Verlet

a)

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2 a_n + O(h^4)$$

Se define que $x_n = \bar{x}_n + \varepsilon_n$, que se sustituye en la eq. de Verlet:

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2 a_n + O(h^4)$$

$$\cancel{\bar{x}_{n+1}} + \varepsilon_{n+1} = 2(\cancel{\bar{x}_n} + \varepsilon_n) - \cancel{\bar{x}_{n-1}} - \varepsilon_{n-1} + h^2 a_n + \cancel{O(h^4)}$$

Si el método es eficiente, $\bar{x}_{n+1}$

$$\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} - h^2 a_n = 0$$

Se sustituye a_n a partir de expansión de Taylor:

$$a(\bar{x}_n + \varepsilon_n) \approx a(\bar{x}_n) + \varepsilon_n a_n'$$

con ello, se obtiene que:

$$\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} - h^2(\varepsilon_n a_n') = 0$$

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n(2 + h^2 a_n') + \varepsilon_{n-1} = 0 \qquad (*)$$

b) Para el oscilador armónico clásico $a = -\omega^2 x$ y $\frac{da}{dx} = -\omega^2$.

Dado que $2R = h^2\omega^2$, se reemplaza en $(*)$:

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n(2 - h^2\omega^2) + \varepsilon_{n-1} = 0$$

$$\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n(1 - R) + \varepsilon_{n-1} = 0$$

c) Tomando que $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \lambda^n$, se tiene que:

$$\cancel{\varepsilon_0} \lambda^{n+1} - 2(1-R)\cancel{\varepsilon_0} \lambda^n + \cancel{\varepsilon_0} \lambda^{n-1} = 0$$

para $n = 1$:

$$\lambda^2 - 2(1-R)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2(1-R) \pm \sqrt{(2(1-R))^2 - 4}}{2}$$

$$= 1 - R \pm \sqrt{4 - 8R + 4R^2 - 4}/2$$

$$= 1 - R \pm \sqrt{-2R + R^2} \quad //$$

d) $|\lambda_\pm| = 1$, demuestre que $h \leq \frac{2}{\omega}$

Si se observa cuando $R \to \infty$, se entiende que $\lambda = 1 - R \pm R\sqrt{1 - \frac{2}{R}}$, donde si $R \leq 2$ hay estabilidad al ser $|\lambda_\pm| = 1$, y si $R > 2$ es inestable dado que $|\lambda_-| > 1$.

Por eso:

$$R \leq 2$$

$$\frac{h^2\omega^2}{2} \leq 2$$

$$h^2\omega^2 \leq 4$$

$$h\omega \leq 2$$

$$h \leq \frac{2}{\omega} \quad //$$

Powered by CamScanner