AUTOMI NON-DETERMINISTICI

Un AUTOMA A STATI FINITI NON-DETERMINISTICO (NFA) e' una quintupla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ dove Q, Σ, q_0 e $F \subseteq Q$ mantengono il significato degli automi deterministici, mentre la funzione di transizione e' definita come:

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow P(Q)$$

e' possibile avere $\delta(q, a) = \emptyset$ per qualche $q \in Q$ ed $a \in \Sigma$.

Dalla funzione δ si ricava $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow P(Q)$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\} \\ \hat{\delta}(q, wa) = \bigcup\limits_{p \in \hat{\delta}(q, w)} \delta(p, a) \end{cases}$$

stringa x e' ACCETTATA se $\hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$.

Il linguaggio accettato da M e' l'insieme delle stringhe accettate:

$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset \}$$

MATRICE DI TRANSIZIONE per gli NFA:
- diversa da quella dei DFA, in ogni casella si deve inserire un insieme di stati.

GRAFO:
- quasi identico, ma da un nodo possono uscire più archi o nessuno.

Negli NFA c'e' la possibilità di procedere in contemporanea la computazione in ognuno degli stati.

OPERAZIONI

• COMPLEMENTO

$L \subseteq \Sigma^*$ $\quad L$ linguaggio regolare

$\bar{L} = \Sigma^* - L$ $\qquad$ ($\Sigma^* \setminus L$ in insiemistica)

$\bar{L}$ è regolare? Sì

$\Downarrow$

Se L è regolare, per definizione esiste un automa M tale che $L(M) = L$

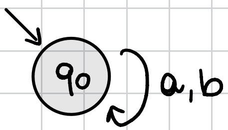
dove $M = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$

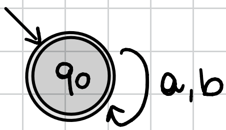
Allora posso costruire M': $L(M') = \bar{L}$

dove $M' = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, Q - F \rangle$

ESEMPIO:

$L = \emptyset$ $\qquad\qquad$ $\bar{L} = \Sigma^*$





$F = \emptyset$

$Q = \{q_0\}$

$\bar{F} = Q - F = Q - \emptyset = Q = \{q_0\}$

• UNIONE

Dati due linguaggi $L_1 \cup L_2$, L_1 e L_2 regolari, possiamo definire:

$M_1 = \langle Q_1, \Sigma, q_0^1, \delta_1, F_1 \rangle$

$M_2 = \langle Q_2, \Sigma, q_0^2, \delta_2, F_2 \rangle$

N.B.: i linguaggi sono definiti sullo stesso alfabeto

$L(M_1) = L_1$ e $L(M_2) = L_2$

L'unione viene detta PRODOTTO degli AUTOMI.

$M = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle \quad L(M) = L_1 \cup L_2$

Per ottenere M dobbiamo simulare l'esecuzione contemporanea e sincronizzata degli automi M_1 e M_2.
Dunque Q lo possiamo vedere come

$$Q = Q_1 \times Q_2$$

Ovvero gli stati di M sono delle coppie di stati

$$(q_i, q_j) \text{ t.c. } q_i \in Q_1, \ q_j \in Q_2$$

$$(q_i, q_j) \xrightarrow{a} (q_i', q_j')$$

$$q_i' = \delta_1(q_i, a)$$

$$q_j' = \delta_2(q_j, a)$$

Com'e' fatto q_0? $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$

e F? $F = \{ (q_i, q_j) \mid q_i \in F_1 \ \underline{\text{OR}} \ q_j \in F_2 \}$

Nel caso dell'intersezione avremo
$F = \{ (q_i, q_j) \mid q_i \in F_1 \ \underline{\text{AND}} \ q_j \in F_2 \}$

N.B. Nell'insiemistica:

- con l'unione e il complemento possiamo derivare l'intersezione;
- viceversa, con l'intersezione e il complemento possiamo derivare l'unione.

EQUIVALENZE TRA DFA e NFA

Un DFA è convertibile in un NFA.
(un DFA si può vedere come un NFA in cui $\delta(q,a)$ restituisca sempre insiemi costituiti da un solo stato)

TEOREMA RABIN-SCOTT

Mostra che un NFA è sempre convertibile in un DFA.
Sia $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un NFA. Allora esiste un DFA M' tale che $L(M) = L(M')$.

DIMOSTRAZIONE:

Si definisca $M' = \langle Q', \Sigma', \delta', q_0', F' \rangle$ come segue:

- $\Sigma' = \Sigma$;
- $Q' = \wp(Q)$;
- $q_0' = \{q_0\}$
- $F' = \{P \subseteq Q : P \cap F \neq \emptyset\}$;
- $\delta'(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$, per $P \in \wp(Q)$.

Mostriamo per induzione sulla lunghezza della stringa di input x che:

$$\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}'(q_0', x)$$

CASO BASE: Per $|x| = 0$ il risultato è banale, poiché $q_0' = \{q_0\}$ e $x = \varepsilon$

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo che l'ipotesi induttiva valga per tutte le stringhe x tali che $|x| \leq n$.
Sia xa una stringa di lunghezza $n+1$.
Allora:

$$\hat{\delta}'(q_0', xa) = \underbrace{\delta'(\hat{\delta}'(q_0', x), a)}_{\text{DEF. di } \wedge \text{ nei DFA}}$$

$$= \underbrace{\delta'(\hat{\delta}(q_0, x), a)}_{\text{IP. INDUTTIVA}}$$

$$= \underbrace{\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, x)} \delta(p, a)}_{\text{DEF. DI } \delta'} = \underbrace{\hat{\delta}(q_0, xa)}_{\text{DEF. di } \wedge \text{ nei NFA}}$$

Il teorema segue dal fatto che:

$x \in L(M)$ sse $\hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$ def. di linguaggio NFA

sse $\hat{\delta}'(q_0', x) \cap F \neq \emptyset$ propr. sopra

sse $\hat{\delta}'(q_0', x) \in F'$ def. di F'

sse $x \in L(M')$ def. di linguaggio DFA

ESERCIZIO: Si determini il DFA equivalente al NFA:

	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

dove $F = \{q_2\}$.

Qual è il linguaggio accettato?

1) Identificare gli stati NFA

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- lo stato iniziale è q_0
- $\Sigma = \{0, 1\}$

2) Costruire gli stati del DFA

- STATO INIZIALE: $\{q_0\}$
  - $\to$ 0: $\delta(\{q_0\}, 0) = \{q_0\}$ rimane in q_0
  - $\to$ 1: $\delta(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$ va in $\{q_0, q_1\}$

Ora aggiungiamo $\{q_0, q_1\}$ alla lista di stati e calcoliamo le sue transazioni:

- STATO $\{q_0, q_1\}$
  - $\to$ 0: $\delta(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_1\}$
  - $\to$ 1: $\delta(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1, q_2\}$

- STATO $\{q_0, q_1, q_2\}$
  - $\to$ 0: $\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
  - $\to$ 1: $\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 1) = \{q_0, q_1, q_2\}$

- STATO $\{q_1, q_2\}$
  - $\to$ 0: $\delta(\{q_1, q_2\}, 0) = \{q_1, q_2\}$
  - $\to$ 1: $\delta(\{q_1, q_2\}, 1) = \{q_0, q_1, q_2\}$

Un insieme di stati del DFA e' finale se contiene almeno uno degli stati finali del NFA (q_2).
Quindi gli stati finali del DFA sono:

$\to \{q_0, q_1, q_2\}$

$\to \{q_1, q_2\}$

3) Tabella DFA:

	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

4) Linguaggio accettato:

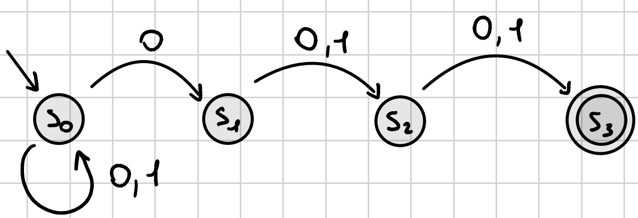
Il DFA accetta una stringa solo se raggiunge uno stato finale.
Dal momento che lo stato finale $\{q_0, q_1, q_2\}$ e' raggiunto con qualsiasi stringa che contiene almeno un 1, il linguaggio accettato e':

$$L = \{ w \in \{0,1\} \mid w \text{ contiene almeno un } 1 \}$$

ESERCIZIO

Esercizio: Si descriva un NFA a 4 stati che riconosce il linguaggio delle stringhe di 0 e 1 con terzultimo elemento a 0. Si passi poi al DFA equivalente [redacted]

$$L = \{ w0s_1s_2 \mid w \in \Sigma^*,\ s_1, s_2 \in \Sigma \} \qquad \Sigma = \{0,1\}$$



Da s_0 ho due strade
- lo 0 visto e' il terzultimo
- lo 0 non e' il terzultimo e continuo su s_0

	0	1
s_0	$\{s_0, s_1\}$	$\{s_0\}$
s_1	s_2	s_2
s_2	s_3	s_3
s_3		

non ho archi uscenti perché se vedo un carattere ho fatto la scelta sbagliata e torno in s_0

DFA equivalente:

→ Stati NFA $Q = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$

STATO INIZIALE $S_0^{q_0}$:

→ 0 : $\delta(\{S_0\}, 0) = \{S_0, S_1\}^{q_1}$

→ 1 : $\delta(\{S_0\}, 1) = \{S_0\}_{q_0}$

STATO $S_0, S_1^{q_1}$:

→ 0 : $\delta(\{S_0, S_1\}, 0) = \{S_0, S_1, S_2\}^{q_2}$

→ 1 : $\delta(\{S_0, S_1\}, 1) = \{S_0, S_2\}_{q_3}$

STATO $S_0, S_1, S_2^{q_2}$:

→ 0 : $\delta(\{S_0, S_1, S_2\}, 0) = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}^{q_4}$

→ 1 : $\delta(\{S_0, S_1, S_2\}, 1) = \{S_0, S_2, S_3\}_{q_5}$

STATO $\{S_0, S_2\}^{q_3}$:

→ 0 : $\delta(\{S_0, S_2\}, 0) = \{S_0, S_1, S_3\}^{q_6}$

→ 1 : $\delta(\{S_0, S_2\}, 1) = \{S_0, S_3\}_{q_7}$

STATO $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}^{q_4}$:

→ 0 : $\delta(\{S_0, S_1, S_2, S_3\}, 0) = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}^{q_4}$

→ 1 : $\delta(\{S_0, S_1, S_2, S_3\}, 1) = \{S_0, S_2, S_3\}_{q_5}$

STATO $\{S_0, S_2, S_3\}^{q_5}$

→ 0 : $\delta(\{S_0, S_2, S_3\}, 0) = \{S_0, S_1, S_3\}^{q_6}$

→ 1 : $\delta(\{S_0, S_2, S_3\}, 1) = \{S_0, S_3\}_{q_7}$

STATO $\{S_0, S_1, S_3\}^{q_6}$

→ 0 : $\delta(\{S_0, S_1, S_3\}, 0) = \{S_0, S_1, S_2\}_{q_2}$

→ 1 : $\delta(\{S_0, S_1, S_3\}, 1) = \{S_0, S_2\}_{q_3}$

STATO $\{S_0, S_3\}^{q_7}$:

→ 0 : $\delta(\{S_0, S_3\}, 0) = \{S_0, S_1\}_{q_1}$

→ 1 : $\delta(\{S_0, S_3\}, 1) = \{S_0\}_{q_0}$

Insieme degli stati del DFA

$$Q = \{ q_0 \to \{s_0\},\ q_1 \to \{s_0, s_1\},\ q_2 \to \{s_0, s_1, s_2\},$$
$$q_3 \to \{s_0, s_2\},\ q_4 \to \{s_0, s_1, s_2, s_3\},$$
$$q_5 \to \{s_0, s_2, s_3\},\ q_6 \to \{s_0, s_1, s_3\},$$
$$q_7 \to \{s_0, s_3\} \}$$

	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_5
q_3	q_6	q_7
q_4	q_4	q_5
q_5	q_6	q_7
q_6	q_2	q_3
q_7	q_1	q_0