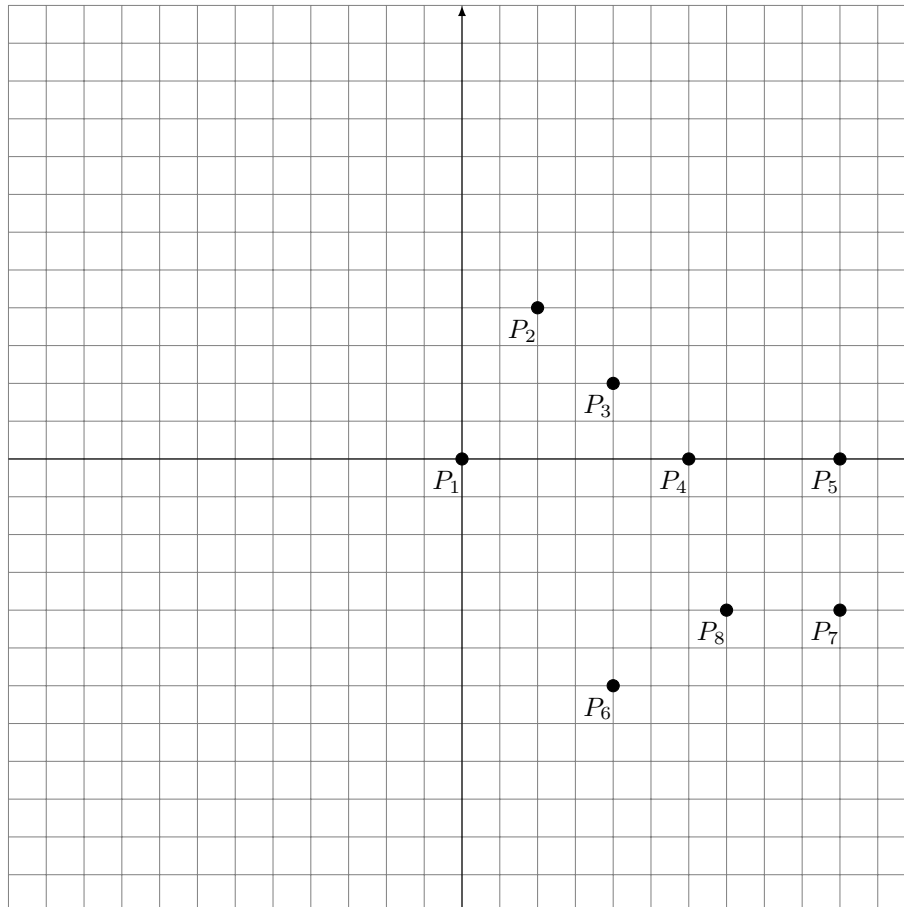


Algoritmi avansați

Seminar 2 (săpt. 3 și 4)

1. Fie mulțimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_7\}$, unde $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (2, 1)$, $P_4 = (3, 0)$, $P_5 = (5, 0)$, $P_6 = (2, -3)$, $P_7 = (5, -2)$. Indicați testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui \mathcal{P} , parcursă în sens trigonometric (drept pivot inițial va fi considerat P_2).

Soluție.



Pentru a găsi succesorul lui P_1 este adăugat pivotul P_2 (S cu notația din suportul de curs). Punctele sunt apoi testate, iar dacă un punct P este la

dreapta muchiei orientate P_1S , punctul P devine noul pivot.

Punctul P_3 : este în dreapta muchiei P_1P_2 , deci pivotul P_2 este înlocuit cu P_3 .

Punctul P_4 : este în dreapta muchiei P_1P_3 , deci pivotul P_3 este înlocuit cu P_4 .

Punctul P_5 : nu este în dreapta muchiei P_1P_4 , deci pivotul P_4 rămâne.

Punctul P_6 : este în dreapta muchiei P_1P_4 , deci pivotul P_4 este înlocuit cu P_6 .

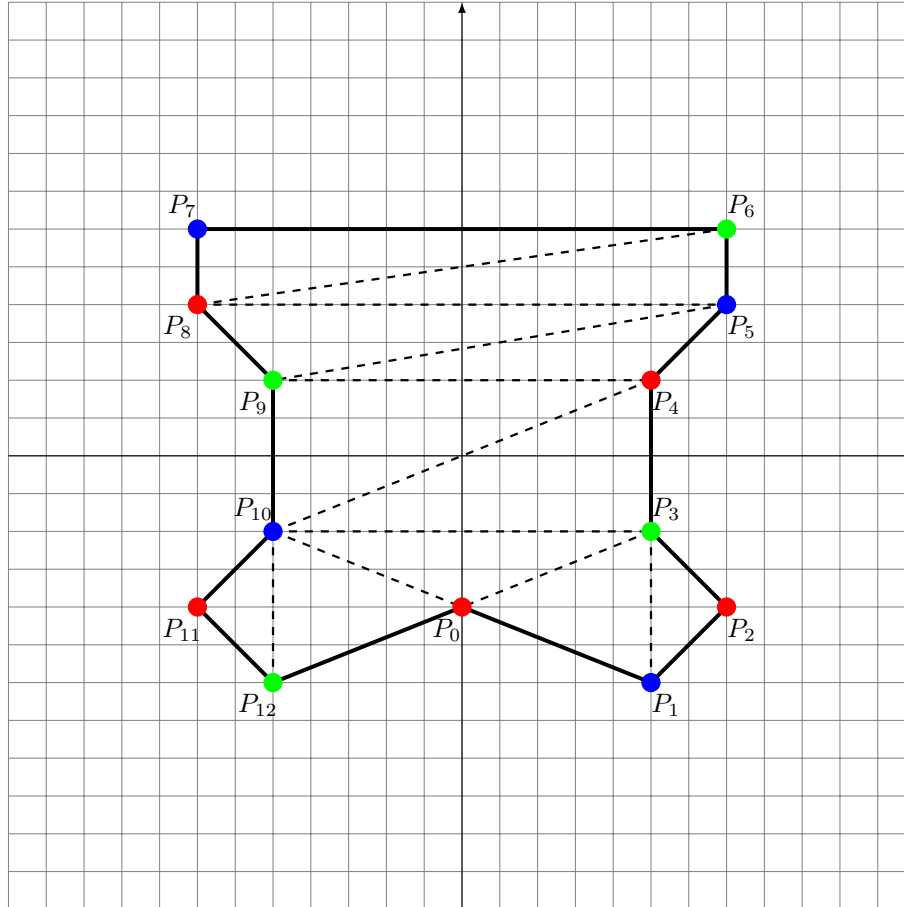
Punctul P_7 : nu este în dreapta muchiei P_1P_6 , deci pivotul P_6 rămâne.

Punctul P_8 : nu este în dreapta muchiei P_1P_6 , deci pivotul P_6 rămâne.

Au fost parcurse toate punctele. Ultimul pivot (P_6) este succesorul lui P_1 în parcurgerea frontierei acoperirii convexe a mulțimii date în sens trigonometric.

2. Aplicați metoda din demonstrația teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_0P_1P_2 \dots P_{12}$, unde $P_0 = (0, -2)$, $P_1 = (5, -6)$, $P_2 = (7, -4)$, $P_3 = (5, -2)$, $P_4 = (5, 2)$, $P_5 = (7, 4)$, $P_6 = (7, 6)$ iar punctele P_7, \dots, P_{12} sunt respectiv simetricele punctelor P_6, \dots, P_1 față de axa Oy .

Soluție. În figură sunt reprezentate o posibilă triangulare și 3-colorarea asociată - există și alte variante corecte.



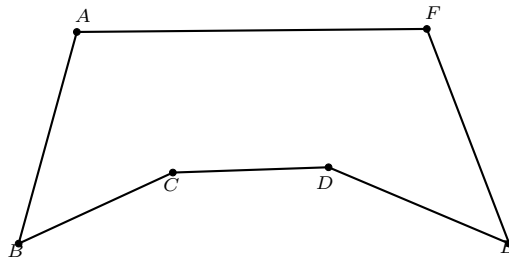
3. Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătați că Teorema Gale-riei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, așa încât, aplicând metoda din teoremă și mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare și suficiente două camere pentru supravegherea unei galerii având forma poligonului \mathcal{P} .

Soluție. Poligonul este un hexagon convex, deci pentru triangularea sa vor fi folosite $3 \cdot 6 - 6 - 3 = 9$ muchii. Aceasta înseamnă că vom trasa 3 diagonale. Sunt posibile două situații: (a) cele trei diagonale au un vârf comun; (b) nu există un vârf comun al celor trei diagonale (acest lucru se poate demonstra trasând una dintre diagonale și apoi raționând inductiv - este esențial că poligonul este un hexagon convex). În cazul (a) este suficientă o cameră, iar în cazul (b) 3-colorarea indică utilizarea a două camere.



4. Dați exemplu de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât și concave și toate să fie principale.

Soluție. În figură este desenat un poligon cu 4 vârfuri convexe și 2 vârfuri concave. Pot fi luate în considerare și alte variante (de exemplu cu un singur vârf concav, cu doar 3 vârfuri convexe, etc.).



5. Fie $\mathcal{M} = \{A_i \mid i = 0, \dots, 50\} \cup \{B_i \mid i = 0, \dots, 40\} \cup \{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$, dată de punctele $A_i = (i + 10, 0)$, $i = 0, 1, \dots, 50$, $B_i = (0, i + 30)$, $i = 0, 1, \dots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \dots, 30$. Determinați numărul de triunghiuri și numărul de muchii ale unei triangulări a lui \mathcal{M} .

Soluție. Trebuie stabilite mai întâi numărul de puncte n și numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe k (atenție la numărarea punctelor, nu trebuie numărat un punct de două ori...). Pe o schiță se observă că sunt în total 123 de puncte (punctele din mulțimile $\{A_i \mid i = 0, \dots, 50\}$, $\{B_i \mid i = 0, \dots, 40\}$, respectiv $\{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$ sunt diferite între ele). Obținem $n = 123$, $k = 3$, apoi aplicăm formulele pentru determinarea numărului de triunghiuri, respectiv a numărului de muchii.

$$n_t = 2n - k - 2 = 241, \quad n_m = 3n - k - 3 = 343.$$

6. Dați un exemplu de mulțime din \mathbb{R}^2 care să admită o triangulare având 6 triunghiuri și 11 muchii.

Soluție. Fie n numărul de puncte ale unei astfel de mulțimi și k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe. Au loc relațiile

$$\begin{cases} 2n - k - 2 = 6 \\ 3n - k - 3 = 11 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem $n = 6$, $k = 4$, deci o astfel de mulțime are 6 puncte, din care 4 sunt situate pe frontiera acoperirii convexe.

Un posibil exemplu: $\{(0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3), (1, 1), (3, 1)\}$.

7. În \mathbb{R}^2 fie punctele $P_1 = (1, 7)$, $P_2 = (5, 7)$, $P_3 = (7, 5)$, $P_4 = (1, 3)$, $P_5 = (5, 3)$, $P_6 = (\alpha - 1, 5)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulțimii $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Soluție. Trebuie analizată configurația punctelor P_1, P_2, \dots, P_6 și determinate numărul n de puncte și numărul k de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Punctele $P_1P_2P_3P_4P_5$ determină un pentagon convex. Punctul P_6 descrie o dreaptă paralelă cu Ox care trece prin punctul P_3 .

- Pentru $\alpha - 1 \leq 1$, adică $\alpha \in (-\infty, 2]$ punctul P_6 este situat în exteriorul sau pe laturile pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 6$, deci 4 fețe și 9 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 > 1$ și $\alpha - 1 < 7$, adică $\alpha \in (2, 8)$ punctul P_6 este situat în interiorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 5$, deci 5 fețe și 10 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 = 7$, adică $\alpha \in \{8\}$ punctul P_6 coincide cu P_3 . Avem $n = 5$, $k = 5$, deci 3 fețe și 7 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 > 7$, adică $\alpha \in (8, \infty)$ punctul P_6 este situat în exteriorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 6$, deci 4 fețe și 9 muchii.

8. Fie \mathcal{G} un graf planar conex, v numărul de noduri, m numărul de muchii, f numărul de fețe. Se presupune că fiecare vârf are gradul ≥ 3 . Demonstrați inegalitățile

$$v \leq \frac{2}{3}m, \quad m \leq 3v - 6$$

$$m \leq 3f - 6, \quad f \leq \frac{2}{3}m$$

$$v \leq 2f - 4, \quad f \leq 2v - 4$$

Dați exempluri de grafuri în care au loc egalități în relațiile de mai sus.

Algoritmi avansați

Seminar 3 (săpt. 5 și 6)

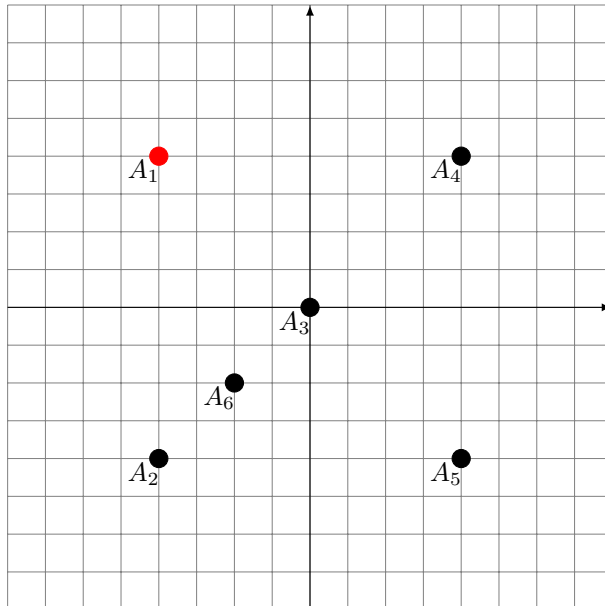
1. Dați exemplu de mulțime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din \mathbb{R}^2 astfel ca diagrama Voronoi asociată lui \mathcal{M} să conțină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conțină exact cinci semidrepte. Justificați alegerea făcută.

Soluție. Numărul de semidrepte ale unei diagrame Voronoi este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Alegem mulțimea \mathcal{M} astfel ca A_1, A_2, A_3, A_4 să determine frontiera acoperirii convexe, iar pentru $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ toate punctele să fie situate pe frontiera acoperirii convexe.

În figură este indicată configurația punctelor, însă, întrucât în enunț se cere ca punctele să fie din \mathbb{R}^2 , le indicăm în coordonate. În exemplul ales $A_1 = (-4, 4)$, $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 0)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-2, -2)$.

O altă soluție posibilă (în care punctele A_2, A_6, A_3, A_4 nu mai sunt coliniare, este $A_1 = (-4, 4)$, $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 3)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-3, 0)$ (verificați prin desen!).



2. a) Fie o mulțime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi \mathcal{D} asociată unei mulțimi cu cinci puncte din \mathbb{R}^2 știind că \mathcal{D} are exact cinci semidrepte? Analizați toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificați!

Soluție. a) Cum punctele nu sunt coliniare, diagrama Voronoi are muchii de tip segment și de tip semidreaptă. Se consideră un vârf suplimentar, notat v_∞ , prin care, prin convenție, trece fiecare muchie de tip semidreaptă. Se construiește un graf \mathcal{G} care are

- *vârfuri*: vârfurile diagramei Voronoi și vârful v_∞ (deci $n_v + 1$ vârfuri);
- *muchii*: muchiile diagramei Voronoi - fiecare unește exact două vârfuri ale lui \mathcal{G} (deci n_m muchii);
- *fețe*: în corespondență biunivocă cu siturile inițiale (deci n fețe).

Graful \mathcal{G} este un graf planar conex.

(i) Conform relației lui Euler avem

$$(n_v + 1) - n_m + n = 2.$$

(ii) Analizăm incidențele dintre muchii și vârfuri.

- fiecare muchie este incidentă cu exact două vârfuri;
- fiecare vârf (inclusiv v_∞) este incident cu cel puțin trei muchii;
- numărând incidențele în două moduri avem

$$2n_m \geq 3(n_v + 1).$$

Din (i) și din (ii) rezultă inegalitățile dorite.

Observație. Pentru ca relațiile din enunț să fie egalități este necesar și suficient ca fiecare vârf al lui \mathcal{G} să fie incident cu exact trei muchii. Aceasta înseamnă să nu existe grupuri de (cel puțin) patru puncte conciclice și pe frontiera acoperirii convexe a mulțimii de situri să fie exact trei situri.

b) Fie \mathcal{M} o mulțime ca în enunț. Diagrama Voronoi a lui \mathcal{M} are cinci semidrepte, deci toate cele cinci puncte ale lui \mathcal{M} sunt situate pe frontiera acoperirii convexe. În particular, conform observației anterioare, nu este posibil să fie atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5 = 5$). Mai mult, urmând pașii din raționament, observăm că, de fapt, $n_v \leq 3$. Sunt posibile trei situații:

- toate punctele sunt conciclice, $n_v = 1$,

- patru dintre puncte sunt conciclice, dar al cincilea nu este situat pe același cerc cu acestea, $n_v = 2$,
- oricare patru puncte nu sunt conciclice, $n_v = 3$.

3. Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulțimii $\{O, A, B, C, D\}$.

Soluție. Numărul de muchii de tip semidreaptă este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe (le notăm cu m).

Punctul A este variabil pe axa Ox . Punctele O, B, C, D determină un pătrat și trebuie doar să stabilim, în funcție de α , poziția lui A față de acest pătrat. Distingem următoarele cazuri:

- $\alpha < 0$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt A, B, C, D);
- $\alpha = 0$: avem $A = O$, deci $m = 4$;
- $0 < \alpha < 2$: punctul A este situat în interiorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, C, D);
- $\alpha = 2$: avem $A = C$, deci $m = 4$;
- $\alpha > 2$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, D, A).

4. (i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeți două drepte distincte d, g care trec prin A , determinați dualele A^*, d^*, g^* și verificați că A^* este dreapta determinată de punctele d^* și g^* .

(ii) Determinați duala următoarei configurații: Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte. Desenați ambele configurații. Completați configurația inițială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obțineți o configurație autoduală (i.e. configurația duală să aibă aceleași elemente geometrice și aceleași incidențe ca cea inițială).

Soluție. a) Conform teoriei, pentru un punct $p = (p_x, p_y)$ se definește dreapta $p^* : (y = p_x x - p_y)$ (duala lui p), iar pentru o dreaptă neverticală $d : (y = mx + n)$, se definește punctul $d^* = (m, -n)$ (dualul lui d).

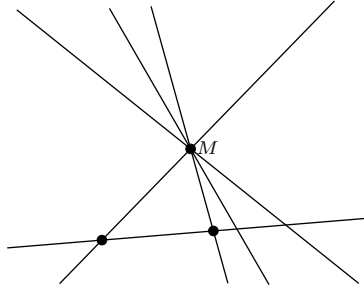
Alegem dreptele $d : (y = 2x)$ și $g : (y = -x + 3)$. Avem:

$$A^* : (y = x - 2), \quad d^* = (2, 0), \quad g^* = (-1, -3).$$

Se verifică imediat că punctele d^* și g^* determină dreapta A^* .

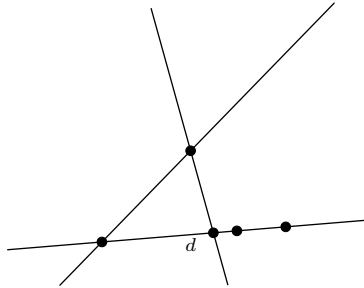
b) Configurația inițială:

Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte.



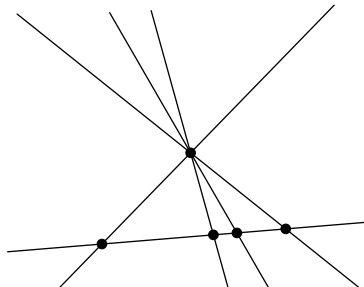
Configurația duală:

Fie patru puncte situate pe o aceeași dreaptă d . Se aleg două dintre ele; prin fiecare din aceste două puncte se consideră câte o dreaptă diferită de d și se consideră punctul de intersecție al acestor două drepte.



Configurația completată (astfel ca să fie autoduală):

Fie patru drepte care trec printr-un același punct. Pe fiecare dreaptă se alege câte un punct diferit de punctul comun, astfel ca aceste patru puncte să fie coliniare și se consideră dreapta determinată de aceste patru puncte.



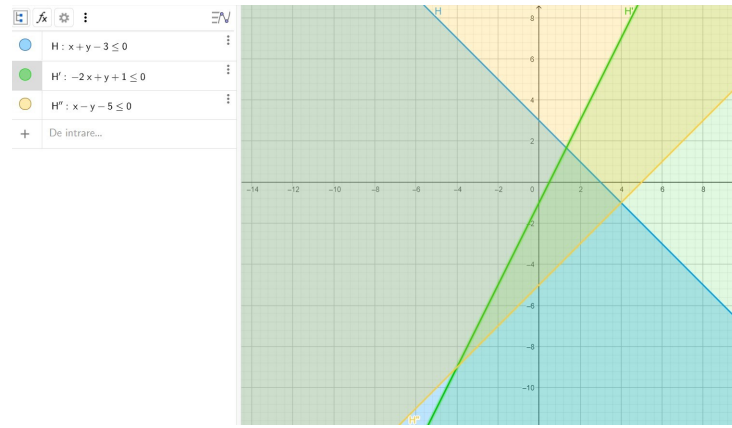
5. a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ și $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Dați exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecția $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuațiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \quad H_2 : y - 5 \leq 0; \quad H_3 : -x \leq 0; \quad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

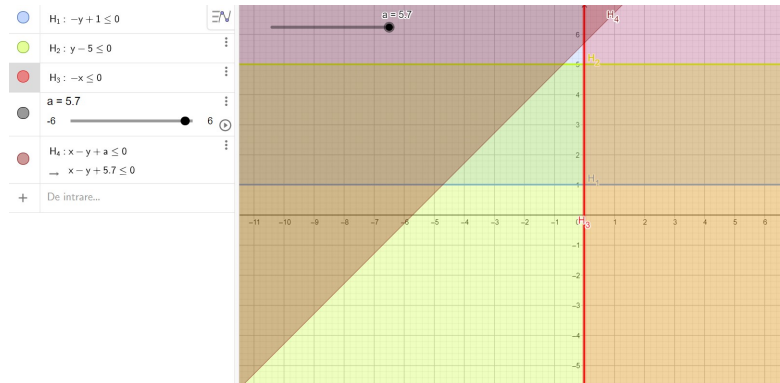
unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de parametrul a , natura intersecției $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

Soluție. a) Alegem semiplanul $H'' : x - y - 5 \leq 0$. Dreapta suport $x - y - 5 = 0$ este perpendiculară pe dreapta suport a lui H , $x + y - 3 = 0$. Intersecția semiplanelor este un triunghi (cf. figură, se pot determina vârfurile acestuia), deci H'' verifică cerințele din enunț.

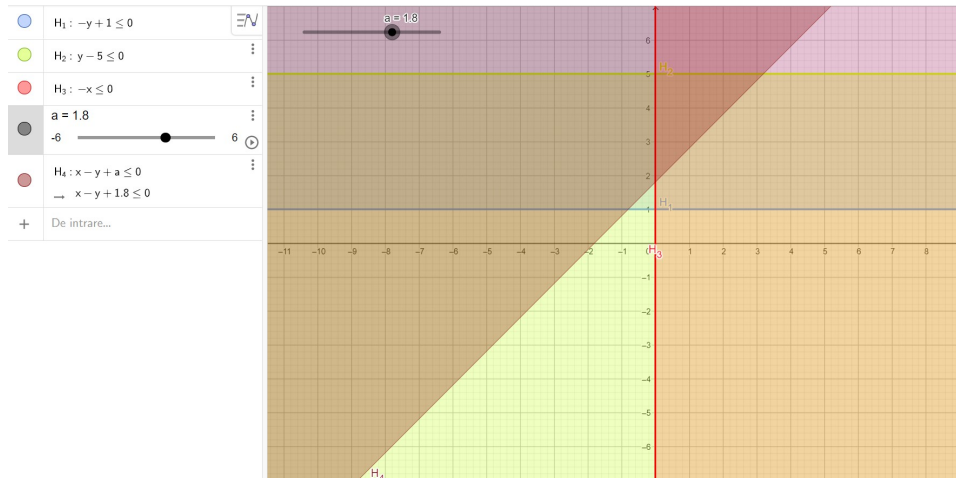


b) Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ este o mulțime convexă nemărginită delimitată de dreptele $y = 1$, $y = 5$, respectiv $x = 0$. Vârfurile relevante sunt punctele $(0, 1)$ și $(0, 5)$.

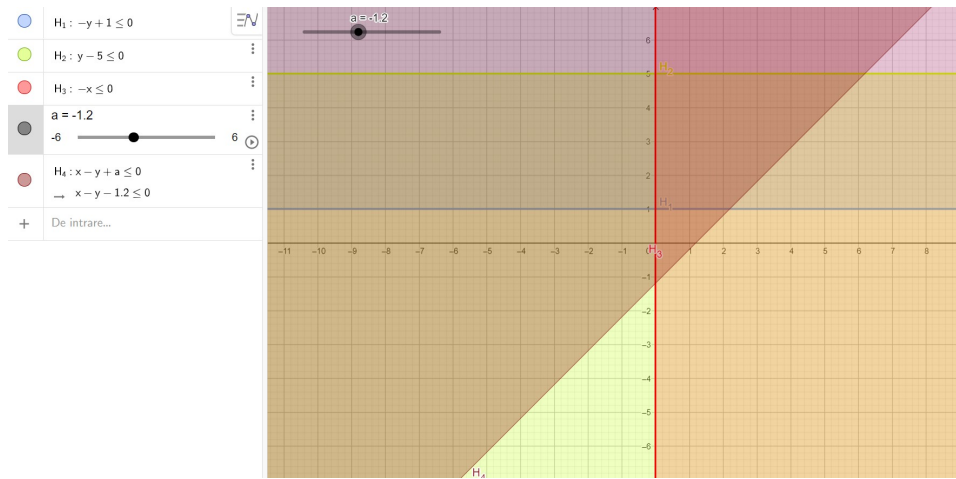
- Pentru $a > 5$ se obține $0 \geq x - y + a > x - y + 5 \geq 0$ (deoarece $x \geq 0$ și $-y + 5 \geq 0$), contradicție. În acest caz intersecția este mulțimea vidă.



- Pentru $a = 5$ se obține punctul $(0, 5)$.
- Pentru $1 \leq a < 5$ se obține un triunghi având unul dintre vârfuri $(0, 5)$, un vârf la intersecția dintre dreptele $x = 0$ și $x - y + a = 0$ și un vârf la intersecția dintre dreptele $y = 5$ și $x - y + a = 0$. Pentru $a = 1$ punctul $(0, 1)$ este vârf al acestui triunghi.



- Pentru $a < 1$ se obține un trapez. Laturile sale au ca drepte suport exact dreptele suport ale celor patru semiplane.



6. Scrieți inecuațiile semiplanelor corespunzătoare și studiați intersecția acestora, dacă normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, 1, -1), (0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (0, -1, -1).$$

Soluție. Conform teoriei, dacă normala exterioară a unei fețe f este coliniară cu un vector $\vec{v}_f = (a, b, c)$, semiplanul corespunzător feței f este

$$ax + by + c \leq 0.$$

Se ajunge la inegalitățile

$$\begin{array}{rcl} y - 1 & \leq & 0 \\ y & \leq & 0 \\ -1 & \leq & 0 \\ -y & \leq & 0 \\ -y - 1 & \leq & 0 \end{array}$$

Acest sistem este compatibil, admitând soluția $y = 0$.

Notă. Ca în exemplul de la curs, am făcut abstracție de componenta x .

7. (Suplimentar) Demonstrați că arborele parțial de cost minim al lui \mathcal{P} este un subgraf al triangulării Delaunay.

Soluție. D. Mount, *Computational Geometry*, pag. 75.

Algoritmi Avansați

Seminar 4 (săpt. 7 și 8)

Problema rucsacului

Descrierea problemei. Se dă o mulțime de obiecte $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$. Pentru fiecare obiect o_i știm cât este **valoarea** obiectului (pe care o vom nota val_i), respectiv **greutatea** obiectului (pe care o vom nota g_i).

Scopul este să găsim o submulțime de obiecte $S \subseteq O$ astfel încât suma greutateilor obiectelor din S să nu depășească o capacitate C a unui rucsac (fixată de la început), iar valoarea totală a acestora să fie maximă.

Formularea matematică. Să se găsească $S \subseteq O$ care să maximizeze

$$\sum_{o_i \in S} val_i$$

cu condiția că

$$\sum_{o_i \in S} g_i \leq C$$

Observație. Toate submulțimile S care respectă condiția de mai sus se vor numi **soluții candidat**. Dintre acestea, soluția (sau soluțiile) care maximizează valoarea totală se va numi **soluția optimă**.

Varianta fracționară

Elementele din S pot fi fracțiuni din obiecte; cu alte cuvinte, pentru fiecare obiect o_i reținem și procentul din el pe care îl luăm în considerare, $p_i \in [0, 1]$. Fiecare obiect din soluție contribuie la valoarea totală cu $p_i \cdot val_i$, respectiv este contorizat spre greutatea totală cu $p_i \cdot g_i$.

Formularea matematică devine: să se găsească $S \subseteq O$ care să maximizeze $\sum_{o_i \in S} p_i \cdot val_i$ cu condiția că $\sum_{o_i \in S} g_i \leq C$.

Complexitatea pe care ar trebui să o aibă soluția voastră: $\mathcal{O}(n \log n)$

Varianta discretă

Elementele din S pot fi doar obiecte luate cu totul; cu alte cuvinte, pentru fiecare obiect o_i decidem dacă îl includem sau nu.

Complexitatea pe care ar trebui să o aibă soluția voastră: $\mathcal{O}(n \cdot C)$

Alte probleme pseudo-polinomiale

Submulțime de elemente cu suma dată

Se dă o mulțime de n numere naturale și un număr natural $M < 10000$. Să se determine, dacă există, o submulțime a mulțimii date de sumă egală cu M .

Exemplu. Pentru $n = 6$, mulțimea $\{12, 1, 3, 4, 5, 7\}$ și $M = 14$, o soluție este submulțimea $\{3, 4, 7\}$.

Complexitatea pe care ar trebui să o aibă soluția voastră: $\mathcal{O}(n \cdot M)$

Împărțirea cadourilor

Moș Crăciun a poposit la bradul a doi frați, unde și-a golit sacul. Când s-au trezit, frații au intrat într-o mare dilemă: cum își vor împărți ei cadourile? Știind că fiecare cadou are o valoare cuprinsă între 1 și 100 și că sunt maxim 100 de cadouri, scrieți un program care să determine sumele cadourilor fraților precum și modul de împărțire, astfel încât sumele obținute să fie cât de apropiate posibil.

Exemplu. Pentru 7 cadouri cu valorile $\{28, 7, 11, 8, 9, 7, 27\}$, sumele sunt 48 și 49, o împărțire a cadourilor fiind: $\{28, 11, 9\}$, respectiv $\{7, 8, 7, 27\}$.

Complexitatea pe care ar trebui să o aibă soluția voastră: $\mathcal{O}(n \cdot S)$, unde S reprezintă valoarea totală a cadourilor.

Alte probleme de programare dinamică

Generalizarea problemei spectacolelor

Se dau n activități, pentru fiecare având: **timpul de început**, **timpul de sfârșit** și **profitul** asociat desfășurării activității (adică n intervale de numere reale, fiecare cu o pondere asociată). Să se determine o submulțime

de activități compatibile (intervale disjuncte două câte două) care au profitul total maxim. Se vor afișa profitul total și activitățile selectate.

Exemplu. Pentru $n = 4$ și activitățile:

- $A_1 = [1, 3]$ cu profitul $p_1 = 1$
- $A_2 = [2, 6]$ cu profit $p_2 = 8$
- $A_3 = [4, 7]$ cu profit $p_3 = 2$
- $A_4 = [10, 15]$ cu profit $p_4 = 5$

O soluție optimă ar fi formată din activitățile A_2 și A_4 (adică intervalele $[2, 6]$ și $[10, 15]$), cu profitul total 13.

Complexitatea pe care ar trebui să o aibă soluția voastră: încercați să găsiți o soluție în $\mathcal{O}(n \log n)$; dacă nu reușiți, încadrați-vă în cel mult $\mathcal{O}(n^2)$.

Generalizarea problemei planificării activităților

Se dă o listă de n activități. Pentru fiecare activitate cunoaștem **profitul** (p_i), **termenul limită** până la care trebuie efectuată (t_i) și **durata** acesteia (l_i). Trebuie să găsim o submulțime *ordonată* (o sublistă) de activități pentru a obține un profit total maxim.

Exemplu. Pentru $n = 4$ și activitățile:

- A_1 cu $p_1 = 3$, $t_1 = 5$, $l_1 = 3$
- A_2 cu $p_2 = 2$, $t_2 = 2$, $l_2 = 1$
- A_3 cu $p_3 = 3$, $t_3 = 2$, $l_3 = 2$
- A_4 cu $p_4 = 5$, $t_4 = 4$, $l_4 = 3$

O soluție optimă se obține dacă planificăm activitățile în ordinea A_2, A_4 , profitul fiind 7.

Observație. Problema discretă a rucsacului poate fi privită ca un caz particular al acestei probleme (obiectele sunt activități de durată g_i , profit c_i și termen limită C).

Complexitatea pe care ar trebui să o aibă soluția voastră: $\mathcal{O}(n \cdot T + n \log n)$, unde $T = \max \{ t_i \}$.

Seminar 5

Ștefan Popescu

April 2023

Vouchere de Vacanță

Cerință

(10p) George a intrat în concediu, și ca atare dorește să consume cât mai mult din pachetul său de vouchere de vacanță. El și-a făcut o listă cu n locații unde poate cheltui din suma alocată. Știind că George nu are de gând să cheltuiască din banii proprii decât pe transportul între locații și că el se poate deplasa între oricare două locații, ajutați-l pe George să găsească o listă de locații pe care să le viziteze astfel încât să își folosească voucherele cât mai eficient.

Cerințe:

Se cere un algoritm 1/2-aproximativ care rezolvă problema lui George în timp eficient din punct de vedere al complexității timp. (pseudocod + justificare)

Algoritmul va avea ca output lista de locații și suma totală ce va fi cheltuită.

Notații și indicații:

- Notăm cu S suma de bani pe care o are George sub formă de vouchere.
- Locațiile sunt etichetate cu numerele $1, 2, \dots, n$. Costurile celor n locații sunt notate cu C_1, C_2, \dots, C_n
- Suma de bani S este alocată pe un card, nu sub formă de tichete. Din cont se poate extrage orice sumă disponibilă.
- Se lucrează cu numere întregi.

Soluție

Problema este în esență o variantă a *Problemei Rucsacului* în care valoarea și greutatea pentru fiecare obiect sunt egale. Se poate folosi algoritmul din curs, care este 1/2 aproximativ.

Camioane și Transporturi

Cerință

(15p) Avem n colete de transportat, fiecare având greutatea de w_1, w_2, \dots, w_n . Pentru a le transporta, putem folosi un număr de camioane, fiecare având capacitatea de transport G . presupunem că $w \leq G$, pentru orice i . Ne dorim să minimizăm numărul de camioane folosite. Considerăm următorul plan de încărcare a camioanelor:

Odată ce avem la dispoziție un camion pentru a fi încărcat, iterăm prin mulțimea coletelor, încărcându-le în camion, până când dăm peste primul colet ce nu mai încapă. În acel moment considerat că am terminat de încărcat camionul curent și trecem la următorul camion, prima dată încărcând coletul care nu a mai încăput în cel precedent.

Cerințe:

- a) Arătați, printr-un exemplu simplu, că metoda de mai sus nu furnizează soluția optimă. (5p)

b) Arătați totuși că soluția de mai sus este un algoritm 2-aproximativ pentru problema noastră. (10p)

Notății:

n - numărul de colete

G - capacitatea unui camion

W - Lista cu greutatea coletelor în ordinea în care sosesc spre a fi procesate.

OPT - soluția optimă care există: Numărul minim de camioane ce poate fi folosit pentru a transporta cele n colete de greutate totală G

ALG - soluția oferită de algoritmul nostru: numărul de camioane folosite conform algoritmului

$G[i]$ - greutatea cu care este încărcat camionul i în configurația dată de algoritmul nostru. Evident $G[i] \leq G$.

Soluție

a) Un exemplu ar putea fi $n = 3, G = 100, W = \{30, 80, 60\}$; soluțiile obținute sunt: $ALG = 3, OPT = 2$.

b) Presupunem că soluția dată de algoritm folosește $2p$ camioane. Vom arăta că soluția optimă folosește cel puțin p camioane:

Din algoritm se poate observa că $G[2i - 1] + G[2i] \geq G, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Deci pentru fiecare pereche de camioane consecutive folosite de algoritmul nostru, o abordare optimă ar folosi cel puțin 1 camion. Cum algoritmul nostru folosește exact p perechi de camioane, o abordare optimă ar folosi cel puțin p camioane.

Dacă soluția noastră folosește $2p + 1$ camioane:

Din analiza precedentă am putut observa că primele p perechi de camioane transportă o încărcătură totală de minim $p * G$. Pentru această încărcătură sunt necesare cel puțin p camioane. Însă mai este nevoie de un camion în plus pentru a transporta și $G[2p + 1]$, pentru un total de minim $p + 1$ camioane într-o configurație optimă, atunci când algoritmul nostru folosește $2p + 1$ camioane.

Cadourile lui Moș Crăciun

Cerință

(30p) O clasă de elevi este formată din m copii. La această clasă Moș Crăciun aduce n cadouri, fiecare dintre ele având o valoare notată $val_1, val_2, \dots, val_n$. Moșul, grăbit fiind, lasă task-ul împărțirii cadourilor pe umerii profesorului de informatică. Acesta își alege următorul obiectiv pentru împărțirea cadourilor: să maximizeze valoarea cadourilor primite de către copilul care primește cel mai puțin. (Altfel spus, copilul cel mai "vitregit" în urma împărțirii să primească totuși cadouri de o valoare cât mai bună / Să existe un "spread" cât mai bun al cadourilor). În timp ce se gândește la o soluție de implementare, profesorul își amintește de la cursurile de algoritmică din facultate că astfel de probleme de optim sunt NP-hard! Fiind cuprins de groază (dar și de o nostalgie pentru cursurile de algoritmică din facultate) el vă cere vouă ajutorul.

Notății:

OPT - soluția optimă care există: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai "vitregit" în o configurație optimă

ALG - soluția oferită de algoritmul vostru: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai "vitregit" în urma algoritmului vostru

$C[k]$ - lista cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$W(K)$ - valoarea totală a cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$val(i)$ – valoarea cadoului i

$Val = \sum_{1 \leq i \leq n} val(i)$ – valoarea totală a cadourilor

Copiii vor fi indexați folosind variabile de forma k, q, k', q' , etc... Cadourile vor fi indexate folosind variabile de forma i, j, i', j' , etc...

Restricții: Considerăm că $n \geq m$ și că $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$ pentru oricare cadou i .

Cerințe:

- Descrieți un algoritm $\frac{1}{2}$ aproximativ pentru problema cadourilor în complexitate $\mathcal{O}(n \log m)$ **(10p)**
- Fie k acel copil pentru care $ALG = W(K)$. Fie i ultimul cadou primit de un copil oarecare q ($q \neq k$). Care este relația între $W(K)$ și $W(Q) - val(i)$? Justificați. **(5p)**
- Pe baza punctului b) arătați că $ALG \geq \frac{Val}{2m}$ **(5p)**
- Demonstrați că algoritmul descris la punctul a) este $\frac{1}{2}$ aproximativ **(5p)**
- Dați un exemplu format din minimum 2 copii și 4 cadouri pentru care algoritmul vostru nu găsește soluția optimă. Spuneți care este soluția optimă. Spuneți care este soluția dată de algoritmul vostru. **(5p)**

Soluție

- a) **for** $k \in [1 : m]$ **do**: // *initializare*

$C[k] \leftarrow \emptyset; W(K) \leftarrow 0;$

- for** $i \in [1 : n]$ **do**: // *pentru fiecare cadou 'i'; $\mathcal{O}(n)$*

$q \leftarrow k$ cu proprietatea ca $W(K)$ - minima; // *alegem pe cel mai "vitregit" copil; $\mathcal{O}(\log m)$ cu minheap sau priority queue*

$C[q] \leftarrow C[q] \cup \{i\}$ // *adaugăm cadoul 'i' în lista de cadouri ale lui 'q'*

$W(Q) \leftarrow W(Q) + val(i)$ // *se actualizează valoarea totală a cadourilor lui 'q'.*

- b) Deoarece cadoul i este atribuit copilului q , înseamnă că, la acel moment, q avea cadourile de valoare totală cea mai mică, deci în mod evident mai mică decât cea a lui k . Deci avem relația $W(K) \geq W(Q) - val(i)$. Aceasta poate fi rescrisă ca $W(K) + val(i) \geq W(Q)$
- c) Fie k acel copil pentru care $ALG = W(K)$. Vom presupune prin absurd că $W(K) < \frac{Val}{2m}$. Deoarece $W(K) + val(i) \geq W(Q)$ și $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$ avem:

$$\begin{aligned} Val &= \sum_{1 \leq q \leq m} W(Q) = W(K) + \sum_{\substack{q \neq k \\ 1 \leq q \leq m}} W(Q) \\ &\leq W(K) + (m-1)(W(K) + \frac{Val}{2m}) \\ &\leq m * W(K) + (m-1) * \frac{Val}{2m} \\ &< m * W(K) + \frac{Val}{2} \\ &< m * \frac{Val}{2m} + \frac{Val}{2} \\ &< \frac{Val}{2} + \frac{Val}{2} \\ &< Val(!) \end{aligned}$$

- d) Știm că $OPT \leq \frac{Val}{m}$ (cazul unei egalități ar implica un "spread" perfect). Am demonstrat la punctul c) că $ALG \geq \frac{Val}{2m}$. Rezultă deci că $2 * ALG \geq \frac{Val}{m} \geq OPT$; Iar în final avem relația dorită: **$ALG \geq \frac{1}{2} * OPT$**
- e) * $m = 2, n = 4$; Cadourile au valorile: 2, 3, 1, 6. ¹ Soluția optimă implică faptul că primul copil primește cadoul 4 iar cel de-al doilea cadourile 1, 2, 3. În acest caz ambii copii primesc cadouri în valoare de 6 unități. Algoritmul nostru va rezulta în alocarea primului copil cadourile 1, 3, celui de-al doilea copil cadoul 2 iar cadoul 4 oricăruia dintre cei doi. În orice caz, copilul cel mai vitregit primește cadouri în valoare de doar 3 unități.

¹Acest exemplu are o scăpare: nu respectă restricția $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$

Algoritmi Avansați

Seminar 6

Gabriel Majeri

1 Introducere

În acest seminar vom discuta câteva tipuri de algoritmi care nu se încadrează în tiparele obișnuite de rezolvare ale problemelor, dar care pot fi extrem de utili și versatili în unele situații.

2 Algoritmi probabiliști

O metodă de a rezolva mai eficient unele probleme dificile din punct de vedere computațional este să ne folosim de *șansă*. Astfel obținem algoritmi „probabiliști” / „randomizați” [1].

Un scurt istoric

În cadrul Proiectului Manhattan, cercetătorii Stanislaw Ulam și John von Neumann aveau nevoie să rezolve niște probleme foarte complicate legate de difuzia neutronilor. Așa că au venit cu ideea să modeleze pe calculator o simulare a reacțiilor care au loc în nucleul unei arme de fisie nucleară, ca să înțeleagă ce se întâmplă fără să mai fie nevoie de un experiment fizic. Astfel a fost creată și folosită pentru prima dată *metoda Monte Carlo* [2, 3]: modelarea pe calculator a unei probleme teoretice pentru a o rezolva numeric.

Generarea numerelor aleatoare

Primul pas în implementarea unui algoritm probabilist este să avem acces la o sursă de numere aleatoare [4].

Calculatoarele digitale obișnuite sunt mașinării *deterministe*, care nu pot produce numere cu adevărat aleatoare. Un calculator poate folosi un **generator de numere pseudo-aleatoare** (PRNG [5]) pentru a genera un șir de numere care aparent nu au nicio legătură unul cu celălalt, plecând de la un număr dat (denumit *seed*); dar dacă numărul inițial este dezvăluit, se pot determina

toate numerele care urmează. Din acest motiv, dacă aveți nevoie să generați valori aleatoare într-un context sensibil (e.g. în criptografie), recomandarea este să utilizați un **generator de numerele pseudo-aleatoare sigur din punct de vedere criptografic** (CSPRNG [6]).

2.1 Algoritmi Monte Carlo

Un algoritm de tip Monte Carlo se execută pentru un anumit număr de pași și ne oferă o soluție care este doar *probabil* corectă; cu cât lăsăm algoritmul să ruleze mai mult, cu atât ne apropiem de soluția optimă sau o aproximăm mai bine [7].

Un exemplu de astfel de algoritm este un algoritm bazat pe programarea genetică; cu cât lăsăm să ruleze mai mult programul, cu atât soluțiile obținute sunt din ce în ce mai bune.

2.2 Algoritmi Las Vegas

Un algoritm de tip Las Vegas s-ar putea să nu obțină o soluție validă după o execuție, și să fie nevoie să-l rulăm de mai multe ori. Dar în momentul în care a obținut o soluție, aceasta este sigur cea corectă [8].

Un exemplu de algoritm de acest tip este cel care rezolvă problema așezării a 8 regine pe tabla de șah alegând aleator unde să pună o regină pe următorul rând; există riscul ca o soluție pe care a început să o construiască să nu fie corectă și să fie obligat să o ia de la capăt, dar în momentul în care a ajuns la final, soluția este sigur bună.

Vedere de ansamblu

Tabelul de mai jos compară cele două familii principale de algoritmi probabilistici, arătând cum una este „duală” celeilalte:

	Timp de execuție	Corectitudine rezultat
Monte Carlo	Determinist	Probabilistă
Las Vegas	Probabilist	Deterministă

Exerciții

1. Dacă aveți la dispoziție o funcție `random()` care generează un număr real în intervalul $[0, 1]$ (cu o distribuție uniformă), cum puteți obține un număr real în intervalul $[a, b]$ (cu o distribuție uniformă pe $[a, b]$)?

Soluție: Fie x un număr din intervalul $[0, 1]$, pe care l-am obținut prin funcția `random()`. Înmulțindu-l cu $b - a$, obținem un nou număr $(b - a)x$, care se află în intervalul $[0, b - a]$. Adunând valoarea lui a la acesta, obținem $a + (b - a)x$, care este în intervalul $[a, b]$.

Această formulă este utilă în limbajele care nu oferă în biblioteca standard o funcție pentru a genera un număr aleator dintr-un interval arbitrar $[a, b]$, ci doar din $[0, 1]$, [cum se întâmplă în cazul limbajului JavaScript](#). \square

2. Dacă aveți la dispoziție o funcție `biased_random()` care generează aleator 0 sau 1, dar cu o probabilitate inegală p ($\neq 50\%$), puteți să definiți o funcție care să vă genereze 0 sau 1 cu probabilitate 50%–50%?

Soluție: Da, putem construi o astfel de funcție.

Observația de la care plecăm este că, dacă apelăm de două ori funcția `biased_random()`, singurele valori pe care le putem obține 00, 01, 10 sau 11. Calculând probabilitatea pentru fiecare dintre aceste situații, obținem

X	00	01	10	11
$\mathbb{P}(X)$	$(1 - p)^2$	$p(1 - p)$	$(1 - p)p$	p^2

unde am notat cu p probabilitatea ca un apel al funcției `biased_random()` să returneze valoarea 1. Există o simetrie în tabel: $p(1 - p) = (1 - p)p$; deci $\mathbb{P}(01) = \mathbb{P}(10)$.

```
def unbiased_random():
    while True:
        x = biased_random()
        y = biased_random()

        # Suntem în cazul 00 sau 11, care nu ne ajută
        if x == y:
            continue
        else:
            if x == 0:
                # Cazul 01
                return 0
            else:
                # Cazul 10
                return 1
```

Remarcăm că această implementare este un *algorithm probabilist de tip Las Vegas*; rezultatul obținut respectă întotdeauna cerința (este 0 sau 1 cu pro-

babilitate 50%–50%), dar nu putem spune de dinainte de câte ori trebuie să se execute blocul `while` înainte de a obține un rezultat valid. \square

3. În acest exercițiu ne propunem să construim un algoritm probabilist care să ne ajute să determinăm valoarea lui π .

1. Care este aria cercului unitate?
2. Care este aria pătratului definit de punctele $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ și $(-1, 1)$?
3. Dacă aleg aleator un punct în pătratul descris mai sus, care este probabilitatea ca el să fie în interiorul cercului unitate?
4. Dacă am un punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cum pot verifica dacă acesta se află în interiorul cercului unitate?
5. Avem următorul algoritm: luăm aleator perechi de numere din $[-1, 1]$ (adică puncte din pătratul descris mai sus). Dacă punctul descris de această pereche de numere este în interiorul cercului unitate îl contorizăm, altfel îl ignorăm. La final, împărțim numărul de puncte care au căzut în interiorul cercului la numărul total de puncte luate în considerare. Ce valoare aproximează acest raport?
6. Ce fel de algoritm este cel descris anterior? Monte Carlo sau Las Vegas?

Soluție:

1. Aria cercului unitate $A_{\circ} = \pi \cdot 1^2 = \pi$.
2. Laturile definite de acele puncte au toate lungimea $|1 - (-1)| = 2$, deci pătratul corespunzător are aria $A_{\square} = 2^2 = 4$.
3. Având în vedere că cercul unitate este conținut în pătratul descris anterior, probabilitatea în acest caz va fi raportul dintre aria cercului și aria pătratului, $\mathbb{P}(X) = A_{\circ}/A_{\square} = \pi/4$.
4. Cel mai ușor este să folosim formula pentru distanța Euclidiană față de origine, $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, și să verificăm că $d \leq 1$.
5. Acest raport aproximează probabilitatea ca un punct aleator din pătratul descris anterior să fie în cercul unitate. Cu alte cuvinte, dacă n este numărul de puncte din eșantion, avem că

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{nr. puncte în cercul unitate}}{\text{nr. total de puncte}} = \frac{A_{\circ}}{A_{\square}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dacă înmulțim rezultatul cu 4, avem o metodă probabilistă de a calcula numeric valoarea lui π .

6. Algoritmul este unul de tip Monte Carlo. Cu cât rulăm pentru mai mult timp algoritmul și eșantionăm mai multe puncte, cu atât crește precizia rezultatului nostru.

□

3 Programare liniară și algoritmul simplex

Unele dintre cele mai simple tipuri de probleme de optimizare (și cele mai des întâlnite în practică) sunt cele de *programare liniară*¹. Din fericire, pentru acestea avem o interpretare vizuală destul de clară (cel puțin, în cazul 2D) și un algoritm eficient de rezolvare (metoda simplex).

Pentru a înțelege cum arată aceste probleme și cum le putem rezolva, vă recomand să vă uitați la [9], la capitolul 13 din [10] (notele de curs sunt disponibile [aici](#)), la această lecție [11] dintr-un curs de la MIT sau la acest video [12].

¹În acest context, la fel ca în cazul „programării dinamice”, termenul de „programare” se referă la o metodă tabelară de rezolvare a unei probleme, nu neapărat la programare/dezvoltare software.

Referințe

- [1] David Rydeheard, *Probabilistic (Randomized) algorithms*, URL: <http://www.cs.man.ac.uk/~david/courses/advalgorithms/probabilistic.pdf>.
- [2] Roger Eckhardt, „Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo method”, în *Los Alamos Science* (15 1987), pp. 131–137, URL: <https://permalink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-UR-88-9068>.
- [3] Wikipedia contributors, *Monte Carlo method*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method.
- [4] Wikipedia contributors, *Random number generation*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Random_number_generation.
- [5] Wikipedia contributors, *Pseudorandom number generator*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudorandom_number_generator.
- [6] Wikipedia contributors, *Cryptographically-secure pseudorandom number generator*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cryptographically-secure_pseudorandom_number_generator.
- [7] Wikipedia contributors, *Monte Carlo algorithm*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_algorithm.
- [8] Wikipedia contributors, *Las Vegas algorithm*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Las_Vegas_algorithm.
- [9] Trefor Bazett, *Intro to Linear Programming and the Simplex Method*, URL: <https://www.youtube.com/watch?v=K7TL5NMlKIk>.
- [10] Georgia Tech, *Computability, Complexity & Algorithms*, URL: <https://www.udacity.com/course/computability-complexity-algorithms--ud061>.
- [11] MIT OpenCourseWare, *15. Linear Programming: LP, reductions, Simplex*, URL: <https://www.youtube.com/watch?v=WwMz2fJwUCg>.
- [12] The Organic Chemistry Tutor, *Linear Programming*, URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Bzzqx1F23a8>.

Algoritmi avansați

Seminar 1 (săpt. 1 și 2)

1. Fie punctele $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

- a) Fie $C = (a, 7, 8)$. Arătați că există a astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare și pentru a astfel determinat calculați raportul $r(A, B, C)$.
- b) Determinați punctul P astfel ca raportul $r(A, P, B) = 1$.
- c) Dați exemplu de punct Q astfel ca $r(A, B, Q) < 0$ și $r(A, Q, B) < 0$.

Soluție.

a) Condiția de coliniaritate a punctelor A, B, C este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{BC} . Au loc relațiile:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BC} = (a - 4, 2, 2).$$

Vectorii dați sunt proporționali dacă și numai dacă $a - 4 = 2$, deci $a = 6$. De fapt, dreapta AB este direcționată de vectorul $(1, 1, 1)$ (și de orice vector proporțional cu acesta).

În acest caz, avem $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 2, 2)$, deci

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC},$$

adică $r(A, B, C) = \frac{3}{2}$ (raportul $r(A, B, C)$ este acel scalar r pentru care are loc relația $\overrightarrow{AB} = r \overrightarrow{BC}$).

b) Condiția $r(A, P, B) = 1$ este echivalentă cu $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$. Punctul P care verifică această condiție este mijlocul segmentului $[AB]$, deci $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2})$.

c) Semnele rapoartelor indică faptul că (i) B nu este între A și Q ; (ii) Q nu este între A și B . Trebuie deci ca A să fie situat între Q și B . Un astfel de punct este $Q = (0, 1, 2)$ (l-am ales ca fiind $A - (1, 1, 1)$). Au loc relațiile

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BQ} = (-4, -4, -4), \quad r(A, B, Q) = -\frac{3}{4},$$

$$\overrightarrow{AQ} = (-1, -1, -1), \quad \overrightarrow{QB} = (4, 4, 4), \quad r(A, Q, B) = -\frac{1}{4},$$

deci sunt verificate cerințele din enunț.

2. Fie punctele $P = (1, -1), Q = (3, 3)$.

- a) Calculați valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată \overrightarrow{PQ} și punctul de testare $O = (0, 0)$.
- b) Fie $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui α pentru care punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

Soluție.

a) Conform teoriei,

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

În exemplu avem:

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \text{ (dezvoltare după ultima coloană)}.$$

Se poate verifica și pe un desen că O este la stânga muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

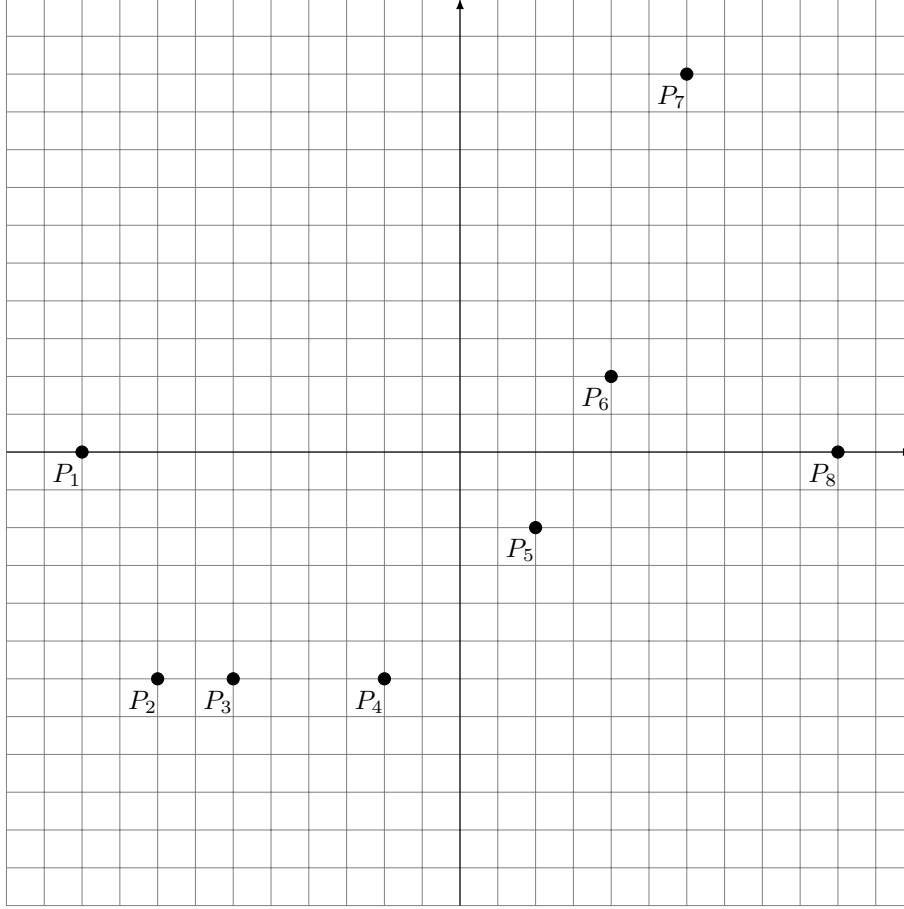
b) Calculăm, pentru un α , valoarea $\Delta(P, Q, R_\alpha)$:

$$\Delta(P, Q, R_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 3 & -\alpha \end{vmatrix} = 6(1 - \alpha).$$

Punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R_\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$. Acest lucru poate fi verificat și pe desen, punctul R_α este variabil pe cea de-a doua bisectoare (de ecuație $x + y = 0$), iar pentru $\alpha > 1$ acest punct este situat în dreapta muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

3. Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_9\}$, unde $P_1 = (-5, 0)$, $P_2 = (-4, -3)$, $P_3 = (-3, -3)$, $P_4 = (-1, -3)$, $P_5 = (1, -1)$, $P_6 = (2, 1)$, $P_7 = (3, 5)$, $P_8 = (5, 0)$. Detaliați cum evoluează lista \mathcal{L}_i a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew.

Soluție.



Lista \mathcal{L}_i evoluează astfel:

P_1P_2

$P_1P_2P_3$

$P_1P_2\mathbf{P_3}P_4$ // este eliminat P_3 , deoarece P_2, P_3, P_4 coliniare (nu viraj la stânga)

$P_1P_2P_4$

$P_1P_2P_4P_5$

$P_1P_2P_4P_5P_6$

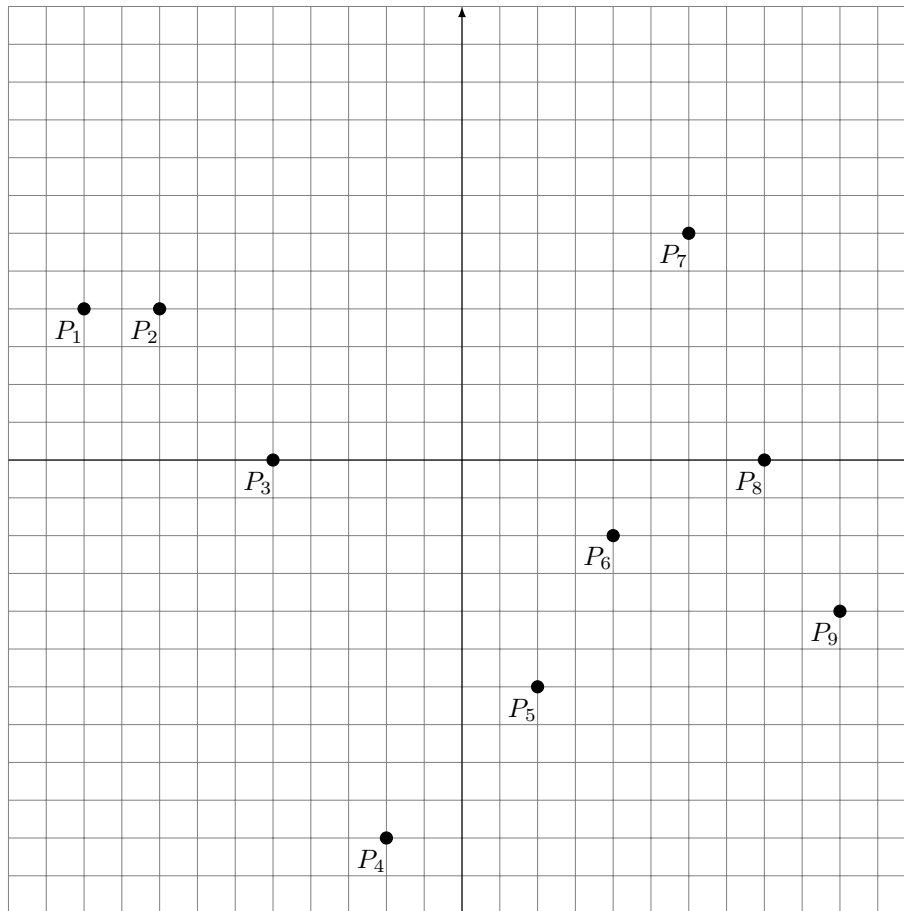
$P_1P_2P_4P_5P_6P_7$

$P_1P_2P_4\mathbf{P_5P_6P_7}P_8$ // punctele P_7, P_6, P_5 sunt eliminate în această ordine

$P_1P_2P_4P_8$ // lista finală (\mathcal{L}_i) a vârfurilor care determină marginea inferioară

4. Dați un exemplu de mulțime \mathcal{M} din planul \mathbb{R}^2 pentru care, la final, \mathcal{L}_i are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui \mathcal{L}_i este egal cu 6 (\mathcal{L}_i este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificați!

Soluție.



Lista \mathcal{L}_i are la final 3 elemente (P_1, P_4, P_9).

Numărul maxim de elemente este 6: $P_1P_4P_5P_6P_7P_8$ (la adăugarea lui P_8 în listă).

Obs. Numărul maxim de elemente după verificări ale virajelor este 5: $P_1P_4P_5P_6P_7$.

5. *Discutați un algoritm bazat pe paradigma Divide et impera pentru determinarea acoperirii convexe. Analizați complexitatea-timp.*

Soluție. Complexitatea-timp este $O(n \log n)$. O descriere a algoritmului și a analizei complexității poate fi găsită în [survey-ul \[Lee & Preparata, 1984\]](#).