Exercícios resolvidos da Ficha 8

Exercício 1

Considere a seguinte expressão A da linguagem de programação funcional estudada:

$$\mathsf{let}\ f \equiv \lambda\langle x, y\rangle.\, x + y\ \mathsf{in}\ f\,\langle 5, 6\rangle$$

1. Construa uma árvore de prova do juízo $\vdash A : \mathsf{Int}$.
2. Calcule o valor de A, usando a semântica de avaliação *call-by-value* da linguagem (deve começar por traduzir o açúcar sintáctico utilizado).

Resolução

1. Árvore de prova:

$$
\begin{array}{l}
\vdash \mathsf{let}\ f \equiv \lambda\langle x, y\rangle.\, x + y\ \mathsf{in}\ f\,\langle 5, 6\rangle : \mathsf{Int} \\
\quad \mathbf{1}.\vdash \lambda\langle x, y\rangle.\, x + y : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \\
\qquad \mathbf{1}.\ \langle x, y\rangle : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \vdash x + y : \mathsf{Int} \\
\qquad\quad \mathbf{1}.\ x : \mathsf{Int}, y : \mathsf{Int} \vdash x + y : \mathsf{Int} \\
\qquad\qquad \mathbf{1}.\ x : \mathsf{Int}, y : \mathsf{Int} \vdash x : \mathsf{Int} \\
\qquad\qquad \mathbf{2}.\ x : \mathsf{Int}, y : \mathsf{Int} \vdash y : \mathsf{Int} \\
\quad \mathbf{2}.\ f : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \vdash f\,\langle 5, 6\rangle : \mathsf{Int} \\
\qquad \mathbf{1}.\ f : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \vdash f : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \\
\qquad \mathbf{2}.\ f : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \vdash \langle 5, 6\rangle : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \\
\qquad\quad \mathbf{1}.\ f : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \vdash 5 : \mathsf{Int} \\
\qquad\quad \mathbf{2}.\ f : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \vdash 6 : \mathsf{Int}
\end{array}
$$

2. Sequência de redução seguindo a estratégia CBV:

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{let}\ f \equiv \lambda\langle x, y\rangle.\, x + y\ \mathsf{in}\ f\,\langle 5, 6\rangle \\
\doteq (\lambda f.\, f\,\langle 5, 6\rangle)\,(\lambda\langle x, y\rangle.\, x + y) \\
\doteq (\lambda f.\, f\,\langle 5, 6\rangle)\,(\lambda v.\, \mathsf{let}\ x \equiv v.1, y \equiv v.2\ \mathsf{in}\ x + y) \\
\doteq (\lambda f.\, f\,\langle 5, 6\rangle)\,(\lambda v.\, (\lambda x.\lambda y.\, x + y)\, v.1\, v.2) \\
\to (\lambda v.(\lambda x.\lambda y.\, x + y)\, v.1\, v.2)\,\langle 5, 6\rangle \\
\to (\lambda x.\lambda y.\, x + y)\,\langle 5, 6\rangle.1\,\langle 5, 6\rangle.2 \\
\to (\lambda x.\lambda y.\, x + y)\, 5\,\langle 5, 6\rangle.2 \\
\to (\lambda y.\, 5 + y)\,\langle 5, 6\rangle.2 \\
\to (\lambda y.\, 5 + y)\, 6 \\
\to 5 + 6 \\
\to 11
\end{array}
$$

Exercício 2

Considere a seguinte expressão FACT

$$\mathsf{letrec\ fact} \equiv \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n * \mathsf{fact}\,(n-1)\ \mathsf{in\ fact}$$

1. Construa uma árvore de prova do juízo $\vdash \mathsf{FACT} : \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$.
2. Prove que a avaliação CBV de $\mathsf{letrec\ fact} \equiv \ldots\ \mathsf{in}\ (\mathsf{fact}\,1)$ produz o valor 1.

Resolução

1. ...
2. Vamos mostrar que

$$\mathsf{letrec\ fact} \equiv \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n * \mathsf{fact}\,(n{-}1)\ \mathsf{in}\ (\mathsf{fact}\,1)\ \Rightarrow\ 1$$

mas fazendo a redução passo a passo. Seja

$\bigstar \doteq \mathsf{letrec\ fact} \equiv \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n{*}\mathsf{fact}\,(n{-}1)\ \mathsf{in\ if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n{*}\mathsf{fact}\,(n{-}1)$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{letrec\ fact} \equiv \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n * \mathsf{fact}\,(n{-}1)\ \mathsf{in}\ (\mathsf{fact}\,1)\\
&\to (\lambda \mathsf{fact}.\, \mathsf{fact}\,1)\,(\lambda n.\,\bigstar)\\
&\to (\lambda n.\bigstar)\,1\\
&\to \mathsf{letrec\ fact} \equiv \ldots\ \mathsf{in\ if}\ 1 = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n * \mathsf{fact}\,(1{-}1)\\
&\to (\lambda \mathsf{fact}.\, \mathsf{if}\ 1 = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 1 * \mathsf{fact}\,(1{-}1))\,(\lambda n.\bigstar)\\
&\to \mathsf{if}\ 1 = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 1 * (\lambda n.\bigstar)\,(1{-}1)\\
&\to \mathsf{if\ False\ then}\ 1\ \mathsf{else}\ 1 * (\lambda n.\bigstar)\,(1{-}1)\\
&\to 1 * (\lambda n.\bigstar)\,(1{-}1)\\
&\to 1 * (\lambda n.\bigstar)\,0\\
&\to 1 * \mathsf{letrec\ fact} \equiv \ldots\ \mathsf{in\ if}\ 0 = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0 * \mathsf{fact}\,(0{-}1)\\
&\to 1 * (\lambda \mathsf{fact}.\, \mathsf{if}\ 0 = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0 * \mathsf{fact}\,(0{-}1))\,(\lambda n.\bigstar)\\
&\to 1 * \mathsf{if}\ 0 = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0 * (\lambda n.\bigstar)\,(0{-}1))\\
&\to 1 * \mathsf{if\ True\ then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0 * (\lambda n.\bigstar)\,(0{-}1))\\
&\to 1 * 1\\
&\to 1
\end{aligned}$$