Model subiecte Algoritmi Avansaţi

1. (30p) O clasă de elevi este formată din m copii. La această clasă Moș Crăciun aduce n cadouri, fiecare dintre ele având o valoare notată $val_1, val_2, ..., val_n$. Moșul, grăbit fiind, lasă task-ul împărțirii cadourilor pe umerii profesorului de informatică. Acesta își alege următorul obiectiv pentru împărțirea cadourilor: sa maximizeze valoarea cadourilor primite de către copilul care primește cel mai puțin. (Altfel spus, copilul cel mai "vitregit" în urma împărțirii să primească totuși cadouri de o valoare cât mai bună / Să existe un "spread" cât mai bun al cadourilor). În timp ce se gândește la o soluție de implementare, profesorul își amintește de la cursurile de algoritmică din facultate că astfel de probleme de optim sunt NP-hard! Fiind cuprins de groază (dar și de o nostalgie pentru cursurile de algoritmică din facultate) el vă cere vouă ajutorul.

Exemplu: Pentru 3 copii și 6 cadouri cu valorile $3, 4, 12, 2, 4, 6$ o împărțire echitabilă arată astfel: primul copil primește cadourile $1, 2, 4$. Al doilea copil primește cadoul 3. Iar ultimul copil primește cadourile 5 și 6. În acest caz cel mai "vitregit" copil este cel dintâi, care primește cadouri în valoare totală de 9 unități, în timp ce ceilalți doi primesc cadouri în valoare totală de 12, respective 10 unități. Nu există nicio altă configurație mai reușită.

Notații:

OPT – soluția optimă care există: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai "vitregit" în o configurație optima

ALG – soluția oferită de algoritmul vostru: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai "vitregit" în urma algoritmului vostru

$C[k]$ - lista cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$W(K)$ – valoarea totala a cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$val(i)$ – valoarea cadoului i

$Val = \sum_{1 \leq i \leq n} val(i)$ – valoarea totală a cadourilor

Copiii vor fi indexați folosind variabile de forma k, q, k', q', etc... Cadourile vor fi indexate folosind variabile de forma i, j, i', j', etc....

Restricții: Considerăm că $n \geq m$ și că $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$ pentru oricare cadou i.

Cerințe:

a) Descrieți un algoritm $\frac{1}{2}$ aproximativ pentru problema cadourilor in complexitate $\mathcal{O}(n \log m)$ **(10p)**

b) Fie k acel copil pentru care $ALG = W(K)$. Fie i ultimul cadou primit de un copil oarecare q $(q \neq k)$. Care este relația între $W(K)$ și $W(Q) - val(i)$? Justificaţi. **(5p)**

c) Pe baza punctului b) arătați că $ALG \geq \frac{Val}{2m}$ **(5p)**

d) Demonstrați că algoritmul descris la punctul a) este $\frac{1}{2}$ aproximativ **(5p)**

e) Dați un exemplu format din minimum 2 copii și 4 cadouri pentru care algoritmul vostru nu găsește soluția optimă. Spuneți care este soluția optimă. Spuneți care este soluția dată de algoritmul vostru. **(5p)**

Subiectele continuă pe pagina 2!

2. (5p) Fie punctul $A = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$. Daţi exemplu de puncte $B, C \in \mathbb{R}^2$ astfel ca C să fie în stânga muchiei orientate $\overrightarrow{AB}$ şi calculaţi valoarea determinantului care apare în testul de orientare.

3. (10p) Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ cu 9 elemente din planul $\mathbb{R}^2$ astfel ca (i) $(2, 3) \in \mathcal{M}$, (ii) la final, $\mathcal{L}_i$ să aibă 3 elemente, dar, pe parcursul aplicării algoritmului, numărul maxim de elemente ale lui $\mathcal{L}_i$ să fie egal cu 6 ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!

4. (10p) Precizaţi care este numărul maxim de vârfuri pe care îl poate avea o hartă trapezoidală asociată unei mulţimi de 2 segmente în poziţie generală, inclusă în interiorul unui dreptunghi D cu laturile paralele cu axele de coordonate. Daţi un exemplu în care acest maxim este atins şi un exemplu în care acest lucru nu se întâmplă.

5. (10p) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3. Semiplanele H_1 şi H_2 au dreptele suport parelele cu axa Ox, respectiv Oy **(alegeţi explicit aceste semiplane!)**. Semiplanul H_3 este dat de o inecuaţie de forma $H_3 : x + y - \alpha \leq 0$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul α, natura intersecţiei $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

6.

a) **(10p)** Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M}_1$ din $\mathbb{R}^2$ astfel ca $\mathcal{M}_1$ să admită o triangulare ce conţine 4 triunghiuri şi 8 muchii.

b) **(10p)** Considerăm mulţimea $\mathcal{M}_1$ aleasă la punctul a). Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M}_2$ din $\mathbb{R}^2$ formată din 3 puncte, astfel ca diagrama Voronoi asociată mulţimii $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ să aibă exact 3 muchii de tip semidreaptă.

7. (5p) Date n puncte în plan, scrieţi un algoritm cât mai eficient (analizaţi complexitatea!) care să determine un poligon care are toate aceste puncte ca vârfuri. Exemplificaţi!