

Atividade: Álgebra de Boole

Em Matemática, chama-se **proposição** ao enunciado de uma verdade que se quer demonstrar, ou como usaremos: uma sentença que pode ser falsa (0), ou verdadeira (1), mas nunca ambos ao mesmo tempo.

A conjunção é uma relação entre sentenças que estabelece um resultado **verdadeiro** (1) quando associadas duas proposições (p e q), ambas **verdadeiras** (iguais a 1). Basta uma delas ser **falsa** (0), para que a conjunção (s) também seja **falsa** (0).

A porta **AND** ( E ) é um componente de circuito lógico que implementa essa relação; pode ter duas (p, q), ou mais entradas, e a saída (s) assumirá o valor 1 (**verdadeiro**) se, e somente se, todas as entradas forem iguais a 1 (**verdadeiras**); caso uma, ou mais entradas forem iguais a 0 (**falso**), a saída terá valor igual a 0 (**falso**).

A disjunção é uma relação entre sentenças que estabelece um resultado **falso** (0) quando duas proposições (p e q) forem **falsas** (0). Basta uma delas ser **verdadeira** (1), para que a disjunção também seja **verdadeira** (1).

A porta **OR** ( OU ) é um componente de circuito lógico que implementa essa relação; pode ter duas (p, q), ou mais entradas, e a saída (s) assumirá o valor 0 (**falso**) se, e somente se, todas as entradas forem iguais a 0 (**falso**); caso uma, ou mais entradas forem iguais a 1 (**verdadeiro**), a saída terá valor 1 (**verdadeiro**).

A negação determina que se uma proposição (p) for **falsa** (0), seu resultado será **verdadeiro** (1), ou vice-versa.

A porta **NOT** (NÃO) é um componente de circuito lógico que implementa essa relação, também chamada de **INVERTER** (INVERSOR), só possui uma entrada (p), e a saída assumirá o valor 1 (**verdadeiro**), se a entrada for igual a 0 (**falso**); senão, a saída terá valor 0 (**falso**), se a entrada for igual a 1 (**verdadeiro**).

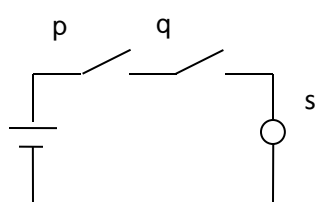
## - Analogias com circuitos elétricos

O primeiro circuito a seguir (conjunção) determina que se duas chaves (p e q) forem fechadas (1), o resultado (s) será o de um circuito fechado com uma lâmpada acesa (1), por exemplo; basta que uma delas seja aberta (0), para que o circuito se abra, e a lâmpada apague (0). O circuito poderá ter duas (p, q), ou mais chaves, em série que a saída (s) terá o mesmo resultado (1) se, e somente se, todas as chaves forem fechadas (1); caso uma, ou mais chaves forem abertas (0), o resultado será um circuito aberto com a lâmpada apagada (0).

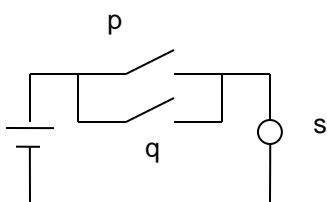
O segundo circuito a seguir (disjunção) determina que se duas chaves (p e q) forem abertas (0), o resultado (s) será o de um circuito aberto com uma lâmpada apagada (0), por exemplo; basta que uma delas seja fechada (1), para que o circuito se feche. O circuito poderá ter duas (p, q), ou mais chaves, em paralelo que a saída (s) terá o mesmo resultado (1) se, e somente se, todas as entradas forem abertas (0); caso uma, ou mais chaves forem fechadas (1), o resultado será um circuito fechado com a lâmpada acesa (1).

O terceiro circuito a seguir (negação) determina que se uma chave (p) for acionada (1), o resultado (s) será o de um circuito aberto com uma lâmpada apagada (0); caso contrário, o circuito permanecerá fechado, e a lâmpada se manterá acesa (1).

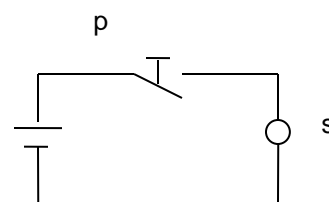
## - Representações por circuitos



Circuito série (AND)  
(Conjunção)



Circuito paralelo (OR)  
(Disjunção)



Curto-circuito (NOT)  
(Negação)

## - Representações de relações lógicas

### Notações

Conjunção ( E )  
(p e q)

$p \wedge q$   
 $p \cdot q = p q$   
 $p \& q$   
 $p \&\& q$

Disjunção (OU )  
(p ou q)

$p \vee q$   
 $p + q$   
 $p \mid q$   
 $p \parallel q$

Negação (NÃO )  
(não p)

$\neg p$   
 $/p = p' = \bar{p}$   
 $\sim p$   
 $! p$

### Tabela-verdade

Conjunção ( E )

$p \quad q \quad s$   
 $0 \cdot 0 = 0$   
 $0 \cdot 1 = 0$   
 $1 \cdot 0 = 0$   
 $1 \cdot 1 = 1$

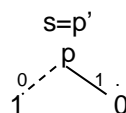
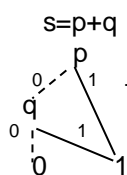
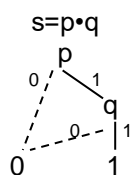
Disjunção (OU )

$p \quad q \quad s$   
 $0 + 0 = 0$   
 $0 + 1 = 1$   
 $1 + 0 = 1$   
 $1 + 1 = 1$

Negação (NÃO )

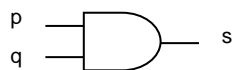
$p \quad s$   
 $0' = 1$   
 $1' = 0$

### Diagrama de Decisão Binária (BDD)



### Portas Lógicas

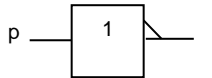
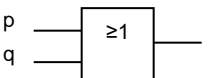
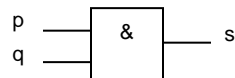
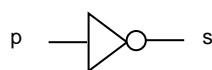
$s = \text{AND} (p, q)$



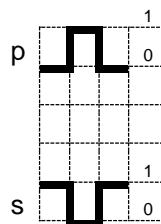
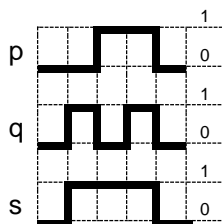
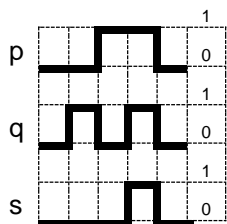
$s = \text{OR} (p, q)$



$s = \text{NOT} (p)$



### Diagramas de tempo para as portas lógicas



- Prioridade de conectivos

Estabelece-se que a ordem de avaliação de uma expressão, envolvendo conectivos lógicos, será da esquerda para a direita, respeitando-se as prioridades dos conectivos na ordem mostrada abaixo, sendo a primeira a mais alta quando aplicada imediatamente a um valor.

NÃO  
E  
OU

Pode-se mudar a ordem de avaliação por meio de parênteses.

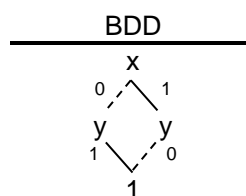
Exemplo:

Considere a expressão lógica:  $(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$   
de forma mais simples como  $(x' \cdot y) + (x \cdot y')$   
A sua avaliação será feita na seguinte ordem de prioridade:

- negação de (x) :  $x'$
- conjunção com (y) :  $x' \cdot y$
- negação de (y) :  $y'$
- conjunção com (x) :  $x \cdot y'$
- disjunção das conjunções :  $(x' \cdot y) + (x \cdot y')$

A expressão poderá ser representada nas formas tabular (**tabela-verdade**) ou por BDD (*Binary Decision Diagram*):

x y	$(x' \cdot y)$	$(x \cdot y')$	$(x' \cdot y) + (x \cdot y')$
0 0	0	0	0
0 1	1	0	1
1 0	0	1	1
1 1	0	0	0



Resumidamente as relações em uma tabela também poderão ser indicadas

- pela disjunção ( + ) das conjunções iguais a 1 (ou mintermos)

x y	$(x' \cdot y)$	$(x \cdot y')$	$(x' \cdot y) + (x \cdot y')$
0 0	0	0	0
0 1	1	0	1
1 0	0	1	1
1 1	0	0	0

mintermos (=1)
$m0 = x' \cdot y' = 0$ .
$m1 = x' \cdot y = 1 \leftarrow$
$m2 = x \cdot y' = 1 \leftarrow$
$m3 = x \cdot y = 0$ .

$$f(x, y) = (x' \cdot y) + (x \cdot y') = m1 + m2 = \sum m(1, 2) = \text{SoP}(1, 2)$$






























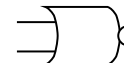

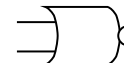

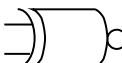

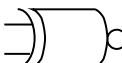







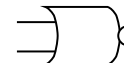

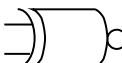


- pela conjunção ( • ) das disjunções iguais a 0 (ou MAXTERMOS).

X Y	$(X + Y')$	$(X' + Y)$	$(X + Y') \cdot (X' + Y)$
0 0	0	0	0
0 1	1	0	1
1 0	0	1	1
1 1	0	0	0

MAXTERMOS (=0)
$m0 = X + Y = 0 \leftarrow$
$m1 = X + Y' = 1$ .
$m2 = X' + Y = 1$ .
$m3 = X' + Y' = 0 \leftarrow$

$$F(X, Y) = (X + Y') \cdot (X' + Y) = M1 \cdot M2 = \prod M(0, 3) = \text{PoS}(0, 3)$$

## Principais relações da álgebra de Boole

<table><tr><td colspan="2">s=(p&amp;q)</td><td colspan="2">AND</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td rowspan="3">p/q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	s=(p&q)		AND		0	1	p/q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		<table><tr><td colspan="2">s=(p   q)</td><td colspan="2">OR</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td rowspan="3">p/q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	s=(p   q)		OR		0	1	p/q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1		<table><tr><td colspan="2">s=(p^q)</td><td colspan="2">XOR</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td rowspan="3">p/q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	s=(p^q)		XOR		0	1	p/q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0		<table><tr><td colspan="2">s = p</td><td colspan="2">BUFFER</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td rowspan="3">p/q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	s = p		BUFFER		0	1	p/q	<table><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	0	1	0	0	1	1																	
s=(p&q)		AND																																																																																									
0	1	p/q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0			0	0	1																																																																																
0	1																																																																																										
0	0																																																																																										
0	1																																																																																										
0	0																																																																																										
0	1																																																																																										
s=(p   q)		OR																																																																																									
0	1	p/q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0	1	1	1																																																																																		
0	1																																																																																										
0	1																																																																																										
1	1																																																																																										
0	0																																																																																										
1	1																																																																																										
s=(p^q)		XOR																																																																																									
0	1	p/q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	1	1	0																																																																																		
0	1																																																																																										
0	1																																																																																										
1	0																																																																																										
0	1																																																																																										
1	0																																																																																										
s = p		BUFFER																																																																																									
0	1	p/q	<table><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	0	1																																																																																						
0																																																																																											
1																																																																																											
0	0																																																																																										
1	1																																																																																										
<table><tr><td colspan="2">Conjunção</td></tr><tr><td>p q</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">AND</td></tr><tr><td colspan="3">s = p • q</td></tr><tr><td colspan="3"></td></tr></table>	Conjunção		p q		s	AND			s = p • q							<table><tr><td colspan="2">Disjunção</td></tr><tr><td>p q</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">OR</td></tr><tr><td colspan="3">s = p + q</td></tr><tr><td colspan="3"></td></tr></table>	Disjunção		p q		s	OR			s = p + q							<table><tr><td colspan="2">Disjunção Exclusiva</td></tr><tr><td>p q</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">XOR</td></tr><tr><td colspan="3">s = p ⊕ q</td></tr><tr><td colspan="3"></td></tr></table>	Disjunção Exclusiva		p q		s	XOR			s = p ⊕ q							<table><tr><td colspan="2">Cópia</td></tr><tr><td>p</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">BUFFER</td></tr><tr><td colspan="3">s = p</td></tr><tr><td colspan="3"></td></tr></table>	Cópia		p		s	BUFFER			s = p																																		
Conjunção																																																																																											
p q		s																																																																																									
AND																																																																																											
s = p • q																																																																																											
																																																																																											
Disjunção																																																																																											
p q		s																																																																																									
OR																																																																																											
s = p + q																																																																																											
																																																																																											
Disjunção Exclusiva																																																																																											
p q		s																																																																																									
XOR																																																																																											
s = p ⊕ q																																																																																											
																																																																																											
Cópia																																																																																											
p		s																																																																																									
BUFFER																																																																																											
s = p																																																																																											
																																																																																											
<table><tr><td colspan="2"></td></tr><tr><td colspan="2">s = (p • q)'</td></tr><tr><td colspan="2">NAND</td></tr><tr><td>p q</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">Alternative Denial</td></tr></table>			s = (p • q)'		NAND		p q		s	Alternative Denial				<table><tr><td colspan="2"></td></tr><tr><td colspan="2">s = (p + q)'</td></tr><tr><td colspan="2">NOR</td></tr><tr><td>p q</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">Joint Denial</td></tr></table>			s = (p + q)'		NOR		p q		s	Joint Denial				<table><tr><td colspan="2"></td></tr><tr><td colspan="2">s = (p + q)'</td></tr><tr><td colspan="2">XNOR</td></tr><tr><td>p q</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">Equivalência</td></tr></table>			s = (p + q)'		XNOR		p q		s	Equivalência				<table><tr><td colspan="2"></td></tr><tr><td colspan="2">s = p' = P̄</td></tr><tr><td colspan="2">NOT</td></tr><tr><td>p</td><td></td><td>s</td></tr><tr><td colspan="3">Negação</td></tr></table>			s = p' = P̄		NOT		p		s	Negação																																							
																																																																																											
s = (p • q)'																																																																																											
NAND																																																																																											
p q		s																																																																																									
Alternative Denial																																																																																											
																																																																																											
s = (p + q)'																																																																																											
NOR																																																																																											
p q		s																																																																																									
Joint Denial																																																																																											
																																																																																											
s = (p + q)'																																																																																											
XNOR																																																																																											
p q		s																																																																																									
Equivalência																																																																																											
																																																																																											
s = p' = P̄																																																																																											
NOT																																																																																											
p		s																																																																																									
Negação																																																																																											
<table><tr><td>1</td><td>1</td><td rowspan="3">p\q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	1	p\q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1		<table><tr><td colspan="2">s= ~(p&amp;q)</td><td colspan="2">NAND</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td rowspan="3">p\q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	s= ~(p&q)		NAND		1	0	p\q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1		<table><tr><td colspan="2">s= ~(p q)</td><td colspan="2">NOR</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td rowspan="3">p\q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	s= ~(p q)		NOR		1	0	p\q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1		<table><tr><td colspan="2">s= ~(p^q)</td><td colspan="2">XNOR</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td rowspan="3">p\q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	s= ~(p^q)		XNOR		1	0	p\q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1		<table><tr><td colspan="2">s= ~p</td><td colspan="2">NOT</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td rowspan="3">p\q</td><td rowspan="3"><table><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr></table></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	s= ~p		NOT		1	0	p\q	<table><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	0	1	0	0	0	1	
1	1	p\q			<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1																																																																																
0	1																																																																																										
1	0																																																																																										
0	1																																																																																										
1	0																																																																																										
0	1																																																																																										
s= ~(p&q)		NAND																																																																																									
1	0	p\q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1																																																																																		
0	1																																																																																										
1	0																																																																																										
0	1																																																																																										
0	0																																																																																										
0	1																																																																																										
s= ~(p q)		NOR																																																																																									
1	0	p\q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1																																																																																		
0	1																																																																																										
1	0																																																																																										
0	1																																																																																										
0	0																																																																																										
0	1																																																																																										
s= ~(p^q)		XNOR																																																																																									
1	0	p\q	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	1	0	0	1																																																																																		
0	1																																																																																										
1	0																																																																																										
0	1																																																																																										
0	1																																																																																										
0	1																																																																																										
s= ~p		NOT																																																																																									
1	0	p\q	<table><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	0	1																																																																																						
0																																																																																											
1																																																																																											
0	0																																																																																										
0	1																																																																																										

## Resumo

					<b>AND</b>	<b>OR</b>	<b>XOR</b>	<b>XNOR</b>	<b>NOR</b>	<b>NAND</b>
	m	M	p	q	$p \& q$	$p \mid q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (p \mid q)$	$\sim (p \& q)$
0	$p' \cdot q'$	$P+Q$	0	0	0	0	0	1	1	1
1	$p' \cdot q$	$P+Q'$	0	1	0	1	1	0	0	1
2	$p \cdot q'$	$P'+Q$	1	0	0	1	1	0	0	1
3	$p \cdot q$	$P'+Q'$	1	1	1	1	0	1	0	0
					[1]	[7]	[6]	[9]	[8]	[14]
mintermos	SoP	(+)	[=1]		3	1,2,3	1,2	0,3	0	0,1,2
MAXTERMS	PoS	(•)	[=0]		0,1,2	0	0,3	1,2	1,2,3	3

### Principais propriedades da Álgebra de Boole

Idempotência	Comutativa	Associativa
$p + p = p$	$p + q = q + p$	$(p + q) + r = p + (q + r)$
$p \cdot p = p$	$p \cdot q = q \cdot p$	$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$
Identidade	De Morgan	Distributiva
$p + 0 = p$ $p \cdot 0 = 0$	$\overline{(p + q)} = \bar{p} \cdot \bar{q}$	$p + (q \cdot r) = (p + q) \cdot (p + r)$
$p + 1 = 1$ $p \cdot 1 = p$	$\overline{(p \cdot q)} = \bar{p} + \bar{q}$	$p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r)$
Complementar	Absorção	Consenso
$p + \bar{p} = 1$ (tautologia)	$p + (\bar{p} \cdot q) = (p + q)$	$(p \cdot q) + (\bar{p} \cdot r) + (q \cdot r)$ $= (p \cdot q) + (\bar{p} \cdot r)$
$p \cdot \bar{p} = 0$ (contradição)	$\bar{p} + (p \cdot q) = (\bar{p} + q)$	$(p + q) \cdot (\bar{p} + r) \cdot (q + r)$ $= (p + q) \cdot (\bar{p} + r)$
$\bar{\bar{p}} = p$ (dupla negação)	$p + (p \cdot q) = p$	

### Principais propriedades da álgebra com XOR.

Básicas	Identidade	Complementar
$p \oplus p = 0$	$p \oplus 0 = p$	$\bar{p} \oplus \bar{q} = p \oplus q$
$p \oplus \bar{p} = 1$	$p \oplus 1 = \bar{p}$	$\overline{(p \oplus q)} = \bar{p} \oplus q = p \oplus \bar{q}$
Associativa		Comutativa
$(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$		$p \oplus q = q \oplus p$
Disjunção	Distributiva	Transposição
se: $p = q \oplus r$ e $q \cdot r = 0$ então: $p = q + r$	$p \cdot (q \oplus r) = (p \cdot q) \oplus (p \cdot r)$	se: $p = q \oplus r$ então: $q = p \oplus r$ e $r = p \oplus q$

## Tabela-verdade

Expressões lógicas podem ser expressas na forma tabular (tabela-verdade):

Exemplo:

Avaliar a expressão:  $x' \cdot y + x \cdot y'$

considerando a ordem de prioridades entre negação, conjunção e disjunção.

$x \ y$	$x' \cdot y$	$x \cdot y'$	$x' \cdot y + x \cdot y'$
0 0	0	0	0
0 1	1	1	1
1 0	0	0	1
1 1	0	0	0

A descrição equivalente em Verilog será

```
// -----  
// TRUTH TABLE  
// Nome: xxx yyy zzz  
// Matricula: 999999  
// -----  
  
// -----  
// -- expression  
// -----  
  
module fxy (output s,  
            input x, y);  
    assign s = ~x & y | x & ~y;  
  
endmodule // fxy
```

Uma função lógica também pode ser descrita pela soma de produtos (mintermos) ou SoP (disjunção das conjunções dos termos na tabela onde a função for igual a 1).

#mintermo	mintermo	x y	f(x,y)	
0	$x' \cdot y'$	0 0	0	
1	$x' \cdot y$	0 1	1	←
2	$x \cdot y'$	1 0	1	←
3	$x \cdot y$	1 1	0	

$$f(x,y) = (x' \cdot y) + (x \cdot y') = \sum m(1, 2)$$

A descrição equivalente em Verilog será

```
// -----
// -- SoP
// -----

module SoP (output s,
            input x, y);
    // mintermos
    assign s = ~x & y // 1
           | x & ~y; // 2
endmodule // SoP
```

Uma função lógica pode ser descrita pelo produto de somas (MAXTERMOS) ou PoS, (conjunção das disjunções dos termos na tabela onde a função for igual a 0), cujo resultado é equivalente à soma de produtos complementar

#MAXTERMOS	MAXTERMOS	X Y	F(X,Y)	
0	$X + Y$	0 0	0	←
1	$X + Y'$	0 1	1	
2	$X' + Y$	1 0	1	
3	$X' + Y'$	1 1	0	←

$$F(X,Y) = (X + Y) \cdot (X' + Y') = \prod M(0, 3)$$

A descrição equivalente em Verilog será

```
// -----
// -- PoS
// -----

module PoS (output S,
            input X, Y);
    // MAXTERMOS
    assign S = ( X | Y ) // 0
           & ( X | ~Y ); // 3

endmodule // PoS
```



cujo módulo com os conjuntos de testes em Verilog poderá ser

```
// -----  
// -- test_module  
// -----  
  
module test_module;  
  reg  x, y;  
  wire s1, s2, s3;  
      // instancias  
  fxy FXY1 (s1, x, y);  
  SoP SOP1 (s2, x, y);  
  PoS POS1 (s3, x, y);  
  
      // valores iniciais  
  initial begin: start  
    x=1'bx; y=1'bx; // indefinidos  
  end  
      // parte principal  
  initial begin: main  
    // identificacao  
    $display("Exemplo- xxx yyy zzz - 999999");  
    $display("Test boolean expression");  
    $display("\nx'&y+x&y' = s\n");  
    // monitoramento  
    $display("x y = s1 s2 s3");  
    $monitor("%2b %2b = %2b %2b %2b", x, y, s1, s2, s3);  
    // sinalizacao  
    #1 x=0; y=0;  
    #1 x=0; y=1;  
    #1 x=1; y=0;  
    #1 x=1; y=1;  
  end  
  
endmodule // test_module
```

## Preparação

### Vídeos recomendados

Como preparação para o início das atividades,  
recomenda-se assistir os seguintes vídeos:

<http://www.youtube.com/watch?v=Tb1qLGR2hvU>  
<http://www.youtube.com/watch?v=UrA-miNZ6ag>  
<http://www.youtube.com/watch?v=wAqlu7M4xvA>

### Exercícios:

#### Orientação geral:

Apresentar uma forma de solução em formato texto (.txt).

Outras formas de solução serão avaliadas como atividades extras (.v, .c).

As funções poderão ser desenvolvidas em Verilog ou C,

e as execuções deverão apresentar as respostas e/ou gravá-las em arquivo texto.

Exemplos em Verilog serão fornecidos como ponto de partida.

- 01.) Construir a tabela-verdade para as proposições  
e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog:

Exemplo:

$$\bar{x} + (\bar{y} \cdot \bar{z})$$

#mintermos	mintermos	x y z	x'	y'	z'	y'•z'	x'+(y'•z')
0	x'•y'•z'	0 0 0	1	1	1	1	1
1	x'•y'•z	0 0 1	1	1	0	0	1
2	x'•y•z'	0 1 0	1	0	1	0	1
3	x'•y•z	0 1 1	1	0	0	0	1
4	x•y'•z'	1 0 0	0	1	1	1	1
5	x•y'•z	1 0 1	0	1	0	0	0
6	x•y•z'	1 1 0	0	0	1	0	0
7	x•y•z	1 1 1	0	0	0	0	0

SoP (0,1,2,3,4)

```
module fxyz (output s,  
             input x, y, z);  
    assign s = ~x | (~y & ~z);  
  
endmodule // fxyz
```

a.)  $x' \cdot (y' + z)'$

b.)  $(x' + y)' \cdot z$

c.)  $(x' + y')' \cdot z'$

d.)  $(x \cdot y)' + z'$

e.)  $(x' + y) \cdot (x + z')$

02.) Simplificar as expressões abaixo pelas propriedades da álgebra de Boole e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog:

Exemplo:

$$\overline{(x+y)} \cdot \overline{(x+z)} \\ = x' + (y' \cdot z') \quad (\text{propriedade distributiva})$$

```
module fxyz (output s1, output s2, input x, y, z);
  assign s1 = (~x | ~y) & (~x | ~z);
  assign s2 = ~x | (~y & ~z);
endmodule // fxyz
```

a.)  $x \cdot (x + y)'$

b.)  $(x + y') + (x \cdot y)$

c.)  $(x \cdot y)' \cdot (x' + y')$

d.)  $(x' \cdot y)' + (x + y)'$

e.)  $(y + x)' \cdot (y' + x')$

03.) Montar as tabelas-verdades expressas pelas somas de produtos abaixo e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog:

Exemplo:

$$f(x,y,z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4) = \text{SoP}(0,1,2,3,4) = 1$$

```
module SoP (output s, input x, y); // mintermos
  // m 0 1 2 3 4
  assign s = (~x&~y&~z) | (~x&~y&z) | (~x&y&~z) | (~x&y&z) | (x&~y&~z);
endmodule // SoP
```

x y z	mintermos	SoP (0,1,2,3,4)
0 0 0	$x' \cdot y' \cdot z' = m0$	1
0 0 1	$x' \cdot y' \cdot z = m1$	1
0 1 0	$x' \cdot y \cdot z' = m2$	1
0 1 1	$x' \cdot y \cdot z = m3$	1
1 0 0	$x \cdot y' \cdot z' = m4$	1
1 0 1	$x \cdot y' \cdot z$	0
1 1 0	$x \cdot y \cdot z'$	0
1 1 1	$x \cdot y \cdot z$	0

a)  $f(x,y,z) = \sum m(1, 2, 3, 6)$

b)  $f(x,y,z) = \sum m(1, 2, 3, 5)$

c)  $f(x,y,w,z) = \sum m(1, 3, 6, 7, 9, 10, 11)$

d)  $f(x,y,w,z) = \sum m(0, 2, 5, 6, 8, 10, 13)$

e)  $f(x,y,w,z) = \sum m(1, 2, 3, 5, 8, 11)$

- 04.) Montar as expressões PoS equivalentes aos produtos das somas abaixo e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog:  
Exemplo:

$$F(X,Y,Z) = \prod M(5, 6, 7) = \text{PoS}(5,6,7) = 0$$

```
module PoS (output S, input X, Y);    // MAXTERMOS
//      M  5          6          7
    assign S = (~X|Y|~Z) & (~X|~Y|Z) & (~X|~Y|~Z);

endmodule // PoS
```

x y z	MAXTERMOS	PoS (5,6,7)
0 0 0	X+Y+Z	1
0 0 1	X+Y+Z'	1
0 1 0	X+Y'+Z	1
0 1 1	X+Y'+Z'	1
1 0 0	X'+Y+Z	1
1 0 1	X'+Y+Z' = M5	0
1 1 0	X'+Y'+Z = M6	0
1 1 1	X'+Y'+Z' = M7	0

- a)  $F(X,Y,Z) = \prod M(1, 3, 5, 6)$   
b)  $F(X,Y,Z) = \prod M(0, 1, 2, 3, 7)$   
c)  $F(X,Y,W,Z) = \prod M(0, 1, 2, 3, 7, 8, 11, 12)$   
d)  $F(X,Y,W,Z) = \prod M(0, 2, 4, 6, 7, 9, 13)$   
e)  $F(X,Y,W,Z) = \prod M(0, 1, 2, 4, 7, 14, 15)$

05.) Identificar as expressões SoP e PoS equivalentes às tabelas abaixo e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog:

a.)

n	x y	f(x,y)	
0	0 0	1	SoP( ) = _____
1	0 1	1	
2	1 0	0	PoS( ) = _____
3	1 1	1	

b.)

n	x y	f(x,y)	
0	0 0	1	SoP( ) = _____
1	0 1	0	
2	1 0	1	PoS( ) = _____
3	1 1	0	

c.)

n	x y z	f(x,y,z)	
0	0 0 0	1	SoP( ) = _____
1	0 0 1	1	
2	0 1 0	0	
3	0 1 1	1	
4	1 0 0	0	PoS( ) = _____
5	1 0 1	1	
6	1 1 0	1	
7	1 1 1	1	

d.)

n	x y z	f(x,y,z)	
0	0 0 0	1	SoP( ) = _____
1	0 0 1	0	
2	0 1 0	1	
3	0 1 1	1	
4	1 0 0	1	PoS( ) = _____
5	1 0 1	1	
6	1 1 0	0	
7	1 1 1	0	

e.)

n	x y w z	f(x,y,w,z)	
0	0 0 0 0	1	SoP( ) = _____
1	0 0 0 1	1	
2	0 0 1 0	1	
3	0 0 1 1	0	
4	0 1 0 0	1	
5	0 1 0 1	0	
6	0 1 1 0	1	
7	0 1 1 1	0	
8	1 0 0 0	1	PoS( ) = _____
9	1 0 0 1	0	
10	1 0 1 0	1	
11	1 0 1 1	1	
12	1 1 0 0	0	
13	1 1 0 1	1	
14	1 1 1 0	1	
15	1 1 1 1	1	