Integral de frações parciais - Parte II

Obs.: Para o subcaso $\partial p(t) = 1, \partial q(t) = 2, \Delta > 0$, é possível proceder da mesma forma (frações parciais).

$$\int \frac{2t-1}{t^2 - 11t + 30} dt = ?$$

Veja que:

$$\frac{2t-1}{t^2 - 11t + 30} = \frac{2t-1}{(t-5)\cdot(t-6)} = \frac{A}{t-5} + \frac{B}{t-6}$$

Para encontrar os coeficientes $A$ e $B$, façamos:

$$2t - 1 = A\cdot(t-6) + B\cdot(t-5) = (A+B)\cdot t - 6A - 5B$$

Daí, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -6A - 5B = -1, \end{cases}$$

de onde obtemos:

$$B = 2 - A \Rightarrow -6A - 10 + 5A = -1 \Rightarrow A = -9 \Rightarrow B = 11$$

Logo:

$$\int \frac{2t-1}{t^2 - 11t + 30} dt = \int \frac{A}{t-5} + \frac{B}{t-6} dt = \int \frac{-9}{t-5} + \frac{11}{t-6} dt$$

$$= -9\ln(t-5) + 11\ln(t-6) + K, K \in \mathbb{R}$$

Analisemos agora o subcaso: $\partial p(t) = n, n \geq 2, \partial q(t) = 2, \Delta > 0$

Estratégia para este cenário: Efetuar a divisão dos polinômios envolvidos para recair em casos anteriores.

Exemplo:

$$\int \frac{t^2+2}{t^2-5t+6}\,dt = ?$$

Façamos a divisão dos polinômios:

$$\begin{array}{rl|l}
 & t^2+2 & t^2-5t+6 \\ \cline{3-3}
- & \underline{t^2-5t+6} & 1 \\
 & 0+5t-4 &
\end{array}$$

Logo:

$$t^2+2 = 1\cdot\left(t^2-5t+6\right) + 5t - 4$$

$$\Rightarrow \frac{t^2+2}{\mathrm{t}^2-5\mathrm{t}+6} = 1 + \frac{5t-4}{t^2-5t+6}$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^2+2}{t^2-5t+6}\,dt = \int 1 + \frac{5t-4}{t^2-5t+6}\,dt$$
$$= t + \int \frac{5t-4}{t^2-5t+6}\,dt$$

Vamos deixar esta última parte como exercício.

Lidaremos a seguir com o subcaso: $\partial p(t) = 0$, $\partial q(t) = 2$, $\Delta < 0$

Para este subcaso, temos o exemplo mais representativo, a saber:

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + K, K \in \mathbb{R}$$

O que fazer no seguinte exemplo:

$$\int \frac{1}{2t^2+1}\,dt = ?$$

$$\int \frac{1}{2t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{\left(\sqrt{2}\cdot t\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \int \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\cdot t\right)^2+1}\,dt$$

Fazendo a mudança de variáveis: $u = \sqrt{2}\cdot t$, teremos:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \int \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\cdot t\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan u + L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan\left(\sqrt{2} \cdot t\right) + L, L \in \mathbb{R}$$

Os exemplos a seguir serão deixados como exercício:

1)

$$\int \frac{2}{\frac{t^2}{5} + 1} dt = \cdots = 2\sqrt{5} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + K, K \in \mathbb{R}$$

2)

$$\int \frac{A}{Bt^2 + 1} dt = \cdots = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \arctan\left(\sqrt{B} \cdot t\right) + J, J \in \mathbb{R}$$

3)

$$\int \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\frac{t^2}{2} + 1} dt = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + L, L \in \mathbb{R}$$

4)

$$\int \frac{A}{Bt^2 + C} dt = \cdots = \frac{A\sqrt{C}}{C\sqrt{B}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{B}{C}} \cdot t\right) + K, K \in \mathbb{R}$$

Veja que em todos os exemplos acima tivemos polinômios de grau 2 incompletos no denominador. O que fazer se tivermos um polinômio completo?

Exemplos:

1)

$$\frac{1}{t^2+2t+5} = \frac{1}{(t+1)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{(t+1)^2}{4}+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}$$

Logo, fazendo a mudança de variáveis $u = \frac{t+1}{2}$, teremos que $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$, e assim:

$$\int \frac{1}{t^2+2t+5}dt = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}dt = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\arctan u + H = \frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right) + H, H \in \mathbb{R}$$

2)

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}dt = ?$$

$$\int \frac{1}{t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \cdots = ?$$

O que fazer no subcaso $\partial p(t) = 1$, $\partial q(t) = 2$, $\Delta < 0$?

Exemplo:

$$\int \frac{3t+1}{t^2+2t+5}\,dt = ?$$

$$\int \frac{3t+1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{2t+2-2+\frac{2}{3}}{t^2+2t+5}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\int \frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt + \frac{3}{2}\cdot\int \frac{-2+2/3}{t^2+2t+5}\,dt$$

To be continued…