Домашнее задание 3

Чудова Маргарита

1. Равномерное распределение на отрезке выглядит следующим образом:

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le a \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{если } t \in (a, b] \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Площадь круга это некая новая случайная величина $\eta = g(\xi) = \pi\xi^2$, выразим ее функцию распределения:

$$F_\eta(t) = P(\eta < t) = P(\pi\xi^2 < t) = P(\xi < \sqrt{\frac{t}{\pi}}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t \le \pi a^2 \\ \left(\sqrt{\frac{t}{\pi}} - a\right) \cdot \frac{1}{b-a} & t \in (\pi a^2, \pi b^2] \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

2. 1. Нормируем распределение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x) = C\int\limits_0^1 (1 + x - 1)dx + C\int\limits_1^2 (1 - x + 1)dx = C\left(\int\limits_0^1 xdx + \int\limits_1^2 (2-x)dx\right)$$

$$= C\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\right) = C \Rightarrow C = 1$$

2. Функция распределения:

$$F_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0 \\ \int\limits_0^t xdx = \frac{t^2}{2}, & \text{если } t \le 1 \\ \int\limits_0^1 xdx + \int\limits_1^t (2-x)dx = -1 + 2t - \frac{t^2}{2} & \text{если } t \le 2 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

3.

$$P(\xi \in [-1, 1]) = F_\xi(1) - F_\xi(-1) = 1/2 - 0 = 1/2$$

4. Рассмотрим функцию $\eta = g(\xi) = \xi^2$. Знаем, что

$$p_\eta(x) = (g^{-1}(x))' \cdot p_\xi(g^{-1}(x))$$

Тогда получаем

$$p_\eta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot p_\xi(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(1 - |1 - \sqrt{t}|) \text{ на } [0, 4]$$

3. Из условия $P(|\xi| < a) > 2/3$ получаем, что

$$P(|\xi| > a) = P((-\infty, -a) \cup (a, \infty)) = P((-\infty, -a)) + P((a, +\infty)) = F_\xi(-a) + 1 - F_\xi(a) < 1/3$$

Отсюда следуют следующие неравенства ($0 < F_\xi < 1$):

$$F_\xi(-a) < 1/3$$

$$1 - F_\xi(a) < 1/3$$

Если точка b не лежит в отрезке $[-a, a]$, то она лежит либо левее (случай (a)), либо правее (случай (b)). Известно, что функция распределения монотонно возрастает, тогда:

(a)
$$F_\xi(b) < F_\xi(-a) \Rightarrow 1/2 < F_\xi(-a), \text{но } F_\xi(-a) < 1/3 \Rightarrow \text{противоречие!}$$

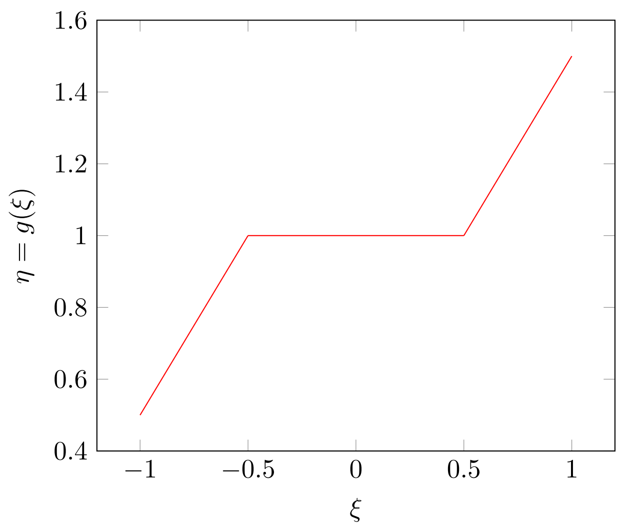
(b)
$$1 - F_\xi(b) < 1 - F_\xi(a) \Rightarrow 1/2 < 1 - F_\xi(a), \text{но } 1 - F_\xi(a) < 1/3 \Rightarrow \text{противоречие!}$$

Таким образом, доказали, что b не может лежать где-то кроме $[-a, a]$.

4. Распределение величины $\eta = g(\xi)$ выражается следующим образом:

$$F_\eta(t) = P(\eta(\xi) < t) = P(\xi < g^{-1}(t))$$

Хотим получить ступенчатое распределение – оно соответствует дискретной величине. Для этого рассмотрим функцию g, построенную ниже. Для того, чтобы понять, как будет выглядеть распределение, нужно мысленно провести линию $y = t$, и посмотреть, какие точки графика лежат ниже этой линии, и какие ξ им соответствуют. Понятно, что в зависимости от t будет соответствовать либо участок $(-\infty, x)$, где $x < -0.5$, либо участок того же вида, но где $x \geq 0.5$.



Пусть ξ имеет равномерное распределение на участке $[-0.5, 0.5]$. Тогда:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-0.5, 0.5] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда функция распределения будет выглядеть следующим образом:

$$F_\eta(t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{t-1.5} p_\xi(x)dx = 0, & t \leq 1 \\ \int\limits_{-\infty}^{-0.5} p_\xi(x)dx + \int\limits_{-0.5}^{0.5} p_\xi(x)dx + \int\limits_{0.5}^{t} p_\xi(x)dx = 1, & t > 1 \end{cases}$$

Это соответствует дискретной случайной величине, для которой вероятность принять значение 1 равна 1, а остальные значения — нулю. Явный вид $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} 1.5 + x, & x < -0.5 \\ 1, & x \in [-0.5, 0.5] \\ 0.5 + x, & \text{иначе} \end{cases}$$