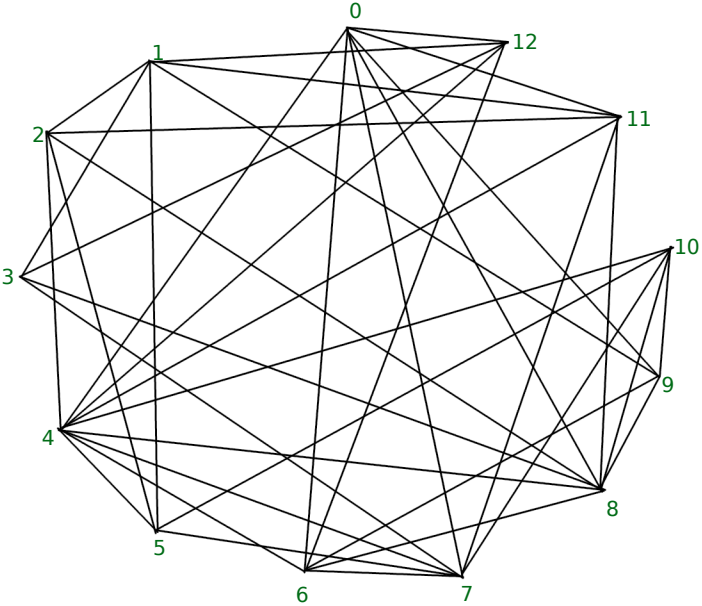


Ad 1



## Ad 2

|    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 0  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |   |
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 2  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 3  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 4  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 5  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 6  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 7  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 8  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  |   |
| 9  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 1  |   |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  |   |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  |   |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |   |

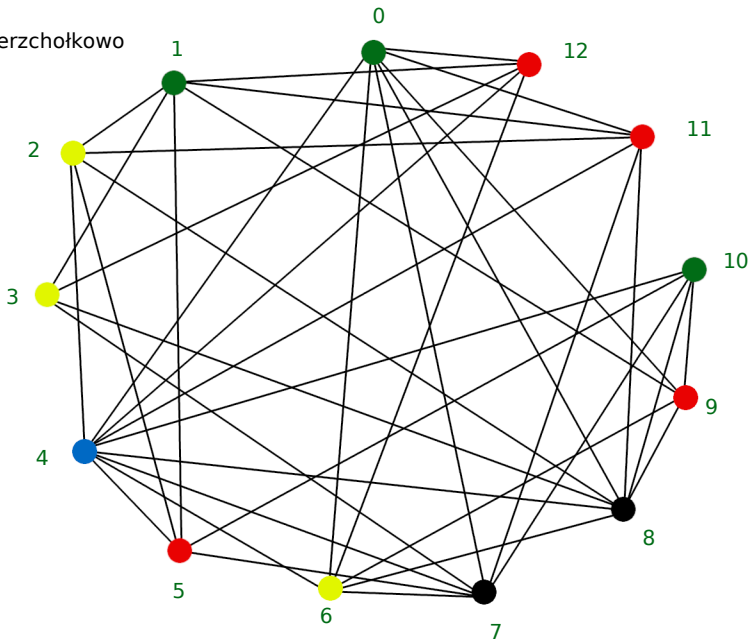
## Ad 3

Graf jest hamiltonowski, ponieważ posiada następujący cykl Hamiltona:  $0 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 0$ . Jest również półhamiltonowski:  $0 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 10$ .

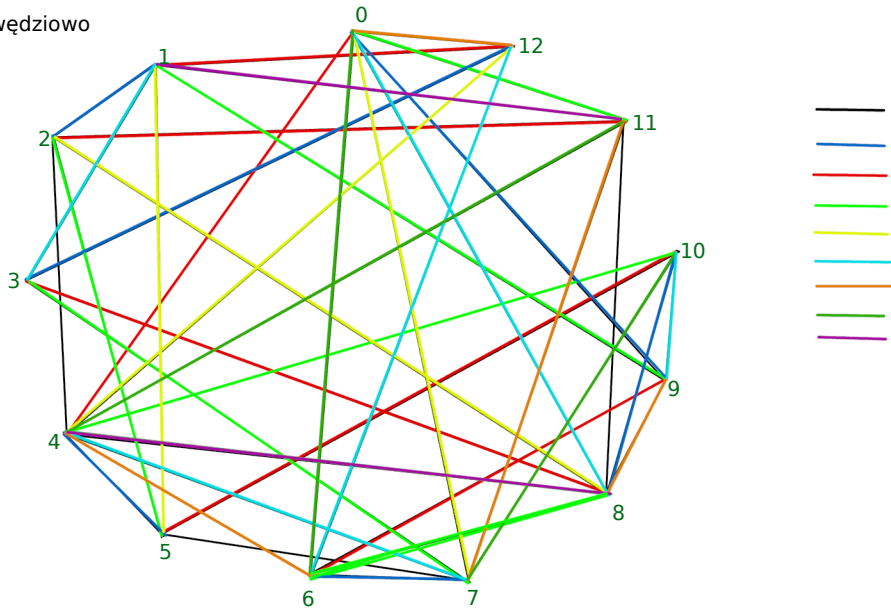
## Ad 4

Graf nie jest ani eulerowski (nie wszystkie wierzchołki mają parzyste stopnie), ani półeulerowski (co najmniej trzy wierzchołki mają nieparzyste stopnie, np.  $\deg(0) = 7$ ,  $\deg(2) = 5$  i  $\deg(10) = 5$ ).

Ad 5, wierzchołkowo



Ad 5, krawędziowo

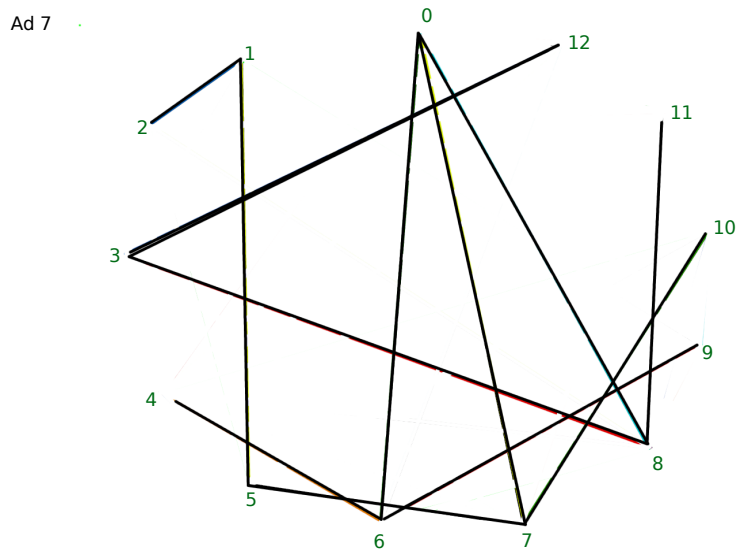


Ad 6

Liczba chromatyczna:  $\chi(G) = 5$

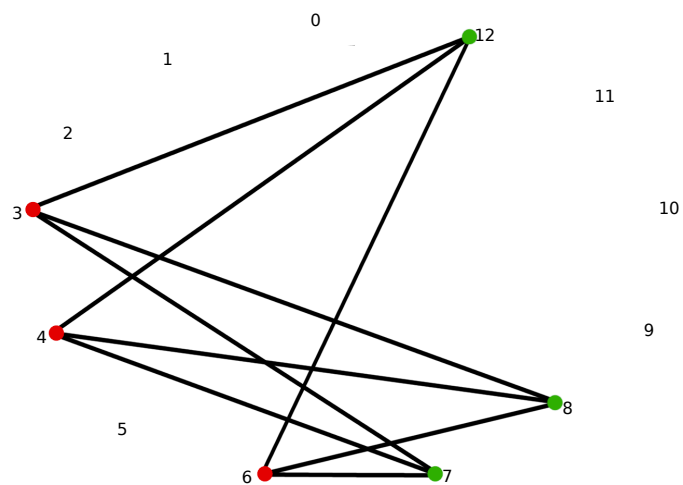
Indeks chromatyczny:  $\chi'(G) = 9$ ; z tw. Vizinga wiemy, że  $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$ , gdzie  $\Delta$  – maksymalny stopień wierzchołka grafu  $G = \deg(4) = 9$ ; graf  $G$  da się pokolorować 9 kolorami, co pokazano na rysunku na stronie poprzedniej

Ad 7



Ad 8

Graf  $G$  nie jest planarny, ponieważ zawiera podgraf  $K_{3,3}$  – można tak wnioskować na podstawie twierdzenia Kuratowskiego. Podgraf  $K_{3,3}$  pokazano na rysunku (zaznaczone krawędzie należą do  $E(G)$ , wierzchołki do  $V(G)$ ):



## **Algorytm Dijkstry**

Algorytm Dijkstry jest używany do wyszukiwania najkrótszej ścieżki w grafie etykietowanym nieujemnymi wagami. Znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach informatyki, optymalizując procesy podejmowania decyzji przez inne algorytmy. Rozwiązuje problemy nieoptymalnego poruszania się po grafach, tym samym oszczędza czas, moc obliczeniową oraz inne zasoby.

### **Zastosowania**

Wiele zagadnień życia codziennego można przedstawić w formie grafu. Algorytm Dijkstry znajdzie zastosowanie przy wyborze najkrótszej drogi między dwoma punktami na mapie przy założeniu, że skrzyżowanie stanowi węzeł grafu, a etykietą (wagą) jest odległość między węzłami. Podobnie, sprawdzi się, gdy bierze się pod uwagę czas, koszt pokonania trasy czy inne kryteria – odpowiednia modyfikacja wag rozwiązuje problem.

Innym przykładem wykorzystania algorytmu Dijkstry są portale społecznościowe. Propozycje znajomych czy interesujących materiałów tworzą graf, w którym najkrótsza ścieżka obrazuje stopień połączenia między odbiorcą a prezentowaną informacją. Im krótszy czas dotarcia do kolejnego węzła tym większa szansa, że proponowana osoba, wiadomość czy reklama będzie sugerowana skutecznie.

Kolejna forma użycia algorytmu Dijkstry odnosi się do robotów i innych urządzeń, które mogą wykazywać się posiadaniem sztucznej inteligencji. Optymalizacja procesów nauki oraz wykonywania zadań zakłada, by odbywały się one jak najmniejszym nakładem czasu i energii. Algorytm Dijkstry, będący przykładem algorytmu zachłannego, zawsze wybiera najoptymalniejsze rozwiązanie w danej chwili, minimalizując poniesione koszty.

### **Inne metody rozwiązywania problemu znajdowania najkrótszych ścieżek w grafie**

Algorytm Dijkstry nie jest jedynym sposobem wyszukiwania najkrótszych ścieżek. Równolegle stosuje się m.in. algorytm Forda-Bellmana oraz algorytm A\*.

Algorytm Forda-Bellmana działa poprawnie dla grafów o wagach ujemnych. Jest to przydatna cecha, która w niektórych przypadkach dyskwalifikuje algorytm Dijkstry. Wykorzystuje się go np. do obliczania minimalnej zmiany ciepła reakcji chemicznej czy najkorzystniejszego sposobu wymiany walut.

Algorytm A\* wykorzystuje heurystyki, czyli pomocnicze obliczenia, które naprowadzają pełny algorytm na znalezienie optymalnego rozwiązania. Heurystyki mogą opierać się na doświadczeniach (np. analizie gry w szachy) lub na obliczeniach, które oszczędzają czas działania pełnego algorytmu. A\* używany jest w dziedzinie sztucznej inteligencji oraz w procesie produkcji gier wideo, przyczyniając się do modelowania zachowań postaci mających pozory inteligencji.