

Movimiento Armónico Simple

1. Definiciones

Se llama **movimiento periódico** a aquel en que la posición, la velocidad y la aceleración del móvil se repiten a intervalos regulares de tiempo.

Se llama **movimiento oscilatorio o vibratorio** a un movimiento periódico en que el móvil se mueve a un lado y a otro de una posición de equilibrio llamada centro de oscilación.

Se denomina **movimiento armónico simple** a un movimiento de trayectoria rectilínea, periódico y vibratorio, sometido a una fuerza proporcional a la posición de sentido contrario a ella y dirigida siempre hacia el centro de oscilación:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

2. Movimiento Armónico Simple

- Oscilación: distancia recorrida por el móvil en un recorrido de ida y vuelta.
- Elongación (x): distancia del centro de oscilación al punto donde se encuentra el móvil en cada instante.
- Amplitud (A): elongación máxima.
- Se llama centro de oscilación al punto medio de los desplazamientos del móvil.
- Periodo (T) : es el tiempo que tarda el móvil en dar una oscilación completa. Se mide en segundos.
- Frecuencia (f) : es el número de oscilaciones que da el móvil en un segundo. Se mide en Herzios.
- Pulsación o frecuencia angular (ω): es el número de periodos en 2π segundos.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- Ecuación del movimiento armónico simple:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

- Velocidad del movimiento armónico simple:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \sin(\omega t + \varphi))}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\omega t + \varphi) = 1$

- Aceleración del movimiento armónico simple:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(A\omega \cos(\omega t + \varphi))}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

La aceleración máxima tiene como valor: $a_{\max} = \pm \omega^2 A$

3. Dinámica del m.a.s

Si una partícula de masa m está sometida a un m.a.s. sobre ella actuará una fuerza según la ley de Hooke:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx$$

A la k ($k = m\omega^2$) se le denomina **constante elástica** / recuperadora con unidades N/m

4. Energía del movimiento armónico simple

Una fuerza es central si su módulo sólo depende de la distancia a la que se calcula la fuerza y se dirige siempre hacia el mismo punto. Por ejemplo la fuerza del movimiento armónico simple.

Una fuerza F es conservativa si el trabajo realizado por ella solo depende del punto inicial y el final pero no de la trayectoria seguida. Todas las fuerzas centrales son conservativas.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la disminución de una magnitud llamada energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

Si una masa está sometida a un m.a.s tendrá una energía mecánica suma de la energía cinética y la energía potencial.

- Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}A^2k \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi);$$

$$k = m\omega^2$$

- Energía potencial

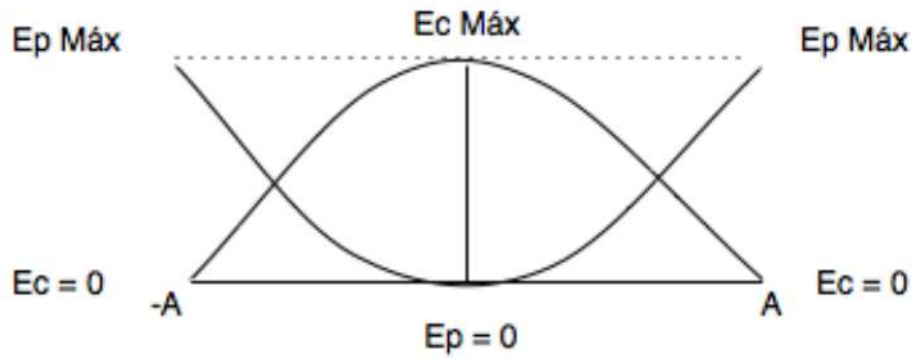
$$W = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} d\vec{x} = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = \left[\frac{-kx^2}{2} \right]_{x_B}^{x_A} = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = -E_{PB} + E_{PA} = -\Delta E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

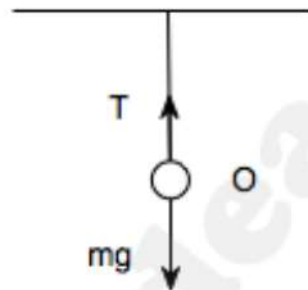
- Energía mecánica

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2}kA^2$$

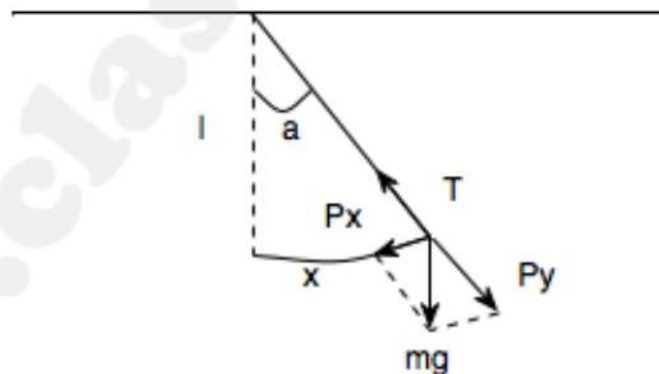


5. Péndulo simple

El péndulo simple se construye mediante una masa puntual suspendida de un hilo inextensible y sin masa de longitud.



El péndulo inicialmente está en reposo porque en dicha posición el peso de la bola (mg) y la tensión del hilo se equilibran. En cambio, si separamos el objeto de la posición de equilibrio, dicho equilibrio se rompe, situación representada por la figura a continuación:



En esas condiciones, el peso queda descompuesto en una componente y que se anula con la tensión del hilo, y en una componente x perpendicular al hilo, que al no estar equilibrada con ninguna otra fuerza causa el movimiento.

Observando la figura se puede deducir el valor de la componente x :

$$P_x = -mg \sin(a)$$

El signo negativo indica que esta fuerza tiende a llevar el péndulo a su posición de equilibrio. Es por tanto la fuerza recuperadora.

Además, para ángulos muy pequeños ($< 20^\circ$), se puede aplicar la siguiente aproximación:

$$a = \sin(a)$$

por lo que se puede sustituir el seno por el ángulo en radianes y por tanto $a = \frac{x}{l}$. Por tanto, la expresión de la fuerza recuperadora queda como:

$$P_x = -mga = -mg \frac{x}{l} = -kx$$

Por tanto, $k = \frac{mg}{l}$ será la constante recuperadora. A partir de ella podemos deducir la expresión del periodo para el péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nótese que el periodo no depende de la masa.

Formulario

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \left\{ \begin{array}{l} x : \text{elongación} \\ A : \text{amplitud} \\ (\omega t + \varphi) : \text{fase} \\ \varphi : \text{fase inicial} \\ \omega : \text{frecuencia angular} \end{array} \right.$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \sin(\omega t + \varphi))}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(A \omega \cos(\omega t + \varphi))}{dt} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\vec{F} = -k \Delta x$$

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx$$

$$k = m\omega^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right.$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

Péndulo

$$k = \frac{mg}{l}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$