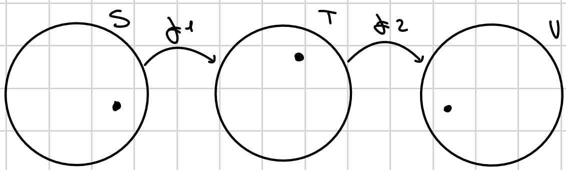
Composizione



$f_2 \circ f_1 : S \to U$

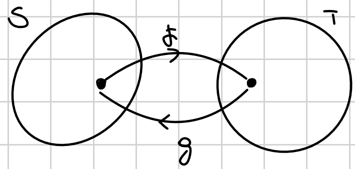
$s \mapsto f_2(f_1(s))$

Inversa (se esiste)

$f: S \to T$ e' invertibile se $\exists\ g: T \to S$

tale che $g \circ f = Id_S$ e $f \circ g = Id_T$

g si dice inversa di f, $g = f^{-1}$



Proposizione

Sia $f: S \to T$ sono equivalenti:

- f e' invertibile
- f e' biettiva
- $\forall t \in T \ \exists! s$ t.c. $f(s) = t$

! Attenzione: dipende dalle scelte di dom. e codom.

es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $f(x) = x^2$ non e' invertibile

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $f(x) = x^2$ e' invertibile

RECUPERARE LEZIONE VENERDÍ

6/05/24

SPAZI VETTORIALI, COMBINAZIONI LINEARI

$\downarrow$

V insieme, $+$ somma, moltiplicazione per scalare $\leftarrow c \in \mathbb{K}$ campo

$V = \mathbb{R}^n \; (\mathbb{C}^n)$

$W \subset \mathbb{R}^n$ è un ss. v se $\forall v, w \in W \quad \cdot\; v + w \in W$

$\forall v \in W, c \in \mathbb{R} \quad \cdot\; cv \in W$

COMBINAZIONI LINEARI

def Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare (CL) di $v_1 \_\_ v_k$ se $\exists\, a_1 \_\_ a_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \sum_i a_i v_i}$$

1 oss. Dato qualunque insieme di vettori $v_1 \_\_ v_k$, posso sempre scrivere $0 = 0v_1 + \dots + 0v_k$

2 oss. Vedere se v è CL di $v_1 \_ v_k$ è la stessa cosa che chiedere se il sis. lin.

$AX = v$ ha soluzione

- $a_1 \_ a_k$ sono le incognite
- $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti
- v termine noto $\longrightarrow$ se $v = 0 \Rightarrow$ compatibile per $a_i = 0 \;\forall i$

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & & v_k \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

• esempio

• $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è CL di $\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$? $\iff \exists\, a_1, a_2$ t.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è comp. $\iff$ $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$ vero $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è CL di v_1, v_2

$\Rightarrow$ Per vedere se v è CL di $v_1 \_ v_k$ scrivo $A = (v_1 \_\_ v_k)$ e confronto $\operatorname{rg} A$ con $\operatorname{rg} A|v$

<u>Cosa fondamentale</u>: $\operatorname{rg} A$, le cui colonne sono i vettori $v_1 \_\_ v_k$

• dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ è CL di v_1, v_2

$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ non è CL di v_1, v_2

Infatti

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (colonne v_1, v_2), $\operatorname{rg} A = 1$

per v: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{array}\right)$ $\operatorname{rg} A|\begin{smallmatrix} -2 \\ -4 \end{smallmatrix} = 1$ ✓ comp

per w: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{array}\right)$ $\operatorname{rg} A|\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} = 2$ ✗ non comp

Spazio generato

Dati $v_1 \_\_ v_k \in \mathbb{R}^n$, lo spazio generato da $v_1 - v_k$ è

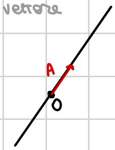
$$\mathcal{L}(v_1 - v_k) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v = a_1 v_1 + \quad + a_k v_k,\ a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$= \text{spazio delle cl di } v_1 - v_k$$

• Es. • r retta in $\mathbb{R}^3$ passante per O

r: $X = tA$ → vettore

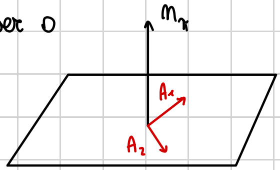
r: $\mathcal{L}(A)$



• π piano in $\mathbb{R}^3$ passante per O

π : $X = sA_1 + tA_2$

numeri



<u>oss.</u> lo spazio generato è sempre un ssv di $\mathbb{R}^n$ [se $v, w \in \mathcal{L}(\dots) \Rightarrow$
$v + w \in \mathcal{L}(\dots)$;
se $v \in \mathcal{L}(\dots)$
$c \in \mathbb{R}$, $cv \in \mathcal{L}(\dots)$]

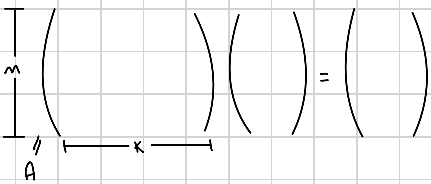
def. Insieme di generatori. Sia W ssv di $\mathbb{R}^n$, un insieme di generatori per W è un insieme di vettori $v_1 \_\_ v_k$ t.c.

$$W = \mathcal{L}(v_1 \_\_ v_k)$$

Nell'esempio sopra • retta: trovare un insieme di generatori significa trovare un vettore direzione (definito a meno di multipli)

• piano: = trovare due vettori che generano il piano (ho molta più libertà di scelta)

Caso particolare: Quando $v_1 \_\_ v_k$ generano $\mathbb{R}^n$?



comp ∀ termine noto

$\Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n$

$\Rightarrow$ $\boxed{k \text{ vettori in } \mathbb{R}^n \text{ generano } \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n}$

$\Rightarrow$ Servono almeno n vettori per generare $\mathbb{R}^n$

<u>oss.</u> Se $A \in M_{n \times k}$, $\operatorname{rg} A \leq \min(\#\text{righe}, \#\text{colonne})$

$\leq \min(n, k)$

$\Rightarrow$ se $k < n$, $\operatorname{rg} A < n$

ESEMPIO • in $\mathbb{R}^2$ servono almeno due vettori per generare $\mathbb{R}^2$

• $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} A = 2$

$\Rightarrow$ generano $\mathbb{R}^2$ ✓

• $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 37 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 37 \\ 2 & 1 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow$ generano $\mathbb{R}^2$ vettore di troppo!

• $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 18 \\ 2 & -2 & 36 \end{pmatrix}$ $rg A = 1 \Rightarrow$ non generano $\mathbb{R}^2$ anche se sono 3 vettori e $3 > 2$

Vettori linearmente (in) dipendenti

linearmente dipendenti (LD)

" in " (LI)

def. • $v_1 \_\_ v_k \in \mathbb{R}^n$ sono LD se

$\exists\, a_1 \_\_ a_k$ non tutti nulli t.c.

$a_1 v_1 + \quad + a_k v_k$ $\equiv$ Il SL $Ax = 0$ non ha sol. unica $\Leftrightarrow$ # var. $> rg A$

$\Leftrightarrow k > rg A$

• $v_1 \_\_ v_k \in \mathbb{R}^n$ sono LI se

$a_1 v_1 + \quad + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i$

(gli a_i sono tutti nulli)

$\Leftrightarrow$ Il SL $Ax = 0$ ha soluzione unica

$\Leftrightarrow$ # var. $= rg A$

$\Leftrightarrow rg A = k$

• $v_1 \_\_ v_k$ sono LD se esistono loro CL che danno 0, ma in cui almeno uno dei coeff è non nullo

• sono LI se l'unica CL che dà 0 è quella con tutti i coeff nulli

<u>OSS</u>. $v_1 \_\_ v_k$ sono LD $\Leftrightarrow rg A < k$

sono LI $\Leftrightarrow rg A = k$

<u>ESEMPIO</u> Se ho 3 vettori in $\mathbb{R}^2$, possono essere LI?

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $rg A \leq 2$ perché i vettori sono in $\mathbb{R}^2$

<u>ma</u> per essere LI serve $rg A = k = 3$

$\Rightarrow$ non possono essere LI

<u>OSS</u> se ho k vettori in $\mathbb{R}^n$ e $k > n \Rightarrow$ non possono essere LI

$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}}_{k} \Big\} n$ $rg A \leq \min(k, n) \leq n < k$

def. Una base per $\mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori tali che • generano $\mathbb{R}^n$

• sono LI

$\Rightarrow$ Ovvero ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si può <u>scrivere</u> <u>in maniera</u> unica come CL dei vettori della base

generano LI

CRITERI

k vettori in $\mathbb{R}^n \longrightarrow A = \begin{pmatrix} | & \dots & | \end{pmatrix}$ (n righe, k colonne)

- generano $\mathbb{R}^n$ sse $rg A = n \Rightarrow k \geq n$
- sono l.i. $\Leftrightarrow rg A = k \Rightarrow k \leq n$

Per avere entrambe servono:
- esattamente n vettori
- $rg A = n$

$\Rightarrow v_1 \text{---} v_k$ sono una base per $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow k = n$

$rg A = n = k$

ESEMPIO • $\mathbb{R}^3$ $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $n = 3$ $k = 3$

$\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ si chiama base canonica

$$\begin{array}{cccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

generatore: $rg A = n = 3$
l.i. : $rg A = k = 3$
$\Rightarrow$ sono base

$rg A = 3$

• Verificare se $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ formano base di $\mathbb{R}^2$

$n = 2$ ($\mathbb{R}^2$)

$k = 2$ (numero vettori)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ generano: $rg A = n = 2$
l.i. : $rg A = k = 2$
$\Rightarrow$ BASE

$rg A = 2$

• $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ formano base di $\mathbb{R}^2$? no.

• $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ formano base di $\mathbb{R}^3$? $k = 3$ $n = 3$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ generano: $rg A = n = 3$ X
l.i. : $rg A = k = 3$ X
$\Rightarrow$ non sono BASE

$rg A = 2$

• $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$? $n =$ $k =$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

OSS. K vettori in $\mathbb{R}^n$ generano $\iff rg\,A =$ dimensione dello spazio

li $\iff rg\,A =$ numero di vettori

$\Rightarrow$ Operativamente, scrivo A e confronto $rg\,A$ con K, n.

OSS. Se ho n vettori in $\mathbb{R}^n$, generare e essere li sono equivalenti, perché entrambi valgono $\iff rg\,A = n$

\# "giusto" di vettori

OSS se ho $K < n$ vettori possono essere li

non possono generare

se ho $K > n$ vettori possono generare

non possono essere li

OSS. Rango di una matrice

- \# righe non nulle matrice a scala
- massimo ordine minore non singolare
- \# pivot
- \# colonne li NEW
- \# righe li ($rg\,A = rg\,A^T$)

ES. Data $A \in M_{n\times n}$, quali sono le condizioni equivalenti all'avere rango massimo?

Tipi speciali di basi

- v_1 ——— v_n sono base di $\mathbb{R}^n \iff A$ ha rango n, ovvero è INVERTIBILE.

(A invertibile $\iff$ le sue colonne formano una base)

- Se A è ortogonale ($\Rightarrow$ invertibile)

le sue colonne sono mutualmente ortogonali e di norma 1: formano una base ortogonale

In quest caso, i coeff. delle cl si trovano semplicemente con il prodotto scalare

10/05/24

APPLICAZIONI LINEARI

$\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale $v+w \in \mathbb{R}^n$, $cv \in \mathbb{R}^n$

BASE B: insieme di vettori che generano e sono linearmente indipendenti

dim $\mathbb{R}^n$ = # vettori di una base

criterio: k vett. sono li $\Leftrightarrow$ $rg A = k$

k vett. generano $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $rg A = n$

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$

G gruppo $(G, *, e)$

G' " $(G', *', e')$

$\varphi: G \to G'$ omom.

$$\varphi(g * g') = \varphi(g) *' \varphi(g')$$

$$\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}$$

Ker φ, Im φ $\longrightarrow$ $\ker\varphi < G$

$\mathrm{Im}\,\varphi < G'$

ISOM.: OMOM + INIETTIVI + SURIETTIVI

Applicazioni lineari

def. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una app. lin. se:
- $F(u+v) = F(u) + F(v)$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$
- $F(cv) = cF(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$, c scalare
- $F(\underline{0}) = \underline{0}$

È sufficiente definire AL su una base

Se $B = \{v_1 \_\_\_ v_n\}$ base e $F(v_1) = w_1 \in \mathbb{R}^m$

$\vdots$

$F(v_n) = w_n \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow F(v) = ?$ $v \in \mathbb{R}^n$?

$v = a_1 v_1 + \_\_\_ + a_n v_n$, a_n univocamente determinati perché b base

$F(v) = F(a_1 v_1 + \_\_\_ + a_n v_n) = a_1 F(v_1) + \_\_\_ + a_n F(v_n) = a_1 w_1 + \_\_\_ + a_n w_n$

Immagine di v

ESEMPIO Se $C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ Definiamo $F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{= v_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{= v_2}$$

$$F\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right] = F\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) =$$ x, y numeri

$$= xF\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + yF\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x\end{pmatrix}$$

__Cruciale__: Ad ogni matrice $m \times n$ corrisponde una AL da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Ad ogni AL da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ corrisponde una mat $m \times n$ (per ogni scelta di base)

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

def. $L_A: v \mapsto Av$

lin: $A(v+w) = Av + Aw$

$A(cv) = cAv$

$$\underbrace{\underbrace{m\left(\ A\ \right)}_{n}}_{m\times n}\underbrace{\left(v\right)}_{n\times 1} = \underbrace{w}_{m\times 1}$$

Facciamo il conto:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m \end{pmatrix} = \underset{\uparrow \text{ funzione}}{L_A}(x_1 \_\_ x_m)$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_m \end{pmatrix} = v$

Ogni variabile compare con la potenza uno senza l'aggiunta di costanti

ES: NO $\rightarrow$ $L(x,y) = \begin{pmatrix} x+y+\cancel{2} \\ x-7y \end{pmatrix}$

$L(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tutte le AL da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ sono in questa forma

ES.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad L_A : v \longmapsto Av$, $\quad \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^2$

"moltiplicazione vettori di $\mathbb{R}^n$ per una matrice li trasforma in vettori di $\mathbb{R}^m$"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 5 \cdot x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 \end{pmatrix} = L_A(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

ES.

$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ y-z \end{pmatrix}$ NON è lin. perché x^2

$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y+z+1 \\ x+z \end{pmatrix}$ " " " " $+1$

Notazione: le AL si indicano con F, L, T

Come associamo una (inf) mat ad una AL?

- B. CANONICA: $C = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots \underset{e_m}{} \right\}$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_m \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_me_m$

$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$L(x_1 \_\_ x_m) \overset{\text{linearità}}{=} x_1 \underbrace{L(e_1)}_{\in \mathbb{R}^m} + \dots + x_m \overbrace{L(e_m)}^{\in \mathbb{R}^m}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ L(e_1) & \dots & L(e_m) \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_L(C,C)$ = matrice che ha per colonne l'immagine di vettori di base

Esempio

$L(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1x_1 + 18x_2 \\ -1x_1 \quad 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_L = ?$

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad L(0,1) = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A_L = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 1$
$x_2 = 0$

Posso scrivere la matrice associata a $(\mathbb{R}^n, B)$ $B = \{v_1 \_\_ v_n\}$
$(\mathbb{R}^m, B')$

partenza

$$A_L(\overset{\text{partenza}}{B'}, \underset{\text{arrivo}}{B}) = \left([L(v_1)]_{B'} \dots [L(v_n)]_{B'} \right)$$

arrivo

le colonne di A_L sono le immagini dei vettori della base B scritti in coordinate rispetto a B'

Proprietà: Così come $A_L(C, C) \cdot v = L(v)$
$A_L(B', B)[v]_B = [L(v)]_{B'}$

· Ad ogni AL associo infinite matrici, una per ogni possibile scelta di basi

Come passo da una base all'altra?

def. Data B, B' di $\mathbb{R}^n$, la matrice cambio base $M(B', B)$ è la matrice che trasforma le coordinate di un vettore rispetto a B nelle sue coordinate rispetto a B', ovvero $M(B', B)[v]_B = [v]_{B'}$

$v \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow [v]_B$ coeff. di v come c.l. dei vettori di B
$[v]_{B'}$ " " " " " " " B'

Come si scrive (B', B)? $B = \{v_1 \_\_ v_n\}$

$$M(B', B) = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_{B'} & \dots & [v_n]_{B'} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

← le colonne sono le coordinate dei vettori di B scritti rispetto a B'

Posso pensare i cambi base come applicazioni lineari

• Se $M(B', B) = P$
$M(B, B') = P^{-1}$

$$[v]_B \overset{M(B',B)}{\rightsquigarrow} [v]_{B'} \overset{M(B,B')}{\rightsquigarrow} [v]_B$$
$$\Rightarrow \underset{P}{M(B', B)} \cdot \underset{P^{-1}}{M(B, B')} = I$$

def. Una AL $T: \mathbb{R}^n \circlearrowleft$ (da uno spazio a se stesso) si dice OPERATORE

oss Due matrici A, B che rappresentano un operatore T rispetto a basi ≠ sono simili, ovvero ∃ P invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

Se A rappresenta T rispetto a B in partenza e in arrivo
$\longrightarrow A[v]_B = [T(v)]_B$
B rappresenta T rispetto a B', in partenza e in arrivo,
$\longrightarrow B[v]_{B'} = [T(v)]_{B'}$

Si può fare anche con basi ≠ in partenza e in arrivo ma diventa più complicato

Domanda finale: In quali casi esiste una base in cui T si può rappresentare con una mat. diagonale?

CONCETTI BASI SU AL

def. $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A_L, la sua immagine è

$$\text{Im}L = \{w \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ L(v) = w\}$$
$$= \text{spazio generato dalle colonne di } A_L$$

mat. associata rispetto alle basi canoniche

def. $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A_L, Il nucleo/kernel di L è

$$\text{Ker}L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid L(v) = 0\} = \text{Sol}(A_L|0) = \text{Sol}\{A_L = 0\}$$

oss. $\text{Im}L$ è un ssv di $\mathbb{R}^m$
$\text{Ker}L$ è un ssv di $\mathbb{R}^n$

W è ssv di $\mathbb{R}^m$
$\iff \forall\, v, w \in W,\ v+w \in W$
$\forall\, v \in W,\ c \in \mathbb{R},\ cv \in W$

⇝ Base di W è un insieme di vettori di W che
- generano
- sono LI

⇝ $\dim W = \#$ vett. di una base

Perché $\text{Im}L$ = Spazio generato dalle colonne?

$$A_L = \begin{pmatrix} | & & | \\ L(e_1) & \dots & L(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Se $w \in \text{Im}L \Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $w = L(v)$

$v = a_1 e_1 + \quad + a_n e_n$

$\Rightarrow w = L(w) = L(a_1 e_1) + \quad + L(a_n e_n) = a_1 L(e_1) + \quad + a_n L(e_n)$

colonne di A_L

< Per calcolare $\text{Im}L$ scrivo matrice associata A_L; $\text{Im}L = \mathcal{L}(\text{colonne di } A_L)$
di solito si chiede di trovare una base >

def. $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suriettiva se $\forall\, w \in \mathbb{R}^m\ \exists\, v$ t.c. $L(v) = w$ ovvero $\text{Im}L = \mathbb{R}^m$

$\text{Im}L = \{\text{spazio generato dalle colonne}\} \Rightarrow L$ suriettiva $\iff \dim \text{Im}L = m$

ovvero

A_L ha m colonne LI (le colonne di A_L generano $\text{Im}L$; una base è formata da generatori che sono anche LI $\Rightarrow$ mi serve che tra queste colonne ce ne siano sicuro m LI)

$\Rightarrow L$ suriettiva $\iff \text{rg}\, A_L = m = \dim \mathbb{R}^m$

arrivo

oss. $A_L = \underbrace{\Big(\quad \Big)}_{n}\Big\}{m} \to \text{rg}\, A_L \le \min(m, n) \Rightarrow$ per avere $\text{rg}\, A_L = m$ serve $n \ge m$

$\Rightarrow$ se $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suriettiva, $n \ge m$

def. $L:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è INIETTIVA $\iff \forall\ v \neq w \Rightarrow L(v) \neq L(w)$

prop. $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ INIETTIVA $\iff$

- $\ker L = \{\underline{0}\} \iff$
- $rg\, A_L = n = \dim \mathbb{R}^n$

partenza

dim. • Se iniettiva $\Rightarrow \ker L = \{\underline{0}\}$ ✓

Suppongo $\ker L = \{\underline{0}\}$. Sia u, v t.c. $L(u) = L(v) \Rightarrow L(u) - L(v) = 0$

$\overset{\text{LIN.}}{\Rightarrow} L(u-v) = 0 \Rightarrow u - v \in \ker L \Rightarrow u - v = \underline{0}$ (cioè $u = v$) ✓

• $\ker L = L^{-1}\{0\} = Sol(A_L v = 0) \longrightarrow \dim \ker L = \#$ parametri delle sol $=$

$= \#$ var $- rg\, A_L = n - rg\, A_L$

$\Rightarrow$ sol unica $\iff rg\, A_L = n$

oss

$$A_L = \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{n} \end{array} \Big\} m$$

$\Rightarrow rg\, A_L \leq \min(m, n) \Rightarrow$ per avere iniettiva devo avere $n \leq m$

$\Rightarrow$ Se $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ INIETTIVA, $n \leq m$

$\Rightarrow$ Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ISOM. $\longrightarrow n = m$

(iniettiva: $n \leq m$

suriettiva: $n \geq m$)

13/05/24

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è una AL se $F(v+w) = F(v) + F(w)$

$F(cv) = cF(v)$

F AL $\overset{B,\ B'}{\rightsquigarrow} A_F(B', B) = \begin{pmatrix} [F(v_1)]_{B'} & \cdots & [F(v_n)]_{B'} \end{pmatrix}$ $\{v_1 \text{ —— } v_n\} = B$

$\ker F = \{v \in \mathbb{R}^n,\ F(v) = 0\} = Sol\{A_F X = 0\}$

$Im\, F = \{w \in \mathbb{R}^m,\ \exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ F(v) = w\} = \mathcal{L}\{$colonne di $A_F\}$

Fondamentale: $F(v) = A_F v$ base canonica

$[F(v)]_{B'} = A_F(B', B)[v]_B$ base generica B', B

F iniettiva / suriettiva / isom.

$F \rightsquigarrow A_F$ $\quad F^{-1} \rightsquigarrow A_F^{-1}$ $\quad$ F isom $\iff A_F$ quadrata invert.

es. matrice cambio base

def. Un operatore T è una AL da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(Rappresentato da matrici $A \in M_{n \times n}$, una per ogni scelta di base

Q. In quali casi esiste una base di $\mathbb{R}^n$, in cui $A_L(B, B)$ è diagonale?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ la penso come $A_F(\mathcal{C},\mathcal{C})$ per un operatore

$(F(e_1)\ F(e_2)\ F(e_3)) \rightsquigarrow F(e_1) = e_1 \quad F(e_2) = 2e_2 \quad F(e_3) = 3e_3$

AUTOVALORI e AUTOVETTORI

def. T operatore su $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ è AUTOVALORE per T se $\exists\ v \neq 0$ tale che $T(v) = \lambda v$ v si dice AUTOVETTORE

Essere autovalore è speciale:

$T(v) = \lambda v \rightsquigarrow A_T\, v = \lambda v \rightsquigarrow A \cdot v - \lambda v = 0 \rightsquigarrow Av - \lambda I v = 0 \rightsquigarrow (A - \lambda I)v = 0 \ (*)$

$\underline{A-\lambda I}$: matrice dei coeff. di un si.

$\Rightarrow \lambda$ autovalore $\Leftrightarrow$ il sistema $(*)$ ha sol non banali

$$\#\text{par} = \#\text{var} - \text{rg}(A-\lambda I) = n - \text{rg}(A-\lambda I) > 0$$
$$\Leftrightarrow \text{rg}(A-\lambda I) < n \Leftrightarrow \det(A-\lambda I) = 0$$

$\Rightarrow$ gli autovalori di A sono le radici del polinomio $\det(A-\lambda I)$

Ricetta per trovare gli autovalori cerco i λ tali che $\det(A-\lambda I) = 0$

def. $\det(A-\lambda I)$ si chiama polinomio caratteristico di A, è un polinomio di grado n.

1° PROB. Su $\mathbb{R}$ non tutti i pol. di grado n hanno n radici (con molteplicità)

Anche essere autovettore è speciale: l'immagine di un autovettore è un multiplo di sé stesso. Nell'esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Autovettori: multipli di e_1;
"   " e_2; nessun altro!
"   " e_3;

Calcolo autovettori Dopo aver trovato gli autovalori, v è autovettore relativo a un autovalore $\lambda \Leftrightarrow v \neq 0$ e $(A-\lambda I)v = 0$

$\Rightarrow v$ è autovettore per $\lambda \Leftrightarrow v \neq 0$ e soddisfa questo sis. lineare.

Si definisce l'autospazio relativo all'autovalore λ come

$$V_\lambda = \text{Sol}\{(A-\lambda I)v = 0\} = \{0\} \cup \{\text{autovalori relativi a } \lambda\}$$

Ad ogni autovalore λ associamo due numeri:

$\text{Ma}(\lambda)$ = numero di volte che compare come radice di $p_A(t) = \det(A - tI)$
molteplicità algebrica

$\text{Mg}(\lambda) = \dim V_\lambda = n - \text{rg}(A-\lambda I) \geq 1$ perché λ autovalore $\Leftrightarrow A - \lambda I$ non è invertibile
molteplicità geometrica

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Calcolare autovalori: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$

$= \lambda(\lambda - 2) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{matrix}}$ Autovalori

$ma(0) = 1$

$ma(2) = 1$

Calcolare autovettori:

$V_0 = Sol(A - 0I|0)$ $A - 0I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rg = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ / \end{cases}$

$x = -y$

$\Rightarrow V_0 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$

spazio generato

$B_{V_0} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

OK! rg < n = 2
ho saltato λ apposta

rg = 1

$V_2 = Sol(A - 2I|0)$ $A - 2I = \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -x + y = 0 \rightarrow x = y \\ / \end{cases}$

$\rightarrow V_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$B_{V_2} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$T: \mathbb{R}^n \circlearrowleft$

<u>OSS.</u> Due matrici A, B rappresentano lo stesso operatore T rispetto a basi diverse $\Leftrightarrow$ sono simili, ovvero $\exists\, P \in M_{n \times n}$ invertibile tale che: $B = P^{-1}AP$

FOTO TEL

In coord: $\star\ B[v]_{B'} = [T(v)]_{B'}$ $\quad m(B, B')[v]_{B'} = [v]_B$, $\quad m(B,B') = P$

$A[v]_B = [T(v)]_B$

Controllo funzioni $\star$ se $B = P^{-1}AP$

$B[v]_{B'} = (P^{-1}\underbrace{A\underbrace{P[v]_{B'}}_{[v]_B}}_{[T(v)]_B}) = [T(v)]_{B'}$ $(\star)$ ✓

$\underbrace{P^{-1}[T(v)]_B}_{[T(v)]_{B'}}$

oss. Gli autovalori non dipendono dalla scelta delle basi, ovvero della matrice che lo rappresenta. Infatti

PROP. Due mat simili hanno lo stesso pol caratteristico

dim A, B suppongo $B = P^{-1}AP$ P invertibile

$p_A(t) = \det(A - tI)$

$$p_B(t) = \det(B - tI) = \det(P^{-1}AP - t\overbrace{I}^{I = P^{-1}P}) =$$

$$= \det(P^{-1}AP - tP^{-1}IP) = \det(P^{-1}(A - tI)P) \overset{\text{Binet}}{=}$$

$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - tI) \cdot \underbrace{\det P}_{\det P \cdot \det P^{-1} = 1} = p_A(t)$$

def. Una matrice $A \in M_{n \times n}$ e' diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ D diagonale, P invertibile, tale che
$D = P^{-1}AP$

Formulazione equivalente in termini di operatori:

def. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e' diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ base B di autovettori, ovvero $A_T(B,B)$ e' diagonale

Nell'esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

$B_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Base di autovettori: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

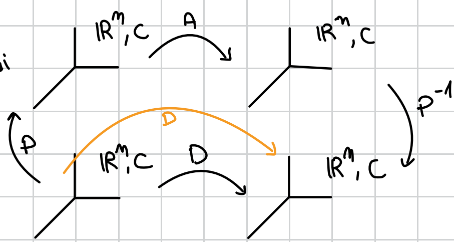
$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_T(B,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$\Rightarrow$ se voglio trovare D diagonale e P invertibile tale che
$D = P^{-1}AP$,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Chi è P? $P = M(C, B)$
= colonne vettori di B scritte in coordinate risp. a C
= vettori di B



$$\Rightarrow P = \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right) & \end{array}$$

Base di V_0 Base di V_2

Questa è la ragione per cui si scrive
$D = P^{-1}AP$: così P ha come colonne gli autovettori.
Se scrivessi $D = \tilde{P}A\tilde{P}^{-1}$, $\tilde{P} = (M(B,C)) \rightsquigarrow$ avrebbe per colonne i vettori canonici scritte in coor. risp. a B $\Rightarrow$ CONTI EXTRA

Riassunto
- Calcolo autoval.
- Calcolo base per ogni autospazio
- Se ho abbastanza autovettori per le basi ⇝ D mettendo gli autoval. sulla diagonale
  ⇝ P mettendo gli autovett. come colonne

2° PROB: Potrei non avere abbastanza autovettori

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2 \qquad ma(2) = 2$$

$V_2 = Sol(A-2I) \qquad A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg = 1$ autoval. OK

HA # par $=$ # var $-$ rg $= 2-1 = 1$

$\Rightarrow V_2 = \ldots = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow B_{V_2} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Per avere una base di autovettori per $\mathbb{R}^2$, mi servono due autovettori l.i., ma ne ho uno solo!
Non ho altri autovalori da cui trovare autovettori e V_2 ha dimensione $1<2$.

DA SAPERE

Fatto | Una matrice A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

1. $\exists$ tutte le radici di $p_A(t)$ in $\mathbb{R}$

2. $\forall$ autovalore λ
   $ma(\lambda) = mg(\lambda)$

Cond. necess. e suff.

su $\mathbb{C}$: no prob. teo fon. algebra

Altri due criteri:
- Se tutti gli autovalori esistono e sono distinti $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile
- Se una mat. è simm. $\Rightarrow$ è diagonalizzabile (TEO. SPETTRALE)

criteri suff. ma non necessari

Ragionevole: ogni autoval. mi dà un autovett., devo solo dim. l.i.

DOMANDA D'ESAME: criteri diagonabilità

17/05/24

ESERCIZI APPLICAZIONI LINEARI e DIAGONALIZZAZIONE

MINI RIASSUNTO

- $\mathbb{R}^n$ $V \subset \mathbb{R}^n$ (sottoinsieme per $\mathbb{R}^n$) è un ssv se $v_1 + v_2 \in V$ $\forall v_1, v_2 \in V$
  $cv_1 \in V$ $\forall v_1 \in V$, $c \in \mathbb{R}$
- base per V: insieme di vettori · LI
  · che generano V
- dim V = # vettori di una base (non dipende dalla scelta)
- per ogni scelta di B, $v \mapsto [v]_B$ k numeri → dim
  a un vettore possiamo associare le sue coordinate rispetto a questa base
- per passare dalle coordinate rispetto a B alle a B' uso una mat. cambio base $M(B', B)$
  - le mat cambio base sono invertibili, e le mat invertibili posso vederle come mat cambio base
  - le mat ortogonali corrispondono alle matrici cambio base tra C e una base ortonormale
  - $M(C, B)$ è la mat le cui colonne sono i vettori di B
  - Per ogni scelta di base B, B'
    $$M(B', B) = [M(B, B')]^{-1}$$

APPLICAZIONI LINEARI

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Per ogni scelta di basi B su $\mathbb{R}^n$
B' su $\mathbb{R}^m$

- posso scrivere $A_F = (B', B)$
- $A_F(C, C) = (F(e_1) \ldots F(e_n))$ Immagini vettori base
- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, due matrici A, B rappresentano T
  $\Longleftrightarrow$ sono simili $[\exists P$ invertibile, $B = P^{-1}AP]$
- B base di autovettori per T $\Leftrightarrow$ $A_T(B, B)$ è diagonale

ESERCIZI AP. LIN.

es. completo: data F A.L. calcolare:
- Im F
- dim Im F
- base Im F
- Ker F
- dim Ker F
- base Ker F
- F è iniettiva / suriettiva / isomorfismo

F può essere data in due modi: A) $F(x_1, \ldots, x_n) = \ldots$
B) $F(e_1) = \ldots$ $F(e_2) = \ldots$

Altre domande:
- Scrivere $F : \mathbb{R}^{\cdot} \to \mathbb{R}^{\cdot}$ che sia iniettiva/ecc...

ESEMPIO 1

$$F(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}2x_1+x_3\\ x_1+x_2\\ x_1+x_2+x_3\\ x_1-x_2+x_3\end{pmatrix}$$ osservo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$

(x_1,x_2,x_3)

(il vettore immagine ha 4 componenti)

- Def. di AL
- Dimostrare che $\ker F$, $\operatorname{Im} F$ sono ssv di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

STEP 0: scrivere matrice associata

$$A=A_F=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$ → copio i coeff. / posso pensare le colonne di A come $F(e_1)\dots F(e_n)$

$$F(e_1)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad F(e_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad F(e_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

STEP 1: calcolare il rango

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2-2R_1\\R_3-R_1\\R_4-R_1}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

→ $rg=3$
rg max

$\dim \operatorname{Im} f=3$
$3<\dim\mathbb{R}^4$
⇒ no suriettiva

$\operatorname{Im} f=\mathcal{L}(\text{colonne})$
colonne L.I. = Rg A

$\dim\ker F=\#\text{var}-rgA=n-rgA$
$=sol(AX=0)$
$n = \dim\mathbb{R}^n$ → e' A.L. va da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$
$=3-3$
$=0$

→ PROPRIETA': una A.L. e' iniettiva ⟺ il suo nucleo e' il vettore nullo

STEP 2: Calcolo Im F (recupero la mat originale, non quella ridotta a scala perche l'Im e' lo spazio generato dalla mat originaria)

Recupero A (Im F si calcola sulle colonne di A, non della mat ridotta a scala)

$\operatorname{Im} F=\mathcal{L}(\text{colonne di } A)$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Il numero ottimale di col. da usare e' dato dal rango, in questo caso 3

SPAZIO GENERATO = SPAZIO delle C.L.

Attenzione allo spazio a cui appartengono i vettori

$B_{\operatorname{Im}F}$ = Devo estrarre dalle colonne un insieme di vettori L.I.
In questo caso li ho gia' perche' $\dim \operatorname{Im} f=3$
$=\#\text{col} A$

$$B_{Im f} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

STEP 3 : Kernel   la proprietà fondamentale di A è $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $F(v) = A \cdot v$

$\ker F = Sol(AX = 0)$

Posso riprendere la matrice a scala

In questo caso specifico $\ker F = \{0\}$

↳ poiché $\dim \ker F = 0$

$B_{\ker F} = /$

STEP 4 · Non suriettiva perché $\dim Im F < \dim \mathbb{R}^4$ → NO ISOMORFISMO

$\underset{4}{}$ ↳ spazio d'arrivo

· Si iniettiva perché $\ker F = \{0\}$

F iniettiva $\Leftrightarrow$ $\ker = \{0\}$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$3 < 4 \Rightarrow$ non può essere suriettiva

ES.2 $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $L(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$L(e_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 + 2R_1 \\ R_2 + R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - 3R_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg = 2$$

$\dim Im L = 2 < \dim \boxed{\mathbb{R}^3} = 3$ → ARRIVO

$\Rightarrow$ No suriettiva

$\dim \ker L = \dim \boxed{\mathbb{R}^4} - rg A$ → PARTENZA

$= 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow$ NO iniettiva

• Im L, torno a usare A

$Im L = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Poiché la $\dim Im L = 2$, bastano due col. L.I.

$$= \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X = s\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_{Im L} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

- $\ker L = Sol(AX=0) = \{v \in \mathbb{R}^4, L(v)=0\} = L^{-1}\{0\}$

Posso usare la matrice a scala

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{cases}-x_1 - x_3 + x_4 = 0\\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}x_1 = -x_3 + x_4\\ x_2 = -x_3 - x_4\end{cases}$$

$\dim \ker L = 2 \longrightarrow 2$ param.

$$\begin{matrix}x_3 = s\\ x_4 = t\end{matrix} \longrightarrow \begin{cases}x_1 = -s+t\\ x_2 = -s-t\end{cases} \qquad \ker L = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; X = \begin{pmatrix}-s+t\\-s-t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_{\ker L} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- NO suriettiva $\dim Im L = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$
  NO iniettiva $\ker L \neq \{0\}$

$\Rightarrow$ NO isomorfismo

Domanda Extra · Calcolare l'immagine di un vettore $\rightarrow L\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

$$L(v) = Av \Rightarrow L\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\9\\0\end{pmatrix}$$

DIAGONALIZZAZIONE
- Ripassare autovalori e autovettori
- Non tutte le matrici sono diagonalizzabili

* possono mancare autovalori

$$R = \begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$$

* possono essere