Lambda Calculus

Maria João Frade

HASLab - INESC TEC
Departamento de Informática, Universidade do Minho

2019/2020

Lambda calculus

- Formalismo introduzido na década de 1930 por Alonzo Church como uma maneira de formalizar o conceito de computabilidade efectiva.
- O λ-calculus forneceu uma base teórica sólida para as linguagens de programação funcionais.
- O λ-calculus é a menor linguagem de programação que existe.
  - O λ-calculus é universal no sentido de que qualquer função computável pode ser expressa e avaliada usando esse formalismo. É, portanto, equivalente às máquinas de Turing.
  - No entanto, o λ-calculus enfatiza o uso de regras de transformação e não se importa com a máquina real que as implementa.

Lambda calculus

- O λ-calculus puro lida apenas com variáveis, definição de funções, e aplicação de funções.
- Se acrescentarmos outros tipos de dados e operações (tal com inteiros e adição) temos um λ-calculus aplicado.
- No λ-calculus puro não há distinção de tipos. Todas as expressões pertencem a um único universo.
- Do ponto de vista computacional o λ-calculus puro é mais simples de descrever, mas do ponto de vista matemático e lógico é o contrário:
  - o λ-calculus tipificado pode ser entendido em termos das funções matemáticas usuais,
  - enquanto o puro levanta problemas em termos fundacionais.

Sintaxe

Termos

- Assume-se um conjunto enumerável de variáveis: $x, y, z, \ldots$
- As expressões (ou termos) do lambda calculus puro têm a seguinte sintaxe abstracta

$$e ::= x \mid \lambda x.\, e \mid e_1\, e_2$$

denominadas *variáveis*, *abstrações* e *aplicações*, respectivamente.

Uma expressão pode estar entre parêntesis mas, para os evitar, segue-se a seguinte convenção:

- a aplicação é associativa à esquerda;
- o âmbito da abstração λ estende-se para a direita o mais possível.

- $a\, b\, c\, d$ em vez de $((a\, b)\, c)\, d$
- $\lambda x.\, \lambda b.\, f\, x\, (\lambda z.\, b\, z)$ em vez de $\lambda x.\, (\lambda b.\, ((f\, x)\, (\lambda z.\, b\, z)))$
- $(\lambda y.\, \lambda x.\, x\, (y\, a)\, y)\, (\lambda z.\, f\, z)$ em vez de $(\lambda y.\, (\lambda x.\, (x\, (y\, a))\, y))\, (\lambda z.\, f\, z)$

Variáveis livres e ligadas

FV(e) denota o conjunto das *variáveis livres* de uma expressão e

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{FV}(x) & = & \{x\} \\ \mathsf{FV}(\lambda x.\, a) & = & \mathsf{FV}(a) \backslash \{x\} \\ \mathsf{FV}(a\, b) & = & \mathsf{FV}(a) \cup \mathsf{FV}(b) \end{array}$$

BV(e) denota o conjunto das *variáveis ligadas* de uma expressão e

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{BV}(x) & = & \{\} \\ \mathsf{BV}(\lambda x.\, a) & = & \mathsf{BV}(a) \cup \{x\} \\ \mathsf{BV}(a\, b) & = & \mathsf{BV}(a) \cup \mathsf{BV}(b) \end{array}$$

Variáveis livres e ligadas

- Uma variável x diz-se *livre* em e se $x \in \mathsf{FV}(e)$.
- Uma variável x diz-se *ligada* em e se $x \in \mathsf{BV}(e)$.
- Uma expressão sem variáveis livres diz-se *fechada* (ou *combinador*).

Uma variável pode ser simultaneamente livre e ligada numa dada expressão. Por exemplo,

- $(x\, y)\, \lambda z.\, \lambda x.\, x\, z$
- $\lambda x.\, x\, (\lambda y.\, y\, a)\, x\, y$

Semântica

- O significado das expressões é dado operacionalmente através de uma regra de redução de capta o efeito de aplicar uma função ao seu argumento.
- Essa redução tem o nome de redução β

$$(\lambda x.\, a)\ b \ \rightarrow\ a[b/x]$$

onde $a[b/x]$ representa o termo obtido por subtituição das ocorrências livres de x em a por b.

- A substituição é uma operação "melindrosa".
  - Qual o efeito da substituição $(\lambda z.\, z\, x)[z/x]$?
  - Uma abordagem "naive" conduz ao problema de captura de variáveis!.

Substituição (abordagem de Church)

Para evitar o problema de captura de variáveis livres, a definição original de Church para a substituição foi a seguinte:

$$\begin{array}{ll} x[a/x] = a & \\ y[a/x] = y & \text{se } x \neq y \\ (\lambda x.\, b)[a/x] = (\lambda x.\, b) & \\ (\lambda y.\, b)[a/x] = (\lambda y.\, b[a/x]) & \text{se } x \notin \mathsf{FV}(b) \text{ ou } y \notin \mathsf{FV}(a) \\ (\lambda y.\, b)[a/x] = (\lambda z.\, (b[z/y])[a/x]) & \text{se } x \in \mathsf{FV}(b) \text{ e } y \in \mathsf{FV}(a) \\ & \text{sendo } z \text{ uma variável fresca} \\ (e_1\, e_2)[a/x] = (e_1[a/x])\, (e_2[a/x]) & \end{array}$$

Conversão α

- Como sabemos, o nome das variáveis ligadas não é importante. Por exemplo,

$$\sum_{x=1}^{20} x \quad \text{e} \quad \sum_{y=1}^{20} y$$

descrevem o mesmo somatório.

- Church introduziu na apresentação original do λ-calculus uma noção de conversão α que traduz esta ideia.

α-conversão

$$\lambda x.\, e = \lambda y.\, e[y/x] \quad \text{, se } \; y \notin \mathrm{FV}(e)$$

Esta conversão induz uma relação de equivalência nos termos.

Convenção das variáveis

Para simplificar o tratamento formal do λ-calculus é usual trabalhar-se ao nível da classes de equivalência geradas pela α-conversão.

- Considera-se um λ-termo como um representante da sua classe de α-equivalência.
- Interpretamos $e[a/x]$ como uma operação na classe de equivalência, usando o representante que for conveniente de acordo com a seguinte convenção:

Convenção das variáveis

Todas as variáveis ligadas são escolhidas de forma a serem diferentes das variáveis livres.

Substituição

Assumindo a convenção das variáveis a definição de substituição fica simplificada:

Substituição

$$\begin{array}{ll} x[a/x] = a & \\ y[a/x] = y & \text{se } x \neq y \\ (\lambda y.\, b)[a/x] = (\lambda y.\, b[a/x]) & \\ (e_1\, e_2)[a/x] = (e_1[a/x])\,(e_2[a/x]) & \end{array}$$

Lema da substituição

Sejam x e y variáveis distintas e $x \notin \mathrm{FV}(e)$, então

$$(a[b/x])[e/y] = (a[e/y])[(b[e/y])/x]$$

Prova: Por indução na estrutura de a.

β-redução

- A redução β indica o efeito de aplicar uma função a um argumento.

β-redução

A β-redução, $\rightarrow_\beta$, é definida como o fecho compatível da regra

$$(\lambda x.\, a)\; b \;\rightarrow_\beta\; a[b/x]$$

- $\rightarrow_\beta^*$ é fecho reflexivo e transitivo de $\rightarrow_\beta$.
- $=_\beta$ é fecho reflexivo, simétrico e transitivo de $\rightarrow_\beta$.
- um termo $(\lambda x.\, a)\, b$ chama-se *β-redex* e a $a[b/x]$ o seu *contractum*

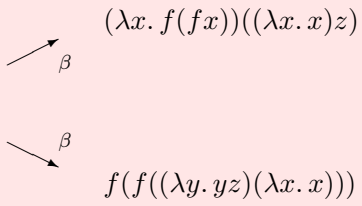
Uma expressão que não contém nenhum β-redex diz-se uma *forma normal*.

- Por fecho compatível entende-se que

$$\begin{array}{llll} \text{se} & a \rightarrow_\beta a' & \text{então} & ab \rightarrow_\beta a'b \\ \text{se} & b \rightarrow_\beta b' & \text{então} & ab \rightarrow_\beta ab' \\ \text{se} & a \rightarrow_\beta a' & \text{então} & \lambda x.\, a \rightarrow_\beta \lambda x.\, a' \end{array}$$

β-redexes

Uma expressão pode ter mais do que um β-redex. Por exemplo:



Exercício

Apresente as possíveis sequências de redução dos termos

- $(\lambda x.\, (\lambda y.\, y\, x)\, z)\, (z\, w)$
- $(\lambda u.\, \lambda v.\, v)((\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x))$

Confluência

Teorema (Church-Rosser)

Para qualquer expressão e, se $e \to_\beta^* e_1$ e $e \to_\beta^* e_2$, então existe uma expressão e' tal que $e_1 \to_\beta^* e'$ e $e_2 \to_\beta^* e'$.

Unicidade das normas normais.

A forma normal de uma expressão, se existir, é única.

Normalização

No que se refere à normalização, existem expressões e para as quais

- todas as sequências de redução com origem em e terminam

$$(\lambda x.\, f(fx))((\lambda x.\, x)z)$$

- nenhuma das sequências de redução com origem em e termina

$$(\lambda x.\, f\,(x\, x))(\lambda x.\, f\,(x\, x))$$

- apenas algumas das sequências de redução com origem em e terminam

$$(\lambda u.\, \lambda v.\, v)((\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x))$$

Estratégias de redução

A normalização (se possível) de um termo e a quantidade de esforço necessária para isso, pode depender da estratégia redução usada.

Chamamos *estratégia de redução* ao critério que é seguido para escolher o próximo β-redex a ser reduzido.

- **"Full beta-reduction":** qualquer β-redex pode ser seleccionado.
- **"Normal-order reduction":** o β-redex seleccionado é o mais à esquerda e mais externo.
- **"Applicative-order reduction":** o β-redex seleccionado é o mais à esquerda e mais interno.

"Normal-order reduction": *leftmost outermost* redex

Na **ordem normal de redução** escolhe-se sempre o redex mais à esquerda mais externo.

Exemplo de redução seguindo a ordem normal

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{(\lambda x.\, x\, ((\lambda y.\, y)\, x))}\, ((\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b)) \\
\to_\beta & \underline{((\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b))}\, ((\lambda y.\, y)\, ((\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b))) \\
\to_\beta & \underline{(\lambda b.\, b)}\, ((\lambda y.\, y)\, ((\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b))) \\
\to_\beta & \underline{(\lambda y.\, y)\, ((\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b))} \\
\to_\beta & \underline{(\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b)} \\
\to_\beta & (\lambda b.\, b)
\end{array}
$$

"Applicative-order reduction": *leftmost innermost* redex

Na **ordem aplicativa de redução** escolhe-se sempre o redex mais à esquerda mais interno.

Exemplo de redução seguindo a ordem aplicativa

$$
\begin{array}{rl}
 & (\lambda x.\, x\, \underline{((\lambda y.\, y)\, x)})\, ((\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b)) \\
\to_\beta & (\lambda x.\, x\, x)\, \underline{((\lambda a.\, a)\, (\lambda b.\, b))} \\
\to_\beta & \underline{(\lambda x.\, x\, x)\, (\lambda b.\, b)} \\
\to_\beta & \underline{(\lambda b.\, b)\, (\lambda b.\, b)} \\
\to_\beta & (\lambda b.\, b)
\end{array}
$$

Normalização

Exercício

Considere os termos

$$
\begin{array}{rcl}
I & = & (\lambda x.\, x) \\
K & = & (\lambda x.\lambda y.\, x) \\
S & = & (\lambda x.\lambda y.\lambda z.\, x\, z\, (y\, z)) \\
\Omega & = & ((\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x))
\end{array}
$$

Construa sequências de redução para as expressões abaixo, seguindo as diferentes estratégias de redução apresentadas.

- $S\, K\, K$
- $K\, S\, \Omega$
- $I\, (I\, (\lambda z.\, I\, z))$

Normalização

Uma expressão e diz-se *fortemente normalizável* se todas as sequências de redução com origem em e terminam; diz-se *(fracamente) normalizável* se existir alguma sequência de redução com origem em e que termina; e diz-se *não normalizável* se nenhuma sequência de redução com origem em e termina.

Será que existe alguma estratégia de redução que nos leve sempre a alcançar a forma normal de uma expressão, caso ela exista?

Sim, a *"normal-order reduction"*!

Teorema da standardização

Se existir alguma sequência de redução começada numa expressão e que termine, então sequência começada em e que segue a ordem normal de redução termina.

Formas canónicas

O processo de avaliação das linguagens de programação funcionais (LPFs) está intimamente ligado ao processo de redução de uma expressão à sua forma normal. Contudo, é um processo menos geral:

- Nas LPFs apenas se avaliam expressões fechadas (uma vez que um programa com variáveis livres não é bem formado).
- Em vez de reduzir uma expressão à sua forma normal, o processo de avaliação das LPFs termina assim que se obtém uma *forma canónica*.
  - A noção de forma canónica pode variar conforme a LPF em causa, mas inclui sempre as abstrações (que são as únicas formas canónicas do λ-calculus puro).

Formas canónicas

No λ-calculus puro uma *forma canónica* é uma abstração $\lambda x.\, e$.

Usaremos a letra v como meta-variável para representar uma forma canónica (ou *valor*).

Apresente a sequência de redução que segue a ordem normal de redução para o termo

$$(\lambda x.\, x\,(\lambda y.\, x\, y\, y)\, x)(\lambda z.\, \lambda w.\, z)$$

Repare que a norma normal é atinguida ao fim de 5 passos de redução, mas a primeira forma canónica é atinguida ao fim de 3 passos.

Formas canónicas

Ordem normal de avaliação

Dada uma expressão fechada e, diz-se que e *avalia para* v, e escrevemos $e \Rightarrow v$, quando v é a primeira forma canónica da sequência de redução começada em e que segue a ordem normal de redução.

Se tal forma canónica v não existir, dizemos que e *diverge*, e denotamos isso por $e{\uparrow}$.

Ordem normal de avaliação

Para uma expressão fechada e existem 3 possibilidades:

- A sequência da ordem normal de redução de e termina numa forma normal. Portanto, a sequência de redução contém pelo menos uma forma canónica. Ex:

$$(\lambda x.\, \lambda y.\, x\, y)(\lambda x.\, x)$$

- A sequência da ordem normal de redução de e não termina, mas contém uma forma canónica. Ex:

$$(\lambda x.\, \lambda y.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x)$$

- A sequência da ordem normal de redução de e não termina e não contém uma forma canónica. Ex:

$$(\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x)$$

Semântica "call-by-name"

- A terminologia usual usada nas LPFs para a ordem normal de avaliação é *"call-by-name evaluation"* ou *"lazy evaluation"*.
- O processo de avaliação pode ser descrito operacionalmente no estilo "small-step" ou "big-step".

Small-step semantics

$$(\text{CBN1}_{\text{ss}}) \qquad (\lambda x.\, e_1)\, e_2 \to e_1[e_2/x]$$

$$(\text{CBN2}_{\text{ss}}) \qquad \frac{e_1 \to e_1'}{e_1\, e_2 \to e_1'\, e_2}$$

Semântica "call-by-name"

Big-step semantics

$$(\text{CBN1}_{\text{bs}}) \qquad \lambda x.\, e \Rightarrow \lambda x.\, e$$

$$(\text{CBN2}_{\text{bs}}) \qquad \frac{e_1 \Rightarrow \lambda x.\, e \quad e[e_2/x] \Rightarrow v}{e_1\, e_2 \Rightarrow v}$$

- Na prática, a avaliação "call-by-name" proíbe reduções dentro de abstrações, e aplica as funções logo que possível (i.e., sem avaliar previamente o seu argumento).
- Variantes da avaliação "call-by-name" são usadas em linguagens de programação conhecidas, como por exemplo Haskell. O Haskell usa uma versão optimizada desta estratégia chamada *"call-by-need"*, onde várias ocorrências do mesmo argumento são avaliadas apenas uma única vez (através de uma gestão de termos partilhados).

Semântica "call-by-value"

- Uma outra estratégia de avaliação muito usada nas LPFs consiste em efectivar a aplicação de uma função ao seu argumento apenas quando o argumento já foi reduzido a um valor (i.e, à sua forma canónica).
- Esta estratégia denomina-se de *"eager evaluation"* ou *"call-by-value evaluation"* (terminologia mais usual nas LPFs)
- O processo de avaliação pode ser descrito operacionalmente no estilo "small-step" ou "big-step".

Semântica "call-by-value"

Small-step semantics

$$(\text{CBV1}_{\text{ss}}) \qquad (\lambda x.\, e)\, v \to e[v/x]$$

$$(\text{CBV2}_{\text{ss}}) \qquad \frac{e_1 \to e_1'}{e_1\, e_2 \to e_1'\, e_2}$$

$$(\text{CBV3}_{\text{ss}}) \qquad \frac{e \to e'}{v\, e \to v\, e'}$$

- Como podemos ver, dada uma aplicação $e_1\, e_2$, primeiro avalia-se e_1 até obter um valor, depois avalia-se e_2 até obter um valor, e só no fim efectivamos a aplicação da função.

Semântica "call-by-value"

- Para apresentar a "eager evaluation" como uma semântica big-step, precisamos de introduzir a seguinte relação

Dado um termo fechado e, denotamos por $e \Rightarrow_E v$ o facto de existir uma sequência de redução de e para v, onde cada passo corresponde a uma redução do β_E-redex mais à esquerda que não é um subtermo de uma forma canónica.

Um β_E-redex é um β-redex $(\lambda x.\, a)\, z$ onde z é um valor ou uma variável.

Big-step semantics

$$(\mathrm{CBV}_{\mathrm{bs}}) \qquad \lambda x.\, e \Rightarrow_E \lambda x.\, e$$

$$(\mathrm{CBV}_{\mathrm{bs}}) \qquad \frac{e_1 \Rightarrow_E \lambda x.\, e \qquad e_2 \Rightarrow_E v \qquad e[v/x] \Rightarrow_E v'}{e_1\, e_2 \Rightarrow_E v'}$$

"Strictness"

- Uma função diz-se *estrita* se diverge sempre que é aplicada a um argumento que diverge.
- A avaliação "call-by-value" é uma estratégia *estrita*, no sentido em que os argumentos das funções são sempre avaliados, independentemente de virem a ser ou não usados no corpo da função.
- Estratégias *não estritas* (ou *preguiçosas*), como é o caso do "call-by-name" e do "call-by-need", avaliam apenas os argumentos que são efectivamente usados pela função.

Exercício

Apresente a sequência de reduções correspondente à avaliação "call-by-name" e "call-by-value" para as seguintes expressões

- $(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y.\, y)(\lambda z.\, z))$
- $(\lambda x.\lambda y.\, y)\, ((\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x))$

Programação directa em λ-calculus

- Apesar da sua definição sucinta, o λ-calculus é muito poderoso.
- Podemos programar directamente em λ-calculus puro desde que a "execução" do programa seja entendida como a redução à forma normal, seguindo a ordem normal de redução.
- A apresentação do λ-calculus puro como uma linguagem de programação serve aqui apenas para ilustrar o seu poder.
- A ideia é codificar os boolenos, números naturais e outros tipos primitivos, com formas normais fechadas apropriadas (funções que imitam o comportamento desses tipos de dados).

Programação directa em λ-calculus

Booleanos

$$\mathsf{TRUE} \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, x \qquad \mathsf{FALSE} \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, y$$

Com esta codificação, uma expressão condicional "if b then e_1 else e_2" pode ser simplesmente escrita como $b\, e_1\, e_2$, dado que

$$\mathsf{TRUE}\, e_1\, e_2 \to_\beta^* e_1 \qquad \mathsf{FALSE}\, e_1\, e_2 \to_\beta^* e_2$$

Uma possível definição de operadores

$$\mathsf{NOT} \equiv \lambda b.\, \lambda x.\, \lambda y.\, b\, y\, x$$
$$\mathsf{AND} \equiv \lambda b.\, \lambda c.\, \lambda x.\, \lambda y.\, b\, (c\, x\, y)\, y$$

Exercício

Mostre que

- NOT TRUE $\to_\beta^*$ FALSE e NOT FALSE $\to_\beta^*$ TRUE
- AND FALSE TRUE $\to_\beta^*$ FALSE, etc.

Programação directa em λ-calculus

Exercício

Definições alternativas para NOT e AND poderão ser:

$$\begin{array}{rcl} \text{NOT} & \equiv & \lambda b.\, b\,\text{FALSE}\,\text{TRUE} \\ \text{AND} & \equiv & \lambda b_1.\, \lambda b_2.\, b_1\, b_2\,\text{FALSE} \end{array}$$

- Mostre que estes operadores têm o comportamento adequado.
- Proponha uma definição adequada para o operador OR.

Programação directa em λ-calculus

Numerais de Church

$$\begin{array}{rcl} \overline{0} & \equiv & \lambda f.\, \lambda x.\, x \\ \overline{1} & \equiv & \lambda f.\, \lambda x.\, f\, x \\ \overline{2} & \equiv & \lambda f.\, \lambda x.\, f\, (f\, x) \\ \ldots & & \end{array}$$

Exemplos de uma função e de um predicado

$$\begin{array}{rcl} \text{SUCC} & \equiv & \lambda n.\, \lambda f.\, \lambda x.\, f\, (n\, f\, x) \\ \text{ISZERO} & \equiv & \lambda n.\, \lambda x.\, \lambda y.\, n\, (\lambda z.\, y)\, x \end{array}$$

Exercício

Mostre que

- $\text{SUCC}\,\overline{n} \to^*_\beta \overline{n+1}$
- $\text{ISZERO}\,\overline{0} \to^*_\beta \text{TRUE}$ e $\text{ISZERO}\,\overline{n+1} \to^*_\beta \text{FALSE}$

Programação directa em λ-calculus

Uma codificação da adição e da multiplicação de númerais de Church

$$\begin{array}{rcl} \text{ADD} & \equiv & \lambda m.\, \lambda n.\, \lambda f.\, \lambda x.\, m\, f\, (n\, f\, x) \\ \text{MULT} & \equiv & \lambda m.\, \lambda n.\, \lambda f.\, m\, (n\, f) \end{array}$$

Exercício

Mostre que

- $\text{ADD}\,\overline{2}\,\overline{3} \to^*_\beta \overline{5}$
- $\text{MULT}\,\overline{2}\,\overline{3} \to^*_\beta \overline{6}$

Programação directa em λ-calculus

Recursão e combinadores de ponto fixo

- A definição de funções recursivas pode ser feita com o auxílio de um combinador de ponto fixo.
- O combinador Y é um dos mais simples e foi descoberto por Haskell Curry.

$$Y \equiv \lambda f.\, (\lambda x.\, f\, (x\, x))(\lambda x.\, f\, (x\, x))$$

- A ideia é que $Y\, G$ é ponto fixo da funcional G. Logo,

$$G\, (Y\, G) = Y\, G$$

Programação directa em λ-calculus

Vejemos o exemplo da função factorial

$$\mathsf{FACT}\ n\ =\ \texttt{if}\ n = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ n \times \mathsf{FACT}(n-1)$$

Abusando da notação podemos escrever

$$\mathsf{FACT}\ =\ \lambda n.\, \texttt{if}\ n = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ n \times \mathsf{FACT}(n-1)$$

$$\mathsf{G}\ =\ \lambda f.\, \lambda n.\, \texttt{if}\ n = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ n \times (f(n-1))$$

$$\mathsf{FACT}\ \equiv\ Y\, G$$

Com base nas definições apresentadas mostre que

$$\mathsf{FACT}\ =_\beta\ \lambda n.\, \texttt{if}\ n = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ n \times \mathsf{FACT}(n-1)$$

Programação directa em λ-calculus

- Para além de não ser prático programar em λ-calculus puro, as codificações de dados podem revelar propriedades que não são desejadas do ponto de vista das entidades que queremos representar. Por exemplo:
  - $\overline{0} = \mathsf{FALSE}$
  - Uma codifcação alternativa da função sucessor

    $$\mathsf{SUCC}' \equiv \lambda n.\, \lambda f.\, \lambda x.\, n\, f\, (f\, x)$$

    tem um comportamento diferente de SUCC quando aplicada a expressões que não representam números naturais.
- Estes problemas podem ser evitados programando num λ-calculus tipificado.