Домашнее задание 5

Чудова Маргарита

Задание 1.

1.
$$E(\xi - 2\eta) = E(\xi) - 2E(\eta) = 0$$
$$D(\xi - 2\eta) = D(\xi) + 4D(\eta) = 13$$

2.
$$E(2\xi - \eta) = 2E(\xi) - E(\eta) = 3$$
$$D(2\xi - \eta) = 4D(\xi) + D(\eta) = 7$$

Задание 2.

1.
$$E\xi = -\frac{6}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$
$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = [\text{см. следующий пункт}] = 7\frac{7}{16}$$

2.
$$E\xi^2 = \frac{12}{8} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{32}{4} = 8$$
$$E\xi^4 = \frac{48}{8} + \frac{1}{4} + \frac{625}{4} = \frac{650}{4} = \frac{325}{2}$$
$$D\xi = E\xi^4 - (E\xi)^2 = 98.5$$

3.
$$E|\xi| = \frac{6}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$
$$D\xi = E\xi^2 - (E|\xi|)^2 = 8 - \frac{81}{16} = \frac{47}{4}$$

4.
$$E2^\xi = \frac{3}{32} + \frac{1}{8} + \frac{2}{4} + \frac{32}{4} = \frac{279}{32}$$
$$E(2^\xi)^2 = E4^\xi = \frac{3}{128} + \frac{1}{8} + \frac{4}{4} + \frac{1024}{4} = 257\frac{19}{128}$$
$$D2^\xi = \frac{32915}{128} - \frac{77841}{1024} = \frac{185479}{1024}$$

Задание 3. 1. Сопоставим значениям вероятности $p_1, \dots, p_5$. Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2p_1 - p_2 + p_4 + 2p_5 = 0 \\ 4p_1 + p_2 + p_4 + 4p_5 = 1 \\ -8p_1 - p_2 + p_4 + 8p_5 = 0 \\ 16p_1 + p_2 + p_4 + 16p_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_5,\ p_2 = p_4 \tag{1}$$

$$\begin{cases} 32p_1 + 2p_2 = 2 \\ 8p_1 + 2p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_5 = \frac{1}{24},\ p_2 = p_4 = \frac{11}{24} \tag{2}$$

Из условия $\sum p_i = 1$ следует, что $p_3 = 0$.

2.

$$\begin{cases} -2p_1 - p_2 + p_4 + 2p_5 = 0 \\ 4p_1 + p_2 + p_4 + 4p_5 = 2 \\ -8p_1 - p_2 + p_4 + 8p_5 = 0 \\ 16p_1 + p_2 + p_4 + 16p_5 = 6 \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_5,\ p_2 = p_4 \tag{3}$$

$$\begin{cases} 32p_1 + 2p_2 = 6 \\ 8p_1 + 2p_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_5 = \frac{1}{6},\ p_2 = p_4 = \frac{1}{3} \tag{4}$$

Из условия $\sum p_i = 1$ следует, что $p_3 = 0$.

Задание 4.

$$E\sin^2\pi\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(\pi x)p_\xi dx = \int\limits_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1 - cos(2\pi x))dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}sin(2\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D\sin^2\pi\xi = \int\limits_0^1 \sin^4(\pi x)dx - \frac{1}{4} = \int\limits_0^1 \frac{3 - 4\cos(2\pi x) + \cos(4\pi x)}{8}dx - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Задание 5. 1.

$$\frac{E\xi^{n+1}}{E\xi^n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^s x_i^{n+1}p_i}{\sum\limits_{i=1}^s x_i^n p_i} = x_{max}\frac{\sum\limits_{i=1}^s (x_i/x_{max})^{n+1}p_i}{\sum\limits_{i=1}^s (x_i/x_{max})^n p_i} = x_{max}\frac{p_{max} + \sum\limits_{i\neq max}^s (x_i/x_{max})^{n+1}p_i}{p_{max} + \sum\limits_{i\neq max}^s (x_i/x_{max})^n p_i}$$

Рассмотрим элементы в суммах, пусть $q_i = x_i/x_{max}$, может быть меньше или равно 1. Если $q_i < 1$, то при $n \to \infty$ такое слагаемое будет равно 0 в обеих суммах, если $q_i = 1$, то и в верхней, и в нижней сумме соответствующее слагаемое равно p_i. Таким образом, верхняя и нижняя суммы равны, значит $\frac{E\xi^{n+1}}{E\xi^n} \to x_{max}$

2.Пусть q - максимальное значение q_i. Используя рассуждения из пункта 1, получаем

$$\sqrt[n]{E\xi^n} = x_{max}(p_{max} + \sum_{i\neq max}^s (x_i/x_{max})^n p_i)^{1/n} \leq x_{max}p_{max}^{1/n}(1 + \sum_{i\neq max}^s q^n p_i/p_{max})^{1/n} =$$

$$\mathrm{x}_{max}p_{max}^{1/n}\left(1 + \frac{\sum\limits_{i\neq max}^s q^n p_i/p_{max}}{n} + \text{бесконечно малые большего порядка}\right) \to x_{max}$$