Convolución 2D de Gaussianas

Sea $N(x, \mu, \sigma)$ la función distribución normal con varianza σ^2 y promedio μ definida como sigue:

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

Tome las siguientes distribuciones normales bidimensionales:

$$f(x, y) = N(x, \mu_{x_1}, \sigma_{x_1}) N(y, \mu_{y_1}, \sigma_{y_1}) \tag{2}$$

$$g(x, y) = N(x, \mu_{x_2}, \sigma_{x_2}) N(y, \mu_{y_2}, \sigma_{y_2}) \tag{3}$$

El producto de convolución bidimensional se define como:

$$f * g(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dt d\tau \; f(x - t, y - \tau) g(t, \tau) \tag{4}$$

Como las funciones se pueden separar, se obtiene lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dt d\tau \; f(x - t, y - \tau) g(t, \tau) = \left(\int_{\mathbb{R}} dt \; N(x - t, \mu_{x_1}, \sigma_{x_1}) N(t, \mu_{x_2}, \sigma_{x_2}) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} dt \; N(y - t, \mu_{y_1}, \sigma_{y_1}) N(t, \mu_{y_2}, \sigma_{y_2}) \right) \tag{5}$$

Es decir, se obtiene la multiplicación de dos convoluciones en una dimensión. La convolución ordinaria de dos distribuciones normales es:

$$\int_{\mathbb{R}} dt \; N(x - t, \mu_{x_1}, \sigma_{x_1}) N(t, \mu_{x_2}, \sigma_{x_2}) = N\left(x, \mu_{x_1} + \mu_{x_2}, \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}\right) \tag{6}$$

Por lo que, se tiene que:

$$f * g(x, y) = N\left(x, \mu_{x_1} + \mu_{x_2}, \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}\right) N\left(x, \mu_{y_1} + \mu_{y_2}, \sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}\right) \tag{7}$$

Ahora con esto se resuelve el siguiente problema. Suponga tiene unas funciones g y f como se definieron anteriormente. Usted desea encontrar una función K tal que pase lo siguiente:

$$f * K(x, y) = g(x, y) \tag{8}$$

La función K es:

$$K(x, y) = N\left(x, \mu_{x_2} - \mu_{x_1}, \sqrt{\sigma_{x_2}^2 - \sigma_{x_1}^2}\right) N\left(x, \mu_{y_2} - \mu_{y_1}, \sqrt{\sigma_{y_2}^2 - \sigma_{y_1}^2}\right) \tag{9}$$