Variabile aleatoria geometrica

La **distribuzione esponenziale** è una distribuzione di probabilità continua che descrive la "durata di vita" di un fenomeno che *non invecchia*. Un esempio è la *durata di vita* di una particella radioattiva prima decadere oppure la durata della richiesta di un servizio. Si dice che X ha distribuzione esponenziale di parametro λ>0 e si indica con X∼EXP(λ), se la sua funzione di densità di probabilità è:

E corrispondente funzione di distribuzione:

Per una variabile esponenziale si ha che:

Osservando che , se X rappresenta un tempo allora λ rappresenta una frequenza. Quindi se la variabile aleatoria descrive, ad esempio, la durata di vita di un componente elettronico si intuisce che i tempi di vita maggiori corrispondono ai parametri λ più piccoli. Infatti, la funzione densità, al diminuire di λ, si schiaccia sull’asse delle ascisse. Di conseguenza la media si sposta verso valori più elevati e il componente si guasta mediamente più tardi. Pertanto, λ risulta essere inversamente proporzionale al tempo di vita medio del componente.

Come specificato precedentemente, tale variabile aleatoria descrive un fenomeno che non invecchia, ciò significa che è privo di memoria. Gode infatti della seguente proprietà di “assenza di memoria”, per ogni s, t reali positivi risulta:

Se si interpreta X come un tempo di attesa, la precedente equazione mostra che la probabilità condizionata che il tempo di attesa X sia maggiore di t+s dato che essa è maggiore di s non dipende da quanto si è già atteso, ossia da s.

Nel seguente grafico è rappresentata la densità di probabilità e la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale e parametro λ=3.



La probabilità che la variabile aleatoria esponenziale con λ=3 assuma valori nell’intervallo (0.5, 1.5) è 0.2120212.



I quartili sono:



**Confronto della densità teorica esponenziale con la densità simulata**. Si può notare che all’aumentare dell’ampiezza del campione, l’istogramma delle frequenze relative si avvicina alla densità esponenziale teorica.



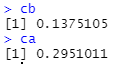
## Stima puntuale e stima intervallare

Si desidera studiare una popolazione descritta da una variabile aleatoria X con funzione di distribuzione esponenziale. In particolare, il campione ha ampiezza 50 e denota i tempi di gestione in minuti di una richiesta da parte di un servizio A. Si vuole stimare il parametro non noto λ.

La **stima puntuale** del parametro non noto con il metodo dei momenti e della massima verosimiglianza forniscono come stimatore la media campionaria. Risulta quindi λ = 0.1876024. La media campionaria è uno stimatore corretto con varianza minima e consistente per 1/ λ.

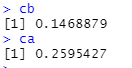
La **stima intervallare** si propone, a differenza della stima puntuale, di determinare in base ai dati del campione un limite superiore e un limite inferiore entro il quale sia compreso il parametro non noto λ con un certo coefficiente di confidenza (o grado di fiducia). Per effettuare la stima intervallare su un campione con distribuzione esponenziale viene utilizzato il teorema centrale di convergenza che necessita un campione di ampiezza ≥30. Siccome il campione a disposizione ha ampiezza pari a 50, risulta possibile applicare tale metodo.

**Stima dell’intervallo di confidenza di grado 1 − α = 0.99**. Il limite inferiore risulta cb=0.1375105, mentre il limite superiore risulta ca=0.2951011.



Risulta quindi:

**Stima dell’intervallo di confidenza di grado 1 − α = 0.95.** Il limite inferiore risulta cb=0.1468879, mentre il limite superiore risulta ca=0.2595427.

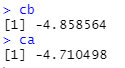


Risulta quindi:

Si nota che all’aumentare del grado di confidenza 1 – α l’intervallo diventa più grande.

## Confronto tra due popolazioni esponenziali

Si desidera confrontare i tempi per gestire una richiesta da parte di due servizi A e B. I tempi sono distribuiti come una variabile esponenziale. Il servizio A gestisce 50 richieste, mentre il servizio B ne gestisce 80 con i seguenti risultati sulle medie e sulle deviazioni standard dei tempi: mediaA=5.330421, sdA=4.737098, mediaB=10.11495, sdB=10.82139. Si vuole determinare una stima dell’intervallo di confidenza di grado 1 − α = 0.99 per la differenza 1/ λ A− 1/ λ B tra i tempi medi impiegati per gestire una richiesta da parte dei due servizi.



Risulta quindi:

Siccome ca e cb sono entrambi negativi, la differenza 1/ λ A − 1/ λ B risulta essere negativa, pertanto λ A > λ B . Siccome in una variabile aleatoria esponenziale λpuò essere visto come una frequenza, il servizio A è in grado di servire più richieste per minuto rispetto al servizio B.