Домашнее задание 1

Чудова Маргарита

1. Для того, чтобы доказать, что $\sigma(x)$ — это функция распределения, проверим следующие свойства:

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sigma(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma(x)=1$

   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{x}}=0$$

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=[e^{-x}\to 0]=1$$

   (b) Непрерывность слева: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^{-x_0}}$ - непрерывна в любой точке, как следствие непрерывна слева

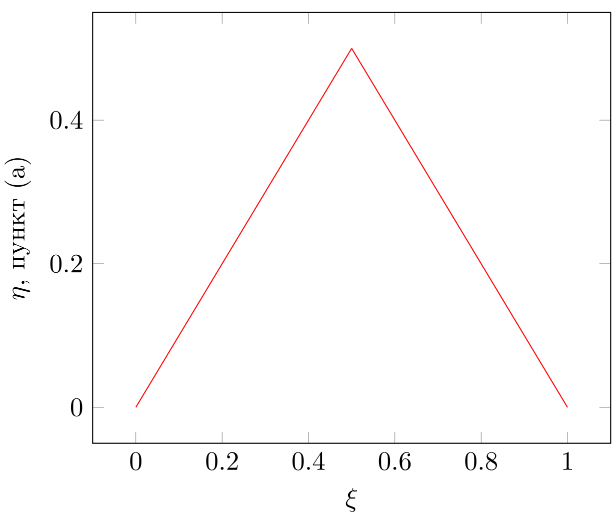
   (c) $\sigma(x)<\sigma(y)$, если $x<y$.

   $$e^{-x}>e^{-y}\Rightarrow\frac{1}{1+e^{x}}<\frac{1}{1+e^{y}}$$

   Таким образом, это функция распределения.

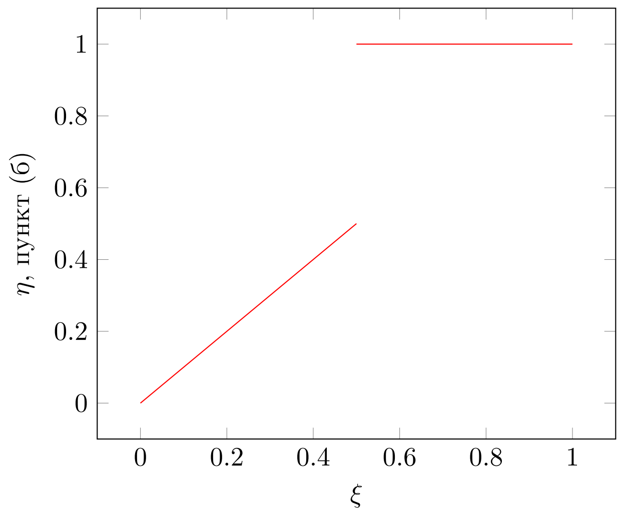
2. (a) Зависимость новой случайной величины от исходной отражена на графике ниже. Из него можем найти функцию распределения:

   $$F(t)=Pr(\eta(\xi)<t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\le 0\\ Pr(\xi\in[t,1-t])=2t, & \text{если } t\le 1/2\\ 1, & t>1/2\end{cases}$$



   (b) Аналогично:

   $$F(t)=Pr(\eta(\xi)<t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\le 0\\ Pr(\xi\in[0,t])=t, & \text{если } t\le 1/2\\ 1/2, & \text{если } t\le 1\\ 1, & t>1\end{cases}$$



3. Попробуем доказать обратное. Пусть такой точки a не существует, это значит, что значения пересекаются и существует какая-то такая точка x, что:

$$P(\xi \geq x) > 0, \;\; P(\eta \leq x) > 0$$

$$P(\xi \geq \eta) = P(\xi > x) \cdot P(\eta < x) > 0$$

Независимость позволит написать произведение, непрерывность позволяет поменять знаки на строгие - одна точка ничего не решает.
Но $P(\xi \geq \eta) = 1 - P(\xi < \eta) = 0$
Противоречие! Значит точка a существует.

4. Отметим, что в силу монотонности функции распределения разрывы не могут перекрываться. Скачков величиной более $1/2$ функция распределения $F(x)$ может иметь не больше одного, так как $F(x) \in [0, 1]$, а $1/2 \cdot 2 = 1$. Аналогично для трех не более двух и так далее. Общее правило: F имеет не более $n-1$ разрывов при длине разрыва $1/n$, то есть количество разрывов одинаковой длины на таком конечном куске конечно.
Попробуем разбить область определения $[0, 1]$ на счетное количество кусков, это легче всего сделать, взяв полуинтервалы $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ (точка 0 не покрывается при таком разбиении, но для доказательства это нам неважно в силу конечности разрыва). Разрыв имеет конечную длину, а значит любой разрыв можем оценить снизу: $d > 1/l, \; d = F(x+0) - F(x-0)$. Для разрывов типа $1/l$ мы уже поняли, что их количество конечно. Отсюда следуем, что количество разрывов не более, чем счетно.

5. Рассмотрим частный пример: семейство сигмоид с различными параметрами $a > 0$

$$\sigma(a, x) = \frac{1}{1 + e^{-ax}}$$

Все они удовлетворяют условиям, описанным в задача 1, при этом a — континуум, а значит мощность всех функций распределения не меньше.
Увидим, что она и не больше. В силу непрерывности слева любую функцию распределения F можно задать только на рациональных значениях $\mathbf{Q}$, и в нерациональных точках восстановить по ближайшему рациональному. Проблема могла бы возникнуть в тех рациональных точках, в которых функция терпит разрыв, но из задачи 4 мы значем, что их тоже не более, чем счетное число, так что просто кроме рациональных точек зададим F и на точках разрыва. Получаем, взаимооднозначное соответствие с счетным числом точек, каждой из которых соответствует вся вещественная ось $\mathbf{R}$, у которой мощность континуум. Отсюда следует, что мощность всех функций распределения тоже континуум.