INFORME TAREA 3

María Antonia Hernández
RUT:20.298.572-6
Github: @mari-hernandez

1. Introducción

El objetivo de esta tarea es graficar orbitas de planetas que orbitan cerca del Sol. Para ello se tiene su potencial gravitacional $U(r)$. El cual es una corrección de la ley de gravitación de Newton.

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + \alpha\frac{GMm}{r^2} \tag{1}$$

Para la resolución del problema se usarán los métodos de Runge Kutta, Verlet y Beeman. Se estudiarán los casos con condiciones iniciales:

$$x_0 = 10 \tag{2}$$

$$y_0 = 0 \tag{3}$$

$$v_x = 0 \tag{4}$$

Y los valores $\alpha = 0$ y $\alpha = 10^{-2.572}$.
También se busca el gráfico para la energía del sistema en función del tiempo para todos los casos.

2. Desarrollo

Para obtener la ecuación de movimiento, al ser un sistema donde se conserva la energía, se puede usar:

$$F = -grad(U(x, y)) \tag{5}$$

Como la ecuación de la energía potencial conocida es en función de r, se debe usar el cambio $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Luego, para poder integrar la ecuación de movimiento, como un sistema de ecuaciones de primer orden, se crean los métodos de la clase Planeta.

El método avanza_rk4 toma la condición que se encuentra el planeta actualmente (y_actual), y avanza su posición y velocidad en un intervalo dt de tiempo usando el método de RK4 con:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{6}dt(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{6}$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{6}dt(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

Donde los k son constantes de RK.

Lo mismo ocurre para *avanza_verlet*, donde se ocupa el método Velocity Verlet con:

$$X_{n+1} = X_n + V_n dt + \frac{1}{2} f_n dt^2 \tag{8}$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1} dt) \tag{9}$$

Y por último *avanza_beeman* donde se ocupa el método de Beeman con:

$$X_{n+1} = X_n + V_n dt + \frac{1}{6}(4f_n - f_{n-1}) dt^2 \tag{10}$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) dt \tag{11}$$

Luego para el cálculo de las energías, se usa que:

$$Energia_{total} = Energia_{cinetica} + Energia_{potencial} \tag{12}$$

En la siguiente parte, se usa el mismo método *avanza_beeman* integramos pero usando $\alpha = 10^{-2.572}$.

Para calcular el afelio, se guardan todos los valores del radio y se compara con los valores adyacentes para así identificar el máximo.

Para determinar la velocidad angular de precesión, se guardan las posiciones en coordenadas cartesianas del afelio y luego para calcular el ángulo se usa la función $arctg(\frac{y}{x})$, por ultimo se divide esto por el tiempo.

3. Resultados

Cuando $\alpha = 0$ la ecuación de la energía potencial es :

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{13}$$

La gráfica de la energía total y las orbitas con el método de Runge Kutta se ven en la figura 1 y 2.

La gráfica de la energía total y las orbitas con el método de Verlet se ven en la figura 3 y 4. La gráfica de la energía total y las orbitas con el método de Beeman se ven en la figura 5 y 6.

Los resultados utilizando $\alpha = 10^{2.572}$ y el método de Beeman se pueden observar en la figura 7 y 8.
Podemos notar que en la figura 7, la órbita se ve más ancha esto se debe a que ésta va girando en el tiempo, esto es lo que llamamos precesión.

Además la velocidad angular de precesión es $3.157e^{-5}$.

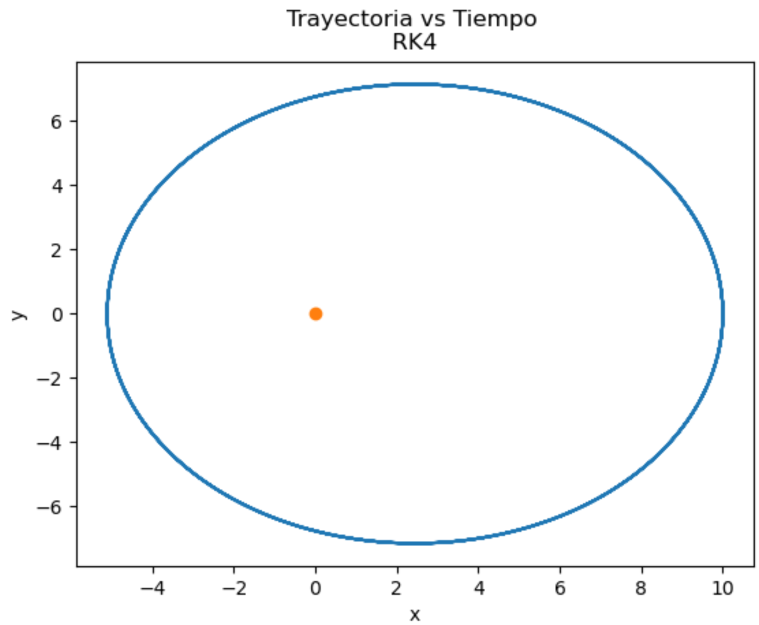

Figura 1: Gráfica de la posición con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método RK4, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.26] además de un $\alpha = 0$

4. Discusión y Conclusiones

Analizando teóricamente el problema podíamos notar que se trataba de un problema donde la energía se conserva. En los casos donde $\alpha = 0$, entonces, las gráficas deberían marcar una orbita cerrada siempre igual y una energía que se mantiene en el tiempo.

Podemos notar que cuando se usó el método de Runge Kutta, la orbita fue la esperada(Figura 1) pero la energía iba disminuyendo con respecto al tiempo(Figura 2), esto se puede deber a un error de arrastre en la velocidad, la cual se usa para calcular la energía cinética del planeta.

En el método de Verlet, la gráfica de la orbita(Figura 3) también es como lo esperado además podemos notar en la gráfica de la energía (Figura 4) que ésta cambia pero siempre vuelve al mismo valor, por lo cual podemos decir que se está conservando.

En la gráfica de la posición usando el método de Beeman(Figura 5), podemos notar que la orbita se mueve, lo cual quiere decir que el método no está bien implementado, hay errores en la posición y en la velocidad ya que el gráfico de energía en función del tiempo(Figura 6) tampoco es correcto ya que muestra que el sistema está ganando energía.

Lo mismo ocurre con los gráficos con $\alpha = 10^{-2.572}$, podemos notar que la energía va aumentando, lo cual no es correcto.

Por lo tanto se concluye que de los métodos implementados, tomando en cuenta solo RK y Verlet

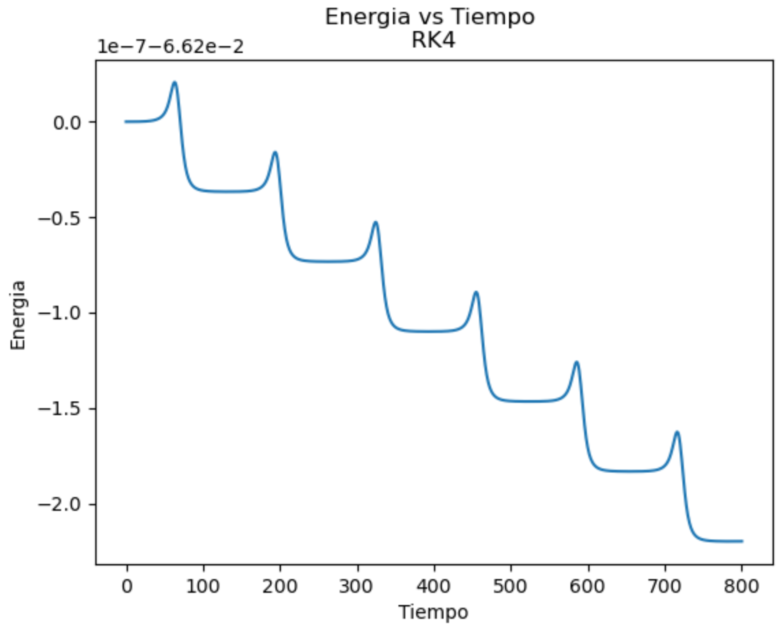

Figura 2: Gráfica de la energía con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método RK4, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.26] además de un $\alpha = 0$

ya que Beeman no está bien, Verlet obtiene una mejor aproximación de lo que ocurre en la realidad.

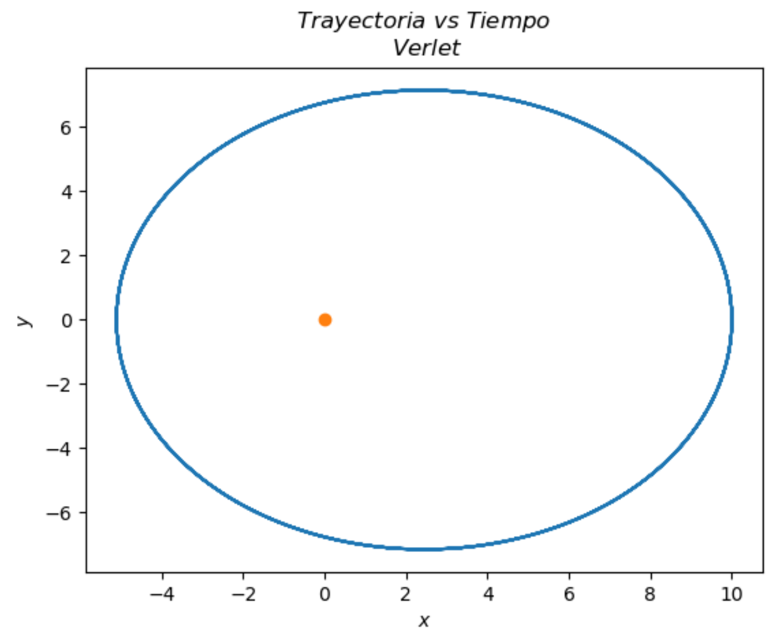

Figura 3: Gráfica de la posición con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método de Verlet Velocity, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.26] además de un $\alpha = 0$

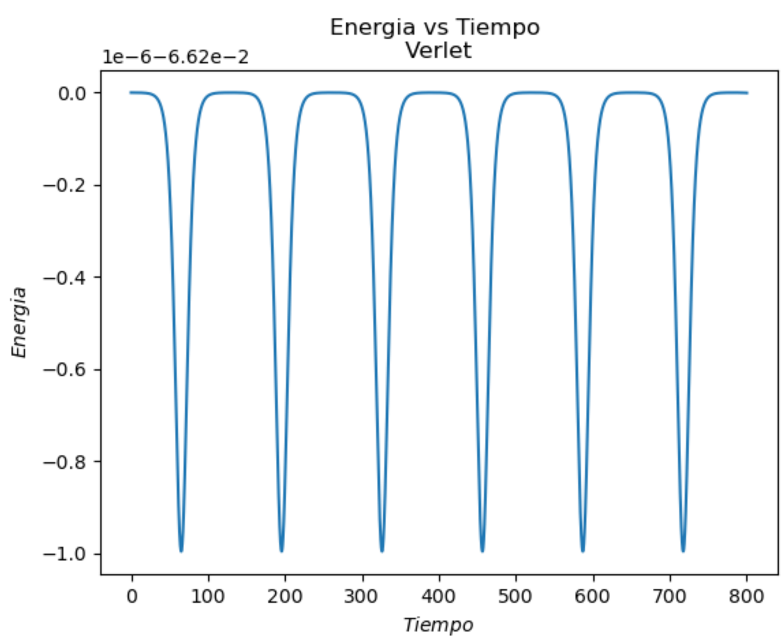

Figura 4: Gráfica de la energía con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método de Verlet Velocity, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.26] además de un $\alpha = 0$

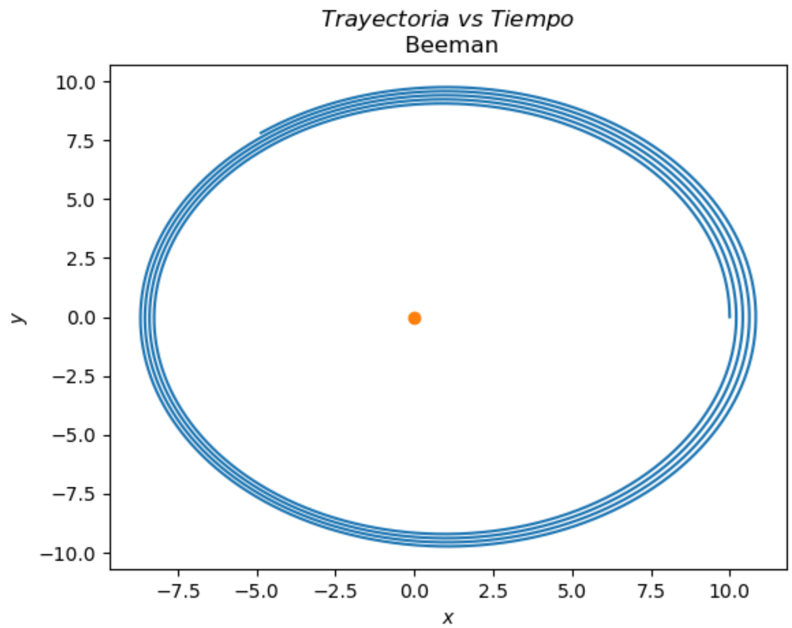

Figura 5: Gráfica de la posición con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método de Beeman, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.3] además de un $\alpha = 0$

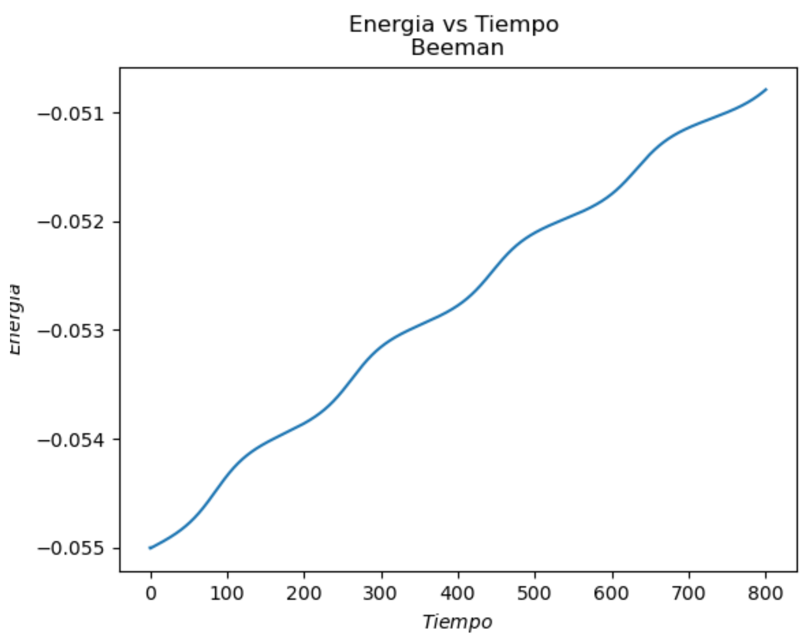

Figura 6: Gráfica de la energía con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método de Beeman, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.3] además de un $\alpha = 0$

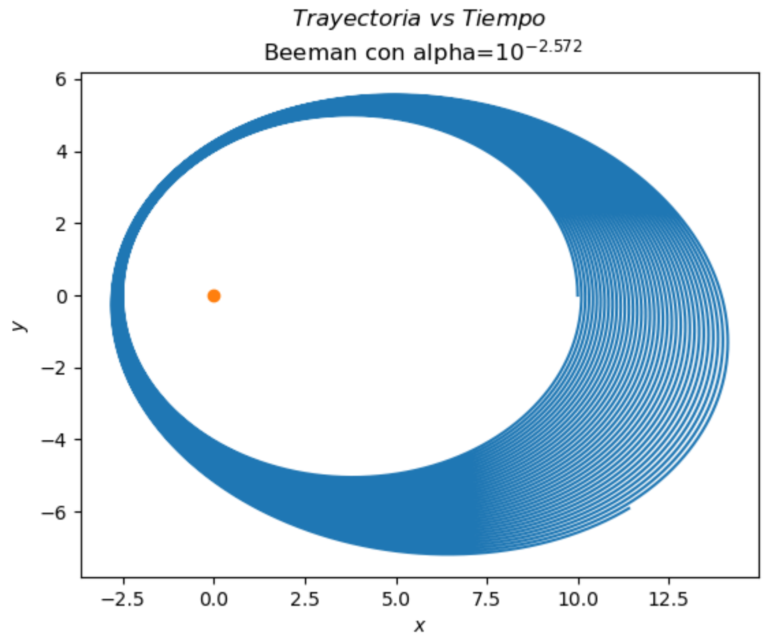

Figura 7: Gráfica de la posición con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método Beeman, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.2] además de un $\alpha = 10^{-2.572}$

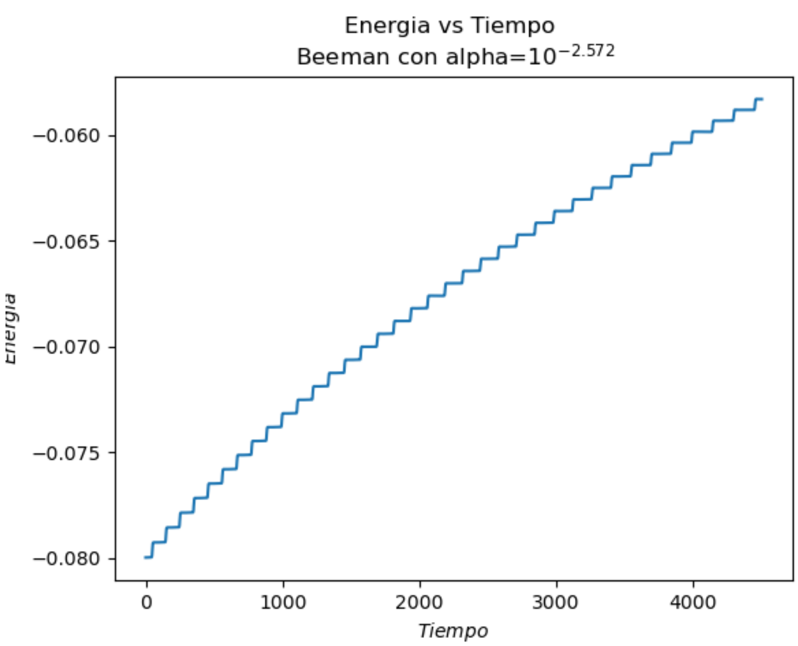

Figura 8: Gráfica de la energía con respecto al tiempo del planeta Mercurio usando el método Beeman, con las condiciones iniciales [10,0,0,0.2] además de un $\alpha = 10^{-2.572}$