Ficha 6

Semântica das Linguagens de Programação

2019/20

1. Indique as variáveis livres e ligadas de cada uma das seguintes expressões:
   (a) $\lambda x.((\lambda z.\lambda u.\lambda v.\, u\, v\, z)\, x\, f\, y)$
   (b) $\lambda y.\lambda z.(x\, z)\,(y\, z)$
   (c) $(\lambda x.f\, x\,(\lambda y.\, y))\, x$
   (d) $\lambda x.((\lambda z.\lambda u.\lambda v.\, u\, v\, z)\, x\, f\, y)\, z\, x$

2. Indique o resultados das seguintes substituições:
   (a) $(\lambda x.\lambda y.\, x\, z)[(\lambda v.v\,(r\, w))/z]$
   (b) $(\lambda x.\lambda y.\, x\, z)[\lambda y.\, w/z]$
   (c) $((\lambda x.\lambda y.\, x\, z)\, x)[y\, w/x]$
   (d) $((\lambda x.\lambda y.\, x\, z)\, z)[y\, w/z]$

3. Escreva de forma explicita as regras do lambda calculus puro para
   (a) fecho compatível de $\rightarrow_\beta$
   (b) fecho reflexivo e transitivo da β-redução, $\rightarrow^*_\beta$
   (c) fecho reflexivo, simétrico e transitivo da β-redução, $=_\beta$

4. Apresente todas as possíveis sequências de redução dos seguintes termos:
   (a) $(\lambda x.\,(\lambda y.\, y\, x)\, z)\,(z\, w)$
   (b) $(\lambda u.\,\lambda v.\, v)((\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x))$

5. Considere os termos

$$\begin{array}{lcl} I & \equiv & \lambda x.\, x \\ K & \equiv & \lambda x.\lambda y.\, x \\ S & \equiv & \lambda x.\lambda y.\lambda z.\, x\, z\,(y\, z) \\ \Omega & \equiv & (\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x) \end{array}$$

   Construa as sequências de redução para as expressões abaixo indicadas, seguindo como estratégia de redução a "normal-order reduction" e a "applicative-order reduction", respectivamente.
   (a) $S\, K\, K$
   (b) $K\, S\, \Omega$
   (c) $I\,(I\,(\lambda z.\, I\, z))$

6. Calcule, se existir, a norma normal do termo $(\lambda a.\, \lambda b.\, a\, a\, b)(\lambda x.\, \lambda y.\, y)(\lambda x.\, \lambda y.\, y)$. Diga se o termo é fortemente normalizável, fracamente normalizável, ou não normalizável.

7. Apresente as sequências de redução correspondente à avaliação "call-by-name" e "call-by-value" para as seguintes para as seguintes expressões:
   (a) $(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y.\, y)(\lambda z.\, z))$
   (b) $(\lambda x.\lambda y.\, y)\, ((\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x))$

8. Considere os seguintes termos do lambda calculus puro:

$$\begin{array}{lcl} I & \equiv & \lambda x.\, x \\ K & \equiv & \lambda a.\lambda b.\, a \\ S & \equiv & \lambda x.\lambda y.\lambda z.\, x\, z\, (y\, z) \end{array}$$

   Apresente a sequência correspondente à *ordem aplicativa* de redução da espressão

$$K\, S\, (I\, K)\, I$$

   até à sua *forma normal*. Sublinhe o β-redex que é seleccionado em cada passo de redução.

9. Considere o seguinte λ-termo:

$$(\lambda a.\, \lambda b.\, a\, b)\, ((\lambda y.\, y)\, (\lambda x.\, x))\, ((\lambda x.\lambda y.\, y)\, (\lambda z.\, z))$$

   Apresente a sequência de redução deste termo até à sua *forma normal* de acordo com a *ordem normal de avaliação*. Sublinhe sempre o β-redex que é seleccionado em cada passo de redução.

10. Considere o seguinte termo do lambda calculus puro:

$$(\lambda a.\, \lambda b.\lambda c.\, a\, (b\, a)\, c)\, (\lambda x.\, \lambda y.\, y)\, ((\lambda u.\, u)\, (\lambda u.\, u))\, (\lambda a.\, \lambda b.\, a)$$

    Apresente a sequência correspondente à *avaliação "call-by-name"* deste termo até à sua *forma canónica*. Sublinhe o β-redex que é seleccionado em cada passo de redução.

11. Relembre a codificação dos Booleanos apresentada nas aulas teóricas:

$$\mathsf{TRUE} \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, x \qquad\qquad \mathsf{FALSE} \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, y$$

    Usando os Booleanos, a codificação de pares pode ser feita do seguinte modo:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{PAIR} & \equiv & \lambda f.\, \lambda s.\, \lambda b.\, b\, f\, s \\ \mathsf{FST} & \equiv & \lambda p.\, p\, \mathsf{TRUE} \\ \mathsf{SND} & \equiv & \lambda p.\, p\, \mathsf{FALSE} \end{array}$$

    Mostre que
    (a) $\mathsf{FST}\, (\mathsf{PAIR}\, a\, b) \to_\beta^* a$
    (b) $\mathsf{SND}\, (\mathsf{PAIR}\, a\, b) \to_\beta^* b$