23837 MOTTAIS Margot

Jeu des Policiers-et-voleur sur les graphes planaires

Mon choix de sujet est inspiré du jeu de plateau "Scotland Yard", dans lequel les joueurs incarnent des policiers poursuivant un malfaiteur dans le réseau des transports londonien. J'ai voulu comprendre les mécanismes qui rendent la victoire si difficile aux policiers, et en font ainsi un jeu captivant.

Les réseaux de transports d'une ville, notamment les lignes de bus et de métro, peuvent souvent être modélisés par des graphes planaires, auxquels on peut appliquer les stratégies de capture développées dans l'étude du problème des Policiers-et-voleur.

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*
- *INFORMATIQUE (Informatique Théorique)*
- *MATHEMATIQUES (Géométrie)*

Mots-clés (ÉTAPE 1) :

Mots-clés (en français)	**Mots-clés (en anglais)**
Jeu de poursuite-évasion	*Pursuit-evasion game*
Jeu des Policiers-et-voleur	*Cops-and-Robber game*
Graphe planaire	*Planar graph*
Temps de capture	*Capture time*
Nombre de policiers	*Cop number*

Bibliographie commentée

Le jeu des Policiers-et-voleur a été formalisé pour la première fois en 1963 par Alain Quilliot [1] et Richard Nowakowski et Peter Wrinkler [2], de manière indépendante. Le problème est le suivant : dans un graphe connexe non orienté donné, un joueur place le policier sur un des sommets, puis le second place le voleur. A chaque tour, les joueurs peuvent choisir de rester immobile ou de se déplacer selon une arête du graphe. Pour gagner, le policier doit se trouver à un instant donné sur le même sommet que le voleur. Si le voleur a une stratégie pour lui échapper indéfiniment, il est vainqueur. Quilliot introduit la dénomination de graphe "policier-gagnant" ("cop-win") et en donne une caractérisation pour les graphes finis, tandis que Nowakowski et Wrinkler l'élargissent en définissant les graphes "démantelables", c'est-à-dire possédant un "sommet irréductible" : si le voleur se trouve sur un tel sommet et le policier sur un de ses voisins, alors le policier est gagnant. Intuitivement, il s'agit d'un cul-de-sac.

En 1984, Martin Aigner et Michael Fromme proposent une version du jeu à plusieurs policiers [3], qui est le cas le plus étudié à ce jour. Cela les conduit à définir le “cop number” d'un graphe, c'est-à-dire le nombre de policiers minimal nécessaire à la capture du voleur. Ils fournissent alors un résultat majeur : le cop number d'un graphe planaire est inférieur à 3. Ils soulignent qu' un arbre est 1-policier-gagnant, c'est-à-dire de cop number 1. L'année suivante, Henri Meyniel conjecture que tout graphe connexe possède un cop number de l'ordre de la racine de son nombre de sommets. Peu après, Peter Frankl démontre une domination quasi-linéaire pour le cas général, qui restera longtemps la meilleure connue [4]. Laissée de côté jusque dans les années 2000, cette conjecture majeure connaît depuis un regain d'intérêt, avec de nombreux travaux confirmant sa validité pour un vaste ensemble de cas particuliers. L'article de William Baird et Anthony Bonato publié en 2013 est un des plus significatifs à ce sujet [5] : entre autres, ils améliorent d'un facteur logarithmique la domination de Frankl. Ils co-publient simultanément un autre papier traitant du nombre minimal de sommets d'un graphe k-policiers-gagnants. Au passage, ils montrent grâce à un programme assistant de preuve que le graphe de Petersen est le plus petit graphe de cop number 3, avec dix sommets. Ce résultat est ensuite formellement établi par leurs collaborateurs Andrew Beveridge, Paolo Codenotti, Aaron Maurer, John McCauley et Silviya Valeva en 2018 [6].

Parallèlement, la recherche s'est fortement développée autour de l'étude du “temps de capture”, c'est-à-dire le nombre de tours nécessaire à la capture du voleur, pour les graphes k-policiers-gagnants, notamment avec Bonato, Petr Golovach, Gena Hahn et Jan Kratochvil [7]. En ce qui concerne les graphes planaires, Abbas Mehrabian montre qu'en particulier les grilles sont 2-policiers-gagnants, et trouve une borne supérieure linéaire en les dimensions de la grille pour le temps de capture [8]. Plus généralement, Photchchara Pisantechakool et Xuehou Tan exhibent en 2011 [9] une stratégie garantissant la capture par trois policiers sur un graphe planaire quelconque en un nombre de tours valant au plus le double du nombre de sommets du graphe considéré.

Enfin, de nombreuses variantes ont depuis été imaginées, imposant par exemple des contraintes d'immobilité à certains policiers, ou restreignant la connaissance de la position des autres joueurs à une certaine distance dans le graphe. La publication d'Alan Frieze, Michael Krivelevich et Po-Shen Loh [10], qui étudie à la fois le cop number et le temps de capture dans une version où le voleur peut se déplacer de plusieurs sommets par tour, témoigne tout particulièrement de l'enrichissement du jeu des Policiers-et-voleur depuis 1963, et de l' engouement qu'il continue de susciter.

Problématique retenue

Dans le jeu des Policiers-et-voleur sur un graphe planaire, la capture du voleur est théoriquement garantie par la présence de trois policiers. Comment alors la mettre en œuvre ? Quelle stratégie fournit un temps de capture minimal, et quelles sont les performances temporelles d'un algorithme réalisant cette stratégie ?

Objectifs du TIPE du candidat

J'ai choisi de m'intéresser à la capture sur un graphe connexe et planaire avec trois policiers. Il s'agit d'abord de concevoir et implémenter un algorithme de capture naïf du voleur. Je me propose ensuite de mettre en œuvre la stratégie présentée dans l'article de Pisantechakool et Tan, en étudiant la complexité temporelle des calculs nécessaires. L'objectif principal est une analyse comparée des performances en temps de capture et d'exécution des deux méthodes, lorsqu'elles sont appliquées à différentes classes de graphes planaires. Je souhaite enfin vérifier expérimentalement la borne supérieure du temps de capture annoncée dans l'article.

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

[1] ALAIN QUILLIOT : Problèmes de jeux, de point fixe, de connectivité et de représentation sur des graphes, des ensembles ordonnés et des hypergraphes *: Thèse d'Etat, Université de Paris VI (1983) : 131-145.*

[2] RICHARD NOWAKOWSKI, PETER WRINKLER : Vertex-to-vertex pursuit in a graph *: Discrete Mathematics, (1983), 43(2-3), 235-239.*

[3] MARTIN AIGNER, MICHAEL FROMME : A game of cops and robbers *: Discrete Appl. Math 8 (1984) : 1-12.*

[4] PETER FRANKL : Cops and robbers in graphs with large girth and Cayley graphs *: Discrete Applied Mathematics, (1987), 17(3), 301-305.*

[5] WILLIAM BAIRD, ANTHONY BONATO : Meyniel's conjecture on the cop number: a survey *: arXiv preprint arXiv:1308.3385. (2013)*

[6] ANDREW BEVERIDGE, PAOLO CONEDOTTI, AARON MAURER, JOHN MCCAULEY, SILVIYA VALEVA : The Petersen graph is the smallest 3-cop-win graph *: arXiv preprint arXiv:1110.0768. (2018)*

[7] ANTHONY BONATO, PETR GOLOVACH, GENA HAHN, JAN KRATOCHVIL : The capture time of a graph *: Discrete Mathematics, (2009), 309(18), 5588-5595.*

[8] ABBAS MEHRABIAN : The capture time of grids *: Discrete Mathematics 311.1 (2011) : 102-105.*

[9] PHOTCHCHARA PISANTECHAKOOL, XUEHOU TAN : On the capture time of cops and robbers game on a planar graph *: International conference on combinatorial optimization and applications. Springer, Cham, 2016.*

[10] ALAN FRIEZE, MICHAEL KRIVELEVICH, PO-SHEN LOH : Variations on cops and robbers *: Journal of Graph Theory, (2012), 69(4), 383-402.*

DOT

[1] *: Août 2022 : Choix d'étudier le problème des Cops-and-Robber, recherche de publications sur le sujet. Conception et implémentation d'un algorithme naïf de capture, étude de sa complexité temporelle. Première lecture de l'article de Pisantechakool et Tan [9], qui fournit un algorithme auquel comparer la solution naïve.*

[2] *: Septembre 2022 : Suite des recherches, qui m'ont conduite à restreindre le domaine d' étude au cas des graphes planaires, précisant ainsi la problématique. Étude des propriétés des graphes planaires dans l'optique d'affiner le calcul de complexité précédent.*

[3] *: Octobre 2022 : Construction informatique des graphes planaires utilisés pour les jeux de tests. Premiers tests de l'algorithme naïf sur cette base, qui se révèlent satisfaisants après quelques modifications de l'algorithme.*

[4] *: Novembre 2022 : Étude détaillée de l'algorithme de l'article [9] et de ses preuves de correction et terminaison, traduction en pseudocode.*

[5] *: Décembre 2022 : Conception des algorithmes de géométrie du plan nécessaires à l' implémentation de l'algorithme de capture. Implémentation et test sur les graphes planaires précédemment créés.*

[6] *: Février 2023 : Implémentation du reste de l'algorithme de capture.*

[7] *: Mai 2023 : Test de l'algorithme sur différentes classes de graphes. Analyse formelle de la complexité temporelle de l'implémentation proposée, vérification de la borne théorique de capture annoncée dans l'article [9]. Comparaison finale des performances des deux algorithmes.*