

# Análise dos efeitos de comprimento e amplitude angular no mecanismo de pêndulo simples

Alunos: Maria Ramos

Disciplina: Planejamento de Experimentos

Professor: Dr. Danilo Valadares

UFAM 2025

## 1 Fundamentação Teórica

O pêndulo simples é um dos sistemas físicos mais clássicos em experimentação. Sua dinâmica, sob pequenas oscilações, é descrita pela seguinte relação teórica:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}.$$

Para esse modelo é imprescindível a condição de ângulos pequenos, pois  $\sin(A) \approx A$  (em radianos). Em ângulos maiores o período passa a depender ligeiramente da amplitude máxima do ângulo. Por exemplo, um termo de correção comum é:

$$T(A) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{16}A^2 + \frac{11}{3072}A^4 + \cdots \right].$$

O presente experimento tem como objetivo analisar quantitativamente os efeitos do comprimento do pêndulo e da amplitude angular de oscilação sobre o período ao quadrado ( $T^2$ ), verificando:

1. Se o aumento no comprimento produz aumento significativo em  $T^2$ , conforme previsto pela teoria do pêndulo simples.
2. Se amplitudes angulares de  $3^\circ$ ,  $5^\circ$  e  $8^\circ$ , ambas consideradas pequenas, produzem diferença detectável em  $T^2$ .
3. Se existe interação entre comprimento e amplitude angular, isto é, se o efeito do ângulo depende do comprimento.

A arquitetura básica do experimento consistiu em um delineamento inteiramente casualizado (DIC), uma vez que a sequência de medidas foram feitas de forma aleatória combi-

nando todos os níveis dos fatores. Essa combinação por sua vez geram tratamentos com estrutura fatorial, aqui com combinações de 2 comprimentos x 3 ângulos.

Desta forma, a experimentação se dá em condições uniformes dissipando os efeitos de fatores externos não controlados e pela necessidade crucial de investigar se eles atuam de forma independente (efeitos principais) ou conjunta (interação) sobre a variável resposta física transformada  $T^2$ .

## 2 Planejamento Experimental

### 2.1 Modelo Estatístico Proposto

$$T_{ijk}^2 = \mu + C_i + A_j + (CA)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

com  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ .

### 2.2 Formulação das hipóteses ( $H_0$ e $H_1$ )

**Comprimento:**  $H_0 : C_1 = C_2$  vs  $H_1 : C_1 \neq C_2$

**Ângulo:**  $H_0 : A_1 = A_2 = A_3$  vs  $H_1$ : pelo menos um  $A_j$  difere

**Interação:**  $H_0$ : efeito do comprimento é constante para todos os ângulos

$H_1$ : efeito do comprimento depende do ângulo

### 2.3 Definição dos fatores e seus níveis

O termo  $4\pi^2$  pode ser tratado com uma constante, tendo uma relação linear com o comprimento L. Como é de interesse identificar como o comprimento (C) e o ângulo (A) contribuem para o período ao quadrado ( $T^2$ ), são adotados os seguinte fatores e níveis:

1. Comprimento do fio (L):  $C_1 = 560$  e  $C_2 = 240$  em centímetros
2. Ângulo de oscilação (A):  $A_1 = 3$ ,  $A_2 = 5$ ,  $A_3 = 8$  em graus

As unidades experimentais consistiram em um sistema de pêndulo simples montado em tripé, utilizando fio inextensível e um corpo cilíndrico de massa uniforme. Para a medição do tempo, utilizou-se um cronômetro óptico do tipo sensor fotoelétrico (*light gate*), acoplado a um contador digital, capaz de detectar a interrupção do feixe de luz pelo corpo oscilante e registrar automaticamente o tempo em segundos. Esse sistema permitiu a marcação do tempo correspondente a meia oscilação do pêndulo ( $T/2$ ), reduzindo erros associados ao tempo de reação humana. Todos os elementos do arranjo experimental podem ser visualizados na Figura 1.



Figura 1: Construção do Experimento.

## 2.4 Procedimentos de aleatorização

Para a coleta dos dados foram aleatorizadas 5 réplicas para cada combinação dos níveis dos fatores. Sendo assim 5 réplicas para 6 tratamentos (2x3 níveis), resultando em 20 observações. A quantidade de medidas foi escolhido conforme apresentado em [1]. A ordem do sorteio pode ser vista na Tabela 1.

A Tabela 1 apresenta a ordem aleatória de execução.

Tabela 1: Plano de Aleatorização do Experimento Fatorial  $2 \times 3$ 

Ordem de Execução	Comprimento (L)	Ângulo (A)	Tratamento
1	L1	A <sub>2</sub>	L1_A <sub>2</sub>
2	L2	A <sub>2</sub>	L2_A <sub>2</sub>
3	L1	A <sub>2</sub>	L1_A <sub>2</sub>
4	L1	A <sub>3</sub>	L1_A <sub>3</sub>
5	L2	A <sub>3</sub>	L2_A <sub>3</sub>
6	L1	A <sub>1</sub>	L1_A <sub>1</sub>
7	L2	A <sub>2</sub>	L2_A <sub>2</sub>
8	L1	A <sub>1</sub>	L1_A <sub>1</sub>
9	L2	A <sub>1</sub>	L2_A <sub>1</sub>
10	L1	A <sub>3</sub>	L1_A <sub>3</sub>
11	L1	A <sub>2</sub>	L1_A <sub>2</sub>
12	L2	A <sub>1</sub>	L2_A <sub>1</sub>
13	L2	A <sub>2</sub>	L2_A <sub>2</sub>
14	L1	A <sub>3</sub>	L1_A <sub>3</sub>
15	L1	A <sub>1</sub>	L1_A <sub>1</sub>
16	L1	A <sub>2</sub>	L1_A <sub>2</sub>
17	L2	A <sub>1</sub>	L2_A <sub>1</sub>
18	L2	A <sub>1</sub>	L2_A <sub>1</sub>
19	L1	A <sub>3</sub>	L1_A <sub>3</sub>
20	L2	A <sub>3</sub>	L2_A <sub>3</sub>
21	L1	A <sub>1</sub>	L1_A <sub>1</sub>
22	L2	A <sub>3</sub>	L2_A <sub>3</sub>
23	L2	A <sub>3</sub>	L2_A <sub>3</sub>
24	L1	A <sub>2</sub>	L1_A <sub>2</sub>
25	L2	A <sub>1</sub>	L2_A <sub>1</sub>
26	L2	A <sub>2</sub>	L2_A <sub>2</sub>
27	L1	A <sub>3</sub>	L1_A <sub>3</sub>
28	L1	A <sub>1</sub>	L1_A <sub>1</sub>
29	L2	A <sub>3</sub>	L2_A <sub>3</sub>
30	L2	A <sub>2</sub>	L2_A <sub>2</sub>

### 3 Coleta de Dados

O comprimento do fio foi ajustado entre os níveis definidos no experimento, o ângulo de soltura foi controlado manualmente, enquanto o cronômetro registrava o tempo. A liberação do pêndulo não foi travada mecanicamente, sendo realizada de forma manual, o que pode introduzir pequenas variações entre as repetições.

Na Tabela 2 são apresentados os valores coletados experimentalmente para cada combinação entre comprimento do fio e ângulo de liberação, que foram utilizados nas análises estatísticas.

Tabela 2: Dados Experimentais - Valores Reais e Meios Períodos Medidos

$L$ (m)	$A$ (rad)	$T/2$ (s)
0.560	0.08726646	0.783
0.240	0.08726646	0.492
0.560	0.08726646	0.790
0.560	0.13962634	0.779
0.240	0.13962634	0.501
0.560	0.05235988	0.778
0.240	0.08726646	0.505
0.560	0.05235988	0.803
0.240	0.05235988	0.484
0.560	0.13962634	0.772
0.560	0.08726646	0.780
0.240	0.05235988	0.506
0.240	0.08726646	0.506
0.560	0.13962634	0.758
0.560	0.05235988	0.787
0.560	0.08726646	0.776
0.240	0.05235988	0.488
0.240	0.05235988	0.445
0.560	0.13962634	0.769
0.240	0.13962634	0.485
0.560	0.05235988	0.797
0.240	0.13962634	0.479
0.240	0.13962634	0.473
0.560	0.08726646	0.789
0.240	0.05235988	0.503
0.240	0.08726646	0.488
0.560	0.13962634	0.776
0.560	0.05235988	0.801
0.240	0.13962634	0.492
0.240	0.08726646	0.493

## 4 Análise Estatística Completa

Inicialmente, os dados experimentais foram convertidos para unidades do Sistema Internacional (SI), transformando-se o comprimento para metros e o ângulo para radianos, a fim de garantir consistência física e facilitar a interpretação dos resultados. Em seguida, procedeu-se à exploração gráfica dos dados por meio de boxplots, apresentados na Figura 2, com o objetivo de identificar valores discrepantes e avaliar o comportamento das observações em cada tratamento.

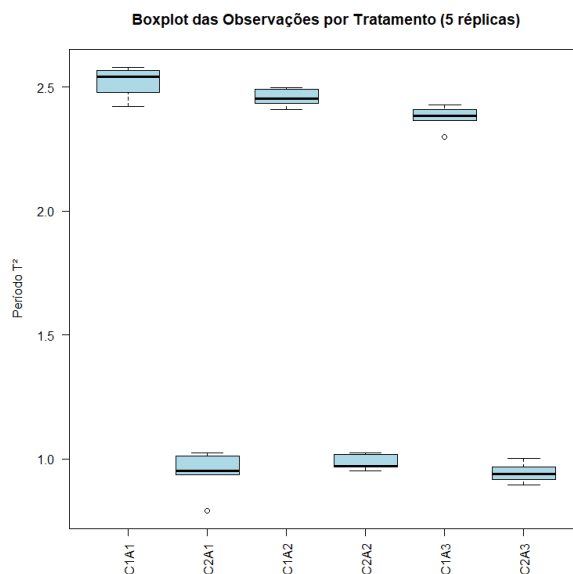


Figura 2: Boxplot das Observações por Tratamento

Seguindo recomendações de Montgomery (2017), valores claramente incompatíveis com o comportamento físico esperado foram removidos. Removeu-se então cada um dos outliers referente aos 2 tratamentos ilustrados na Figura 2 e uma medida dos demais tratamentos de forma aleatória, de forma a manter o experimento balanceado.

Dessa maneira, cada um dos 6 tratamentos passou a ter 4 réplicas, totalizando 24 observações para análise, mantendo 80% das observações originais. Então, foi construído um novo gráfico boxplot para conferência (ver Figura 3).

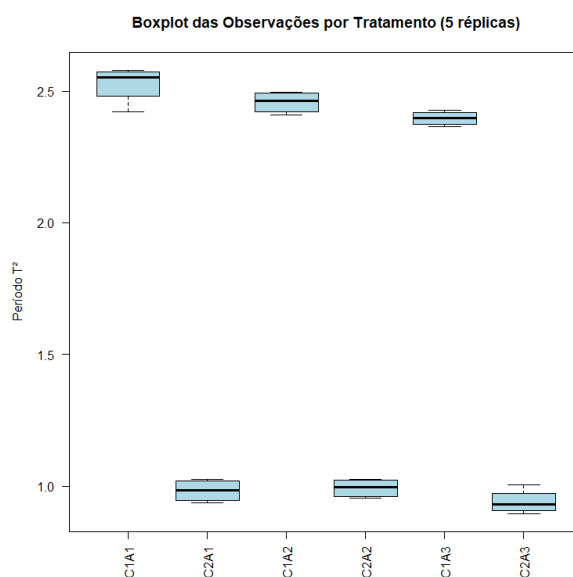


Figura 3: Boxplot Balanceado e Sem Outliers

Antes da aplicação dos modelos inferenciais, foi realizada uma análise descritiva das mé-

dias de  $T^2$  por nível dos fatores, a fim de visualizar tendências gerais dos dados. Observou-se aumento consistente de  $T^2$  com o aumento do comprimento do fio, enquanto as variações entre os níveis de ângulo foram mais sutis entre os tratamentos avaliados.

Tabela 3: Estatísticas descritivas por tratamento

Tratamento	$n$	Média $T$	Comprimento	DP( $T$ )	Média $T^2$	DP( $T^2$ )
$C_1A_1$	4	1.59	0.0500	0.0229	2.53	0.0723
$C_2A_1$	4	0.990	0.0440	0.0217	0.981	0.0431
$C_1A_2$	4	1.57	0.0280	0.0137	2.46	0.0429
$C_2A_2$	4	0.996	0.0360	0.0182	0.991	0.0362
$C_1A_3$	4	1.55	0.0200	0.00879	2.40	0.0272
$C_2A_3$	4	0.969	0.0560	0.0241	0.939	0.0470

Para avaliar os efeitos dos fatores sobre o período ao quadrado ( $T^2$ ), foi realizada uma análise de variância (ANOVA), considerando o comprimento e o ângulo do fio como fatores. A análise foi conduzida com base no modelo proposto na Eq. 1, incluindo um intercepto comum, os efeitos principais de comprimento e ângulo, bem como o termo de interação entre esses fatores, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4: Tabela de ANOVA do modelo

Fonte de variação	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Comprimento	1	13.311	13.311	6056.821	$< 2 \times 10^{-16}$
Ângulo	2	0.031	0.015	6.989	0.00567
Comprimento:Ângulo	2	0.009	0.005	2.159	0.14436
Residuals	18	0.040	0.002	—	—

Montgomery (2017) destaca que experimentos com baixa replicação apresentam estimativas de variância menos estáveis, o que aumenta a probabilidade de erros Tipo I. Assim, recomenda-se níveis de significância mais conservadores. Portanto, foi utilizado um nível de 99% de confiança para todas as análises.

Na Tabela 4, considerando-se o nível de significância de 1%, o comprimento e o ângulo mostraram-se estatisticamente significativos, enquanto o termo de interação não apresentou significância estatística. Dessa forma, rejeita-se  $H_0$  para os fatores comprimento e ângulo, mas não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar  $H_0$  para o termo de interação.

Logo, o modelo proposto dispensa o termo de interação, sendo o modelo final da forma:

$$T_{ijk}^2 = \mu + C_i + A_j + \varepsilon_{ijk} \quad (2)$$

Podemos demonstrar o comportamento da interação também de forma gráfica, podendo ser vista na Figura 4. O menor ângulo ( $A_1$ ) apresentou diferença entre as linhas, isto se dá pela maior dificuldade em soltar o objeto, enquanto os maiores ( $A_2$  e  $A_3$ ) demonstram paralelismo, indício de não interação com distância maior de soltura.

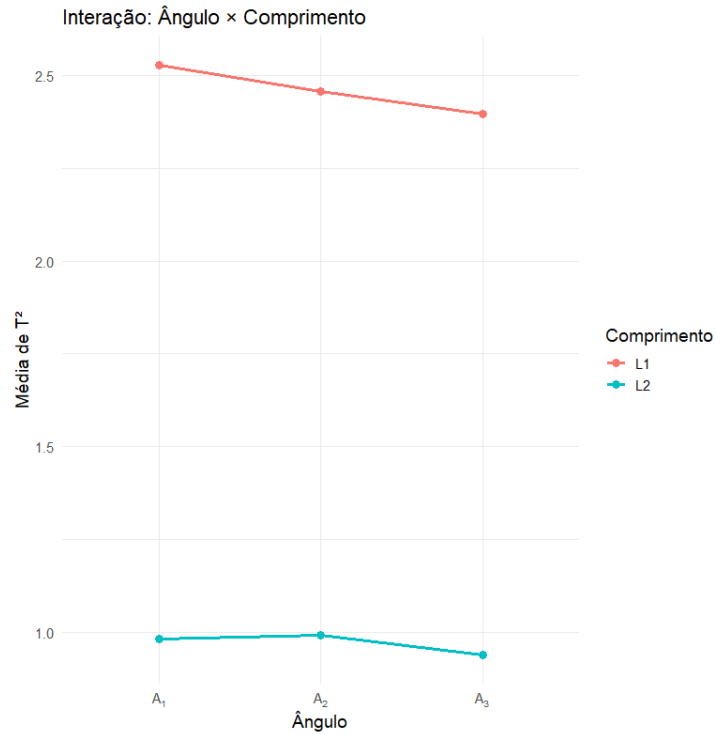


Figura 4: Gráfico do  $T^2$  dada a Interação

A análise de variância (ANOVA) pressupõe independência das observações, normalidade dos resíduos e homogeneidade das variâncias entre os grupos. Esses pressupostos foram avaliados por meio da inspeção gráfica dos resíduos.

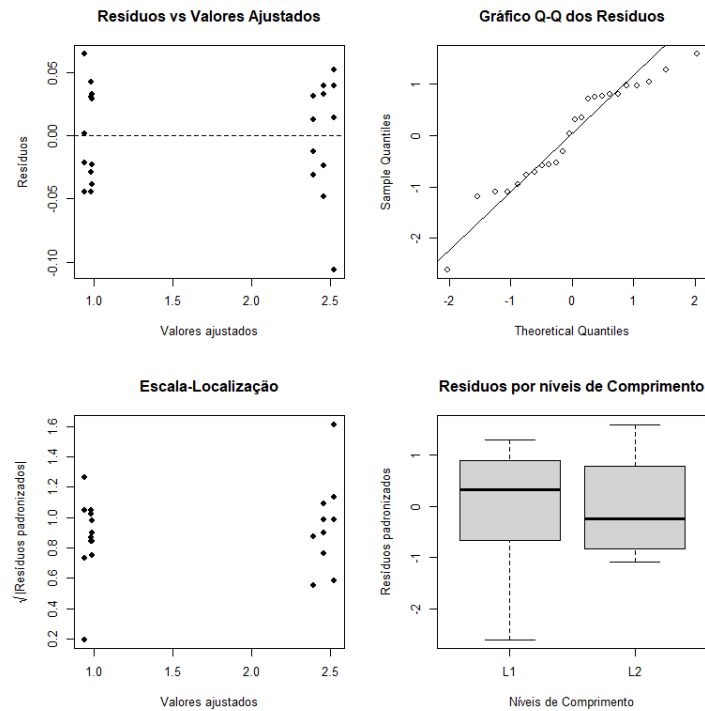


Figura 5: Gráficos dos Resíduos



Os gráficos de diagnóstico sugerem que o modelo ajustado é adequado de forma que  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ . O teste de Shapiro-Wilk reornou um valor significativo a um nível de confiança de 99% com  $p = 0.1484$ , o gráfico de resíduos por valores ajustados está de forma equiforme em torno o zero, o qqplot indica uma linearidade. Apesar de um aumento de variabilidade dos resíduos, não há nada que indique falta de ajuste grave.

Para modelar uma regressão linear múltipla foi necessário transformar os níveis dos efeitos de fator para numérico, a fim de estudar o comportamento empírico de  $T^2$  como função das variáveis experimentais.

O ajuste do modelo de regressão permitiu estimar os coeficientes associados às variáveis explicativas, possibilitando a construção de uma equação empírica para a predição de  $T^2$  em função do comprimento do fio e do ângulo de liberação, sugerida na Equação 2.

Assim, o modelo de regressão linear ajustado pode ser expresso por:

$$\widehat{T^2} = -0,0537 + 4,6545 L - 0,9958 A$$

em que  $L$  representa o comprimento do fio e  $A$  o ângulo de liberação, nas unidades utilizadas no experimento.

Este teve um elevado valor explicativo com coeficiente de determinação  $R^2 = 0,9963$  e  $R^2$  ajustado de 0,9960, indicando excelente capacidade de descrever a variabilidade observada em  $T^2$ . A análise de variância do modelo indicou que tanto o comprimento ( $p < 2,2 \times 10^{-16}$ ) quanto o ângulo ( $p = 0,0016$ ) apresentaram efeitos estatisticamente significativos ao nível de 1%.

O coeficiente associado ao comprimento foi positivo, indicando aumento de  $T^2$  com o aumento de  $L$ , mas indicou um coeficiente negativo associado ao ângulo, esse resultado não representa o comportamento físico esperado de um pêndulo ideal. Teoricamente, para pequenas oscilações o período é aproximadamente independente do ângulo, enquanto para amplitudes maiores tende a aumentar levemente. Dessa forma, o sinal negativo observado é atribuído a limitações experimentais, principalmente à dificuldade de padronização da liberação do pêndulo em diferentes ângulos, e não a um efeito físico real.

Na Figura 6 é mostrado visualmente a relação linear do ajuste dos dados observados com relação aos preditos.

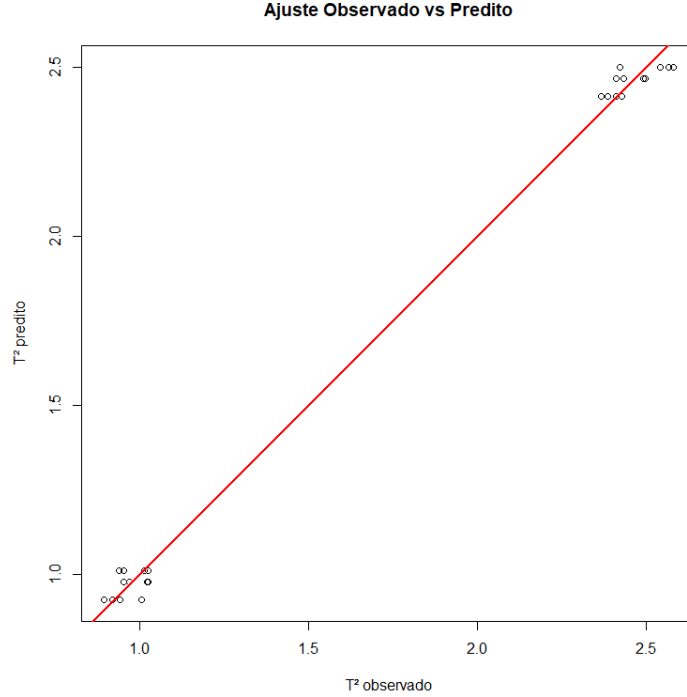


Figura 6: Gráficos dos Valores Observados vs Preditos

De forma geral, os resultados experimentais apresentaram boa concordância com o modelo físico esperado para o pêndulo simples, especialmente quanto à dependência do período em relação ao comprimento do fio. Uma vez que a medida do tempo foi feita com um sensor de alta precisão, as discrepâncias observadas em relação ao ângulo foram atribuídas principalmente a limitações experimentais, não comprometendo a validade geral do experimento.

#### 4.1 Estimativa da aceleração da gravidade (análise complementar)

Como análise complementar, ajustou-se um modelo físico simples baseado na relação teórica do pêndulo simples,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} C,$$

considerando intercepto nulo, como previsto teoricamente. Reescrevendo a expressão, tem-se:

$$T^2 = r C, \quad \text{com } r = \frac{4\pi^2}{g},$$

o que permite interpretar  $r$  como o coeficiente angular da relação linear entre  $T^2$  e  $C$ . Assim, foi ajustado um modelo de regressão linear sem intercepto, relacionando  $T^2$  com o comprimento do fio.

O coeficiente estimado do modelo foi

$$\hat{r} = 4,339,$$

o que permitiu estimar a aceleração da gravidade por meio de

$$\hat{g} = \frac{4\pi^2}{\hat{r}} = 9,10 \text{ m/s}^2.$$

O valor encontrado é próximo do valor adotado no laboratório local ( $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ ), sendo a diferença atribuída a erros experimentais, incertezas de medida e às aproximações do modelo teórico, já que o pêndulo real não é perfeitamente ideal.

## 5 Conclusões e Recomendações

Os resultados obtidos neste experimento mostraram boa concordância com o comportamento físico esperado para o pêndulo simples. O comprimento do fio apresentou efeito altamente significativo sobre o período ao quadrado ( $T^2$ ), confirmando a relação teórica de proporcionalidade linear entre  $T^2$  e o comprimento do pêndulo também na regressão. Em um pêndulo ideal, o período é praticamente independente do ângulo para pequenas amplitudes. Assim, a significância estatística observada para o ângulo é atribuída principalmente a efeitos experimentais, como pequenas variações na forma de liberação do pêndulo, atrito e incertezas de medida, e não a uma dependência real de  $T^2$  em relação à amplitude.

O uso do delineamento inteiramente casualizado (DIC) contribuiu para reduzir possíveis vieses sistemáticos, pois a aleatorização da ordem das medições ajudou a distribuir efeitos externos não controlados (como pequenas variações ambientais e de equipamento) de forma aproximadamente homogênea entre os tratamentos.

Além disso, a modelagem dos fatores tanto como variáveis categóricas (na ANOVA) quanto como variáveis numéricas (na regressão linear) permitiu duas interpretações complementares: uma estatística (comparação entre níveis) e outra física (usando a relação teórica  $T^2 \propto L$  para estimar a aceleração da gravidade), enriquecendo a compreensão do comportamento do sistema.

Como recomendação para trabalhos futuros, sugere-se o uso de um sistema de liberação automática do pêndulo a fim de reduzir o erro humano associado à soltura manual, podem garantir reprodutibilidade muito maior da amplitude inicial.

## Referências

- [1] Experimento A8: Pêndulo Simples e Pêndulo Físico. Departamento de Física – CCE. Universidade Federal do Espírito Santo, 2021. Disponível em: <[https://fisica.ufes.br/sites/fisica.ufes.br/files/field/anexo/experiencia\\_a8\\_-\\_pendulo\\_simples\\_e\\_pendulo\\_fisico.pdf](https://fisica.ufes.br/sites/fisica.ufes.br/files/field/anexo/experiencia_a8_-_pendulo_simples_e_pendulo_fisico.pdf)>. Acesso em: 04/12/2025.
- [2] MANUAL DE LABORATÓRIO DE FÍSICA GERAL I: MECÂNICA. Departamento de Física, Universidade Federal do Amazonas.
- [3] MONTGOMERY, D. C. *Design and Analysis of Experiments*. 9th ed.

## Apêndice A - Código R utilizado para análise

```
library(dplyr)

# Definir os fatores e níveis
comprimento <- c("L1","L2") # em metros
angulo <- c("theta1", "theta2","theta3") # em graus
replicas <- 5 # número de réplicas por combinação

# Criar todas as combinações possíveis
dados3 <- expand.grid(
  Replica = 1:replicas,
  Comprimento = comprimento,
  Angulo = angulo
)

dados3$Tratamento <- paste(dados3$Comprimento, dados3$Angulo, sep = "_")
dados3$Tratamento <- factor(dados3$Tratamento, levels = unique(dados3$Tratamento))

# Visualizar a estrutura inicial
print("Estrutura inicial do experimento:")
print(dados3)
#print(paste("Total de experimentos/linhas:", nrow(dados3)))

## Aleatorizar a ordem de execução
set.seed(2) # Semente para reprodutibilidade
dados3$OrdemExecucao <- sample(1:nrow(dados3))

# Ordenar pela ordem de execução
dados3 <- dados3[order(dados3$OrdemExecucao), ]

# Visualizar a planilha aleatorizada
print("Planilha aleatorizada para coleta de dados3:")
print(dados3[, c("OrdemExecucao", "Comprimento", "Angulo", "Replica","Tratamento")])

comprimentos_reais <- c((560)/1000,(240)/1000)
angulos_reais <- c(3* pi / 180,5* pi / 180, 8* pi / 180)

dados3$Comprimento_real <- ifelse(dados3$Comprimento == "L1",
                                  comprimentos_reais[1],
                                  comprimentos_reais[2])

dados3$Angulo_real <- case_when(
  dados3$Angulo == "theta1" ~ angulos_reais[1],
  dados3$Angulo == "theta2" ~ angulos_reais[2],
  dados3$Angulo == "theta3" ~ angulos_reais[3],
)
dados3$Periodo_T <- c(
  #-----|atenção| ----- valores para meia oscilação
  0.783,0.492,0.790,0.779,0.501,0.778,0.505,0.803,0.484,0.772,
  0.780,0.506,0.506,0.758,0.787,0.776,0.488,0.445,0.769,0.485,
  0.797,0.479,0.473,0.789,0.503,0.488,0.776,0.801,0.492,0.493
)

dados3$Periodo_T <- 2 * dados3$Periodo_T
dados3$Periodo_T2 <- dados3$Periodo_T**2
dados3$g <- 4*pi^2 * dados3$Comprimento_real / (dados3$Periodo_T^2)

bp <- boxplot(Periodo_T2 ~ Comprimento * Angulo,
              data = dados3,
              names = c("C1A1","C2A1","C1A2","C2A2","C1A3","C2A3"),
              main = "Boxplot das Observações por Tratamento (5 réplicas)",
```

```

        xlab = "",
        ylab = "Período T2",
        las = 2,
        col = "lightblue")

bp
bp$out

out_vals <- bp$out
out_groups <- bp$group
# puxar níveis dos tratamentos
levels_trat <- levels(dados3$Tratamento)

out_df <- data.frame(
  Período_T2 = out_vals,
  Tratamento = levels_trat[out_groups]
)

print(out_df)
remoção
dados3_ <- dados3 %>%
  anti_join(out_df, by = c("Período_T2", "Tratamento"))

# quais tratamentos não tiveram outliers?
tratamentos_com_out <- unique(out_df$Tratamento)
trat_sem_out <- setdiff(levels_trat, tratamentos_com_out)

dados3_limpo <- dados3_ %>%
  group_by(Tratamento) %>%
  mutate(remover_extra = ifelse(
    Tratamento %in% trat_sem_out,
    row_number() == sample(n(), 1),
    FALSE
  )) %>%
  ungroup() %>%
  filter(!remover_extra)
dim(dados3_limpo)

# boxplot com 4 réplicas
bp <- boxplot(Período_T2 ~ Tratamento, data = dados3_limpo,
  main = "Boxplot Depois da Limpeza (4 réplicas)",
  xlab = "", ylab = "Período T2",
  las = 2, col = "lightblue")
bp <- boxplot(Período_T2 ~ Tratamento, data = dados3_limpo,
  names = c("C1A1", "C2A1", "C1A2", "C2A2", "C1A3", "C2A3"),
  main = "Boxplot das Observações por Tratamento (5 réplicas)",
  xlab = "",
  ylab = "Período T2",
  las = 2,
  col = "lightblue")

bp

resumo_final <- dados3_limpo %>%
  group_by(Tratamento) %>%
  summarise(
    n = n(),
    media_T = mean(Período_T),
    amplitude = max(Período_T) - min(Período_T),
    sd_T = sd(Período_T),
    media_T2 = mean(Período_T2),
    sd_T2 = sd(Período_T2)
  )
resumo_final

```

```

# ANOVA
modelo_anova <- aov(Periodo_T2 ~ Comprimento * Angulo, data = dados3_limpo)
summary(modelo_anova)

par(mfrow = c(2,2))
plot(fitted(modelo_anova), resid(modelo_anova),
     main = "Resíduos vs Valores Ajustados",
     xlab = "Valores ajustados",
     ylab = "Resíduos",
     pch = 19)
abline(h = 0, lty = 2)

qqnorm(rstandard(modelo_anova),
       main = "Gráfico Q-Q dos Resíduos")
qqline(rstandard(modelo_anova))

plot(fitted(modelo_anova), sqrt(abs(rstandard(modelo_anova))),
     main = "Escala-Localização",
     xlab = "Valores ajustados",
     ylab = expression(sqrt("|Resíduos padronizados|")),
     pch = 19)

plot(modelo_anova$model$`factor(Comprimento)`,
     rstandard(modelo_anova),
     main = "Resíduos por níveis de Comprimento",
     xlab = "Níveis de Comprimento",
     ylab = "Resíduos padronizados",
     pch = 19)

par(mfrow = c(1,1))
library(ggplot2)
ggplot(dados3_limpo, aes(x = Angulo, y = Periodo_T2,
                        group = Comprimento, color = Comprimento)) +
  stat_summary(fun = mean, geom = "line", linewidth = 1.2) +
  stat_summary(fun = mean, geom = "point", size = 3) +
  labs(
    title = "Interação: Ângulo × Comprimento",
    x = "Ângulo",
    y = "Média de T²"
  ) +
  scale_x_discrete(
    labels = c(
      bquote(A[1]),
      bquote(A[2]),
      bquote(A[3])
    )
  ) +
  theme_minimal(base_size = 14)

anova(modelo_anova)
shapiro.test(residuals(modelo_anova))
# deixar numéricos porque está como fator
dados3_limpo$L_num <- as.numeric(as.character(dados3_limpo$Comprimento_real))
dados3_limpo$A_num <- as.numeric(as.character(dados3_limpo$Angulo_real))

# modelar T² como variável resposta
modelo_rlm <- lm(Periodo_T2 ~ L_num + A_num,
                 data = dados3_limpo)
summary(modelo_rlm)
anova(modelo_rlm)
# R² altíssimo -> explica bem T2

```

```

par(mfrow = c(2,2))
plot(modelo_rlm)
par(mfrow = c(1,1))

pred <- predict(modelo_rlm)
cor(pred, dados3_limpo$Periodo_T2)

plot(dados3_limpo$Periodo_T2, pred,
      xlab = "T2 observado", ylab = "T2 predito",
      main = "Ajuste Observado vs Predito")
abline(0, 1, col = "red", lwd = 2)

shapiro.test(residuals(modelo_rlm))
# Vendo Gravidade (Bônus)
# Proposta de modelo linear
modelo_fisico <- lm(Periodo_T2 ~ 0 + L_num, data = dados3_limpo)
summary(modelo_fisico)

#vamos verificar com o valor da constante r
c_est <- coef(modelo_fisico)[1]
g_est <- 4 * pi^2 / c_est
g_est

```