Домашнее задание дополнительное

Чудова Маргарита

1. Пространство Ω состоит из элементов вида $a_1a_2a_3$, где $a_1, a_2, a_3 \in 0, 1$, 0 соответствует решке, а 1 — орлу.
   Событие $A = \{111, 011, 101, 110\}$

2. Пусть F - порожденная сигма алгебра. В дальнейших пунктах будем пересекать множеств и их домолнения, пока не получим F.

   - В сигма-алгебре обязательно нужно все пространство Ω по определению, значит $F = \{\varnothing, \Omega\}$
   - $F = \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \varnothing, \Omega\}$
   - $F = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}.\{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \varnothing, \Omega\}$
   - $F = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \varnothing, \Omega\}$

3. Для начала зададим на такой алгебре вероятностную меру:

   $$P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1,\ P(\{1, 3, 5\}) = 1/2,\ P(\{2, 4, 6\}) = 1/2$$

   Определим все возможные случайные величины их функциями распределения. Учитывая вероятностную меру, здесь есть 2 варианта:
   а) Вариант распределения Дирака — случайная величина, которая дает либо Ω, либо $\varnothing$ (пример: $\xi = const$)

   $$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq x_1 \\ 1 & t > x_1 \end{cases}$$

   $$P(x = x_1) = 1$$

   б) Ступенька следующего вида: (пример: ξ ноль при нечетном значении, единица при четном)

   $$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq x_1 \\ 1/2, & t \leq x_2 \\ 1, & t > x_2 \end{cases}$$

   x_i в обоих случаях могут быть любыми.

4. (a) Вероятности равные, следовательно, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1/4$

   $$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 1/4 & t \leq 2 \\ 1/2 & t \leq 3 \\ 3/4 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$$

   (b)

   $$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 1/3 & t \leq 2 \\ 1/2 & t \leq 5 \\ 1 & t > 5 \end{cases}$$

(c) Получится некая бесконечная лесенка, причем ее ступеньки будут убывать по высоте по мере увеличения n. (в задаче это не сказано, но я предположила, что n натуральные — тогда функция распределения получается осмысленной)

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} & t \leq n+1,\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

5. В первом случае функция переводит исходные значения в различные, так что вероятности не изменятся

x_i (a)	1	3	5	7	9
$p(X = x_i)$	$1/10$	$1/5$	$3/10$	$3/10$	$1/10$

(b) Во втором случае схлопываются все значения, кроме нуля. Это происходит за счет функции $x^2 = (-x)^2$

x_i (b)	1	2	5
$p(X = x_i)$	$3/10$	$1/2$	$1/5$

(c) В третьем случае ситуация примерно такая же, как и во втором, только значения дискретной величины изменятся:

x_i (c)	0	2	2
$p(X = x_i)$	$3/10$	$1/2$	$1/5$

6. (a)

$$F_\eta(t) = F_X(-2X+1 < t) = F_X(X > \frac{1-t}{2}) = \int\limits_{(1-t)/2}^{1} p_X(x)dx = \int\limits_{(1-t)/2}^{1} \mathbf{I}_{[0,1]}(x)dx =$$

$$= [y = -2x+1] = \int\limits_{-1}^{t} \frac{1}{2}\mathbf{I}_{[-1,1]}(y)dy$$

$$p_\eta(y) = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{[-1,1]}(y)$$

(b)

$$F_\eta(t) = F_X(X^2 < t) = F_X(|X| < \sqrt{t}) = \int\limits_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \mathbf{I}_{[0,1]}(x)dx = [y = x^2] = \int\limits_{t}^{-t} \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbf{I}_{[0,1]}(y)$$

$$p_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbf{I}_{[0,1]}(y)$$

(c)

$$F_\eta(t) = F_X(\log X < t) = F_X(X < e^t) = \int\limits_{0}^{e^t} \mathbf{I}_{(0,1]}(x)dx = [y = \log x] = \int\limits_{-\infty}^{t} e^y \mathbf{I}_{(-\infty,0]}(y)dy$$

$$p_\eta(y) = e^y \mathbf{I}_{(-\infty,0]}(y)$$

7. Для того, чтобы $f(x) = cx^{-4}$ могла быть плотностью распределения на некотором (a, b), нужно, чтобы она была интегрируема на этом интервале, интеграл был равен единице, плотность бы была больше 0.

$$c\int\limits_a^b x^{-4}dx = -c\frac{x^{-3}}{3}\bigg|_a^b = 1 \tag{1}$$

   (a) Подстановка (1) на правом конце отрезка стремится к нулю (бесконечность в отрицательной степени), тогда:

   $$c\frac{1}{3} = 1 \Rightarrow c = 3$$

   Плотность с таким коэффицентом больше нуля на соответствующем отрезке.

   (b) Подстановка (1) равна нулю на правом конце отрезка и не определена на левом (функция x^{-3} в нуле расходится). Таким образом, интеграл на отрезке $[0, \infty)$ не может быть равным единице, значит постоянную подобрать нельзя.

   (c)
   $$-c\frac{x^{-3}}{3}\bigg|_a^b = -c\frac{(-1)^{-3}}{3} + c\frac{(-2)^{-3}}{3} = \frac{7c}{24} = 1 \Rightarrow c = \frac{24}{7}$$

   Плотность с таким коэффицентом больше нуля на соответствующем отрезке.

   (d) Ситуация аналогичная пункту (b), в правой границе интегрирования подынтегральная функция расходится, значит интеграл не сможет быть равен 1.

8. $\xi = N(0, 1)$.

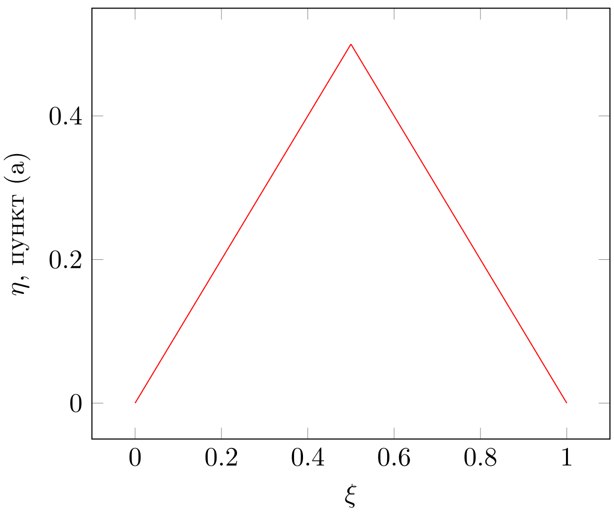
$$F_\eta(t) = F(\eta < t) = F(e^\xi < t) = F(\xi < \ln t) = \int\limits_{-\infty}^{\log t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2}dx = [y = e^x] = \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{y}e^{-(\ln y)/2}dx =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{y^{3/2}}dx$$

$$p_\eta(y) = \mathbf{I}_{[0,+\infty)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{y^{3/2}}$$

9. Зависимость новой случайной величины от исходной отражена на графике ниже. Из него можем найти функцию распределения:

$$F(t) = Pr(\eta(\xi) < t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0 \\ Pr(\xi \in (0, t) \cup (1-t, 1)) = \int\limits_0^t 2xdx + \int\limits_{1-t}^1 2xdx = x^2\Big|_0^t - x^2\Big|_{1-t}^1 = 2t, & \text{если } t \leq 1/2 \\ 1, & t > 1/2 \end{cases}$$


0.4
0.2
0
η, пункт (a)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ξ