Compte rendu du TP n^o 1 Statistiques computationnelle

Maria Cherifa

22 octobre 2020

Exercice 1 :

Soit R une variable aléatoire avec une Rayleigh distribution avec un paramètre 1 et θ avec une distribution uniforme sur $[0, 2\,\pi]$, R et θ sont indépendantes.

1- Nous voulons prouver que $X = R\,\cos(\theta)$ et $Y = R\,\cos(\theta)$ suivent une loi Normale centrée réduite et X et Y sont indépendant. En effet ici nous pouvons utiliser la notion de vecteur gaussien, considérons une fonction h une fonction mesurable et calculons :

$$\begin{aligned} E(h(X,Y)) &= E(h(R\,\cos(\theta), R\,\cos(\theta))) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\,\pi} h(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta))r\,e^{\frac{-r^2}{2}}\,\frac{1}{2\,\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

On utilise un changement de variable en coordonnées polaires et on trouve :

$$\begin{aligned} E(h(X,Y)) &= \int\int_{\mathbf{R}^2} h(x,y)\,\frac{e^{x^2+y^2}}{2\,\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= E(h(N_1, N_2)) \end{aligned}$$

On constate bien que $\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_2)$. Donc X et Y forment un vecteur gaussien on déduit alors que X et Y sont indépendants.

2- Construction d'un algorithme pour simuler des gausiennes indépendantes :

Etape 1 : simuler une uniforme sur $[0, 2\,\pi]$.

Etape 2 : simuler une loi R.

Etape 3 : Calculer le vecteur $(R\,\cos(\theta), R\,\sin(\theta))$.

Si on sait simuler une uniforme alors on peut déduire la simulation de la loi de R, en effet on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(r \geq R) &= F_R(r) \\ &= \int_0^{+\infty} r\,e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}r = 1 - e^{\frac{-r^2}{2}} \end{aligned}$$

donc $R \sim F_R^{-1}(U) \sim \sqrt{-2\log(1-U)}$ ou $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, donc on peut simuler R à partir de U.

3-(a)- On cherche la loi de (V_1, V_2) à la fin de la boucle c'est à dire $loi((V_1, V_2)) \sim loi((V_1, V_2)/V_1^2+V_2^2 < 1)$, de plus $V_1 = 2\,U_1 - 1$ et $V_2 = 2\,U_2 - 1$ et U_1 et U_2 sont indépendantes ce qui implique que V_1 et V_2 le sont aussi, on peut alors déduire alors que V_1 et V_2 sont aussi des unifomes sur $[0,1]$.

(b)- On veut voir que T et V sont indépendantes et calculer leurs lois. Prouvons d'abord l'indépendance de V et T, soit h une fonction mesurable alors :

$$\begin{aligned} E(h(T,V)) &= E(h\left(\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}, (V_1^2+V_2^2)\right)) \\ &= \int h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, (v_1^2+v_2^2)\right) f_{V_1,V_2}(v_1,v_2)\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 \end{aligned}$$

on sait que $f_{V_1,V_2}(v_1,v_2) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{v_1^2+v_2^2\leq 1}$

$$E(h(T,V)) = \int_{v_1^2+v_2^2\leq 1} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, (v_1^2+v_2^2)\right)\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2$$

En utilisant le changement de variable suivant $v_1 = t\sqrt{v}$ et $v_2 = \sqrt{v}\sqrt{1-t^2}$, le determinant du jacobien de cette transformation est égal à $\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}$, donc l'intégrale devient :

$$E(h(T,V)) = 2\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{1}{\pi}h(t,v)\,\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

On peut du coup déduire que $f_{T,V}(t,v) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\mathbf{1}_{[-1,1]}(t) \times \mathbf{1}_{[0,1]}(v)$ donc on voit bien que $f_{T,V}(t,v) = f_T(t) \times f_V(v)$ et donc T et V sont indépendantes. De plus $f_V(v) = \mathbf{1}_{[0,1]}(v)$ ce qui implique que V suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Pour T, considérons h une fonction mesurable on a alors :

$$E(h(T)) = \int_{-1}^{1} h(t)\,\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

avec le changement de variables : $\theta = \arccos t$ et donc $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$, et l'intégrale précédente devient :

$$E(h(T)) = \int_0^{\pi} h(\cos\theta)\,\frac{1}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

Donc on constate que $T \sim \cos\theta$.

(c)- $S = \sqrt{-2\log(V_1^2+V_2^2)} = \sqrt{-2\log(V)}$, comme V est une uniforme sur $[0,1]$ alors on peut voir que S est une loi de Rayleigh, et donc $X = S\,T$ ou $T \sim \cos\theta$ ce qui implique que $X = S\,T = R\cos\theta \sim \mathcal{N}(0,1)$, de même pour $Y = S\,\frac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}} = R\sin\theta \sim \mathcal{N}(0,1)$, et donc comme vu précédemment nous avons bien $(X,Y) \sim \mathcal{N}(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, I_2)$.

(d)- proba$= \frac{|\text{boule de rayon } 1|}{|[-1,1]^2|} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2 :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov à valeurs dans $[0,1]$.

1- On veut prouver que le kernel de transition de la chaine de Markov est égal à la formule donnée. En effet :

$$\mathrm{P}(X_{n+1} \in A/X_n) = \mathrm{E}(\mathbf{1}_{X_{n+1}\in A}/X_n)$$

Dans ce cas on sait par hypothese que X_{n+1} suit une uniforme sur $[0,1]$ pour n'importe qu'elle X_n alors on trouve bien,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{n+1} \in A/X_n) &= |A \cap [0,1]| \\ &= \int_{A\cap[0,1]} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

maintenant considérons le cas ou $X_n = \frac{1}{m}$, avec $K_n \sim Ber(X_n^2)$ alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{n+1} \in A/X_n = \frac{1}{m}) &= \mathrm{E}(\mathbf{1}_{X_{n+1}\in A}/X_n = \frac{1}{m}) \\ &= E_{K_n}(E(\mathbf{1}_{X_{n+1}\in A}/X_n, K_n)/X_n) \\ &= X_n^2\, E(\mathbf{1}_{X_{n+1}\in A}/X_n, K_n = 1) + (1 - X_n^2)E(\mathbf{1}_{X_{n+1}\in A}/X_n, K_n = 0) \\ &= X_n^2 \int_{[0,1]\cap A} \mathrm{d}t + (1 - X_n^2)\delta_{\frac{1}{m+1}}(A)\end{aligned}$$

2- On veut prouver que la distribution uniforme sur $[0,1]$ notée π est invariante pour P, c'est à dire que que $\pi\, P = \pi$. En effet en calculant :

$$\begin{aligned}\pi\, P(x, A) &= \int_{\mathbf{R}} P(x, A)\, \pi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 P(x, A)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

en prenant $B = \frac{1}{m}, m \in \mathbf{N}^*$, l'intégrale précédente peut alors s'écrire sous cette forme :

$$\begin{aligned}\pi\, P(x, A) &= \int_{\mathbf{R}} P(x, A)\, \pi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 P(x, A)\mathrm{d}x \\ &= \int_B P(x, A)\mathrm{d}x + \int_{[0,1]\setminus B} P(x, A)\mathrm{d}x \\ &= 0 + \int_{[0,1]\setminus B} |A \cap [0,1]|\mathrm{d}x \\ &= |A \cap [0,1]| \\ &= \pi\end{aligned}$$

3-pour $x \notin B$, et f une fonction mesurable bornée, calculons $Pf(x)$:

$$Pf(x) = \int_0^1 f(y)\mathrm{P}(x, \mathrm{d}y) = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$$

de plus :

$$P^2 f(x) = \int_0^1 \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$$

Nous pouvons alors déduire que :

$$P^n f(x) = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$$

4- Calculons $P^n(x, \frac{1}{m+n})$:

$$\begin{aligned}
P^n(\frac{1}{m}, \frac{1}{m+n}) &= \int_{[0,1]} P^{n-1}(x, \mathrm{d}y) P(y, \frac{1}{m+n}) \\
&= P^{n-1}(\frac{1}{m}, \frac{1}{m+n-1}) \left(1 - (\frac{1}{m+n-1})^2\right) \\
&= \frac{(m+n)(m+n-2)}{(m+n-1)^2} P^{n-1}(\frac{1}{m}, \frac{1}{m+n-1})
\end{aligned}$$

et donc en itérant on aura :

$$\begin{aligned}
P^n(\frac{1}{m}, \frac{1}{m+n}) &= \frac{(m+n)(m+n-2)}{(m+n-1)^2} \frac{(m+n-1)(m+n-3)}{(m+n-2)^2} \ldots\ldots \frac{(m+1)(m-1)}{(m)^2} \\
&= \frac{m+n}{m+n-1} \times \frac{m-1}{m}
\end{aligned}$$

4-b On veut voir si $P^n(x, A)$ converge vers $\pi(A)$: on a $P^n(x, A) > P^n(x, \frac{1}{m+n})$ or $P^n(x, \frac{1}{m+n}) = \frac{m+n}{m+n-1} \times \frac{m-1}{m}$ qui tend vers $\frac{m-1}{m}$ quand n tend vers l'infini donc on déduit que $P^n(x, A)$ ne converge pas vers $\pi(A)$.