1) Para demostrar que el polinomio interpolador es único vamos a suponer que existe algún otro polinomio interpolador hasta llegar a un absurdo que nos permita concluir que solo puede haber 1.

Vamos a llamar al primer polinomio $P(x)$: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x)$ para $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. El segundo polinomio será $q(x)$: $q(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \tilde{\mathcal{L}}_i(x)$

Para $\tilde{\mathcal{L}}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Recordemos que el conjunto de soporte (Ω) debe contener los mismos puntos para $p(x)$ y $q(x)$.

Supongamos que $R(x) = P(x) - q(x)$: $R(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x) - \sum_{i=0}^{n} y_i \tilde{\mathcal{L}}_i(x)$.

Entonces, $R(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i (\mathcal{L}_i(x) - \mathcal{L}_i(x))$. No obstante, por la definición de $\mathcal{L}_i(x)$ y $\tilde{\mathcal{L}}_i(x)$ y al usar un mismo Ω siempre dará 0 la resta $\mathcal{L}_i(x) - \tilde{\mathcal{L}}_i(x)$ con lo que $R(x) = 0$ siempre y $P(x)$ debe ser igual a $q(x)$, entonces $P(x) \stackrel{!}{=} q(x)$. Y el polinomio es único.