Nume:

Grupa:

Examen Algoritmi Avansaţi. 20.06.2022.

1. Fie algoritmul de rezolvare a Problemei de **"Load Balance"** prezentat în cadrul **Cursului 2**, *slide-ul 19.* Acest algorim procesează fiecare task imediat după ce acesta sosește, fără o preprocesare a acestora. În cadrul cursului am arătat că acest algoritm, in forma generală a problemei, este ***2-aproximativ***. Considerăm acuma că rulăm acest algoritm pe o formă restricționată a problemei:

Avem 10 mașini de lucru care trebuie să proceseze n task-uri. Fiecare task i durează t_i unități de timp. În plus, timpul necesar pentru întregul proiect (suma timpurilor tuturor task-urilor) este $T = \sum_{i=1}^{n} t_i = 3000$ iar fiecare task i are timpul de lucru limitat la $1 \leq t_i \leq 50$.

Cerință: Arătați că pe un astfel de set de date algoritmul descris în curs este **7/6-aproximativ**. **(10p)**

Notații: Înaintea de a folosi o notație care nu este definită în textul problemei va trebui să se explice clar ce reprezintă această notație. Spre exemplu: **OPT** - timpul de lucru al mașinii celei mai solicitate în configurația optimă, **ALG** - timpul de lucru al maișinii celei mai solicitate în configurația rezultată din algoritm, etc.

2. Cu ocazia sărbatorilor de iarnă, un tată cumpără n cadouri de costuri $c_1, c_2, ..., c_n$. Acesta dorește o împărțire cât mai echitabilă a cadourilor între cei 2 copii ai săi. Mai exact, dorește să partiționeze mulțimea cadourilor în două sub-mulțimi de valori totale cât mai apropiate.

Cerință:

a) În elaborarea unui algoritm genetic care să rezolve această problemă, descrieți cum ați reprezenta cromozomul (codificare, lungimea cromozomului, etc) precum și funcția de fitness pe care ați folosi-o. **(10p)**

b) Fie $S = \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{n} c_i$. Să se formuleze problema de mai sus ca o problemă de minimizare, și să se formalizeze această problemă de minimizare sub forma unei probleme de programare liniară. **(10p)**

Notații: n - numărul cadourilor; c_i - costul cadoului cu eticheta i (costul celui de-al i-lea cadou); S - semi-suma valorilor tuturor cadourilor; x_i - o variabilă binară care ne spune cărui copil i se distribuie cadoul i.

3. Fie punctele $A = (1, -2), B = (5, 6)$. Fie $M_\alpha = (3, 4 + 2\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui α pentru care punctul M_α este situat în stânga muchiei orientate $\overrightarrow{AB}$. **(10p)**

4. Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, unde $P_1 = (-6, 2)$, $P_2 = (-4, 0)$, $P_3 = (-2, -2)$, $P_4 = (1, -2)$, $P_5 = (2, -1)$, $P_6 = (3, -2)$, $P_7 = (6, 1)$, $P_8 = (7, 4)$, $P_9 = (8, -1)$. Detaliaţi cum evoluează lista $\mathcal{L}_i$ a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. Justificaţi! **(10p)**

5. Fie punctele $A_1 = (3, 3)$, $A_2 = (6, 3), A_3 = (6, 4), A_4 = (7, 5), A_5 = (9, 5)$, $A_6 = (10, 6)$. Punctele $A_7, \ldots, A_{11}$ sunt respectiv simetricele punctelor $A_6, \ldots, A_2$ faţă de dreapta de ecuaţie $x = y$ (prima bisectoare). (a) Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $A_1 A_2 \ldots A_{10} A_{11}$. **(7p)** (b) Explicaţi, pe scurt, câte vârfuri convexe şi câte vârfuri concave are poligonul $A_1 A_2 \ldots A_{10} A_{11}$. **(3p)**

6. (a) Daţi exemplu de mulţime de puncte $\mathcal{M}$ din $\mathbb{R}^2$ care admite o triangulare ce conţine exact cinci feţe. Precizaţi numărul de muchii din triangularea respectivă. **(4p)** (b) Formulaţi, justificaţi şi exemplificaţi un rezultat care să caracterizeze complet mulţimile cu proprietatea că admit o triangulare ce conţine exact cinci feţe. **(6p)**

7. Considerăm semiplanele $H_\alpha, H'_\alpha, S_1, S_2$ date de inecuaţiile

$$H_\alpha : -x + \alpha \leq 0, \quad H'_\alpha : y + \alpha - 8 \leq 0 \ (\alpha \in \mathbb{R}), \quad S_1 : -y + 2 \leq 0, \quad S_2 : 2x - y - 6 \leq 0.$$

Discutaţi, în funcţie de α, natura intersecţiei $H_\alpha \cap H'_\alpha \cap S_1 \cap S_2$. Justificaţi! **(10p)**

8. În planul cartezian Oxy se consideră n pătrate $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ şi o mulţime de n drepte paralele cu prima bisectoare $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (aşadar fiecare dreaptă d_j are o ecuaţie de forma $y = x + \lambda_j$, cu λ_j cunoscut). Pentru fiecare pătrat $\mathcal{P}_i$ este indicat un număr y_i, iar vârfurile lui $\mathcal{P}_i$ sunt $(-1, y_i - 1), (1, y_i - 1), (1, y_i + 1), (-1, y_i + 1)$. Pentru orice i şi j se notează s_{ij} intersecţia dintre pătratul $\mathcal{P}_i$ reunit cu interiorul său şi dreapta d_j (aşadar s_{ij} este un segment, un punct sau mulţimea vidă), apoi, dacă s_{ij} este un segment se notează cu l_{ij} lungimea acestuia, altfel se consideră $l_{ij} = 0$. Descrieţi succint (nu este necesar să detaliaţi calculele matematice, este suficient să le explicaţi pe scurt) un algoritm cât mai eficient care să determine $\max\limits_{i,j=1,\ldots,n} (l_{ij})$. Justificaţi şi exemplificaţi! **(10p)**