MEMORIA PRÁCTICA MÉTODOS NÚMERICOS

María Arribas Ballesteros

Mayo 2024

Índice

1. Introducción

En este documento, exploramos la aplicación de métodos numéricos para resolver problemas complejos de física y matemáticas.

Los métodos numéricos son herramientas esenciales en la ingeniería y las ciencias aplicadas, permitiendo aproximaciones precisas donde las soluciones analíticas son difíciles o imposibles de obtener.

A lo largo de este trabajo, abordamos problemas prácticos y teóricos utilizando técnicas como el método de Newton-Raphson y la interpolación polinómica, destacando su relevancia y aplicabilidad en distintos contextos.

Métodos Numéricos Utilizados:

Método de Newton-Raphson:

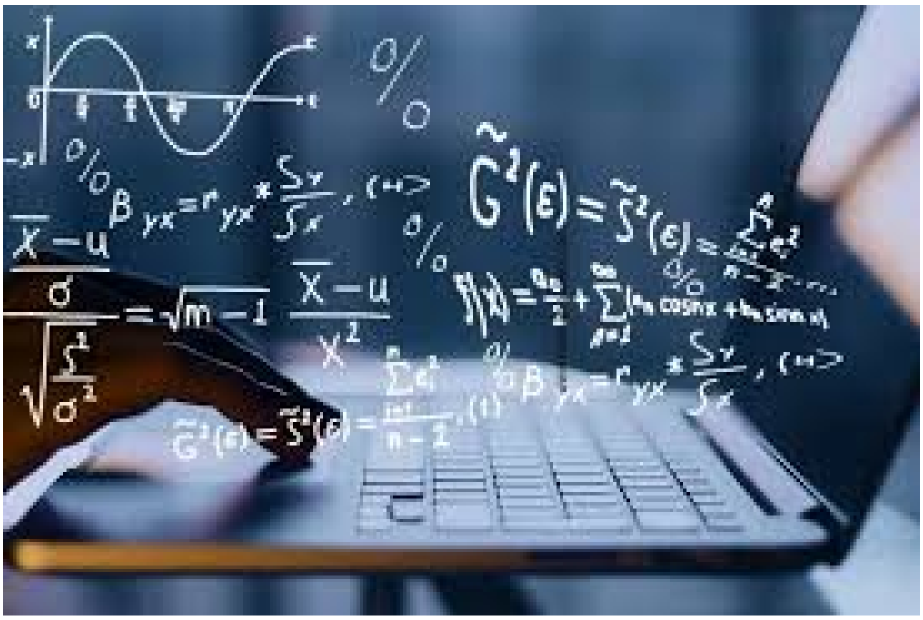
El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo utilizado para encontrar aproximaciones sucesivas a las raíces de una función. Se basa en la linearización de la función y es especialmente útil para resolver ecuaciones no lineales.

Interpolación Polinómica de Newton:

La interpolación polinómica de Newton se utiliza para construir un polinomio que pase por un conjunto de puntos dados. Es particularmente útil debido a su forma recursiva y la facilidad con la que se pueden añadir nuevos puntos.

Algoritmo de Neville:

El algoritmo de Neville es una técnica de interpolación numérica que construye el polinomio interpolador utilizando una fórmula recursiva. Es especialmente útil para evaluar el polinomio interpolador en un punto dado, proporcionando una aproximación eficiente y precisa.



2. Parte 1: problemas prácticos

Una partícula parte del reposo en un plano inclinado suave cuyo ángulo, θ, cambia a una tasa constante $\frac{d\theta}{dt} = w < 0$. Al cabo de t segundos, la posición del objeto viene dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2w^2}\left(e^{wt} - e^{-wt}\right) - \sin(wt)$$

Supón que la partícula se ha desplazado 0,52 metros en 1 segundo. Encuentra, con una precisión de 10^{-5}, la tasa w a la que θ cambia. Recuerda que g es la constante de gravedad.

Introducción

En este ejercicio, hemos abordado un problema de física utilizando técnicas de cálculo numérico. La tarea consistía en determinar la tasa de cambio w del ángulo θ de un plano inclinado, dado que una partícula parte del reposo y se desplaza una distancia específica en un tiempo determinado. Para resolver este problema, aplicamos teoría sobre movimiento en planos inclinados y métodos numéricos para encontrar raíces de funciones.

Teoría Aplicada

Movimiento en Planos Inclinados

- Cuando una partícula se mueve sobre un plano inclinado, la aceleración debida a la gravedad g se proyecta a lo largo del plano. El ángulo θ del plano con respecto a la horizontal determina la componente de la aceleración que actúa a lo largo del plano.
- La posición de la partícula en función del tiempo en este contexto puede ser compleja, especialmente si el ángulo θ cambia con el tiempo.

Interpretación de w

- El valor de w encontrado fue aproximadamente $-0{,}31803894296549184$.
- En el contexto del problema, w representa la velocidad a la que cambia el ángulo del plano inclinado.
- Dado que w es negativo, esto implica que el ángulo del plano inclinado está disminuyendo con el tiempo.
- Cuanto mayor sea el valor absoluto de w, más rápido cambia el ángulo del plano inclinado.

Significado Físico

- El cambio en el ángulo del plano inclinado afecta directamente la aceleración de la partícula a lo largo del plano.

- Un valor negativo de w indica que el plano inclinado se está inclinando hacia abajo, lo que significa que la gravedad está ejerciendo una componente adicional en la dirección del movimiento de la partícula.
- Por lo tanto, la partícula tiende a acelerar más rápidamente debido a la componente de la gravedad en la dirección del plano inclinado.

Estabilidad de la Solución

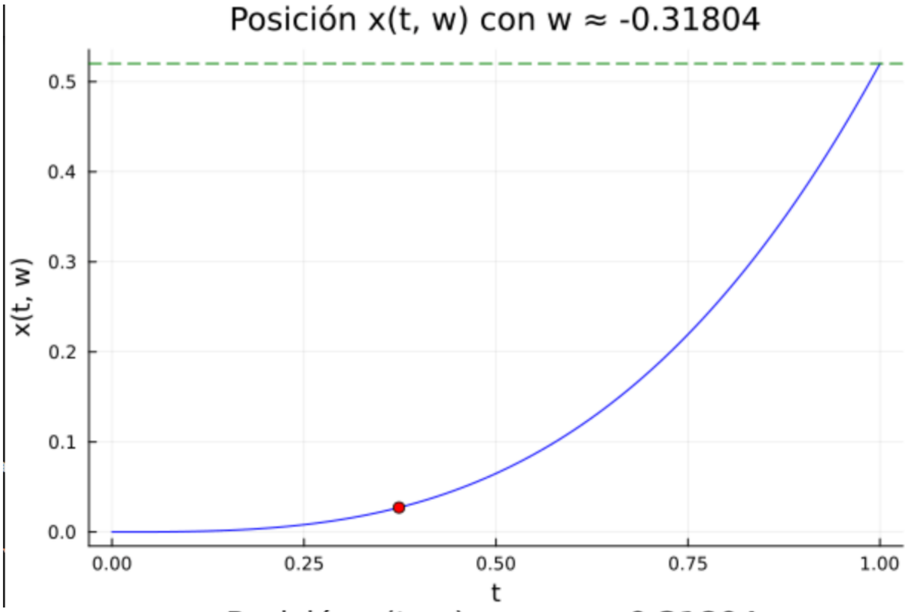
- La consistencia en el valor de w para diferentes valores iniciales sugiere que la solución es robusta y no depende significativamente de las condiciones iniciales.
- Esto indica que la tasa de cambio del ángulo del plano inclinado se puede estimar con confianza, proporcionando una comprensión precisa del sistema físico.

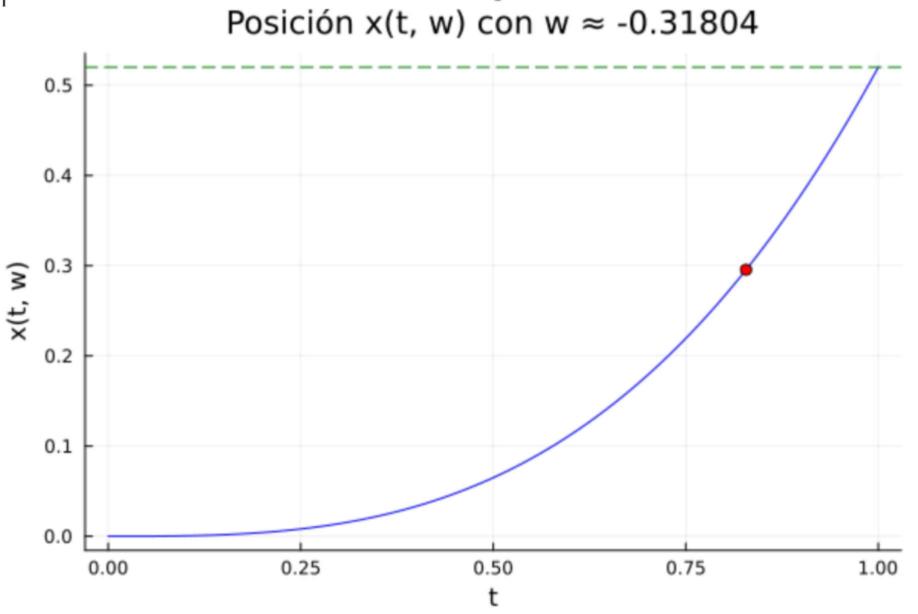
Métodos Numéricos para Encontrar Raíces

- Utilizamos el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de la ecuación $x(1) - 0{,}52 = 0$, donde $x(t)$ es la función de la posición.
- El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo utilizado para encontrar aproximaciones sucesivas a las raíces (o ceros) de una función real.

Innovación: Visualización y Animación

Para mejorar la comprensión del problema, creamos una animación que muestra cómo cambia la posición de la partícula en tiempo real. Esta animación no solo hace el problema más intuitivo, sino que también ayuda a visualizar la dinámica del sistema, proporcionando una representación visual y dinámica del movimiento de la partícula.





Conclusión

El ejercicio demuestra cómo podemos utilizar herramientas de cálculo numérico y teoría física para resolver problemas complejos que involucran movimiento en planos inclinados y tasas de cambio de ángulos. El valor de w encontrado indica la tasa constante a la que el ángulo θ cambia con el tiempo para que una partícula se desplace 0.52 metros en 1 segundo.

Este tipo de problemas es común en física aplicada e ingeniería, donde es crucial entender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos. El uso de métodos numéricos como el de Newton-Raphson es fundamental cuando las soluciones analíticas son difíciles o imposibles de obtener. La incorporación de animaciones añade una capa visual y dinámica que facilita la comprensión y análisis del problema.

3. Parte 2: problemas para investigar

4. Investiga cómo podría resolverse un sistema de ecuaciones como este:

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0{,}1)^2 + \sin(x_3) + 1{,}06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

y da una posible solución.

Resultados:

- **Initial guess:** [0.1, 0.1, 0.1]
  Solution: [0.5, 7.506729302789541e-18, -0.5235987755982988]
  Converged: true

- **Initial guess:** [-1.0, -1.0, -1.0]
  Solution: [0.49814468458949096, -0.19960589554380528, -0.5288259775733881]
  Converged: true

- **Initial guess:** [1.0, 1.0, 1.0]
  Solution: [0.5000000000001524, 1.6710496999387223e-11, -0.5235987755978618]
  Converged: true

- **Initial guess:** [2.0, 2.0, 2.0]
  Solution: [0.5000000000000046, 5.030160785629078e-13, -0.5235987755982858]
  Converged: true

Interpretación:

A partir de los resultados obtenidos en las simulaciones con Julia para resolver el sistema de ecuaciones no lineales, podemos sacar varias conclusiones importantes:

1. **Sensibilidad a las Condiciones Iniciales:** La sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica común en sistemas no lineales. Esto significa que pequeñas variaciones en las conjeturas iniciales pueden llevar a resultados diferentes. En el caso de las simulaciones, aunque las soluciones convergen a valores similares, el hecho de que los resultados varíen ligeramente dependiendo de la conjetura inicial resalta esta sensibilidad. Esto es una consideración importante al resolver sistemas no lineales en la práctica, ya que la elección de las condiciones iniciales puede influir en la convergencia y la estabilidad del algoritmo numérico.

2. **Posible Solución Única:** La convergencia a soluciones similares con diferentes condiciones iniciales sugiere que el sistema puede tener una solución única o un conjunto muy cercano de soluciones. Sin embargo, no podemos descartar completamente la posibilidad de soluciones múltiples debido a la naturaleza no lineal del sistema. Las ligeras variaciones en los resultados podrían indicar la existencia de múltiples soluciones cercanas entre sí.

3. **Comportamiento No Lineal:** La naturaleza no lineal del sistema implica que las relaciones entre las variables no son simples y pueden ser altamente sensibles a pequeñas variaciones. Esto se refleja en la necesidad de utilizar métodos numéricos específicos para resolver sistemas no lineales, ya que los métodos para sistemas lineales pueden no ser aplicables o pueden converger a soluciones incorrectas. El comportamiento no lineal también puede conducir a fenómenos como bifurcaciones, puntos críticos múltiples y comportamiento caótico, lo que hace que el análisis de estos sistemas sea desafiante pero fascinante.

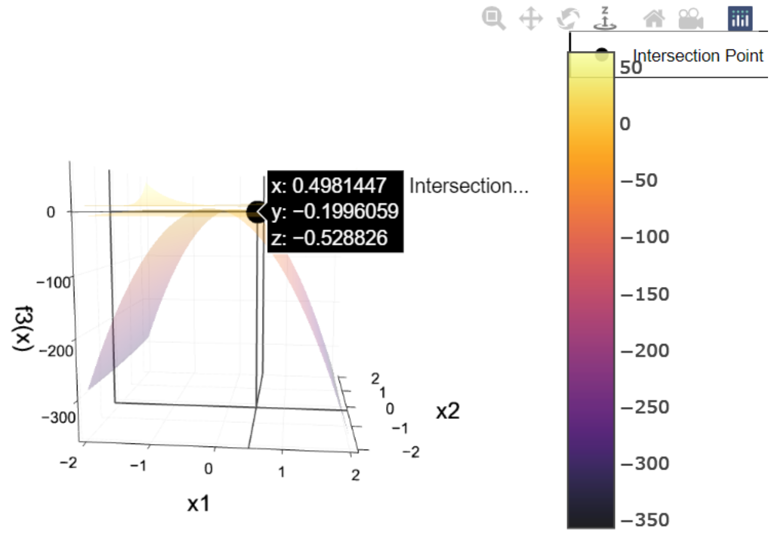
4. **Convergencia:** La convergencia exitosa de las simulaciones indica que el método utilizado (método de Newton-Raphson) es robusto y eficaz para resolver este sistema no lineal en particular. La convergencia significa que el algoritmo ha alcanzado una solución que cumple con ciertos criterios de precisión predefinidos. Sin embargo, la convergencia no garantiza la unicidad de la solución ni la ausencia de otras soluciones posibles.

5. **Relevancia de los Valores Aproximados:** Los valores muy pequeños en las soluciones pueden tener varias interpretaciones. Podrían indicar que ciertas variables tienen poca influencia en el resultado final del sistema. Esto podría significar que estas variables están "dominadas"por otras en el sistema o que el sistema está cerca de un estado de equilibrio en el que estas variables tienen valores muy pequeños. Por otro lado, estos valores pequeños podrían ser artefactos numéricos debido a la precisión finita de los cálculos numéricos.

Conclusión General:

La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales es un área importante en matemáticas aplicadas y computacionales. Los resultados obtenidos en las simulaciones ofrecen información valiosa sobre el comportamiento y las características de este sistema específico. Sin embargo, es fundamental recordar que cada sistema no lineal es único y puede comportarse de manera diferente. Por lo tanto, es esencial realizar un análisis cuidadoso y considerar múltiples enfoques numéricos y conceptuales al trabajar con sistemas no lineales en general.

Gráfica de la solución del sistema



El gráfico en 3D muestra la intersección de las superficies definidas por las ecuaciones en un espacio tridimensional. Las soluciones del sistema se indican en el gráfico y son los puntos donde las tres superficies se intersectan. La anotación en el gráfico, con las coordenadas (x:0.4981447, y:0.1996059, z:0.528826) corresponde a la solución obtenida con la conjetura [1.0,1.0,1.0]. El gráfico está resaltando esta intersección particular.

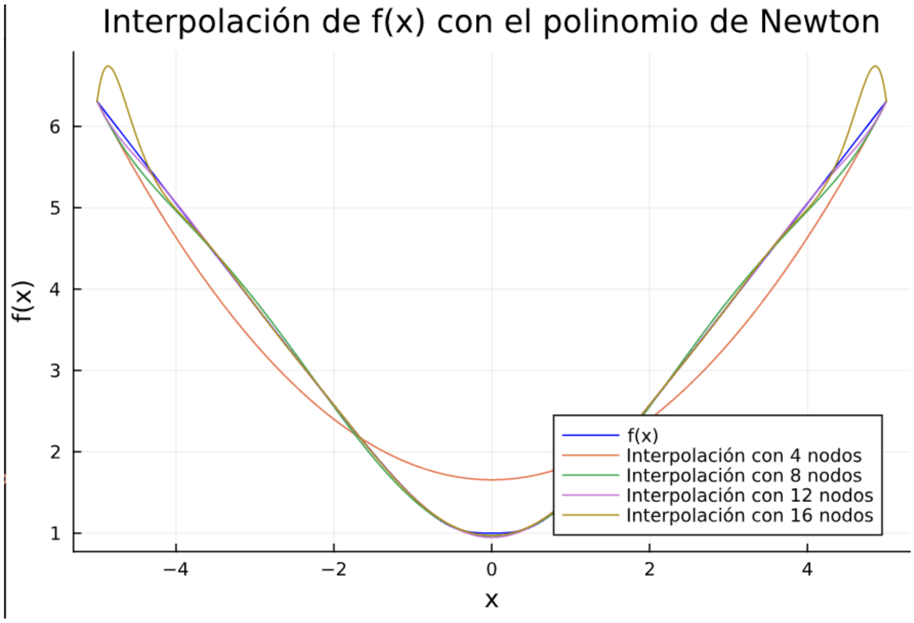
El gráfico muestra que las soluciones convergen a diferentes puntos dependiendo de la conjetura inicial, pero todas ellas representan intersecciones donde las tres ecuaciones se cumplen simultáneamente.

4. Parte 3: problema para simular (común)

- Implementa el algoritmo de Newton para evaluar un polinomio interpolador. Diseña una función `Newton(x,fx,val)` que, dado un vector n-dimensional de nodos x y de sus correspondientes imágenes fx, evalúe el polinomio interpolador en el valor val proporcionado.

- Sea la función $f(x) = \frac{1}{(1+2|x|^3)^{-1/3}}$. Usa el algoritmo de Neville para interpolar la función con nodos equiespaciados de tamaño $4, 8, 12$ y 16. Dibuja la función real. ¿Qué observas?

- Investiga sobre el fenómeno de Runge y propón una solución a lo observado anteriormente.



Descripción General

El gráfico muestra la función $f(x)$ junto con sus interpolaciones polinómicas de Newton para conjuntos de nodos equiespaciados de tamaño 4, 8, 12 y 16. La función original se muestra en azul, mientras que las interpolaciones se muestran en diferentes colores para cada número de nodos.

Precisión de la Interpolación

Interpolación con 4 Nodos (Línea Roja)

- La interpolación con solo 4 nodos muestra un ajuste deficiente, especialmente en el intervalo intermedio. La curva de interpolación se ajusta mejor en los extremos del intervalo, pero se desvía significativamente de la función original en la región central.

La línea roja se ajusta relativamente bien en los extremos cerca de $x = -5$ y $x = 5$, pero se desvía considerablemente de la función $f(x)$ en el intervalo central.

- Esta interpolación tiende a ser suave, pero no es suficiente para capturar la complejidad de la función original en todo el intervalo.

Interpolación con 8 Nodos (Línea Verde)

- Con 8 nodos, la precisión mejora considerablemente en comparación con 4 nodos. Sin embargo, todavía hay desviaciones notables en los extremos, aunque las oscilaciones son menos pronunciadas.
- En el intervalo central, la interpolación es mucho más precisa, mostrando un ajuste cercano a la función original.

Interpolación con 12 Nodos (Línea Morada)

- La interpolación con 12 nodos muestra un ajuste aún mejor en el intervalo central. La curva de interpolación sigue de cerca a la función original en la mayor parte del intervalo.
- Sin embargo, las oscilaciones en los extremos comienzan a ser más visibles. Este es un indicio del fenómeno de Runge, que se vuelve más pronunciado con el aumento del número de nodos equiespaciados.

Interpolación con 16 Nodos (Línea Amarilla)

- Con 16 nodos, las oscilaciones en los extremos son muy evidentes. Aunque la interpolación es extremadamente precisa en el centro del intervalo, los extremos muestran grandes desviaciones.
- Este comportamiento ilustra claramente el efecto de Runge, donde el uso de nodos equiespaciados en polinomios de alto grado provoca inestabilidad y grandes oscilaciones cerca de los bordes del intervalo.

Efecto de Runge

El efecto de Runge se refiere a la tendencia de los polinomios de alto grado a exhibir oscilaciones pronunciadas en los extremos del intervalo de interpolación cuando se utilizan nodos equiespaciados. Este fenómeno es una consecuencia directa de la naturaleza matemática de los polinomios de alto grado y de la distribución equiespaciada de los nodos.

Manifestación en el Gráfico

En el gráfico generado, este efecto es particularmente evidente en la interpolación con 16 nodos. Aunque la interpolación es muy precisa en el intervalo central, los extremos del intervalo muestran grandes oscilaciones. Estas oscilaciones son el resultado de intentar ajustar un polinomio de alto grado a una función con una complejidad significativa, utilizando nodos que no están optimizados para minimizar el error en los extremos.

Compromiso de Precisión

A pesar de que aumentar el número de nodos debería, en teoría, proporcionar una mejor aproximación de la función, la realidad es que los nodos equiespaciados exacerban el problema en los extremos. Esto ocurre porque los polinomios de alto grado tienen coeficientes muy grandes, que pueden causar estas oscilaciones indeseadas.

Precisión en el Intervalo Central

La precisión de la interpolación es generalmente mejor en el intervalo central del dominio, independientemente del número de nodos utilizados. Esto se debe a la distribución más uniforme de los nodos en esta región y a la menor influencia de los efectos de borde que causan oscilaciones en los extremos.

Concentración de Nodos

En el intervalo central, los nodos equiespaciados están más concentrados, lo que permite que el polinomio interpolador se ajuste más cercanamente a la función original. La menor distancia entre los nodos en esta región facilita una aproximación más precisa, ya que las variaciones locales de la función son capturadas con mayor exactitud.

Ajuste Cercano

El gráfico muestra que, en el centro del intervalo, incluso los polinomios de alto grado pueden seguir la curva de la función original de manera más fiel, reduciendo el error de interpolación en esta zona.

Conclusiones

Número de Nodos y Precisión

- Mejora en el Centro: Aumentar el número de nodos equiespaciados generalmente mejora la precisión de la interpolación en el intervalo central, donde los efectos de borde son menos pronunciados.
- Inestabilidad en los Extremos: Sin embargo, este aumento también puede introducir inestabilidad y oscilaciones significativas en los extremos del intervalo debido al efecto de Runge. Este comportamiento demuestra una limitación importante de los nodos equiespaciados cuando se utilizan en polinomios de alto grado.

Resumen

El gráfico ilustra la importancia de una elección adecuada de los nodos y la técnica de interpolación para obtener una representación precisa de la función objetivo en todo el intervalo. Utilizar nodos equiespaciados puede ser ineficaz para polinomios de alto grado debido al efecto de Runge, especialmente en los extremos del intervalo.

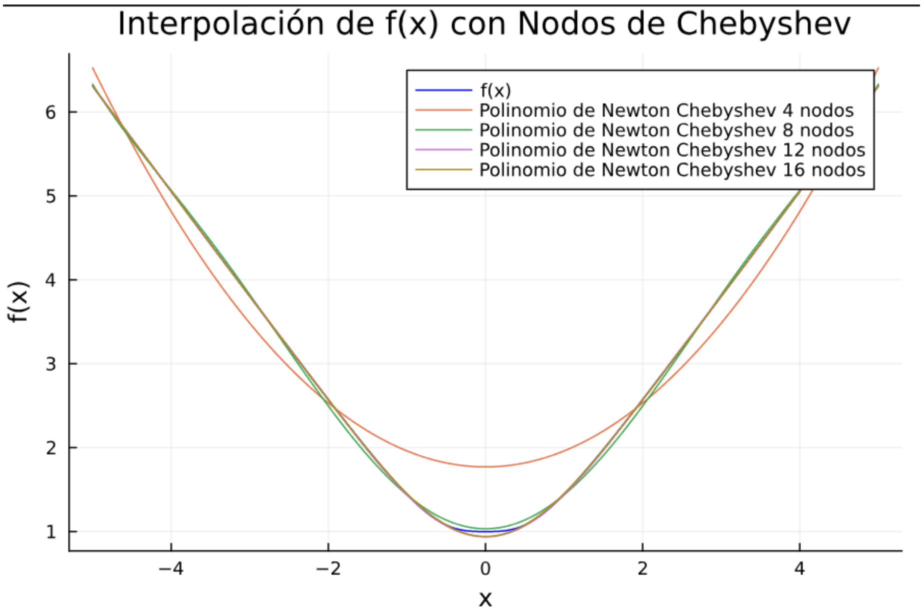
Soluciones al Método Runge

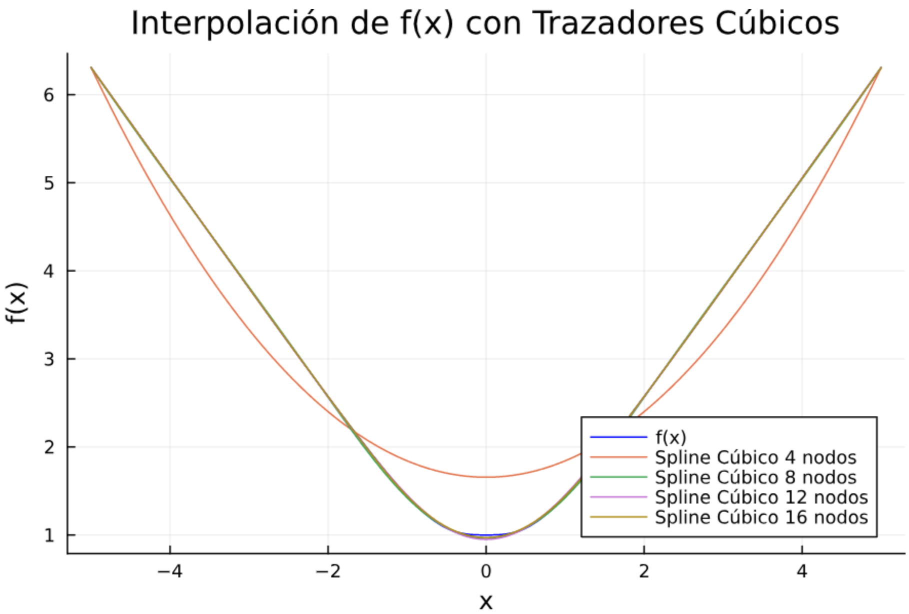
1. **Nodos de Chebyshev:** Los nodos de Chebyshev son una manera de distribuir los nodos que minimiza el error de interpolación y reduce las oscilaciones. Utilizar nodos de Chebyshev reduce significativamente las oscilaciones en los extremos del intervalo, proporcionando una interpolación más estable y precisa que los nodos equiespaciados.

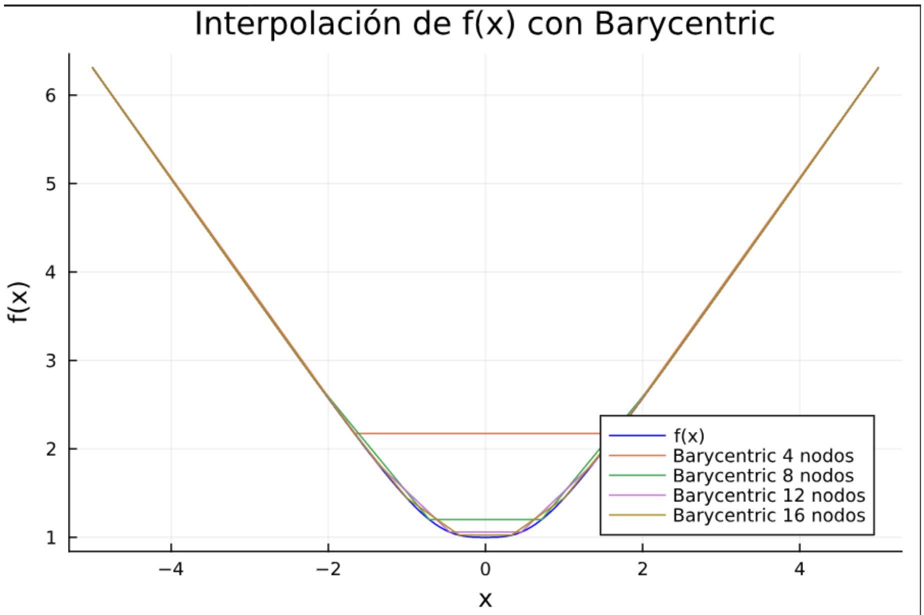
2. **Interpolación por Trazadores Cúbicos (Splines):** Los trazadores cúbicos interpolan los datos utilizando polinomios de tercer grado en cada subintervalo, proporcionando una interpolación suave y estable. Los trazadores cúbicos ofrecen una interpolación suave y estable en todo el intervalo. Este método evita las oscilaciones del fenómeno de Runge y proporciona una buena aproximación incluso con un número moderado de nodos.

3. **Interpolación Barycentric:** La interpolación barycentric es una formulación numéricamente estable de la interpolación de Lagrange. Esta técnica es numéricamente estable y eficiente, proporcionando una interpolación precisa con menos oscilaciones que los métodos tradicionales de interpolación polinómica de alto grado.

Gráficas de las soluciones al efecto Runge







Comparación de Métodos de Interpolación

Las imágenes proporcionan una comparación entre diferentes métodos de interpolación para la función $f(x) = \frac{1}{(1+2|x|^3)^{-1/3}}$ en el intervalo $[-5, 5]$, utilizando nodos equiespaciados de tamaño 4, 8, 12 y 16.

A continuación, veremos una interpretación detallada de cada método y su rendimiento en comparación con la interpolación polinómica de Newton, que muestra el efecto de Runge.

1. **Interpolación con Trazadores Cúbicos**

Observaciones:

- **General:** La interpolación con trazadores cúbicos muestra un ajuste más suave y menos propenso a oscilaciones en comparación con la interpolación polinómica de Newton.
- **Extremos del Intervalo:** Las oscilaciones son mínimas, lo que indica que los trazadores cúbicos manejan mejor los extremos del intervalo.
- **Intervalo Central:** La precisión es alta en el intervalo central, similar a la interpolación polinómica, pero con menos fluctuaciones.

2. **Interpolación con Nodos de Chebyshev**

   Observaciones:

   - **General:** La interpolación utilizando nodos de Chebyshev reduce significativamente el efecto de Runge.
   - **Extremos del Intervalo:** Las oscilaciones son casi inexistentes, lo que demuestra la eficacia de los nodos de Chebyshev para distribuir mejor los puntos de interpolación.
   - **Intervalo Central:** La precisión se mantiene alta en el intervalo central, con un ajuste más cercano a la función real en comparación con nodos equiespaciados.

3. **Interpolación Barycentric**

   Observaciones:

   - **General:** La interpolación barycentric también reduce las oscilaciones observadas con la interpolación polinómica de Newton.
   - **Extremos del Intervalo:** Aunque no tan eficaz como los nodos de Chebyshev, la interpolación barycentric muestra una reducción notable en las oscilaciones en los extremos del intervalo.
   - **Intervalo Central:** La precisión es buena en el intervalo central, pero puede haber pequeñas discrepancias en comparación con los nodos de Chebyshev y trazadores cúbicos.

Comparación y Conclusiones

Efecto de Runge

- **Interpolación Polinómica de Newton con Nodos Equiespaciados:** Manifiesta fuertemente el efecto de Runge, especialmente con un mayor número de nodos.
- **Interpolación con Trazadores Cúbicos:** Mitiga el efecto de Runge significativamente, proporcionando una interpolación más suave y precisa.
- **Interpolación con Nodos de Chebyshev:** Virtualmente elimina el efecto de Runge, demostrando ser una solución efectiva para evitar las oscilaciones en los extremos.

- **Interpolación Barycentric:** Ofrece una mejora respecto a la interpolación polinómica de Newton con nodos equiespaciados, aunque no es tan efectiva como los nodos de Chebyshev o los trazadores cúbicos.

Precisión en el Intervalo Central

Todos los métodos muestran una alta precisión en el intervalo central, pero los trazadores cúbicos y los nodos de Chebyshev ofrecen la mejor combinación de precisión y estabilidad en todo el intervalo.

Recomendaciones

- **Para evitar el efecto de Runge:** Utilizar nodos de Chebyshev es altamente recomendado debido a su capacidad para distribuir mejor los puntos de interpolación y minimizar las oscilaciones.
- **Para una interpolación suave y precisa:** Los trazadores cúbicos son una excelente opción, ofreciendo una buena precisión y suavidad en todo el intervalo

5. Conclusiones finales del trabajo

Resultados Clave

- El valor de w encontrado para el problema de la partícula en el plano inclinado fue aproximadamente -0.318, indicando una disminución en el ángulo del plano inclinado con el tiempo.

- Las simulaciones del sistema de ecuaciones no lineales mostraron convergencia a soluciones similares para diferentes conjeturas iniciales, sugiriendo una posible solución única.

- El análisis del fenómeno de Runge reveló que la interpolación con nodos equiespaciados causa oscilaciones significativas en los extremos del intervalo. La interpolación utilizando nodos de Chebyshev y trazadores cúbicos proporciona una aproximación más estable y precisa.

Conclusión General

El uso de métodos numéricos como el método de Newton-Raphson y las técnicas de interpolación polinómica es crucial para resolver problemas complejos en física e ingeniería.

Las visualizaciones y animaciones mejoran la comprensión de estos problemas, y el análisis del fenómeno de Runge destaca la importancia de elegir adecuadamente los nodos de interpolación para evitar inestabilidades.

Estos métodos y sus aplicaciones tienen un amplio alcance en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.