UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

GUSTAVO BENFICA, GUSTAVO BORIN, LUCAS GABRIEL, MARIA LUIZA ALVES, VINICIUS GOMES

PROVA DE NP-COMPLETUDE

Consistência do “Jogo Campo Minado”

ALFENAS - MG
2024

GUSTAVO BENFICA, GUSTAVO BORIN, LUCAS GABRIEL, MARIA LUIZA ALVES, VINICIUS GOMES

PROVA DE NP-COMPLETUDE
Consistência do “Jogo Campo Minado”

Trabalho apresentado na disciplina de Algoritmo e Estruturas de dados III(AEDs III), ministrada pelo professor Iago Augusto de Carvalho

ALFENAS - MG
2024

RESUMO

Este trabalho investiga a conjectura de que a consistência do jogo Campo Minado é um problema NP-completo. Ele começa definindo o problema da Satisfatibilidade do Circuito e a Consistência do Campo Minado. Em seguida, divide a prova em dois passos: primeiro, demonstra que o problema está em NP, mostrando que sua solução pode ser verificada em tempo polinomial. Segundo, reduz o problema da Satisfatibilidade do Circuito para a Consistência do Campo Minado, estabelecendo assim sua NP-completude. Conclui-se que o problema da Consistência do Campo Minado é tanto NP como NP-Difícil, indicando que é NP-completo.

Palavras-chave: Ciências da Computação, Complexidade computacional, Algoritmos, NP-Completo, Problema da Satisfatibilidade do Circuito, Campo Minado, Consistência, NP, Redução, NP-Difícil, Prova, NP-Completo.

SUMÁRIO

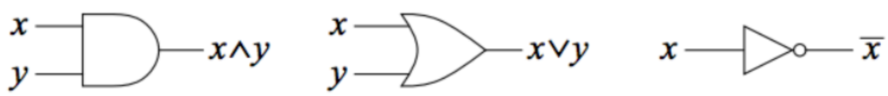
INTRODUÇÃO

O universo da Ciência da Computação abriga questões desafiadoras relacionadas à complexidade computacional e à eficiência dos algoritmos. No âmbito dessa discussão, destaca-se a classe de problemas NP-Completo, cuja resolução eficiente ainda representa um dos maiores enigmas da computação teórica. Este trabalho tem como foco a análise da consistência do jogo Campo Minado, explorando a conjectura de que sua complexidade é NP-Completa.

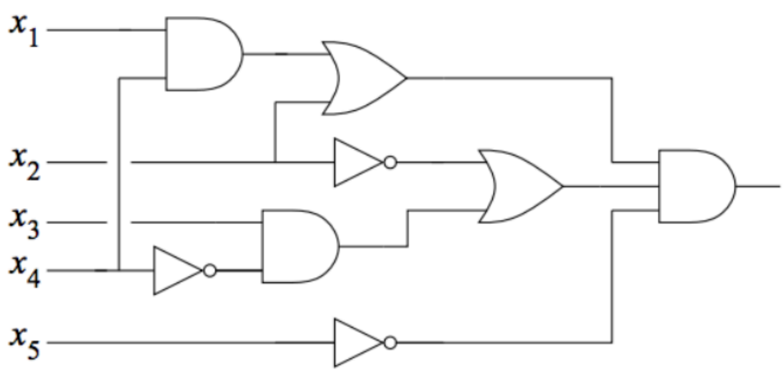
Problema da “Satisfatibilidade do Circuito” ou “Circuit-SAT”

Dado um circuito booleano, composto por portas lógicas (AND, OR e NOT), e uma saída desejada, o objetivo é determinar se existe uma atribuição de valores booleanos às variáveis de entrada do circuito de modo que a saída seja verdadeira (1 ou "true"). Em termos mais simples, o problema pergunta se é possível encontrar uma configuração de entradas que torne a saída do circuito verdadeira.

Circuito Booleano:



An AND gate, an OR gate, and a NOT gate.



A boolean circuit. Inputs enter from the left, and the output leaves to the right.

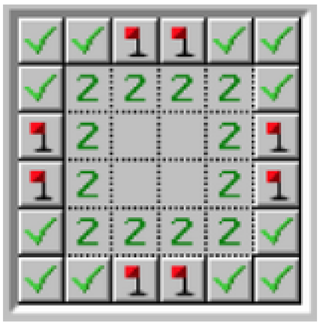
PROBLEMA DA “CONSISTÊNCIA DO CAMPO MINADO”

Campo minado é um jogo muito popular, cujo objetivo é descobrir todas as células vazias em um tabuleiro sem revelar as minas. Cada célula do tabuleiro pode conter uma mina ou estar vazia. As células vazias exibem o número de minas adjacentes. Os jogadores devem deduzir a localização das minas usando as informações disponíveis e marcar as células que contêm minas, acionar uma mina resultaria em uma derrota.

Existem diferentes versões e variações do jogo, mas consideramos o jogo onde cada movimento não é necessariamente forçado, ou seja, não existe apenas uma solução. Em outras palavras, pode haver algumas suposições envolvidas ou múltiplas opções para a localização das minas.

Para determinar se um tabuleiro de Campo minado é consistente nele deve haver pelo menos uma configuração possível de minas e quadrados seguros que não resultem em contradição. Portanto, sendo necessário verificar cada quadrado determinando se o tabuleiro ainda seria consistente se este quadrado fosse uma mina. Por esta razão, temos que desenvolver um algoritmo inteligente que determine a consistência de um tabuleiro em tempo polinomial, considerando que realmente existe uma.

Exemplo de tabuleiro Consistente:



Exemplo de tabuleiro Inconsistente:

PROVANDO QUE O PROBLEMA É NP-COMPLETO

Para provarmos que um problema é NP-completo precisamos de dois passos:

1- Demonstrar que o problema pertence à classe NP: Mostrar que uma solução proposta para o problema pode ser verificada em tempo polinomial.

2- Reduzir um problema NP-completo para o problema em questão; neste caso, reduzir o problema da “satisfatibilidade do circuito”, o qual já é sabido ser NP-completo, para o problema da “consistência do jogo Campo Minado”.

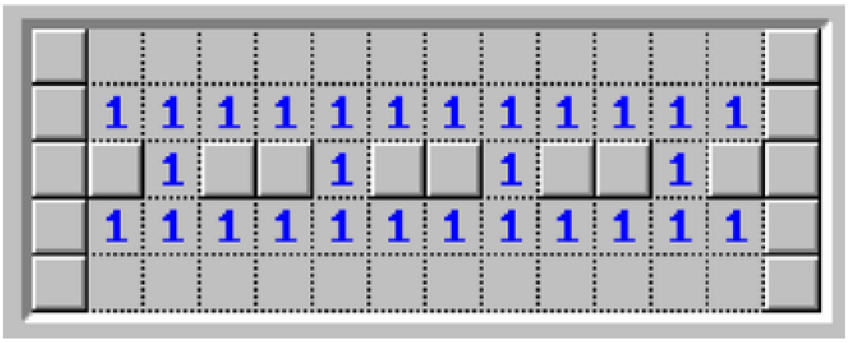
1. Demonstrando que a Consistência do Campo Minado está em NP

Supondo que seja fornecido um tabuleiro totalmente revelado, sem quadrados ocultos, um algoritmo computacional percorrerá o tabuleiro, verificando sequencialmente se cada número coincide exatamente com o valor indicado pelas minas vizinhas. Cada quadrado tem, no máximo, 8 quadrados adjacentes a serem examinados. Assim, para uma grade do Campo Minado com n quadrados, o tempo de execução será, no máximo, $8t \cdot n$, onde t é o tempo necessário para verificar um parceiro adjacente de um quadrado. Isso implica que o algoritmo opera em tempo polinomial, indicando que o problema está em NP. Podemos então avançar para o passo 2.

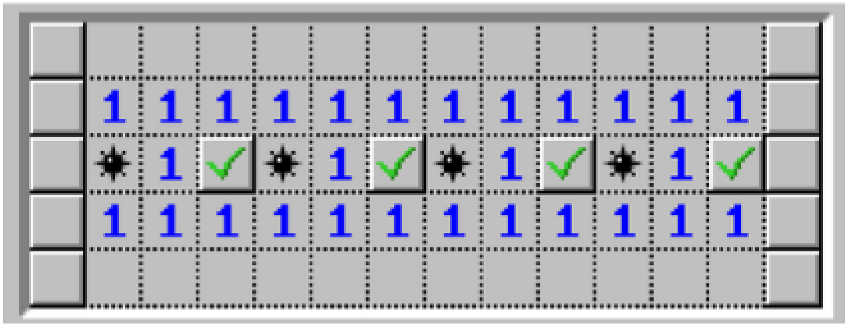
2. Reduzindo Circuit-SAT ao problema da Consistência do Campo Minado

Inicia-se estabelecendo uma conexão entre o Campo Minado e os circuitos. Aproveita-se o fato de que a disposição das minas e as informações em um lado do tabuleiro podem influenciar positivamente as informações do outro lado, uma vez que, em essência, isso se assemelha ao funcionamento dos circuitos.

Funcionamento de um Fio:

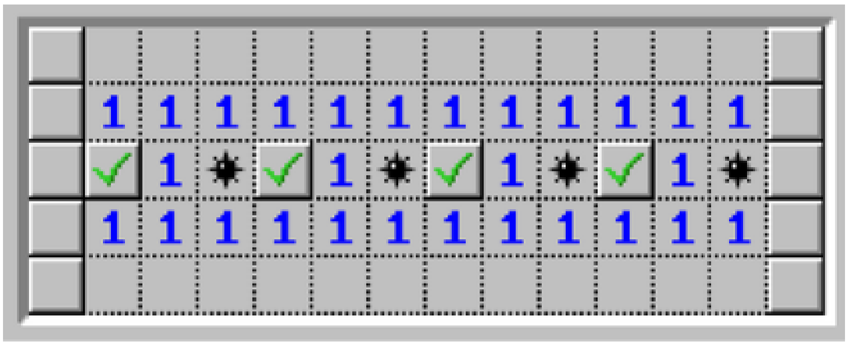


Fios transmitem o mesmo valor de um local a outro. A configuração do tabuleiro de Campo Minado acima pode ser usada para transmitir o valor "verdadeiro" da mina ou da ausência de mina ao longo do fio.



Neste caso, no quadrado (3,2) **havia uma mina**, o que permitiu carregar **uma certa** informação ao longo do "Fio".

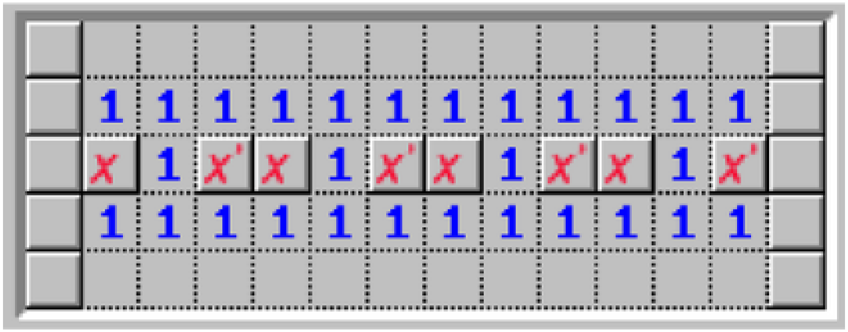
OU



Neste caso é o **contrário**, o quadrado (3,2) **estava livre**, o que permitiu carregar **outra** informação ao longo do "Fio".

Utilizando a variável **X** para denotar onde os valores são "Verdadeiros" e **X'** onde são "Falsos", sendo os valores verdadeiros (X) o quadrado onde há mina e os valores falsos (X') o quadrado onde não há.

Exemplo:



Esta seria a forma mais simples de transferência de informações em um campo minado. Todavia para provar que o problema é NP-completo faz-se necessário que o Campo Minado se comporte de formas muito mais versáteis do que simplesmente reter informações sobre o valor de verdade de um quadrado. Pois circuitos possuem uma série de portas lógicas (AND, OR, NOT, XOR, etc), cada uma recebendo duas entradas booleanas para gerar um valor booleano.

PROVANDO QUE O PROBLEMA PERTENCE À CLASSE NP-DIFÍCIL

1. Circuito Booleano e Satisfatibilidade

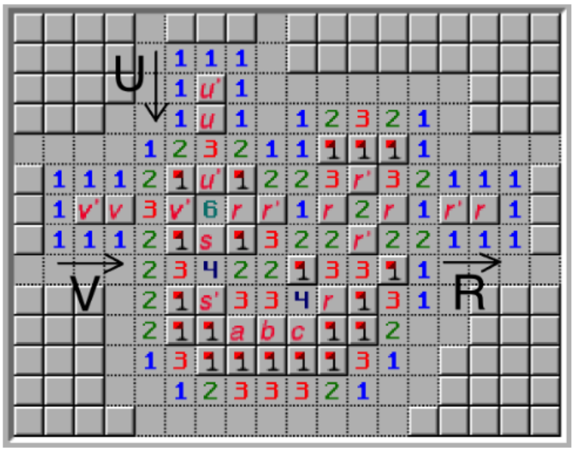
- Supondo que há um circuito booleano arbitrário com variáveis (x1, x2, . . . , xn) e o resultado (y).

- Esse circuito utiliza operadores lógicos AND, OR e NOT para atribuir verdadeiro ou falso a (y) com base nas variáveis iniciais.

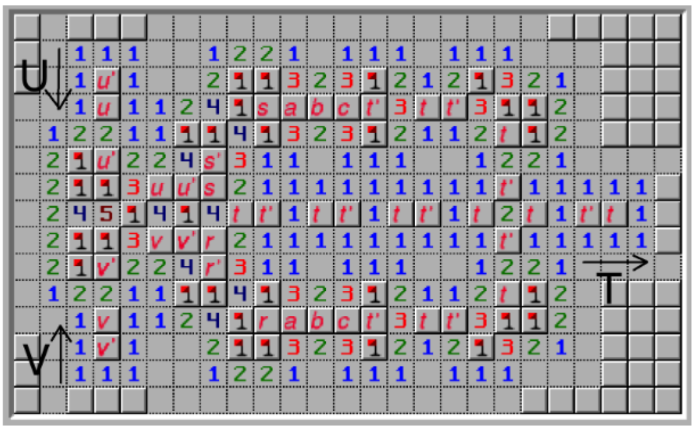
- Nosso objetivo é encontrar uma configuração inicial dessas variáveis que torne (y) verdadeiro, conhecido como o problema de "satisfatibilidade do circuito".

2. Tradução para Campo Minado

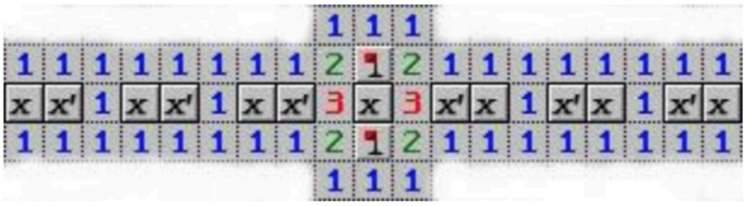
OR Gate



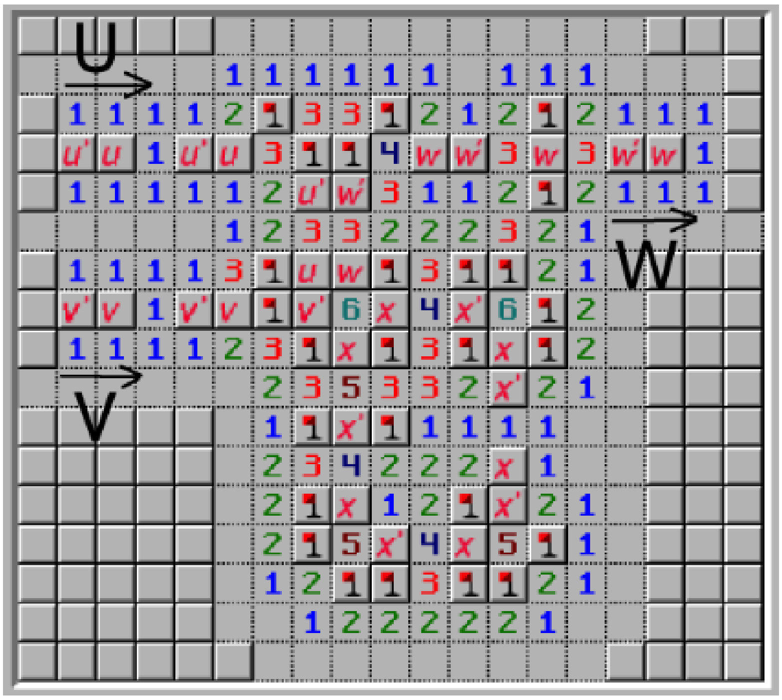
AND Gate



NOT Gate



XOR Gate



- Podemos construir funções lógicas, como ANDs, ORs e NOTs, no contexto do Campo Minado.

- Assim, criamos uma grade de Campo Minado correspondente ao circuito booleano.

- No final dessa grade, associamos uma mina ao valor de (y), efetivamente forçando esse valor a ser verdadeiro.

3. Relação com a Consistência do Campo Minado

- Se tivermos um algoritmo que verifica a Consistência do Campo Minado em tempo polinomial, podemos usar isso para determinar uma configuração inicial para as variáveis que seja consistente com a atribuição de uma mina a (y).

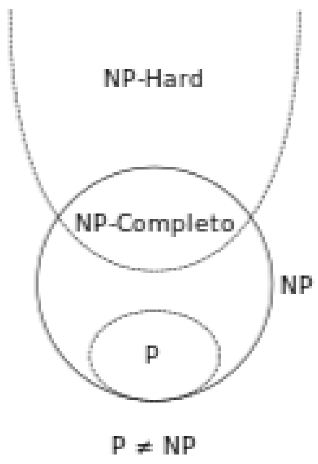
4. Conclusão sobre NP-Dificuldade

- Como sabemos que o problema de satisfatibilidade do circuito é NP-Difícil (pode ser usado para resolver qualquer problema em NP), concluímos que a Consistência do Campo Minado também é NP-Difícil quando abordada dessa maneira.

Essencialmente, a ideia é mostrar que resolver o problema da satisfatibilidade do circuito pode ser feito através da Consistência do Campo Minado, estabelecendo assim a NP-Dificuldade deste último.

CONCLUSÃO

Dessa forma, com a evidência de que o problema da Consistência do Campo Minado não apenas pertence à classe NP, mas também à classe NP-Difícil, conclui-se que o problema em questão apresenta uma complexidade que o coloca na classe NP-Completo.



REFERÊNCIAS

https://web-mat-bham-ac-uk.translate.goog/R.W.Kaye/minesw/ordmsw.htm?_x_tr_sl=auto&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR

https://web.math.ucsb.edu/~padraic/ucsb_2014_15/ccs_problem_solving_w2015/NP3.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=Ync_cf1BNi0

https://youtu.be/Ync_cf1BNi0?si=l1pgEKYDE474VzGQ