Домашнее задание 3

Чудова Маргарита

Задание 1

По определению, θ_n — несмещенная оценка генеральной характеристики θ, если

$$E\theta_n = \theta$$

Для X_1, X_2 распределение будет тоже Бернулли, то есть их дисперсия равна p, при этом они выбираются независимо. Тогда

$$EX_1 = p$$

$$EX_1X_2 = EX_1 \cdot EX_2 = p^2$$

$$EX_1(1-X_2) = EX_1 \cdot (1 - EX_2) = p(1-p)$$

Посмотрим на состоятельность. По определению, θ_n — состоятельная оценка генеральной характеристики θ, если

$$\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

Заметим, что $X_1, X_1X_2, X_1(1-X_2)$ принимают только значения 0 и 1. По определению сходимости по вероятности

$$\forall\ \varepsilon > 0\ P(|\theta_n - \theta| < \varepsilon) \to 1$$

Понятно, что в нашем случае это невозможно для всех ε, да и в принципе сходимости не будет. Фиксируем p, тогда нужно, чтобы $P(|\theta_n - p| < \varepsilon) \to 1$.

Но уже для $\varepsilon < min(1-p, p)$ такое неравенство в принципе невозможно — у нас по сути только 2 значения для модуля, другие получить не можем. Так что сходимости не будет, а значит и состоятельности тоже.

Задание 2

Оценим эти параметры через выборочное среднее и выборочную дисперсию. Для этого посчитаем их и приравняем к нужным выборочным характеристикам

$$h(\alpha, \beta) = T(P_{\alpha,\beta})$$

Сначала запишем уравнение для матожидания:

$$\overline{x} = Eg(x)$$

$$Eg(x) = \int_\beta^\infty \frac{1}{\alpha} y e^{-(y-\beta)/\alpha} dy = \alpha + \beta$$

Потом для дисперсии:

$$\overline{s_n^2} = Dg(x)$$

$$Dg(x) = \int_\beta^\infty \frac{1}{\alpha} y^2 e^{-(y-\beta)/\alpha} dy - (\alpha+\beta)^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2$$

Из этих равенств получаем:

$$\alpha = \sqrt{\overline{s_n^2}},\ \beta = \overline{x} - \alpha = \overline{x} - \sqrt{\overline{s_n^2}}$$

Задание 3 Первая плотность:

$$\log L(y, \theta) = \log \Pi_i p(y_i, \theta) = \sum_{n=1}^n \log(\theta y_i^{\theta-1}) = n \log\theta + (\theta - 1)\sum_{n=1}^n \log(y_i)$$

Найдем минимум:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{n=1}^{n} \log(y_i) = 0$$

$$\theta = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{n} \log{(y_i)} \frac{1}{n}} = \frac{1}{\overline{\log x}}$$

Вторая плотность:

$$\log L(y, \theta) = \log \Pi_i p(y_i, \theta) = \sum_{n=1}^{n} \log(\frac{\theta(\ln y_i)^{\theta-1}}{y}) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{n=1}^{n} \log(\ln y_i) - \sum_{n=1}^{n} \log y_i$$

Найдем минимум:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{n=1}^{n} \log(\ln y_i) = 0$$

$$\theta = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{n} \log{(\ln y_i)} \frac{1}{n}} = \frac{1}{\overline{\log \ln x}}$$