Por la relación de completez:

Se puede suponer que $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 : m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} : m = n \end{cases}$

Además podemos tomar el planteamiento:

$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x)$ y un polinomio de Legendre de la forma $P_m(x)$ para plantear:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x) P_m(x)\, dx$$

Como la suma y la integral son operadores lineales, y sabiendo que $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx$ Para todo $m \neq n$ será 0 con lo que:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = C_n \cdot \frac{2}{2n+1}$$ Pues solo queda el término cuando $m = n$

donde $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$. Para despejar C_n queda:

$$\boxed{C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx}$$