Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский
университет),

XIII.11.12. Двумерная схема «классики»

Выполнила: *Игнатова Мария Б02-004*

15 мая 2023 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Для двумерного уравнения теплопроводности используется схема «классики». Как и в схеме Саульева, расчет осуществляется в два этапа:

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^{n}}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^{n} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^{n}}{h_x^2} + \frac{u_{lm-1}^{n} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^{n}}{h_y^2}$$

в случае, если $l + m + n-$ четное,

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^{n}}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{lm-1}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^{n+1}}{h_y^2}$$

в случае, если l + m + n — нечетное.

- Явная или неявная эта схема?
- Исследовать ее на аппроксимацию и устойчивость.
- Зачем нужно «перепрыгивание» — смена порядка обхода узлов при переходе со слоя на слой по времени?

2 Решение задачи

Мы имеем дело с уравнением *параболического типа*, поскольку оно содержит только производные по времени и производные второго порядка по пространственным переменным x и y. В данном уравнении, в зависимости от значений $l + m + n$, используется разная разностная аппроксимация для производных, не меняет тип уравнения.
Для ответа на первый вопрос введем следующую терминологию.

Определение: *Явная схема* (Рис. 1(a))

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \cdot \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n \tag{1}$$

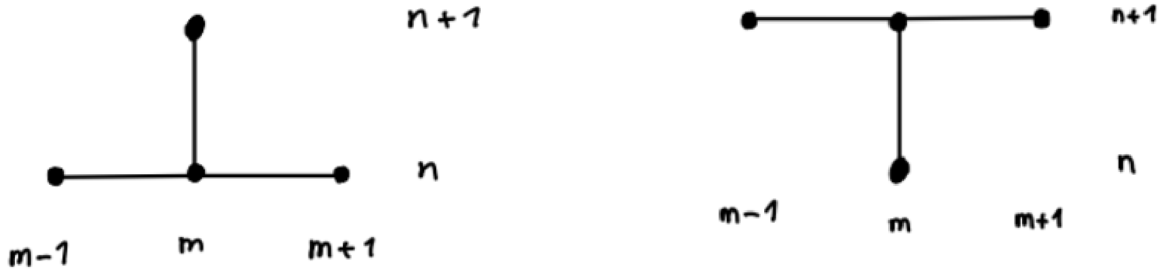
для некоторого константного a. Является *устойчивой* при $\sigma = \frac{a\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$ и *порядок аппроксимации* $O\left(\tau, h^2\right)$.

Определение: *Неявная схема* (Рис. 1(b))

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \cdot \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + f_m^n \tag{2}$$

для Некоторого константного a. *Устойчива* при при лю\-бых τ, h, *порядок аптроксимации* $O\left(\tau, h^2\right)$.

Данная схема является **явной**, так как значения на новом временном слое $n + 1$ вычисляются явно через значения на предыдущем слое n.



(a) Явная схема

(b) Неявная схема

Рис. 1: Визуальное представление (a) явной и (b) неявной схем

Исследуем данную схему на аппроксимации:

Для исследования аппроксимации данной схемы разложим ее в ряд Тейлора:

Для исследования аппроксимации данной схемы, мы можем использовать разложение в ряд Тейлора для аналитического решения уравнения теплопроводности. Предположим, что точное решение $u(x, y, t)$ аппроксимируется значением U_{lm}^n в узле (x_l, y_m, t_n).

Разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестности точки (x_l, y_m, t_n):

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = U_{lm}^n + (x-x_l)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{lm}^n + (y-y_m)\frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{lm}^n + (t-t_n)\frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{lm}^n + \frac{(x-x_l)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{lm}^n + \\ + \frac{(y-y_m)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\bigg|_{lm}^n + \frac{(t-t_n)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\bigg|_{lm}^n + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

Аппроксимирующее уравнение:

$$\frac{U_{lm}^{n+1} - U_{lm}^n}{\tau} = \frac{U_{l-1m}^n - 2U_{lm}^{n+1} + U_{l+1m}^n}{h_x^2} + \frac{U_{lm-1}^n - 2U_{lm}^{n+1} + U_{lm+1}^n}{h_y^2} \tag{4}$$

Подставим разложение решения в уравнение и оставим только первые члены разложения:

$$\frac{U_{lm}^{n+1} - U_{lm}^n}{\tau} = \frac{U_{l-1m}^n - 2U_{lm}^{n+1} + U_{l+1m}^n}{h_x^2} + \frac{U_{lm-1}^n - 2U_{lm}^{n+1} + U_{lm+1}^n}{h_y^2} \tag{5}$$

$$\frac{U_{lm}^{n+1} - U_{lm}^n}{\tau} = \frac{U_{l-1m}^n + U_{l+1m}^n - 2U_{lm}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{lm-1}^n + U_{lm+1}^n - 2U_{lm}^{n+1}}{h_y^2} \tag{6}$$

$$\frac{U_{lm}^{n+1} - U_{lm}^n}{\tau} = \frac{U_{l-1m}^n}{h_x^2} + \frac{U_{l+1m}^n}{h_x^2} - \frac{2U_{lm}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{lm-1}^n}{h_y^2} + \frac{U_{lm+1}^n}{h_y^2} - \frac{2U_{lm}^{n+1}}{h_y^2} \tag{7}$$

Перегруппируем члены:

$$\begin{aligned} \frac{U_{lm}^{n+1} - U_{lm}^n}{\tau} = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{l-1m}^n + \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{l+1m}^n + \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{lm-1}^n + \\ + \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{lm+1}^n - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right)U_{lm}^{n+1} \end{aligned} \tag{8}$$

Получаем следующую разностную схему:

$$\frac{U_{lm}^{n+1}-U_{lm}^{n}}{\tau}=\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\left(U_{l-1m}^{n}+U_{l+1m}^{n}+U_{lm-1}^{n}+U_{lm+1}^{n}-2U_{lm}^{n+1}\right) \tag{9}$$

Сравнивая полученную разностную схему с исходной, видим, что они эквивалентны. Это означает, что данная разностная схема аппроксимирует исходное уравнение теплопроводности с порядком аппроксимации $O(\tau, h_x^2, h_y^2)$, так как ошибка аппроксимации в каждом узле имеет порядок $O(\tau, h_x^2, h_y^2)$.

Исследуем данную схему на устойчивость:

Теорема. (Спектральный признак устойчивости фон Неймана).
Необходимым условием устойчивости по начальным данным является выполнение следующего неравенства для всех собственных значений оператора перехода $\mathbf{R}_\tau$:

$$|\lambda| \leq 1$$

Обычно устойчивость исследуется отдельно для каждой фурье гармоники решения

$$y_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$$

Докажем, что для данной явной схемы условие устойчивости $\sigma \leq \frac{1}{2}$

□ Одномерное уравнение теплопроводности запишем в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10}$$

где $u(x,t)$ - функция распределения температуры, a - коэффициент теплопроводности.

Применяя явную конечно-разностную схему для аппроксимации пространственного и временного производных, получим:

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=a\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2} \tag{11}$$

где u_m^n – значение функции u на сетке в момент времени t_n и пространственной точке x_m, τ - шаг по времени, h - шаг по пространству.

Пусть решение имеет вид:

$$u_m^n = \lambda^n e^{ikm} \tag{12}$$

где λ - комплексное число, k - волновое число.

Подставим в явную разностную схему для первого и второго уравнений:

- Для первой схемы имеем:

$$\frac{\lambda_1-1}{\tau}=\frac{\lambda_1 e^{-i\xi h_x}-2\lambda_1+\lambda_1 e^{i\xi h_x}}{h_x^2}+\frac{\lambda_1 e^{-i\eta h_y}-2\lambda_1+\lambda_1 e^{i\eta h_y}}{h_y^2}$$

Подставим значение $z=\lambda_1 e^{-i\xi h_x}$ и упростим выражение:

$$\frac{\lambda_1-1}{\tau}=\frac{z-2\lambda_1+z^{-1}}{h_x^2}+\frac{\lambda_1 e^{-i\eta h_y}-2\lambda_1+\lambda_1 e^{i\eta h_y}}{h_y^2}$$

Упрощая дальше, получим:

$$\frac{\lambda_1 - 1}{\tau} = \frac{z(z - 2\lambda_1 + z^{-1})}{h_x^2} + \frac{\lambda_1(e^{-i\eta h_y} - 2 + e^{i\eta h_y})}{h_y^2}$$

Домножим обе части на $\frac{h_x^2 h_y^2}{\tau}$, чтобы избавиться от знаменателей:

$$(\lambda_1 - 1)h_x^2 h_y^2 = z(z - 2\lambda_1 + z^{-1})h_y^2 + \lambda_1(e^{-i\eta h_y} - 2 + e^{i\eta h_y})h_x^2$$

Раскроем скобки:

$$\lambda_1 h_x^2 h_y^2 - h_x^2 h_y^2 = z^2 - 2\lambda_1 z + 1 + \lambda_1(e^{-i\eta h_y} - 2 + e^{i\eta h_y})h_x^2$$

Перепишем уравнение, выразив z:

$$z^2 - (2\lambda_1 + 1)z + (\lambda_1 - 1 + \lambda_1(e^{-i\eta h_y} - 2 + e^{i\eta h_y})h_x^2) = 0$$

Решая это квадратное уравнение относительно z, получим:

$$z = \frac{(2\lambda_1 + 1) \pm \sqrt{(2\lambda_1 + 1)^2 - 4(\lambda_1 - 1 + \lambda_1(e^{-i\eta h_y} - 2 + e^{i\eta h_y})h_x^2)}}{2} \tag{13}$$

Устойчивость метода требует, чтобы модуль z был меньше или равен 1 для всех возможных значений ξ и η. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного уравнения был неположительным:

$$(2\lambda_1 + 1)^2 - 4(\lambda_1 - 1 + \lambda_1(e^{-i\eta h_y} - 2 + e^{i\eta h_y})h_x^2) \leq 0 \tag{14}$$

Раскрывая скобки и упрощая выражение, получим:

$$\lambda_1(1 - 2\sin^2(\frac{\eta h_y}{2}))h_x^2 \leq 1$$

Поскольку $1 - 2\sin^2(\frac{\eta h_y}{2}) \geq 0$ для всех значений η и h_y, условие устойчивости сводится к следующему неравенству:

$$\lambda_1 h_x^2 \leq 1 \tag{15}$$

- Для второго уравнения:

$$\frac{\lambda_2^{n+1}e^{ikm} - \lambda_2^n e^{ikm}}{\tau} = a\frac{\lambda_2^n e^{ik(m+1)} - 2\lambda_2^n e^{ikm} + \lambda_2^n e^{ik(m-1)}}{h^2} \tag{16}$$

Упрощая, получаем:

$$\frac{\lambda_2 - 1}{\tau} = \frac{a\lambda_2}{h^2}(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}) \tag{17}$$

$$\frac{\lambda_2 - 1}{\tau} = \frac{2a\lambda_2}{h^2}(1 - \cos(k)) \tag{18}$$

$$\lambda_2 - 1 = \frac{2a\lambda_2\tau}{h^2}(1 - \cos(k)) \tag{19}$$

$$\lambda_2(1 - \frac{2a\tau}{h^2}(1 - \cos(k))) = 1 \tag{20}$$

Для устойчивости потребуем, чтобы $|\lambda_1 \cdot \lambda_2| \leq 1$, которые мы получили выше (15) и (20).

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{a\tau}{h^2} = \frac{a\tau}{h^4} \tag{21}$$

Таким образом, мы получаем, что явная схема теплопроводности будет устойчивой при выполнении условия $\sigma = \frac{a\tau}{h^4}$.

Это означает, что шаг по времени τ должен быть выбран таким, чтобы σ не превышало $\frac{1}{2}$. При более маленьких значениях σ, схема будет еще более устойчивой, но с уменьшением шага по времени может возрастать вычислительная сложность. ■

Необходимость смены порядка обхода узлов при переходе со слоя на слой по времени

В данной задаче схемы "классики"для двумерного уравнения теплопроводности используют смену узлов при переходе со слоя на слой по времени в зависимости от суммы индексов l, m и n.

Если $l + m + n$ – четное число, то используется следующая формула для обновления значения температуры u_{lm}^{n+1} на новом временном слое:

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^{n}}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^{n} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^{n}}{h_x^2} + \frac{u_{lm-1}^{n} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^{n}}{h_y^2}$$

Если же сумма $l + m + n$ является нечетным числом, то используется другая формула для обновления значения температуры u_{lm}^{n+1} на новом временном слое:

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^{n}}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{lm-1}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^{n+1}}{h_y^2}$$

Такая смена узлов при переходе со слоя на слой по времени *позволяет учесть влияние соседних точек на значения температуры и обеспечить устойчивость численного метода.*

При решении уравнения теплопроводности методом конечных разностей, мы обновляем значения температуры на новом временном слое на основе значений на предыдущем слое. При этом важно определить порядок обхода узлов при вычислении новых значений.

3 Выводы

- Данная схема является явной
- Порядок аппроксимации: $O\left(\tau, h_x^2, h_y^2\right)$
- Условие устойчивости: $\sigma = \frac{a\tau}{h^4}$
- Смена узлов позволяет учесть влияние соседних точек на значения температуры и обеспечить устойчивость численного метода.