

## **Trabalho 2 - Grupo 39**

### Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

MiEI 3ºano – 1º semestre



Margarida Campos

A85166



Catarina Gil

a85266



Tânia Rocha

a85176

# Índice

Introdução .....	3
Parte I .....	4
1. Apresentação da rede com indicação dos sentidos das ruas BDCE .....	4
2. Modelo linear da nova instância .....	4
3. Resolução com Relax4 .....	6
4. Resultados .....	7
5. Análise de Resultados .....	8
6. Validação de Resultados .....	10
Parte II .....	11
1. Modelo Linear .....	11
2. Grafo Bipartido .....	12
3. Matriz dos caminhos mais curtos .....	13
4. Resolução com Relax4 .....	14
5. Resultados .....	15
6. Validação de Resultados .....	17
Conclusão .....	18

## Introdução

O presente trabalho no âmbito da UC de Modelos Determinísticos de Investigação Operacional é uma segunda fase de um conjunto de trabalhos, em que se pretende determinar um circuito, ou conjunto de circuitos, em que todos os arcos de um grafo são percorridos, pelo menos, uma vez, minimizando a distância total percorrida.

Este foi dividido em duas partes: Parte I, cujas variáveis de decisão representam o fluxo de todas as arestas do grafo e Parte II, cujas variáveis de decisão correspondem a um caminho entre um cada par vértice de excesso/defeito.

## Parte I

### 1. Apresentação da rede com indicação dos sentidos das ruas BDCE

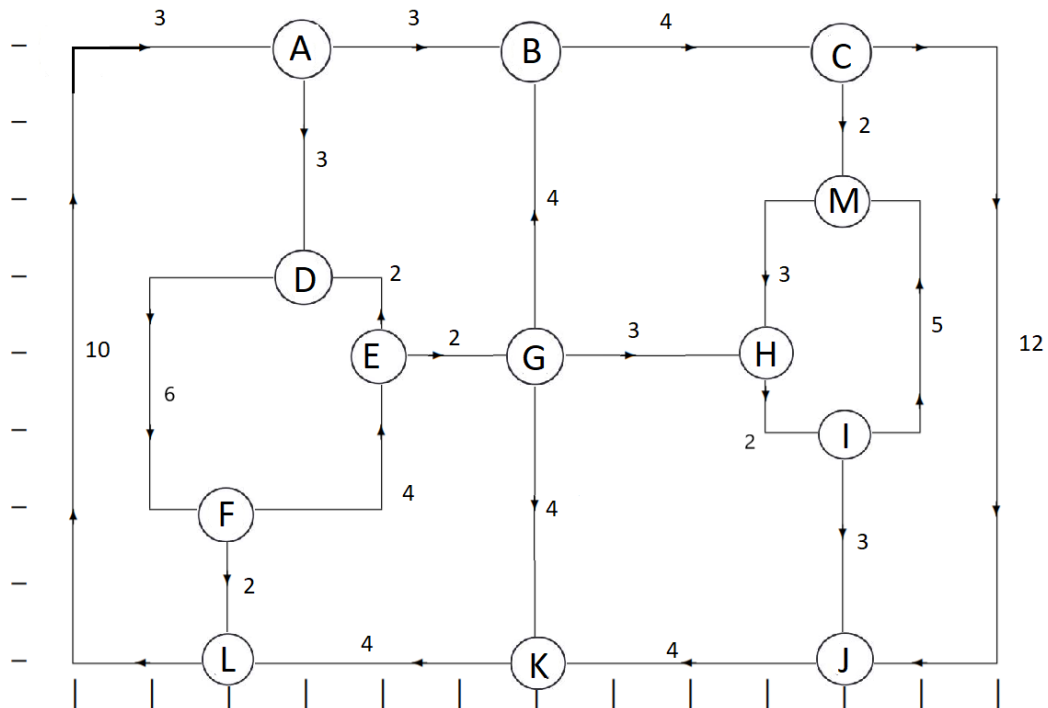


Figura 1-Grafo inicial

### 2. Modelo linear da nova instância

De acordo com o segundo grupo de restrições é feita a seguinte mudança de variável:

$y_{ij} = x_{ij} - l_{ij}, \forall (i, j) \in A$ , sendo que para este problema o  $l_{ij}, \forall (i, j)$  toma o valor de 1, pois, no mínimo, cada arco tem de ser percorrido uma vez.

$$\Leftrightarrow x_{ij} = y_{ij} + 1$$

Posto isto o modelo linear passa a ser:

**Variáveis de decisão:**  $y_{ij}$  : número de vezes que o arco com entrada em  $i$  e saída em  $j$  é percorrido.

### Restrições:

$y_{AB}, y_{BC}, y_{CJ}, y_{CM}, y_{JK}, y_{KL}, y_{AD}, y_{ED}, y_{FE}, y_{EG}, y_{GB}, y_{GK}, y_{GH}, y_{MH}, y_{HI}, y_{IM}, y_{LA}, y_{FL}, y_{IJ}, y_{DF} \geq 0$

Nodos	Restrições
A	$y_{AB} + y_{AD} - y_{LA} = -1$
B	$y_{BC} - y_{AB} - y_{GB} = 1$
C	$y_{CM} + y_{CJ} - y_{BC} = -1$
D	$y_{DF} - y_{AD} - y_{ED} = 1$
E	$y_{ED} + y_{EG} - y_{FE} = -1$
F	$y_{FE} + y_{FL} - y_{DF} = -1$
G	$y_{GB} + y_{GH} + y_{GK} - y_{EG} = -2$
H	$y_{HI} - y_{GH} - y_{MH} = 1$
I	$y_{IM} + y_{IJ} - y_{HI} = -1$
J	$y_{JK} - y_{IJ} - y_{CJ} = 1$
K	$y_{KL} - y_{JK} - y_{GK} = 1$
L	$y_{LA} - y_{FL} - y_{KL} = 1$
M	$y_{LA} - y_{FL} - y_{KL} = 1$

### Função Objetivo:

Min:  $3y_{AB} + 4y_{BC} + 12y_{CJ} + 4y_{JK} + 4y_{KL} + 13y_{LA} + 3y_{AD} + 6y_{DF} + 2y_{FL} + 4y_{FE} + 2y_{ED} + 2y_{EG} + 4y_{GB} + 4y_{GK} + 3y_{GH} + 2y_{HI} + 5y_{IM} + 3y_{MH} + 3y_{IJ} + 2y_{CM} + 85$

Vértice	Nº arestas que entram	Nº arestas que saem	Fluxo
A	1	2	-1
B	2	1	1
C	1	2	-1
D	2	1	1
E	1	2	-1
F	1	2	-1
G	1	3	-2
H	2	1	1
I	1	2	-1
J	2	1	1
K	2	1	1
L	2	1	1
M	2	1	1
			0

Vértices de excesso: B, D, H, J, K, L, M

Vértices de defeito: A, C, E, F, G, I

Tabela 1-Controlo do fluxo de cada vértice



- o fluxo que entra num vértice do grafo deve ser igual ao que sai, verificando-se assim que o percurso é fechado

### 3.Resolução com Relax4

Para a resolução deste problema utilizamos, como recomendado, o software relax4, para tal usamos a seguinte metodologia:

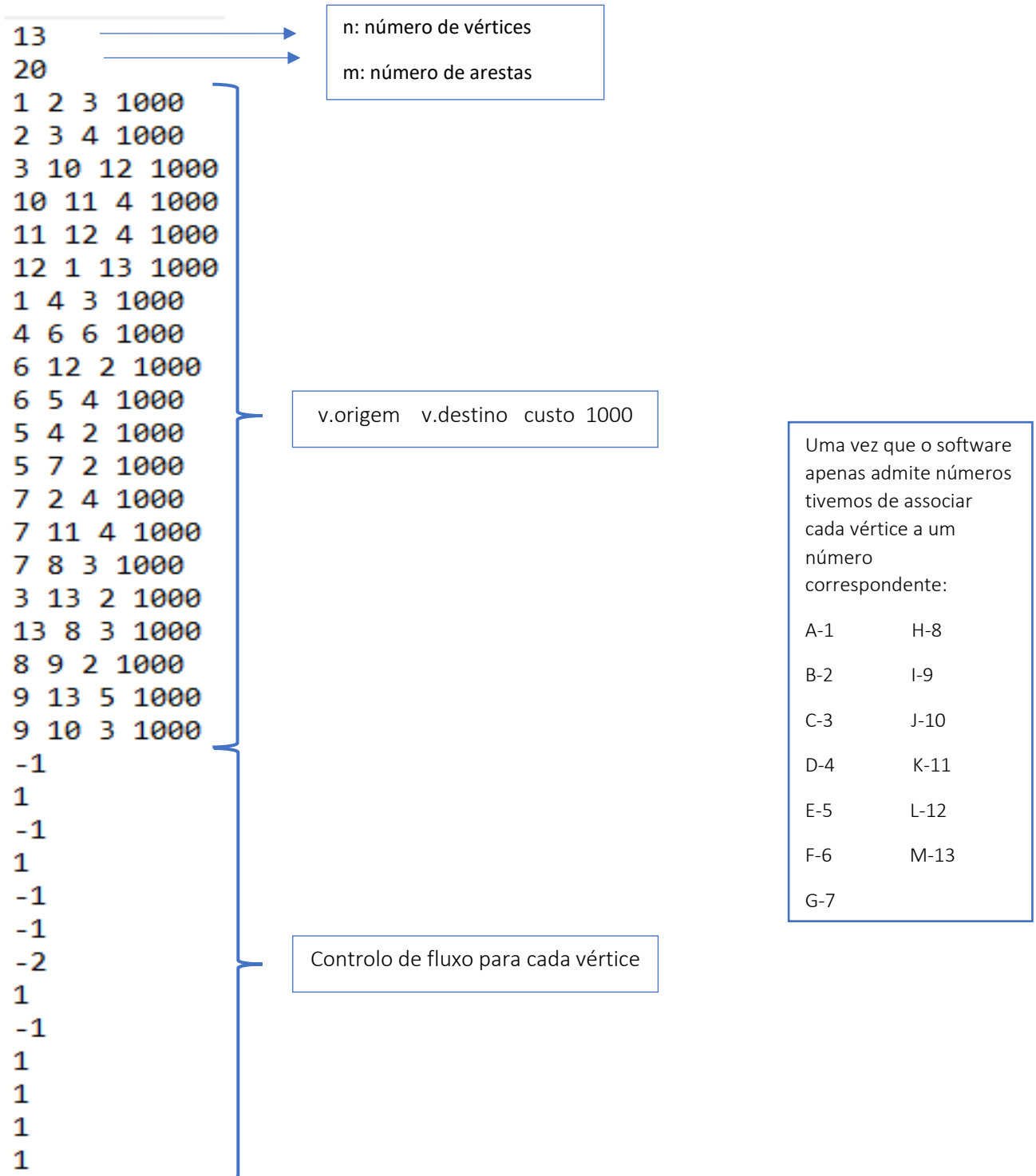


Figura 2- Ficheiro input

## 4.Resultados

```
| END OF READING
NUMBER OF NODES = 13, NUMBER OF ARCS = 20
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
  2 3 1.
 10 11 2.
 11 12 3.
 12 1 4.
 1 4 3.
 4 6 4.
 6 5 3.
 5 7 2.
 13 8 1.
 8 9 2.
 9 10 1.
OPTIMAL COST = 135.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 58
NUMBER OF ITERATIONS = 17
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 2
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 4
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 2
*****
```

Figura 3-Ficheiro output

A partir deste resultado conseguimos obter:

yAB=0;	xAB=1;
yBC=1;	xBC=2;
yCJ=0;	xCJ=1;
yCM= 0;	xCM= 1;
yJK=2;	xJK=2;
yKL=3;	xKL=4;
yAD=3;	xAD=4;
yED=0;	xED=1;
yFE=3;	xFE=4;
yEG=2;	xEG=3;

Mudança de variável  
 $Y_{ij}=X_{ij}-1 \Leftrightarrow X_{ij}=Y_{ij}+1$

$y_{GB}=0;$	$x_{GB}=1;$
$y_{GK}=0;$	$x_{GK}=1;$
$y_{GH}=0;$	$x_{GH}=1;$
$y_{MH}=1;$	$x_{MH}=2;$
$y_{HI}=2;$	$x_{HI}=3;$
$y_{IM}=0;$	$x_{IM}=1;$
$y_{LA}=4;$	$x_{LA}=5;$
$y_{FL}=0;$	$x_{FL}=1;$
$y_{IJ}=1;$	$x_{IJ}=2;$
$y_{DF}=4;$	$x_{DF}=5;$

Função objetivo:

$$3y_{AB} + 4y_{BC} + 12y_{CJ} + 4y_{JK} + 4y_{KL} + 13y_{LA} + 3y_{AD} + 6y_{DF} + 2y_{FL} + 4y_{FE} + 2y_{ED} + 2y_{EG} + 4y_{GB} + 4y_{GK} + 3y_{GH} + 2y_{HI} + 5y_{IM} + 3y_{MH} + 3y_{IJ} + 2y_{CM} + 85$$

↔

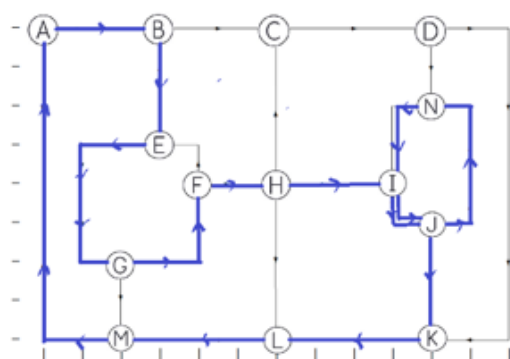
$$135+85= 220$$

## 5. Análise de Resultados

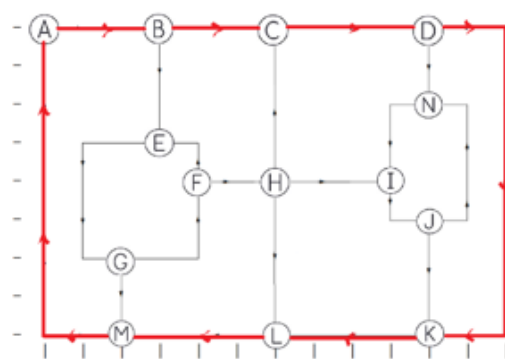
De acordo com o trabalho anterior, após retornar à variável  $X_{ij}$ , os valores obtidos para cada arco foram os mesmos, porém o valor da função objetivo sofreu uma alteração, uma vez que no primeiro trabalho, no software LPSolve, houve erros com as medidas das arestas.

Após a detecção deste erro, resolvemos outra vez o problema do trabalho 1, obtendo assim um novo resultado que coincide com este (f.o.=220).

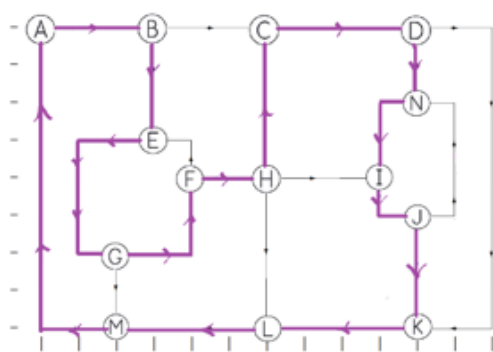




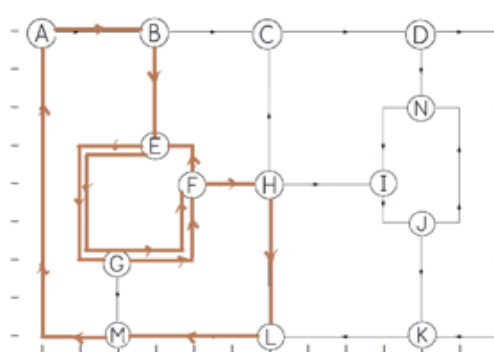
Subcaminho 1



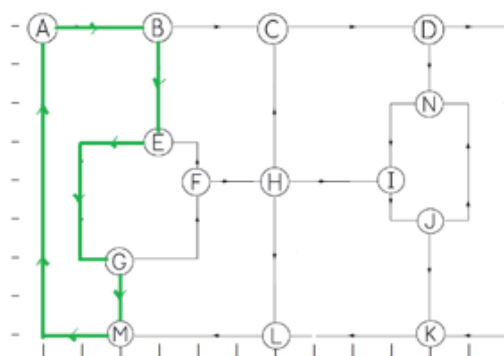
Subcaminho 2



Subcaminho 3



Subcaminho 4



Subcaminho 5

Figura 4- Subcaminhos do trajeto final obtido

## 6. Validação de Resultados

Para validar os resultados substitui-se os valores obtidos com a execução do programa relax4 nas restrições e na função objetivo definidas no início do trabalho.

Substituição dos valores obtidos nas restrições:

$y_{AB}, y_{BC}, y_{CJ}, y_{CM}, y_{JK}, y_{KL}, y_{AD}, y_{ED}, y_{FE}, y_{EG}, y_{GB}, y_{GK}, y_{GH}, y_{MH}, y_{HI}, y_{IM}, y_{LA}, y_{FL}, y_{IJ}, y_{DF} \geq 0$

0,1,0,2,3,4,3,4,0,3,0,2,0,0,2,0,1,1,0  $\geq 0$

Nodo A:  $y_{AB} + y_{AD} - y_{LA} = -1 \longrightarrow 3+0-4 = -1$   
 Nodo B:  $y_{BC} - y_{AB} - y_{GB} = 1 \longrightarrow 1-0-0 = 1$   
 Nodo C:  $y_{CM} + y_{CJ} - y_{BC} = -1 \longrightarrow 0-0-1 = -1$   
 Nodo D:  $y_{DF} - y_{AD} - y_{ED} = 1 \longrightarrow 4-3-0 = 1$   
 Nodo E:  $y_{ED} + y_{EG} - y_{FE} = -1 \longrightarrow 0+2-3 = -1$   
 Nodo F:  $y_{FE} + y_{FL} - y_{DF} = -1 \longrightarrow 3+0-4 = -1$   
 Nodo G:  $y_{GB} + y_{GH} + y_{GK} - y_{EG} = -2 \longrightarrow 0+0+0-2 = -2$   
 Nodo H:  $y_{HI} - y_{GH} - y_{MH} = 1 \longrightarrow 2-0-1 = 1$   
 Nodo I:  $y_{IM} + y_{IJ} - y_{HI} = -1 \longrightarrow 0+1-2 = -1$   
 Nodo J:  $y_{JK} - y_{IJ} - y_{CJ} = 1 \longrightarrow 2-1-0 = 1$   
 Nodo K:  $y_{KL} - y_{JK} - y_{GK} = 1 \longrightarrow 3-2-0 = 1$   
 Nodo L:  $y_{LA} - y_{FL} - y_{KL} = 1 \longrightarrow 4-0-3 = 1$   
 Nodo M:  $y_{MH} - y_{CM} - y_{IM} = 1 \longrightarrow 1-0-0 = 1$

Substituição dos valores obtidos na função objetivo:

$3y_{AB} + 4y_{BC} + 12y_{CJ} + 4y_{JK} + 4y_{KL} + 13y_{LA} + 3y_{AD} + 6y_{DF} + 2y_{FL} + 4y_{FE} + 2y_{ED} + 2y_{EG} + 4y_{GB} + 4y_{GK} + 3y_{GH} + 2y_{HI} + 5y_{IM} + 3y_{MH} + 3y_{IJ} + 2y_{CM} + 850 = 220$



$3 \times 0 + 4 \times 1 + 12 \times 0 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + 13 \times 4 + 3 \times 3 + 6 \times 4 + 2 \times 0 + 4 \times 3 + 2 \times 0 + 2 \times 2 + 4 \times 0 + 4 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 2 + 5 \times 0 + 3 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 0 + 85 = 220$

## Parte II

Tal como na parte I, temos como finalidade saber o custo do caminho mais curto que passa em todos os vértices.

### 1. Modelo Linear

**Variáveis de decisão:**  $x_{ij}$  : caminho entre um vértice de excesso  $i$  e um vértice de defeito  $j$

#### Restrições:

Tal como na parte anterior as restrições vão corresponder ao controlo do fluxo em cada vértice:

Nodo A: -1;	Nodo E: -1;	Nodo I: -1
Nodo B: 1;	Nodo F: -1;	Nodo J: 1;
Nodo C: - 1;	Nodo G: -2;	Nodo K: 1;
Nodo D: 1;	Nodo H: 1;	Nodo L: 1;
Nodo M: 1;		

#### Função Objetivo:

Min :  $35 x_{BA} + 4 x_{BC} + 48 x_{BE} + 44 x_{BF} + 50 x_{BG} + 11 x_{BI} + 21 x_{DA} + 20 x_{DC} + 10 x_{DE} + 6 x_{DF} + 12 x_{DG} + 17 x_{DI} + 26 x_{HA} + 33 x_{HC} + 39 x_{HE} + 35 x_{HF} + 41 x_{HG} + 2 x_{HI} + 21 x_{JA} + 28 x_{JC} + 34 x_{JE} + 30 x_{JF} + 36 x_{JG} + 35 x_{JI} + 17 x_{KA} + 24 x_{KC} + 30 x_{KE} + 26 x_{KF} + 32 x_{KG} + 31 x_{KI} + 13 x_{LA} + 20 x_{LC} + 26 x_{LE} + 22 x_{LF} + 28 x_{LG} + 27 x_{LI} + 29 x_{MA} + 36 x_{MC} + 42 x_{ME} + 38 x_{MF} + 44 x_{MG} + 5 x_{MI} + 85$

Na função objectivo consta cada caminho entre cada par vértice de excesso e de defeito, calculados apartir da **tabela1**, assim como os respetivos custos. Na mesma somamos o valor obtido anteriormente: 85.

2.Grafo Bipartido

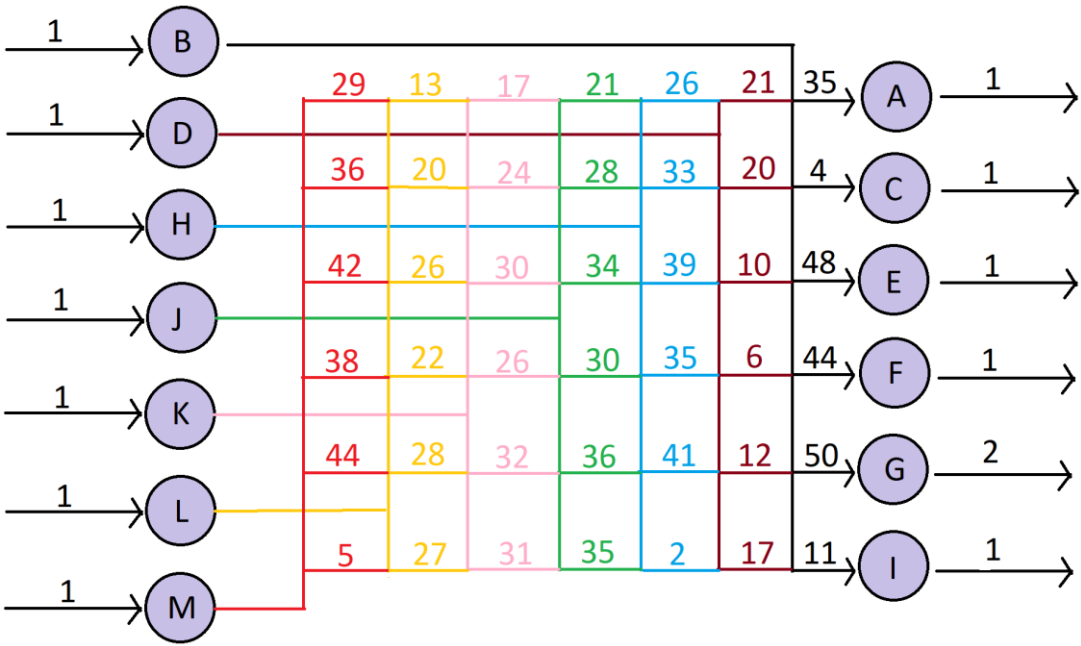


Figura 5-Grafo bipartido dos pares vértice de excesso/defeito

### 3. Matriz dos caminhos mais curtos

	A	C	E	F	G	I
B	35	4	48	44	50	11
D	21	20	10	6	12	17
H	26	33	39	35	41	2
J	21	28	34	30	36	35
K	17	24	30	26	32	31
L	13	20	26	22	28	27
M	29	36	42	38	44	5

Tabela 2- Custos entre cada par vértice excesso/defeito

Para construir esta matriz, tivemos o auxílio do software Ipsolve.

Para isso aproveitamos o modelo do trabalho passado, alterando apenas o fluxo para cada vértice.

Por exemplo (valor BA):

```
xLA - xAB - xAD=-1;
xAB + xGB - xBC=1;
xBC - xCM - xCJ=0;
xAD + xED - xDF=0;
xFE - xED - xEG=0;
xDF - xFE - xFL=0;
xEG - xGB - xGH - xGK=0;
xGH + xMH - xHI=0;
xHI - xIM - xIJ=0;
xIJ + xCJ - xJK=0;
xJK + xGK - xKL=0;
xFL + xKL - xLA=0;
xCM + xIM - xMH =0;
```

Como o vértice A corresponde a um vértice de defeito igualamos a -1.

Como o vértice B corresponde a um vértice de excesso igualamos a 1.

Os restantes são igualados a 0.

Deste modo descobrimos o caminho mais curto que sai em B e entra em A.

Figura 6- Parte do input do Ipsolve

O mesmo foi feito para os restantes pares vértice excesso/defeito.

#### 4. Resolução com Relax4

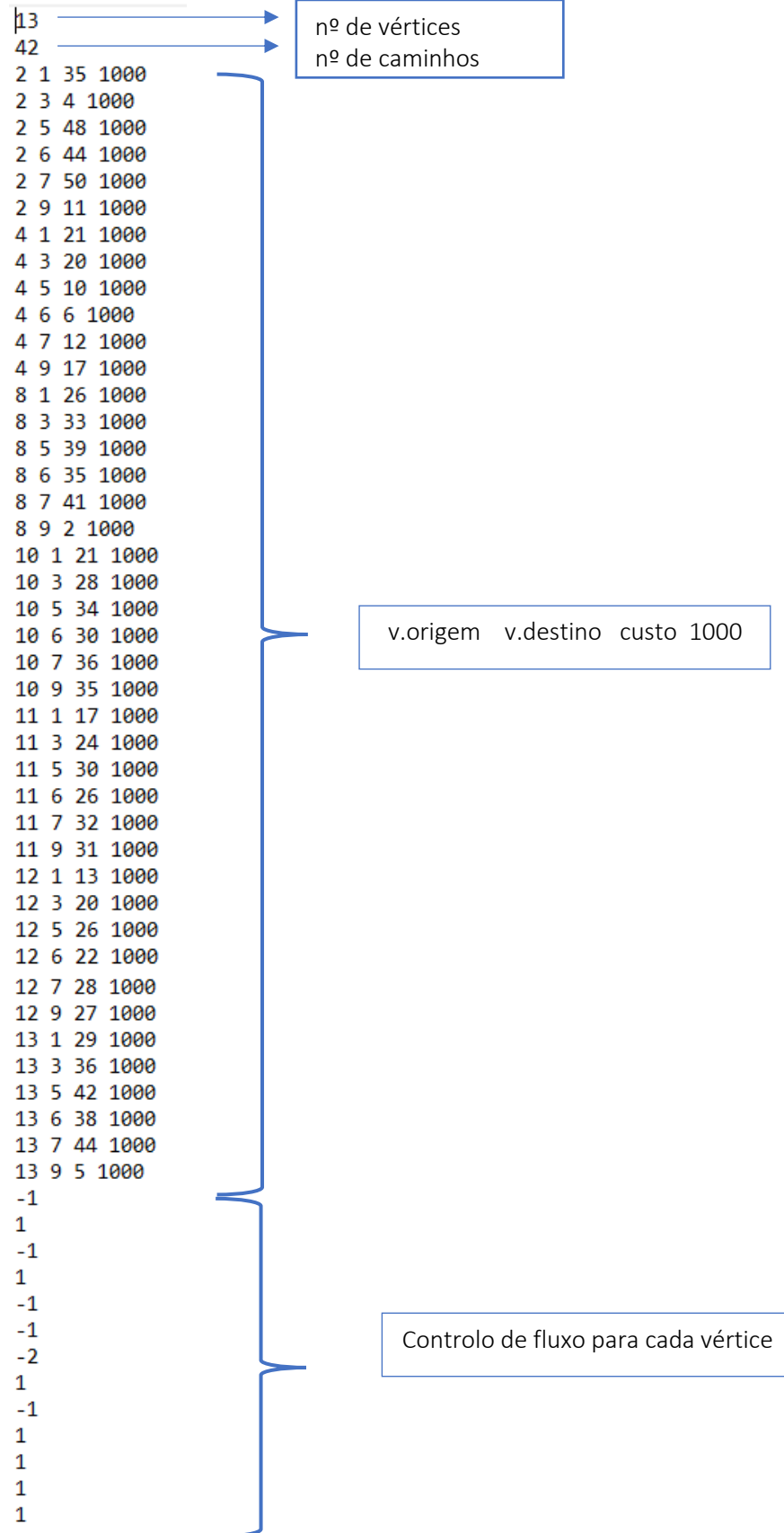


Figura 7- Ficheiro input 2

## 5.Resultados

```
| END OF READING
NUMBER OF NODES = 13, NUMBER OF ARCS = 42
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
  2 3 1.
  4 7 1.
  8 9 1.
 10 7 1.
 11 1 1.
 12 5 1.
 13 6 1.
OPTIMAL COST = 135.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 24
NUMBER OF ITERATIONS = 29
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 4
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 0
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 5
*****
```

Figura 8- Ficheiro output 2

Posto isto o grafo bipartido vai ter como resultado ótimo as seguintes ligações:

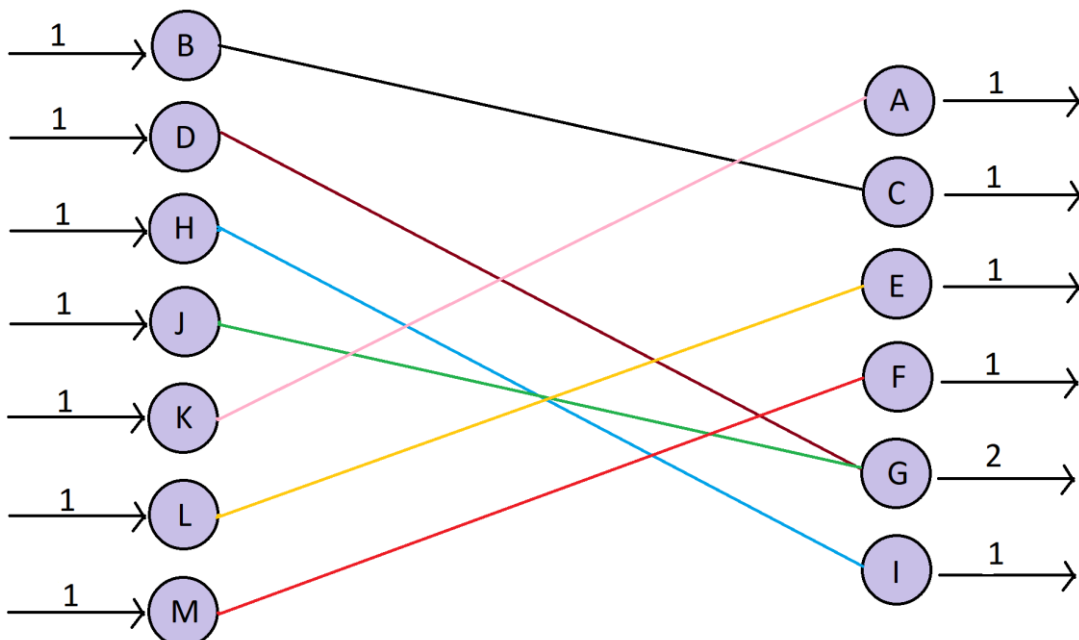
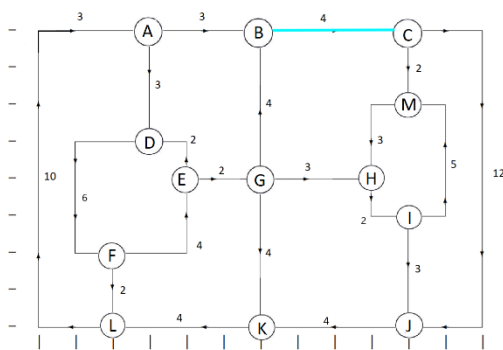
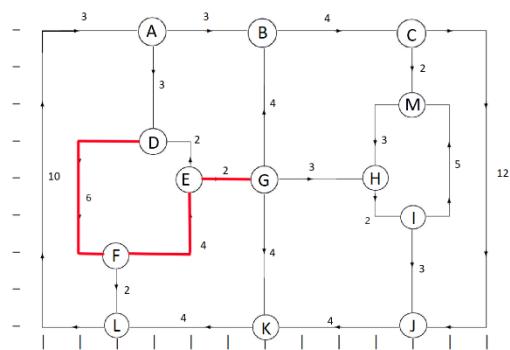


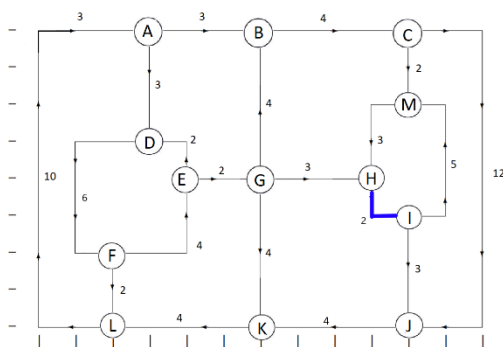
Figura 9- Grafo bipartido ótimo



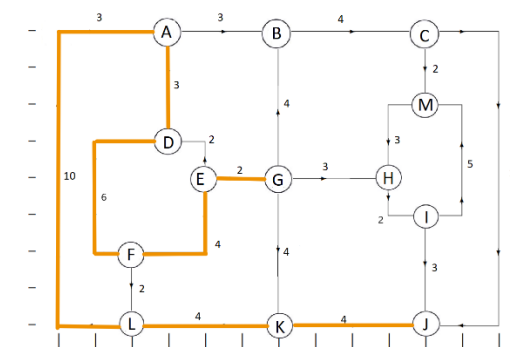
**Fig.10-** Caminho obtido no software  
relax4: 2 3 1  $\Leftrightarrow xBC=1$



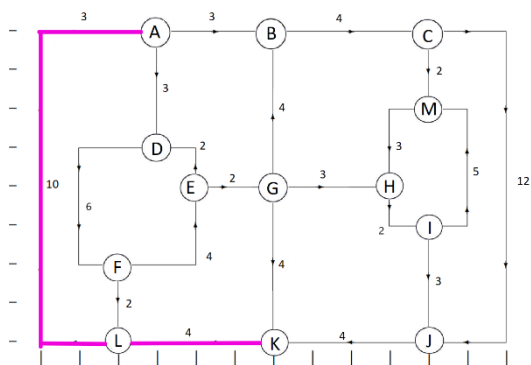
**Fig.11-** Caminho obtido no software  
relax4: 4 7 1  $\Leftrightarrow xDG=1$



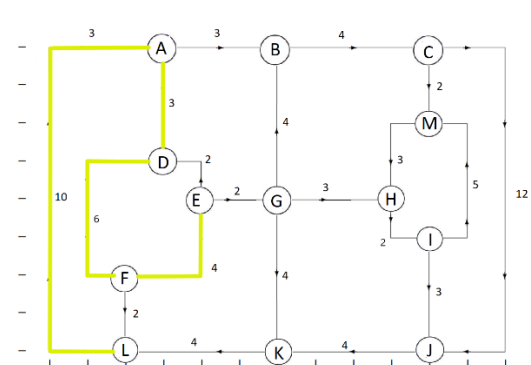
**Fig.12-** Caminho obtido no software  
relax4: 8 9 1  $\Leftrightarrow xHI=1$



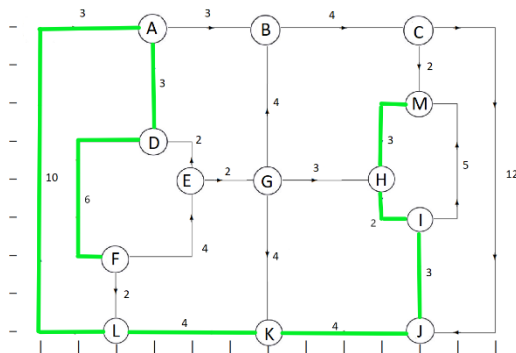
**Fig.13-** Caminho obtido no software  
relax4: 10 7 1  $\Leftrightarrow xJG=1$



**Fig.14-** Caminho obtido no software  
relax4: 11 1 1  $\Leftrightarrow xKA=1$



**Fig.15-** Caminho obtido no software  
relax4: 12 5 1  $\Leftrightarrow xLE=1$



**Fig.16-** Caminho obtido no software  
relax4: 13 6 1  $\Leftrightarrow xMF=1$



## 6. Validação de Resultados

Para validar os resultados substitui-se os valores obtidos com a execução do programa relax4 na função objetivo definidas no início do trabalho.

Substituição dos valores obtidos na função objetivo:

$$35 \times BA + 4 \times BC + 48 \times BE + 44 \times BF + 50 \times BG + 11 \times BI + 21 \times DA + 20 \times DC + 10 \times DE + 6 \times DF + 12 \times DG + 17 \times DI + 26 \times HA + 33 \times HC + 39 \times HE + 35 \times HF + 41 \times HG + 2 \times HI + 21 \times JA + 28 \times JC + 34 \times JE + 30 \times JF + 36 \times JG + 35 \times JI + 17 \times KA + 24 \times KC + 30 \times KE + 26 \times KF + 32 \times KG + 31 \times KI + 13 \times LA + 20 \times LC + 26 \times LE + 22 \times LF + 28 \times LG + 27 \times LI + 29 \times MA + 36 \times MC + 42 \times ME + 38 \times MF + 44 \times MG + 5 \times MI$$

⇔

$$35 \times 0 + 4 \times 1 + 48 \times 0 + 44 \times 0 + 50 \times 0 + 11 \times 0 + 21 \times 0 + 20 \times 0 + 10 \times 0 + 6 \times 0 + 12 \times 12 + 17 \times 0 + 26 \times 0 + 33 \times 0 + 39 \times 0 + 35 \times 0 + 41 \times 0 + 2 \times 1 + 21 \times 0 + 28 \times 0 + 34 \times 0 + 30 \times 0 + 36 \times 1 + 35 \times 0 + 17 \times 1 + 24 \times 0 + 30 \times 0 + 26 \times 0 + 32 \times 0 + 31 \times 0 + 13 \times 0 + 20 \times 0 + 26 \times 1 + 22 \times 0 + 28 \times 0 + 27 \times 0 + 29 \times 0 + 36 \times 0 + 42 \times 0 + 38 \times 1 + 44 \times 0 + 5 \times 0 + 85$$

=

220

## Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou a resolução de soluções ótimas de um percurso com menor custo, através de métodos visivelmente diferentes do primeiro projeto, apesar de ambos terem fundamentos muito semelhantes. Além disso, também permitiu aprofundar o conhecimento sobre a matéria lecionada e para além da aplicação do software Ipsolve, como no trabalho anterior, introduziu a utilização de um novo software, Relax4, que permite a obtenção de soluções ótimas de maneira rápida e eficiente.

Após a resolução deste trabalho, bem como o trabalho anterior, foi possível verificar a equivalência nos resultados tendo em conta que são todos algoritmos que permitem resolver problemas de minimização, neste caso do caminho mais curto.