Домашнее задание 2

Чудова Маргарита

1. По определению, выборочная функция распределения:

$$F(z) = \frac{\#\{x_i | x_i < z\}}{n}$$

Отсюда следует, что эта функция имеет вид некоторой лесенки, у которой скачки возникают только в имеющихся в выборке значениях, причем величина скачка — это $\frac{1}{n}$, умноженное на количество элементов в выборке с таким значением. Таким образом, если у нас есть количество элементов n, то мы можем восстановить выборку: достаточно посмотреть на точки, в которых функция терпит скачки — таким образом получим значения выборки —и умножить величину скачка на n – таким образом получим количество элементов с таким значением.
Вариационный ряд — это по сути своей упорядоченная выборка, так что восстановив выборку, мы сможем восстановить и его. Но если не дано n, то выборку восстановить невозможно — мы просто не сможем извлечь информацию о количестве элементов с конкретным значением. Вариационный ряд в таком случае тоже невозможно восстановить — там тоже нужно количество элементов.

2. Известно, что функция распределения выборки

$$F(x_1, \dots, x_n)$$

непрерывна, а у эмперической функции распределения есть скачок величины $2/n$, что означает, что два значения в эксперименте совпали.
То есть у нас есть некоторые ξ_i, ξ_j, такие что

$$\xi_i(\omega) = \xi_j(\omega)$$

Устремим все остальные x к бесконечности — покроем всевозможные значения. Маргинальная функция распределения $F(x_i, x_j)$ будет так же непрерывна, как и исходная, при этом из-за равенства выше событие, при котором значения совпадают, состредоточится на прямой. Мера Лебега такого множества на плоскости есть ноль, значит, при интегрировании получим, что вероятность такого события — ноль.

Дополнительное задание:

Будем ориентироваться на свойства $X_{[1]}$ и $X_{[n]}$. Знаем, что для них функция распределения равна 0 и 1 соответственно, причем $X_{[1]}$ — это самое большое такое значение, а $X_{[n]}$ — нижняя граница среди всех таких значений. Тогда можно предположить, что их генеральная характеристика выглядит так:

$$T_1(P) = \int I_{\sup\{t : F(t)=0\}} P(dx) = \sup\{t : F(t) = 0\}$$

$$T_n(P) = \int I_{\inf\{t : F(t)=1\}} P(dx) = \inf\{t : F(t) = 1\}$$

Здесь I — индикаторная функция. Для размаха характеристика имеет вид $T(P) = T_n(P) - T_1(P)$