Домашнее задание 1

Чудова Маргарита

1. Проверим по определению. F является σ-алгеброй, если:
   (a) $\Omega \in F$
   (b) $A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$
   (c) $A_1 ... A_n .. \in F \Rightarrow \cup_i A_i \in F$

   Пункт 1:

   (a) очевидно
   (b) дополнением A_1 ={OOO, OPO, OOP, OPP} является A_2={POO, PPO, POP, PPP}, которое тоже содержится в F. Для $\Omega, \varnothing$ очевидно.
   (c) Объединения с $\Omega, \varnothing$ либо дадут Ω, либо ничего не изменят. Рассмотрим объединение A_1 и A_2 - оно даст Ω.

   По определению F - σ - алгебра.

   Пункт 2:

   (a) очевидно
   (b) дополнением B_1 ={OOO, OPO, POP, PPP} является C_1={PPO, OPP, POO, OOP}, а дополнением B_2 = {POO, PPO, POP, PPP} является C_2 = {OOO, OPO, OPP, OOP}. Оба дополнения не содержатся в F $\Rightarrow$ противоречие!

   Чтобы получить σ - алгебру, добавим дополнения C_1, C_2 и все возможные пересечения и их объединения и дополнения, Ω = {OOO, OPO, POP, PPP, POO, PPO} . Получим 16 элементов:
   $\Omega, \varnothing$, {OOO, OPO, POP, PPP}, {PPO, OPP, POO, OOP}, {POO, PPO, POP, PPP}, {OOO, OPO, POO, PPO}, {OOP, OPP, POP, PPP} {OOO, OPO, OPP, OOP}, {POP, PPP}, {POO, PPO}, {OOO, OPO}, {OPP, OOP}, {OOO, OPO, POP, PPP, POO, PPO}, {OOO, OPO, POP, PPP, OPP, OPP}, {PPO, OPP, POO, OPP, POP, PPP}, {PPO, OPP, POO, OOO, OPO, OPP}

2. Необходимо задать (Ω, F, P).

   Ω сосотоит из всевозможных исходов вида $\{a_1a_2a_3\}$, где $a_1, a_2, a_3 \in 1..6$ ({111}, {112}, ...).
   σ-алгебра F состоит из $\Omega, \varnothing$, исходов $\{a_1a_2a_3\}$, и всевозможных обьединений исходов из Ω вида:

   - $\{a_1a_2a_3,\ b_1b_2b_3\}$; $a_1, a_2, a_3 \in 1..6$; $a_1a_2a_3 \neq b_1b_2b_3$

     ...
   - $\{a_1a_2a_3,\ ...,\ s_1s_2s_3\}$; $a_1, a_2, a_3, ...s_1, s_2, s_3 \in 1..6$; $a_1a_2a_3 \neq .. \neq s_1s_2s_3$

   Тогда в F включены все обьединения и дополнения его элементов.

   Зададим P: исходы в Ω равновероятны, $P(\omega) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

   Случайная величина: $\xi(\omega) = a_1 + a_2 + a_3$ для $\omega = \{a_1a_2a_3\}$

3. (a) П.э.с состоит из элементов вида $\{POO..O\}$, $\{OPO..O\}$, ..., $\{O..OP\}$ (всевозможные события, где на одном месте из 666 решка, на остальных - орел) и элемента $\{OOO..O\}$ - 666 орлов. Всего элементов 667.

   (b) Пусть студент знает билеты под номерами от 1 до 54, а от 55 до 60 не знает. П.э.с состоит из событий типа $\{a_i\}$, $a_i \in 1..54$; $\{a_i b_i\}$, $a_i \in 55..60, b_i \in 1..54$. Всего элементов $54 + 59 * 6 = 408$

   (c) П.э.с состоит из всевозможных перестановок карточек, если две карточки с одинаковыми буквами поменяли между собой - это одно и то же элементарое событие. Всего элементов $\frac{9!}{2! \cdot 3!} = 30240$.

4. (a) Приведем контрпример: пусть Ω состоит из элементов 1 и -1. Пусть σ-алгебра $F = \{\varnothing, \{-1, 1\}\}$, $\xi(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $\eta(x) = \operatorname{sgn}^2(x)$.
   Пусть $A = \{-1, 1\}$. Понятно, что $\eta(A) = 1 \Rightarrow \eta^{-1}(1) = A$.
   При этом $\xi^{-1}(1) = 1$, а такого элемента в нашей σ-алгебре нет. Противоречие! Не с.в

   (b) По условию η - случайная величина, значит

$$\forall\ t\ \{\omega : \eta(\omega) < t\} \text{ измерима}$$

$$\forall\ t\ \{\omega : e^{\xi(\omega)} < t\} \text{ измерима}$$

$$\forall\ z = \ln t\ \{\omega : \xi(\omega) < z = \ln t\} \text{ измерима}$$

   z может принимать любые значения, т.о ξ случайная величина.

   (c) Решение полностью аналогично пункту (a), только $\xi(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $\eta(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$. $\eta^{-1}(1) = A$, но $\xi^{-1}(1) = 1$, а такого элемента в нашей σ-алгебре нет. Противоречие! Не с.в

5. (a) 1. Возьмем самый большой полуинтервал: $[0, \frac{1}{2})$, получим к нему дополнение: $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, \infty)$.
   2. Начнем пересекать полуинтервалы вида $[0,\ 2^{-n})$ попарно, будем получать что-то вида $[2^{-n_1}, 2^{-n_2})$. Удобно взять интервалы вида $[2^{-n-1}, 2^{-n})$ для дальнейших рассуждений, из их объединения все получается.
   3. $\{0\}$ тоже можно получить из исходных полуинтервалов : $\cap_{n=1}^{\infty}[0, 2^{-n}) = \{0\}$
   В итоге сигма-алгебра будет состоять из всевозможных объединений (счетного числа) всех множеств, описанных в пунктах 1, 2, 3. Тут есть вся вещественная ось Ω, все дополнения можно получить счетным количеством объединений.

   (b) Рассмотрим $\eta(x) = C$, где C - некоторая константа. Хотим:

$$\forall\ t\ \{\omega : \eta(\omega) < t\} \text{ измерима}$$

   Но получается, что при $t > C$ условие выполнено для всего Ω, $t \leq C$ - для $\varnothing$. Таким образом, $\eta(x)$ действительно измерима.