

# Modelação de Sistemas Físicos

## 7ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 5: Trabalho e energia

Bibliografia:

Cap. 5: Serway, cap. 7 e 8; Sørenssen, cap. 10 e 11; Villate, cap. 6

## Cap. 5 Trabalho e Energia



$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t)$$

obtemos a velocidade e a posição em função do tempo

Equivalente à equação fundamental da dinâmica

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad , d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

ao longo da trajetória  $C$ .

A 1D:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} m a_x dx$$

Esta formulação permite determinar a relação da velocidade com a posição, (mesmo sem sabermos as relações temporais), pois a força em muitos casos depende da posição

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

A partir da posição  $C_0$  até à posição  $C_1$ .

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{Trabalho} = W_{0,1}$$

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \text{Energia cinética}$$

Se soubermos  $|\vec{v}_0|$  e o trabalho efetuado  $W_{0,1}$ , obtemos  $|\vec{v}_1|$

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m \vec{a} \cdot d\vec{r} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \text{ou} \quad d\vec{r} = \vec{v} dt \qquad \frac{d}{dt} [v_x(t)^2] = 2 \frac{dv_x(t)}{dt} v_x(t)$$

$$\int_C m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} m \vec{a}(t) \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} m \left( \frac{dv_x}{dt} v_x + \frac{dv_y}{dt} v_y + \frac{dv_z}{dt} v_z \right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} [v_x(t)^2] + \frac{d}{dt} [v_y(t)^2] + \frac{d}{dt} [v_z(t)^2] \right) dt = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= \frac{1}{2} m (|\vec{v}|^2) \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

**Exemplo de aplicação: (problema 5.1)**

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que  $x$  é a posição do átomo e  $b$  a distância interatômica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição  $x_0$  com velocidade  $v_{0x}$ , qual a dependência da velocidade em função da posição? É possível integrar analiticamente e calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

A 1D

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

**Exemplo de aplicação: (problema 5.1)**

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que  $x$  é a posição do átomo e  $b$  a distância interatômica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição  $x_0$  com velocidade  $v_{0x}$ , como depende a velocidade em função da posição?

A 1D

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b} dx = -F_0 \frac{b}{2\pi} \left( -\cos \frac{2\pi x}{b} \right) \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{b F_0}{2\pi} \left[ \cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right]$$

$$\frac{b F_0}{2\pi} \left[ \cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right] = \frac{1}{2} m v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2$$

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right], \quad x_1 \text{ é uma posição qualquer}$$

**Exemplo de aplicação: (problema 5.1)**

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que  $x$  é a posição do átomo e  $b$  a distância interatômica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição  $x_0$  com velocidade  $v_{0x}$ , como depende a velocidade em função da posição?

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right], \quad x_1 \text{ é uma posição qualquer}$$

$$x_0 = 0,$$

$$v_x = \pm \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x}{b} - 1 \right]}$$

+ sentido positivo do eixo OX

- sentido negativo do eixo OX



## Cap. 5 Energia e Trabalho

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

Exemplo:  $F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b} \Rightarrow v_x = \pm \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x}{b} - 1 \right]}$  obtemos a velocidade em função da posição

Muitas forças relevantes dependem da posição ( e outras constantes):

Gravítica Peso:  $\vec{P} = m \vec{g}$

Gravítica Geral:  $\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Elástica:  $\vec{F} = -k \vec{r}$

Elétrica:  $\vec{F}_{elet} = -k \frac{q Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Elétrica num campo:  $\vec{F}_{elet} = q \vec{E}_{elet}$

Forças que não dependem da posição:

$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}| \vec{v}$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

### Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

A quantidade  $\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$  chama-se Energia Cinética. Indica-se por  $E_c = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$  e a unidade é joule (J),  $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$

### Sobreposição do trabalho:

Notar:  $\vec{F}$  é a força resultante de todas as forças aplicadas  $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i W_i \quad W_i = \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

Teorema Trabalho – Energia

Trabalho realizado por uma força constante  $F_x = F_0$

Ex: 1D – O carro a acelerar ou a travar

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} F_0 dx = F_0 (x_1 - x_0) = F_0 \Delta x = \begin{cases} + & \text{se força e deslocamento mesmo sentido} \\ - & \text{se força e deslocamento sentidos opostos} \end{cases}$$

- caso: Peso  $F_y = -mg$  ( eixo OY positivo a apontar para cima)

$$W_{0,1} = -m g (y_1 - y_0) = m g (y_0 - y_1) = \begin{cases} + & y_0 > y_1 : \text{ponto inicial mais alto} \\ - & y_0 < y_1 : \text{ponto inicial mais baixo} \end{cases}$$

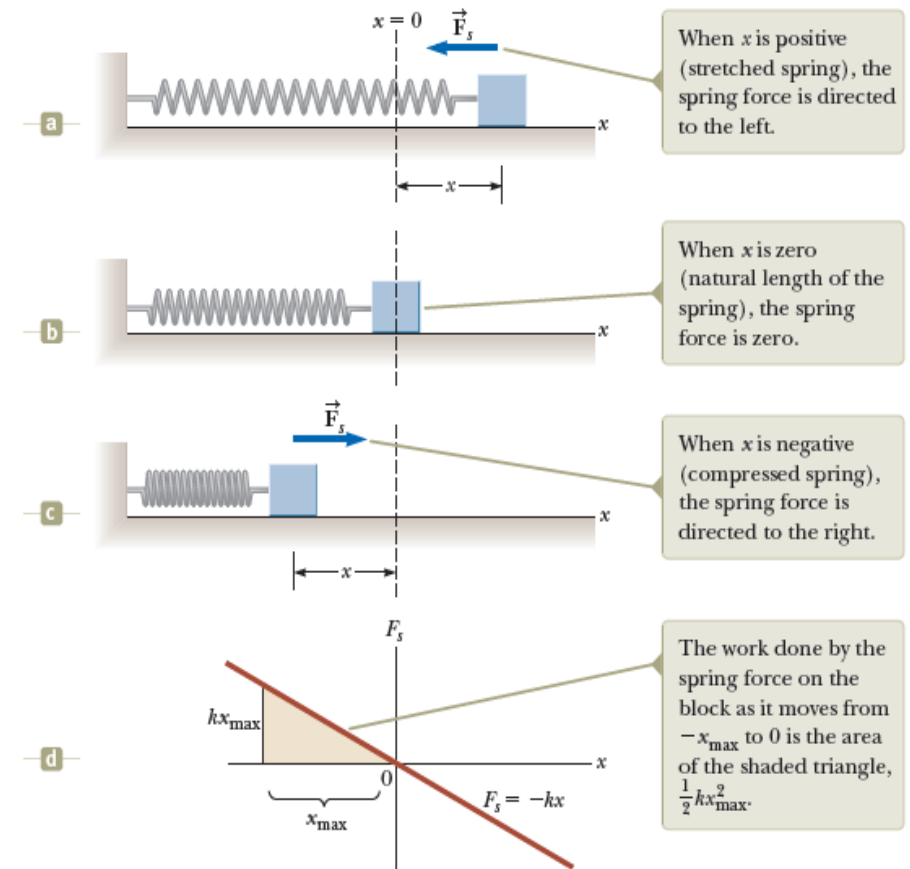
Teorema Trabalho – Energia

Trabalho realizado por uma força elástica  $\vec{F} = -k \vec{r}$

Ex: 1D –

$$F_x = -k x$$

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} -k x dx = -\frac{1}{2} k(x^2) \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{1}{2} k(x_0^2 - x_1^2)$$



## Cap. 5 Energia e Trabalho

Teorema Trabalho – Energia

$$W_{0,1} = \frac{1}{2} m v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2$$

Trabalho realizado por uma força constante

$$F_y = -mg \qquad W_{0,1} = m g y_0 - m g y_1$$

Trabalho realizado por uma força elástica

$$F_x = -k x \qquad W_{0,1} = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

Trabalho realizado por uma força constante  $F_y = -mg$   $E_p = m g y$  ou  $E_p = m g y + Constante$

Trabalho realizado por uma força elástica  $F_x = -k x$   $E_p = \frac{1}{2} k x^2$  ou  $E_p = \frac{1}{2} k x^2 + Constante$

Esta constante é à nossa escolha!

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad (\text{forças conservativas})$$

## Cap. 5 Energia e Trabalho

Teorema Trabalho – Energia

$$W_{0,1} = \frac{1}{2} m v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = E_{c1} - E_{c0}$$

Por forças dependem só da posição

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$E_{c1} - E_{c0} = E_{p0} - E_{p1}$$

Ou,

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c0} + E_{p0}$$

Os pontos inicial (0) e final (1) são quaisquer:

$$E_c + E_p = \text{constante em todo o movimento}$$

Lei da conservação da Energia Mecânica       $E = E_c + E_p$

$E_p$  outra forma de energia : Energia Potencial

Lei da conservação da Energia Mecânica      $E = E_c + E_p$

Por forças dependem só da posição

Peso:      $E = \frac{1}{2} m v_y^2 + mgy$

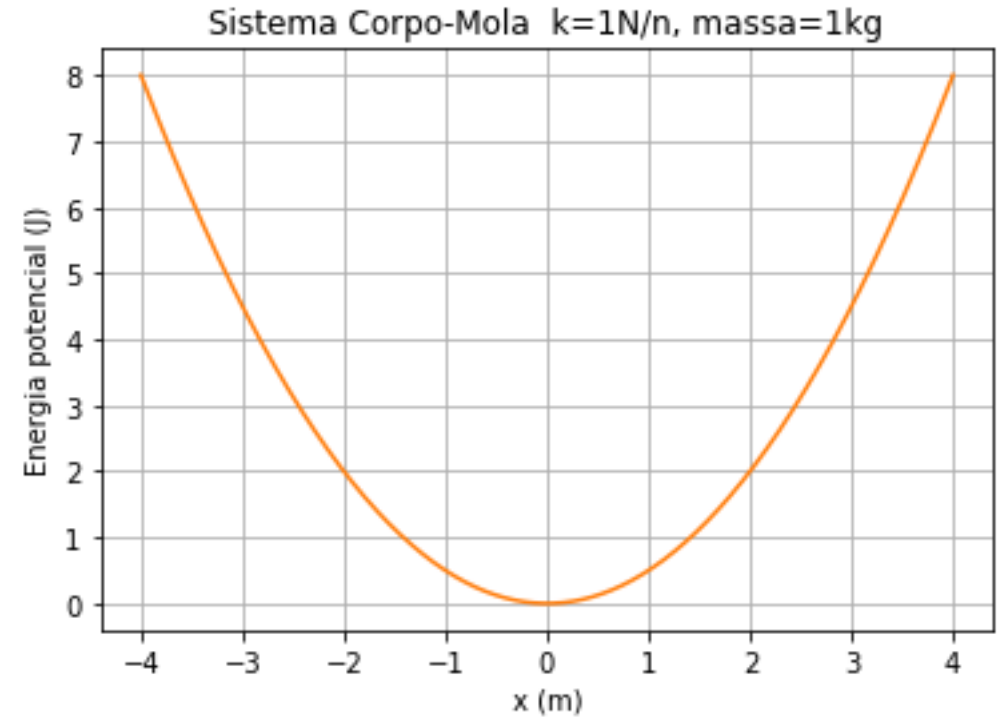
Elástica      $E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$

Temos sempre a velocidade num ponto como função da posição (se soubermos as condições iniciais ou equivalente)

## Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

Sistema mola-corpo

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$



1. Se a energia total for  $E = 8 \text{ J}$

O corpo não se desloca em  $x < -0.4 \text{ m}$  nem em  $x > 0.4 \text{ m}$

2. Pontos em que a  $E_p$  é plana, é um ponto de equilíbrio, pois  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$



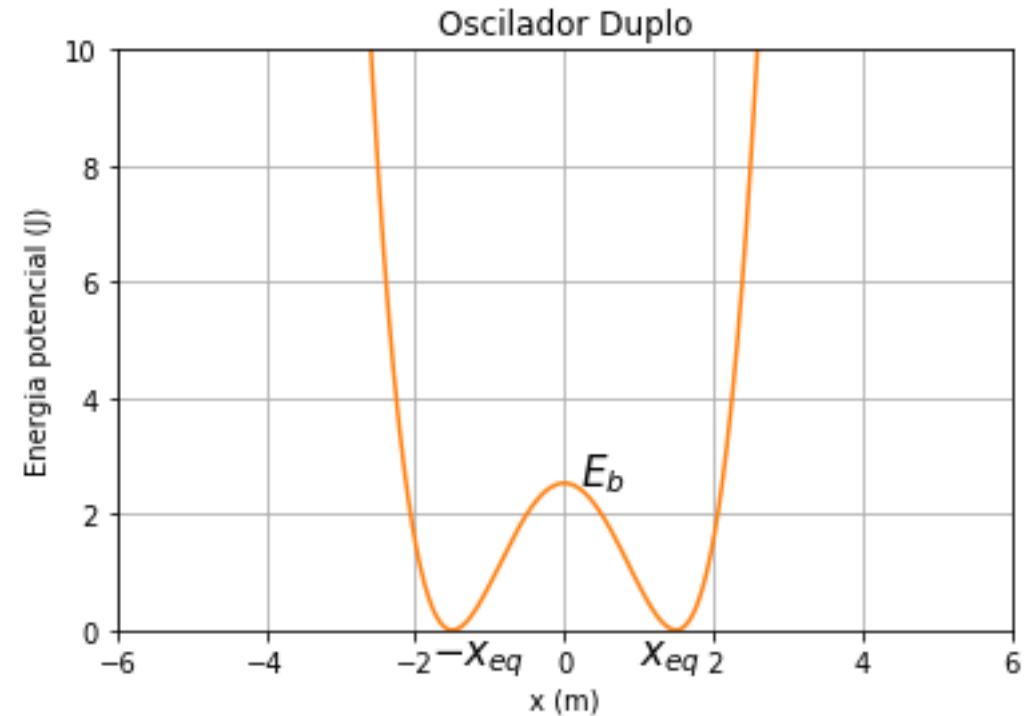
## Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

Sistema mola-corpo  $E_p = \frac{1}{2}k(x^2 - x_{eq}^2)^2$

Pontos de equilíbrio  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

Estável: 2 pontos  $(-x_{eq}, 0)$  e  $(x_{eq}, 0)$

Instável: 1 ponto  $(0, E_b)$



1. Se a energia total do corpo for  $E < E_b$

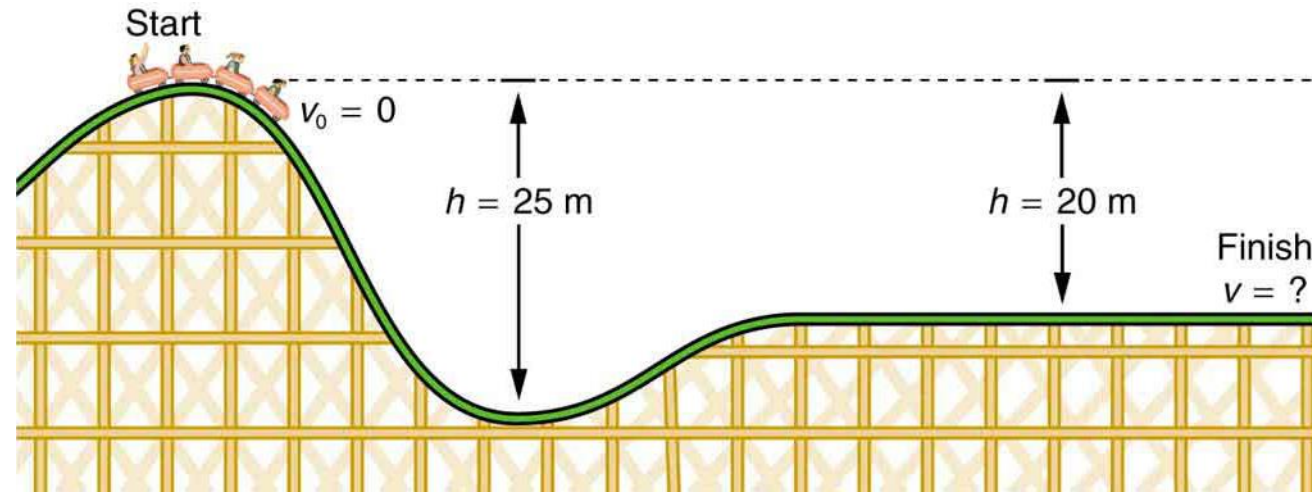
O corpo desloca-se ou na parte esquerda ou (exclusive) na parte direita, à volta de  $x_{eq}$ , limitado pelas posições em que a  $E_p = E$

2. Se a energia total do corpo for  $E > E_b$

O corpo desloca-se na parte esquerda e na parte direita, à volta de  $x_{eq}$ , limitado pelas posições em que a  $E_p = E$

## Diagrama de Energia

Carruagem de massa  $m$



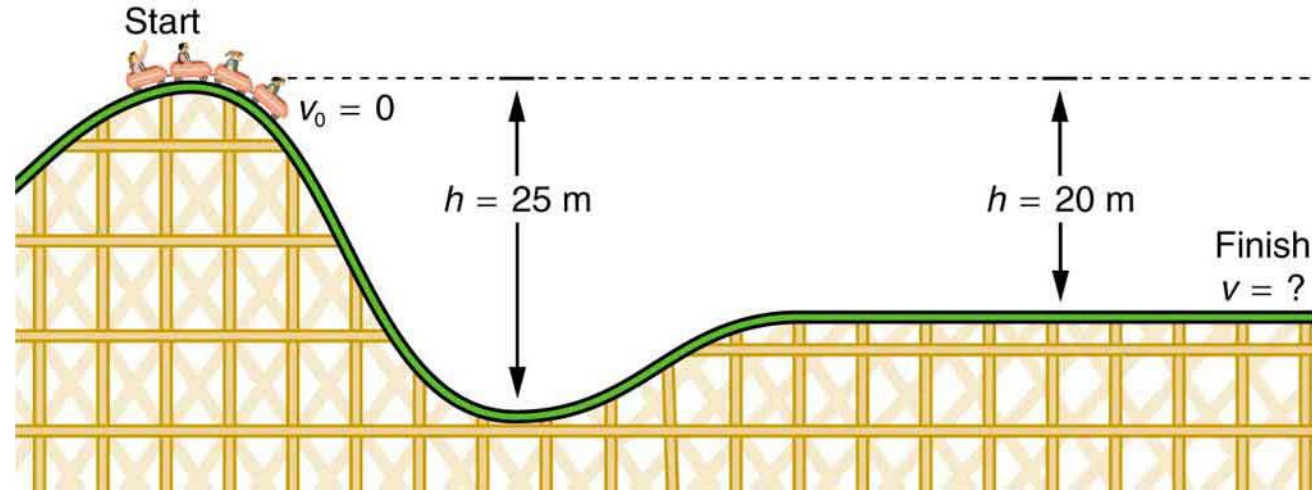
- Pontos de equilíbrio:  $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$   
 o mais baixo: ponto de equilíbrio estável  
 cimo da montanha: ponto de equilíbrio instável (a mais pequena perturbação faz o corpo sair da posição de equilíbrio)

- Energia Mecânica: Instante inicial  $v_0 = 0$  e  $y_0 = 25 \text{ m}$  ( ponto mais baixo  $y = 0$ )

$$E = E_c + E_p = 0 + m g y_0$$

Diagrama de Energia

Carruagem de massa  $m$



2. Energia Mecânica : Instante inicial  $v_0 = 0$  e  $y_0 = 25 \text{ m}$  ( ponto mais baixo  $y = 0$  )

$$E = E_c + E_p = 0 + m g y_0$$

**Problema:**

Se a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade no

- a) No ponto mais baixo?
- b) na zona plana?

## Sistema Mola-Corpo

Mola de constante elástica  $k$   
 Corpo de massa  $m$   
 Posição de equilíbrio  $x_{eq} = 0$

Força:  $F_x = -k x$

Energia potencial:  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

Energia mecânica conserva-se:  $E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$

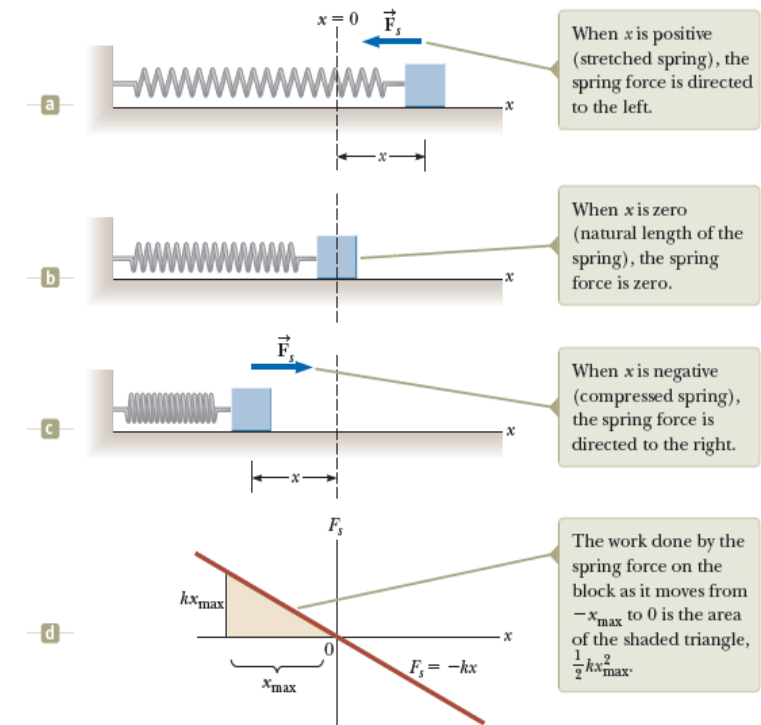
### Problema:

Nas condições do problema 2.6:

Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

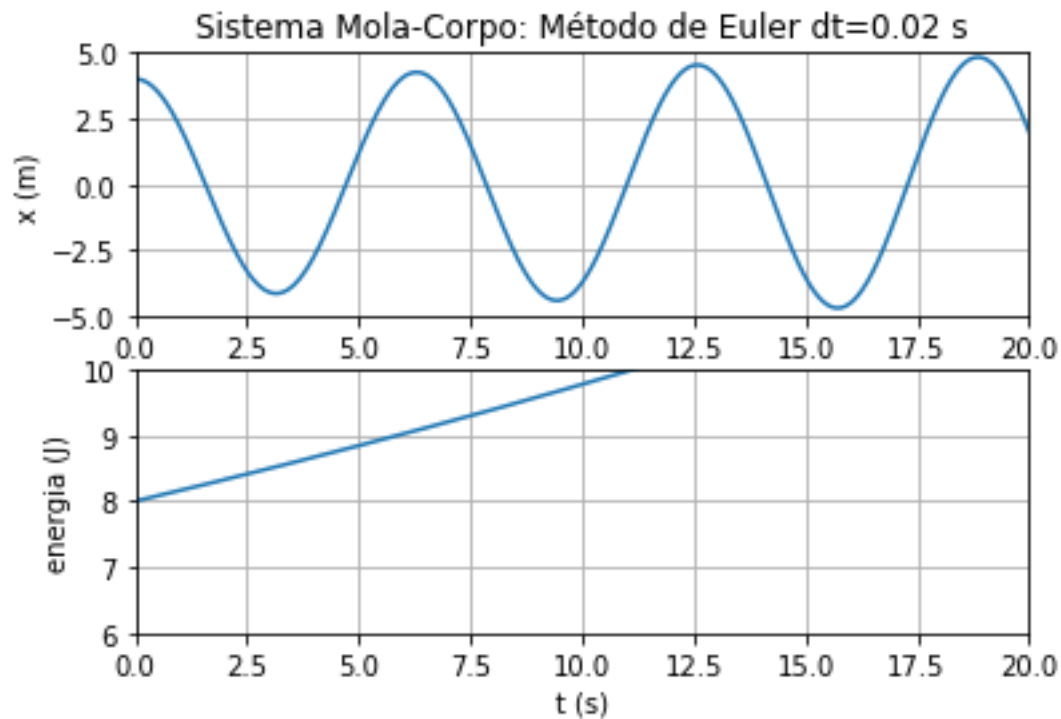
a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais:  $x_0 = 4 \text{ m}$  e  $v_{0x} = 0$ .

b) Compare o cálculo de energia mecânica se integrar numericamente as equações  $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$  e  $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$  para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer

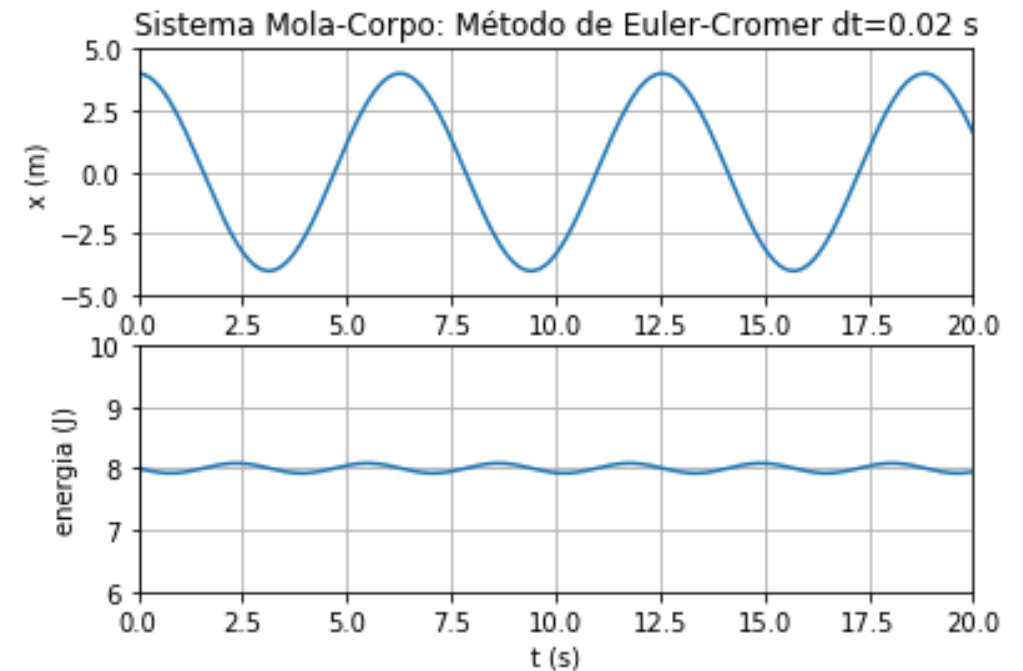


## Sistema Mola-Corpo

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações  $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$  e  $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$  para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer



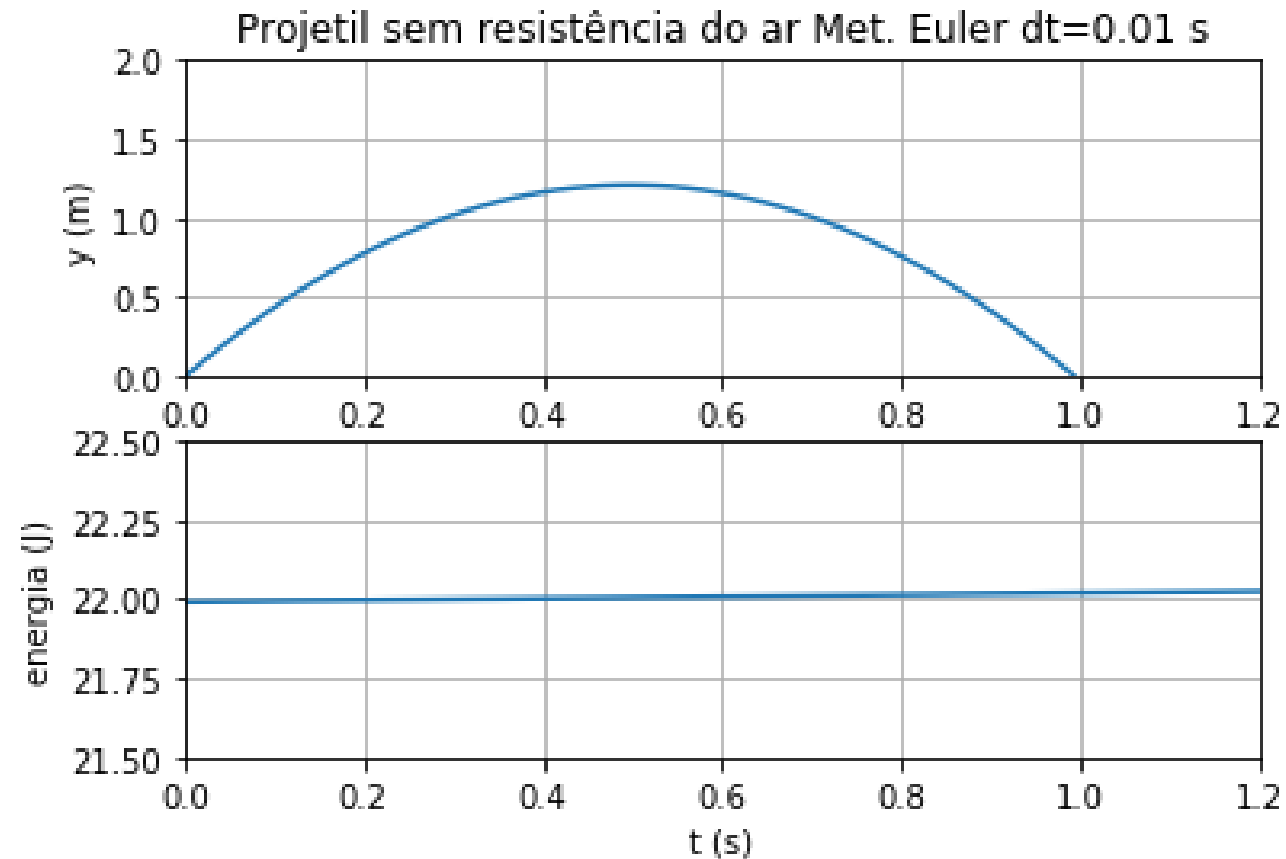
O método de Euler não conserva a energia mecânica



O método de Euler-Cromer conserva a energia mecânica

**A conservação da energia mecânica é um bom teste aos métodos de integração numérica.**  
 Recusam-se os métodos que não conservam a energia mecânica (para as forças conservativas)

## Conservação de Energia Mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração



## Cap. 4 Movimento a 3D

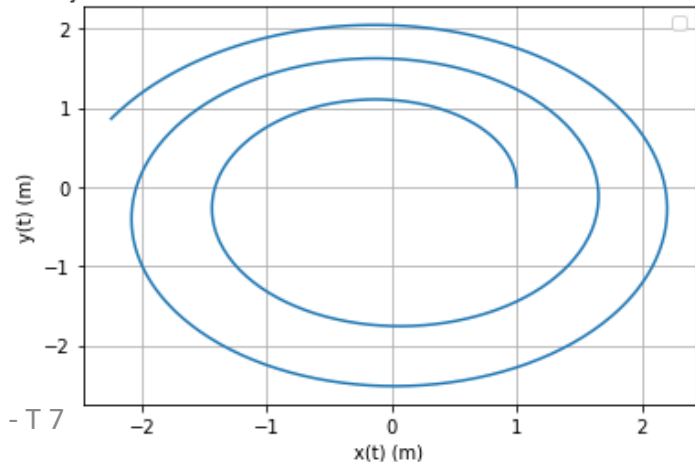
### Métodos de Integração

#### Integração pelo método de Euler

```
for i in range(n):  
    t[i+1]=t[i]+dt  
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)  
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]  
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]  
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt  
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt  
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt  
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler, dt=0.01 ano

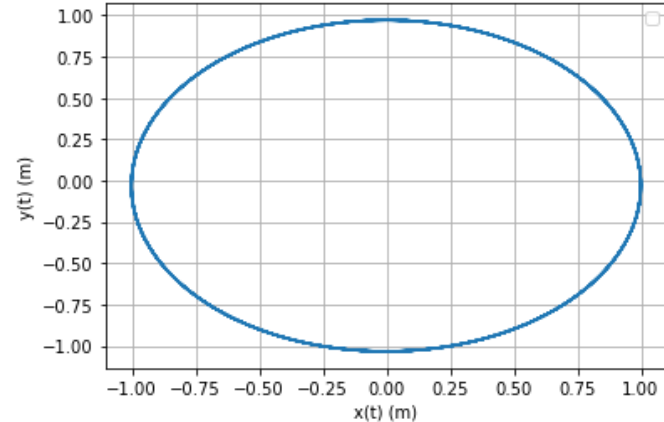


#### Integração pelo método de Euler-Cromer

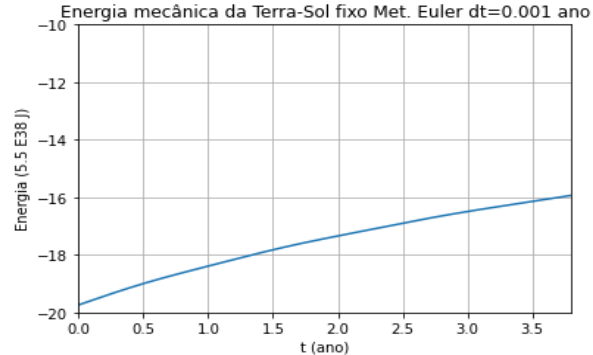
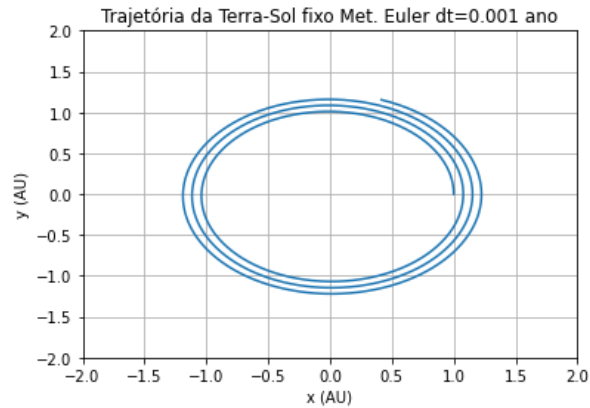
```
for i in range(n):  
    t[i+1]=t[i]+dt  
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)  
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]  
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]  
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt  
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt  
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt  
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt
```

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t + \delta t) \times \delta t$$

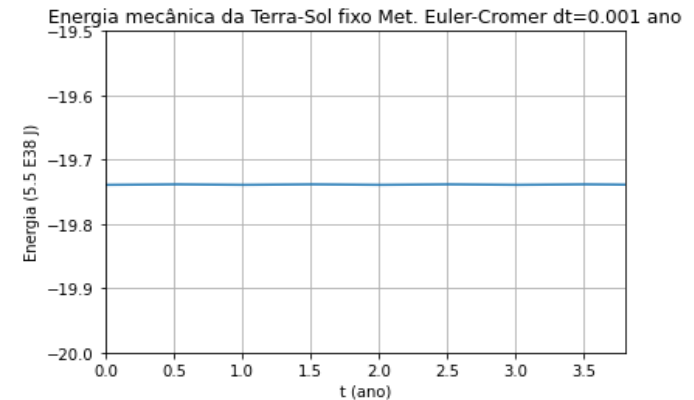
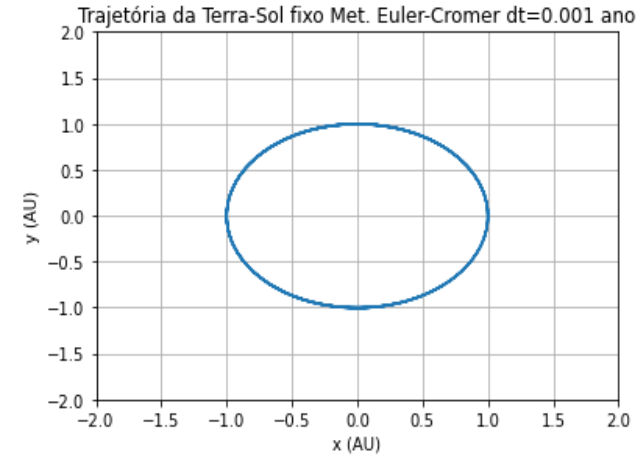
Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler-Cromer, dt=0.01 ano



## Conservação de Energia mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração



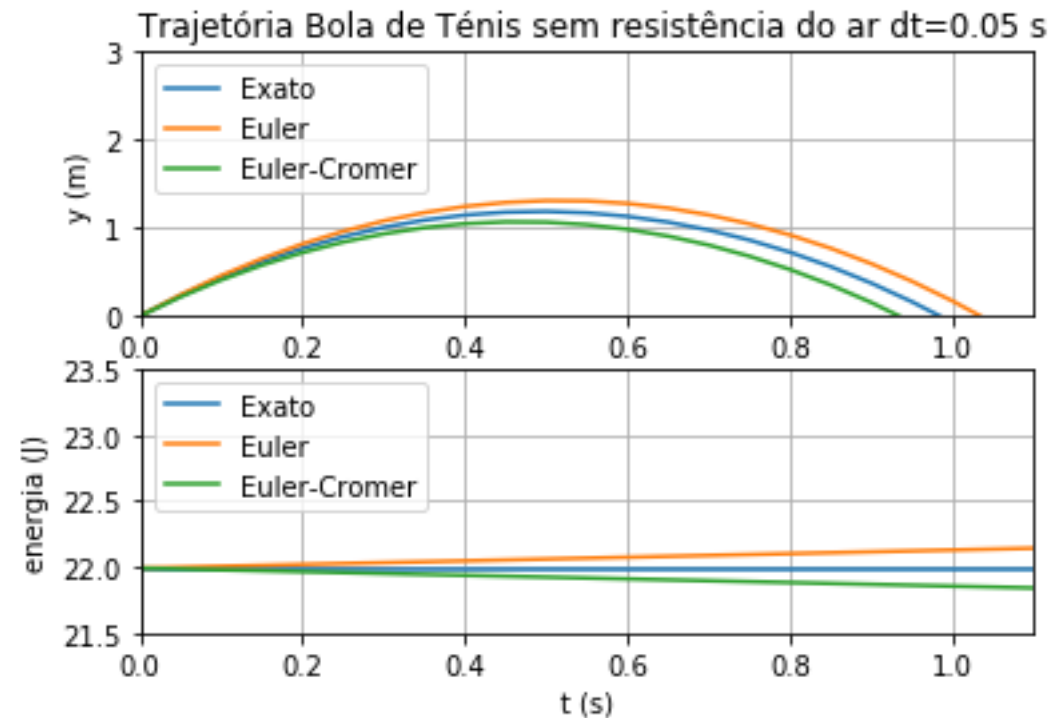
O método de Euler  
não mantém a conservação de energia mecânica  
(o que é falso neste caso)



O método de Euler-Cromer  
mantém a conservação de energia mecânica (em média)



## Conservação de Energia mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração



No caso movimento do projétil, sem resistência do ar (movimento não periódico) os métodos de Euler e de Euler-Cromer mantêm a mesma precisão no cálculo da energia mecânica.

Repare que o passo temporal não é pequeno, de modo a enfatizar os desvios à trajetória exata (a analítica) e à energia mecânica

Teorema Trabalho – Energia:

Trabalho de forças não conservativas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2$$

e pela definição de energia potencial :  $\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$

Sobreposição do trabalho:

Notar:  $\vec{F}$  é a força resultante de todas as forças aplicadas  $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(conservativa)} + \vec{F}^{(não conservativa)}$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [\vec{F}^{(conservativa)} + \vec{F}^{(não conservativa)}] \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}^{(não conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1} + \int_C \vec{F}^{(não conservativa)} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2,$$

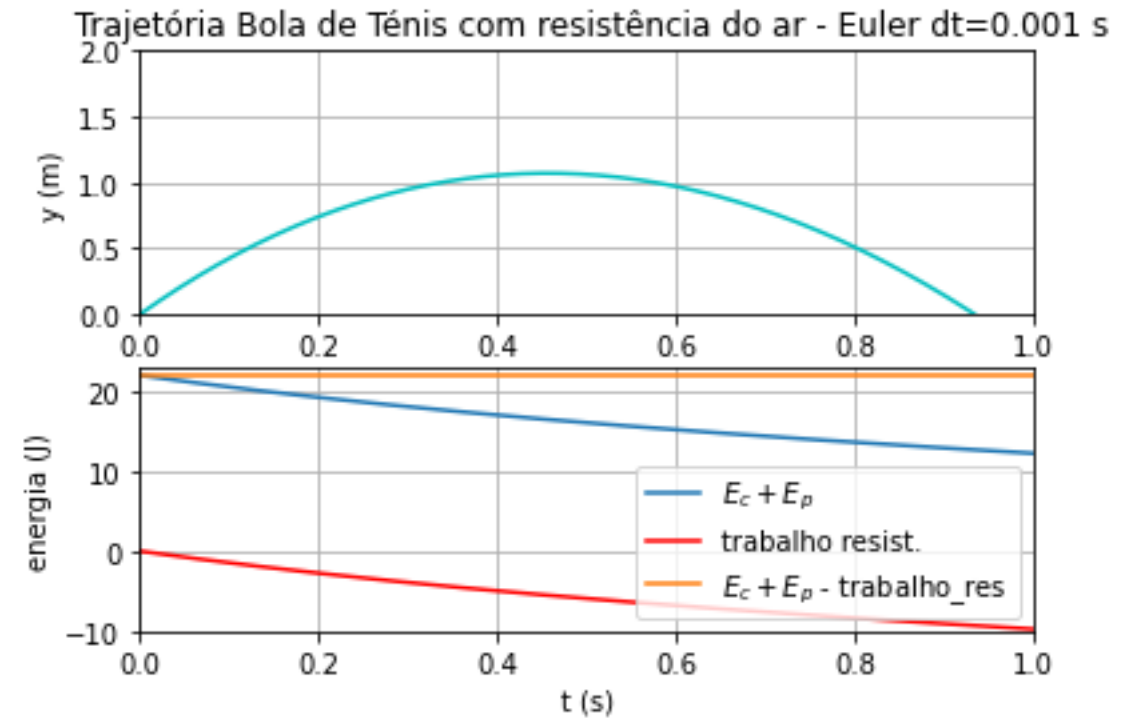
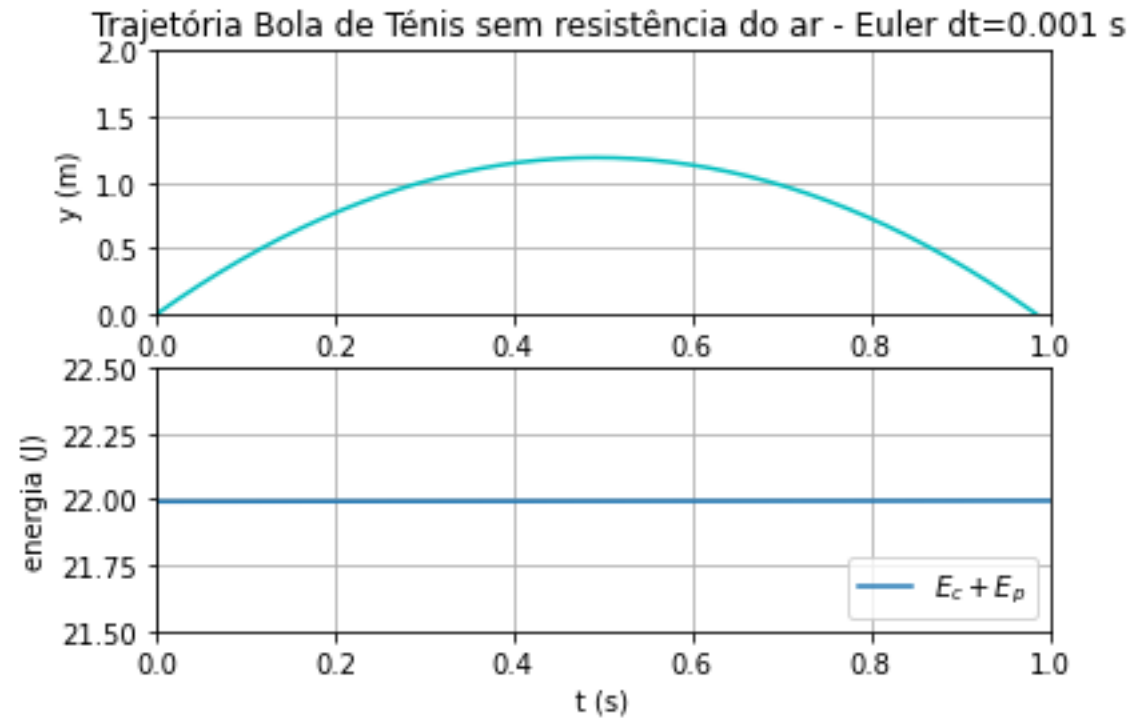
$$W_{0,1}^{(não conservativo)} = \int_C \vec{F}^{(não conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} + W_{0,1}^{(não conservativo)}$$

## Trabalho de forças não conservativas

Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar

$$E(0) = \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(\text{n\~ao conservativo})}$$



# Potência

$$\text{Trabalho: } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m \vec{a} \cdot d\vec{r} \qquad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \vec{v} dt \qquad \left( \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \right)$$

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

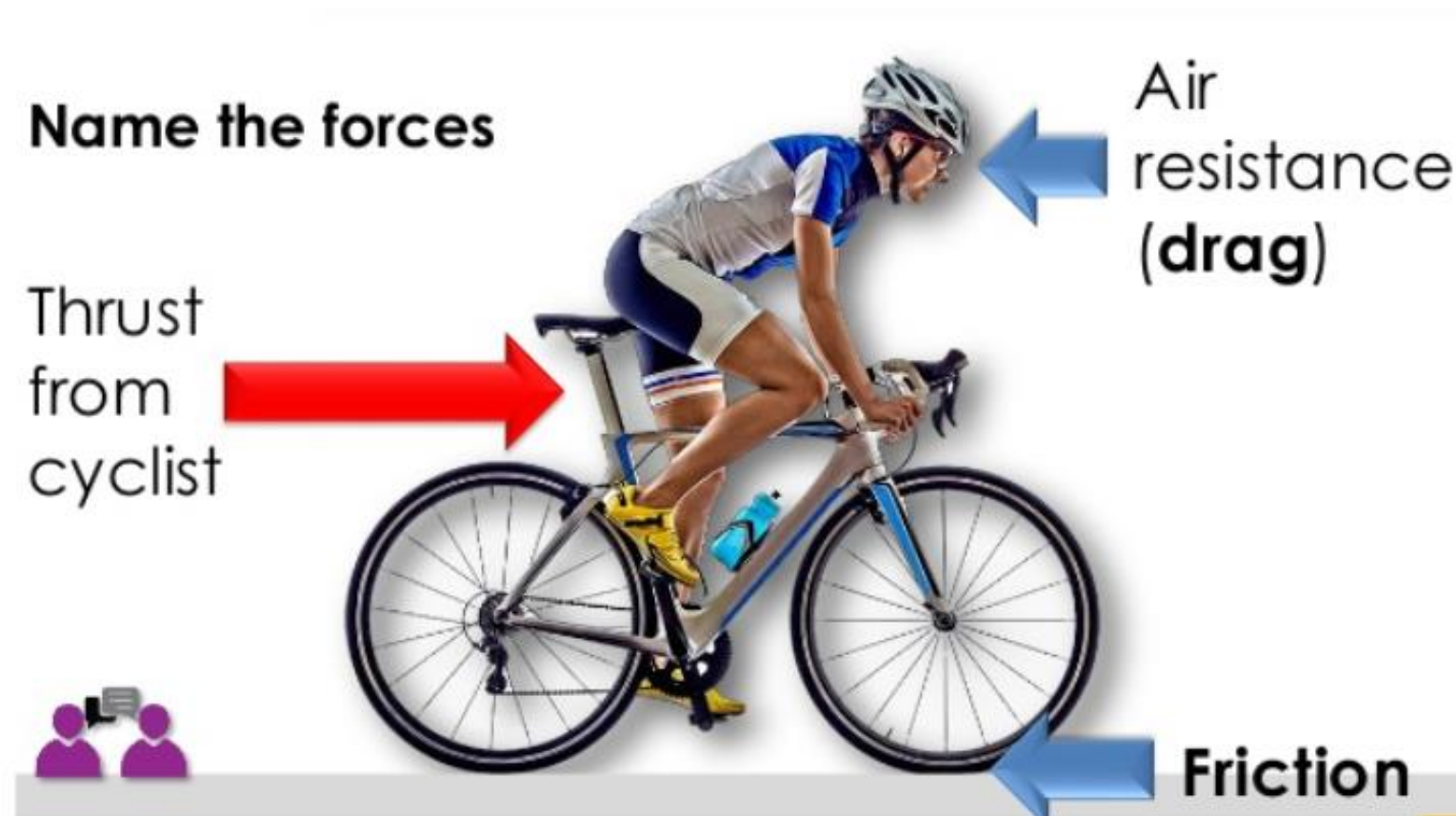
$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dW}{dt} = P_o = \text{Potência: trabalho realizado por unidade de tempo}$$

$$\text{Unidade} \quad 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

Potência desenvolvida por um ciclista:

O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar. O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar e a força de resistência ao rolamento (ou fricção).



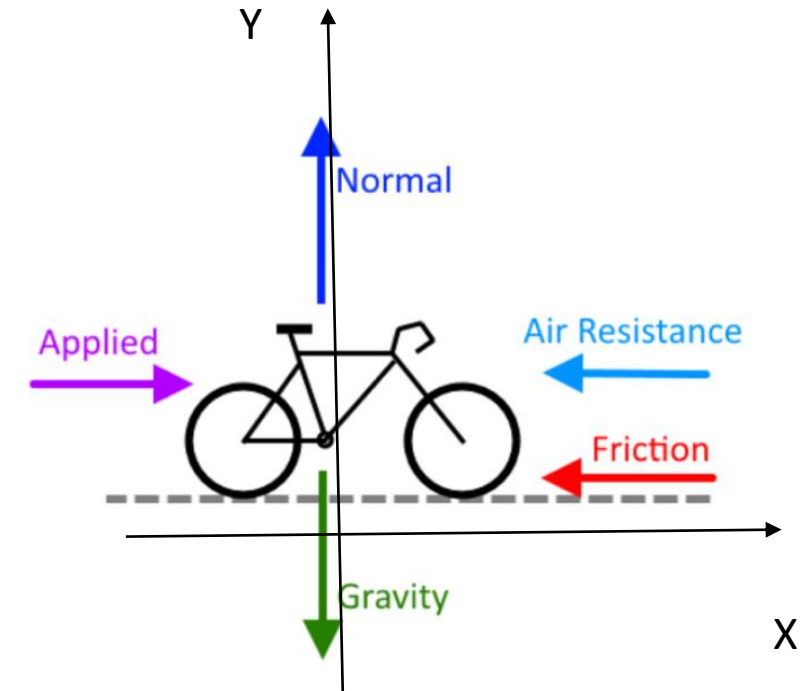
## Potência desenvolvida por um ciclista:

O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar. O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar a força de resistência ao rolamento (ou fricção).

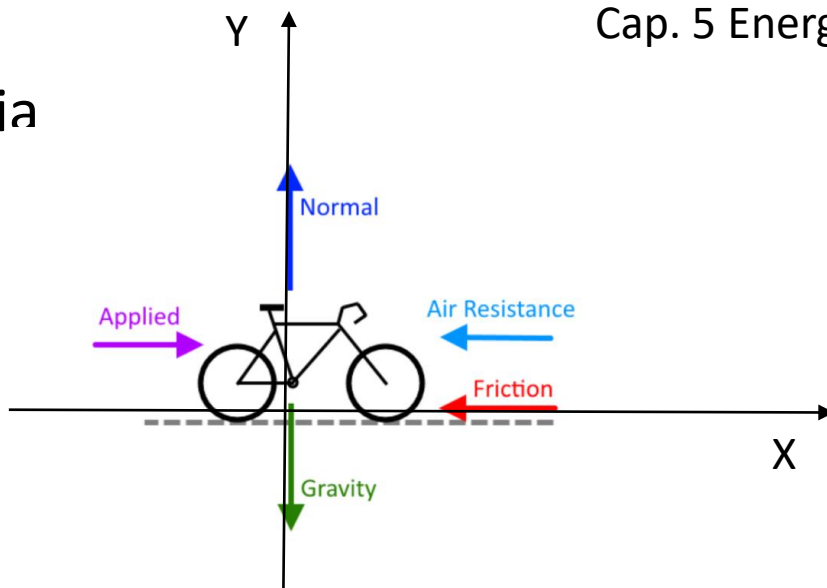
## Forças:

- Força desenvolvida pelo ciclista pelo ciclista  $\vec{F}_{cic}$
- Força de resistência do ar  $\vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} |\vec{v}| \vec{v}$ , A=área
- Peso  $\vec{P}$
- Normal  $\vec{N}$
- Força de resistência ao rolamento ou fricção

$$|\vec{F}_{rol}| = \mu |\vec{N}|$$



# Potência



## Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \quad \text{segundo OX}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} + 0 - F_{res} - F_{rol} + 0 \\ F_y = 0 - P + 0 + 0 + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ 0 = -mg + N \end{cases} \quad \begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ N = mg \end{cases}$$

**Notação** a seguir :  $|\vec{N}| \equiv N$

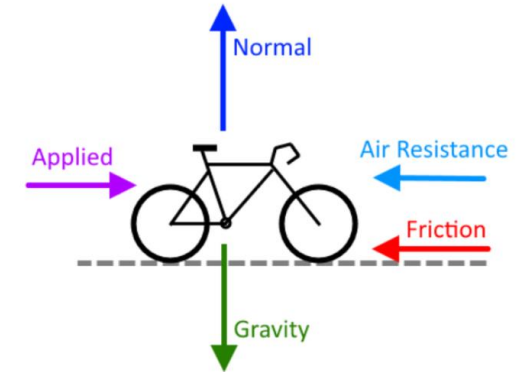
Nunca confundir  $|\vec{N}| \equiv N$  com a componente  $N_x$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g \\ N = mg \end{cases}$$

## Potência

### Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \quad \text{segundo OX}$$



$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g \\ N = m g \end{cases}$$

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista manter uma velocidade uniforme (constante) (ou  $F_x = 0$ ) ?

O coeficiente de resistência  $\mu$  de um piso liso de alcatrão é de 0.004

e o coeficiente de resistência do ar é  $C_{res} = 0.9$

Potência  $P_{o,cic} = F_{cic} v = ?$

$$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = 0 \quad \text{e movimento sempre no sentido positivo } v_x = v$$

$$F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g$$

$$P_{o,cic} = \left( \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g \right) v$$



Problema:

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista

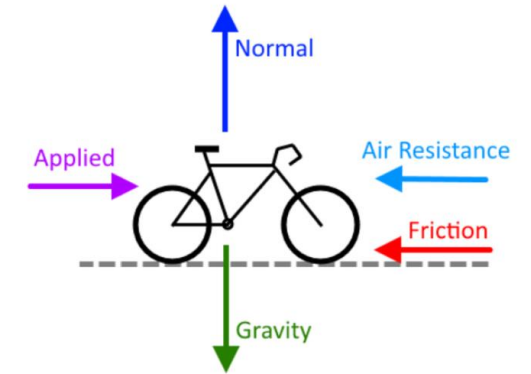
para manter uma velocidade uniforme (constante) de 30 km/h e de 40 km/h?

E o record mundial de velocidade 296.010 km/h?

O coeficiente de resistência  $\mu$  de um piso liso de alcatrão é de 0.004

e o coeficiente de resistência do ar é  $C_{res} = 0.9$

A massa do ciclista-bicicleta é de 75 kg, e a área frontal do ciclista é de  $A = 0.30 \text{ m}^2$



Potência  $P_{cic} = F_{cic} v = ?$

$$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = 0 \quad \text{e movimento sempre no sentido positivo } v_x = v$$

$$F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g$$

$$P_{o,cic} = \left( \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g \right) v$$

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista

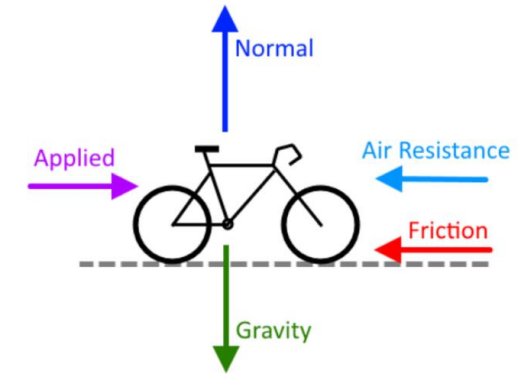
para manter uma velocidade uniforme (constante) de 30 km/h e de 40 km/h?

E o record mundial de velocidade 296.010 km/h?

O coeficiente de resistência  $\mu$  de um piso liso de alcatrão é de 0.004

e o coeficiente de resistência do ar é  $C_{res} = 0.9$

A massa do ciclista-bicicleta é de 75 kg, e a área frontal do ciclista é de  $A = 0.30 \text{ m}^2$



Potência  $P_{cic} = F_{cic} v = ?$

$$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = 0 \quad \text{e movimento sempre no sentido positivo } v_x = v$$

$$F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g$$

$$P_{o,cic} = \left( \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g \right) v$$

$$v = 30 \text{ km/h}$$

$$P_{o,cic} = 120 \text{ W} = 0.163 \text{ cv}$$

$$v = 40 \text{ km/h}$$

$$P_{o,cic} = 260 \text{ W} = 0.353 \text{ cv}$$

$$v = 296.010 \text{ km/h}$$

$$P_{o,cic} = 92177 \text{ W} = 125 \text{ cv}$$

Record mundial de velocidade set 2018

Denise Mueller-Korenek 183.932 mph (milhas/hora) = 296.010 km/h

Velocidade do ciclista



### Como calcular a velocidade do ciclista?

Se soubermos a potência desenvolvida pelo ciclista podemos calcular a lei da velocidade e a lei do movimento

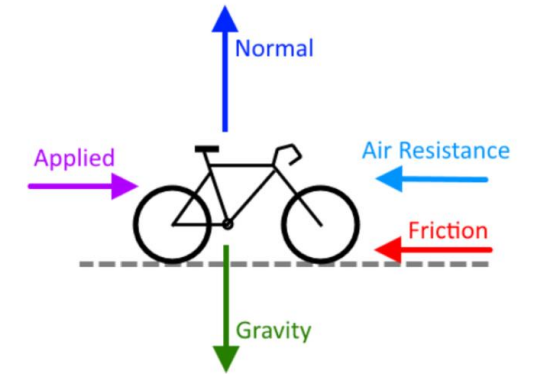
$$P_{cic} = F_{cic} v \quad \Rightarrow \quad F_{cic} = P_{cic} / v$$

Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \quad \text{segundo OX}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = m a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$m a_x = \frac{P_{cic}}{v} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g$$



**Problema 12:** Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

- Qual a sua velocidade terminal?
- Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?
- Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

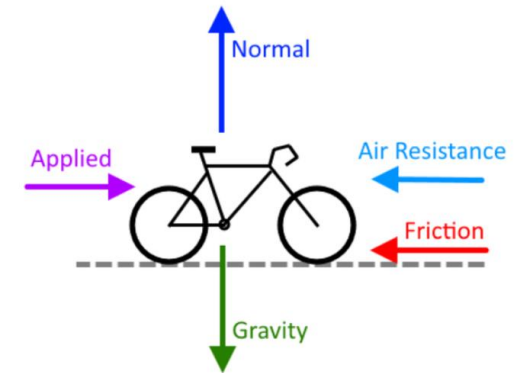
Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \quad \text{segundo OX}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = m a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$m a_x = \frac{P_{o,cic}}{v} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g$$



Problema 13:

O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de  $5^\circ$ .

- Quanto tempo demora a percorrer 2 km?
- Qual a sua velocidade terminal?

Resolução:

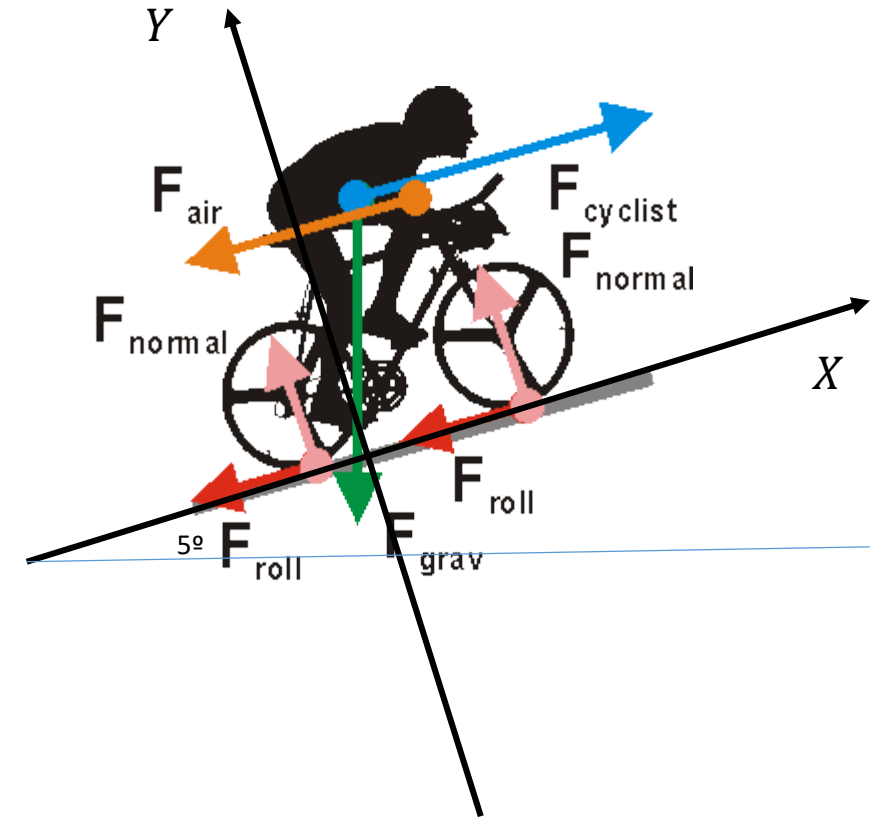
Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \quad \text{segundo OX}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - P \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = m a_x \\ F_y = -m g \cos 5^\circ + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P_{o,cic}}{v} + P \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = m a_x \\ N = m g \cos 5^\circ \end{cases}$$

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m v} - g \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2m} A \rho_{ar} v v_x - \mu g$$



## Cap. 5 Energia e Trabalho

