Дополнительные задачи

Чудова Маргарита

Задание 1
Коэффициент эксцесса

$$\gamma_4 = \frac{\int (x-m)^4 P(dx)}{\sigma^4} - 3$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = \int (x-m)^2 P(dx)$$

Воспользуемся неравенством Гельдера с мерой P:

$$||x^2 \cdot 1|| \leq ||x^2|| \cdot ||1||$$

Тогда

$$\sigma^2 \leq \sqrt{\int (x-m)^4 P(dx)} \cdot 1$$

Отсюда следует, что $\gamma_4 \geq -2$. Но оценка снизу не гарантирует нам того, что двойка действительно будет достигаться. Вариант — привести пример параметризованного распределения, для которого можно будет легко посчитать γ_4 и убедиться в выполнении оценки.

Возьмем распределение с двумя значениями, $a \geq 0$:

x	0	$\sqrt{a}$	-$\sqrt{a}$
P	$1 - \frac{2}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$

Тогда

$$m = 0$$

$$\mu_4 = 2\frac{\sqrt{a}^4}{a} = 2a$$

$$\sigma^2 = 2\frac{\sqrt{a}^2}{a} = 2$$

$$\gamma_4 = a - 3$$

Как видим, для такого распределения $\gamma_4 \geq -2$, а меньше быть не может в силу предыдущего доказательства. Значит это и есть искомый интервал.

Задание 2

Будем ориентироваться на свойства $X_{[1]}$ и $X_{[n]}$. Знаем, что для них функция распределения равна 0 и 1 соответственно, причем $X_{[1]}$ — это самое большое такое значение, а $X_{[n]}$ — нижняя граница среди всех таких значений. Тогда можно предположить, что их генеральная характеристика выглядит так:

$$T_1(P) = \int I_{\sup\{t:F(t)=0\})} P(dx) = \sup\{t : F(t) = 0\}$$

$$T_n(P) = \int I_{\inf\{t:F(t)=1\})} P(dx) = \inf\{t : F(t) = 1\}$$

Здесь I — индикаторная функция. Для размаха характеристика имеет вид $T(P) = T_n(P) - T_1(P)$