Integral de funções racionais

Relembrando:

$$\int \frac{5}{-4t+9}dt = \frac{5}{-4} \cdot \int \frac{-4}{-4t+9}dt = -\frac{5}{4} \cdot \ln(-4t+9) + K, K \in \mathbb{R}$$

Vamos agora analisar o subcaso: $\partial p(t) = 1$

$$\int \frac{t+1}{t-3}dt$$

Neste caso, deveremos efetuar a divisão dos polinômios:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

Este é o algoritmo da divisão euclidiana, o qual nos diz que:

$$D = d \cdot q + r, 0 \leq r < d$$

$$\begin{array}{rl|l} & t+1 & t-3 \\ \hline - & t-3 & 1 \\ \hline & 0+1-(-3)=4 & \end{array}$$

Usando o algoritmo da divisão euclidiana aplicado a polinômios, concluímos que:

$t+1 = (t-3) \cdot 1 + 4$, ou seja:

$$\frac{t+1}{t-3} = 1 + \frac{4}{t-3}$$

Logo:

$$\int \frac{t+1}{t-3} dt = \int 1 + \frac{4}{t-3} dt = t + 4 \int \frac{1}{t-3} dt$$
$$= t + 4 \cdot \ln(t-3) + L, L \in \mathbb{R}$$

Vamos exercitar o conhecimento aprendido acima por meio do seguinte exemplo:

$$\int \frac{t^2 - 5t + 6}{t-5} dt$$

Veja que:

$t^2 - 5t + 6 = t(t-5) + 6$. Logo:

$$\int \frac{t^2 - 5t + 6}{t-5} dt = \int t + \frac{6}{t-5} dt = \frac{t^2}{2} + 6 \int \frac{1}{t-5} dt$$
$$= \frac{t^2}{2} + 6 \ln(t-5) + J, J \in \mathbb{R}$$

Com o exemplo acima, percebemos que é possível lidar com o subcaso $\partial p(t) = n, n \in \mathbb{N}, \partial q(t) = 1$, usando a mesma abordagem apresentada.

Analisemos agora o caso: $\partial q(t) = 2, \partial p(t) = 0$

Adiantaremos a seguinte informação: a estratégia algébrica para resolver integrais neste caso irá depender fundamentalmente do sinal do discriminante Δ, como veremos a seguir.

Subcaso: $\Delta = 0$

Exemplo:

$$\int \frac{5}{t^2 + 6t + 9} dt = \int \frac{5}{(t+3)^2} dt$$

Façamos a mudança de variáveis:

$$u = t + 3 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 1$$

Logo:

$$\int \frac{5}{(t+3)^2} dt = 5 \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{5}{u} + L = -\frac{5}{t+3} + L, L \in \mathbb{R}$$

Subcaso: $\Delta > 0$

Para esta situação, precisaremos recorrer ao chamado "Método das Frações Parciais". Esse método se propõe a transformar um produto de frações em uma soma de frações, conservando os mesmo denominadores. Vejamos um exemplo com frações numéricas:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3}$$

Claramente vemos que uma escolha possível para A e B seria: $A = 1, B = -1$. Dessa forma:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

Veja que a escolha para os coeficientes acima não é única. Poderíamos, por exemplo, escolher: $A = \frac{1}{3}, B = 0$. No fim, existirão infinitas possibilidades (no caso de fraçoes numéricas).

No caso que veremos a seguir, só teremos uma possibilidade para os coeficientes das frações parciais:

$$\frac{1}{t^2-5t+6}=\frac{1}{(t-2)\cdot(t-3)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-3}$$

Para encontrar os coeficientes A e B, procederemos da seguinte forma:

$$1=A\cdot(t-3)+B\cdot(t-2)=(A+B)\cdot t-3A-2B$$

Para que a igualdade acima seja possível, deveremos ter:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases}$$

$$A=-B\Rightarrow 3B-2B=1\Rightarrow B=1\Rightarrow A=-1$$

Logo:

$$\frac{1}{t^2-5t+6}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-3}=\frac{-1}{t-2}+\frac{1}{t-3}$$

Concluímos então que é possível integrar a expressão acima facilmente:

$$\int\frac{1}{t^2-5t+6}dt=\int\frac{-1}{t-2}+\frac{1}{t-3}dt$$

$$=-\ln(t-2)+\ln(t-3)+K, K\in\mathbb{R}=\ln\left(\frac{t-3}{t-2}\right)+K, K\in\mathbb{R}$$

Vejamos mais um exemplo:

$$\int\frac{3}{t^2-7t+10}dt=\int-\frac{1}{t-2}+\frac{1}{t-5}dt$$

$$=-\ln(t-2)+\ln(t-5)+H, H\in\mathbb{R}=\ln\left(\frac{t-5}{t-2}\right)+H, H\in\mathbb{R}$$

Obs.: Para o subcaso $\partial p(t) = 1, \partial q(t) = 2, \Delta > 0$, é possível proceder da mesma forma (frações parciais).

To be continued...