LEZIONE 1 (19/02/25)

TEOREMA DI CANTOR

insieme delle parti di S

Sia S un insieme $|S| < |p(S)|$.

Per assurdo assumiamo esista una funzione $f: S \to p(S)$ BIIETTIVA. (ovvero che esista una corrispondenza esatta tra S e p(S)).

Sia $A = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$ (A contiene tutti e soli gli elementi di S che non appartengono all'insieme associato da f a loro stessi.)

Poiché $A \in p(S)$ e f è per ipotesi suriettiva, deve esistere $a \in S$ tale che $f(a) = A$.

Ora chiediamoci se a appartenga o meno ad A:

- se $a \in A$ allora, per definizione di A, $a \notin f(a) = A$;
- se $a \notin A = f(a)$ allora, per definizione di A, $a \in A$.

In entrambi i casi $\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE.

$\Rightarrow$ La cardinalità dell'insieme delle parti è sempre maggiore di quella dell'insieme stesso.

SIMBOLI

- entità primitiva astratta
- un simbolo è ATOMICO
- caratteristiche:
  - IDENTITÀ, x poterli distinguere
  - possibilità di essere Giustapposti

STRINGHE

- sequenza finita di simboli giustapposti
- a, b, c simboli $\Rightarrow$ abccba stringa
- la LUNGHEZZA di una stringa w è il numero di OCCORRENZE di simboli in w e si denota con $|w|$.
- STRINGA VUOTA $|\varepsilon| = 0$
- Sia $w = a_1 \dots a_n$ una stringa (se $n=0$, allora $w = \varepsilon$).
  Ogni stringa della forma:

- $a_1 \dots a_j$, con $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ e' detta PREFISSO di w;
- $a_i \dots a_m$, con $i \in \{1, \dots, m, m+1\}$ e' detta SUFFISSO di w;
- $a_i \dots a_j$, con $i, j \in \{1, \dots, m\}$, e' detta SOTTOSTRINGA di w.

se $i > j$ $a_i \dots a_j = \varepsilon$

- ε e' PREFISSO
  SUFFISSO
  SOTTOSTRINGA
  di w.

ESEMPI: stringa → abc
PREFISSI: ε, a, ab, abc
SUFFISSI: ε, c, bc, abc
SOTTOSTRINGHE: ε
a ab abc
b bc
c

- un prefisso, un suffisso o una sottostringa sono detti PROPRI quando non sono la stringa stessa.

ESERCIZIO: Sia data una stringa w di lunghezza |w| = n. Quanti sono i suoi prefissi, i suoi suffissi e le sue sottostringhe? Quanti sono i prefissi dei suoi suffissi? Quanti i suffissi dei suoi prefissi?

PREFISSI: $n+1$
SUFFISSI: $n+1$
SOTTOSTRINGHE: per una stringa di lunghezza n, possiamo scegliere un punto d'inizio i e un punto di fine j tali che $0 < i < j < n$

$i \in \{0, \dots n-1\}$ (n valori)

Per ogni i, $j = \{i, \dots, n-1\}$ $(n-i)$ scelte.
Il numero totale e' dato dalla somma delle possibilità per ogni i:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n+1)}{2}$$

PREFISSI dei SUFFISSI:

abc → SUFFISSI: ε, c, bc, abc

PREFISSI: $\varepsilon \to \varepsilon$

c → ε, c

bc → ε, b, bc

abc → ε, a, ab, abc

Il numero dei prefissi per ogni suffisso di lunghezza k è (k+1).

ogni suffisso parte dalla posizione k e termina alla fine della stringa

$$\sum_{i=0}^{n} (\boxed{n-k}+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

SUFFISSI DEI PREFISSI:

abc → PREFISSI: ε, a, ab, abc

SUFFISSI: $\varepsilon \to \varepsilon$

a → ε, a

ab → ε, b, ab

abc → ε, c, bc, abc

Il numero dei suffissi per ogni prefisso di lunghezza k è k+1.

$$\sum_{i=0}^{n} (n-k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- CONCATENAZIONE di due stringhe: $v = v_1 \dots v_n$ e $w = w_1 \dots w_m$ con $n, m \geq 0$, è la stringa $vw = v_1 \dots v_n w_1 \dots w_m$

ESERCIZIO: Dimostrare che la concatenazione è una operazione associativa che ammette come identità la stringa vuota.

Dobbiamo dimostrare che:

1. $\forall u, v, w : (uv)w = u(vw)$

2. $\forall u : u\varepsilon = \varepsilon u = u$

DIMOSTRAZIONE 1:

- Sia $u = u_1 \dots u_p$ una stringa di lunghezza p
- Sia $v = v_1 \dots v_q$ una stringa di lunghezza q
- Sia $w = w_1 \dots w_r$ una stringa di lunghezza r

La concatenazione: $u \cdot v = u_1 \dots u_p v_1 \dots v_q$

$$v \cdot w = v_1 \dots v_q w_1 \dots w_r$$

Calcoliamo i membri dell'uguaglianza:

$$(u \cdot v) \cdot w = (u_1 \dots u_p v_1 \dots v_q) \cdot w_1 \dots w_r =$$

$$= u_1 \dots u_p v_1 \dots v_q w_1 \dots w_r$$

$$u \cdot (v \cdot w) = u_1 \dots u_p (v_1 \dots v_q w_1 \dots w_r) =$$

$$= u_1 \dots u_p v_1 \dots v_q w_1 \dots w_r$$

Poiché l'uguaglianza è verificata la concatenazione è associativa.

DIMOSTRAZIONE 2:

- La stringa vuota non contiene alcun carattere.
- $u = u_1 \dots u_m$

→ Concatenare ε con u significa non aggiungere né togliere caratteri:

$$u \cdot \varepsilon = u_1 \dots u_m = u$$

$$\varepsilon \cdot u = u_1 \dots u_m = u$$

Poiché la stringa vuota non modifica la stringa concatenata, è l'elemento neutro della concatenazione.

ALFABETI e LINGUAGGI

- alfabeto Σ : insieme finito di simboli
- LINGUAGGIO FORMALE: insieme di stringhe di simboli da un alfabeto Σ
- insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme $\{\varepsilon\}$
  $\rightarrow$ linguaggi formali di qualunque alfabeto
- Σ^* è un linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto Σ

$$\Sigma^* = \{a_1 \dots a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma\}$$

ESERCIZIO: Dimostrare che se $\Sigma \neq \emptyset$, allora Σ^* è numerabile.

Definendo inoltre:
$$\begin{cases} \Sigma^0 = \{\varepsilon\} \\ \Sigma^{n+1} = \{ax \mid a \in \Sigma, x \in \Sigma^n\} \end{cases}$$

si dimostri che $\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$.

Qual è la cardinalità di Σ^i?

1. Dobbiamo dimostrare:

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$$

$\rightarrow$ Σ^0 = insieme delle stringhe u con $|u| = 0$

Σ^1 = insieme delle stringhe u con $|u| = 1$

Σ^n = insieme delle stringhe u con $|u| = n$

Poiché una stringa qualsiasi ha una certa lunghezza n, essa appartiene per definizione a Σ^n per un qualche n. Quindi:

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$$

2. Cardinalità di Σ^i:
dipende dalla cardinalità dell'alfabeto $|\Sigma|$.

- $|\Sigma^0| = 1$ (solo ε)
- $|\Sigma^1| = |\Sigma|$ (un simbolo alla volta)
- $|\Sigma^2| = |\Sigma|^2$ (due lettere concatenate)

$\Rightarrow |\Sigma^i| = |\Sigma|^i$

3. se $\Sigma \neq \emptyset$, Σ^* è numerabile.

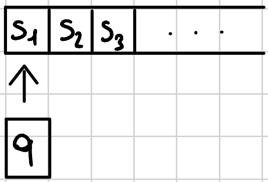
$$\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$$

- Se Σ è finito, allora ogni Σ^i è finito. La somma di insiemi finiti (ordinati per lunghezza) è numerabile.
- Se Σ è numerabile (infinito), allora ogni Σ^i è numerabile (perché è una sequenza di i simboli scelti dall'alfabeto numerabile). L'unione numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile, quindi Σ^* è numerabile.

AUTOMI

Un automa a stati finiti è un modello matematico di un sistema avente INPUT, ed eventualmente OUTPUT, a valori discreti.
Il sistema può essere in uno stato tra un insieme finito di stati possibili.
L'essere in uno stato gli permette di tener traccia della storia precedente.

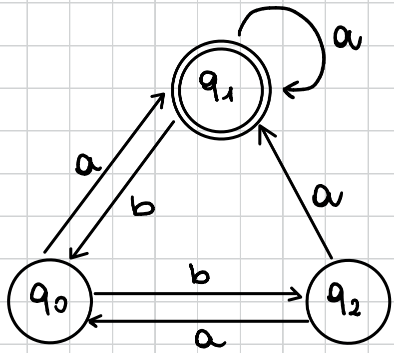
Si può rappresentare mediante una testina che legge, la testina può trovarsi in un certo stato e a seconda dello stato q e del simbolo letto, la testina si sposta in un altro stato.



Quando la lettura termina, a seconda dello stato raggiunto l'automa fornisce un risultato di ACCETTAZIONE o di REFUTAZIONE della stringa.
Il comportamento dell'automa si definisce mediante una MATRICE DI TRANSIZIONE:

	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_0
q_2	q_1	q_0

Un automa viene rappresentato graficamente tramite un grafo:



AUTOMI DETERMINISTICI

UN AUTOMA A STATI FINITI DETERMINISTICO (DFA) è una quintupla

$$\boxed{\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle}$$

dove:
- $Q \rightarrow$ insieme finito di stati
- $\Sigma \rightarrow$ alfabeto (di input)
- $[\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q] \rightarrow$ funzione di transizione
- q_0 è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali

Dalla funzione δ si ottiene la funzione $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon) = q \\ \hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \end{cases}$$

Una stringa x è detta ACCETTATA da un DFA $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ se $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$.

Il linguaggio accettato da M, noto come $L(M)$, è l'insieme delle stringhe accettate:

$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x) \in F \}$$

Un linguaggio è detto REGOLARE se è accettato da qualche DFA, ovvero se esiste M tale che $L = L(M)$.

$\emptyset$ e Σ^* sono linguaggi regolari:

1) Sia $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$, un automa M_0 che riconosca il linguaggio $\emptyset$ è:

	s_1	$\dots$	s_n
q_0	q_0	$\dots$	q_0

dove $F = \emptyset$, poiché $\forall x : x \notin \emptyset$ si ha che:

$$\forall x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x) \notin F$$

2) un automa per Σ^* è l'automa M_1:

	s_1	$\dots$	s_n
q_0	q_0	$\dots$	q_0

dove $F = \{q_0\}$, $\forall x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x) = q_0$