (c) $\vec{u} - 2\vec{v}$,
    (d) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$,
    (e) $5\vec{u} - \vec{v} - \frac{3}{7}\vec{w}$,
    (f) $\sqrt{5}\vec{u} - \vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$.

29. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u} = (1,-1,3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1,-1,4)_{\mathcal{B}}$. Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

30. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u} = (1,-1,3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1,-1,4)_{\mathcal{B}}$. Escreva o vetor $\vec{t} = (4,0,13)_{\mathcal{B}}$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

31. O vetor $\vec{u} = (1,-1,3)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v} = (-1,1,0)$ e $\vec{w} = \left(2,3,\frac{1}{3}\right)$?

32. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3,\\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3.\end{aligned}$$

    Decida se $\mathcal{C} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

33. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que $\mathcal{C} = \{a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ se e somente se a, b e c são não nulos.

34. Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC:
    (a) explique porque $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ é base de $\mathbb{R}^3$,

[2]Original: *Die Bourgeoise hat dem Familienverhältnis seinen rührend sentimentalen Schleier abgerissen und es auf ein reines Geldverhältnis zurückgeführt*, em Manifest der Kommunistischen Partei, 1872, Karl Marx e Friedrich Engels.

(b) determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$, na base $\mathcal{B}$ (dica: use o exercício **??**).

35. Explique porque um conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de vetores dois a dois ortogonais tem que ser LI.

36. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Calcule as normas dos seguintes vetores na base $\mathcal{B}$:

    (a) $(1, 1, 1)$,
    (b) $(1, 0, 0)$,
    (c) $(-1, 1, 1)$,
    (d) $(3, 4, \sqrt{11})$,
    (e) $(-3, -4, \sqrt{11})$,
    (f) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
    (g) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
    (h) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

37. Normalize os vetores do Exercício anterior.

38. Explique porque o produto interno não pode ser associativo.

39. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes propriedades utilizando as propriedades básicas do produto escalar:

    (P4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
    (P5) $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$,
    (P6) $\vec{u} \cdot k\vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
    (P7) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$,
    (P8) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$.

40. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ não nulos. Prove:

    (a) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$,
    (b) $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff |\vec{u} \cdot \vec{v}| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$.

41. Ache a medida (em radianos) dos ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos:

    (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$,
    (b) $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$,
    (c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$,
    (d) $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$,
    (e) $\vec{u} = (300, 300, 0)$, $\vec{v} = (-2000, -1000, 2000)$,

42. Ache x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais nos casos:

    (a) $\vec{u} = (x, 0, 3)$, $\vec{v} = (1, x, 3)$,
    (b) $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$,
    (c) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$,
    (d) $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$.

43. Calcule $||2\vec{u} + 4\vec{v}||^2$ sabendo que $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 2$ e a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2}{3}\pi$.

44. Se A, B e C são os vértices de um triângulo equilátero de lado unitário, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

45. Se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $||\vec{u}|| = \dfrac{3}{2}$, $||\vec{v}|| = \dfrac{1}{2}$ e $||\vec{w}|| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

46. Prove que se $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ e $\vec{v} \perp (\vec{w} - \vec{u})$, então $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

47. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ nos casos seguintes:

    (a) $\vec{u} = (6, -2, -4)$, $\vec{v} = (-1, -2, 1)$,
    (b) $\vec{u} = (7, 0, -5)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$,
    (c) $\vec{u} = (1, -3, 1)$, $\vec{v} = (-4, 2, 4)$,
    (d) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, 4)$.

48. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\dfrac{\pi}{6}$. Sendo $||\vec{u}|| = 1$ e $||\vec{v}|| = 7$, calcule $||\vec{u} \times \vec{v}||$ e $||\frac{1}{3}\vec{u} \times \frac{3}{4}\vec{v}||$.

49. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de lado unitário. Calcule $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}||$.

50. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.

51. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule a área do triângulo ABC sendo $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 3)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$.

52. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

53. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e $||\vec{x}|| = \sqrt{6}$.

54. Prove:

    (a) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2$,
    (b) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 \leq ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2$,
    (c) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$,
    (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{v} \times \vec{u})$,
    (e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$,
    (f) $(\vec{u} - \vec{t}) \times (\vec{v} - \vec{w}) + (\vec{v} - \vec{t}) \times (\vec{w} - \vec{u}) + (\vec{w} - \vec{t}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u})$.

55. Prove que se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{t}$ e $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{t}$ então $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são vetores linearmente dependentes.

56. Prove que a altura do triângulo ABC relativa à base AB mede $h = \dfrac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$.

57. Expressa a distância do ponto C à reta r que passa por dois pontos A e B em termos dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

58. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sendo $\vec{u} = (-1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

59. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule o volume do paralelepípedo definido pelo vetores $\vec{u} = (2, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -1)$.

60. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ dados $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$.

61. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Verifique:

    (a) $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$,
    (b) $[a\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = a[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,
    (c) $[\vec{u} + a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{v} + c\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

62. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sabendo $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{w}|| = 3$ e que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base negativa com $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dois a dois ortogonais.

63. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$ e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sendo $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 1$. $||\vec{w}|| = 4$ e $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base positiva, ache $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

64. Prove que:

    (a) $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||$,
    (b) $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||$ se e somente se algum dos vetores for nulo ou sendo todos não nulos, forem dois a dois ortogonais.

65. Prove que se $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é conjunto linearmente dependente.

66. Prove que a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à base ABC é:
$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}.$$
    Observe que o volume de um tetraedro é um terço da a área do triângulo base vezes a altura.

67. Sejam $ABCD$ um tetraedro, $P = A + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $Q = B - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ e $R = C + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Mostre que $PQRD$ forma tetraedro e determine a razão entre os volumes de $PQRD$ e $ABCD$.

Terceira lista de exercícios

"*Os trabalhadores não tem pátria.*"[3]
(Friedrich Engels, empresário e filósofo alemão, 1820 - 1895)

Estudo da reta

68. Sejam $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$ pontos no espaço.

(a) Escreva as equações vetorial e paramétrica para a reta r determinada pelos pontos B e C e obtenha sua forma simétrica, caso existir. O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a r?

(b) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

(c) Escreva as equações paramétricas da mediana relativa ao vértice C do triângulo.

69. Obtenha equações paramétricas para os três eixos coordenados.

70. Dados os pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$, determine P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento do segmento PB seja o triplo do comprimento do segmento PA.

71. Escreva as equações paramétricas para a reta r que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$ tal que:

(a) r é paralela à reta $s\colon \dfrac{1-x}{5} = \dfrac{3y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$,

(b) r é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, 4)$ e $C = (2, 1, 3)$,

(c) r é paralela à reta $s'\colon \begin{cases} x = 4 - 5\lambda, \\ y = -7 + 11\lambda, \\ z = 6 + 4\lambda. \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

72. Passe a forma simétrica, quando for possível, das equações no exercício anterior.

73. Verifique se $r = s$ nos casos:

(a)

$$r\colon \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + 2\lambda, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\mu, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \frac{1}{2}\mu. \end{cases}$$

(b)

$$r\colon \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda, \\ y = -\frac{1}{2} + \lambda, \\ z = \frac{2}{3} - \lambda. \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 - \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 2 - \mu. \end{cases}$$

[3] Original: *Die Arbeiter haben kein Vaterland.* Em Manifest der kommunistischen Partei, 1872, Karl Marx e Friedrich Engels.

(c) $r\colon X = (1,1,0) + \lambda\left(1, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$, $s\colon X = \left(0, 1, \dfrac{1}{2}\right) + \mu(-2, 0, 1)$.

74. Dados o ponto $A = (0,2,1)$ e a reta $r\colon X = (0,2,-2) + a(1,-1,2)$ ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. Em seguida diga se a distância do ponto A à reta r é maior, menos ou igual a $\sqrt{3}$ e por quê.

75. Dados o ponto $A = (1,1,1)$ e a reta $r\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 4. \end{cases}$ ache os pontos de r que distam $\sqrt{11}$ de A. Em seguida diga se a distância do ponto A à reta r é maior, menos ou igual a $\sqrt{11}$ e por quê.

76. Dados os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (0,0,1)$ e a reta $r\colon X = (1,0,0) + \lambda(1,1,1)$ ache o ponto de r equidistante de A e B.

77. Ache as equações paramétricas da reta r que passa por $A = (3,3,3)$ e é paralela à reta BC, sendo $B = (1,1,0)$ e $C = (-1,0,-1)$.

78. Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

(a) $r\colon X = (1,-1,1) + \lambda(-2,1,-1)$, $\quad s\colon \begin{cases} y + z = 3, \\ x + y - z = 6. \end{cases}$

(b) $r\colon \begin{cases} x - y - z = 2, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$, $\quad s\colon \begin{cases} 2x - 3y + z = 5, \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$

(c) $r\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$, $\quad s\colon X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0)$

(d) $r\colon \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{4} = z$, $\quad s\colon \begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ x + y - 6z + 2 = 0. \end{cases}$

(e) $r\colon X = (8,1,9) + \lambda(2,-1,3)$, $\quad s\colon X = (3,-4,4) + \lambda(1,-2,2)$,

(f) $r\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{5}$, $\quad s\colon x = -y = \dfrac{z-1}{4}$,

(g) $r\colon \dfrac{x+1}{2} = y = -z$, $\quad s\colon \begin{cases} x + y - 3z = 1, \\ 2x - y - 2z = 0. \end{cases}$

(h) $r\colon x + 3 = \dfrac{2y-4}{4} = \dfrac{z-1}{3}$, $\quad s\colon X = (0,2,2) + d(1,1,-1)$.

79. Sejam $r\colon \begin{cases} x = \alpha y - 1, \\ z = y - 1. \end{cases}$, $s\colon x = \dfrac{y}{\alpha} = z$
e $t\colon -x + z = y = -z - 1$. Calcule $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que:

(a) r e s sejam paralelas,

(b) r e t sejam concorrentes,

(c) s e t sejam coplanares,

(d) r e s sejam reversas.

Estudo do plano

80. Passe para a forma paramétrica as equações gerais dos planos seguintes:

(a) $x - 2 = 0$,

(b) $y + 1 = 0$,

(c) $z + 4 = 0$,

(d) $x + y - 1 = 0$,

(e) $x - z = 0$,

(f) $y - z - 2 = 0$,

(g) $x + y + z - 1 = 0$.

81. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas cartesianas. Um *plano coordenado* é um dos três planos gerados por dois dos vetores da base e que contém a origem O. Obtenha as equações gerais dos três planos coordenados do sistema.

82. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos e justifique sua resposta:

(a) $\pi_1 \colon x - 3y + 2z + 1 = 0, \qquad \pi_2 \colon 2x - 6y + 4z + 1 = 0.$

(b) $\pi_1 \colon x - \dfrac{y}{2} + 2z - 1 = 0, \qquad \pi_2 \colon -2x + y - 4z + 2 = 0.$

83. Obtenha as equações gerais para os planos π descritos abaixo, caso for possível:

(a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$,

(b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, com $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$,

(c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$,

(d) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$ e $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$.

84. Obtenha uma equação geral para o plano determinado pelas retas r e s, onde:

(a) $r \colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z, \qquad s \colon x - 1 = y = z,$

(b) $r \colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{4}, \qquad r \colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{4}.$

85. Obtenha uma equação geral para o plano π nos casos:

(a) $\pi \colon \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu, \\ y = 2\lambda + \mu, \\ z = 3 - \mu. \end{cases}$.

(b) $\pi \colon \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2, \\ z = 3 - \lambda + \mu. \end{cases}$,

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

86. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Seja π_2 o plano que passa pelo ponto $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Seja π_3 o plano de equação vetorial $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Escreva equações gerais de π_1, π_2 e π_3,

(b) Mostre que a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um único ponto: determine-o.

87. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas cartesianas. Obtenha um vetor normal ao planos π descritos abaixo:

(a) π contendo os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (1,0,1)$ e $C = (1,2,3)$,

(b) π tem equações paramétricas $\pi\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda + \mu, \\ z = \lambda - 2\mu. \end{cases}$,

(c) π tem equação geral $x - 2y + 4z + 1 = 0$.

88. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas cartesianas. Obtenha uma equação geral do plano π nos casos seguintes:

(a) π passa por $A = (1,1,2)$ e é paralelo a $\pi_1\colon x - y + 2z + 1 = 0$,

(b) π passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A = (1,1,1)$ e $B = (2,1,-1)$,

(c) π passa pelo ponto $P = (1,0,1)$ e é perpendicular à reta $r\colon X = (0,0,1) + \lambda(1,2,-1)$.

89. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas cartesianas. Obtenha equações vetoriais pelas retas nos casos seguintes:

(a) r passa por $A = (1,2,3)$ e é perpendicular ao plano $\pi_1\colon 2x + y - z = 2$,

(b) r é a interseção dos planos:

$$\pi_1\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -2, \\ z = -\lambda - \mu. \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu, \\ y = 2\lambda + \mu, \\ z = 3 - \mu. \end{cases}$$

(c) r passa pela origem e é perpendicular ao plano:

$$\pi\colon \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu, \\ y = \lambda + \mu, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

90. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas cartesianas. Prove que o conjunto de pontos que são equidistantes de $A = (1,-1,2)$ e $B = (4,3,1)$ é um plano. Mostre em seguida que esse plano passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a AB.

Posições relativas de retas e planos

91. Estude as posições relativas de π_1 e π_2 nos seguintes casos:

(a) $\pi_1\colon X = (1,1,1) + \lambda(0,1,1) + \mu(-1,2,1)$,
$\pi_2\colon X = (1,0,0) + \rho(1,-1,0) + \nu(-1,-1,-2)$,

(b) $\pi_1\colon 2x - y + 2z - 1 = 0$, $\quad \pi_2\colon 4x - 2y + 4z = 0$,

(c) $\pi_1\colon x - y + 2z - 2 = 0$, $\quad \pi_2\colon X = (0,0,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1)$.

92. Calcule m para que os planos

$$\pi_1\colon X = (1,1,0) + \lambda(m,1,1) + \mu(1,1,m)$$

e

$$\pi_2\colon 2x + 3y + 2z + n = 0$$

sejam planos paralelos distintos, nos casos:

(a) $n = -5$, e (b) $n = 1$.

93. Mostre que os planos:

$$\pi_1\colon X = (0,0,0) + \lambda(-1,m,1) + \mu(2,0,1)$$

e

$$\pi_2\colon X = (1,2,3) + \rho(m,1,0) + \nu(1,0,m)$$

são concorrentes, para todo $m \in \mathbb{R}$.

94. Estude a posição relativa da reta r e do plano π nos seguintes casos:

(a) $r\colon X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$, $\quad \pi\colon x - y - z = 2$,

(b) $r\colon \dfrac{x-1}{2} = y = z$, $\quad \pi\colon X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$,

(c) $r\colon \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$,

$\pi\colon X = \left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right) + \lambda\left(1, -\dfrac{1}{2}, 0\right) + \mu(0,1,1)$.

(d) $r\colon \begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$, $\quad \pi\colon x + y = 2$.

(e) $r\colon X = (0,0,0) + \lambda(1,4,1)$, $\quad \pi\colon X = (1,-1,1) + \lambda(0,1,2) + \mu(1,-1,0)$.

(f) $r\colon \dfrac{x+2}{3} = y - 1 = \dfrac{z+3}{3}$, $\quad \pi\colon 3x - 6y - z = 0$.

95. Calcule m tal que:

(a) a reta $r\colon X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ seja paralela ao plano $\pi\colon X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1)$,

(b) a reta $r\colon \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{m}$ seja transversal ao plano $\pi\colon x + my + z = 0$.

Quarta lista de exercícios

"*Proletários de todos os países uni-vos!*"[4]
(Karl Marx, filósofo alemão, 1818 - 1883)

Ângulos

96. Ache o co-seno do ângulo entre as retas:

(a) $r\colon X = \left(-\dfrac{5}{2}, 2, 0\right) + \lambda\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right), \qquad s\colon \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0, \\ 3x - z = 0. \end{cases}$.

(b) $r\colon \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = -2 - \lambda, \\ z = \sqrt{2}\lambda. \end{cases}, \qquad s\colon \begin{cases} x = -2 + \mu, \\ y = 3 + \mu, \\ z = -5 + \sqrt{2}\mu. \end{cases}$.

(c) $r\colon \begin{cases} \dfrac{x+2}{3} = 3 - z, \\ y = 0. \end{cases}, \qquad s\colon \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = z + 3, \\ y = 0. \end{cases}$.

97. Ache a medida em radianos do ângulo entre a reta e o plano dados:

(a) $r\colon \begin{cases} x = 0, \\ y = z. \end{cases}, \qquad \pi\colon z = 0.$

(b) $r\colon x = y = z, \qquad \pi\colon z = 0.$

(c) $r\colon X = (0,0,1) + \lambda(-1,1,0), \qquad \pi\colon 3x + 4y = 0.$

(d) $r\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = -2\lambda. \end{cases}, \qquad \pi\colon x + y - z - 1 = 0.$

(e) $r\colon \begin{cases} x + y = 2, \\ x = 1 + 2z. \end{cases}, \qquad \pi\colon \sqrt{\dfrac{45}{7}}x + y + 2z - 10 = 0.$

98. Ache a medida em radianos do ângulo entre os planos:

(a) $\pi_1\colon 2x + y - z - 1 = 0, \qquad \pi_2\colon x - y + 3z - 10 = 0.$

(b) $\pi_1\colon X = (1,0,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,0,0), \qquad \pi_2\colon x + y + z = 0.$

(c) $\pi_1\colon X = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(1,1,1), \qquad \pi_2\colon X = (1,0,0) + \rho(-1,2,0) + \nu(0,1,0).$

99. Ache as retas que interceptam as retas:

$$r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3}, \qquad s\colon \begin{cases} x = -1 + 5\lambda, \\ y = 1 + 3\lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

e formam ângulos congruentes com os eixos coordenados.

[4] Original: *Proletarier aller Länder vereinigt Euch!*, em Manifest der Kommunistischen Partei, 1872, Karl Marx e Friedrich Engels.

100. Ache um vetor diretor de uma reta paralela ao plano $\pi_1 \colon x+y+z=0$ e que forma um ângulo de $\dfrac{\pi}{4}$ com o plano $\pi_2 \colon x-y=0$.

101. Calcule as medidas dos ângulos entre a diagonal de um cubo e suas faces.

102. * Ache uma equação geral de um plano que contém a reta $r \colon \begin{cases} x=z+1, \\ y=z-1. \end{cases}$, e que forma um ângulo de $\dfrac{\pi}{3}$ com o plano $\pi \colon x+2y-3z+2=0$.

103. * A diagonal BC de um quadrado $ABDC$ está contida na reta $r \colon X=(1,0,0)+\lambda(0,1,1)$. Conhecendo $A=(1,1,0)$, determine os outros vértices.

Distâncias

104. Calcule a distância entre os pontos A e B nos casos:
(a) $A=(0,-1,0)$, $\quad B=(-1,1,0)$.
(b) $A=(-1,-3,4)$, $\quad B=(1,2,-8)$.

105. Calcule a distância do ponto P à reta r nos casos:
(a) $P=(0,-1,0)$, $\quad r \colon \begin{cases} x=2z-1, \\ y=z+1. \end{cases}$.
(b) $P=(1,0,1)$, $\quad r \colon \begin{cases} x=\lambda, \\ y=\dfrac{\lambda}{2}, \\ z=\dfrac{\lambda}{3}. \end{cases}$.
(c) $P=(1,-1,4)$, $\quad r \colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$.
(d) $P=(-2,0,1)$, $\quad r \colon \begin{cases} x=3\lambda+1, \\ y=2\lambda-2, \\ z=\lambda. \end{cases}$.

106. Calcule a distância do ponto P ao plano π nos casos:
(a) $P=(0,0,-6)$, $\quad \pi \colon x-2y-2z-6=0$.
(b) $P=\left(1,1,\dfrac{15}{6}\right)$, $\quad \pi \colon 4x-6y+12z+21=0$.
(c) $P=(9,2,-2)$, $\quad \pi \colon X=(0,-5,0)+\lambda\left(0,\dfrac{5}{12},1\right)+\mu(1,0,0)$.
(d) $P=(0,0,0)$, $\quad \pi \colon 2x-y+2z-3=0$.

107. Ache os pontos de $r \colon \begin{cases} x+y=2, \\ x=y+z. \end{cases}$ que distam 3 do ponto $A=(0,2,1)$.

108. Ache os pontos de $r \colon x-1=2y=z$ que equidistam dos ponto $A=(1,1,0)$ e $B=(0,1,1)$. Interprete geometricamente o resultado.

109. Prove que todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento AB é equidistante de A e B.

110. Dê uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 2, 1)$ e equidista dos pontos $C = (2, 3, 0)$ e $D = (0, 1, 2)$.

111. * Obtenha equações do conjunto de pontos do espaço que equidistam dos planos $\pi_1\colon x+y-z = 0$, $\pi_2\colon x - y - z - 2 = 0$ e $\pi_3\colon x + y + z = 1$. Descreva-o geometricamente.

112. Ache a distância entre as retas dadas:

(a) $r\colon \dfrac{x-1}{-2} = 2y = z, \qquad s\colon X = (0, 0, 2) + \lambda\Big(-2, \dfrac{1}{2}, 1\Big).$

(b) $r\colon x = \dfrac{y-3}{2} = z - 2, \qquad s\colon x - 3 = \dfrac{y+1}{2} = z - 2.$

(c) $r\colon \begin{cases} x = -1 + \lambda, \\ y = -2 + 3\lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}, \qquad s\colon \begin{cases} x = -1 + \dfrac{2}{3}\lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}.$

(d) $r\colon \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+5}{-2}, \qquad s\colon \begin{cases} x = 21 + 6\lambda, \\ y = -5 - 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda. \end{cases}.$

(e) $r\colon \begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = -\lambda. \end{cases}, \qquad s\colon \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}.$

113. Ache a distância entre os planos paralelos:

(a) $\pi_1\colon 2x - y + 2z + 9 = 0, \qquad \pi_2\colon 4x - 2y + 4z - 21 = 0.$

(b) $\pi_1\colon \begin{cases} x = 2 - \lambda - \mu, \\ y = \mu, \\ z = \lambda. \end{cases}, \qquad \pi_2\colon x + y + z = \dfrac{5}{2}.$

(c) $\pi_1\colon x + y + z = 0, \qquad \pi_2\colon x + y + z + 2 = 0.$

114. Ache os pontos de $r\colon \begin{cases} x + y = 2, \\ x = y + z. \end{cases}$ que distam $\sqrt{\dfrac{14}{3}}$ de $s\colon x = y = z + 1$.

115. Ache os pontos de $r\colon x - 1 = 2y = z$ que equidistam de $s_1\colon \begin{cases} x = 2, \\ z = 0. \end{cases}$ e $s_2\colon x = y = 0$.

116. Obtenha a equação vetorial das retas paralelas a $s\colon \begin{cases} 2x - z = 3, \\ y = 2. \end{cases}$, concorrentes com $t\colon X = (-1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 2)$ e que distam 1 do ponto $P = (1, 2, 1)$.

117. Um quadrado $ABCD$ tem a diagonal BD contida na reta $r\colon \begin{cases} x = 1, \\ y = z. \end{cases}$. Sabendo que $A = (0, 0, 0)$, determine os vértices B, C e D.

118. Dê uma equação geral do plano π que contém a reta $r\colon X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$ e dista $\sqrt{2}$ do ponto $A = (1, 1, -1)$.

119. As retas r, s e t determinam com o plano π um tetraedro. Calcule a altura do tetraedro relativa à face situada no plano π com:

$\pi\colon x+y-z+1=0, \quad r\colon x=y=z+1, \quad s\colon x-y=z+1=0,$

$$t\colon \begin{cases} x-y-z=1, \\ x=0. \end{cases} .$$

120. * Obtenha as equações do lugar geométrico dos pontos do espaço cujas distâncias ao plano $\pi_1\colon 2x-y+2z-6=0$ são os dobros das suas distâncias ao plano $\pi_2\colon x+2y-2z+3=0$.

121. Dicas para leitura nas horas livres:

(a) Antônio Callado: *Bar Don Juan*, Editora Civilização Brasileira, 1972.
(b) Antônio Callado: *Quarup*, Editora José Olympio, 1967.
(c) Jorge Castañeda: *Che Guevara. A vida em vermelha*, Companhia das Letras, 2005.
(d) Karl Marx & Friedrich Engels: *O manifesto do partido comunista*, edipro, 1998.
(e) Leonardo Padura: *O homem que amava os cachorros*, Editora Boitempo, 2013.
(f) Mário Magalhães: *Marighella. O guerrilheiro que incendiou o mundo*, Companhia das Letras, 2012.
(g) Mário Magalhães: *Sobre lutas e lágrimas - Uma biografia de 2018*, Editora Record, 2019.
(h) Sérgio Haddad: *O educador - Um perfil de Paulo Freire*, Editora todavida, 2019.
(i) Simon Singh: *O último teorema de Fermat*, Editora Record, 1997.
(j) Steven Levitsky & Daniel Ziblatt: *Como as democracias morrem*, Editora Zahar, 2018.
(k) Svetlana Aleksievitch: *Vozes de Tchernóbil. A história oral do desastre nuclear*, Companhia das Letras, 2013.