Домашнее задание 6

Чудова Маргарита

Задание 1. Таким образом выглядит таблица вероятностей для ξ_n:

ξ_n	1	3	10
P	1/2n	1/3n	1-5/6n

Понятно, что при стремлении n к бесконечности получим, что вероятности первых двух исходов стремятся к 0, а последнего — к единице.
Вспомним определение сходимости по вероятности к величине ξ:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0; \; P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \to 1 \text{ при } n \to +\infty$$

Видим, что по этому определению нам подходит $\xi = 10$.
Будет ли сходимость почти всюду? Не факт. Для нее нам нужно:

$$P(\{\omega \mid \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}) = 1 \text{ при } n \to +\infty$$

Предположим, что $\Omega = [0, 1]$, случайные величины распределены равномерно и вероятность - мера Лебега на соответствующем отрезке. Попробуем выбрать ξ_n так, чтобы ни в одной точке $\omega \in \Omega$ не было сходимости. Тогда вероятностная мера будет равна нулю и определение ломается. Воспользуемся приемом с пары: будем задавать ξ_n на отрезках. Отследим, где $\xi_n = 1$ — распределение остального не очень важно, важно, что там оно отличается.

$$\xi_1 = 1, \omega \in [0, 1/2]$$

$$\xi_2 = 1, \omega \in [1/2, 1/4]$$

....

$$\xi_n = 1, \omega \in [1/2(n-1), 1/2n]$$

Знаем, что гармонический ряд расходится, значит в какой-то момент достигнем точки 1. После нее просто начинаем сначала так же покрывать отрезок. Получается, что отрезок так покрывается бесконечное число раз, значит

$$\forall \omega \in [0, 1] : \nexists\, N : \;\forall n \geq N \;\; \xi_n = 10$$

потому что всегда найдется перекрытие со значением 1, будет мешать.

Задание 2
По центральной предельной теореме (для кубика $n = 1680$, $E\xi = 3.5$, $D\xi \approx 2.9$):

$$P(X < \frac{S_n - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} < Y) \to \Phi(Y) - \Phi(X)$$

$$X = \frac{x - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} \approx -1$$

$$Y = \frac{y - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} \approx 1$$

$$P \approx \Phi(1) - \Phi(-1) =\approx 0,8413 - 0,1587 = 0.6826$$

ξ_n.	e^{-an}	e^{an}
P	$1-e^{-bn}$	e^{-bn}

Задание 3. Вспомним определение сходимости по вероятности к величине $\xi = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; P(|\xi_n| < \varepsilon) \to 1 \text{ при } n \to +\infty$$

Рассмотрим разные случаи. Сразу заметим, что b < 0 нас не устраивают — там все плохо с вероятностью.

1. $a > 0$, $b > 0$. Тогда $e^{-an} \to 0,\; P(e^{-an}) \to 1$, $e^{an} \to \infty,\; P(e^{an}) \to 0$. Из $e^{-an} \to 0$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n \geq N \; |\xi_n| < \varepsilon \Rightarrow P(|\xi_n| < \varepsilon) \to 1$$

Взяли N в определении сходимости $e^{-an} \to 0$, соответствующий нашему ε из определения сходимости по вероятности, получили наше определение. Здесь есть сходимость по вероятности

2. $a > 0$, $b = 0$. Тогда $e^{-an} \to 0,\; P(e^{-an}) = 0$, $e^{an} \to \infty,\; P(e^{an}) \to 1$. Из $e^{-an} \to 0$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n \geq N \; |\xi_n| < \varepsilon \Rightarrow P(|\xi_n| < \varepsilon) = 0$$

Не получится сходимости к единице ни для каких N, значит, сходимости по вероятности не будет.

3. $a < 0$, $b > 0$. Тогда $e^{-an} \to \infty,\; P(e^{-an}) = 1$, $e^{an} \to 0,\; P(e^{an}) \to 0$.
Значит не найдется такого ε, чтобы $|\xi_n| < \varepsilon$ и при этом $P \to 1$ (следует из расходимости e^{-an}). Нет сходимости по вероятности.

4. $a = 0$, $b > 0$. Тогда $e^{-an} = 1,\; P(e^{-an}) = 1$, $e^{an} = 1,\; P(e^{an}) \to 0$. Таким образом, ξ_n всегда одно и то же, и при $\varepsilon < 1$ определение очевидно выполняться не будет. Нет сходимости по вероятности.

5. $a < 0$, $b = 0$. Тогда $e^{-an} \to \infty,\; P(e^{-an}) = 0$, $e^{an} \to 0,\; P(e^{an}) \to 1$.
Из $e^{an} \to 0$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n \geq N \; |\xi_n| < \varepsilon \Rightarrow P(|\xi_n| < \varepsilon) \to 1$$

Взяли N в определении сходимости $e^{an} \to 0$, соответствующий нашему ε из определения сходимости по вероятности, получили наше определение. Здесь есть сходимость по вероятности

Итого нам подходят $a > 0, b > 0$ и $a < 0, b = 0$

Задание 4. Известно, что ξ_i— независимые с.в, одинаково распределены, $E\xi = a > 0$, $E\xi^2 = \sigma^2 + a^2 < \infty$, значит они подчиняются закону больших чисел, то есть:

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \to E\xi \text{ (по вероятности)}$$

Аналогично для их квадратов:

$$\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \to E\xi^2 \text{ (по вероятности)}$$

Ясно, что $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ обращается в 0, только если все случайные величины нули. Этого не происходит в силу свойств распределений, тогда $1/\sum$ - непрерывная и можем пользоваться свойствами. Тогда:

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \cdot \frac{n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2} \to \frac{a}{\sigma^2 + a^2}$$