Examen Algoritmi Avansaţi

19.06.2021.

1 (15p) Se consideră un proiect format din n task-uri ce trebuiesc efectuate de către m mașini de calcul. Fiecare task poate fi procesat doar de către una din două mașini dintre cele m. Task-urile sunt caracterizate ca fiind un triplete de forma (T_i, x_i, y_i), unde T_i este timpul necesar pentru a procesa task-ul i, iar x_i și y_i sunt indicele celor două mașini ce pot efectua task-ul i (celelalte $m-2$ mașini sunt incompatibile cu efectuarea taskului i). Se dorește planificarea fiecărui task pe câte o mașină compatibilă cu task-ul astfel încât întregul proiect să se termine cât mai repede. (Altfel spus, se dorește minimizarea timpului de lucru a mașinii celei mai solicitate.)

Cerințe

a) Să se scrie problema anterioară sub forma unei ***Probleme de Programare Liniară cu Numere Întregi*** (en. *Integer Linear Programming Problem*). Apoi această problemă să fie *relaxată* și adusă sub forma unei ***Probleme de Programare Liniară***. **(10p)**

b) Folosindu-vă de Problemele de Programare Liniară descrise la punctul a), propuneți un algoritm 2-aproximativ pentru problema inițială. Justificați de ce algoritmul propus are factorul de aproximare 2. **(5p)**

Notații și indicații:

OPT - încărcătura mașinii celei mai solicitate în configurația optimă.

ALG - încărcătura mașinii celei mai solicitate în urma algoritmului propus de voi.

LP, respectiv ILP - expresiile ce trebuiesc maximizate sau minimizte pentru problemele voastre de programare liniară, respectiv programare liniară cu numere ître gi.

Task-urile vor fi indexate cu variabile de forma "i, j, k". Mașinile vor fi indexate cu variabile de forma "q, p, r".

$Comp(q)$ - lista task-urilor compatibile cu mașina q

Variabilele de tipul A_q^i vor indica dacă task-ul i este alocat mașinii q sau nu.

2 (15p) Se dau n obiecte, fiecare dintre ele fiind caracterizat de o valoare, respectiv de o probabilitate (valoare subunitară) de a putea fi transportate intact. Se dorește alegerea unor obiecte dintre cele n pentru efectuarea unui transport de o valoare cât mai mare, dar cu o probabilitate de cel puțin P ca întreg conținutul să ajungă intact la destinație.

Exemplu: Pentru $n = 3$, $P = 1/2$ și obiectele cu valoarea, respectiv probabilitatea de a ajunge întregi la destinație $(4, 4/5), (6, 3/5), (3, 4/5)$ transportul va include obiectele 1 și 3 cu o valoare totală de 7 unități și o probabilitate de a ajunge la destinație intacte de 16/25

Cerințe: În elaborarea unui algoritm genetic pentru rezolvarea acestei probleme

a) Descrieți cum ați codifica un cromozom? (care este lungimea cromozomului? Ce ar reprezenta valoarea fiecărei gene?) **(5p)**

b) Descrieți cum ați modela o funcție de fitness pentru această problemă **(10p)**

Notații și indicații:

obiectele vor fi indexate folosind variabilele i, j

pentru un obiect i, $val(i)$ va reprezenta valoarea sa iar $prob(i)$ probabilitatea ca acesta să ajungă intact la destinație.

Subiectele continuă pe pagina 2!

3. (5p) Fie punctul $A = (1, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$. Alegeţi un punct $B \in \mathbb{R}^3, B \neq A$. Daţi exemplu de punct C pe dreapta AB astfel ca $r(A, C, B) < 0$. Justificaţi!

4. (10p) Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ din $\mathbb{R}^2$ astfel ca $\mathcal{M}$ să admită o triangulare ce conţine 9 triunghiuri, iar $\mathcal{M} \setminus \{G\}$ să admită o triangulare ce conţine 5 triunghiuri. Justificaţi alegerea făcută. Indicaţi, pentru ambele triangulări, numărul de feţe.

5. (10p) Daţi exemplu de şase semiplane (din $\mathbb{R}^2$), dintre care trei sunt semiplane inferioare şi trei sunt semiplane superioare, astfel ca intersecţia celor şase semiplane să fie un triunghi.

6. (10p) Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (3, 0)$, $B = (0, 2)$, $M_\alpha = (\alpha, 2)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Alegeţi două puncte $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$ în afara triunghiului ΔOAB şi astfel ca $y_C < 2$, $y_D > 2$. Discutaţi, în funcţie de α, numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe a mulţimii $\{O, A, B, C, D, M_\alpha\}$.

7.

a) **(10p)** Daţi exemplu de poligon y-monoton $\mathcal{P}$ din $\mathbb{R}^2$ astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile: (i) $\mathcal{P}$ are 8 vârfuri; (ii) unul dintre vârfurile lui $\mathcal{P}$ este $(3, 4)$; (iii) $\mathcal{P}$ are cel puţin două vârfuri convexe care nu sunt principale; (iv) $\mathcal{P}$ are cel puţin două vârfuri concave.

b) **(10p)** Pentru poligonul $\mathcal{P}$ construit la punctul a) aplicaţi metoda din Teorema Galeriei de Artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere.

8. (5p) În planul Oxy considerăm o mulţime de n segmente verticale $s_1 = [A_1B_1], s_2 = [A_2B_2], \ldots, s_n = [A_nB_n]$, astfel ca oricare două să nu aibă niciun punct comun. Ca date de intrare se primesc coordonatele punctelor $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$ (în această ordine). Descrieţi succint un algoritm cât mai eficient care să determine un poligon ortogonal (poligon cu laturile paralele cu axele de coordonate) a cărui mulţime de vârfuri să fie mulţimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n\}$ şi pentru care laturile verticale să fie segmentele $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Ca date de ieşire va fi afişată lista vârfurilor poligonului. Justificaţi şi exemplificaţi!
Notă. Se presupune că există un poligon cu proprietatea din enunţ, altfel spus, segmentele $s_1, s_2, \ldots, s_n$ au fost selectate ca fiind laturile verticale ale unui poligon orotogonal.