

# Дополнительные задачи 2

Чудова Маргарита

## Задача 1

Зададим гипотезы:

$H_0$  : кубик правильный, то есть рассматриваемое распределение — равномерное дискретное, вероятность любого исхода  $p_i = 1/20$ , дисперсия соответствует этому распределению

$H_1$  : кубик неправильный, распределение другое.

В случае нулевой гипотезы имеем  $np_i = 10 > 5$ , значит, можем воспользоваться критерием хи-квадрат.

$$z = \sum_i \frac{n_i - np_i}{np_i} \sim \chi_{m-1}^2$$

$\alpha = 0.1$ , значит доверительная область (10.11701, 30.14353)

$$\sum_i \frac{10(12 - 10)^2 + 10(8 - 10)^2}{10} = 8$$

Не попали в доверительную область, значит отклоняем  $H_0$

## Задача 2

Для того, чтобы проверить  $H_0$  на уровне значимости  $\alpha = 0.1$ , воспользуемся асимптотическим двухвыборочным  $t$ -критерием. Поскольку альтернатива  $a_1 < a_2$  односторонняя, будет логично взять в качестве критического интервал слева:  $(-\infty, z_{0.1})$ ,  $z_{0.1} \approx 1.28$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\tilde{s}_{n,m} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1)$$

$$\tilde{s}_{n,m}^2 = \frac{(n-1)\tilde{s}_n^2 + (m-1)\tilde{s}_m^2}{n+m-2} = \frac{35 \cdot 3.4^2 + 38 \cdot 3.2^2}{73} \approx 10.9 \Rightarrow \tilde{s}_{n,m} = 3.3$$

$$t = \frac{15 - 15.2}{3.3 \sqrt{1/36 + 1/39}} \approx -0.26$$

Значит,  $H_0$  выполняется.

Найдем p-value. По определению это

$$p = \inf\{\alpha_0, t \in S_{\alpha_0}\}$$

Как найти? По таблице найдем значение, соответствующее  $t$ , это и будет  $\alpha_0$ . Самое близкое значение из таблицы  $p \approx 0.4$ , значит p-value  $\approx 0.4$ . Этот результат согласуется с тем, что гипотеза не отклонена, так как  $p > \alpha$

## Задача 3

Не знаем дисперсию, хотим доказать гипотезу про среднее. Воспользуемся распределением Стьюдента.

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\tilde{s}_n} = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - a}{\bar{s}_n} \sim t_{n-1}$$

$$\bar{X} = \frac{0.71}{6} \approx 0.118$$

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \bar{X}^2 = 0.069$$

$$t = \sqrt{5} \frac{0.118}{0.26} \approx 1,01$$

Для  $\alpha/2 = 0.025$   $t_{1-\alpha/2} = 2,57058$  при  $n - 1 = 5$ , значит, гипотеза  $H_0$  верна.

**Задача 4** Если бы мы рассматривали гипотезу про дисперсию ( $\sigma = \sigma_0$ ), то рассматривали бы следующую статистику

$$t = \frac{n\bar{s}_n^2}{\sigma_0} \sim \chi_{n-1}^2$$

То есть для того, чтобы построить 90% доверительный интервал, нужно найти квантили распределения хи-квадрат такие, что вероятность попасть в критическую область равна 10%. Критическая область должна иметь вид  $(0, z_{\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, +\infty)$ ,  $\alpha = 0.1$

Как обычно, найти такие значения нам поможет таблица. Из нее получаем доверительный интервал  $(0, 1.14548) \cup (11.07050, +\infty)$