Esercizi Esame

Esercizio 1

Dato l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

- Fare il grafico della funzione integranda nel dominio di integrazione.
- Programmare in MATLAB una function con la formula dei trapezi composita costruita su una decomposizione di N sottointervalli del dominio di integrazione.

```
clear
clc
close all

a = -1;
b = 1;
m = 100;

x = linspace(a, b, m+1);
f = @(x) sqrt(1-x.^2);

plot(x, f(x))
grid on

trap_comp(a, b, m, f)
integral(f, a, b)

function [trp] = trap_comp (a, b, m, f)
    x = linspace(a, b, m+1);
    h = (b-a)/m;

    somma = 0;
    for i = 2:m
        somma = somma + f(x(i));
    end

    trp = h/2 * (f(x(1)) + 2 * somma + f(x(end)));
end
```

Appello 2023-05-31

Esercizio 2

Scrivere il sistema lineare che occorre risolvere per ricavare il polinomio interpolatore passante per tre punti.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_1^2 \\ 1 & x_0 & x_1^2 \\ 1 & x_0 & x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Si consideri la funzione

$$f(x) = sin(\pi x) + 2cos(\pi x)$$

nell'intervallo $[0.5, 1.5]$.
Si calcolino in Matlab, utilizzando la matrice di Vandermonde, i coefficienti del polinomio interpolatore di f sui nodi:

$$x_0 = 0.5 \quad x_1 = 0.75 \quad x_2 = 1.5$$

```
clear
clc

a = 0.5;
b = 1.5;
x = [0.5, 0.75, 1.5];

f = @(x) sin(pi * x) + 2 * cos(pi * x);
y = f(x);

v = [ones(3,1), x', x'.^2];

%risoluzione del sistema V*a=y per ottenere i coefficienti
a = v \ y';
disp(a)
```

Esercizio 4

Fare il grafico dell'errore commesso rispetto alla funzione f nell'intervallo $[0.5, 1.5]$.

```
xx = linspace(0.5, 1.5, 200);
yy = f(xx);
pp = a(1) + a(2)*xx + a(3)*xx.^2;
errore = abs(yy - pp);
plot(xx, errore)
grid on
```

Esercizio 5

Descrivere il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione di sistemi lineari.
Il metodo di Gauss-Seidel è un metodo iterativo per la risoluzione dei sistemi lineari.
Si parte dalla matrice A e si decompone in:

- D $\rightarrow$ matrice diagonale di A;
- E $\rightarrow$ matrice triangolare inferiore stretta;
- F $\rightarrow$ matrice triangolare superiore stretta;
  Riscriviamo il sistema lineare $Ax = b$:

$(D+E+F)x = b \quad (D+E)x + Fx = b \quad (D+E)x = b - Fx \quad x^{(k+1)} = -(D+E)^{-1}Fx^{(k)} + (D+E)^{-1}b$

dove $-(D+E)^{-1}F$ è la matrice d'iterazione.
Per far si che il metodo converga, la matrice d'iterazione deve avere il raggio spettrale minore di 1.

$$\rho(-(D+E)^{-1}F) = max_i|\lambda_i| < 1$$

Esercizio 6

Implementare il metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare definito al punto 2.

```
F = triu(v,1);
DE = v - F;

M = -inv(DE)*F;
if max(abs(eig(M))) > 1
    disp('errore')
    return
end

x_old = [1:3]';
x_new = x_old.*2;

while true
    x_new = M*x_old + inv(DE)*y';
    if norm(x_new - x_old) < 10^-8
        x_old = x_new;
        break
    end
    x_old = x_new;
end
disp(x_old)
```

Esercizio 7

Con il metodo di Gauss-Seidel è possibile risolvere il sistema lineare? Motivare la risposta.
Sì, è possibile risolvere il sistema in quanto il raggio spettrale della matrice di iterazione è minore di 1.

Esercizio 8

Scrivere la formula dei trapezi composita applicabile con i 3 punti a disposizione.

$$\frac{H}{2} = \left(f(x_0) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)\right) + f(x_m)\right)$$

$$\frac{0.5}{2} \cdot (f(0.5) + 2 \cdot f(0.75) + f(1.5))$$

Esercizio 9

Con tale formula calcolare un'approssimazione dell'integrale:

$$\int_{0.5}^{1.5} sin(\pi x) + 2 \cdot cos(\pi x) dx$$

Esercizio 10

Calcolare l'errore di approssimazione, rispetto ad un valore di riferimento.

```
val = integral(f,a,b);
err = abs(val - trp);
disp(err)
```

Appello 2022-06-01

Esercizio 11

Descrivere come si ottiene una formula di quadratura di tipo interpolatorio per approssimare un integrale definito.

Dato $\int_a^b f(x)dx$, scegliamo $n+1$ nodi: $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$
Quindi approssimiamo $f(x)$:

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0 \quad j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx$$

Esercizio 12

Descrivere la formula del trapezio semplice per approssimare un integrale definito.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b))$$

Esercizio 13

Implementarla in Matlab per approssimare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx$$

Commentare in relazione al valore esatto dell'integrale.

```
clear
clc

a = -(pi/2);
b = pi/2;

f = @(x) sin(x);
```

```
trap = ((b-a)/2) * (f(a)+f(b));
val = integral(f,a,b);
err = abs(trap - val);

disp(trap)
disp(val)
disp(err)
```

Esercizio 14

Con la stessa formula approssimare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{5\frac{\pi}{2}} sin(x)dx$$

Commentare in relazione al valore esatto dell'integrale.

```
c = pi/2;
d = 5 * (pi/2);

g = @(x) sin(x);

trap2 = ((d-c)/2) * (g(c)+g(d));
val2 = integral(g,c,d);
err2 = abs(trap2 - val2);

disp(trap2)
disp(val2)
disp(err2)
```

Esercizio 15

Descrivere la formula dei trapezi composita su una decomposizione uniforme dell'intervallo di integrazione.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{H}{2} \cdot \left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right)$$

con $H = \frac{(b-a)}{2}$.

Esercizio 16

Implementarla in Matlab per approssimare l'integrale

$$\int_0^\pi sin(x)dx$$

con una decomposizione uniforme dell'intervallo $[0, \pi]$.

```
e = 0;
ff = pi;
m = 100;
H = (ff-e)/m;
x = linspace(e,ff,m+1);
```

```
h = @(x) sin(x);

somma = 0;
for i=[2:m-1]
    somma = somma + h(x(i));
end

trap_c = H/2 * ( h(x(1)) + 2 * somma + h(x(end)) );
val3 = integral(h, e, ff);
err3 = abs(trap_c - val3);
disp(trap_c)
disp(val3)
disp(err3)
```

Appello 2020-02-19

Esercizio 17

a. Scrivere la definizione di polinomio interpolante $n+1$ punti assegnati. Il polinomio interpolante esiste per qualsiasi insieme di punti? È unico?

Un polinomio interpolante è un polinomio di grado al più n che passa per $n+1$ punti distinti (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n$ tale che $p(x_i) = y_i$.
Un polinomio interpolante esiste sempre ed è unico, non esistono due polinomi distinti di grado al più n che passano per gli stessi $n+1$ punti con ascisse distinte.

b. Rappresentare il problema dell'interpolazione polinomiale in n+1 punti assegnati in forma matriciale attraverso la matrice di Vandermonde.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dove:

- a è il vettore delle incognite a_i;
- y è il vettore dei valori y_i osservati nei punti x_i.

Esercizio 18

a. Descrivere la formula del punto medio per approssimare un integrale definito.

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{(a+b)}{2}\right) \cdot (b-a)$$

b. Fare il grafico della funzione

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

nell'intervallo $[\sqrt{3}, 2]$. Aggiungere il grafico della funzione costante che interseca il grafico di g nel punto medio dell'intervallo.

```
clear
clc
close all

a = sqrt(3);
b = 2;
x = linspace(a,b,1000);

g = @(x) 2.*x ./ (sqrt(x.^2 +1));

xm = (a+b)/2;

y_pm = g(xm);

plot(x, g(x))
grid on
hold on
plot(x, y_pm * ones(size(x)))
plot(xm, y_pm, '*')
```

c. Implementare in Matlab la formula del punto medio semplice per approssimare l'integrale

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

```
int_pm = g(pm) * (b-a);
disp('integrale approssimato con la formula del punto medio:')
disp(int_pm)
```

d. Approssimare l'integrale con il comando `integral`.

```
int = integral(g, a, b);
disp('integrale ottenuto con integral:')
disp(int)
```

e. Confrontare i valori ottenuti nel punto **c.** e **d.** e commentare.

```
err = abs(int_pm - int);
disp('errore:')
disp(err)
```

f. Descrivere la formula del punto medio composita su una decomposizione uniforme nell'intervallo d'integrazione.

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \cdot \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

dove $H = \frac{(b-a)}{m}$.

g. Implementarla in Matlab per approssimare l'integrale al punto **b.** con una decomposizione uniforme nell'intervallo $[\sqrt{3}, 2]$.

```
m = 100;
H = (b-a)/m;
x_pmc = linspace(a,b, m+1);
somma = 0;
for i = 1:m
    somma = somma + g((x_pmc(i)+x_pmc(i+1))/2);
end

int_pmc = H * somma;

disp('integral calcolato con la formula del punto medio composita:')
disp(int_pmc)
```

Appello 2020-01-31

Esercizio 19

a. Descrivere la formula del trapezio semplice per approssimare un integrale definito. Che grado di esattezza ha?

b. Descrivere la formula del trapezio composita.

c. Approssimare "analiticamente" l'integrale

$$\int_{10}^{20} (x - \sqrt{2})dx$$

con la formula del trapezio composita applicata con due sotto intervalli e confrontare il risultato ottenuto con il risultato esatto. Commentare.

```
clear
clc

%%% punto c.
int_approx = 5/2*(52-4*sqrt(2));

a = 10;
b = 20;
f = @(x) (x-sqrt(2));

int = integral(f,a,b);

disp('integrale approssimato: ')
disp(int_approx)
disp('integrale calcolato con integral: ')
disp(int)
err = abs(int_approx - int)
disp('errore: ')
disp(err)
```

Appello 2019-09-09

Esercizio 20

a. Scrivere la definizione di polinomio interpolatore.
Dati $n+1$ punti distinti (x_i, y_i) con $i = 0..n$ esiste un polinomio di grado n tale che $p(x_i) = y_i$.

b. Dati i punti di coordinate

$$P_1 = (1,2) \quad P_2 = (3,1) \quad P_3 = (7,0)$$

Ricostruire il polinomio in forma di Lagrange.

```
clear
clc
close all

x = [1 3 7];
y = [2 1 0];
n = length(x);

xx = linspace(min(x), max(x), 100);
px = zeros(size(xx));

for i=1:n
    L = ones(size(xx));
    for j = 1:n
        if j ~= i
            L = L .* ( (xx - x(j)) / (x(i) - x(j)) );
        end
    end
    px = px + y(i) * L;
end

plot(xx, px)
grid on
```

Appello 2022-06-01 (primo turno)

Esercizio 21

Descrivere come si ottiene una formula di quadratura di tipo interpolatorio per approssimare un integrale definito.

Dato l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ approssimiamo la funzione $f(x)$ con il polinomio interpolatore $p(x)$:

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x) \quad con \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

All'interno dell'integrale, andiamo a sostituire la funzione $f(x)$ con l'approssimazione $p(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \int_a^b L_i(x)dx$$

Definendo $w_i = \int_a^b L_i(x)dx$, la formula assume la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Esercizio 22

Implementare in Matlab la formula del punto medio semplice per approssimare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$$

Commentare in relazione al valore esatto dell'integrale.

```
clear
clc

a = -(pi/2);
b = pi/2;

f = @(x) sin(x);

int_pm = (b-a) * f((a+b)/2);

int_exac = integral(f,a,b);

disp('integrale approssimato con formula del punto medio semplice:')
disp(int_pm)
disp('integrale approssimato con integral')
disp(int_exac)
```

Esercizio 23

Con la stessa formula approssimare l'integrale

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

commentare in relazione al valore esatto dell'integrale.

```
clear
clc

a = 0;
b = pi;

f = @(x) sin(x);

int_pm = (b-a) * f((a+b)/2);

int_exac = integral(f,a,b);
```

```
disp('integrale approssimato con formula del punto medio semplice:')
disp(int_pm)
disp('integrale approssimato con integral')
disp(int_exac)
```

Esercizio 24

Descrivere la formula del punto medio composita su una decomposizione uniforme dell'intervallo d'integrazione.

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\right) \quad con \quad H = \frac{b-a}{m}$$

Esercizio 25

Implementarla in Matlab per approssimare l'integrale

$$\int_0^\pi \sin(x)dx$$

con una decomposizione uniforme dell'intervallo $[0, \pi]$.

```
clear
clc

a = 0;
b = pi;
m = 100;
h = (b-a)/m;
x = linspace(a,b,m+1);
f = @(x) sin(x);

somma = 0;
for i=1:m
    somma = somma + f((x(i) + x(i+1))/ 2);
end

int_pmc = h * somma;
int_exac = integral(f,a,b);

disp('integrale approssimato con formula del punto medio composita:')
disp(int_pmc)
disp('integrale approssimato con integral')
disp(int_exac)
```

Appello 2022-06-01 (secondo turno)

Esercizio 26

Descrivere la formula del trapezio semplice per approssimare un integrale definito.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b))$$

Esercizio 27

Implementarla in Matlab per approssimare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$$

commentare in relazione al valore esatto dell'integrale.

```
clear
clc

a = -(pi/2);
b = pi/2;

f = @(x) sin(x);

int_trp = ((b-a)/2) * (f(a)+f(b));
int_exac = integral(f,a,b);

disp('integrale approssimato con formula del trapezio semplice:')
disp(int_trp)
disp('integrale approssimato con integral')
disp(int_exac)
```

Esercizio 28

Con la stessa formula approssimare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{5\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$$

commentare in relazione al valore esatto dell'integrale.

```
clear
clc

a = pi/2;
b = 5 * pi/2;

f = @(x) sin(x);

int_trp = ((b-a)/2) * (f(a)+f(b));
int_exac = integral(f,a,b);

disp('integrale approssimato con formula del trapezio semplice:')
disp(int_trp)
disp('integrale approssimato con integral')
disp(int_exac)
```

Esercizio 29

Descrivere la formula dei trapezi composita su una decomposizione uniforme dell'intervallo di integrazione.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{H}{2} \cdot \left(f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right) \quad con \quad H = \frac{(b-a)}{m}$$

Esercizio 30

Implementarla in Matlab per approssimare l'integrale

$$\int_0^\pi \sin(x)dx$$

con una decomposizione uniforme dell'intervallo $[0, \pi]$.

```
clear
clc

a = 0;
b = pi;
m = 100;
h = (b-a)/m;
x = linspace(a,b,m+1);

f = @(x) sin(x);

somma = 0;
for i=2:m
    somma = somma + f(x(i));
end

int_trpc = h/2 * (f(x(1)) + 2 * somma + f(x(end)) );
int_exac = integral(f,a,b);

disp('integrale approssimato con formula del trapezio composita:')
disp(int_trpc)
disp('integrale approssimato con integral')
disp(int_exac)
```

Appello 2021-05-31

Esercizio 31

Data la funzione $f(x) = \sin(2x) + e^x + 1$ definita nell'intervallo $[-2, 0.1]$, eseguire le seguenti operazioni:

1. calcolare il polinomio di interpolazione semplice lagrangiano che interpola la funzione nei nodi $-2 \quad -1.25 \quad -0.7 \quad 0.1$.

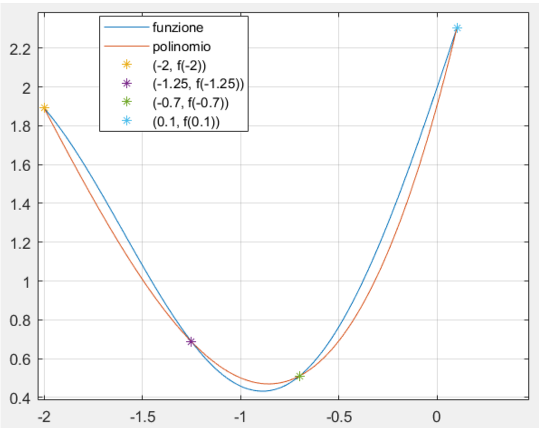
```
a = -2;
b = 0.1;
```

```
f = @(x) sin(2*x) + exp(x) + 1;

nodi = [-2 -1.25 -0.7 0.1];
x = linspace(min(nodi), max(nodi), 100);
px = zeros(size(x));

for i=1:length(nodi)
    L = ones(size(x));
    for j = 1:length(nodi)
        if j ~= i
            L = L .* (x - nodi(j)) / (nodi(i) - nodi(j));
        end
    end
    px = px + f(nodi(i)) * L;
end
```

2. in una finestra grafica visualizzare la funzione f, il polinomio interpolante e i relativi nodi di interpolazione.



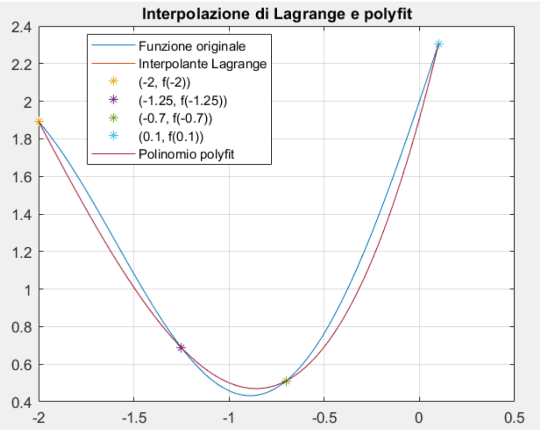

```
plot(x, f(x))
grid on
hold on
plot(x, px)
hold on
plot(-2, f(-2), '*')
hold on
plot(-1.25, f(-1.25), '*')
hold on
plot(-0.7, f(-0.7), '*')
hold on
plot(0.1, f(0.1), '*')
legend('funzione', 'polinomio', '(-2, f(-2))', '(-1.25, f(-1.25))', '(-0.7,
f(-0.7))', '(0.1, f(0.1))')
```

3. calcolare l'approssimazione nel senso dei minimi quadrati con un polinomio di secondo grado e aggiungerlo al grafico.

```
y = f(nodi);

p = polyfit(nodi, y, length(nodi)-1);
p_val = polyval(p, x);
```

```
plot(x, f(x));
hold on;
plot(x, px);
plot(-2, f(-2), '*')
plot(-1.25, f(-1.25), '*')
plot(-0.7, f(-0.7), '*')
plot(0.1, f(0.1), '*')
plot(x, p_val);
legend('Funzione originale', 'Interpolante Lagrange', '(-2, f(-2))', ...
    '(-1.25, f(-1.25))', '(-0.7, f(-0.7))', '(0.1, f(0.1))', 'Polinomio polyfit');
title('Interpolazione di Lagrange e polyfit');
grid on;
```



4. calcolare l'integrale della funzione esatta.

```
integral(f,a,b)
```