

Metodi analitici per le equazioni alle derivate parziali*

Questi appunti sono stati presi durante le lezioni dell'insegnamento "Metodi analitici per le E. D. P." tenuto dal prof. Bramanti durante l'A. A. 2023/24. Non sono stati revisionati da alcun docente (potrebbero contenere errori, in forma e in sostanza, di qualsiasi tipo) e non sono in alcun modo sostitutivi della frequentazione delle lezioni (in particolare non ho riportato nessuno dei grafici e immagini che sono stati mostrati a lezione).

*mariachiara.menicucci@mail.polimi.it per segnalare errori, richiedere il codice LaTeX ecc.

Indice

1	Introduzione	4
2	Domini	6
3	Equazione di Laplace e di Poisson	7
3.1	Problemi al contorno per l'equazione di Poisson	9
3.2	Problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio	11
3.3	Problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio	15
3.4	Rappresentazione integrale della soluzione del problema di Dirichlet sul cerchio	16
3.5	Problema di Dirichlet per il laplaciano sul semipiano	19
3.5.1	Nuclei regolarizzanti	21
3.6	Equazione di Poisson in \mathbb{R}^n	22
3.7	Equazione di Poisson in un dominio Ω	26
3.8	Proprietà generali delle funzioni armoniche	31
4	Equazione di diffusione del calore	34
4.1	Problemi al contorno e ai valori iniziali per l'equazione del calore	35
4.2	Proprietà generali dell'equazione del calore	36
4.3	Problema di Cauchy-Dirichlet sul segmento	39
4.4	Problema di Cauchy-Neumann sul segmento	43
4.5	Problema di Cauchy globale per l'equazione del calore in \mathbb{R}^n	46
4.5.1	Equazione omogenea	46
4.5.2	Equazione del calore non omogenea in \mathbb{R}^n	49
5	Equazione del trasporto lineare in una dimensione	53
5.1	Equazione del trasporto omogenea	53
5.2	Equazione non omogenea	54
5.3	Equazione con termine di reazione	56
5.4	Soluzioni deboli	57
6	Equazione delle onde	59

6.1	Equazione della corda vibrante	59
6.1.1	Problemi al contorno e ai valori iniziali per l'equazione della corda vibrante	60
6.1.2	Corda vibrante fissata agli estremi	62
6.1.3	Corda vibrante illimitata	65
6.1.4	Soluzioni deboli	68
6.2	Equazione delle onde in un dominio qualsiasi	69
6.2.1	Problema di Cauchy-Dirichlet	71
6.3	Problema di Cauchy globale	75
7	Intermezzi	81
7.1	Significati probabilistici delle EDP	81
7.2	Classificazione delle EDP lineari del second'ordine	83
7.3	Concetti diversi di soluzione di un'equazione alle derivate parziali	89
8	Spazi di Sobolev (1935)	93
8.1	Spazi di Sobolev di funzioni nulle sul bordo del dominio	97
8.2	Duale di $H_0^1(\Omega)$	99
8.3	Spazi di Sobolev di funzioni derivabili m volte	101
8.4	Approssimazione di funzioni $H^1(\Omega)$	101
8.5	Traccia di una funzione $H^1(\Omega)$	102
9	Formulazione debole¹	104
9.1	Complementi su spazi di Hilbert, problemi variazionali astratti, minimi di funzionali	104
9.2	Formulazione debole di problemi ai limiti per equazioni uniformemente ellittiche in forma di divergenza	108
9.2.1	Problema di Dirichlet	108
9.2.2	Problema di Neumann	110
9.2.3	Equazione ellittica più generale	113

¹*l'ultimo miglio, per così dire*

1 Introduzione

Nelle equazioni differenziali ordinarie l'incognita è una funzione di una variabile; questo tipo di equazioni (anche quando si considerano più equazioni, cioè sistemi differenziali, e aumenta dunque il numero di gradi di libertà) sono intrinsecamente inadatte a gestire la fisica del continuo, per le quali sono molto più adeguate le equazioni alle derivate parziali, dove l'incognita è una funzione di più variabili. Esse hanno solitamente la forma $F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$, dove u è la funzione incognita, Du è il gradiente di u , $D^2 u$ è la matrice hessiana, ecc.

Si fanno alcuni esempi di famose equazioni alle derivate parziali.

- i Equazione della corda vibrante (D'Alembert, 1752): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dove $z = u(x, t)$ è il grafico della corda vibrante al tempo t . L'equazione generalizzata al caso n -dimensionale (detta equazione della membrana vibrante) è $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$, dove $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
- ii Equazione di Laplace: $\Delta u = 0$. Spesso u ha il significato fisico di potenziale (gravitazionale o elettrostatico).
- iii Equazione del calore (Fourier): $\frac{\partial u}{\partial t} - c \Delta u = f$. u ha il significato fisico di temperatura in un mezzo continuo, f di sorgente o pozzo di calore.
- iv Equazione del trasporto: $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.
- v Equazione della piastra vibrante: $u_{tt} - \Delta^2 u = 0$.

Ci sono poi le equazioni di Navier-Stokes (in fluidodinamica), di Maxwell (in elettromagnetismo), di Schroedinger (in fisica quantistica).

I modelli fisici non sono l'unico motivo di studio delle EDP: esse appaiono anche in altre aree della matematica, ad esempio l'analisi complessa (le condizioni di Cauchy-Riemann sono un sistema di EDP), la geometria differenziale (una nota equazione è quella delle superfici minime, $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+||\nabla u||^2}} \right) = 0$), la probabilità e i processi stocastici.

Le EDP possono essere classificate da vari punti di vista, elencati di seguito.

- i ordine: il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione. Le EDP che studieremo saranno perlopiù del primo o del second'ordine. Le equazioni di Cauchy-Riemann e del trasporto sono del prim'ordine; quelle di Laplace, del calore, delle onde, di Schroedinger sono del secondo. L'equazione della piastra vibrante e [?] sono di ordine superiore al secondo.
- ii l'essere equazioni scalari oppure sistemi di equazioni.

- iii linearità: se esiste un operatore lineare L tale che l'equazione può essere scritta nella forma $Lu = f$, allora l'equazione si dice lineare. Le equazioni di Laplace, delle onde, del calore, di Schroedinger, del trasporto, di Cauchy-Riemann sono lineari; quella delle superfici minime non lo è. Ovviamente, quanto più si fanno ipotesi semplificative nella scrittura del modello fisico, tanto più sono gestibili le equazioni che ne risultano, e quindi spesso lineari: il realismo fisico e la trattabilità analitica sono obiettivi antagonisti.
- iv l'essere stazionarie oppure evolutive: si dicono evolutive quando una delle variabili è il tempo. Queste si dividono a loro volta in equazioni di diffusione e ondulatorie.

Si vedrà poi una classificazione in equazioni ellittiche (che sono stazionarie e generalizzano l'equazione di Laplace), paraboliche (che sono evolutive e generalizzano l'equazione del calore), iperboliche (che sono evolutive e generalizzano l'equazione delle onde).

Una grande differenza tra le EDO e le EDP è che, mentre le prime vengono studiate su intervalli di \mathbb{R} , nel secondo caso le possibili scelte del dominio di studio sono molto più varie, per cui la geometria del dominio contribuisce in modo significativo alla complessità del problema.

Nel corso della storia ci sono stati tre approcci allo studio delle EDP: il Settecento e l'Ottocento sono stati l'epoca del virtuosismo analitico, con cui si sono cercate soluzioni esplicite per equazioni semplici in domini semplici; alla fine dell'Ottocento ha iniziato a essere sviluppata una teoria più generale sulle EDP e sulle proprietà di esistenza, unicità e stabilità delle soluzioni², cioè il punto di vista dell'analisi funzionale (che ha portato alla nascita dell'integrale di Lebesgue, del concetto di soluzione debole, distribuzione e spazio di Sobolev); oggi esiste anche il punto di vista dell'analisi numerica, che si basa in modo essenziale sul metodo degli elementi finiti.

Per le EDO la sola equazione spesso individua infinite soluzioni, e - sotto opportune ipotesi - aggiungendo una condizione iniziale si ottiene un problema di Cauchy per cui vale esistenza e unicità della soluzione. E' facile vedere che per le EDP la questione è più complicata: la semplicissima equazione $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$ ha le infinite soluzioni $u(x, y) = f(y)$ con f qualsiasi, quindi per avere un'unica soluzione occorre assegnare condizioni più complesse di un unico valore iniziale. Tipicamente si aggiungono condizioni di u o di qualche sua derivata lungo una curva o una superficie: si assegnano funzioni come condizioni iniziali, qualora ci sia anche il tempo come variabile (nel qual caso il problema si dice *ai valori iniziali*), o condizioni al bordo (il problema si dice *al contorno*).

²se tutte e tre queste condizioni sono verificate il problema si dice ben posto

2 Domini

Si dovranno fare delle scelte sugli insiemi da considerare come domini delle funzioni incognite di EDP, così che sia possibile applicare teoremi di varia natura che permettono di trattare le EDP.

Considerando $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione incognita, in primo luogo si dovrà avere Ω aperto, altrimenti non sono neanche ben definite le derivate parziali. In tal caso, spesso si richiederà $u \in C^1(\bar{\Omega})$, il che significa³ che $u \in C^1(\Omega)$ e che le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ possono essere prolungate per continuità su tutto $\bar{\Omega}$.

Si dice dominio un insieme Ω aperto e connesso.

1. Uno dei motivi per cui si richiede la connessione è che se Ω è un dominio, $u \in C^1(\Omega)$ e $\nabla u = 0$ in Ω , allora u è costante in Ω . Questo in generale non è vero se Ω non è connesso (si pensi a una funzione costante a tratti).

Spesso si fa inoltre una richiesta di regolarità.

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, Ω si dice dominio di classe C^1 se (i) $\forall p_0 \in \partial\Omega \exists B_r(p_0)$, esiste un sistema di riferimento centrato in p_0 - le coordinate rispetto al quale si scrivono come $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_n)$ - ed esiste $\phi : \Delta_r(p_0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\Delta_r(p_0))$ con $\phi(\mathbf{y}') = y_n$, tale che $\partial\Omega \cap B_r(p_0) = \{(\mathbf{y}', y_n) : y' \in \Delta_r(p_0), y_n = \phi(\mathbf{y}')\} = G_\phi$; (ii) $\Omega \cap B_r(p_0) \subseteq \{(\mathbf{y}', y_n) : \phi(\mathbf{y}') < y_n\}$.

Δ_r è la proiezione di $B_r(p_0)$ su \mathbb{R}^{n-1} . (i) significa che la frontiera di Ω può essere localmente rappresentata come grafico di una funzione C^1 ; (iii) significa che, fissato p_0 e ϕ che rappresenta localmente $\partial\Omega$, il dominio Ω ϕ sta "tutto dalla stessa parte" rispetto al grafico di ϕ .

1. Un cerchio in \mathbb{R}^2 privato di un segmento non è un dominio C^1 : non è soddisfatta (ii).

Se nella definizione sopra si sostituisce la richiesta di $\phi \in C^1(\Delta_r(p_0))$ con ϕ lipschitziana in $\Delta_r(p_0)$ si ottiene la definizione di dominio lipschitziano. Un dominio lipschitziano è meno regolare di un dominio C^1 , perché il grafico di ϕ può avere anche punti angolosi.

Se Ω è un dominio C^1 o lipschitziano, si può definire localmente la sua misura di superficie $d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla\phi(\mathbf{y}')\|^2} d\mathbf{y}'$.

Questo permette di calcolare integrali di superficie su Ω .

Teorema della divergenza

Hp : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e lipschitziano, $\mathbf{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\text{Ts} : \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_e \rangle d\sigma$$

³in generale derivabilità e derivate sono definite per funzioni aventi come dominio un insieme aperto!

\mathbf{n}_e indica la normale esterna.

Da questo teorema e dalla seguente identità tra operatori seguono vari risultati utili.

Prop

$$\text{Hp} : \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato e lipschitziano, } f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{G} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n, f, \mathbf{G} \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$\text{Ts} : \quad \text{div}(f\mathbf{G}) = f\text{div}\mathbf{G} + \langle \nabla f, \mathbf{G} \rangle$$

Identità di Green

$$(1) \text{ Hp:} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato e lipschitziano, } u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, u \in C^2(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$\text{Ts:} \quad \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

$$(2) \text{ Hp} : \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato e lipschitziano, } u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, u, v \in C^2(\bar{\Omega})$$

$$\text{Ts} : \quad \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

Nella tesi di (1) u e v hanno ruoli asimmetrici.

Dim (1) Si applica la proposizione con $f = v$, $\mathbf{G} = \nabla u$: si ha $\text{div}(v\nabla u) = v\text{div}\nabla u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle = v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle$.

Tutte le funzioni coinvolte sono continue fino al bordo e dunque integrabili su Ω : si ha quindi $\int_{\Omega} \text{div}(v\nabla u) = \int_{\Omega} (v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) d\mathbf{x}$, cioè, con il teorema della divergenza (che si può applicare perché $\nabla u \in C^1$), $\int_{\Omega} \langle v\nabla u, \mathbf{n}_e \rangle d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) d\mathbf{x}$. $\langle v\nabla u, \mathbf{n}_e \rangle = v \langle \nabla u, \mathbf{n}_e \rangle = v \frac{\partial u}{\partial n}$, per definizione di derivata direzionale, quindi si è ottenuta la tesi.

(2) Poiché u e v sono entrambe C^2 , vale (1) sia per (u, v) che per (v, u) , dunque si ha $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ e $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u \Delta v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$. Sottraendo membro a membro si ottiene la tesi. ■

3 Equazione di Laplace e di Poisson

Modelli fisici L'equazione di Poisson, o equazione del potenziale, è un'equazione fondamentale della fisica matematica, che nasce da un modello fisico di base dell'elettromagnetismo. E' noto infatti che, dato \mathbf{E} campo elettrostatico generato da una distribuzione di cariche, $\forall B_r(\mathbf{x}_0)$ vale $\int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \langle \mathbf{E}, \mathbf{n}_e \rangle d\sigma = 4k\pi q_{tot}(B_r(\mathbf{x}_0))$ (teorema di Gauss). Supponendo che la distribuzione di cariche sia volumetrica con densità $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty)$, il teorema di Gauss - usando anche il teorema della divergenza - diventa $\int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \text{div}\mathbf{E} d\mathbf{x} = 4k\pi \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Poiché l'uguaglianza vale $\forall B_r(\mathbf{x}_0)$, se le funzioni integrande sono continue si ha l'uguaglianza tra le integrande⁴ in tutto $B_r(\mathbf{x}_0)$. Aggiun-

⁴si dimostra, $\forall \mathbf{x}_0$, dividendo per $|B_r(\mathbf{x}_0)|$, usando il teorema della media e facendo tendere r a 0

gendo il fatto che \mathbf{E} è conservativo, cioè $\exists V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{E} = \nabla V$, si ottiene l'equazione $\Delta V = 4k\pi\rho$. Se si studia l'analogo modello per il campo gravitazionale si ottiene la stessa equazione, a meno di un segno, con il potenziale gravitazionale.

Dunque l'equazione che si studia, detta equazione di Poisson, è

$$\Delta u = f$$

che nel caso particolare di f nulla si dice equazione di Laplace. Le soluzioni dell'equazione di Laplace si dicono funzioni armoniche.

Un altro modello fisico che porta all'equazione di Poisson si ha in fluidodinamica. Se \mathbf{v} è il campo di velocità di un fluido incompressibile (quindi $\text{div} \mathbf{v} = 0$) con moto non vorticoso ($\text{rot} \mathbf{v} = 0$), almeno localmente esiste un potenziale di velocità, cioè $\psi : \mathbf{v} = \nabla \psi$. L'incompressibilità dà quindi $\Delta \psi = 0$: il potenziale di velocità del moto non vorticoso di un fluido incompressibile è una funzione armonica.

Inoltre l'equazione di Poisson può essere vista come equazione che si ottiene in stato stazionario da due equazioni evolutive.

a L'equazione del calore in stato stazionario (cioè quando è stato raggiunto l'equilibrio termico e la temperatura u non varia più) diventa - dato che $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ - $\Delta u = \frac{-f}{c}$. Nel caso di assenza di pozzi o sorgenti di calore, si ottiene l'equazione di Laplace: dunque ogni soluzione dell'equazione di Laplace ha anche il significato fisico di temperatura di un mezzo continuo all'equilibrio termico in assenza di sorgenti.

b L'equazione della membrana vibrante all'equilibrio, cioè quando la membrana ha smesso di vibrare, diventa - dato che $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ - $\Delta u = 0$. Peraltro immaginandosi fisicamente la membrana all'equilibrio si nota anche che il la funzione u , il cui grafico è la membrana, non può avere punti di estremo all'interno del dominio, ma solo punti di sella. In effetti in due dimensioni l'equazione è $u_{xx} + u_{yy} = 0$, quindi se u come funzione della sola x ha un punto di massimo \mathbf{x}^* e vale $u_{xx}(\mathbf{x}^*) > 0$, allora $u_{yy} < 0$, cioè u nella direzione y ha un punto di minimo: cioè il punto non è né di massimo né di minimo, ma di sella.

Un'altra motivazione per studiare l'equazione di Laplace è di tipo matematico. Infatti, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è olomorfa in \mathbb{C} , allora⁵ u e v sono C^2 e armoniche, cioè $\Delta u = \Delta v = 0$ in \mathbb{R}^2 . Viceversa, si può mostrare che per ogni funzione armonica u esiste un'altra funzione armonica v , detta armonica coniugata di u , tale che $u + iv$ è olomorfa.

⁵Questo deriva dalle condizioni di Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, e derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a y e sommando membro a membro si ottiene, per il teorema di Schwarz, $\Delta u = 0$. Analogamente si ricava $\Delta v = 0$.

In questo modo possiamo facilmente trovare delle funzioni armoniche.

1. e^z è una funzione olomorfa, quindi $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$ sono funzioni armoniche.
2. $f(z) = z^n$ è olomorfa, quindi $Re(x + iy)^n = Re \rho^n e^{in\theta} = \rho^n \cos n\theta =: u_n$ e $Im \rho^n e^{in\theta} = \rho^n \sin n\theta =: v_n$ sono armoniche e si dicono armoniche elementari del piano.

Se $n = 3$, $(x + iy)^3 = x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2$ ha $u_3(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v_3(x, y) = 3x^2y - y^3$. Valgono dunque le identità $x^3 - 3xy^2 = \rho^3 \cos 3\theta$ e $3x^2y - y^3 = \rho^3 \sin 3\theta$, che sarebbe molto laborioso verificare in altro modo.

3.1 Problemi al contorno per l'equazione di Poisson

L'equazione di Poisson è stazionaria, quindi non ha alcun senso porre condizioni iniziali: non esiste un istante iniziale. Si possono invece porre condizioni al contorno di diversi tipi, che danno origine ad altrettanti problemi differenziali.

1. **Condizione di Dirichlet** Si pone la condizione $u = g$ in $\partial\Omega$. Se si pensa alla membrana vibrante all'equilibrio, questo ha il significato fisico di "fissare" il perimetro della membrana.
2. **Condizione di Neumann** Si pone la condizione $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ in $\partial\Omega$ ($\frac{\partial u}{\partial n}$ è la derivata normale, ed è un'informazione indipendente dalla derivata tangenziale $\frac{\partial u}{\partial t}$ e da u). Dal punto di vista fisico, $\frac{\partial u}{\partial n}$ in $\partial\Omega$ ha il significato fisico di flusso di calore (che infatti dipende dalla variazione di calore tra le due zone) attraverso il bordo: se è nulla, non c'è flusso di calore, cioè il corpo è termicamente isolato.
3. **Problema misto** Si partiziona $\partial\Omega$ in Σ_1, Σ_2 e si pone la condizione di Dirichlet su Σ_1 e di Neumann su Σ_2 , cioè
$$\begin{cases} u = g_1 & \text{in } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 & \text{in } \Sigma_2 \end{cases}.$$
4. **Condizione di Robin** Si pone la condizione $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$ in $\partial\Omega$, con $\alpha > 0$. Questa ha origine dalla seguente situazione: se un corpo ha temperatura u e l'ambiente esterno ha temperatura u_0 , il flusso di calore al bordo del corpo è proporzionale al salto termico $u - u_0$, cioè $\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u_0 - u)$: se $u_0 > u$, il calore passa al corpo, quindi u cresce e dunque $\frac{\partial u}{\partial n}, \alpha > 0$. Nel caso $\alpha = 0$ si ritrova la condizione di Neumann.

Teo (unicità della soluzione)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano

Ts: nella classe di funzioni $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, la soluzione per il problema di Dirichlet, misto, di

Robin, è unica se esiste; per il problema di Neumann è unica a meno di una costante additiva

Il problema di Neumann è $\begin{cases} \Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases}$: u compare solo attraverso le sue derivate, quindi evidentemente se u è soluzione anche $u + c$ lo è.

Dim Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ due soluzioni dello stesso problema (di uno dei quattro tipi): si mostra che coincidono (per Neumann, si mostra che coincidono a meno di una costante). $u = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ e, per linearità del laplaciano, $\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0$; inoltre u al bordo soddisfa la stessa condizione di u_1 e u_2 ma con $g = 0$. Quindi u risolve il problema omogeneo.

Uso la prima identità di Green $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ con $u = v$, ma occorre $u \in C^2(\bar{\Omega})$, che è una richiesta più forte dell'ipotesi del teorema. Per ora supponiamo che $u \in C^2(\bar{\Omega})$, e poi vedremo che questa ipotesi può essere rilassata. Si ha quindi $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$, cioè $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ (cf. parti!)

Se il problema è di Dirichlet, $u = 0$ in $\partial\Omega$, quindi il lato destro è nullo e dunque anche il lato sinistro; lo stesso vale se il problema è di Neumann (perché $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$). Se il problema è misto, $\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\Sigma_1} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \int_{\Sigma_2} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$. Se invece il problema è di Robin, si ha $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0$ in $\partial\Omega$, quindi $\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} -\alpha u^2 d\sigma = -\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x}$, e poiché l'ultimo integrale è sicuramente nonnegativo ($\alpha > 0$) mentre il penultimo è sicuramente nonpositivo, l'unica possibilità è che sia nullo.

Dunque per tutti i problemi si ha $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = 0$. Ma poiché $u \in C^1(\bar{\Omega})$ e la norma è continua, $\|\nabla u\|^2$ è una funzione continua e nonnegativa e dunque $\|\nabla u\| = 0$ in Ω , per cui u è costante in Ω (essendo Ω connesso) e anche in $\bar{\Omega}$ per continuità. La tesi è dimostrata per il problema di Neumann. Se il problema è di Dirichlet, $u = 0$ in $\partial\Omega$, quindi la costante è 0, e si ha la tesi, e analogamente si conclude se il problema è misto; se il problema è di Robin, $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0$ in $\partial\Omega$, ma $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ perché u è costante, quindi $u = 0$ in $\partial\Omega$ e la costante è 0.

Ora occorre mostrare che l'ipotesi $u \in C^2(\bar{\Omega})$ in realtà non è necessaria. Suppongo solo che $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Considero $\Omega_k \subseteq \Omega$: in Ω_k u è C^2 fino al bordo. Allora prendo $\{\Omega_k\}_{k=1}^{+\infty}$ successione di domini tale che $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1} \forall k$ e $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \Omega_i = \Omega$, con $\bar{\Omega}_k \subseteq \Omega \forall k$: applicando la prima identità di Green a Ω_k si ottiene $\int_{\Omega_k} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_k} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$, che è un'uguaglianza tra integrali ben definiti anche se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Allora si può calcolare il limite per $k \rightarrow +\infty$ e si ottiene $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$, da cui segue la tesi per tutti i ragionamenti fatti sopra. ■

Prop (condizione di compatibilità per il problema di Neumann)

$$\text{Hp: } u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \text{ risolve il problema di Neumann } \begin{cases} \Delta u = f \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ in } \partial\Omega \end{cases}, f = 0$$

$$\text{Ts: } \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$$

Quindi, se u è una soluzione per il problema, deve valere necessariamente una condizione su g (detta condizione di compatibilità sul dato al bordo). Se g non la soddisfa, allora il problema non ha soluzione⁶.

Dim Poiché $\Delta u = 0$, $\int_{\Omega} \Delta u dx = 0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) dx$, cioè $\int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, n \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$ per il teorema della divergenza. ■

Il significato fisico della condizione su g si può capire con l'equazione del calore: ogni soluzione dell'equazione di Laplace ha anche il significato fisico di temperatura di un mezzo continuo all'equilibrio termico in assenza di sorgenti, mentre g è il flusso di calore attraverso il bordo e $\int_{\partial\Omega} g d\sigma$ è il calore attraverso il bordo. Questo non può che essere nullo, per un fatto di bilancio energetico: se ci fosse del calore entrante, o uscente, il mezzo non sarebbe all'equilibrio.

3.2 Problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio

Ora si sceglie Ω : si cerca di risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel caso particolare di Ω cerchio bidimensionale di raggio r . Il problema è

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{se } x^2 + y^2 < r^2 \\ u = g & \text{se } x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Essendo il dominio un cerchio, è naturale riformulare il problema in coordinate polari (ρ, θ) : usando la formula per il laplaciano in coordinate polari si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & \text{se } \rho < r, \theta \in [0, 2\pi) \\ u(r, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione uso la tecnica di separazione delle variabili: suppongo esistano R, Θ : $u(\rho, \theta) = R(\rho) \Theta(\theta)$ e cerco la soluzione. Se la trovo, non serve fare altro, dato che la soluzione è unica.

Allora, poiché $\frac{\partial u}{\partial \rho} = R' \Theta$ e $\frac{\partial u}{\partial \theta} = R \Theta'$, la prima equazione diventa $R'' \Theta + \frac{1}{\rho} R' \Theta + \frac{1}{\rho^2} R \Theta'' = 0$. Ora voglio separare le variabili: dividendo per $R \Theta$ si ottiene $\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$, e moltiplicando per ρ^2 si ha $\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}$. Si è scritto che una funzione della sola ρ è uguale a una funzione della sola θ : questo può essere vero $\forall \rho < r, \theta \in [0, 2\pi)$ se e solo se entrambe le funzioni sono costanti. Dunque l'equazione si può riscrivere con il sistema

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 & \text{se } \rho < r \\ \Theta'' + \lambda \Theta = 0 & \text{se } \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

⁶Questo ricorda ciò che accade per i sistemi lineari: se non è vero che $r(A|\mathbf{b}) = r(A)$ per A a scala (che è una condizione sui dati), allora il sistema non ha soluzione.

con λ costante da determinare. Parto dalla seconda: affinché u sia continua e derivabile Θ dev'essere 2π -periodica (e così anche la sua derivata prima e seconda, dovendo u essere $C^2(\Omega)$), per il significato geometrico delle coordinate polari: quindi l'unica soluzione accettabile⁷ è quella trigonometrica che si ottiene per $\lambda \geq 0$, con argomento delle funzioni trigonometriche pari a $\sqrt{\lambda}t$, il cui periodo è quindi $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Affinché esse siano effettivamente 2π -periodiche $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ dev'essere del tipo $\frac{2\pi}{n}$, da cui $\lambda = n^2$. Allora la soluzione è $\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$.

L'equazione in ρ è $\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0$, lineare omogenea del second'ordine a coefficienti non costanti, ed è un'equazione di Eulero⁸, per cui è noto che la soluzione è $R(\rho) = \rho^\alpha$ con α da determinare. $\rho^2 \alpha(\alpha - 1) \rho^{\alpha-2} + \rho \alpha \rho^{\alpha-1} - n^2 \rho^\alpha = 0 \iff \rho^\alpha (\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2) = 0$, da cui $\alpha^2 = n^2$, cioè $\alpha = \pm n$. Quindi l'integrale generale è $R(\rho) = c_1 \rho^n + c_2 \rho^{-n}$, con $n > 0$. Se invece $n = 0$ l'equazione è $\rho^2 R'' + \rho R' = 0$, cioè $\rho v' + v = 0$, da cui $v = c \frac{1}{\rho}$, cioè $R = c \log \rho$; allora $R(\rho) = c_1 \log \rho + c_2$.

Dunque si ha $u(\rho, \theta) = (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ per $n > 0$ e $u(\rho, \theta) = a_0(c_0 \log \rho + d_0)$ per $n = 0$. Si stanno cercando soluzioni ben definite nell'origine, per cui necessariamente $d_n = c_0 = 0$.

Allora si è determinata una successione di soluzioni a variabili separate:

$$\begin{aligned} u_n(\rho, \theta) &= (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \rho^n \\ u_0(\rho, \theta) &= a_0 \end{aligned}$$

Si noti che si sono ritrovate anche le soluzioni costanti.

1. Si può risolvere con la stessa tecnica il problema di Dirichlet sulla corona circolare.

Occorre ora imporre le condizioni al contorno. Noto che, essendo u_n soluzione $\forall n$, anche ogni somma finita delle u_n risolve l'equazione (perché è lineare). E' naturale spingersi fino alla serie delle u_n e provare a imporre su essa la condizione al contorno: non c'è speranza che questa sia soddisfatta se u è una somma finita delle u_n (a meno che f sia esattamente una combinazione lineare di seni e coseni). $u(\rho, \theta) := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$: voglio $u(r, \theta) = f(\theta)$, cioè $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta) \forall \theta \in [0, 2\pi)$. Sembra proprio la serie di Fourier di f . Supponendo che f si possa sviluppare in serie di Fourier, si ha dunque $f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$, con $\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$, $\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$. Si impone $a_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $a_n r^n = \alpha_n$, $b_n r^n = \beta_n$: si è quindi individuata la soluzione particolare, scegliendo a_n e b_n grazie al dato $f(\theta)$.

⁷per $\lambda < 0$ si ha $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\theta}$, che implica $c_1 = c_2 = 0$ per avere periodicità; per $\lambda = 0$ si ha $\Theta(\theta) = c_1 \theta + c_2$, che implica $c_1 = 0$ per avere periodicità. Tutte le soluzioni costanti si ritrovano comunque considerando solo la soluzione trigonometrica.

⁸Si chiama equazione di Eulero un'equazione del tipo $x^n u^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 x u' + a_0 u = g(x)$. Nel caso particolare di $g = 0$ si possono cercare due soluzioni del tipo $u(x) = x^\alpha$, con α da determinare.

La candidata soluzione è

$$u(\rho, \theta) := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

ricordando che α_n e β_n sono coefficienti di Fourier di f . Noto che gli addendi elementari sono proprio le armoniche elementari del piano.

Occorre in realtà fare un'analisi critica di questa candidata soluzione, visto che essa scaturisce da procedimenti non del tutto rigorosi fatti supponendo che ogni operazione fosse lecita. Ora si deve fare qualche ipotesi e mostrare rigorosamente che la candidata è effettivamente soluzione.

Analisi critica della buona posizione e della soddisfazione dell'equazione Il seguente teorema fornisce delle ipotesi sotto le quali la soluzione candidata è effettivamente una buona soluzione.

Teo (regolarità della soluzione)

$$\text{Hp: } f \in L^1([0, 2\pi])$$

Ts: (i) u è derivabile infinite volte termine a termine in ogni cerchio di raggio $\rho \leq \delta$ con $\delta < r$

$$(ii) \ u \in C^\infty(B_r(\mathbf{0}))$$

$$(iii) \ \Delta u = 0 \text{ se } \rho < r$$

Ovviamente si vuole che la serie che assegna u converga, così che u sia ben definita, che si possa derivare termine a termine⁹ due volte rispetto a θ e a ρ (i), e che risolva l'equazione (iii).

A priori sarebbe naturale chiedere u almeno C^2 , ma la solita ipotesi $f \in L^1$ produce una regolarità molto migliore: in questo senso l'equazione di Laplace è regolarizzante.

Dim (i) (ii) Se $f \in L^1([0, 2\pi])$, i coefficienti $\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$ e β_n sono ben definiti, dunque il termine generale della serie che definisce u è ben definito; vale $|\alpha_n|, |\beta_n| \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1([0, 2\pi])}$. Ora si mostra con la definizione che la serie converge totalmente: $\left| \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right| \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \|f\|_{L^1([0, 2\pi])}$: poiché $\rho \leq \delta$, si ottiene $\left| \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right| \leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta}{r}\right)^n \|f\|_{L^1([0, 2\pi])}$. Il lato destro è il termine generale di una serie geometrica, quindi convergente: allora la serie iniziale converge totalmente in ogni cerchio chiuso di raggio $\delta < r$ (questo non implica la convergenza totale nel cerchio aperto di raggio r !).

La serie delle derivate rispetto a ρ ha termine generale $n \frac{1}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$, per cui, come sopra, si ottiene la maggiorazione $\frac{2}{\pi r} n \left(\frac{\delta}{r}\right)^{n-1} \|f\|_{L^1([0, 2\pi])}$, che è il termine generale di una serie convergente: quindi la serie delle derivate converge totalmente in ogni cerchio chiuso, perciò esiste $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ ed è calcolabile derivando termine

⁹in questo modo è facilmente verificabile che $\Delta u = 0$, scambiando serie e derivata

a termine in ogni cerchio chiuso (si ha anche la convergenza puntuale della serie non derivata, dato che questa converge totalmente). Si capisce che il ragionamento si può iterare alla derivata di qualunque ordine rispetto a ρ , e lo stesso vale per le derivate rispetto a θ e le derivate miste. Se ne conclude che tutte le derivate sono somma di una serie di potenze che converge totalmente, perciò ogni derivata è calcolabile derivando termine a termine. Inoltre $u \in C^\infty(\bar{B}_\delta(\mathbf{0})) \forall \delta < r$: ma allora, $\forall (\rho, \theta) \in B_r(\mathbf{0}) \exists \delta : (\rho, \theta) \in \bar{B}_\delta(\mathbf{0})$, e dunque $u \in C^\infty(B_r(\mathbf{0}))$ ¹⁰.

(iii) Poiché la serie si può derivare termine a termine, $\Delta u = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\rho}{r} \right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r^n} (\alpha_n \Delta(\rho^n \cos n\theta) + \beta_n \Delta(\rho^n \sin n\theta)) = 0$ perché ogni addendo è nullo, dato che $\rho^n \cos n\theta$ e $\rho^n \sin n\theta$ sono armoniche. ■

Riassumendo, se $f \in L^1([0, 2\pi])$ la u sopra è ben definita, risolve l'equazione ed è $C^\infty(B_r(\mathbf{0}))$.

Analisi critica della soddisfazione della condizione al bordo Si deve poi valutare se u soddisfa la condizione al bordo $u(r, \theta) = f(\theta)$, precisando in quale senso la soddisfa.

Teo (condizione al contorno classica)

Hp: $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e regolare a tratti, $f(0) = f(2\pi)$

Ts: u è continua fino al bordo del cerchio e in particolare $\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (r, \theta_0)} u(\rho, \theta) = f(\theta_0) \forall \theta_0 \in [0, 2\pi]$

Le richieste di continuità e $f(0) = f(2\pi)$ devono essere viste come "continuità sulla circonferenza". Si noti che se f è continua è anche $L^1([0, 2\pi])$, quindi vale anche il teorema sopra sulla regolarità di u . Dunque, con le ipotesi di questo teorema, u è *soluzione classica* del problema di Dirichlet.

Dim Se $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, regolare a tratti e $f(0) = f(2\pi)$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < +\infty$, cioè la serie di Fourier di f converge totalmente: allora la serie che assegna u converge totalmente nel cerchio chiuso $\bar{B}_r(\mathbf{0})$ (non c'è più bisogno di ricorrere all'argomento con δ usato sopra: si maggiore ρ con r). Quindi u è continua nel cerchio chiuso, in particolare sul bordo, e $u(r, \theta) = f(\theta)$. ■ senso classico: serie converge uniformemente al dato al bordo

Si noti che prima di questo teorema si è ottenuta la convergenza totale in ogni cerchio chiuso, ma non si sapeva niente della convergenza sul bordo. Nei casi in cui questo teorema si applica, si dice che il dato al bordo è assunto con continuità, o che è assunto in senso classico. In realtà si può mostrare che basta che f sia continua; spesso la tecnica di separazione delle variabili porta a ipotesi eccessive.

Se invece f non è regolare a tratti ed eventualmente neanche continua, è vero che $\lim_{\rho \rightarrow r^-} u(\rho, \theta) = f(\theta)$ in un qualche senso? Sì: si può ancora dar senso alla condizione al contorno grazie alla teoria delle serie di Fourier in L^2 .

¹⁰Questo ragionamento funziona perché la continuità è un concetto locale; non si può fare per estendere la convergenza totale a tutto il cerchio aperto, perché la convergenza totale è un concetto globale

Teo (dato al bordo L^2)

$$\text{Hp:} \quad f \in L^2([0, \pi])$$

$$\text{Ts:} \quad \|u(\rho, \cdot) - f\|_{L^2(0, 2\pi)} \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow r^-$$

Si noti che se $f \in L^2([0, \pi])$ allora è anche $L^1([0, \pi])$, e quindi si applica ancora il teorema di regolarità della soluzione.

Dim Poiché f è L^2 , $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) < +\infty$ (che è una condizione più debole di quella che garantisce la convergenza totale!). $u(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \forall \rho < r, \forall \theta \in [0, 2\pi)$, punto per punto; inoltre $f(\theta) = L^2 \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$. Vale $u(\rho, \theta) - f(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - 1\right) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$. Il lato sinistro è L^2 perché u lo è in quanto continua. Allora, per il teorema di Pitagora in spazi di Hilbert, $\|u(\rho, \theta) - f(\theta)\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |u(\rho, \theta) - f(\theta)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - 1\right) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - 1\right)^2 \pi (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$. Per calcolare il limite per $\rho \rightarrow r^-$ vorrei scambiare limite e serie: e questo è lecito perché, vedendo il lato destro come serie di funzioni nella variabile ρ , si ha $\left| \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - 1\right)^2 \pi (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right| \leq \pi (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$, la cui serie converge, e dunque la convergenza della serie di funzioni è totale. Allora $\lim_{\rho \rightarrow r^-} \|u(\rho, \theta) - f(\theta)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\rho \rightarrow r^-} \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - 1\right)^2 \pi (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = 0$. ■

Quando il teorema si applica si dice che il dato al bordo è assunto in senso L^2 .

Si noti che in tutta questa trattazione non si sono esibite ipotesi sotto le quali u rientri nella classe di funzioni per cui vale il teorema di unicità (non si è dimostrato che u è C^1 *fino al bordo*), per cui ad ora non si può affermare che la soluzione trovata sia unica.

3.3 Problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio

Il problema è

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ se } \rho < r, \theta \in [0, 2\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(r, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

Infatti la direzione normale è proprio quella radiale.

Usando di nuovo la separazione delle variabili, si cercano ancora soluzioni del tipo $u(\rho, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ con a_n, b_n da determinare in base alla condizione al bordo.

Supponendo che la serie si possa derivare termine a termine, $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \rho^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$: imponendo la condizione si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} n r^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta)$. Lo sviluppo di f in serie di Fourier (supponendo che sia sviluppabile) è $\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$. Imponendo $A_0 = 0, n r^{n-1} a_n = A_n, n r^{n-1} b_n = B_n$

si ottiene $a_n = \frac{A_n}{nr^{n-1}}, b_n = \frac{B_n}{nr^{n-1}}$, mentre a_0 resta indeterminato, e ciò è perfettamente coerente col fatto che per il problema di Neumann la soluzione è unica a meno di una costante. Quindi la candidata soluzione è

$$u(\rho, \theta) = a_0 + r \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Analisi critica E' ancora vero che se $f \in L^1([0, 2\pi])$ allora la convergenza della serie che definisce u è totale in ogni cerchio di raggio $\delta < r$, e questo vale anche per tutte le derivate: in tal caso quindi $u \in C^\infty(B_r(\mathbf{0}))$ e $\Delta u = 0$. E' anche lecita l'operazione compiuta di derivazione termine a termine.

Affinché il dato al bordo sia assunto in senso classico occorre che $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ sia continua fino al bordo, e per dire ciò la convergenza totale della serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$ nel cerchio chiuso è sufficiente: questa vale se $\sum_{n=1}^{+\infty} (|A_n| + |B_n|) < +\infty$, il che segue dalle stesse condizioni di regolarità su f viste sopra. In tal caso dunque $\frac{\partial u}{\partial \rho} \in C^0(\bar{B}_r(\mathbf{0}))$ e la condizione al contorno è soddisfatta in senso classico.

3.4 Rappresentazione integrale della soluzione del problema di Dirichlet sul cerchio

Le ipotesi che si sono viste affinché u sia soluzione classica del problema di Dirichlet sono f continua e regolare a tratti, $f(0) = f(2\pi)$. Esiste un altro modo di risolvere il problema che permetta di indebolire queste ipotesi?

La strategia è riscrivere la soluzione in maniera da ottenere una formulazione integrale, che sia ben posta anche con ipotesi meno forti¹¹.

Si ha $u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$, con $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos ns ds$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sin ns ds$. Sostituendo in u si ha $u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left(\int_0^{2\pi} f(s) \cos ns ds \cos n\theta + \int_0^{2\pi} f(s) \sin ns ds \sin n\theta \right)$, e la seconda parentesi si può riscrivere con la formula di sottrazione del coseno, per cui $u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left(\int_0^{2\pi} f(s) \cos n(\theta - s) ds \right)$. Scambio serie e integrale (più tardi si vedranno le ipotesi sotto cui l'operazione è lecita): $u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n(\theta - s) \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n(\theta - s) \right] ds$. Si definisce $k(\rho, \theta - s) := \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n(\theta - s)$. In questo caso sappiamo calcolare la somma della serie: si nota che $\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n(\theta - s) = \operatorname{Re} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n e^{in(\theta-s)} = \operatorname{Re} \left(\frac{\rho}{r} e^{i(\theta-s)}\right)^n$. Sostituendo e scambiando parte reale e serie si trova $k(\rho, \theta - s) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} e^{i(\theta-s)}\right)^n = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-s)}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta-s) + \rho^2}$. Definendo $K(\rho, \theta - s) := \frac{k(\rho, \theta-s)}{\pi}$, si ottiene infine

$$u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} f(s) K(\rho, \theta - s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - s) + \rho^2} ds$$

¹¹Le formule risolutive integrali in genere richiedono a f meno regolarità delle formule risolutive per serie.

che può essere visto come un integrale di convoluzione, ma fatto sulla circonferenza. E' una formula di rappresentazione di gran lunga più snella di quella che usa le serie, e peraltro richiede di calcolare un solo integrale. $K(\rho, \theta - s)$ si dice nucleo integrale di Poisson.

Lo scambio fatto sopra tra serie e integrale è lecito se la serie di termine generale $f_n(s) = \left(\frac{\rho}{r}\right)^n f(s) \cos ns$ (l'argomento del coseno sarebbe $n(s - \theta)$, ma una traslazione di θ è irrilevante) converge totalmente. Questo è vero se f è limitata (oltre che $L^1([0, 2\pi])$): infatti in tal caso $|f_n(s)| \leq \sup |f| \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$, termine generale di una serie convergente se $\rho < r$. Quindi, se f è $L^1([0, 2\pi])$ e inoltre limitata, la u data dalla formula risolutiva per serie coincide con quella data dalla formula di rappresentazione integrale. Da questo segue immediatamente che $u \in C^\infty(B_r(\mathbf{0})), \Delta u = 0$.

Il seguente teorema stabilisce sotto quali ipotesi u assume il dato al bordo in senso classico.

Teo (condizione al contorno classica)

Hp: $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, $f(0) = f(2\pi)$

Ts: u assegnata della formula integrale di Poisson è continua fino al bordo

del cerchio e in particolare $\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (r^-, \theta_0)} u(\rho, \theta) = f(\theta_0) \quad \forall \theta_0 \in [0, 2\pi]$

Quindi, se f soddisfa queste ipotesi (che implicano f integrabile e limitata), u è soluzione classica. Rispetto alle ipotesi viste con la formula assegnata per serie, si è rimossa l'ipotesi di regolarità a tratti.

Dim In primo luogo si osservano alcune proprietà del nucleo di Poisson. (1) Poiché $K(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta) + \rho^2}$, il numeratore è positivo $\forall \rho < r$, mentre $r^2 - 2r\rho \cos(\theta - s) + \rho^2 \geq r^2 - 2r\rho + \rho^2 = (r - \rho)^2 > 0$ se $\rho < r$ (se poi $\rho \leq \delta < r$, il denominatore è $\geq (r - \rho)^2 > 0$, cioè discosto da 0), quindi $K(\rho, \theta) > 0$ se $\rho < r, \theta \in [0, 2\pi]$.

(2) Inoltre $\int_0^{2\pi} K(\rho, \theta) d\theta = 1 \quad \forall \rho < r$. Infatti, se $f \in L^1 \cap L^\infty$, la u data dalla formula risolutiva per serie coincide con quella data dalla formula di rappresentazione integrale; inoltre, se f è continua e regolare a tratti, $f(0) = f(2\pi)$, allora u data dalla formula risolutiva per serie assume il dato al bordo in senso classico. $f = 1$ soddisfa tutte queste ipotesi, quindi $u = 1$ risolve il problema di Dirichlet, e inoltre $u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} K(\rho, \theta) d\theta \quad \forall \rho < r, \theta \in [0, 2\pi]$.

Ora si dimostra (1) che poiché $\forall \theta_0 \in [0, 2\pi]$ $f(\theta)$ è continua in θ_0 , allora $\lim_{\rho \rightarrow r^-} u(\rho, \theta_0) = f(\theta_0)$ (convergenza radiale). Essendo f continua in tutto $[0, 2\pi]$ e quindi ivi uniformemente continua, la suddetta convergenza di $u(\rho, \theta)$ a $f(\theta)$ è uniforme rispetto a θ (cioè, fissato ε , il δ non dipende da θ). (2) Se ora si sa che f è continua su tutto il bordo, da (1) segue che $\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (r^-, \theta_0)} u(\rho, \theta) = f(\theta_0)$. Infatti $|u(\rho, \theta) - f(\theta_0)| \leq |u(\rho, \theta) - f(\theta)| + |f(\theta) - f(\theta_0)|$: ma per continuità di $f \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : |\theta - \theta_0| < \delta_2 \implies |f(\theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon$, mentre per (1)

$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : |\rho - r| < \delta_1 \implies |u(\rho, \theta) - f(\theta)| < \varepsilon \forall \theta \in [0, 2\pi]$, quindi $|u(\rho, \theta) - f(\theta_0)|$ tende a 0 se $\rho \rightarrow r^-, \theta \rightarrow \theta_0$.

Si dimostra (1). Sia $\rho < r$. $u(\rho, \theta_0) - f(\theta_0) = \int_0^{2\pi} f(s) K(\rho, \theta_0 - s) ds - f(\theta_0) = \int_0^{2\pi} K(\rho, \theta_0 - s) (f(s) - f(\theta_0)) ds$ per la proprietà (2) del nucleo; allora $|u(\rho, \theta_0) - f(\theta_0)| \leq \int_0^{2\pi} K(\rho, \theta_0 - s) |f(s) - f(\theta_0)| ds = \int_{\substack{s \in [0, 2\pi] \\ |s - \theta_0| > \delta}} id + \int_{\substack{s \in [0, 2\pi] \\ |s - \theta_0| < \delta}} id = A_\delta + B_\delta$, dove $\delta > 0$ è ancora da definire. Poiché f è continua in θ_0 , fissato $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |s - \theta_0| < \delta \implies |f(s) - f(\theta_0)| < \varepsilon$. Scelgo proprio questo δ (che in realtà è indipendente da θ_0 , perché f è continua nel compatto $[0, 2\pi]$ e quindi uniformemente continua!): si ha in tal caso $B_\delta < \varepsilon \int_{\substack{s \in [0, 2\pi] \\ |s - \theta_0| < \delta}} K(\rho, \theta_0 - s) ds \leq^{K>0} \varepsilon \int_{s \in [0, 2\pi]} K(\rho, \theta_0 - s) ds = {}^{12} \varepsilon \forall \rho < r$; l'ultima disuguaglianza è valida grazie alla positività del nucleo. Invece $A_\delta = \int_{\substack{s \in [0, 2\pi] \\ |s - \theta_0| > \delta}} K(\rho, \theta_0 - s) |f(s) - f(\theta_0)| ds \leq 2 \max |f| \int_{\substack{s \in [0, 2\pi] \\ |s - \theta_0| > \delta}} K(\rho, \theta_0 - s) ds$. Poiché $|s - \theta_0| > \delta$, non si possono sfruttare proprietà di f : occorre usare la definizione di K . $K(\rho, \theta_0 - s) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta_0 - s) + \rho^2}$: se $|s - \theta_0| > \delta$, $\cos(\theta_0 - s) < \cos \delta$ (se $\delta > \frac{\pi}{2}$ la disuguaglianza si inverte??), quindi $r^2 - 2r\rho \cos(\theta_0 - s) + \rho^2 \geq r^2 - 2r\rho \cos \delta + \rho^2$. Allora $K(\rho, \theta_0 - s) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos \delta + \rho^2}$: se $\rho \rightarrow r^-$, il denominatore tende a $2r^2(1 - \cos \delta) > 0$, il numeratore tende a 0, quindi $A_\delta + B_\delta \rightarrow 0$ e $|u(\rho, \theta_0) - f(\theta_0)| \rightarrow 0$ per $\rho \rightarrow r^-$. ■

Di conseguenza, richiedendo solo $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $f(0) = f(2\pi)$, la u assegnata dalla formula integrale di Poisson è l'unica soluzione classica del problema di Dirichlet, ed è $C^\infty(B_r(\mathbf{0}))$.

Si potrebbe tuttavia seguire un percorso logico diverso e dimostrare direttamente dalla formula di rappresentazione integrale che la u così assegnata è C^∞ e $\Delta u = 0$. Per fare ciò occorre calcolare le derivate $u_{\rho\rho}, u_{\theta\theta}, u_\rho$: come calcolare e. g. $\frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, \theta) = \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} f(s) K(\rho, \theta - s) ds$? E, prima ancora, come fare a stabilire la continuità della u come funzione di ρ ? Questo è un caso del problema generale di stabilire continuità e derivabilità di un integrale dipendente da un parametro.

Continuità e derivabilità di un integrale dipendente da un parametro Il problema in forma generale è il seguente: vogliamo capire sotto quali ipotesi $u(x) := \int_\Omega k(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$, con $\mathbf{y} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in (a, b)$, è continua e sotto quali derivabile. I seguenti teoremi rispondono a queste domande.

Teo (continuità)

$$\text{Hp: } u(x) := \int_\Omega k(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \mathbf{y} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, x \in (a, b); \forall x \in (a, b) \ k(x, \cdot) \in L^1(\Omega);$$

$x_0 \in (a, b)$; per quasi ogni $\mathbf{y} \in \Omega$ la funzione $x \mapsto k(x, \mathbf{y})$ è continua in $x_0 \in (a, b)$;

$$\exists B_\delta(x_0), g \in L^1(\Omega) : |k(x, \mathbf{y})| \leq g(\mathbf{y}) \forall x \in B_\delta(x_0), \text{ per quasi ogni } \mathbf{y} \in \Omega$$

$$\text{Ts: } u \text{ è continua in } x_0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} \int_\Omega k(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_\Omega \left(\lim_{x \rightarrow x_0} k(x, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y}$$

¹²con un cambio di variabile si vede facilmente che la traslazione nella seconda variabile preserva la proprietà di integrare a 1

Queste ipotesi permettono lo scambio tra limite e integrale, come è naturale sperare.

Teo (derivabilità)

$$\begin{aligned} \text{Hp: } u(x) &:= \int_{\Omega} k(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \mathbf{y} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, x \in (a, b); \forall x \in (a, b) \ k(x, \cdot) \in L^1(\Omega); x_0 \in (a, b); \\ &\exists B_{\delta}(x_0), g \in L^1(\Omega) : \exists \frac{\partial k}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \text{ e } \left| \frac{\partial k(x, \mathbf{y})}{\partial x} \right| \leq g(\mathbf{y}) \quad \forall x \in B_{\delta}(x_0), \text{ per quasi ogni } \mathbf{y} \in \Omega \\ \text{Ts: } \exists u'(x_0) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} k(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Queste ipotesi permettono lo scambio tra derivata e integrale, come è naturale sperare.

Entrambi i teoremi si basano sul teorema di convergenza dominata, come si può ravvisare dalle ipotesi.

Da questi teoremi seguono alcuni risultati sulla trasformata di Fourier che saranno usati in seguito. Il primo teorema permette di dedurre che se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la trasformata di Fourier di f è una funzione continua di ξ ; il secondo che se $f \in L^1(\mathbb{R}), xf \in L^1(\mathbb{R})$ allora la trasformata è derivabile (in tal caso $g = xf$). Ancora più in generale, se $\exists k : (1 + |x|^k) f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se si calcola la trasformata di f' integrando per parti, si vede che se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e \exists q.o. $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$. Estendendo le ipotesi alla derivata seconda, si trova $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right) = (2\pi i)^2 \xi_j^2 \hat{f}(\xi)$. Dunque $\mathcal{F}(\Delta f) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -4\pi^2 \xi_1^2 \hat{f}(\xi) - 4\pi^2 \xi_2^2 \hat{f}(\xi) = -4\pi^2 \|\xi\|^2 \hat{f}(\xi)$.

Si calcola infine $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} \cos(-2\pi \xi x) dx + i \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} \sin(-2\pi \xi x) dx$, ma il secondo addendo è nullo in quanto integrale di una funzione dispari. Allora $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} \cos(-2\pi \xi x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \text{Re}(e^{-a|x|} e^{-2\pi i \xi x}) dx = 2 \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-2\pi i \xi x} dx \right) = 2 \text{Re} \left[\frac{-1}{a+2\pi i \xi} e^{-(a+2\pi i \xi)x} \right]_0^{+\infty} = 2 \text{Re} \frac{1}{a+2\pi i \xi} = 2 \text{Re} \left(\frac{a-2\pi i \xi}{a^2+4\pi^2 \xi^2} \right) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 \xi^2}$.

Si ricorda, infine, il teorema di inversione: se $f, \hat{f} \in L^1$, vale $f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\xi$, per cui $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f(-\mathbf{x})$.

3.5 Problema di Dirichlet per il laplaciano sul semipiano

Si cerca di risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel caso particolare di $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$.

Il problema è

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Prima o poi si dovrà imporre qualche condizione sul comportamento di u all'infinito (che consideriamo far parte del "bordo"), altrimenti il problema sarebbe sottodeterminato.

Considero u funzione della sola x e la trasformo secondo Fourier¹³: si ottiene $u(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx$. Allora la trasformata rispetto a x di Δu è $\mathcal{F}_x(u_{xx} + u_{yy}) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \int_{\mathbb{R}} u_{yy}(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx = -4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \hat{u}_{yy}(\xi, y)$, ricordando che y è un parametro e scambiando derivata e integrale. Imponendo $\Delta u = 0$ si ottiene l'equazione differenziale ordinaria lineare del second'ordine a coefficienti costanti, nell'incognita $\hat{u}(\xi, y)$ e nella variabile y ,

$$-4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \hat{u}_{yy}(\xi, y) = 0$$

E' noto che la soluzione è del tipo $\hat{u}(\xi, y) = c_1(\xi) e^{2\pi|\xi|y} + c_2(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}$; i coefficienti della combinazione sono costanti in y , variabile in cui si risolve l'EDO, quindi è opportuno esplicitare la dipendenza da ξ .

Si impone ora la condizione che la soluzione u tenda a 0 per $y \rightarrow +\infty$, il che implica $\lim_{y \rightarrow +\infty} \hat{u}(\xi, y) = 0 \forall \xi$ per il teorema di continuità. Quindi dev'essere $c_1(\xi) = 0 \forall \xi$, da cui $\hat{u}(\xi, y) = c_2(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}$.

Per dedurre quale condizione al bordo si deve imporre sulla trasformata di u , si trasforma la condizione al bordo e si ottiene $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$. Ma dalla formula sopra si ha $\hat{u}(\xi, 0) = c_2(\xi)$, per cui $c_2(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

La formula esplicita per la trasformata della soluzione è dunque $\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}$: occorre antitrasformarla. La strategia naturale (grazie all'iniettività della trasformata) è antitrasformare $e^{-2\pi|\xi|y}$ e usare al contrario la regola di trasformazione di un prodotto di convoluzione. Poiché $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f(-x)$ ed è noto che $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}$, si ha che $\mathcal{F}(\mathcal{F}(e^{-a|x|})) = \mathcal{F}\left(\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}\right) = e^{-a|x|}$. L'antitrasformata che dobbiamo trovare si ha dunque ponendo $a = 2\pi y$: vale $\mathcal{F}\left(\frac{4\pi y}{4\pi^2 y^2 + 4\pi^2 x^2}\right) = e^{-2\pi y|\xi|}$, per cui l'antitrasformata della soluzione è, definito $k_y(x) = \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)}$ nucleo di Poisson nel semipiano,

$$u(x, y) = f * k_y = \int_{\mathbb{R}} f(z) k_y(x - z) dz$$

che è detta formula integrale di Poisson nel semipiano.

Analisi critica Richiediamo che u si possa derivare rispetto a x e y scambiando derivata e integrale (in modo che si possa verificare facilmente che $\Delta u = 0$). Per il teorema di derivabilità occorre che $f(z) \frac{\partial}{\partial x(y)} k_y(x - z)$ abbia una dominante integrabile: se la derivata è limitata, è sufficiente che f sia integrabile. Ma per la forma di k_y le sue derivate di ogni ordine sono limitate in x e y se $y \geq \delta > 0$: dunque in ogni semipiano di questo tipo si ha $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} k_y(x - z) f(z) \leq c |f(z)|$, e perciò u è C^∞ nel semipiano (non fino al bordo!) e si possono scambiare derivata e integrale.

Si ha quindi $\Delta u(x, y) = \Delta \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) k_y(x - z) dz \right) = \int_{\mathbb{R}} \Delta [f(z) k_y(x - z)] dz$. Si potrebbero calcolare con pazienza tutte le derivate, ma si nota che $k_y(x) = \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)} = \text{Im}\left(\frac{-1}{\pi z}\right)$, e $\frac{-1}{\pi z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dunque la sua parte immaginaria è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $y > 0$ e ivi soddisfa $\Delta u = 0$.

¹³non si potrebbe fare rispetto a y , dato che questa non varia in \mathbb{R}

Si è quindi ottenuto che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $u \in C^\infty$ e $\Delta u = 0$.

Per determinare in che modo è assunta la condizione al bordo occorre una parentesi sui nuclei regolarizzanti.

3.5.1 Nuclei regolarizzanti

Sia $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \phi \in L^1(\mathbb{R}^n), \phi \geq 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$: ϕ si dice funzione madre.

1. $\phi(\mathbf{x}) = e^{-\pi|\mathbf{x}|^2}$ soddisfa le ipotesi sopra e si dice nucleo di Gauss in \mathbb{R}^n .
2. $\phi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1}$ soddisfa le ipotesi sopra¹⁴ e si dice nucleo di Poisson.

A partire da ϕ si costruisce una successione $\{\phi_\varepsilon(\mathbf{x})\}_{\varepsilon>0}, \phi_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$. Vale $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon^n} \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$.

ϕ_ε si dice approssimazione dell'identità, o nucleo regolarizzante, o mollificatore; $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ si dice famiglia di approssimazioni dell'identità. Si noti che l'effetto di dividere per ε , qualora ε sia molto vicino a 0, è dilatare verticalmente il grafico di ϕ , mentre l'effetto di dividere per ε è comprimere orizzontalmente il grafico di ϕ . Visivamente, al tendere di ε a 0 (da verde a rosso) si osserva una campana che si restringe in ampiezza e ha un massimo sempre più alto.

Data $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si definisce ora $f_\varepsilon(\mathbf{x}) := (f * \phi_\varepsilon)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$: questa operazione deve essere vista come una media di f pesata sulle ϕ_ε (dato che queste integrano a 1), dove i valori di f per \mathbf{x} prossimo a 0 sono pesati tanto più quanto più ε è piccolo.

Teo

Hp: $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una famiglia di approssimazioni dell'identità, $\exists p \in [1, +\infty) : f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Ts: (i) f_ε converge a f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$

(ii) se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_*^0(\mathbb{R}^n)$, f_ε converge a f anche uniformemente per $\varepsilon \rightarrow 0^+$

(iii) se inoltre $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e f_ε converge a f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$

(f_ε , se $f \in L^p$, è in L^p per il teorema di Young). In (iii), la prima tesi è una conseguenza del teorema di regolarità della convoluzione. (iii) mostra che è possibile approssimare una funzione che è solo L^p con funzioni C^∞ .

Si noti che se f non è continua, (ii) *non può essere vera* in L^∞ , perché la convergenza uniforme preserva la continuità; è dunque naturale escludere $p = \infty$ nelle ipotesi.

¹⁴si può verificare che è integrabile con il calcolo esplicito, usando l'arcotangente

Se $\phi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\pi(1+(\frac{x}{\varepsilon})^2)} = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$: dunque, ponendo $y = \varepsilon$, si ha che $\phi_\varepsilon(x)$ è proprio il nucleo di Poisson $k_y(x)$, perciò $\{k_y(x)\}_{y>0}$ è una famiglia di nuclei regolarizzanti.

Ne segue che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $u(x, y) = f * k_y = f_y(x)$ converge in L^1 a f per $y \rightarrow 0^+$, cioè $\|u(\cdot, y) - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0^+$: il dato al bordo è assunto in senso L^1 .

Se inoltre $f \in L^1 \cap C_*^0$, $u(x, y) = f * k_y$ converge a f anche uniformemente per $y \rightarrow 0^+$, dunque $\lim_{y \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, y) - f(x)| = 0$ e u è soluzione classica.

$$1. \text{ Considero il problema di Dirichlet nel semipiano } \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ se } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = I_{[-1,1]}(x) \text{ se } x \in \mathbb{R} \end{cases}. \text{ E' noto che } u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(z) k_y(x-z) dz = \int_{-1}^1 \frac{y}{\pi(y^2+(x-z)^2)} dz = \frac{1}{\pi} \left[-\arctan\left(\frac{x-z}{y}\right) \right]_{z=-1}^{z=1} = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x+1}{y} - \arctan \frac{x-1}{y} \right).$$

Poiché $f \in L^1$, il dato al bordo è assunto in senso L^1 ; nei punti in cui f è continua, è assunto anche in senso classico. Infatti, fissato $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x+1}{y} - \arctan \frac{x-1}{y} \right) = 1$ se $x \in (-1, 1)$, 0 se $x < -1, x > 1$; se invece $x = 1$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x+1}{y} - \arctan \frac{x-1}{y} \right) = \frac{1}{2}$ e se $x = -1$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x+1}{y} - \arctan \frac{x-1}{y} \right) = \frac{1}{2}$.

Si noti che in questo caso non si può usare il teorema di unicità per affermare che la soluzione del problema di Dirichlet nel semipiano è unica, perché tale teorema richiede di lavorare su domini limitati e lipschitziani, mentre il piano è un dominio illimitato. In effetti, in generale la soluzione del problema di Dirichlet nel semipiano non è unica.

$$1. \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ se } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = 0 \text{ se } x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ha soluzione } u = 0, \text{ ma anche } u(x, y) = e^x \sin y = \operatorname{Im} e^z, \text{ dato che } e^z \text{ è una funzione armonica.}$$

Tuttavia si può dimostrare che la soluzione è unica nella classe delle funzioni limitate (infatti $e^x \sin y$ non lo è).

3.6 Equazione di Poisson in \mathbb{R}^n

Si vuole risolvere $\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n . In questo caso la trasformata di Fourier non aiuta..

L'idea è invece trovare una soluzione fondamentale. Per motivi fisici è naturale studiare $\Delta u = -\delta$, dove δ rappresenta la densità di carica di una carica puntiforme nell'origine. E' quindi naturale che il potenziale elettrostatico sia a simmetria radiale. Si cercano allora le funzioni radiali armoniche per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Ovviamente serve sapere scrivere il laplaciano per funzioni radiali.

Prop (laplaciano per funzioni radiali)

$$\text{Hp:} \quad u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, u(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) = f(\rho)$$

$$\text{Ts} : \quad \Delta u = f''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} f'(\rho)$$

Dim Vale $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = f'(\rho) \rho_{x_i}$, quindi $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(\rho) \rho_{x_i}^2 + f'(\rho) \rho_{x_i x_i}$. Allora $\Delta u = f''(\rho) \sum_{i=1}^n \rho_{x_i}^2 + f'(\rho) \sum_{i=1}^n \rho_{x_i x_i}$. Poiché $\rho = \rho(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$, $\rho_{x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} = \frac{x_i}{\rho}$ e $\rho_{x_i x_i} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} - x_i \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}}}{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \frac{\rho^2 - x_i^2}{\rho^3}$, per cui $\Delta u = f''(\rho) + f'(\rho) + f'(\rho) \frac{n-1}{\rho}$. ■

E' noto che in coordinate polari $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u$, quindi se $n = 2$ e $u = u(\rho)$ è una funzione radiale, $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) u$, in accordo con la tesi sopra.

Allora per trovare le funzioni radiali armoniche per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ basta risolvere l'EDO $f''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} f'(\rho) = 0$ per $\rho > 0$: ponendo $v(\rho) = f'(\rho)$ si ottiene l'equazione $v'(\rho) + \frac{n-1}{\rho} v(\rho) = 0$, da cui - separando le variabili - $v(\rho) = \frac{c}{\rho^{n-1}}$. Allora si ottiene

$$f(\rho) = \begin{cases} c_1 \ln \rho + c_2 & \text{se } n = 2 \\ c_1 \frac{1}{\rho^{n-2}} + c_2 & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Queste sono tutte e sole le funzioni armoniche radiali in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dato che comunque il potenziale è definito a meno di una costante additiva, si può porre $c_2 = 0$.

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} c \ln |\mathbf{x}| & \text{se } n = 2 \\ c \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

E' evidente tuttavia che questa u non potrà essere una soluzione in senso classico: la soluzione di $\Delta u = -\delta$, essendo δ una distribuzione, non potrà che essere una distribuzione. Occorre quindi valutare se esiste c tale che la u definita sopra risolva l'equazione in senso distribuzionale, cioè se il laplaciano della distribuzione¹⁵ associata a u è proprio $-\delta$ (si noti che tale distribuzione è ben definita perché $u(\mathbf{x}) = c \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}}$ è L_{loc}^1 , come si mostrerà più avanti): questo significa chiedere che $\Delta T_u = -\delta$, cioè $T_u(\Delta \phi) = -\phi(0) \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si cerca perciò c : $\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\phi(0) \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Integrali di funzioni radiali Essendo u una funzione radiale, è utile ricordare come si calcolano gli integrali di funzioni siffatte. Ogni punto in \mathbb{R}^n è individuato univocamente dalle sue coordinate cartesiane (x_1, \dots, x_n) oppure dalle sue coordinate sferiche $(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})$, dove le ultime $n-1$ coordinate sono angoli. La trasformazione da un sistema di coordinate all'altro è $x_i = \rho \omega_i(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$, con $\omega_i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$; l'elemento

¹⁵Si ricorda che $D_{x_i}(T) := -T\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)$, quindi $D_{x_i x_i}(T) = D_{x_i}(D_{x_i} T) = -D_{x_i} T\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = T\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}\right)$. Allora $\Delta T := \sum_{i=1}^n D_{x_i x_i}(T) = T\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}\right) = T(\Delta \phi)$.

di volume, che dà conto della contrazione o dilatazione dei volumi che si ha passando da un sistema all'altro, è $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n = \rho^{n-1} \omega(\phi_1, \dots, \phi_n) d\rho d\phi_1 \dots d\phi_n$, dove $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ è il prodotto di funzioni seno o coseno dei vari angoli.

1. In \mathbb{R}^3 $d\mathbf{x} = \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi$.

Perciò, calcolando gli integrali con il cambio di variabile da coordinate cartesiane a coordinate sferiche, si ha $\int_{B_R(\mathbf{0})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^R \int_{\Sigma_1} f(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \rho^{n-1} \omega(\phi_1, \dots, \phi_n) d\rho d\phi_1 \dots d\phi_{n-1}$, dove Σ_1 è l'insieme in cui variano le coordinate angolari (in \mathbb{R}^2 $\Sigma_1 = [0, 2\pi]$, in \mathbb{R}^3 $\Sigma_1 = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$). L'ultimo integrale si può riscrivere, decomponendo in componente radiale e componente superficiale, come $\int_0^R \left(\int_{\Sigma_1} f d\sigma_\rho \right) d\rho$, dove $d\sigma_\rho$ indica l'elemento d'area della superficie sferica di raggio ρ : vale quindi $d\sigma_\rho = \rho^{n-1} \omega(\phi_1, \dots, \phi_n) d\phi_1 \dots d\phi_{n-1} = \rho^{n-1} d\sigma_1$, dove $d\sigma_1$ indica l'elemento d'area della sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^n .

Se f è radiale, $\int_{B_R(\mathbf{0})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^R \left(\int_{\Sigma_1} f \rho^{n-1} d\sigma_1 \right) d\rho = \int_0^R f(\rho) \rho^{n-1} d\rho \int_{\Sigma_1} d\sigma_1$. Il numero $\int_{\Sigma_1} d\sigma_1$, misura della superficie della sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^n , prende il nome di ω_n ($\omega_2 = 2\pi, \omega_3 = 4\pi$). Quindi

$$\int_{B_R(\mathbf{0})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \omega_n \int_0^R f(\rho) \rho^{n-1} d\rho$$

1. In particolare se $f = 1$ si ottiene che $|B_R(\mathbf{0})| = \omega_n \int_0^R \rho^{n-1} d\rho = \frac{\omega_n}{n} R^n$, mentre $|\partial B_R(\mathbf{0})| = \omega_n R^{n-1}$ (che è la derivata in R della formula del volume!).

2. Affinché sia ben definita la distribuzione associata a u , ha senso chiedersi per quali α esiste finito $\int_{B_R(\mathbf{0})} \frac{1}{||\mathbf{x}||^\alpha} d\mathbf{x}$.

Poiché $\int_{B_R(\mathbf{0})} \frac{1}{||\mathbf{x}||^\alpha} d\mathbf{x} = \omega_n \int_0^R f(\rho) \rho^{n-1} d\rho = \omega_n \int_0^R \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} d\rho$, che è finito se e solo se $\alpha < n$. Quindi $u(\mathbf{x}) = c \frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}}$ è $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, così come $\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}$, mentre non lo è $\frac{1}{||\mathbf{x}||^n}$.

Si può ora mostrare che la u sopra definita è soluzione distribuzionale dell'equazione di Poisson.

Teo (soluzione fondamentale dell'equazione di Poisson)

$$\begin{aligned} \text{Hp:} \quad & u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ \text{Ts:} \quad & \Gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \ln ||\mathbf{x}|| & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}} & \text{se } n > 2 \end{cases} \quad \text{risolve l'equazione, cioè } \Delta \Gamma = -\delta_0 \end{aligned}$$

Si noti che Γ è la u ricavata sopra, in cui però sono state determinate le costanti. La tesi può essere espressa più snellamente dicendo che $\Delta T_\Gamma = -\delta$, cioè Γ risolve l'equazione in senso distribuzionale. Γ si dice quindi soluzione fondamentale dell'operatore differenziale $-\Delta$. Si noti che Γ è localmente integrabile, quindi l'integrale nell'ipotesi è ben definito quando $u = \Gamma$; ogni derivata prima di Γ va a $+\infty$ come $\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}$, che è localmente integrabile, mentre

ogni derivata seconda come $\frac{1}{||\mathbf{x}||^n}$, che *non è localmente integrabile* (anche se il laplaciano di Γ , la somma di tutte le derivate seconde, dà 0 tranne nell'origine): non è banale il modo di vederla come distribuzione.

Dim Si dimostra solo il caso $n > 2$, e si dimostrerà una tesi più forte, cioè che $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\phi(0) \forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. A priori non si conosce ω_n : si calcola il lato sinistro dell'uguaglianza per $\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}}$, e si troverà poi l'opportuna costante di normalizzazione.

Si vuole quindi calcolare $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ con $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$; dato che le ϕ e le derivate fino alla seconda sono a supporto compatto, $\forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \exists B_r(\mathbf{0}) : \text{supp}(\phi) \subset B_r(\mathbf{0})$, quindi $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B_r(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Ora è naturale voler usare la seconda identità di Green, ma γ non è C^2 in $\Omega = B_r(\mathbf{0})$: in 0 non è definita! Allora si considera $\varepsilon < r$ e si scrive $\int_{B_r(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B_\varepsilon(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{B_r(\mathbf{0}) \setminus B_\varepsilon(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = I_\varepsilon + II_\varepsilon$.

Dico che $I_\varepsilon \rightarrow 0$ se $\varepsilon \rightarrow 0^+$: intuitivamente, perché $\gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x})$ è una funzione integrabile su $B_r(\mathbf{0})$. Infatti $\left| \int_{B_\varepsilon(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_{B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}} |\Delta \phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_{B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}} ||\Delta \phi||_{C^0(\mathbb{R}^n)} d\mathbf{x}$, dato che $\Delta \phi$ è C^0 e a supporto compatto. Allora $|I_\varepsilon| \leq ||\Delta \phi||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \int_{B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}} d\mathbf{x} = ||\Delta \phi||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \omega_n \int_0^\varepsilon \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-2}} d\rho = ||\Delta \phi||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \omega_n \frac{1}{2} \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$.

Dunque $\int_{B_r(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_r(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_r(\mathbf{0}) \setminus B_\varepsilon(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Per calcolare quest'ultimo si usa la seconda identità di Green, dato che in questo dominio γ e ϕ sono C^2 fino al bordo: ponendo $\Omega_\varepsilon = B_r(\mathbf{0}) \setminus B_\varepsilon(\mathbf{0})$, $\int_{\Omega_\varepsilon} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \gamma(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) (\sigma) d\sigma = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) (\sigma) d\sigma$, perché $\Delta \gamma = 0$: γ è stata trovata proprio come funzione armonica radiale in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. $\partial \Omega_\varepsilon$ è il bordo di una corona circolare: sul bordo esterno ϕ (e quindi anche ogni sua derivata) è nulla "già da un po'" perché si è fuori dal suo supporto, quindi rimane solo l'integrale sul bordo interno $\int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial n_i} - \phi \frac{\partial \gamma}{\partial n_i} \right) (\sigma) d\sigma = \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial n_i} \right) (\sigma) d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \left(\phi \frac{\partial \gamma}{\partial n_i} \right) (\sigma) d\sigma = A_\varepsilon + B_\varepsilon$.

Si intuisce che il primo addendo (proprio come accaduto a I_ε) tende a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, perché - ragionando intuitivamente con gli ordini di grandezza - $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ pesa come ε^{n-1} , mentre γ tende a ∞ come $\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}} = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}$, quindi rimane un ε al numeratore; invece nel secondo ci dovrebbe essere una compensazione, perché la derivata di γ tende a ∞ come $\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}} = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}$, che si semplifica con ε^{n-1} . Infatti vale $|A_\varepsilon| = \left| \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \left(\frac{1}{||\sigma||^{n-2}} \frac{\partial \phi}{\partial n_i} \right) (\sigma) d\sigma \right| = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{\partial \phi}{\partial n_i} (\sigma) d\sigma \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} ||\nabla \phi(\sigma)|| d\sigma \leq \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} ||\nabla \phi||_{C^0} \omega_n \varepsilon^{n-1} = \varepsilon \omega_n ||\nabla \phi||_{C^0}$, che è infinitesimo per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. I passaggi seguono dal fatto che $\left| \frac{\partial \phi}{\partial n_i} \right| = |\langle \nabla \phi, n_i \rangle| \leq ||\nabla \phi||$ per Cauchy-Schwarz e dalla formula della misura della superficie di una sfera di raggio $R = \varepsilon$.

Invece $B_\varepsilon = - \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \phi(\sigma) \langle \nabla \gamma(\sigma), n_i \rangle d\sigma$: poiché $\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 2x_i \frac{2-n}{2} \frac{1}{||\mathbf{x}||^n}$, perciò $\nabla \gamma = \frac{2-n}{||\mathbf{x}||^n} \mathbf{x}$, mentre il versore normale esterno a un cerchio è $n_e = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$. Allora $\langle \nabla \gamma(\sigma), n_e \rangle = \left\langle \frac{2-n}{||\mathbf{x}||^n} \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} \right\rangle = \frac{2-n}{||\mathbf{x}||^{n-1}}$, che su $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ vale $\frac{2-n}{\varepsilon^{n-1}}$, e $B_\varepsilon = \frac{2-n}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \phi(\sigma) d\sigma = \omega_n (2-n) \frac{\int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \phi(\sigma) d\sigma}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} = \omega_n (2-n) \phi(\mathbf{x}^*)$, dove l'ultimo passaggio segue dal teorema della media: essendo $\mathbf{x}^* \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$, se $\varepsilon \rightarrow 0^+$ il lato destro tende a $\omega_n (2-n) \phi(\mathbf{0})$.

Si è ottenuto dunque $\int_{B_r(\mathbf{0})} \gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} B_\varepsilon = \omega_n (2-n) \phi(0)$. Allora, se si prende $\Gamma(\mathbf{x}) := \frac{\gamma(\mathbf{x})}{\omega_n(n-2)}$, l'integrale calcolato è proprio $-\phi(0)$ e si ha la tesi, per cui $\Delta \Gamma = -\delta$. ■

Tutta questa fatica per trovare la soluzione fondamentale non è fatta senza motivo. Se si conosce la soluzione fondamentale, infatti, è molto facile risolvere l'equazione $\Delta u = f$.

Corollario (soluzione dell'equazione di Poisson)

$$\text{Hp:} \quad f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts:} \quad u = -\Gamma * f \text{ risolve } \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Dunque $u(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Per quanto l'ipotesi su f sembri strana, nella dimostrazione si vede che essa gioca di fatto il ruolo di una funzione test. La u è ben definita perché Γ è localmente integrabile e f ha supporto compatto, quindi su tale supporto si ha il prodotto di una funzione integrabile e una limitata.

Dim Per ora scriviamo, pur senza sapere se il passaggio è lecito, $\Delta u = -\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \Gamma(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$.

Poiché $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, esiste $B_r(\mathbf{0}) : \text{supp}(f) \subseteq B_r(\mathbf{0})$, cioè se $\mathbf{x} \in \text{supp}(f)$ allora $\|\mathbf{x}\| < r$. Si può quindi affermare che $\forall \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{0}) \text{ supp}(f(\mathbf{x} - \cdot)) \subseteq B_{2r}(\mathbf{0})$, cioè se $\mathbf{y} \in \text{supp}(f(\mathbf{x} - \cdot))$, allora $\|\mathbf{y}\| < 2r$. Infatti $\mathbf{y} \in \text{supp}(f(\mathbf{x} - \cdot)) \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{supp}(f)$, il che implica $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r$; ma poiché $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq ||\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$, si ha $\|\mathbf{y}\| < r + \|\mathbf{x}\| < 2r$.

Quindi $|\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq c \forall \mathbf{y} \in B_{2r}(\mathbf{0})$ per Weierstrass: $\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ è limitato nella variabile \mathbf{y} . Dunque, poiché $\Gamma \in L^1(B_{2r}(\mathbf{0}))$, in quanto L_{loc}^1 , sono verificate le ipotesi del teorema di derivabilità ed è lecito lo scambio tra laplaciano e integrale. Definendo $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, si osserva che $\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ (si hanno due segni meno che si annullano): quindi $\Delta u = -\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \Gamma(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_{\mathbf{y}} F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})) \Gamma(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = F_{\mathbf{x}}(\mathbf{0})$ per il teorema precedente, dove $\phi(\mathbf{y}) = F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, e quindi $\Delta u = f(\mathbf{x})$. ■

Con il formalismo delle distribuzioni, che però noi non conosciamo bene e dunque non usiamo, la dimostrazione è molto più veloce, perché $\Delta u = \Delta(-\Gamma * f) = -\Delta \Gamma * f = \delta * f = f$.

Per ora abbiamo trovato una soluzione, ma è evidente che ne esistono infinite: sommando a u qualsiasi funzione armonica si trova un'altra soluzione.

3.7 Equazione di Poisson in un dominio Ω

E' il momento di imporre una condizione al bordo: ci occupiamo del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio. Per studiare il problema occorre un concetto analogo a quello di soluzione fondamentale, ma riferito a un dominio Ω .

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, si dice - qualora esista - funzione di Green per Ω una funzione $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tale che $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ vale $\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta_{\mathbf{x}} \forall \mathbf{y} \in \Omega$ e $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega$.

G rappresenta il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme collocata in \mathbf{x} (detto polo), e messo a terra in $\partial\Omega$: la variabile spaziale che indica il punto in cui si calcola il potenziale è \mathbf{y} .

E' naturale aspettarsi che $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow +\infty$ se $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$. Si dimostra che (1) se $\exists G$, allora $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0 \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ (positività) e (2) se $\exists G$, allora $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Perché G dovrebbe servire a risolvere il problema di Dirichlet? La giustificazione non sarà del tutto rigorosa. Supponiamo che Ω sia un dominio limitato e lipschitziano, che $\exists G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ per Ω e che $u \in C^2(\bar{\Omega})$ funzione qualsiasi. La regolarità di G che è ragionevole aspettarsi, pensando a com'è definita, è che G , vista come funzione della sola \mathbf{y} , sia $C^2(\Omega \setminus \{\mathbf{x}\})$ (nel polo tenderà a $+\infty$), $C^0(\bar{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}\})$ (visto che sul bordo deve valere 0), $L^1(\Omega)$ (visto che è almeno localmente integrabile). Allora applichiamo, solo formalmente visto che non siamo certi di alcuna ipotesi, la seconda identità di Green a u e a G come funzione di \mathbf{y} .

Si ha $\int_{\Omega} u(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \langle \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), n \rangle d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \sigma) \langle \nabla u, n \rangle d\sigma$. Il terzo addendo a destra è nullo perché G è nulla sul bordo; inoltre il lato sinistro è $\int_{\Omega} u(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\int_{\Omega} u(\mathbf{y}) \delta_{\mathbf{x}} d\mathbf{y} = -u(\mathbf{x})$, dove la scrittura della delta dentro l'integrale è da considerarsi abuso di notazione. Allora si ha $u(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \langle \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), n \rangle d\sigma$ (formula di integrale per parti due volte con δ circa 1 derivata seconda di G !!). Pensando al problema $\begin{cases} \Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$, la formula scritta suggerisce che una soluzione possa essere, sotto opportune ipotesi, della forma

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g(\sigma) \langle \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), n \rangle d\sigma \quad (1)$$

Se fosse vera, con la sola difficoltà di determinare la funzione di Green si potrebbe poi calcolare facilmente la soluzione del problema per qualunque dato.¹

Il seguente teorema rende rigorose le speranze enunciate finora.

Teo (regolarità di G e rappresentazione di u)

(1) Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano

Ts: $\exists G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ funzione di Green per Ω , $G(\mathbf{x}, \cdot) \in C^2(\Omega \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap C^0(\bar{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap L^1(\Omega)$

$\forall \mathbf{x} \in \Omega$, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è continua in Ω^2 se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

(2) Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano, $u \in C^2(\bar{\Omega})$

Ts: vale $u(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \langle \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \sigma), n \rangle d\sigma$

(1) conferma le speranze sulla regolarità di G , data una certa regolarità del dominio. (2) mostra che se $u \in C^2(\bar{\Omega})$ (che in effetti sarebbe un'ipotesi della seconda identità di Green) i passaggi fatti sopra sono leciti. (2) è una formula di rappresentazione della funzione u sul dominio Ω mediante la funzione di Green.

Corollario

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u = 1$

Ts: $\int_{\partial\Omega} \frac{-\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \sigma) d\sigma = 1$

Dim E' un'applicazione immediata del teorema (2) sopra con $u = 1$. ■

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e lipschitziano con funzione di Green G , si dice nucleo di Poisson per Ω la funzione $P(\mathbf{x}, \sigma) := \frac{-\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \sigma)$.

Si ricorda che $\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \sigma) = \langle \nabla_{\mathbf{y}} G, n \rangle$: \mathbf{x} non è considerarsi una variabile, ma fissata una volta per tutte!

Dunque $\int_{\partial\Omega} P(\mathbf{x}, \sigma) d\sigma = 1$, e inoltre P è una funzione armonica nel suo primo argomento: $\Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \sigma) \right) = \Delta_{\mathbf{x}} (\langle \nabla_{\mathbf{y}} G, n \rangle) = \langle \nabla_{\mathbf{y}} (\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \sigma)), n \rangle$ (ma n è indipendente da \mathbf{x} perché n normale a $\partial\Omega$ dove sto integrando in $d\mathbf{y}$?? lo scambio degli operatori differenziali è lecito per Schwartz, essendo $G \in C^2$), ma per simmetria di G vale $\Delta_{\mathbf{x}} G = -\delta_{\sigma}$, che è nullo (perché, considerando $\delta_{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} = \sigma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, si ha che la variabile σ sta su $\partial\Omega$, mentre \mathbf{x} varia in Ω). Quindi $\Delta_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}, \sigma) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Ora il problema è passare dalla formula di (2) alla candidata formula risolutiva: sotto che ipotesi tale formula dà una soluzione del problema? Quale regolarità ha tale soluzione? In particolare, ci chiediamo quali ipotesi su f e g tale formula dà una soluzione classica del problema. Prendiamo $f = 0$, perché le ipotesi su f sarebbero molto delicate (come in effetti si è visto in un precedente corollario in cui è stata necessaria l'ipotesi $f \in C_0^2(\Omega)$, decisamente troppo forte per un dato).

Teo

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano, $P(\mathbf{x}, \sigma)$ nucleo di Poisson per Ω , $g \in C^0(\partial\Omega)$

Ts: $u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} P(\mathbf{x}, \sigma) g(\sigma) d\sigma$ è soluzione classica di
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

La formula che assegna u è proprio la candidata che si è trovata sopra, dove si è sostituito $f = 0$ e la definizione di nucleo di Poisson. Per ora non sappiamo niente sull'unicità.

E' dunque ovvio che per poter risolvere il problema è necessario calcolare P , e perciò conoscere la funzione di Green.

Costruzione della funzione di Green Esiste una teoria generale, ma noi ci occupiamo solo di alcuni casi particolarmente semplici.

Considero il semispazio: $\mathbb{R}_+^n := \{(\mathbf{x}', y) : \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}, y > 0\}$. Dato che $\Delta\Gamma = -\delta$, l'idea è costruire $G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ a partire della soluzione fondamentale $\Gamma(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$ con il cosiddetto metodo di riflessione. Si vuole $\forall \mathbf{X} \in \Omega$ $\Delta_{\mathbf{Y}}G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\delta_{\mathbf{X}}$ in Ω e $G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ se $\mathbf{Y} \in \partial\Omega$. Sappiamo già che vale $\Delta_{\mathbf{Y}}\Gamma(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = -\delta_{\mathbf{X}}$ (si è già dimostrato che $\Delta_{\mathbf{X}}\Gamma(\mathbf{X}) = -\delta_0$: se si trasla tutto nella dimostrazione si ottiene questo risultato), ma non sappiamo cosa accade sul bordo.

Fissata $\mathbf{Y} \in \partial\Omega$, considero $\mathbf{X} = (\mathbf{x}', y)$ e $\mathbf{X}^* = (\mathbf{x}', -y)$, riflessa di \mathbf{X} rispetto all'asse y . Vale $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| = \|\mathbf{X}^* - \mathbf{Y}\|$: ma poiché $\Gamma(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \ln \|\mathbf{X}\| & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \frac{1}{\|\mathbf{X}\|^{n-2}} & \text{se } n > 2 \end{cases}$ dipende dai vettori solo attraverso il loro modulo, vale $\Gamma(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \Gamma(\mathbf{X}^* - \mathbf{Y})$, per cui $\Gamma(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) - \Gamma(\mathbf{X}^* - \mathbf{Y}) = 0 \forall \mathbf{Y} \in \partial\Omega$. Allora si può prendere $G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} (\ln \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| - \ln \|\mathbf{X}^* - \mathbf{Y}\|) & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left(\frac{1}{\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^{n-2}} - \frac{1}{\|\mathbf{X}^* - \mathbf{Y}\|^{n-2}} \right) & \text{se } n > 2 \end{cases}$, che in effetti è nulla se $\mathbf{Y} \in \partial\Omega$ e il cui laplaciano in \mathbf{Y} vale $-\delta_{\mathbf{X}}$ $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Omega$ (teoricamente varrebbe $-\delta_{\mathbf{X}} + \delta_{\mathbf{X}^*}$, ma non ci può essere densità di carica in $\mathbf{X}^* \dots$?).

Si può calcolare il nucleo di Poisson per $n > 2$: poiché la derivata normale al bordo di Ω , essendo Ω il semispazio superiore, è l'opposto della derivata rispetto a y , si ha - ponendo $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ - $P(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{-\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \sigma) =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{y}=(\sigma, 0)} &= \frac{\partial}{\partial y_n} \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left(\frac{1}{\left((x'_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{1}{\left((x'_1 - y_1)^2 + \dots + (-x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{n-2}{2}}} \right) \Big|_{\mathbf{y}=(\sigma, 0)} = \\ &= \frac{-2(x_n - y_n)}{\omega_n(n-2)} \frac{2-n}{2} \frac{1}{\left((x'_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{n}{2}}} \Big|_{\mathbf{y}=(\sigma, 0)} - \frac{1}{\omega_n(n-2)} (-2) (-x_n - y_n) \frac{2-n}{2} \frac{1}{\left((x'_1 - y_1)^2 + \dots + (-x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{n}{2}}} \Big|_{\mathbf{y}=(\sigma, 0)} = \\ &= \frac{2x_n}{\omega_n \left((x'_1 - y_1)^2 + \dots + (x'_{n-1} - y_{n-1})^2 + (-x_n)^2 \right)^{\frac{n}{2}}} \Big|_{\mathbf{y}=(\sigma, 0)} = \frac{2x_n}{\omega_n (\|\mathbf{x}' - \sigma\|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}}, \text{ con } \mathbf{y} = (\sigma, 0). \end{aligned}$$

Se invece $n = 2$ $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} (\ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \ln \|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|^2) = -\frac{1}{4\pi} (\ln ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) - \ln ((x_1 - y_1)^2 + (-x_2 - y_2)^2))$ e si ha $P(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{\partial G}{\partial y_2}(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{x_2}{\pi((x_1 - \sigma)^2 + x_2^2)}$: si ritrova il nucleo di Poisson sul semipiano $k_y(x - z) = \frac{y}{\pi((x - z)^2 + y^2)}$,

dove z gioca il ruolo di σ e y gioca il ruolo di x_n : si noti che in dimensione 2 l'integrale di superficie sul bordo di Ω si riduce a un integrale semplice su \mathbb{R} , bordo del semipiano. Inoltre in senso stretto il nucleo non è $k_y(x)$, ma $k_y(x-z)$: contiene già la traslazione che in dimensione 2 è una convoluzione, e in questo è coerente con il fatto che il risultato sopra (in cui non figurano convoluzioni) è una (poderosa!) generalizzazione del risultato visto per il semipiano.¹⁶

Considero ora la sfera $B_R(\mathbf{0})$. Si riesce a scrivere la funzione di Green col metodo delle immagini, che però è piuttosto complicato. In ogni caso, il nucleo di Poisson che si ottiene è $P(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\omega_n R \|\mathbf{x} - \sigma\|^2}$, che, di nuovo, è una generalizzazione del $K(\rho, \theta - s)$ già visto per il problema di Dirichlet sul cerchio. Il nucleo per una sfera di centro \mathbf{x}_0 è invece $P(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{\omega_n R \|\mathbf{x} - \sigma\|^2}$.

Il seguente teorema particularizza il teorema x al caso della sfera, facendo uso del nucleo appena trovato.

Teo

$$\text{Hp:} \quad P(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{\omega_n R \|\mathbf{x} - \sigma\|^2} \text{ nucleo di Poisson per } B_R(\mathbf{x}_0), g \in C^0(\partial B_R(\mathbf{x}_0))$$

$$\text{Ts:} \quad u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{\omega_n R} \int_{\partial\Omega} \frac{g(\sigma)}{\|\mathbf{x} - \sigma\|^2} d\sigma \text{ è soluzione di } \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } B_R(\mathbf{x}_0) \\ u = g \text{ in } \partial B_R(\mathbf{x}_0) \end{cases}$$

Quindi la soluzione al problema di Dirichlet sulla sfera in dimensione *qualsiasi* è completamente determinata.

Dim (cenni) Per mostrare che u assume il dato al bordo con continuità si sfrutta il fatto che $P(\mathbf{x}, \sigma) > 0 \forall \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0), \sigma \in \partial B_R(\mathbf{x}_0)$ e le due proprietà mostrate sopra, che valgono per qualsiasi nucleo di Poisson: si fa una dimostrazione simile a quella già vista sul cerchio e si mostra che $u(\mathbf{x}) \rightarrow f(\sigma)$ se $\mathbf{x} \rightarrow \sigma$.

Per mostrare che $\Delta u = 0$ in Ω si calcola $\Delta_{\mathbf{x}} \left(\int_{\partial\Omega} P(\mathbf{x}, \sigma) g(\sigma) d\sigma \right) = \int_{\partial\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}, \sigma) g(\sigma) d\sigma = 0$. Lo scambio tra laplaciano e integrale è lecito per il teorema di derivabilità perché $\mathbf{x} \in \Omega$ e osservando l'espressione di P si nota che le sue derivate di qualsiasi ordine sono limitate per $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ con $r < R$, poiché σ varia in $\partial\Omega$ e $\mathbf{x} \in \Omega$: dunque la funzione integranda è maggiorabile da $kg(\sigma)$, che è integrabile su $\partial\Omega$ in quanto ivi continua. Allora $\Delta u = 0$ e $u \in C^\infty(B_R(\mathbf{x}_0))$. ■

¹⁶In realtà si sarebbe potuto usare il metodo della trasformata di Fourier, applicato per trovare il nucleo di Poisson sul semipiano, anche in \mathbb{R}^n : tuttavia le trasformate notevoli che si sono utilizzate diventano molto meno elementari in dimensione qualsiasi, e richiedono tecniche molto più avanzate.

3.8 Proprietà generali delle funzioni armoniche

Teo (media integrale per funzioni armoniche)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$, $B_R(\mathbf{x}_0) : \bar{B}_R(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega$

$$\begin{aligned} \text{Ts: (i)} \quad u(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{|B_R(\mathbf{x}_0)|_n} \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ \text{(ii)} \quad u(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{\text{area}(\partial B_R(\mathbf{x}_0))} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Si ricorda che $\text{area}(\partial B_R(\mathbf{x}_0)) = \omega_n R^{n-1}$ e $|B_R(\mathbf{x}_0)|_n = \frac{\omega_n}{n} R^n$.

Dim (ii) Dato $\bar{B}_R(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega$, considero, per $r < R$, $\phi(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\sigma) d\sigma$, e mostro che è costante.

Per fare la derivata in r più facilmente si fa un cambio di variabile che faccia sparire r dal dominio d'integrazione:

$$\sigma = \mathbf{x}_0 + rs, \text{ così che } \phi(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(\mathbf{x}_0)} r^{n-1} u(\mathbf{x}_0 + rs) ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{x}_0 + rs) ds. \text{ Allora } \phi'(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial}{\partial r} u(\mathbf{x}_0 + rs) ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{x}_0)} \langle \nabla u(\mathbf{x}_0 + rs), \mathbf{s} \rangle ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}_0 + rs) ds:$$

lo scambio iniziale tra derivata e integrale è lecito perché $|\langle \nabla u(\mathbf{x}_0 + rs), \mathbf{s} \rangle| \leq \|\nabla u(\mathbf{x}_0 + rs)\|$, che è una funzione limitata in s perché u è C^2 , e le costanti sono integrabili sui compatti. Allora si ha, per il teorema della divergenza e cambiando di

nuovo variabili all'indietro, $\phi'(r) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \text{div} \nabla u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Dunque $\phi'(r) = 0$

$\forall r < R$ e $\phi(r) = k$. Allora $\phi(R) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\sigma) d\sigma = \lim_{r \rightarrow 0^+} u(\mathbf{x}^*) = u(\mathbf{x}_0)$

per il teorema della media standard, dato che $\mathbf{x}^* \in B_r(\mathbf{x}_0)$. D'altra parte $\phi(R) = \frac{1}{\text{area}(\partial B_R(\mathbf{x}_0))} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u(\sigma) d\sigma$,

per cui si ha la tesi.

(iii) E' noto dall'integrazione in coordinate sferiche che $\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_0^R \left(\int_{\partial B_\rho(\mathbf{x}_0)} u(\sigma) d\sigma \right) d\rho = \int_0^R u(\mathbf{x}_0) \omega_n \rho^{n-1} d\rho$,

per il risultato appena dimostrato. Si ottiene quindi $\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = u(\mathbf{x}_0) \omega_n \frac{R^n}{n}$. ■

Quando si è risolto il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio, usando la formula per serie, si è ottenuta

la soluzione $u(\rho, \theta) := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$: $u(\mathbf{x}_0)$ si scrive come $u(0, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$,

che è proprio la media integrale di u su $\partial B_R(\mathbf{x}_0)$, dato che u sul bordo vale f .

Teo (principio del massimo)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, $u \in C^0(\Omega)$ soddisfa la proprietà di media in Ω ,

u ha massimo o minimo globale in Ω

Ts: u è costante

Questo intuitivamente è naturale: si pensi ad esempio alla membrana vibrante. Si noti che si sono rafforzate le ipotesi su Ω ; inoltre, se u soddisfa le ipotesi del teorema sopra allora soddisfa anche quelle di questo.

Dim Dato \mathbf{x}_0 punto di massimo globale per u in Ω e $B_R(\mathbf{x}_0) : \bar{B}_R(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega$, suppongo per assurdo che u non sia costante in $B_R(\mathbf{x}_0)$, cioè che $\exists \mathbf{x}^* \in B_R(\mathbf{x}_0)$ tale che $u(\mathbf{x}^*) < u(\mathbf{x}_0)$. Allora per permanenza del segno e continuità $\exists B_r(\mathbf{x}^*) \subseteq B_R(\mathbf{x}_0) : u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$ se $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}^*)$. Applicando la proprietà della media a $B_R(\mathbf{x}_0)$ si ha $u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|B_R(\mathbf{x}_0)|_n} \left(\int_{B_R(\mathbf{x}_0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)$: il primo addendo è minore o uguale di $u(\mathbf{x}_0) |B_R(\mathbf{x}_0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)|_n$, il secondo è minore stretto di $u(\mathbf{x}_0) |B_r(\mathbf{x}_0)|_n$. Quindi $u(\mathbf{x}_0) < \frac{1}{|B_R(\mathbf{x}_0)|_n} u(\mathbf{x}_0) (|B_R(\mathbf{x}_0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)|_n + |B_r(\mathbf{x}_0)|_n) = u(\mathbf{x}_0)$, che è assurdo. Allora u è costante in $B_R(\mathbf{x}_0)$.

Si può allora considerare un altro $B_{R'}(\mathbf{x}_0)$ che abbia intersezione non nulla con $B_R(\mathbf{x}_0)$ e si ripete il ragionamento: si conclude che in entrambi gli intorni u ha il valore costante $u(\mathbf{x}_0)$, e si procede così invadendo Ω di sfera in sfera (questo è possibile perché Ω è connesso!). Dunque u è costante in Ω . ■

Corollario 1 (principio di massimo forte)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato, $u \in C^0(\bar{\Omega})$ soddisfa la proprietà di media in Ω

Ts: u è costante, oppure assume massimo e minimo globale solo su $\partial\Omega$

Si noti che l'ipotesi di continuità su un compatto implica esistenza di massimo e minimo globale in $\bar{\Omega}$.

Dim Ci sono due casi: o esiste un punto di massimo interno a Ω , oppure tutti i punti di massimo sono in $\partial\Omega$. Nel primo caso, per il teorema sopra u è costante in Ω , e dunque anche in $\bar{\Omega}$ per continuità. Nel secondo, tutti i punti di massimo sono in $\partial\Omega$. ■

Corollario 2

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\Delta u = 0$ in Ω

Ts: $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |u(\mathbf{x})|$

Dim E' una conseguenza immediata del precedente corollario. ■

Corollario 3 (unicità della soluzione del problema di Dirichlet)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato, $\begin{cases} \Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$

Ts: la soluzione del problema in $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, se esiste, è unica

Dim Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ soluzioni del problema. $u := u_1 - u_2$ appartiene alla stessa classe e soddisfa $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$. Per il corollario sopra, $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |u(\mathbf{x})| = 0$, quindi il massimo modulo di u è 0, cioè u è nulla in tutto $\bar{\Omega}$ e $u_1 = u_2$. ■

Ne segue immediatamente il

Corollario 4 (unicità della soluzione del problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio)

$$\text{Hp: } \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } B_R(\mathbf{x}_0) \\ u = g \text{ in } \partial B_R(\mathbf{x}_0) \end{cases}$$

Ts: la soluzione del problema esiste, è unica, è assegnata

dalla formula integrale di Poisson ed è $C^\infty(B_R(\mathbf{x}_0))$

Tutte le proprietà della tesi tranne l'unicità erano già note.

Vale inoltre, per il problema di Dirichlet per il laplaciano, una proprietà di dipendenza continua delle soluzioni dai dati, spesso detta stabilità.

Teo (stabilità delle soluzioni del problema di Dirichlet)

$$\begin{aligned} \text{Hp} &: \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato, } u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \quad \begin{cases} \Delta u_1 = 0 \text{ in } \Omega \\ u_1 = g_1 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 \text{ in } \Omega \\ u_2 = g_2 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \\ \text{Ts} &: \quad \max_{\Omega} |u_1 - u_2| = \max_{\Omega} |g_1 - g_2| \end{aligned}$$

In questo caso nel problema di Dirichlet non figura l'equazione di Poisson, ma quella di Laplace: infatti il corollario al principio del massimo si applica a funzioni armoniche.

La tesi significa che una piccola perturbazione sui dati g_1, g_2 si traduce in una piccola perturbazione delle soluzioni.

$$\begin{aligned} \text{Dim } u = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \text{ e } \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = g_1 - g_2 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} &: \text{ a } u \text{ si applica il corollario 2, per cui } \max_{\Omega} |u| = \\ \max_{\partial\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|. & \blacksquare \end{aligned}$$

Teo (regolarità delle funzioni armoniche)

$$\text{Hp: } \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto, } u \in C^2(\Omega), \Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$

$$\text{Ts: } \quad u \in C^\infty(\Omega)$$

$$\text{Dim Considero } B_R(\mathbf{x}_0) : \bar{B}_R(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega: \text{ in tale palla } u \in C^2. \text{ Considero il problema di Dirichlet } \begin{cases} \Delta v = 0 \text{ in } B_R(\mathbf{x}_0) \\ v = u \text{ su } \partial B_R(\mathbf{x}_0) \end{cases}.$$

Poiché u è armonica, u è certamente una soluzione; ma poiché per il corollario 4 la soluzione esiste unica (è assegnata dalla formula di Poisson sulla sfera) ed è C^∞ , $v = u$ è l'unica soluzione, ed è $C^\infty(B_R(\mathbf{x}_0))$. Essendo $B_R(\mathbf{x}_0)$ arbitrario, $u \in C^\infty(\Omega)$. \blacksquare

Teorema inverso della media

Hp : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in C^0(\Omega)$ soddisfa la proprietà di media in Ω

Ts : $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω

Questo teorema stabilisce che vale anche l'implicazione inversa rispetto al teorema della media già visto: tale proprietà è quindi una caratterizzazione delle funzioni armoniche.

Dim E' noto che $\forall B_R(\mathbf{x}_0) : \bar{B}_R(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega$ vale la proprietà di media. Considero il problema di Dirichlet $\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ in } B_R(\mathbf{x}_0) \\ v = u \text{ su } \partial B_R(\mathbf{x}_0) \end{cases}$, la cui soluzione v esiste unica: v è armonica e C^2 , quindi soddisfa la proprietà di media. Allora anche $v - u$ soddisfa la proprietà di media, e dunque $\max_{B_R(\mathbf{x}_0)} |v - u| = \max_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} |v - u| = 0$, cioè $u = v$ in $B_R(\mathbf{x}_0)$: dunque u è armonica in $B_R(\mathbf{x}_0)$ e $C^2(B_R(\mathbf{x}_0))$. Poiché $B_R(\mathbf{x}_0)$ è arbitrario, si ha che $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω . ■

4 Equazione di diffusione del calore

Modello fisico Si pone $u(\mathbf{x}, t)$ temperatura di un corpo continuo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ al tempo t , con densità di massa $\rho(\mathbf{x}, t)$; $e(\mathbf{x}, t)$ densità di energia termica, che è pari a $c(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ densità di corrente termica, di modo che il flusso di \mathbf{q} attraverso una superficie Σ sia la quantità di calore che attraversa Σ nell'unità di tempo; $r(\mathbf{x}, t)$ tasso istantaneo di calore prodotto o sottratto in \mathbf{x} all'istante t , per unità di volume (dovuto alla presenza di una sorgente o un pozzo).

Voglio scrivere un bilancio energetico in $B_R(\mathbf{x}_0) : \bar{B}_R(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega$. In tale intorno come varia nel tempo l'energia termica? L'energia totale interna a $B_R(\mathbf{x}_0)$ è $\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} e(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} c u \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$; il suo tasso istantaneo di variazione è - ipotizzando che lo scambio sia lecito - $\frac{d}{dt} \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} e(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial}{\partial t} c u \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$. Tale tasso istantaneo è da considerarsi derivante da due fenomeni: la produzione/sottrazione di calore (A), dovuta a sorgenti o pozzi, e il calore entrante/uscente in $B_R(\mathbf{x}_0)$ (B). Vale $A = \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} r(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$, mentre $B = - \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} \langle \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}_e \rangle d\sigma = - \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \text{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$. Allora si ottiene l'equazione

$$\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial}{\partial t} c u \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} r(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \text{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

cioè $\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} c u \rho(\mathbf{x}, t) - r(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) + \text{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x}$. Usando il teorema della media in $B_R(\mathbf{x}_0)$ come già visto, se la funzione integranda è continua si ha $\frac{\partial}{\partial t} c u \rho(\mathbf{x}, t) - r(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) + \text{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0$.

Si scrive ora esplicitamente \mathbf{q} : la corrente termica è dovuta alla conduzione¹⁷, anche detta diffusione, e (nei fluidi) alla convezione¹⁸, anche detta deriva.

Il termine di diffusione è proporzionale alla differenza di temperatura, per cui $\mathbf{q} = -k\nabla u$ (il segno meno dà conto del fatto che il calore fluisce dai corpi caldi ai corpi freddi). In realtà, se il mezzo non è isotropo, potrebbe non essere $\mathbf{q}/\nabla u$, ma c'è comunque un angolo acuto tra \mathbf{q} e ∇u : dunque, nel caso più generale, $\mathbf{q} = -A(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})$, con A definita positiva. Questo termine è detto anche di diffusione.

Il termine di convezione è invece, se \mathbf{v} è la velocità del fluido, $\mathbf{q} = c_1\mathbf{v}u$. Questo termine è anche detto di trasporto, o di deriva.

Si ottiene allora nella sua forma più generale l'equazione di diffusione nell'incognita u

$$\frac{\partial c u \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(-A\nabla u + c_1\mathbf{v}u) = r\rho$$

Nel caso più semplice in cui tutti i coefficienti siano costanti e il mezzo sia omogeneo e isotropo (quindi c, c_1, k costanti, ρ costante nel tempo, \mathbf{v} costante nello spazio) si ottiene, dividendo per $c\rho$, $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{c\rho}\Delta u + \frac{c_1}{c\rho}\langle\nabla u, \mathbf{v}\rangle = \frac{r}{c}$. Rinominando i coefficienti $\frac{k}{c\rho} =: D$, detto coefficiente di diffusione, $\frac{c_1\mathbf{v}}{c\rho} =: \mathbf{b}$ e ponendo $f(\mathbf{x}, t) := \frac{r}{c}$, si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u + \langle\nabla u, \mathbf{b}\rangle = f$$

dove il secondo addendo è il termine di diffusione, il terzo quello di trasporto, il lato destro è di sorgente.

A volte con equazione del calore si intende, in senso più restrittivo, l'equazione $\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f$, spesso con sorgente nulla.

Tale modello descrive anche la diffusione di altri tipi, ad esempio di una sostanza disciolta in un'altra: in tal caso u ha il significato fisico di concentrazione. L'equazione diventa $\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u + \langle\nabla u, \mathbf{b}\rangle + \gamma u = f$, dove il termine γu (con $\gamma > 0$) rappresenta la decrescita di concentrazione dovuta a reazioni chimiche.

4.1 Problemi al contorno e ai valori iniziali per l'equazione del calore

Noi studieremo l'equazione del calore standard¹⁹

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f$$

che talora si scrive come $Hu = f$, dove H è un operatore differenziale lineare, detto operatore del calore, tale che $Hu := \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u$. $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $D > 0$.

¹⁷meccanismo di trasmissione di calore che avviene a livello microscopico a causa delle oscillazioni delle molecole

¹⁸meccanismo di trasporto del calore dovuto al moto d'insieme del fluido, che si sposta

¹⁹alla fine del corso vedremo il caso stazionario dell'equazione più generale: $-\operatorname{div}(A(\mathbf{x})\nabla u) + \langle\mathbf{b}, \nabla u\rangle + \gamma u = f$

L'equazione è del prim'ordine in t : ha senso assegnare u all'istante 0. Ne nasce un problema detto di Cauchy globale:

$$\begin{cases} Hu = f \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Se invece \mathbf{x} varia in un insieme Ω e t in $(0, T)$, si definisce $Q_T := \Omega \times (0, T)$, detto cilindro²⁰. In tal caso si possono mettere delle condizioni al contorno anche su Ω : si ottiene quindi il problema

$$\begin{cases} Hu = f \text{ in } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ con } \mathbf{x} \in \Omega \\ \text{condizione al bordo con } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in (0, T) \end{cases}$$

dove la condizione al bordo può essere $u = h$ (condizione di Dirichlet), $\frac{\partial u}{\partial n} = h$ (di Neumann), mista, $\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u = h$ (di Robin). Ne nasceranno il problema di Cauchy-Dirichlet, Cauchy-Neumann, ecc.

Si noti che le condizioni sopra sono poste non su tutto il bordo di Q_T , ma solo sulla sua base e sulla sua superficie laterale: non sul "coperchio", dato che non ha senso imporre la temperatura finale. Si dice allora frontiera parabolica²¹ il sottinsieme di ∂Q_T che è effettivamente soggetto a condizioni: $\partial_p Q_T := (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$.

Tale definizione permette una notevole sintesi del problema di Cauchy-Dirichlet: $\begin{cases} Hu = f \text{ in } Q_T \\ u = g \text{ su } \partial_p Q_T \end{cases}$.

Osserviamo - in realtà questo è valido in generale per EDP lineari a coefficienti costanti - che l'equazione del calore in \mathbb{R}^n è invariante²² per traslazioni spazio temporali: cioè, fissato (\mathbf{x}_0, t_0) , $H[u(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, t + t_0)] = (Hu)(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, t + t_0)$. Inoltre è invariante per riflessioni spaziali: $H[u(-\mathbf{x}, t)] = (Hu)(-\mathbf{x}, t)$. Non c'è invarianza per riflessioni temporali (coerentemente col fatto che la termodinamica è in genere molto sensibile alla "freccia del tempo", a differenza di altre aree della fisica): se $Hu = \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0$ e $v(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x}, -t)$, non necessariamente $Hv = 0$; vale però $\frac{\partial v}{\partial t} + D\Delta v = 0$, che è detta equazione del calore all'indietro.

4.2 Proprietà generali dell'equazione del calore

Proprio come visto per le funzioni armoniche, anche per l'equazione del calore dimostrare principi di massimo porta facilmente a risultati di unicità.

Si fanno prima alcune osservazioni intuitive sulle soluzioni dell'equazione del calore e su dove vengono assunti punti di massimo e minimo. Data $u : u_t - D\Delta u = 0$ e fissato t_0 , si osserva il grafico di $u(\mathbf{x}, t_0)$ al variare di \mathbf{x} : se in un punto di massimo \mathbf{x}^* si ha $\Delta u(\mathbf{x}^*, t_0) < 0$, si avrà anche $u_t(\mathbf{x}^*, t_0) < 0$; se in un punto di minimo \mathbf{x}^* si ha

²⁰con riferimento al caso di Ω cerchio

²¹questo nome acquisirà un senso quando si studieranno le equazioni paraboliche

²²parola scelta male?

$\Delta u(\mathbf{x}^*, t_0) > 0$, si avrà anche $u_t(\mathbf{x}^*, t_0) > 0$. Quindi, se si considera il grafico di $u(\mathbf{x}, t_0)$ al crescere di t_0 , si nota che tale grafico tende a "spianarsi" rispetto a quello iniziale: i massimi si abbassano, i minimi si sollevano (questo, fisicamente, è l'effetto della diffusione: gli estremi vengono smussati).

Considerando l'equazione del calore nel cilindro Q_T e $u : Hu = 0$ in Q_T , dove ci si aspetta che vengano assunti massimi e minimi globali? Per quanto detto sopra, non ci si aspetta che possano esserci punti di massimo o minimo interni a Q_T : aspettando un istante, si vedrebbe la temperatura scendere o salire. Per lo stesso motivo, non ci si aspetta che ci siano punti di massimo o di minimo nell'istante finale T (sul "coperchio" del cilindro). Rimane dunque la frontiera parabolica $\partial_p Q_T$.

Teo (principio del massimo per l'equazione del calore)

$$\text{Hp: } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato, } u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$$

Ts: (i) se $Hu \leq 0$ in Q_T , allora il massimo globale di u in \bar{Q}_T è assunto su $\partial_p Q_T$

(ii) se $Hu \geq 0$ in Q_T , allora il minimo globale di u in \bar{Q}_T è assunto su $\partial_p Q_T$

(iii) se $Hu = 0$ in Q_T , allora $\max_{\bar{Q}_T} |u| = \max_{\partial_p Q_T} |u|$

sarebbe meglio dire che è assunto *solo* su??

Le ipotesi sullo spazio funzionale di appartenenza di u sono quelle naturali affinché l'equazione del calore sia ben definita e i termini che vi appaiono siano continui (e quelli naturali per ambientare il problema di Cauchy-Dirichlet).

Massimo e minimo globali esistono per Weierstrass, essendo $u \in C^0(\bar{Q}_T)$.

Dim Se vale (i), allora si ottiene banalmente (ii) applicando (i) a $-u$: è sufficiente dunque mostrare (i).

L'idea della dimostrazione è procedere per assurdo: se (\mathbf{x}_0, t_0) è un punto di massimo in Q_T , per il teorema di Fermat vale $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$, e inoltre $\Delta u(\mathbf{x}_0, t_0) \leq 0$, ma allora si avrebbe $Hu \geq 0$; se si riuscisse ad avere la disuguaglianza stretta si troverebbe un assurdo. Sul "coperchio" del cilindro invece non si possono sfruttare risultati sulle derivate.

$\forall \varepsilon > 0$ pongo²³ $v_\varepsilon := u - \varepsilon t$: $v_\varepsilon \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ e studio v_ε su $Q_{T-\varepsilon}$: mostro che v_ε avrà massimo globale in $\bar{Q}_{T-\varepsilon}$, e in particolare in $\partial_p Q_{T-\varepsilon}$. Per assurdo, non sia così: (1) $\exists (\mathbf{x}_0, t_0) \in Q_{T-\varepsilon}$ punto di massimo per v_ε . Allora $Hv_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0) = Hu - \varepsilon < 0$ perché per ipotesi $Hu \leq 0$; ma $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ per Fermat, e per concavità $\Delta v_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0) \leq 0$, dal che si ottiene che $Hv_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0$, assurdo.

(2) suppongo, di nuovo per assurdo, che esista $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times \{T - \varepsilon\}$ punto di massimo per v_ε . Allora per concavità $\Delta v_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0) \leq 0$, mentre $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0$, per cui $Hv_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0$, assurdo perché $Hv_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0) = Hu - \varepsilon <$

²³il $-\varepsilon t$ serve proprio ad avere una disuguaglianza stretta quando si applica l'operatore del calore

0.

Questo significa che $\max_{Q_{T-\varepsilon}} v_\varepsilon = \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} v_\varepsilon$. Se $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $v_\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente²⁴ e quindi $\max_{\bar{Q}_T} u = \max_{\partial_p Q_T} u$.

(iii) è una conseguenza immediata di (i) e (ii). ■

La tesi che ci interessa in particolare è la terza.

Corollario (unicità della soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet)

$$\text{Hp: } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato, } \begin{cases} Hu = f \text{ in } Q_T \\ u = g \text{ su } \partial_p Q_T \end{cases}$$

Ts: la soluzione del problema nella classe $C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$, se esiste, è unica

Dim Siano u_1, u_2 soluzioni del problema nella classe $C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$. Allora $u := u_1 - u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ e soddisfa $\begin{cases} Hu = 0 \text{ in } Q_T \\ u = 0 \text{ su } \partial_p Q_T \end{cases}$: per il principio del massimo, poiché $Hu = 0$, $\max_{\bar{Q}_T} |u| = \max_{\partial_p Q_T} |u| = 0$, per cui $u_1 = u_2$. ■

Corollario (teorema di confronto)

$$\text{Hp: } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato, } u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$$

Ts: (i) se $Hu \leq 0$ in Q_T e $u \leq 0$ su $\partial_p Q_T$, allora $u \leq 0$ in Q_T

(ii) se $Hu \geq 0$ in Q_T e $u \geq 0$ su $\partial_p Q_T$, allora $u \geq 0$ in Q_T

Dim E' una conseguenza immediata delle tesi (i),(ii) del principio del massimo. ■

Teo (stabilità del problema di Cauchy-Dirichlet)

$$\text{Hp: } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato, } u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T) \text{ risolve } \begin{cases} Hu = f \text{ in } Q_T \\ u = g \text{ su } \partial_p Q_T \end{cases},$$

$$\text{Ts: } \max_{\bar{Q}_T} |u| \leq T \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$$

La tesi significa che una piccola perturbazione sui dati g, f si traduce in una piccola perturbazione della soluzione, per tempi *finiti* (se $T \rightarrow +\infty$, la stima non ha più alcuna utilità).

²⁴la successione è indicizzata su ε reale positivo che tende a 0^+ : è equivalente a considerare la successione indicizzata su n con $\varepsilon = a_n : a_n \rightarrow^{n \rightarrow +\infty} 0^+$, a_n qualsiasi.

$|v_\varepsilon - u| = \varepsilon t$: la convergenza uniforme è ovvia

Dim L'idea è applicare il teorema del confronto a due funzioni ben scelte. Considero $v_1 = u + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$: $Hv_1 = Hu + \max_{\bar{Q}_T} |f| = f + \max_{\bar{Q}_T} |f| \geq 0$ in \bar{Q}_T . Allora si può provare ad applicare il teorema del confronto a v_1 : poiché su $\partial_p Q_T$ $v_1 = g + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g| \geq g + \max_{\partial_p Q_T} |g| \geq 0$, si ha $v_1 \geq 0$ in tutto Q_T .

Considero $v_2 = -u + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$: $Hv_2 = -Hu + \max_{\bar{Q}_T} |f| = -f + \max_{\bar{Q}_T} |f| \geq 0$ in \bar{Q}_T . Su $\partial_p Q_T$ $v_2 = -g + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g| \geq -g + \max_{\partial_p Q_T} |g| \geq 0$, quindi per confronto $v_2 \geq 0$ in tutto Q_T .

Allora $\pm u + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g| \geq 0$, cioè $|u| \leq t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g| \forall t \in (0, T), \forall \mathbf{x} \in \Omega$, per cui - maggiorando t con T - si ha la tesi. ■

Si noti che tutti questi risultati non necessitano di alcuna regolarità della frontiera parabolica.

4.3 Problema di Cauchy-Dirichlet sul segmento

Ora si sceglie Ω : si cerca di risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione del calore omogenea nel caso particolare di $\Omega = [0, L]$ segmento e $t > 0$ (cioè diffusione del calore in una sbarra omogenea). Il problema è

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{se } x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

Il significato fisico della terza condizione è che gli estremi della sbarra sono termostatati. Fisicamente, ci si aspetta che i grafici $(x, u(x, t))$ all'aumentare di t si facciano sempre più "bassi" e si schiaccino sull'asse x .

Per risolvere l'equazione uso la tecnica di separazione delle variabili: suppongo esistano $X, T : u(x, t) = X(x)T(t)$ e cerco la soluzione. Se la trovo nella classe per cui vale l'unicità, non serve fare altro.

L'equazione si riscrive quindi come $XT' - DX''T = 0$ in $(0, L) \times (0, +\infty)$, che, dividendo per DXT , diventa $\frac{T'}{TD} = \frac{X''}{X}$ in $(0, L) \times (0, +\infty)$. Questo può essere vero se e solo se entrambi i lati sono costanti: si ottengono quindi due sottoproblemi

$$\begin{cases} (1) T'(t) = \lambda DT(t) & \text{in } (0, +\infty) \\ (2) X''(x) = \lambda X(x) & \text{in } (0, L) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

dove nel secondo si sono già imposte le condizioni agli estremi e $\lambda \in \mathbb{R}$ è da determinare.

Cerco una soluzione X non identicamente nulla del secondo problema. Se $\lambda > 0$, le soluzioni sono della forma $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$: $X(0) = X(L) = 0$ implica $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases}$, che se $\lambda > 0$ ha la

sola soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile. Se $\lambda = 0$, le soluzioni sono della forma $X(x) = c_1 x + c_2$: $X(0) = X(L) = 0$ implica $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile. Se $\lambda < 0$, le soluzioni sono della forma $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$: $X(0) = 0$ implica $c_1 = 0$, $X(L) = 0$ implica - escludendo la soluzione nulla - $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$, da cui $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, con $n = 1, 2, \dots$

Si è quindi determinata una successione di soluzioni $X_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ (per ora tralasciando costanti moltiplicative). La soluzione del primo problema è invece - a meno di costanti - $T(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}$. Dunque la soluzione a variabili separate determinata è

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ogni u_n , così come ogni combinazione lineare finita delle u_n $\sum_{k=1}^n c_k u_k$, risolve l'equazione differenziale e soddisfa le condizioni al bordo; ma limitandosi alle combinazioni finite non c'è speranza di soddisfare la condizione iniziale. Si considera allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L}$.

Imponendo la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = u_0(x) \quad \forall x \in (0, L)$. Si noti che questa non può essere la serie di Fourier di u_0 in $[0, L]$: il sistema trigonometrico di Fourier in $[0, L]$ comprende funzioni del tipo $\sin n\omega x$ con $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{L}$, e inoltre è una serie di soli seni sebbene a priori u_0 non sia dispari. Tuttavia, $\sin \frac{n\pi x}{L}$ è una funzione del sistema trigonometrico adattato a $[-L, L]$. Allora la cosa naturale è prolungare

u_0 per disparità in $[-L, L]$, così che $u_0^*(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ -u_0(-x) & \text{se } x \in [-L, 0] \end{cases}$: questa funzione è dispari, perciò il suo

sviluppo di Fourier sarà $u_0^*(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$, dove $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0^*(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$. Vale quindi $u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ in $[0, L]$. Dunque la candidata soluzione è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Analisi critica Occorre mostrare che la soluzione candidata risolve effettivamente l'equazione, ha qualche regolarità e assume in un qualche senso il dato al bordo.

Teo (regolarità della soluzione)

$$\text{Hp: } u_0 \in L^1((0, L))$$

Ts: (i) $\{b_n\}$ è una successione limitata

(ii) la serie che assegna u converge totalmente in ogni regione del tipo $[0, L] \times [\delta, +\infty) \quad \forall \delta > 0$; lo

stesso vale per le serie derivate termine a termine rispetto a x o t un numero qualsiasi di volte

(iii) u assegnata dalla serie è $C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$, risolve l'equazione differenziale e soddisfa le

condizioni agli estremi

Dim (i) $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$: $|b_n| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |u_0(x)| dx = \frac{2}{L} \|u_0\|_{L^1(0,L)}$.

(ii) Il termine generale della serie è, in valore assoluto, $\left| b_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L} \right|$: se $t \geq \delta$, questo è maggiorato - dato che l'esponenziale è decrescente - da $|b_n| e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}D\delta} \leq \frac{2}{L} \|u_0\|_{L^1(0,L)} e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}D\delta}$, termine generale di una serie convergente: quindi la serie che assegna u converge totalmente in ogni regione del tipo $[0, L] \times [\delta, +\infty)$. Questo implica che $\forall \delta > 0$ $u \in C^0([0, L] \times [\delta, +\infty))$, per cui $u \in C^0([0, L] \times (0, +\infty))$.

Ogni derivata rispetto a x del termine generale $b_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L}$ fa apparire un coefficiente moltiplicativo n , ogni derivata rispetto a t un coefficiente n^2 ; ma la serie di termine generale $\frac{2}{L} \|u_0\|_{L^1(0,L)} n^k e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt}$ comunque converge $\forall k$, quindi la serie di qualsiasi derivata converge totalmente in $[0, L] \times [\delta, +\infty)$, la u è derivabile infinite volte e la derivata si può calcolare derivando la serie termine a termine.

(iii) Per quanto detto sopra $u \in C^\infty([0, L] \times [\delta, +\infty)) \forall \delta$, per cui $u \in C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$. Inoltre, poiché la serie si può derivare termine a termine, $H \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} H \left(b_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = 0$, perché ogni addendo è stato trovato proprio risolvendo l'equazione.

Si noti che inoltre u è continua fino al bordo in x , quindi il dato al bordo è assunto con continuità. ■

Spesso si dice che l'equazione del calore è regolarizzante: un dato solo integrabile è sufficiente per avere una soluzione C^∞ .

Ha senso chiedersi qual è il comportamento della soluzione per tempi lunghi. Sotto le ipotesi del teorema sopra la serie che definisce u converge totalmente in $[0, L] \times [1, +\infty)$: quindi è lecito lo scambio di limite e serie e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} b_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \forall x \in [0, L]$. La velocità di convergenza è dell'ordine di $\frac{D}{L^2}$, il che è coerente con l'intuito fisico: maggiore è la conducibilità e minore la lunghezza del segmento, meno tempo impiega la temperatura ad andare a 0 in tutto il segmento.

Finora non si è parlato della condizione iniziale: sotto quali ipotesi è assunta con continuità? u dev'essere continua in $[0, L] \times [0, +\infty)$, e per ciò occorre che $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin \frac{n\pi x}{L}$ converga totalmente in $[0, L] \times [0, +\infty)$, quindi fino a $t = 0$. In $t = 0$ non si può sfruttare l'esponenziale: è sufficiente l'ipotesi che $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ converga. Per questo è sufficiente che u_0^* sia continua in $[-L, L]$, che $u_0^*(-L) = u_0^*(L)$ e u_0^* sia regolare a tratti in $[-L, L]$ (queste ipotesi implicano che la serie di Fourier di u_0^* converga totalmente). Essendo u_0^* la riflessa dispari di u_0 , tali ipotesi sono equivalenti alle seguenti richieste su u : u_0 continua in $[0, L]$ e $u_0(0) = 0$, $u_0(L) = 0$ e u_0 regolare a tratti in $[0, L]$.

Questo dimostra il seguente

Teo (condizione iniziale classica)

Hp: $u_0 \in C^0([0, L])$, $u_0(0) = u_0(L) = 0$, u_0 regolare a tratti in $[0, L]$

Ts: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} Dt} \sin \frac{n \pi x}{L}$ converge totalmente in $[0, L] \times [0, +\infty)$,

$u \in C^0([0, L] \times [0, +\infty))$ e la condizione iniziale è assunta in senso classico

La regolarità a tratti è un'ipotesi forte! L'ultima affermazione della tesi, come al solito, significa che $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0(x)$ uniformemente rispetto a x .

Come già visto per il laplaciano sul cerchio, se invece u_0 non è regolare a tratti ed eventualmente neanche continua, si può ancora dare senso alla condizione iniziale con la convergenza L^2 .

Teo (condizione iniziale in senso L^2)

Hp: $u_0 \in L^2(0, L)$

Ts : $\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, L)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$

Il dato iniziale in tal caso è assunto in senso L^2 . Si noti che con tale ipotesi vale anche il teorema sopra sulla regolarità della soluzione.

Dim Poiché $u_0 \in L^2(0, L)$, anche la sua riflessa dispari $u_0^* \in L^2(-L, L)$. Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 < +\infty$. E' noto che $u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n \pi x}{L}$, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} Dt} \sin \frac{n \pi x}{L}$, quindi ancora in senso L^2 si ha $u_0(x) - u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n \pi x}{L} \left(1 - e^{\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} Dt}\right)$. Per il teorema di Pitagora $\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, L)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \left(1 - e^{\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} Dt}\right)^2 \left\|\sin \frac{n \pi x}{L}\right\|_{L^2(0, L)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \left(1 - e^{\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} Dt}\right)^2 \frac{L}{2} \forall t > 0$. Ponendo $g_n(t) := b_n^2 \frac{L}{2} \left(1 - e^{\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} Dt}\right)^2$, si ha $|g_n(t)| \leq \frac{L}{2} b_n^2$, che è il termine generale di una serie convergente: quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$ converge totalmente e si possono scambiare limite e integrale, cioè $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, L)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} b_n^2 \left(1 - e^{\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} Dt}\right)^2 \frac{L}{2} = 0$. ■

1. Con tecniche analoghe a quelle usate si può mostrare che il problema di Cauchy per l'equazione del calore retrograda è malposto: la soluzione non dipende con continuità dalla condizione iniziale. Ad esempio, se

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} = 0 & \text{in } (0, \pi) \times (0, T) \\ u(x, 0) = \frac{\sin nx}{n} & \text{se } x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases} \quad , \text{ per separazione di variabili e notando che l'estesa dispari di } u_0(x) \text{ è}$$

già sviluppata in serie di Fourier con $b_n = \frac{1}{n}$, si ottiene che la soluzione è $u(x, t) = \frac{1}{n} e^{\frac{n^2 \pi^2 Dt}{L^2}} \sin \frac{n \pi x}{L} = \frac{1}{n} e^{n^2 t} \sin nx$. In questo caso non è vero che il massimo modulo di u può essere maggiorato dal massimo modulo di u_0 : infatti $\sup_{x \in (0, \pi)} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow^{n \rightarrow +\infty} 0$, mentre $\forall T > 0 \sup_{\substack{x \in (0, \pi) \\ t \in (0, T)}} \frac{1}{n} e^{\frac{n^2 \pi^2 Dt}{L^2}} \sin \frac{n \pi x}{L} = \frac{1}{n} e^{n^2 T} \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$.

4.4 Problema di Cauchy-Neumann sul segmento

Il problema è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ in } (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ se } x \in (0, L) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t > 0 \end{array} \right.$$

Infatti la direzione normale è proprio lungo x .

Usando di nuovo la separazione delle variabili, si cercano ancora soluzioni del tipo $u(x, t) = X(x)T(t)$. Si ottengono i sottoproblemi

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) T'(t) = \lambda T(t) \text{ in } (0, +\infty) \\ (2) X''(x) = \lambda X(x) \text{ in } (0, L) \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{array} \right.$$

dove nel secondo si è già imposta la condizione di Neumann, che stavolta riguarda le derivate, e $\lambda \in \mathbb{R}$ è da determinare.

Cerco una soluzione X non identicamente nulla del secondo problema. Se $\lambda > 0$, le soluzioni sono della forma $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$: $X'(0) = X'(L) = 0$ implica $\left\{ \begin{array}{l} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}L} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{array} \right.$, che ha la sola soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile. Se $\lambda = 0$, le soluzioni sono della forma $X(x) = c_1 x + c_2$: $X'(0) = X'(L) = 0$ implica $c_1 = 0$, quindi si ottiene la soluzione $X(x) = c_2$. Se $\lambda < 0$, le soluzioni sono della forma $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$: $X'(0) = 0$ implica $c_2 = 0$, $X'(L) = 0$ implica - escludendo la soluzione nulla - $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$, da cui $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, con $n = 1, 2, \dots$

Si è quindi determinata una successione di soluzioni $X_n(t) = \cos \frac{n\pi x}{L}$ (per ora tralasciando costanti moltiplicative). La soluzione del primo problema è invece - a meno di costanti - $T(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt}$. Dunque la soluzione a variabili separate determinata è

$$u_n(x, t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ogni u_n , così come ogni combinazione lineare finita più una costante $c_0 + \sum_{k=1}^n c_k u_k$, risolve l'equazione differenziale e soddisfa le condizioni al bordo. Si considera come al solito la serie $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L}$.

Imponendo la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ si ottiene $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = u_0(x) \quad \forall x \in (0, L)$. Si noti che questa non può essere la serie di Fourier di u_0 in $[0, L]$: il sistema trigonometrico di Fourier in $[0, L]$ comprende funzioni del tipo $\cos n\omega x$ con $\omega = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{L}$, e inoltre è una serie di soli coseni sebbene a priori u_0 non sia pari. Tuttavia, $\cos \frac{n\pi x}{L}$ è una funzione del sistema trigonometrico adattato a $[-L, L]$. Allora la cosa naturale è prolungare

u_0 per parità in $[-L, L]$, così che $u_0^*(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ u_0(-x) & \text{se } x \in [-L, 0] \end{cases}$: questa funzione è pari, perciò il suo sviluppo di Fourier sarà $u_0^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$, dove $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0^*(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$. Vale quindi $u_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ in $[0, L]$. Dunque la candidata soluzione è

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Si noti che, a differenza del problema di Neumann per il laplaciano, in questo caso aggiungendo una costante arbitraria non si ottiene un'altra soluzione: la condizione iniziale non varrebbe più.

Analisi critica Occorre mostrare che la soluzione candidata risolve effettivamente l'equazione, ha qualche regolarità e assume in un qualche senso il dato al bordo.

Teo (regolarità della soluzione)

$$\text{Hp: } u_0 \in L^1((0, L))$$

$$\text{Ts: (i) } \{a_n\} \text{ è una successione limitata}$$

(ii) la serie che assegna u converge totalmente in ogni regione del tipo $[0, L] \times [\delta, +\infty) \forall \delta > 0$; lo

stesso vale per le serie derivate termine a termine rispetto a x o t un numero qualsiasi di volte

(iii) u assegnata dalla serie è $C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$, risolve l'equazione differenziale e soddisfa le

condizioni agli estremi

Il teorema è identico a quello già visto per il problema di Cauchy-Dirichlet.

Dim E' identica a quella vista per il problema di Cauchy-Dirichlet. ■

Ha senso chiedersi qual è il comportamento della soluzione per tempi lunghi. Sotto le ipotesi del teorema sopra la serie che definisce u converge totalmente in $[0, L] \times [1, +\infty)$: quindi è lecito lo scambio di limite e serie e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_0}{2} + a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{a_0}{2} \forall x \in [0, L]$ (cioè uniformemente rispetto a x): $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) dx$ è la media integrale della temperatura iniziale. Dunque per tempi lunghi la temperatura è costante.

In che senso e sotto quali ipotesi è assunta la condizione iniziale?

Teo (condizione iniziale in senso L^2)

$$\text{Hp: } u_0 \in L^2(0, L)$$

$$\text{Ts : } \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, L)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

Il teorema è identico a quello già visto per il problema di Cauchy-Dirichlet. Il dato iniziale in tal caso è assunto in senso L^2 . Si noti che con tale ipotesi vale anche il teorema sopra sulla regolarità della soluzione.

Dim Poiché $u_0 \in L^2(0, L)$, anche la sua riflessa pari $u_0^* \in L^2(-L, L)$. Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. E' noto che $u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L}$, quindi ancora in senso L^2 si ha $u_0(x) - u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \left(1 - e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt}\right)$. Per il teorema di Pitagora $\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, L)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \left(1 - e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt}\right)^2 \left\|\cos \frac{n\pi x}{L}\right\|_{L^2(0, L)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \left(1 - e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt}\right)^2 \frac{L}{2} \forall t > 0$. Ponendo $g_n(t) := a_n^2 \frac{L}{2} \left(1 - e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt}\right)^2$, si ha $|g_n(t)| \leq \frac{L}{2} a_n^2$, che è il termine generale di una serie convergente: quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$ converge totalmente e si possono scambiare limite e integrale, cioè $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, L)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} a_n^2 \left(1 - e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt}\right)^2 \frac{L}{2} = 0$. ■

Sotto quali ipotesi la condizione iniziale è invece assunta con continuità? u dev'essere continua in $[0, L] \times [0, +\infty)$, e per ciò occorre che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L}$ converga totalmente in $[0, L] \times [0, +\infty)$, quindi fino a $t = 0$. In $t = 0$ non si può sfruttare l'esponenziale: è sufficiente l'ipotesi che $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converga. Per questo è sufficiente che u_0^* sia continua in $[-L, L]$, che $u_0^*(-L) = u_0^*(L)$ e u_0^* sia regolare a tratti in $[-L, L]$ (queste ipotesi implicano che la serie di Fourier di u_0^* converga totalmente). Essendo u_0^* la riflessa pari di u_0 , tali ipotesi sono equivalenti alle seguenti richieste su u : u_0 continua in $[0, L]$ e u_0 regolare a tratti in $[0, L]$.

Questo dimostra il seguente

Teo (condizione iniziale classica)

Hp: $u_0 \in C^0([0, L])$, u_0 regolare a tratti in $[0, L]$

Ts: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}Dt} \cos \frac{n\pi x}{L}$ converge totalmente in $[0, L] \times [0, +\infty)$,

$u \in C^0([0, L] \times [0, +\infty))$ e la condizione iniziale è assunta in senso classico

La regolarità a tratti è un'ipotesi forte! L'ultima affermazione della tesi, come al solito, significa che $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0(x)$ uniformemente rispetto a x .

Si ricorda che per il problema di Cauchy-Neumann non si è enunciato alcun teorema di unicità, per cui ad ora non è noto se la soluzione trovata sia l'unica. Vale il seguente

Teo (unicità della soluzione del problema di Cauchy-Neumann)

$$\text{Hp: } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato con frontiera regolare}^{25}, \left\{ \begin{array}{l} Hu = f \text{ in } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ con } \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial n}(L, t) = h(t) \quad \forall t \in (0, T) \end{array} \right.$$

Ts: la soluzione del problema nella classe delle $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T) : u_{x_i} \in C^0(\bar{Q}_T)$, se esiste, è unica

4.5 Problema di Cauchy globale per l'equazione del calore in \mathbb{R}^n

4.5.1 Equazione omogenea

Il problema²⁶ è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Finora non si sono visti risultati di unicità per questo tipo di problema.

Teo (unicità della soluzione del problema di Cauchy globale)

$$\text{Hp: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad \text{è il problema di Cauchy globale}$$

Ts: nella classe di funzioni $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C_b^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ la soluzione, se esiste, è unica

Segue dalla validità di un principio di massimo per la classe di funzioni che appare nella tesi, simile a quello visto per il problema di Cauchy-Dirichlet.

Quando si applica il teorema si ha anche che $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$.

Per risolvere il problema, analogamente a quanto fatto per il problema di Dirichlet nel semipiano, si usa la trasformata di Fourier. Posto $\hat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, t) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x}$ e ricordando che $\mathcal{F}(u_{x_j x_j}) = (2\pi i \xi_j)^2 \hat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi_j^2 \hat{u}(\xi, t)$, per cui $\mathcal{F}(\Delta u) = -4\pi^2 \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, t)$. Invece $\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t)$ (quest'uguaglianza varrà sotto opportune ipotesi).

Allora trasformando il problema (supponendo $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$) si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) + 4\pi^2 D \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \text{ per } \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \end{array} \right.$$

La prima equazione è un'EDO del prim'ordine nella variabile t con funzione incognita $\hat{u}(\xi, t)$; ξ è un parametro.

La soluzione è $\hat{u}(\xi, t) = c(\xi) e^{-4\pi^2 D \|\xi\|^2 t}$; imponendo la condizione iniziale si trova $c(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$. Quindi si

²⁶il dominio è di fatto un semispazio, e questo giustifica la somiglianza della tecnica usata con quella del problema di dirichlet nel semipiano

è individuata univocamente la trasformata della soluzione $\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-4\pi^2 D \|\xi\|^2 t}$. A questo punto basta antitrasformare $e^{-4\pi^2 D \|\xi\|^2 t}$.

[Diamo per noto che $\mathcal{F}(e^{-\pi \|\mathbf{x}\|^2}) = e^{-\pi \|\xi\|^2}$; poniamo $f^a(\mathbf{x}) := f(a\mathbf{x})$, $f_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^n} f(\frac{\mathbf{x}}{a})$, e ricordiamo che $\mathcal{F}(f^a(\mathbf{x})) = (\hat{f})_a$, $\mathcal{F}(f_a(\mathbf{x})) = (\hat{f})^a$. Allora si ha $\mathcal{F}(e^{-\pi \|a\mathbf{x}\|^2}) = \frac{1}{a^n} e^{-\pi \frac{\|\xi\|^2}{a^2}}$, e ponendo $A := a^2\pi$ si ottiene $\mathcal{F}(e^{-A \|\mathbf{x}\|^2}) = (\frac{\pi}{A})^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2 \frac{\|\xi\|^2}{A}}$. Dal teorema di inversione si ha infine $\mathcal{F}\left((\frac{\pi}{A})^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2 \frac{\|\xi\|^2}{A}}\right) = e^{-A \|\mathbf{x}\|^2}$.]

Ponendo $A = 4\pi^2 Dt$ si ha che $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}\left((\frac{1}{4\pi Dt})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}}\right) = e^{-4\pi^2 D \|\xi\|^2 t}$. Definiamo $k(\mathbf{x}, t) := (\frac{1}{4\pi Dt})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}}$: questa funzione prende il nome di nucleo del calore.

Allora la candidata soluzione è

$$u(\mathbf{x}, t) = k(\mathbf{x}, t) * u_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4Dt}} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Analisi critica Sotto quali ipotesi la candidata soluzione risolve effettivamente il problema?

Teo (regolarità della soluzione)

$$\text{Hp: } u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts: (i) } u \text{ assegnata dalla formula integrale è } C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$$

$$\text{(ii) } u \text{ assegnata dalla formula integrale può essere derivata scambiando derivata e integrale } \forall t > 0$$

$$\text{(iii) } u \text{ assegnata dalla formula integrale risolve l'equazione } \forall t > 0$$

Dim (i) (ii) In ogni regione del tipo $\mathbb{R}^n \times [\delta, +\infty)$ la funzione $k(\mathbf{x}, t)$ è limitata e ha derivate di ogni ordine globalmente limitate (dato che né il denominatore del primo fattore né l'esponente del secondo fattore si annullano), per cui, data $u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{1}{4\pi Dt})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4Dt}} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$, la funzione integranda può essere maggiorata $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq \delta > 0$ da $(\frac{1}{4\pi D\delta})^{\frac{n}{2}} u_0(\mathbf{y})$, che è integrabile, dal che si conclude che $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$; analogamente ogni derivata rispetto a x_i , oppure rispetto a t , può essere maggiorata da una funzione di \mathbf{y} integrabile, per cui si conclude che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ e si possono scambiare derivata (di ordine qualsiasi) e integrale.

(iii) Occorre mostrare che $Hu = 0$, cioè - dato che si possono scambiare l'operatore differenziale H e l'integrale - che $H\left((\frac{1}{4\pi Dt})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4Dt}}\right) = 0$: equivalentemente, che $H\left(\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}}\right) = 0$. Poiché la funzione argomento è radiale, si ha $(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta)\left(\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\right)\right)\left(\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}}\right)$, e si ottiene la funzione nulla per $(\rho, t) \neq (0, 0)$. ■

Dalla dimostrazione si vede quindi che anche il nucleo del calore risolve l'equazione del calore.

Occorre ora chiedersi in che senso è assunta la condizione iniziale. Osservando il grafico di $k(\mathbf{x}, t) = (\frac{1}{4\pi Dt})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}}$ al variare di t , si osserva che al diminuire di t k tende a una delta. Questo suggerisce che sia un nucleo regolarizzante, cioè del tipo $\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^n} \phi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ dove ϕ è una funzione madre da determinare: nel nostro caso ε

sembra essere \sqrt{t} e $\phi_{\sqrt{t}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^n \frac{1}{(4\pi D)^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}/\sqrt{t}\|^2}{4D}}$, per cui si avrebbe la funzione madre $\phi(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) := k(\mathbf{x}, 1) = \frac{1}{(4\pi D)^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4D}}$. Effettivamente ϕ è integrabile e positiva. Si verifica che $\int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$: è noto che $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}\left(\left(\frac{1}{4\pi D}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4D}}\right) = e^{-4\pi^2 D \|\xi\|^2}$, per cui $\int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{k}(0) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}\left(\left(\frac{1}{4\pi D}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4D}}\right)(0) = 1$. Dunque $\{k(\mathbf{x}, t)\}_{t>0}$ è una famiglia di nuclei regolarizzanti, che d'ora in poi si indicheranno con $k_{\sqrt{t}}(\mathbf{x})$ oppure $\Gamma_D(\mathbf{x}, t)$ (il significato di quest'ultima notazione sarà chiarito in seguito).

Poiché dunque $u(\mathbf{x}, t) = k_{\sqrt{t}}(\mathbf{x}) * u_0(\mathbf{x})$, per sapere in che senso è assunta la condizione iniziale si possono usare i teoremi già visti: se $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $k_{\sqrt{t}} * u_0 \rightarrow^{L^p} u_0$ per $t \rightarrow 0^+$ (se $p \in [1, +\infty)$); se inoltre $u_0 \in L^1 \cap C_*^0$, $k_{\sqrt{t}} * u_0 \rightarrow u_0$ per $t \rightarrow 0^+$ anche uniformemente (per cui il dato al bordo è assunto in senso classico). In realtà si può mostrare che per tale convergenza uniforme è sufficiente che u sia uniformemente continua.

Si noti che affinché $k_{\sqrt{t}} * u_0$ sia ben definita è sufficiente che $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, non occorre u_0 integrabile, e ciò è sufficiente per mostrare che la condizione iniziale è assunta in senso classico. Il teorema di regolarità della soluzione ha una dimostrazione che si complica notevolmente se l'ipotesi è solo $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ e non $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Queste osservazioni sono riassunte nel seguente

Teo (condizione iniziale)

$$(1) \text{ Hp: } u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n), u(\mathbf{x}, t) = k_{\sqrt{t}}(\mathbf{x}) * u_0(\mathbf{x})$$

Ts: (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ e risolve l'equazione per $t > 0$

$$(ii) \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0^+$$

$$(2) \text{ Hp: } u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_*^0(\mathbb{R}^n), u(\mathbf{x}, t) = k_{\sqrt{t}}(\mathbf{x}) * u_0(\mathbf{x})$$

$$\text{Ts: } u(\cdot, t) \rightarrow u_0 \text{ uniformemente per } t \rightarrow 0^+$$

Come si comporta la soluzione per tempi lunghi? Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, poiché $u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4Dt}} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$, $|u(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \forall \mathbf{x}, t$, e il lato destro tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, t)| = 0$, cioè u tende a 0 uniformemente per $t \rightarrow +\infty$. In questo caso $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ non è più un'ipotesi di comodo, come è stata sopra per dimostrare che u era soluzione del problema, ecc.: se si chiede solo $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, per quanto u sia ancora soluzione del problema, non è più vero che u tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

1. Se $u_0(\mathbf{x}) = 1$, $u(\mathbf{x}, t) = 1$ risolve il problema (ed è l'unica soluzione, in quanto appartenente alla classe per cui vale il teorema di unicità), è continua e limitata ma non integrabile, e infatti non tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

4.5.2 Equazione del calore non omogenea in \mathbb{R}^n

Il problema è

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

E' quindi presente il termine di sorgente $f = f(\mathbf{x}, t)$: poiché si fornisce (o toglie) calore dall'esterno, in generale non c'è motivo per cui la temperatura debba tendere a zero per tempi lunghi.

Essendo l'equazione lineare, si applica il principio di sovrapposizione degli effetti: la soluzione del problema è somma delle funzioni u_1, u_2 , dove u_1 e u_2 risolvono ciascuna un sottoproblema:

$$(1) \begin{cases} Hu_1 = f \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u_1(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} ; (2) \begin{cases} Hu_2 = 0 \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u_2(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

In generale, il principio di sovrapposizione permette di dividere il problema in vari sottoproblemi, in ciascuno dei quali tutti i dati sono nulli eccetto uno. Si è già studiato come risolvere (2), quindi affrontiamo (1).

Per risolvere (1) $\begin{cases} Hu = f \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ usiamo due metodi indipendenti.

Metodo della trasformata Procede proprio come si è visto per l'equazione omogenea. Posto $\hat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, t) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x}$ e ricordando che $\mathcal{F}(\Delta u) = -4\pi^2 \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, t)$, mentre $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t)$ (quest'uguaglianza varrà sotto opportune ipotesi), $\hat{f}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, t) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x}$ (se $f \in L^1$), trasformando il problema (supponendo $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) + 4\pi^2 D \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t) \text{ per } \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = 0 \text{ per } \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

L'equazione è un'EDO lineare del prim'ordine non omogenea nell'incognita $\hat{u}(\xi, t)$ e nella variabile t . La soluzione è $\hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 D \|\xi\|^2 t} \left(c(\xi) + \int_0^t e^{4\pi^2 D \|\xi\|^2 s} \hat{f}(\xi, s) ds \right)$; imponendo la condizione iniziale si trova $c(\xi) = 0$. La soluzione quindi si può scrivere come $\hat{u}(\xi, t) = \int_0^t e^{-4\pi^2 D \|\xi\|^2 (t-s)} \hat{f}(\xi, s) ds$, che può essere vista come una specie di convoluzione nella variabile t : il primo fattore della funzione integranda è proprio la trasformata del nucleo del calore valutata in $t - s$. Quindi la funzione integranda può essere riscritta come $\mathcal{F}(\Gamma_D(\cdot, t-s) * f(\cdot, s))(\xi)$. Scambiando trasformata e integrale si ottiene $\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}\left(\int_0^t \Gamma_D(\cdot, t-s) * f(\cdot, s) ds\right)$. Antitrasformando ed esplicitando anche la seconda convoluzione si ottiene infine la candidata soluzione di (1)

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} \right) ds$$

Questa formula assomiglia a quella già vista per (2): invece di avere solo una convoluzione in spazio del nucleo del calore con la condizione iniziale, si ha una convoluzione in spazio e in tempo (detta convoluzione finita, cf. trasformata di Laplace).

Usando la soluzione già nota di (2) si ottiene quindi la candidata soluzione del problema complessivo

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} \right) ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Mentre nel secondo addendo, come già visto, è facile derivare sotto il segno di integrale per $t > 0$ (perché se t non si annulla si ottengono derivate globalmente limitate), nel primo addendo la cosa è molto più delicata, perché si integra con s che varia da 0 fino a t , e quindi $\Gamma_D \forall t$ viene calcolata anche per tempi molto piccoli ed è illimitata. Per ora non facciamo l'analisi critica della soluzione trovata e studiamo invece il secondo metodo.

Metodo di Duhamel Questo metodo si usa per le equazioni di evoluzione a coefficienti costanti e serve per costruire soluzioni di equazioni non omogenee, con dato iniziale nullo, quando si sa risolvere il problema di Cauchy per le equazioni omogenee.

Supponiamo che la funzione $w(\mathbf{x}, t, s)$, dove s è un parametro, sia soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > s \\ w(\mathbf{x}, s, s) = f(\mathbf{x}, s) \end{cases}$$

Allora $u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t w(\mathbf{x}, t, s) ds$ risolve il problema iniziale $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \end{cases}$. Verifichiamo, solo formalmente, che u così definita risolve il problema.

Se $u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t w(\mathbf{x}, t, s) ds$, $\Delta u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \Delta w(\mathbf{x}, t, s) ds$ (supponendo di poter scambiare laplaciano e integrale sotto opportune ipotesi), mentre $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{x}, t, s) ds$ (approf): quindi $\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = w(\mathbf{x}, t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{x}, t, s) ds - D \int_0^t \Delta w(\mathbf{x}, t, s) ds$, e la somma di secondo e terzo addendo è nulla perché l'integranda è nulla, per le ipotesi su w . Allora $\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = w(\mathbf{x}, t, t) = f(\mathbf{x}, t)$, e inoltre $u(\mathbf{x}, 0) = 0$ dato che u è definita come integrale.

Nel nostro caso particolare, chi è $w(\mathbf{x}, t, s)$? E' sufficiente applicare la formula già vista per la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione omogenea, con un'unica accortezza: l'istante iniziale è s . Ma poiché l'equazione del calore è invariante per traslazioni temporali, la soluzione andrà valutata in $t - s$ (istante che si deve annullare nell'istante iniziale $t = s$). Dunque $w(\mathbf{x}, t, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$, e si ha infine

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} \right) ds$$

che è la stessa soluzione trovata col metodo della trasformata di Fourier.

Analisi critica: soluzione fondamentale E' ora il momento di fare un'analisi critica e mostrare rigorosamente se e in quale senso la candidata soluzione risolve il problema. Per trattare il già menzionato problema dovuto al fatto che s non è discosto da 0 nell'integrale che definisce u occorre studiare il nucleo del calore da un punto di vista distribuzionale.

Γ_D si può vedere come soluzione distribuzionale del problema di Cauchy
$$\begin{cases} H\Gamma_D = 0 \text{ per } t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \Gamma_D(\cdot, 0) = \delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases}.$$
 $\Gamma_D(\cdot, 0) = \delta_0$ significa che $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{y}, t) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \phi(0)$ (l'uguaglianza non può essere intesa come uguaglianza vera e propria: anche volendo considerare la distribuzione associata a Γ_D , essa per $t = 0$ non è ben definita). Sappiamo già che per $t > 0$ Γ_D risolve l'equazione in senso classico e anche distribuzionale. La seconda uguaglianza è vera perché sappiamo che se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_*^0(\mathbb{R}^n)$, allora il problema
$$\begin{cases} Hu = 0 \text{ per } t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$
 ha soluzione assegnata da $u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Ma, data $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_*^0(\mathbb{R}^n)$, prendendo $\phi(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ si ha che $u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$, e in particolare $u(\mathbf{0}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(-\mathbf{y}, t) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ (che è uguale a $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{y}, t) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$: si osservi l'espressione analitica di Γ_D): si sa che $u(\mathbf{x}, t)$ converge uniformemente a u_0 per $t \rightarrow 0^+$, e quindi in particolare se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(-\mathbf{y}, t) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = u_0(\mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0})$.

Quindi il nucleo del calore ha il significato di temperatura che si ha nello spazio, in assenza di sorgenti esterne, supponendo che il profilo iniziale della temperatura sia un impulso.

Finora il tempo, nell'espressione analitica di Γ_D , si è considerato come parametro: ma per discutere la candidata formula risolutiva, che è una sorta di convoluzione in spazio e tempo, occorre vedere Γ_D come soluzione fondamentale dell'equazione del calore in \mathbb{R}^{n+1} , cioè tale che $H\Gamma_D = \delta_0$. Come al solito, se Γ_D è intesa come distribuzione si ha $H\Gamma_D(\phi) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\right)\Gamma_D(\phi) = \Gamma_D\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi\right) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi\right)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}dt$.

Per far questo naturalmente serve che Γ_D sia definito in \mathbb{R}^{n+1} , quindi anche per tempi negativi: si pone
$$\Gamma_D(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}} & \text{se } t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Teo (soluzione fondamentale dell'equazione del calore)

$$\text{Hp: } u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^{n+1}} u(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi\right)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}dt = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$\text{Ts: } \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \text{ risolve l'equazione, cioè } H\Gamma_D = \delta_0$$

Dim Si dimostra una tesi più forte, cioè che $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi\right)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}dt = \phi(0) \quad \forall \phi \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Per definizione di Γ_D $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi\right)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi\right)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}dt$.

Divido l'integrale in dt in due integrali $\int_0^\varepsilon dt$ e $\int_\varepsilon^{+\infty} dt$, che chiamo rispettivamente A_ε e B_ε .

Dico che $A_\varepsilon \rightarrow^{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$. Infatti $|A_\varepsilon| = \left| \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi \right)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \right| \leq \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \left| \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi \right)(\mathbf{x}, t) \right| d\mathbf{x} dt$ ma per le ipotesi su ϕ il secondo fattore nella funzione integranda è continuo a supporto compatto in \mathbb{R}^{n+1} , per cui, usando anche le proprietà del nucleo regolarizzante Γ_D , $|A_\varepsilon| \leq \max_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} + D\Delta_{\mathbf{x}}\phi \right| \int_0^\varepsilon 1 dt = \varepsilon \max_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} + D\Delta_{\mathbf{x}}\phi \right| \rightarrow^{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$. Allora $H\Gamma_D(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} B_\varepsilon$.

Invece $B_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} - D\Delta_{\mathbf{x}}\phi \right)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$: poiché t è discosto da 0, si può integrare per parti nella variabile t e riportare le derivate su Γ_D . Il primo addendo è $\int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \frac{-\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = \int_{\mathbb{R}^n} [-\Gamma_D(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t)]_{t=\varepsilon}^{t=+\infty} d\mathbf{x} + \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$, cioè - essendo ϕ a supporto compatto - $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \phi(\mathbf{x}, \varepsilon) d\mathbf{x} + \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$. Il secondo addendo è semplicemente $\int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} -D\Delta_{\mathbf{x}}\Gamma_D(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$.

Allora $B_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} H\Gamma_D(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \phi(\mathbf{x}, \varepsilon) d\mathbf{x}$: il primo addendo è nullo perché $H\Gamma_D(\mathbf{x}, t) = 0 \forall t > 0$. Quindi $H\Gamma_D(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \phi(\mathbf{x}, \varepsilon) d\mathbf{x}$. Si riscrive l'integrale come $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, \varepsilon) (\phi(\mathbf{x}, \varepsilon) - \phi(\mathbf{x}, 0)) d\mathbf{x} = C_\varepsilon + D_\varepsilon$. Per il teorema di Lagrange $|\phi(\mathbf{x}, \varepsilon) - \phi(\mathbf{x}, 0)| \leq \max_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} \phi| \varepsilon$, quindi $|D_\varepsilon| \leq \varepsilon \max_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} \phi| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$.

Ma $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(-\mathbf{x}, \varepsilon) \phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(-\mathbf{y}, \varepsilon) \phi(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}$ può essere vista come soluzione classica del problema di Dirichlet con condizione iniziale $u_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0)$ e valutata in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$: poiché questa è $L^1 \cap C_*^0$, la soluzione classica converge uniformemente al dato iniziale per $t = \varepsilon \rightarrow 0^+$, e quindi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(-\mathbf{y}, \varepsilon) \phi(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y} = \phi(\mathbf{0})$. ■

L'ultimo passaggio della dimostrazione è proprio quanto mostrato sopra: $\Gamma_D(\cdot, t) \rightarrow \delta_0$ per $t = \varepsilon \rightarrow 0^+$. Si è ottenuto quindi che $H\Gamma_D(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0})$.

Ora si può mostrare rigorosamente che la candidata soluzione trovata, solo formalmente, con il metodo della trasformata di Fourier e il metodo di Duhamel risolve il problema.

Corollario (soluzione dell'equazione del calore non omogenea)

$$\text{Hp:} \quad f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$$

$$\text{Ts:} \quad u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \text{ risolve } \begin{cases} Hu = f \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Se la condizione iniziale è non nulla basta sommare la solita soluzione dell'omogenea. Le ipotesi su f sono molto forti.

Dim Vogliamo ovviamente applicare il teorema sopra. Con un cambio di variabili si ha $u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_D(\mathbf{y}, s) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) d\mathbf{y} ds$ (lo scambio tra H e integrale è lecito perché f è a supporto compatto e quindi $|\Gamma_D(\mathbf{y}, s) H_{\mathbf{x}, t} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)| \leq k\Gamma_D(\mathbf{y}, s)$, che è integrabile?). Per applicare il teorema occorre però che le operazioni sulla funzione test f avvengano nelle stesse variabili in cui si integra: poiché

$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) = -\frac{\partial}{\partial s} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$ e $\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) = \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$, si ha $Hu(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_D(\mathbf{y}, s) \left(\frac{-\partial}{\partial s} - D\Delta_{\mathbf{y}} \right) (f)$
Definendo $H^* = \frac{-\partial}{\partial s} - D\Delta_{\mathbf{y}}$ e $F(\mathbf{y}, s) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$, per il teorema sopra si ha $Hu(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_D(\mathbf{y}, s) H^* F(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds =$
 $F(\mathbf{0}, 0) = f(\mathbf{x}, t)$, che è la tesi. ■

5 Equazione del trasporto lineare in una dimensione

Nel corso della deduzione fisica dell'equazione del calore si è arrivati all'equazione di bilancio $\frac{\partial}{\partial t}(cu\rho) + \text{div}\mathbf{q} = r\rho$:
d'ora in poi però u avrà il significato fisico di concentrazione (di una sostanza disciolta in un'altra), ρ di densità, r di
tasso istantaneo di quantità di materia immersa, \mathbf{q} di densità di corrente. Al contrario di scrivere \mathbf{q} rintracciandone
le due diverse fonti come si era fatto per l'equazione del calore, si suppone che non ci sia diffusione, ma solo deriva,
per cui $\mathbf{q} = \mathbf{q}(u)$. Facendo le solite ipotesi semplificatrici si ricava l'equazione del trasporto

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \text{div}\mathbf{q}(u) = f$$

In base alla relazione tra \mathbf{q} e u si ottengono vari sottomodelli, che prendono nomi diversi. A noi interessa il caso
di $\mathbf{q}(u) = \mathbf{b}u$: si ottiene l'equazione del trasporto lineare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} u \rangle = f$$

Come al solito il gradiente si suppone fatto rispetto alle coordinate spaziali. Il lato sinistro è il termine di deriva,
il lato destro quello di sorgente. Nel caso in cui si voglia considerare anche il termine di reazione si ha l'equazione
 $\frac{\partial u}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} u \rangle + \gamma u = f$ (che non cambia molto la soluzione), con $\gamma > 0$.

5.1 Equazione del trasporto omogenea

Considero l'equazione del trasporto omogenea in una dimensione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

nell'incognita $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Il lato sinistro dell'equazione può essere visto come derivata direzionale di u : se $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ è soluzione
dell'equazione, allora è costante lungo le linee $x - vt = \xi$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Questa osservazione permette di determinare
l'integrale generale dell'equazione.

Sia $\xi \in \mathbb{R}$ fissato, $x : x = \xi + vt$ (cioè su una delle rette menzionate) e $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ soluzione dell'equazione. Allora
 $u(x, t) = u(\xi + vt, t) =: U(t)$ è costante in t : infatti $U'(t) = \left\langle \nabla u(\xi + vt), \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = v \frac{\partial u}{\partial x}(\xi + vt) + \frac{\partial u}{\partial t}(\xi + vt) =$

0 poiché u è soluzione. Dunque in particolare $U(t) = U(0) \forall t > 0$: quindi $\exists g \in C^1(\mathbb{R}) : U(t) = u(\xi, 0) =: g(\xi) \in C^1(\mathbb{R})$, che ha il significato di condizione iniziale.

Allora si può ricavare la soluzione: $u(x, t) = g(x - vt) \forall x, t$. Si è dimostrato che $\forall u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ soluzione dell'equazione $\exists g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in C^1(\mathbb{R}) : u(x, t) = g(x - vt) \forall x \in \mathbb{R}, t > 0$; inoltre $u(x, 0) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Viceversa, se $\forall g \in C^1(\mathbb{R})$ si definisce $u(x, t) := g(x - vt)$, allora $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e u risolve l'equazione. Infatti $\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -vg'(x - vt) + vg'(x - vt) = 0$, e $u(x, 0) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Si è dimostrato il seguente

Teo (integrale generale dell'equazione lineare del trasporto omogenea)

$$\text{Hp: } u_t + vu_x = 0$$

Ts: (i) l'integrale generale dell'equazione è dato da $u(x, t) = g(x - vt)$ al variare di $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $C^1(\mathbb{R})$

$$(ii) \text{ se } g \in C^1(\mathbb{R}) \text{ la soluzione del problema di Cauchy } \begin{cases} u_t + vu_x = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ esiste, è}$$

unica nella classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ ed è data da $u(x, t) = g(x - vt)$

Quindi se si ha una condizione iniziale C^1 si ottiene una soluzione C^1 , cioè la soluzione ha la stessa regolarità della condizione iniziale: l'equazione del trasporto, a differenza dell'equazione del calore, non regolarizza. Questa è una conseguenza negativa del fatto che ha permesso di risolvere l'equazione così facilmente: la presenza di rette lungo cui la soluzione u è costante, di modo che il valore della u all'istante 0, cioè l'informazione della condizione iniziale, viaggia nello spaziotempo lungo queste rette (che prenderanno il nome di rette caratteristiche). Ovviamente da questo segue che u , non essendo altro che una traslata di g lungo tali rette, non potrà essere più regolare di g .

Il problema di Cauchy omogeneo in dimensione qualsiasi è

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla u \rangle = 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

La situazione è del tutto analoga all'equazione unidimensionale: si mostra che $u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ proprio come sopra.

5.2 Equazione non omogenea

Per risolvere il problema non omogeneo si sfrutta come al solito la sovrapposizione degli effetti e si risolve

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

con il metodo di Duhamel. Sia $w(x, t, s)$ soluzione di $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > s \\ w(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}$: allora $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$ risolve il problema (1). Formalmente, si ha in effetti $u(x, 0) = 0$, e $\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(x, t, s) ds + w(x, t, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(x, t, s) ds + f(x, t)$, mentre $\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} w(x, t, s) ds$, per cui $\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$.

Nel nostro caso $w(x, t, s) = f(x - v(t - s), s)$, per cui la candidata soluzione è $u(x, t) = \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds$. Quali ipotesi fare su f affinché u sia davvero soluzione? Per dimostrare ciò agevolmente vorremmo poter scambiare derivata e integrale per scrivere che $u_x(x, t) = \int_0^t f_x(x - v(t - s), s) ds$, quindi è sufficiente che $f_x \in C^0(\mathbb{R}^2)$ (e ovviamente $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$): in tal caso f_x è limitata in $[0, t]$ e dunque maggiorata da una costante integrabile. Così si ha anche $u_t = f(x, t) - v \int_0^t f_x(x - v(t - s), s) ds$, per cui $u_t + vu_x = f(x, t) - v \int_0^t f_x(x - v(t - s), s) ds + v \int_0^t f_x(x - v(t - s), s) ds$. Questo dimostra il seguente

Teo (soluzione dell'equazione unidimensionale non omogenea)

$$\begin{aligned} \text{Hp: } f \in C^0(\mathbb{R}^2), \exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R}^2) \\ \text{Ts: (i) la soluzione di } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \text{ è data da } u(x, t) = \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds \\ \text{(ii) la soluzione di } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \text{ è data da } u(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds \\ \text{ed è unica in } C^1(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

L'unicità è una conseguenza immediata dell'unicità della soluzione per l'equazione omogenea.

Se in particolare $f(x, t) = \psi(t)$ e $g = 0$, $\int_0^t f(x - v(t - s), s) ds = \int_0^t \psi(s) ds = u(t)$: la soluzione è indipendente da x e risolve $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(t)$. Lo stesso accade se si aggiunge anche il termine di reazione.

Il caso di $f(x, t) = \phi(x)$ è trattato nel seguente

Teo (soluzione del problema di Cauchy con sorgente indipendente da t)

$$\begin{aligned} \text{Hp: } f \in C^0(\mathbb{R}^2), \exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R}^2), f(x, t) = \phi(x), \phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_*^0(\mathbb{R}) \\ \text{Ts: la soluzione di } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \phi(x) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \text{ è data da } u(x, t) = \int_0^t \phi(x - vs) ds \\ \text{e } F(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) \text{ risolve l'equazione stazionaria } vu_x = \phi \end{aligned}$$

Dim Se $f(x, t) = \phi(x)$ e $g = 0$, per il teorema sopra $u(x, t) = \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds = \int_0^t \phi(x - v(t - s)) ds =$

²⁷ $\int_0^t \phi(x - vs) ds$. $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \int_0^{+\infty} \phi(x - vs) ds =: F(x)$ (ben definita perché $\phi \in L^1(\mathbb{R})$): questo limite è una soluzione del problema stazionario $\begin{cases} v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$. Infatti $F'(x) = \int_0^{+\infty} \phi'(x - vs) ds = \int_0^{+\infty} \phi'(t - x + vs) ds = \int_0^{+\infty} \phi'(t) dt = \frac{1}{v} (\phi(x) - \phi(+\infty))$, e il secondo addendo è nullo perché $\phi \in C_*^0(\mathbb{R})$, per cui $vF'(x) = \phi(x)$. ■

5.3 Equazione con termine di reazione

Cosa cambia se si considera il problema $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = f(x, t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ con $\gamma > 0$? La soluzione cambia di poco perché γu rappresenta una piccola perturbazione: è un'idea che formalizzeremo bene più avanti, ma in ogni equazione c'è sempre una parte principale, che determina il tipo di equazione, e dei termini di ordine inferiore (ad esempio i termini u quando sono presenti le derivate di u) che non alterano in modo significativo la soluzione. γu rientra in quest'ultimo caso.

Per risolvere l'equazione suppongo²⁸ che u sia costante in x e risolvo $u_t + \gamma u = 0$: $u(t) = ce^{-\gamma t}$. Allora è ragionevole supporre che la soluzione dell'equazione originaria sia del tipo $u(x, t) = e^{-\gamma t} w(x, t)$: dal punto di vista fisico, la presenza del termine di reazione fa sì che la concentrazione della sostanza tenda a 0 per $t \rightarrow +\infty$. Allora riscrivo l'equazione e risolvo in w : $u_t = e^{-\gamma t} (w_t - \gamma w)$, $u_x = e^{-\gamma t} w_x$, quindi $\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = e^{-\gamma t} (w_t - \gamma w) + ve^{-\gamma t} w_x + \gamma e^{-\gamma t} w = e^{-\gamma t} (w_t + vw_x)$; invece $u(x, 0) = w(x, 0)$. Si è quindi ottenuto il problema

$$\begin{cases} w_t + vw_x = e^{\gamma t} f \\ w(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Si è quindi trasformato un problema nuovo in un problema noto. La soluzione è $w(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t e^{\gamma s} f(x - v(t - s), s) ds$, per cui la formula risolutiva del problema originario (trasporto con reazione e sorgente) è

$$u(x, t) = e^{-\gamma t} g(x - vt) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f(x - v(t - s), s) ds$$

Se in particolare $f = 0$, la soluzione è l'onda viaggiante g smorzata esponenzialmente (trasporto con estinzione progressiva).

Tutto si generalizza al caso n -dimensionale $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla u \rangle + \gamma u = f(\mathbf{x}, t) \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \end{cases}$: la soluzione è $u(\mathbf{x}, t) = e^{-\gamma t} g(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - s), s) ds$, sempre con le stesse ipotesi.

²⁷ Il passaggio è giustificato dal fatto che $\int_0^t h(t - s) ds = \int_t^0 -h(z) dz = \int_0^t h(z) dz$.

²⁸ Si potrebbe anche supporre u costante in t e risolvere supponendo $u(x, t) = e^{-\frac{\gamma}{v}x} w(x, t)$: facendo passaggi simili si otterrebbe un risultato analogo

5.4 Soluzioni deboli

Si è già osservato che le ipotesi da fare sui termini noti del problema di Cauchy ($g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$) per l'equazione del trasporto sono piuttosto forti, e l'equazione non è regolarizzante. E' del tutto ragionevole chiedersi se ha senso risolvere il problema quando f e g sono meno regolari di quanto richiesto da tali ipotesi. Si noti che il problema è diverso da quanto osservato per le ipotesi sovrabbondanti per il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio dovute all'uso della serie di Fourier: in questo caso si sono fatti passaggi obbligati, e non è possibile che esista una soluzione $u \in C^2(\mathbb{R})$ con g meno regolare di $C^1(\mathbb{R})$. Quello che ci si sta chiedendo è quindi se si possa *indebolire* il concetto di soluzione, dando una nuova definizione di soluzione di un'equazione differenziale.

L'idea naturale per trovare una nuova definizione è partire dall'equazione, trasformarla in un'identità integrale e vedere se essa può essere ben definita anche con una minore regolarità di f e g .

Suppongo quindi che f e g siano regolari come sopra e considero $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Moltiplico entrambi i lati dell'equazione per una funzione test ben scelta $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $\phi = \phi(x, t)$ (che quindi ha supporto contenuto in $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$) e integro in $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$: $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x, t) (u_t + vu_x)(x, t) dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \phi(x, t) dx dt$. Integro per parti per scaricare le derivate su ϕ .

Il primo addendo è $\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \phi(x, t) u_t(x, t) dt dx = \int_{\mathbb{R}} \left([\phi u]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} u(x, t) \phi_t(x, t) dx \right) dt = - \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u(x, 0) dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \phi_t(x, t) dx dt$, perché ϕ è a supporto compatto.

Il secondo addendo è $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x, t) u_x(x, t) dx dt = \int_0^{+\infty} \left([\phi u]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \phi_x(x, t) dx \right) dt = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \phi_x(x, t) dx dt$ perché ϕ è a supporto compatto.

Si è quindi ottenuta l'uguaglianza

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u(x, t) (\phi_t + v\phi_x)(x, t) + f(x, t) \phi(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) g(x) dx = 0$$

Si è dimostrato che se $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ soluzione classica del problema di Cauchy come sopra, allora $\forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vale tale uguaglianza. Quali sono le ipotesi minime da fare su f , g e u affinché essa sia sensata? Basta che $f, u \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Questo giustifica la seguente definizione.

Def Date $f, u \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, si dice che u è soluzione debole del problema di Cauchy $\begin{cases} u_t + vu_x = f \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ se $\forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vale $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u(x, t) (\phi_t + v\phi_x)(x, t) + f(x, t) \phi(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) g(x) dx = 0$.

Si è effettivamente definito un concetto di soluzione che richiede ai dati poca regolarità. Tutti i passaggi sopra dimostrano quindi che se u è soluzione classica allora è anche soluzione debole.

Teo (una soluzione classica è anche soluzione debole)

Hp : $g \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty)), \exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty)); u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ è

$$\text{soluzione classica di } \begin{cases} u_t + vu_x = f \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ts : u è soluzione debole dello stesso problema

Viceversa, se i dati del problema sono molto regolari, una soluzione debole è anche classica.

Teo (con sufficiente regolarità, una soluzione debole è anche soluzione classica)

Hp: $g \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty)); u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ è

$$\text{soluzione debole di } \begin{cases} u_t + vu_x = f \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ts: u è soluzione classica dello stesso problema

Si noti che non occorre l'ipotesi $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

Dim Applico la definizione di soluzione debole in particolare alle $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$: quindi vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u(x, t)(\phi_t + v\phi_x)(x, t) + f(x, t)\phi(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)g(x) dx = 0 \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$$

In primo luogo occorre mostrare che $u_t + vu_x = f$ per $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Poiché $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, $\phi(x, 0) = 0$ e si ha $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u(x, t)(\phi_t + v\phi_x)(x, t) + f(x, t)\phi(x, t)] dx dt = 0$. Per la regolarità di u e ϕ si può integrare per parti all'indietro: $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x, t)(\phi_t + v\phi_x)(x, t) dx dt = -\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x, t)(u_t + vu_x)(x, t) dx dt$, quindi l'uguaglianza originaria diventa $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x, t)(f(x, t) - (u_t + vu_x)(x, t)) dx dt = 0 \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. Per il teorema di annullamento, essendo $f - (u_t + vu_x) \in C^0$, si ha $f(x, t) - (u_t + vu_x)(x, t) = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Mostro che $u(x, 0) = g(x)$. Considerando in particolare la funzioni test a supporto in $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, stavolta si ha anche il termine di bordo: $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u(\phi_t + v\phi_x) + f\phi] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)g(x) dx = 0$. Integrando per parti si ha $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x, t)(\phi_t + v\phi_x)(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}} [u(x, t)\phi(x, t)]_{t=0}^{t=+\infty} dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x, t)(u_t + vu_x)(x, t) dx dt$.

Sostituendo si ottiene $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(f - (u_t + vu_x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)(g(x) - u(x, 0)) dx = 0 \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

Il primo addendo è nullo per quanto detto sopra: si ha quindi $\int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)(g(x) - u(x, 0)) dx = 0 \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, cioè come sopra $g(x) = u(x, 0)$. ■

Ora è naturale domandarsi se il concetto di soluzione debole abbia effettivamente introdotto nuove soluzioni: cioè le soluzioni deboli quando u, f, g non sono molto regolari.

Teo

Hp: $g \in L^\infty(\mathbb{R}), f \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

Ts: $u(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds$ è soluzione debole di
$$\begin{cases} u_t + vu_x = f & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6 Equazione delle onde

Vedremo che l'equazione delle onde assume significati fisici molto diversi a seconda della dimensione in cui si lavora: a differenza delle equazione già viste, non è affatto facile elaborare una teoria generale che funzioni in dimensione qualsiasi.

6.1 Equazione della corda vibrante

Modello fisico Considero una corda sottile, elastica, tesa e perfettamente flessibile che vibra in un piano verticale. Si indica con $u(x, t)$ la funzione il cui grafico, a t fissato, rappresenta la forma della corda. Si suppone che i punti della corda oscillino solo verticalmente, e che le forze agenti siano solo la tensione della corda (la tensione all'istante t nel punto $(x, u(x, t))$ si indica con $\tau(x, t)$) e un carico dall'esterno, e. g. il peso. Si indica con $\rho(x, t)$ la densità lineare di massa della corda, e con $\rho_0(x)$ la densità a riposo $\rho(x, 0)$.

Il vettore tensione $\tau(x, t)$ è tangente alla corda grazie all'ipotesi di perfetta flessibilità, e rappresenta la forza che "il pezzo che sta a destra della corda (del punto $(x, u(x, t))$) esercita sul pezzo che sta a sinistra". Quindi la forza *subita* dal punto $(x, u(x, t))$ è $-\tau(x, t)$.

Allora considero un tratto elementare $[x, x + \Delta x]$ di corda: per conservazione della massa nel tempo, la massa di tale tratto è $dm = \rho_0(x) \Delta x = \rho(x, t) \Delta s$, dove Δs indica la lunghezza del grafico di u da $(x, u(x))$ a $(x + \Delta x, u(x + \Delta x))$. Ovviamente $\Delta s > \Delta x$, $\rho(x, t) < \rho_0(x, t)$ (che è intuitivo: la corda viene "tirata"). Quindi $\rho(x, t) = \rho_0 \frac{\Delta x}{\Delta s} = \rho_0 \cos \alpha(x, t)$, dove $\alpha(x, t)$ è l'angolo tra l'orizzontale e la retta tangente al grafico di u nel punto $(x, u(x, t))$.

Per ricavare l'equazione delle onde vogliamo scrivere la seconda equazione di Newton, scrivendo la risultante delle forze sul tratto $[x, x + \Delta x]$ sia in direzione verticale che in direzione orizzontale.

Per quanto detto sull'accelerazione dei punti della corda, $R_{hor}=0$, ed essendo $\tau_{hor}(x, t) = \tau(x, t) \cos \alpha(x, t)$, si ha $R_{hor} = \tau_{hor}(x + \Delta x, t) - \tau_{hor}(x, t) = 0$, per cui $\tau_{hor}(x + \Delta x, t) = \tau_{hor}(x, t)$: la componente orizzontale della tensione è costante in x e d'ora in poi si indicherà con $\tau(t) = \tau(x, t) \cos \alpha(x, t)$.

Per calcolare la risultante verticale si suppone che ci sia una forza per unità di massa $f(x, t)$ che agisce solo verticalmente; con $a(x, t)$ si indica l'accelerazione verticale. Allora la risultante verticale, essendo $\tau_{ver}(x, t) = \tau(x, t) \sin \alpha(x, t)$, è $a(x, t) dm = \tau_{ver}(x + \Delta x, t) - \tau_{ver}(x, t) + f(x, t) dm$. Sostituendo $dm = \rho_0 \Delta x$ e $\tau(x, t) = \frac{\tau_{hor}(x, t)}{\cos \alpha(x, t)}$ si ottiene $\tau_{ver}(x, t) = \tau_{hor}(x, t) \tan \alpha(x, t) = \tau_{hor}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$, da cui l'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \rho_0 \Delta x = \tau(t) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + f(x, t) \rho_0 \Delta x$. Dividendo per $\rho_0 \Delta x$ e calcolando il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ si ha infine $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\tau(t)}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t)$.

Se la corda a riposo è omogenea, ρ_0 è costante, ed è anche ragionevole approssimare $\tau(t)$ a costante, qualora la corda sia molto tesa ed essa oscilli di poco rispetto alla posizione di equilibrio orizzontale. In questa situazione si indica con c^2 la costante $\frac{\tau(t)}{\rho_0}$ (che dimensionalmente è una velocità). Si ha quindi l'equazione della corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

L'operatore delle onde $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ è, come l'operatore del calore, invariante per traslazioni in x e t e per riflessioni in x ; a differenza dell'operatore del calore, è invariante anche per riflessioni in t .

Energia meccanica Si calcola l'energia meccanica del tratto $[0, L]$ della corda nel caso in cui non ci sia alcuna forza esterna. Questo conto si rivelerà utile in seguito.

L'energia cinetica elementare di un tratto $[x, x + \Delta x]$ è $\frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \rho_0 \Delta x$, quindi l'energia cinetica totale è $E_{cin}(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L u_t^2(x, t) dx$.

L'energia potenziale elementare è il lavoro della forza di tensione: essendo l'allungamento e la tensione diretti parallelamente, si ha $|\tau|(\Delta s - \Delta x) = \sqrt{\tau_{hor}^2 + \tau_{ver}^2} \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - \Delta x \right) = \tau \sqrt{1 + u_x^2} \Delta x \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} - 1 \right)$. Se si continua a supporre che la corda vibri con piccole oscillazioni rispetto all'orizzontale, si ha $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$ e $\sqrt{1 + u_x^2} \simeq 1$, per cui $\sqrt{1 + u_x^2} - 1 \simeq \frac{1}{2} u_x^2$. Quindi l'energia potenziale elementare è $\tau \Delta x \frac{1}{2} u_x^2$, e l'energia potenziale totale è $E_{pot}(t) = \frac{1}{2} \tau \int_0^L u_x^2(x, t) dx$.

L'energia meccanica totale è $E_{mecc}(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L u_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \tau \int_0^L u_x^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)(x, t) dx$.

6.1.1 Problemi al contorno e ai valori iniziali per l'equazione della corda vibrante

Ci sono alcuni tipi di problemi che è naturale studiare per l'equazione della corda vibrante.

Il problema di Cauchy globale è $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases} : \text{essendo l'equazione del second'ordine in } t, \text{ si deve imporre la condizione iniziale sia su } u \text{ che su } u_t.$

$$\text{Il problema di Cauchy su un intervallo con condizioni agli estremi è } \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \text{ per } x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = h(x) \text{ per } x \in (0, L) \\ \text{condizioni agli estremi} \end{array} \right.,$$

dove le condizioni agli estremi naturali sono del tipo Dirichlet omogenee ($u(0, t) = u(L, t) = 0$, che ha il significato fisico di corda fissata agli estremi) oppure Neumann omogenee ($u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$, che ha il significato fisico alquanto irrealistico di corda con estremi liberi di scorrere su due guide verticali).

Teo (unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet o Cauchy-Neumann sul segmento)

$$\text{Hp: } \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \text{ per } x \in (0, L), t \in (0, T) \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = h(x) \text{ per } x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 / u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \text{ per } t \in (0, T) \end{array} \right.$$

Ts: se esiste, la soluzione del problema è unica nella classe $C^2((0, L) \times (0, T)) \cap C^1([0, L] \times [0, T])$

L'unicità si estende al caso di $T = +\infty$.

Dim Siano u_1, u_2 soluzioni del problema nella classe $C^2((0, L) \times (0, T)) \cap C^1([0, L] \times [0, T])$. Allora $u = u_1 - u_2$ è nella stessa classe e risolve il problema con $f = g = h = 0$.

Considero l'energia meccanica $E(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)(x, t) dx$: per il teorema di continuità di una funzione definita mediante integrale dipendente da un parametro, $E \in C^1(0, T) \cap C^0([0, T])$. La strategia dimostrativa è mostrare che (1) E che è costante, (2) tale costante è 0, (3) u è nulla.

(1) $E'(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L (2u_t u_{tt} + 2c^2 u_x u_{xt})(x, t) dx$: la derivazione sotto il segno di integrale è giustificata dal fatto che le derivate prime e seconde sono continue in $[0, L]$ (in realtà quelle seconde in $(0, L)$...) e dunque limitate da una costante integrabile. Integro per parti $\int_0^L u_x u_{xt} dx = [u_x u_t]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_{xx} u_t dx$. Se la condizione agli estremi è di Neumann, $[u_x u_t]_{x=0}^{x=L} = (u_x u_t)(L, t) - (u_x u_t)(0, t) = 0$; se la condizione è di Dirichlet, si ha $u(0, t) = u(L, t) = 0 \forall t \in (0, T)$, dunque $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0 \forall t \in (0, T)$ e $(u_x u_t)(L, t) - (u_x u_t)(0, t) = 0$. Perciò in entrambi i casi $\int_0^L u_x u_{xt} dx = - \int_0^L u_{xx} u_t dx$ e $E'(t) = \rho_0 \int_0^L u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx})(x, t) dx = 0$ perché u risolve l'equazione omogenea. Quindi $E(t) = E(0) \forall t$.

(2) $E(0) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L (u_t^2(x, 0) + c^2 u_x^2(x, 0)) dx$. Per le condizioni iniziali $u_t(x, 0) = 0$; inoltre $u(x, 0) = 0 \forall x$, quindi $u_x(x, 0) = 0 \forall x$ e $E(0) = 0$.

(3) Quindi $E(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)(x, t) dx = 0 \forall t \in (0, T)$: fissato t , si ha che l'integrale di una funzione continua nonnegativa è nullo, il che implica che la funzione integranda è nulla $\forall x$. Allora $(u_t^2 + c^2 u_x^2)(x, t) = 0$

$\forall t, x$, e dunque u è costante sia in y che in x ; poiché $u(x, 0) = 0$, tale costante è 0 e $u(x, t) = 0 \forall x \in (0, L), \forall t \in (0, T)$. Dunque $u_1 = u_2$. ■

La tecnica dimostrativa che utilizza l'integrale dell'energia si ritroverà, indipendentemente dal suo significato fisico di energia meccanica.

6.1.2 Corda vibrante fissata agli estremi

Considero il problema di Cauchy per l'equazione omogenea sul segmento con condizioni di Dirichlet omogenee e condizioni di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = h(x) \text{ per } x \in (0, L) \end{cases}$$

Si risolve l'equazione per separazione di variabili: si suppone $u(x, t) = X(x)T(t)$ e si risolve $XT'' - c^2 X''T = 0$: dividendo per XT si ottiene $\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$. Due funzioni di due variabili diverse possono essere uguali $\forall x \in (0, L), \forall t > 0$ se e solo se hanno entrambi un valore costante $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora si risolvono due problemi disaccoppiati. Il primo, con le condizioni agli estremi, è $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \text{ per } x \in (0, L) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$, con λ da determinare: se ne cerca una soluzione X non identicamente nulla. E' esattamente lo stesso problema visto per l'equazione di Cauchy sul segmento: si trova la successione di soluzioni $X_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ con $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Sostituendo λ_n in $T''(t) = \lambda c^2 T(t)$ si ha $T''(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 T(t)$, per cui $T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t$.

Si è trovata una successione di soluzione $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} (a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t)$. Ciascuna delle u_n ha il significato fisico di vibrazione stazionaria o armonica elementare, come si spiegherà meglio più avanti.

Come al solito, per avere qualche speranza di soddisfare le condizioni iniziali, con una scelta opportuna di a_n e b_n , si considera la serie $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} (a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t)$.

$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$: affinché questa sia la serie di g in $(0, L)$ si deve sviluppare g in serie di soli seni, per cui i coefficienti a_n sono i coefficienti di Fourier α_n della simmetrizzata dispari di g in $(-L, L)$. Quindi $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$.

$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$, che è simile alla forma di h sviluppata in serie di soli seni: $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L}$. E' quindi sufficiente imporre $\frac{n\pi c}{L} b_n = \beta_n$, da cui $b_n = \frac{L}{n\pi c} \beta_n$.

Dunque la candidata soluzione è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right)$$

dove a_n sono i coefficienti di Fourier della simmetrizzata dispari di g e $b_n = \frac{L}{n\pi c} \beta_n$ con β_n coefficienti di Fourier della simmetrizzata dispari di h .

Analisi critica Le altre volte in cui si è utilizzata questa tecnica si aveva una funzione potenza oppure esponenziale che aiutava la convergenza della serie candidata; in questo caso si ha per la prima volta un'altra funzione trigonometrica. Questo significa che, ammesso che i coefficienti di Fourier esistano, non c'è speranza di far convergere la serie senza fare ipotesi su a_n e b_n , e non aiuta neanche fare distinzioni tra intervallo aperto e chiuso. Quindi, se $\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$, la serie che assegna u converge totalmente: u è ben definita e continua in $[0, L] \times [0, T]$. Ovviamente questo non basta: per verificare che u risolva l'equazione chiediamo anche $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$. Ciò è vero se $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|) < +\infty$, e in tal caso $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$ è soluzione classica; non c'è speranza di avere una soluzione dell'equazione che assuma il dato al bordo in senso L^2 . In termini di coefficienti di Fourier di g e h , si sta chiedendo che $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \alpha_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_n < +\infty$.

Per ottenere ciò, quali ipotesi occorrono sulle riflessioni dispari di g e h ? Serve un teorema che, con qualche ipotesi sulla regolarità della funzione, dica con quale rapidità tendono a 0 i suoi coefficienti di Fourier. Non basta trovare ipotesi che permettano di dire che $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: infatti, se $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \alpha_n < +\infty$, $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ma il viceversa non è vero (ma con n^3); ci serve un teorema più preciso.

Teo (rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier)

Hp: $\exists s \in \mathbb{N} : f \in C^s([0, L])$; $f^{(s)}$ è regolare a tratti in $[0, L]$;

$f(0) = f(L), f'(0) = f'(L), \dots, f^{(s)}(0) = f^{(s)}(L)$; a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier di f

$$\text{Ts: } \sum_{n=1}^{+\infty} n^s (|a_n| + |b_n|) < +\infty$$

Applico il teorema alla riflessa dispari di g per $s = 2$ e alla riflessa dispari di h per $s = 1$. Se $g^* \in C^2([-L, L])$ (e $g^{*''}$ è regolare a tratti??), $g^*(-L) = g^*(L), g^{*'}(-L) = g^{*'}(L), g^{*''}(-L) = g^{*''}(L)$. Poiché g^* è dispari, $g^{*'}$ è pari e la seconda condizione di raccordo è sicuramente vera.

Queste richieste si riflettono nelle seguenti richieste su g : $g \in C^2([0, L]), g(0) = g''(0) = 0, g''$ regolare a tratti, $g(L) = 0 = g''(L)$.

Analogamente, si chiede $h \in C^1([0, L]), h(0) = 0, h'$ regolare a tratti, $h(L) = 0$.

Sotto queste ipotesi u assegnata dalla serie è $C^2([0, L] \times [0, T])$ e risolve l'equazione in senso classico: questo è un teorema di esistenza della soluzione (che ha ipotesi molto più forti di quelle del teorema di unicità). Tale soluzione è unica, perché rientra nella classe oggetto del teorema di unicità.

Si noti che non c'è nessun segnale che porti a pensare di poter indebolire le ipotesi su g e h : come l'equazione del calore, l'equazione della corda vibrante non regolarizza. Infatti in questo caso, a differenza di quanto visto per l'equazione di Laplace sul cerchio e l'equazione del calore sul segmento, l'uso delle serie di Fourier non è conseguenza della scelta della tecnica risolutiva: sono lo strumento privilegiato per comprendere il fenomeno.

Nel prossimo teorema e nel successivo ragionamento si suppone di essere nelle suddette ipotesi su g e h .

Teo (stima di stabilità)

Hp: u è soluzione classica del problema omogeneo di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante

$$\text{Ts: } \|u(\cdot, t)\|_{L^2(0, L)}^2 \leq \|g\|_{L^2(0, L)}^2 + \left(\frac{L}{\pi c}\right)^2 \|h\|_{L^2(0, L)}^2 \quad \forall t > 0$$

Si noti che se u è soluzione classica allora $u(\cdot, t) \in C^2([0, L])$, per cui $u(\cdot, t)$ è sicuramente $L^2(0, L)$. Con le ipotesi viste su h, g sicuramente anche loro sono L^2 .

Poiché la tesi vale $\forall t > 0$, si può passare al sup: $\sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(0, L)}^2 \leq \|g\|_{L^2(0, L)}^2 + \left(\frac{L}{\pi c}\right)^2 \|h\|_{L^2(0, L)}^2$.

Dim Sia t fissato. $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(0, L)}^2 = \int_0^L |u(x, t)|^2 dx$: per il teorema di Pitagora in $L^2(0, L)$, quanto scritto è uguale a $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t)^2 \left\| \sin \frac{n\pi x}{L} \right\|_{L^2}^2$: la norma quadrata del seno è $\frac{L}{2}$ e $|a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ per Cauchy-Schwarz, quindi $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(0, L)}^2 \leq \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$. Ma $g(x) = L^2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{n\pi c}{L} x$, perciò $\|g\|_{L^2}^2 = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$; $h(x) = L^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cn\pi}{L} b_n \sin \frac{n\pi c}{L} x$, perciò $\|h\|_{L^2}^2 = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 b_n^2 \geq \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 b_n^2$. Si ha infine $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(0, L)}^2 \leq \|g\|_{L^2}^2 + \left(\frac{L}{c\pi}\right)^2 \|h\|_{L^2}^2$. ■

Coerentemente con quanto detto sul fatto che le serie di Fourier sono lo strumento privilegiato per comprendere il fenomeno, anche i singoli addendi della serie soluzione hanno un importante significato fisico. $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} (a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t)$ (che, si ricorda, si può anche scrivere come $\sin \frac{n\pi x}{L} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(\frac{n\pi c}{L} t + \phi)$): per ogni x fissato $u_n(x, t)$ è una funzione trigonometrica, quindi ogni punto della corda oscilla in modo periodico con $\omega = \frac{\pi c}{L}, T = \frac{2L}{nc} = \frac{T_0}{n}, f = \frac{nc}{2L} = n\nu_0$ (ν_0 si dice frequenza fondamentale), ampiezza $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. u_1, \dots, u_n si dicono armoniche successive, e ogni u_n è una vibrazione stazionaria.

Ogni u_n ha inoltre $n + 1$ punti fissati che non vibrano nel tempo, detti nodi, che sono gli x che annullano u_n (tra questi ci sono anche gli estremi dell'intervallo, fissati a 0 dalla condizione al bordo): $\frac{n\pi x}{L} = m\pi \iff x = \frac{mL}{n}$, con $m = 0, 1, \dots, n$.

Poiché u_1 ha periodo T_0 e frequenza ν_0 , u_2 $\frac{T_0}{2}$ e $2\nu_0$, ecc., tutta la u , somma delle u_n , ha periodo T_0 (e frequenza ν_0): la vibrazione complessiva della corda fissata agli estremi u è periodica. REC

6.1.3 Corda vibrante illimitata

La prima trattazione di questo problema è dovuta a D'Alembert (1750). Considero il problema di Cauchy per l'equazione omogenea sulla retta con condizioni di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione si usa il metodo del cambio di variabili di D'Alembert: si definisco ξ, η come
$$\begin{cases} \xi(x, t) = x + ct \\ \eta(x, t) = x - ct \end{cases}.$$

Allora $u(x, t) = u\left(\frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\eta + \xi}{2c}\right) = v(\xi(x, t), \eta(x, t))$. Con abuso di notazione, si indica con u la funzione v . Allora per la regola di derivazione della funzione composta $u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$; il quadrato operatoriale è $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$. Analogamente $u_t = c \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$. Quindi $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$: l'equazione è diventata molto più semplice. Si nota che $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$, cioè $\frac{\partial u}{\partial \eta} = F_1(\eta)$ con F_1 qualsiasi: perciò $u(\xi, \eta) = \int F_1(\eta) d\eta + G(\xi) = F(\eta) + G(\xi)$ con F, G qualsiasi. Cambiando di nuovo variabili, $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$: si è mostrato che u risolve l'equazione se e solo se u ha tale forma.

L'integrale generale dell'equazione della corda vibrante sulla retta è dunque $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ al variare di $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ (quest'ultima richiesta serve affinché u sia soluzione classica).

Si noti che, fissato t , $F(x + ct)$ è una traslata all'indietro di F , mentre $G(x - ct)$ è una traslata in avanti di G : si dice quindi che u è somma di un'onda regressiva e una progressiva.

Si impongono le condizioni iniziali: $u(x, 0) = F(x) + G(x) = g(x)$, $u_t(x, 0) = c(F'(x) - G'(x)) = h(x)$, da cui il sistema differenziale
$$\begin{cases} F + G = g \\ F' - G' = \frac{h}{c} \end{cases}$$
 nelle incognite F, G . Sommando la prima equazione derivata alla seconda si ha $F' = \frac{g' + h/c}{2}$, e quindi $G' = \frac{g' - h/c}{2}$. Allora $F(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x h(y) dy + c_1$, $G(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x h(y) dy + c_1$: $F + G = g + c_1 + c_2 = g \iff c_1 + c_2 = 0$ (è soddisfatta anche la prima equazione, derivando la quale si era persa parte dell'informazione).

Dunque la soluzione del problema è

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

che si dice formula di D'Alembert, sotto le ipotesi di $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ (la funzione integrale concede ad h un grado di regolarità in meno). Abbiamo dimostrato che esiste ed è unica la soluzione al problema della corda

vibrante.

Teo (esistenza e unicità della soluzione del problema della corda vibrante sulla retta)

$$\text{Hp: } g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R}), \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ts: il problema ha in } C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ l'unica soluzione } u(x, t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

Questo risultato è ottimale: le ipotesi non possono essere migliorate (sono nella natura del problema).

1. Verifico che la formula risolve il problema nel caso $g = 0$. E' evidente che $u(x, 0) = g(x)$. Prendo

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy. \quad u_x(x, t) = \frac{1}{2c} (h(x+ct) - h(x-ct)), \quad u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2c} (h'(x+ct) - h'(x-ct)),$$

mentre $u_t(x, t) = \frac{1}{2c} c (h(x+ct) - h(x-ct)), \quad u_{tt}(x, t) = \frac{1}{2c} c^2 (h'(x+ct) - h'(x-ct))$: evidentemente $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Teo (stima di stabilità)

$$\text{Hp} : \quad u(x, t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy, \quad h \text{ e } g \text{ sono limitate}$$

$$\text{Ts} : \quad |u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| + t \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$$

In questo caso (a differenza dell'equazione sul segmento) si riesce a fare una stima puntuale.

$$\text{Dim} \left| \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy \right| \leq \frac{1}{2} 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| + \frac{1}{2c} \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| (x+ct - x-ct) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| + t \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|. \blacksquare$$

Dominio di dipendenza e influenza Considero x^*, t^* fissati e mi chiedo: la soluzione $u(x^*, t^*)$ dipende dai valori delle condizioni iniziali g, h in quali punti? $u(x^*, t^*)$ dipende da g in $x^* + ct^*, x^* - ct^*$ e da h in tutto l'intervallo $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$ (e non da altri valori): l'intervallo $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$ si dice dominio di dipendenza di u . Quindi abbiamo a che fare con un segnale che viaggia a velocità finita: ciò che si riceve in (x^*, t^*) è ciò che è partito all'istante iniziale in $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$. C'è quindi un "tempo di attesa".

Nell'equazione del calore invece il segnale viaggia a velocità infinita (anche se la gaussiana decresce così velocemente che sì, $u(x, t)$ dipende dalla temperatura iniziale in un istante lontanissimo da quello presente, ma in modo tanto più trascurabile quanto più quell'istante è lontano).

Viceversa, i valori che g e h hanno in x^* influenzano u in quali (x, t) ? Osservando il grafico al contrario, si vede che sono tutti gli (x, t) tali che il triangolo generato da (x, t) contiene x^* : $\{(x, t) : x^* - ct \leq x \leq x^* + ct\}$, detto dominio di influenza.

dtbpFX3.1531in2.1015in0ptPlot

Le rette raffigurate sono $t = \frac{x-x^*}{c}$ e $t = \frac{x^*-x}{c}$.

Quindi e. g. il valore di $u(x, t)$ è influenzato dalle condizioni iniziali in x^* solo limitatamente agli (x, t) appartenente alla regione triangolare individuata dalle rette $t = \frac{x-x^*}{c}$ e $t = \frac{x^*-x}{c}$.

Ora si tratta l'equazione non omogenea $u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t)$ e si risolve col metodo di Duhamel.

Suppongo che la funzione $w(x, t, s)$ sia soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > s \\ w(x, s, s) = 0 \\ w_t(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}.$$

Allora $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$ risolve il problema iniziale
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}.$$
 Una volta nota

la soluzione di tale problema, grazie al principio di sovrapposizione si può risolvere qualsiasi problema, anche con condizioni iniziali non omogenee. Verifichiamo, solo formalmente, che u così definita risolve il problema.

Se $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$, $u_t(x, t) = w(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, s) ds = \int_0^t w_t(x, t, s) ds$ (il primo addendo è nullo per la condizione iniziale su w). Si nota subito che $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$. $u_{tt}(x, t) = w_t(x, t, t) + \int_0^t w_{tt}(x, t, s) ds = f(x, t) + \int_0^t w_{tt}(x, t, s) ds$, mentre $\Delta u(x, t) = \int_0^t \Delta w(x, t, s) ds$. Allora $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f + \int_0^t (w_{tt}(x, t, s) - c^2 \Delta w) ds = f$ perché il secondo addendo è nullo per l'ipotesi su w , supponendo di avere $n = 1$.

Per la formula di D'Alembert con $g = 0$, $w(x, t, s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy$: quindi la candidata soluzione del problema di Cauchy per la corda vibrante non omogeneo con condizioni iniziali omogenee è

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

Il seguente teorema chiarisce sotto quali ipotesi tale funzione è effettivamente soluzione.

Teo (soluzione del problema di Cauchy per la corda vibrante non omogeneo)

$$\text{Hp} : \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}, f \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty)), \exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$$

$$\text{Ts} : u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds \text{ risolve il problema ed è } C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$$

Si noti che $f \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ sono le proprietà minime perché si possa parlare di u come soluzione classica (l'equazione differenziale è soddisfatta punto per punto ed è un'identità tra funzione continue); $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ è un'ipotesi che serve per fare la dimostrazione.

Nella classe $C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ c'è unicità grazie all'unicità della soluzione del problema omogeneo.

La dimostrazione è una verifica e procede come la dimostrazione del teorema analogo visto per l'equazione del trasporto.

Dim Si applica due volte il teorema fondamentale del calcolo integrale. $u_t(x, t) = \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds$. Vale $\frac{\partial}{\partial t} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy = c(f(x+c(t-s), s) + f(x-c(t-s), s))$, quindi $u_t(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t [f(x+c(t-s), s) + f(x-c(t-s), s)] ds$. Allora $u_{tt}(x, t) = f(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [f(x+c(t-s), s) + f(x-c(t-s), s)] ds$ cioè $f(x, t) + \frac{1}{2} c \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x+c(t-s), s) - \frac{\partial}{\partial x} f(x-c(t-s), s) \right] ds$. D'altra parte $u_x(x, t) = \frac{1}{2c} \frac{d}{dx} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \left(\int_0^t f(y, s) ds \right) dy = \frac{1}{2c} \int_0^t [f(x+c(t-s), s) - f(x-c(t-s), s)] ds$ e quindi $u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x+c(t-s), s) - \frac{\partial}{\partial x} f(x-c(t-s), s) \right] ds$.

6.1.4 Soluzioni deboli

La definizione di soluzione debole ha la stessa motivazione vista per l'equazione del trasporto, e si ispira a passaggi simili.

Suppongo che $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ risolva in senso classico
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad (1), \text{ con } g \in C^2(\mathbb{R}), h \in$$

$C^1(\mathbb{R})$. Sia $\phi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$: moltiplico entrambi i lati dell'equazione per ϕ e integro in spazio e tempo. Ottengo $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(u_{tt} - c^2 u_{xx})(x, t) dx dt = 0$. Integro per parti entrambi gli addendi per scaricare le derivate su ϕ : $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi u_{xx} dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_{xx} u$, dato che ϕ è nulla $+\infty$ e $-\infty$. Invece $\int_0^{+\infty} \phi u_{tt} dt = [\phi u_t]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \phi_t u_t dt = -\phi(x, 0) u_t(x, 0) - \int_0^{+\infty} \phi_t u_t dt$, cioè $-\phi(x, 0) h(x) - \left\{ [\phi_t u]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \phi_{tt} u dt \right\} = -\phi(x, 0) h(x) + \phi_t(x, 0) g(x) + \int_0^{+\infty} \phi_{tt} u dt$.

Quindi complessivamente $\int_{\mathbb{R}} (-\phi(x, 0) h(x) + \phi_t(x, 0) g(x)) dx + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx}) dx dt = 0 \forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ (2).

Abbiamo dunque mostrato che se u è una soluzione classica di (1), con $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, allora vale (2).

Quali sono le ipotesi minime sotto cui (2) ha senso? E' sufficiente che u, g, h siano localmente integrabili. In realtà però, dato che u ha pur sempre il significato di forma di una corda e g di condizione iniziale di una corda, non ha senso supporre u, g meno che continue (supponendo che la corda non si spezzi): si prenderanno quindi $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $g \in C^0(\mathbb{R})$, e chiediamo $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ (che è più forte di localmente integrabile: ma vogliamo che la velocità iniziale della corda sia essenzialmente limitata). Questo giustifica la seguente

Def Date $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $g \in C^0(\mathbb{R})$, $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, si dice che u è soluzione debole di
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$
 se
$$\int_{\mathbb{R}} (-\phi(x, 0) h(x) + \phi_t(x, 0) g(x)) dx + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u (\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx}) dx dt = 0 \quad \forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty)).$$

Sopra abbiamo quindi mostrato che se u è soluzione classica allora è anche soluzione debole.

Teo (una soluzione classica è anche soluzione debole)

Hp : $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, u è soluzione classica di (1)

Ts : u è anche soluzione debole di (1)

ma $h \in C^1$ non implica limitata...

Teo (una soluzione debole con ingredienti abbastanza regolari è anche soluzione classica)

Hp: $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, u è soluzione debole di (1)

Ts: u è anche soluzione classica di (1)

Si può dimostrare facendo parlare la definizione di soluzione debole, analogamente a quanto visto per l'equazione del trasporto.

Teo (la soluzione di d'Alembert è soluzione debole)

Hp : $g \in C^0(\mathbb{R})$, $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, $u(x, t) = \frac{g(x - ct) + g(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$

Ts : u è soluzione debole di (1)

Si noti che in tal caso u è continua e quindi le ipotesi della definizione di soluzione debole sono soddisfatte.

La questione dell'unicità della soluzione debole è delicata, e dunque non la discutiamo.

6.2 Equazione delle onde in un dominio qualsiasi

L'equazione della corda vibrante è il caso $n = 1$ dell'equazione delle onde $u_{tt} - c^2 \Delta u = f$ in \mathbb{R}^n ; essa nasce con $n = 2$ dal modello fisico della membrana vibrante, che porta a studiare $u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0$. $c^2 = \frac{\tau}{\rho_0}$, dove τ è una forza per unità di lunghezza e ρ_0 la densità di massa superficiale per la membrana, ha ancora le dimensioni di una velocità al quadrato.

Ci sono alcuni tipi di problemi che è naturale studiare per l'equazione della membrana vibrante.

$$\text{Il problema di Cauchy globale è } \begin{cases} u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \text{ per } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x, y, 0) = h(x, y) \text{ per } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}.$$

$$\text{Il problema di Cauchy su un dominio con condizioni al bordo è } \begin{cases} u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \text{ per } x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \text{ per } x \in \Omega \\ u_t(x, y, 0) = h(x, y) \text{ per } x \in \Omega \\ \text{condizioni al bordo} \end{cases},$$

dove le condizioni al bordo naturali sono del tipo Dirichlet omogenee ($u(x, y, t) = 0$ se $(x, y) \in \partial\Omega, t > 0$) oppure Neumann omogenee ($\frac{\partial}{\partial n}u(x, y, t) = 0$ per $(x, y) \in \partial\Omega, t > 0$), che ha il significato fisico alquanto irrealistico di corda con estremi liberi di scorrere su due guide verticali).

Per $n = 3$ l'equazione delle onde nasce da modelli fisici delle onde sonore (di pressione) o elettromagnetiche (ogni componente del campo elettromagnetico (\mathbf{E}, \mathbf{B}) nel vuoto in assenza di sorgenti soddisfa $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$).

Con il metodo dell'energia si dimostra un risultato di unicità per l'equazione delle onde in \mathbb{R}^n .

Teo (unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet o Cauchy-Neumann in Q_T)

$$\text{Hp: } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato e lipschitziano, } Q_T = \Omega \times (0, T), \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f \text{ in } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ per } \mathbf{x} \in \Omega \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ per } \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) / \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in (0, T) \end{cases}$$

Ts: se esiste, la soluzione del problema è unica nella classe $C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$

Questa è una generalizzazione del teorema di unicità già visto nel caso $n = 1$. L'unicità si estende al caso di $T = +\infty$.

Dim Siano u_1, u_2 soluzioni del problema nella classe $C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$. Allora $u = u_1 - u_2$ è nella stessa classe e risolve il problema con $f = g = h = 0$.

Definisco l'energia $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 \|\nabla u\|^2)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$: per il teorema di continuità di una funzione definita mediante integrale dipendente da un parametro, $E \in C^1(0, T) \cap C^0([0, T])$. La strategia dimostrativa è mostrare che (1) E che è costante, (2) tale costante è 0, (3) u è nulla.

$$(1) \text{ Poiché } \frac{\partial}{\partial t} \|\nabla u\|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^n 2u_{x_i} u_{x_i t} = 2 \langle \nabla u, \nabla u_t \rangle, E'(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2u_t u_{tt} + 2c^2 \langle \nabla u, \nabla u_t \rangle)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}:$$

la derivazione sotto il segno di integrale è giustificata dal fatto che le derivate prime e seconde sono continue in $\bar{\Omega}$ (in realtà quelle seconde in Ω ...) e dunque limitate da una costante integrabile. Applico la prima identità di Green

a $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u_t \rangle (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ (u dovrebbe essere C^2 fino al bordo: ma si può usare la stessa argomentazione di estensione vista all'inizio del corso): $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u_t \rangle (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u_t \Delta u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$. Dico che il secondo addendo è nullo. Se il problema che risolve u è di Neumann, è ovvio; se è di Dirichlet, $u(\mathbf{x}, t) = 0$ se $\mathbf{x} \in \partial\Omega \forall t$, quindi $u_t(\mathbf{x}, t) = 0$ se $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Si ha quindi $E'(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2u_t u_{tt} - c^2 u_t \Delta u) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$ perché u risolve l'equazione. Quindi $E(t) = E(0) \forall t$.

(2) $E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2(\mathbf{x}, 0) + c^2 \|\nabla u(\mathbf{x}, 0)\|^2) d\mathbf{x}$. Per le condizioni iniziali $u_t(\mathbf{x}, 0) = 0$; inoltre $u(\mathbf{x}, 0) = 0 \forall \mathbf{x}$, quindi $\nabla u(\mathbf{x}, 0) = 0 \forall \mathbf{x}$ e $E(0) = 0$.

(3) Quindi $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2(\mathbf{x}, t) + c^2 \|\nabla u(\mathbf{x}, t)\|^2) d\mathbf{x} = 0 \forall t \in (0, T)$: fissato t , si ha che l'integrale di una funzione continua nonnegativa è nullo, il che implica che la funzione integranda è nulla $\forall \mathbf{x}$. Allora $u_t^2(\mathbf{x}, t) + c^2 \|\nabla u(\mathbf{x}, t)\|^2 = 0 \forall t, \mathbf{x}$, e dunque u è costante sia in t che in \mathbf{x} ; poiché $u(\mathbf{x}, 0) = 0$, tale costante è 0 e $u(\mathbf{x}, t) = 0 \forall \mathbf{x} \in Q_T$. Dunque $u_1 = u_2$. ■

6.2.1 Problema di Cauchy-Dirichlet

Risolviamo il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo con condizioni di Dirichlet omogenee

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ in } Q_T = \Omega \times (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ per } \mathbf{x} \in \Omega \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ per } \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in (0, T) \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, usando la separazione di variabili. Se $u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$, l'equazione diventa $XT'' - c^2 T \Delta X = 0$, cioè $\frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta X}{X}$ in $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Allora $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta X}{X} = \lambda$ in Q_T , e il problema si è disaccoppiato in $\begin{cases} \Delta X(\mathbf{x}) = \lambda X(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega \\ X(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$, $T''(t) = c^2 \lambda T(t)$ in $(0, T)$. Il primo problema si dice problema agli autovalori per il laplaciano con condizione al contorno di Dirichlet omogenea, e l'equazione, in dimensione $n = 1$, diventa un'EDO lineare del second'ordine a coefficienti costanti, già risolta molte volte in base al segno di λ .

Il problema agli autovalori è un problema che emerge non solo per l'equazione delle onde. Si considera un analogo problema per l'equazione del calore: $\begin{cases} u_t - D \Delta u = 0 \text{ in } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$; sarebbe analogo al problema sul segmento in dimensione n (e. g. se $n = 2$ ho una lastra metallica isolata sopra e sotto che può scambiare calore solo sul bordo, su cui è termostata in modo da avere temperatura nulla), ma non l'abbiamo risolto. Tuttavia, se ripetiamo la separazione di variabili $u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$, l'equazione diventa $XT' - DT \Delta X = 0$, cioè $\frac{T'}{DT} = \frac{\Delta X}{X}$

in $Q_T = \Omega \times (0, T)$, da cui $\begin{cases} \Delta X(\mathbf{x}) = \lambda X(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ X(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$, $T'(t) = D\lambda T(t)$ in $(0, T)$. Il problema in X è proprio lo stesso problema ricavato per l'equazione delle onde! E' quindi ovvio che è utile saperlo risolvere.

Problema agli autovalori per il laplaciano Il problema $\begin{cases} \Delta X(\mathbf{x}) = \lambda X(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ X(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$ si dice problema agli autovalori perché l'equazione è quella che definisce autovalori e autovettori di un operatore lineare L : si cercano $X, \lambda : LX = \lambda X$. In questo caso, se $\Delta X = \lambda X$ in Ω , $X = 0$ in $\partial\Omega$ e $X \neq 0$, λ si dice autovalore e X autofunzione del laplaciano; X si dice anche autofunzione di Δ relativa all'autovalore λ .

Il seguente teorema presenta alcune proprietà di autovalori e autofunzioni di Δ .

Teo (proprietà di autovalori e autofunzioni di Δ)

(1) Hp: Ω è un dominio limitato lipschitziano, $\exists \lambda \in \mathbb{R} : u \in C^2(\bar{\Omega}), u \neq 0$ risolve $\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$

Ts: $\lambda < 0$

(2) Hp: Ω è un dominio limitato lipschitziano, $u, v \in C^2(\bar{\Omega}), u, v \neq 0$ risolvono

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}, \begin{cases} \Delta v(\mathbf{x}) = \mu v(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ v(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con } \lambda \neq \mu$$

$$\text{Ts: } \int_{\Omega} uv d\mathbf{x} = 0$$

La ipotesi di (2) si esprime sinteticamente dicendo che $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ sono autofunzioni di Δ relative agli autovalori $\lambda, \mu : \lambda \neq \mu$; la tesi è che u e v sono ortogonali in $L^2(\Omega)$ (essendo $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ con Ω limitato, sicuramente sono in $L^2(\Omega)$)

Dim (1) L'idea è applicare la prima identità di Green a u e u . Moltiplicando entrambi i lati dell'equazione per u si ottiene $u\Delta u = \lambda u^2$: integrando su Ω , $\int_{\Omega} u\Delta u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \lambda u^2 d\mathbf{x}$. Ma per Green $\int_{\Omega} u\Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x}$, essendo $u = 0$ su $\partial\Omega$. Allora si ha $\int_{\Omega} \lambda u^2 d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x}$, cioè $\lambda = \frac{- \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x}} \leq 0$ (il rapporto è ben definito perché u è non nulla). Se per assurdo fosse $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = 0$, si avrebbe $\|\nabla u\|^2 = 0$ e quindi u costante, ma essendo $u = 0$ in $\partial\Omega$ tale costante dovrebbe essere 0, il che è assurdo perché per ipotesi $u \neq 0$. Allora $\lambda < 0$.

(2) L'idea è usare la seconda identità di Green. Moltiplicando la prima equazione per v e la seconda per u e sottraendo membro a membro si ottiene $v\Delta u - u\Delta v = (\lambda - \mu)uv$. Integrando, $\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) d\mathbf{x} = (\lambda - \mu) \int_{\Omega} uv d\mathbf{x}$; ma per per Green $\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) d\sigma = 0$ perché $u, v = 0$ su $\partial\Omega$. Quindi, essendo $\lambda \neq \mu$, $\int_{\Omega} uv d\mathbf{x} = 0$. ■

Il rapporto al lato destro di $\lambda = \frac{-\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x}}$ si dice quoziente di Rayleigh (approfondisci).

Torniamo ora al problema di Cauchy-Dirichlet per le onde:
$$\begin{cases} \Delta X(\mathbf{x}) = \lambda X(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ X(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}, T''(t) = c^2 \lambda T(t) \text{ in } (0, T).$$
 Poiché ora si sa che $\lambda < 0$, si può risolvere la seconda equazione: posto $\omega^2 = -\lambda$, $T(t) = a \cos \omega ct + b \sin \omega ct$, per cui $u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x}) (a \cos \omega ct + b \sin \omega ct)$. Ad ora in realtà non sappiamo niente su *quanti* sono gli autovalori λ : se ne esistesse una successione, e anche una successione di autofunzioni, si potrebbe scrivere u come serie di autofunzioni moltiplicate per funzioni trigonometriche; così si potrebbe tentare di imporre le condizioni iniziali.

Questa speranza è avallata dal risultato (2) del teorema sopra, che fa sperare che esista una base ortonormale di L^2 formata da autofunzioni del laplaciano (quando si è risolta l'equazione della corda vibrante in effetti si è scritta la soluzione come serie che in spazio è di autofunzioni del laplaciano unidimensionale sul segmento, $\sin \frac{n\pi x}{L}$). Questo è garantito dal seguente teorema.

Teo

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato

Ts: esiste una successione di autovalori di Δ $\{\lambda_k\}_k : \lambda_k \rightarrow^{k \rightarrow +\infty} -\infty$ e un sistema ortonormale completo di $L^2(\Omega)$ $\{X_k\}_{k=1}^{+\infty}$ formato da autofunzioni a essi relative

Questo significa che la soluzione u potrà essere scritta come $u(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\mathbf{x}) (a_k \cos \omega_k ct + b_k \sin \omega_k ct)$ con $\omega_k^2 = -\lambda_k$. Si cerca una soluzione con tale forma, dove a_k, b_k sono da determinare imponendo le condizioni iniziali (che dovranno anch'esse essere sviluppate in serie di autofunzioni X_k). Ovviamente la forma dello sviluppo di funzioni in serie di autofunzioni dipende dal dominio Ω : in geometrie particolarmente semplici si troveranno ad esempio le serie di Fourier.

Si noti che questa strategia si applica per Ω dominio limitato qualsiasi.

Il problema di trovare autovalori e autofunzioni si complica al complicarsi del dominio Ω ; il problema si sa risolvere in alcuni domini particolarmente semplici: in $n = 2$, sul rettangolo, il cerchio (da cui, per separazione di variabili, si trovano le funzioni di Bessel) e il triangolo equilatero; in $n = 3$ sul parallelepipedo, la sfera e il cilindro. In generale autofunzioni del laplaciano in vari domini spesso diventano categorie di funzioni note, che prendono il nome di funzioni speciali²⁹: come le funzioni di Bessel, i polinomi di Chebychev...

Si risolve il problema per il caso del rettangolo in $n = 2$.³⁰

²⁹di cui si occupa l'analisi spettrale

³⁰La risoluzione del problema agli autovalori in un dominio Ω è collegata alla risoluzione di problemi variazionali. Ad esempio in $n = 2$, fissato il perimetro (o l'area) di $\Omega = (0, a) \times (0, a)$, quali sono a, b che minimizzano $\nu_{1,1}$? Fissata l'area di Ω , qual è la forma di

Membrana vibrante rettangolare Sia $\Omega = (0, a) \times (0, b) \subseteq \mathbb{R}^2$. Il problema è
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = g(x, y) & \text{in } \Omega \\ u_t(x, y, 0) = h(x, y) & \text{in } \Omega \\ u(x, y, t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases};$$

con la separazione di variabili si trova
$$\begin{cases} \Delta U(\mathbf{x}) = \lambda U(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ U(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}, T''(t) = c^2 \lambda T(t) \text{ in } (0, T).$$
 Per trovare le autofunzioni del laplaciano sul rettangolo si separano di nuovo le variabili: $U(x, y) = X(x)Y(y)$, da cui $X''Y + XY'' = \lambda XY$, cioè $\frac{X''}{X} = \lambda - \frac{Y''}{Y}$, che devono quindi essere uguali a μ . Si trovano i due sottoproblemi

$$\begin{cases} X''(x) = \mu X(x) \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}, \begin{cases} Y''(y) = (\lambda - \mu) Y(y) \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

che sono perfettamente analoghi al già risolto problema della corda vibrante fissata agli estremi: la soluzione è $X(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$ con $\mu = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $Y(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}$ con $\gamma = \lambda - \mu = -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ (il segno di questi autovalori segue dalla soluzione diretta delle equazioni, non dalla teoria generale). Allora la successione di autovalori è $\lambda_{n,m} = \mu + \gamma = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ (che è una successione a due indici, coerentemente col fatto che si lavora in \mathbb{R}^2) e le autofunzioni sono $U_{n,m}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$. Si è risolto il problema agli autovalori per il laplaciano sul rettangolo.

Ora si può risolvere il problema iniziale: avendo $\lambda_{n,m} = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$, si pone $\omega^2 = -\lambda_{n,m}$ e allora $T(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$.

Quindi $u_{n,m}(x, y, t) = U_{n,m}(\mathbf{x})T(t) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \left(a_{n,m} \cos \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} ct + b_{n,m} \sin \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} ct \right)$ e come al solito $u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} u_{n,m}(x, y, t)$: la candidata soluzione è

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \left(a_{n,m} \cos \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} ct + b_{n,m} \sin \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} ct \right)$$

Ora si possono imporre le condizioni iniziali. $g(x, y) = u(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} a_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$: per determinare $a_{n,m}$ occorre sviluppare $g(x, y)$ in serie di Fourier di soli seni in $(0, a) \times (0, b)$, la quale - essendo in \mathbb{R}^2 - sarà una serie in due variabili, proprio come quella sopra. Analogamente a quanto visto in passato, $a_{n,m} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy dx$.

Ω che minimizza $\nu_{1,1}$? Pensando al significato musicale, ciò significa cercare la forma delle membrana che minimizza la (?) della nota più bassa. La risposta, nota come teorema del tamburo, è il cerchio.

Inoltre ci si è chiesto se la successione di autovalori del laplaciano per Ω , fissata l'area di Ω , ne determini la forma (*can one hear the shape of a drum?*). La risposta è no: esistono domini di forma diversa che producono la stessa successione di autovalori (*one cannot hear the shape of a drum*).

Invece $h(x, y) = u_t(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} b_{n,m} \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$, e quindi $b_{n,m} = \frac{1}{\pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}} \beta_{n,m} = \frac{1}{\pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy dx$.

Sotto opportune ipotesi di regolarità, che sono simili a quelle viste per la corda vibrante (g un po' meglio di C^2 , h un po' meglio di C^1 , soddisfacenti alcune condizioni di raccordo), questa è la³¹ soluzione classica del problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde sulla membrana rettangolare.

Proprio come le armoniche fondamentali per la corda vibrante, i singoli addendi $u_{n,m}(x, y, t)$, che si dicono parziali, hanno il significato di vibrazioni stazionarie. Per la corda vibrante, il grafico di u_n a t fissato presentava $n - 2$ punti nodali: per la membrana $u_{n,m}$ ha $n - 1, m - 1$ punti fissati, quindi presenta $n - 1$ linee nodali interne del tipo $x = \dots$ e $m - 1$ linee nodali interne del tipo $y = \dots$, che *non vibrano*.

Invece, fissato (x, y) , il seno e il coseno di $u_{n,m}$ hanno pulsazione $\omega c = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$, periodo $T_{n,m} = \frac{2}{c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}}$ e frequenza $\nu_{n,m} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$; la frequenza fondamentale di vibrazione è $\nu_{1,1} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. Per la membrana, le frequenze più alte - a differenza della corda vibrante - non sono multipli interi della frequenza fondamentale, e d'altro canto i periodi delle $u_{n,m}$ non sono sottomultipli di $T_{1,1}$. Quindi la vibrazione complessiva non è periodica.

$$\text{A questo punto si sa risolvere anche il problema del calore sul rettangolo} \begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T) = (0, a) \times (0, b) \times (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$$

che dà luogo ai problemi $\begin{cases} \Delta X(\mathbf{x}) = \lambda X(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega \\ X(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$, $T'(t) = D\lambda T(t)$ in $(0, T)$. Allora le autofunzioni sono

$U_{n,m}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$ e $\lambda = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$, quindi $T(t) = ce^{-\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) Dt}$ e

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} c_{n,m} e^{-\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) Dt} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

Imponendo la condizione iniziale si ha $u(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} c_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = g(x, y)$, e come prima i coefficienti in serie di Fourier di soli seni di g sul rettangolo sono $c_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy dx$.

6.3 Problema di Cauchy globale

Ora si risolve il problema di Cauchy in tutto \mathbb{R}^n : $\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases}$. A differenza di quanto

visto per altre equazioni, la soluzione del problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde ha forma e proprietà

³¹ne abbiamo dimostrato l'unicità!

molto diverse a seconda di n . Noi faremo una trattazione iniziale generale, che proseguiremo nel caso $n = 3$; la soluzione ottenuta per $n = 3$ permetterà di trovare anche quella per $n = 2$.

Abbiamo dimostrato l'unicità della soluzione su cilindri limitati; ovviamente serve un risultato del genere anche in questo caso.

Teo (unicità della soluzione del problema di Cauchy globale)

$$\text{Hp: } \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Ts: nella classe $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ la soluzione del problema, se esiste, è unica

Si noti che la classe in cui vale l'unicità è piuttosto piccola: è richiesta continuità fino alla derivata seconda fino al bordo.

Si comincia a presentare un insieme di risultati che permettono di risolvere il problema

Proposizione

$$\text{Hp} : u \in C^3(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ risolve } \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ts} : u_t \text{ risolve } \begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ w(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \\ w_t(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2)$$

Dim Sia $w(\mathbf{x}, t) = u_t(\mathbf{x}, t)$. E' ovvio che $w(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x})$; inoltre $\frac{\partial}{\partial t}(u_{tt} - c^2 \Delta u) = 0$ per ipotesi, quindi $w_{tt} - c^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u = w_{tt} - c^2 \Delta w = 0$, dove si è usato il teorema di Schwarz per scambiare $\frac{\partial}{\partial t}$ e Δ . Infine, vale $w_t(\mathbf{x}, 0) = u_{tt}(\mathbf{x}, 0) = {}^{32}c^2 \Delta u(\mathbf{x}, 0)$: ma $u(\mathbf{x}, 0) = 0$ in \mathbb{R}^n , quindi $\Delta u(\mathbf{x}, 0) = 0$ e $w_t(\mathbf{x}, 0) = 0$ in \mathbb{R}^n . ■

Quindi, se si sa risolvere il problema in ipotesi, grazie a questo risultato si può risolvere anche

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

³²l'equazione differenziale, per continuità di u , è soddisfatta anche per $t = 0$

per il principio di sovrapposizione. Infine, per risolvere il problema con l'equazione non omogenea si può usare il metodo di Duhamel.

Proposizione (metodo di Duhamel)

$$\begin{aligned} \text{Hp:} \quad w = w(\mathbf{x}, t, s) \text{ risolve} & \begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > s \\ w(\mathbf{x}, s, s) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ w_t(\mathbf{x}, s, s) = f(\mathbf{x}, s) \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases} \\ \text{Ts:} \quad u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t w(\mathbf{x}, t, s) ds \text{ risolve} & \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases} \end{aligned}$$

La dimostrazione è la solita verifica formale.

$$\text{E' quindi sufficiente concentrarsi sulla risoluzione di} \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases}, \text{ problema che af-}$$

frontiamo col metodo delle medie sferiche (che nasce dall'intuizione fisica: le onde nello spazio sono tipicamente sferiche).

Def Data $u \in C^0(\mathbb{R}^{n+1})$ e $r > 0$, si dice media sferica di $u = u(\mathbf{x}, t)$, e si indica con $M_u(\mathbf{x}, r, t)$, la funzione $\frac{1}{|\partial B_r(\mathbf{x})|} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y})$.

Si riscrive M_u in modo che \mathbf{x} non compaia più nel dominio d'integrazione: con il cambio di variabili $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{z}$ si ha $\frac{1}{|\partial B_r(\mathbf{x})|} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) r^{n-1} dS(\mathbf{z}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z})$. L'ultimo integrale, a differenza del primo, è evidentemente ben definito $\forall r$, e dunque si prenderà questo come definizione operativa di media sferica.

Si osservano alcune proprietà di M_u .

i $M_u(\mathbf{x}, 0, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x}, t) dS(\mathbf{z}) = u(\mathbf{x}, t)$.

ii $M_u(\mathbf{x}, -r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} - r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\mathbf{w}, t) dS(\mathbf{w}) = M_u(\mathbf{x}, r, t)$, grazie al cambio di variabile $\mathbf{w} = -\mathbf{z}$. Dunque $M_u(\mathbf{x}, \cdot, t)$ è una funzione pari.

L'idea è ora scoprire quali equazioni risolve M_u , e come queste sono legate alle equazioni che risolve u .

Teo (equazione di Darboux)

Hp: $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, M_u è la sua media sferica

Ts: $\Delta_{\mathbf{x}} M_u(\mathbf{x}, r, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(\mathbf{x}, r, t)$

Quindi il laplaciano rispetto alle coordinate cartesiane di M_u coincide con il laplaciano di M_u vista come funzione radiale di r . Si noti che $C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ è la regolarità necessaria affinché l'equazione della tesi sia un'uguaglianza tra funzioni continue.

Teo (se u risolve l'equazione delle onde omogenea, anche M_u la risolve)

$$\text{Hp:} \quad u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ risolve } u_{tt} - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

M_u è la sua media sferica

$$\text{Ts:} \quad M_u \text{ risolve } \frac{\partial^2 M_u(\mathbf{x}, r, t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} M_u(\mathbf{x}, r, t) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Quindi, se u risolve l'equazione delle onde omogenea, anche M_u la risolve.

Dim $M_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z})$, quindi $\Delta M_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \Delta u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z})$, dato che Δu è continua su un compatto. Invece $\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z})$ per lo stesso motivo, quindi $\frac{\partial^2 M_u(\mathbf{x}, r, t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} M_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) \right] dS(\mathbf{z}) = 0$ perché u risolve l'equazione. ■

$$\text{Ora, supponendo che } u \text{ risolva il problema di interesse } \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^n \end{cases}, \text{ vogliamo tro-}$$

vare qualche equazione semplice risolta da M_u . Per i due teoremi sopra vale $\frac{\partial^2 M_u(\mathbf{x}, r, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta_{\mathbf{x}} M_u(\mathbf{x}, r, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u$: l'equazione $\frac{\partial^2 M_u(\mathbf{x}, r, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u$ è nelle sole variabili r, t ; \mathbf{x} è un parametro. Tale equazione assomiglia all'equazione della corda vibrante, alla quale ci vorremmo ricondurre. Moltiplicando per r si ottiene $r \frac{\partial^2 M_u(\mathbf{x}, r, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1) \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u$: voglio vedere rM_u come soluzione, e quindi riscrivere il lato destro come operatore differenziale semplice.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} rM_u = \frac{\partial}{\partial r} \left(M_u + r \frac{\partial M_u}{\partial r} \right) = 2 \frac{\partial M_u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2}: \text{ ma questo è proprio il lato destro dell'equazione sopra, se } n = 3.$$

Si è quindi mostrato che, se e solo se $n = 3$, se u risolve il problema allora $v(r, t) = rM_u(\mathbf{x}, r, t)$ risolve l'equazione della corda vibrante illimitata $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$.

Per scoprire quali condizioni iniziali soddisfa v , osservo quelle di u : $u(\mathbf{x}, 0) = 0$, quindi $v(r, 0) = r \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, 0) dS(\mathbf{z}) = 0$, mentre $v_t(r, 0) = r \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u_t(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, 0) dS(\mathbf{z}) = r \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} h(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) = rM_h(\mathbf{x}, r)$ (si noti che h

$$\text{non dipende da } t, \text{ che dunque non è più un argomento). Dunque } v \text{ risolve } \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0 \text{ se } r \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(r, 0) = 0 \text{ se } r \in \mathbb{R} \\ v_t(r, 0) = rM_h \text{ se } r \in \mathbb{R} \end{cases},$$

che è il problema della corda vibrante illimitata, la cui soluzione è, per la formula di D'Alembert, $v(r, t) = \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_h(\mathbf{x}, s) ds = rM_u(\mathbf{x}, r, t)$. Allora $M_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_h(\mathbf{x}, s) ds$, e $u(\mathbf{x}, t) = M_u(\mathbf{x}, 0, t)$: in

realtà si deve calcolare il limite, non essendo M_u definita in $r = 0$. Ma $\int_{-ct}^{ct} s M_h(\mathbf{x}, s) ds = 0$ perché integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico: il limite dà una forma d'indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$, che si scioglie con il teorema di De L'Hopital. $\lim_{r \rightarrow 0^+} M_u(\mathbf{x}, r, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} s M_h(\mathbf{x}, s) ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2c} ((r+ct) M_h(\mathbf{x}, r+ct) - (r-ct) M_h(\mathbf{x}, r-ct))$: la funzione ad argomento è

$$\frac{1}{2c} [r (M_h(\mathbf{x}, r+ct) - M_h(\mathbf{x}, r-ct)) + ct (M_h(\mathbf{x}, r+ct) + M_h(\mathbf{x}, r-ct))]$$

che per $r \rightarrow 0^+$ tende a $t M_h(\mathbf{x}, ct)$.

Quindi la candidata soluzione del problema (1) è

$$u(\mathbf{x}, t) = t M_h(\mathbf{x}, ct) = \frac{t}{|\partial B_{ct}(\mathbf{x})|} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} h(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

e quella del problema (2)

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{|\partial B_{ct}(\mathbf{x})|} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right)$$

Si è dimostrato il seguente

Teo (formula di Kirchhoff)

$$\text{Hp} : \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^3, h \in C^2(\mathbb{R}^3), g \in C^3(\mathbb{R}^3) \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\text{Ts} : u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} h(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right) \text{ risolve l'equazione}$$

Le ipotesi sono quelle delle due proposizioni. Si noti che su g serve un grado di regolarità in più perché per calcolare u_{tt} serve la derivata terza di g . La dimostrazione si fa con il solito cambio di variabili: se $\mathbf{y} = \mathbf{x} + ct\mathbf{z}$, $dS(\mathbf{y}) = (ct)^2 dS(\mathbf{z})$ (perché $n = 3$) e $u(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} g(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) \right)$; il secondo addendo è $\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} g(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) + \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \langle \nabla g(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}, c\mathbf{z}) \rangle dS(\mathbf{z})$.

Quindi si chiede $g \in C^3, h \in C^2$ (ipotesi che non possono essere indebolite), e nonostante ciò u è solo C^2 . Perlomeno limitatamente a g , l'equazione delle onde in \mathbb{R}^3 mostra un fenomeno di perdita di regolarità: u è meno regolare di g .

Si esamina il dominio di dipendenza. Il valore di $u(\mathbf{x}, t)$ dipende dai valori di h e g nei punti di $\partial B_{ct}(\mathbf{x})$, cioè il dominio è $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = ct\}$. Questo significa che un segnale che a $t = 0$ sia concentrato in \mathbf{y} è avvertito al tempo $t = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{c}$ (principio di Huygens forte).

Per risolvere il problema non omogeneo basta applicare il principio di Duhamel.

Metodo della discesa Ora si risolve il problema per $n = 2$ con il metodo della discesa³³ di Hadamard, che

permette di dedurre dalla formula con $n = 3$ il risultato per $n = 2$.

$$\text{Sia } u(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \text{ soluzione di } \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^2 \end{cases} . \quad u \text{ può essere vista anche come solu-}$$

$$\text{zione del problema } \begin{cases} u_{tt} - c^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^3 \end{cases} , \text{ dato che } u_{x_3 x_3} = 0. \text{ Ma allora la}$$

soluzione è $u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} h(y_1, y_2) dS(y_1, y_2, y_3)$: è un integrale di superficie che si può scrivere come inte-

grale doppio sfruttando la parametrizzazione della superficie della sfera. $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = r^2 +$

$(x_3 - y_3)^2 = c^2 t^2$, ma x_3 può essere considerata nulla perché u non dipende da x_3 . Quindi $y_3^2 = c^2 t^2 - r^2$ e il dominio

d'integrazione può essere scritto come l'unione delle due superfici $\Sigma_+ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_3 = \sqrt{c^2 t^2 - r^2}\}$,

$\Sigma_- = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_3 = -\sqrt{c^2 t^2 - r^2}\}$. Ponendo $f(y_1, y_2) = \sqrt{c^2 t^2 - r^2} = \sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}$,

vale $\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}$, per cui $dS = \sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2$ e l'integrale diventa

$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \left(\int_{\Sigma_+} + \int_{\Sigma_-} \right) = \frac{1}{4\pi c^2 t} 2 \int_{r^2 < c^2 t^2} h(y_1, y_2) \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 = \frac{1}{2\pi c} \int_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < ct} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}} dy_1 dy_2$. I

due integrali di superficie coincidono perché la funzione integranda non dipende dalla terza variabile (che nelle due superfici ha segno diverso). Quindi la soluzione al problema sopra è

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < ct} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}} d\mathbf{y}$$

$$\text{che si dice formula di Poisson. Quindi la soluzione di } \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^2 \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \text{ in } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad \text{è}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < ct} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}} d\mathbf{y} + \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < ct} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}} d\mathbf{y}$$

Si noti in particolare che il dominio d'integrazione è molto diverso da quello della formula di Kirchoff: ora

$u(\mathbf{x}, t)$ dipende dai valori di g e h negli $\mathbf{y} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq ct$, per cui il valore delle condizioni iniziali in \mathbf{y} influenza il valore di u in \mathbf{x} per tutti i $t > \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{c}$.

³³si intende dimensionale

7 Intermezzi

7.1 Significati probabilistici delle EDP

Nel 1826 il botanico scozzese Robert Brown osservò al microscopio che piccoli granelli di polline sospesi nell'acqua sono soggetti a un perpetuo movimento, con piccoli spostamenti lungo traiettorie apparentemente caotiche e irregolari. Varie interpretazioni del fenomeno furono proposte nei decenni seguenti; nel 1877, Delsaux espresse per la prima volta l'idea che questo movimento fosse causato dagli urti delle molecole del liquido con le particelle in sospensione. Ma le molecole dell'acqua, a differenza dei granelli di polline, sono troppo piccole per poter essere direttamente osservate al microscopio: per confermare quest'ipotesi occorre una argomentazione teorica che permettesse di prevedere quantitativamente il fenomeno osservato a partire da una teoria sui fenomeni che accadono a livello molecolare.

Immaginiamo che in un liquido avente coefficiente di viscosità k siano sospese n particelle sferiche identiche, di raggio a (i "granelli di polline" di Brown); indicato con $f(x, t)$ il numero di particelle per unità di volume nel punto x all'istante t , si ha $\int f(x, t) dx = n \forall t$. Einstein dimostra a partire dalla teoria cinetica del calore che f soddisfa l'equazione di diffusione $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, con D noto. Se si fa l'ipotesi (ideale) che $f(x, 0) = 0$ se $x \neq 0$, cioè tutte le particelle all'istante iniziale si trovano nell'origine ($f(x, 0) = \delta_0$), allora $f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$: n volte il nucleo del calore unidimensionale, perché la convoluzione del nucleo con la delta restituisce il nucleo. Se si normalizza f dividendo per n si trova la densità di probabilità $p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$, che è la densità di una v. a. gaussiana con valore atteso nullo e varianza $2Dt$ e ha il significato di densità di probabilità che una *singola* particella, che per $t = 0$ si trova in $x = 0$, si trovi nel punto x all'istante t .

Chiediamoci ora: dopo un tempo t , dove si troverà la particella? Naturalmente se le oscillazioni sono caotiche con ugual probabilità di muoversi in ogni direzione, il valore atteso della posizione sarà 0. Difatti (sempre nel caso unidimensionale, per semplicità) $\mathbf{E}(X_t) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 0 \forall t$.

La domanda più interessante è, invece: dopo un tempo t , a quale distanza dal punto di partenza si troverà la particella? Più precisamente, calcoliamo la deviazione standard $\sqrt{\mathbf{E}(X_t^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2Dt}$.

Quindi Einstein ha dimostrato che una particella ("di polline") che all'istante 0 si trova nell'origine allo scorrere del tempo si muoverà (sotto l'azione del bombardamento delle molecole d'acqua soggette ad agitazione termica) con un moto caotico e irregolare, con una densità di probabilità di transizione (cioè la densità di probabilità che la particella al tempo t si trovi in x) che è gaussiana e - a meno di una costante - risolve l'equazione di diffusione. E' un esempio di processo stocastico continuo, che prende il nome di moto browniano: la posizione nello spazio

della particella è una famiglia X_t di variabili aleatorie (in generale vettori aleatori) dipendenti dal parametro t , con la condizione $X_0 = 0$ e densità di probabilità di transizione $p(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$. Se si rimuove la condizione $X_0 = 0$ e suppone invece $X_0 = x$, la densità è la traslata $p_x(y, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}}$.

D'altra parte sappiamo dalla teoria dell'equazione del calore che $u(x, t) = k(x, t) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy$ risolve $\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$: la soluzione ha il significato probabilistico $u(x, t) = \mathbf{E}^x(g(X_t)) = \mathbf{E}(g(X_t) | X_0 = x)$,

valore atteso di $g(X_t)$ condizionato al fatto che $X_0 = x$. Dunque u risolve $\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$ se e solo se $u(x, t) = \mathbf{E}^x(g(X_t))$ con $\{X_t\}_{t \geq 0}$ processo browniano e $X_0 = x$.

Equazione di Laplace Consideriamo ora una particella che si muove di moto browniano in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, partendo da un punto $x \in \Omega$ all'istante $t = 0$. Poiché lo spostamento medio atteso dopo un tempo t è proporzionale a \sqrt{t} , ci aspettiamo che prima o poi la particella uscirà da Ω . Definiamo la variabile aleatoria “istante di prima uscita” $T_\Omega = \inf \{t > 0 : X_t \notin \Omega\}$: X_{T_Ω} è il punto (aleatorio) del bordo da cui esce la particella.

Consideriamo ora questo “gioco d'azzardo”: si assegna una funzione continua f su $\partial\Omega$; si colloca la particella all'istante $t = 0$ in un punto $x \in \Omega$ e la si lascia muovere di moto browniano finché raggiunge per la prima volta $\partial\Omega$; quando questo accade, si calcola il valore di f nel punto di $\partial\Omega$ da cui la particella è uscita, e tale valore rappresenta la vincita (o perdita, se è negativo) del nostro gioco. Ci chiediamo quale sia la vincita attesa: ovviamente dipende dal punto x di partenza, quindi sarà una funzione $u(x)$. Per come si è definita T_Ω , la vincita (aleatoria) è $f(X_{T_\Omega})$ e la vincita attesa è $u(x) = \mathbf{E}^x(f(X_{T_\Omega}))$.

Affermiamo che analiticamente, questa funzione è anche soluzione del problema di Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = f \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$. La condizione al contorno è ovvia per il significato probabilistico: se $x \in \partial\Omega$, cioè la particella parte da un punto che è già sul bordo, l'istante di prima uscita è $t = 0$ e il punto di prima uscita è certamente x stesso, perciò in questo caso $f(X_{T_\Omega}) = f(x)$ (il valore non è aleatorio ma certo), quindi coincide anche con il suo valore atteso: $\mathbf{E}^x(f(X_{T_\Omega})) = f(x)$. Per provare che u è armonica, si prova che u soddisfa la proprietà di media (di superficie): per ogni sfera $B_r(x)$ la cui chiusura è in Ω risulta $u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y)$. Quindi si sfrutta il risultato noto (teorema inverso rispetto al teorema della media delle funzioni armoniche) che afferma che ogni funzione continua che soddisfa la proprietà di media su tutte le sfere contenute in un dominio è armonica in quel dominio.

Per dimostrare la proprietà di media si calcola il valore atteso $\mathbf{E}^x(f(X_{T_\Omega}))$ con un argomento di valore atteso condizionato che segue dalla versione nel continuo del teorema delle probabilità totali. Consideriamo una sferetta $B_r(x)$ tale che $\bar{B}_r(x) \subseteq \Omega$ e seguiamo nel tempo la nostra particella che, partita da x , prima o poi raggiunge

$\partial\Omega$. Prima di raggiungere $\partial\Omega$ dovrà necessariamente attraversare $\partial B_r(x)$ in qualche punto z . Indicando con $p(x, z)$ la densità di probabilità che la particella partita da x esca da $B_r(x)$ per la prima volta nel punto $z \in \partial B_r(x)$, si può calcolare $\mathbf{E}^x(f(X_{T_\Omega}))$ spezzando la traiettoria della particella in due parti: la prima da x a un punto (aleatorio) $z \in \partial B_r(x)$ e la seconda da z a $\partial\Omega$ (questa seconda parte della traiettoria potrebbe anche, eventualmente, riattraversare la sferetta $B_r(x)$). Allora $u(x) = \mathbf{E}^x(f(X_{T_\Omega})) = \int_{\partial B_r(x)} p(x, z) \mathbf{E}^z(f(X_{T_\Omega})) dz$; infatti vale $\mathbf{E}(f(X_{T_\Omega}) | X_0 = x) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(f(X_{T_\Omega}) | X_{T_{B_r(x)}} = z) | X_0 = x)$, che - ponendo $\mathbf{E}(f(X_{T_\Omega}) | X_{T_{B_r(x)}} = z) = h(Z)$, con $Z = X_{T_{B_r(x)}}$ variabile aleatoria a supporto in $\partial B_r(x)$ che è il punto di prima uscita da $B_r(x)$ - si calcola come $\int_{\partial B_r(x)} \mathbf{E}^z(f(X_{T_\Omega})) p(x, z) dz$, dove $p(x, z)$ è la legge di Z condizionata al fatto che $X_0 = x$.

Ma tale legge è uniforme, perché la particella che parte da x si muove con probabilità uniforme in ogni direzione: allora $p(x, z) dz = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} d\sigma(z)$ e si ottiene $u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \mathbf{E}^z(f(X_{T_\Omega})) d\sigma(z) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(z) d\sigma(z)$, come si voleva dimostrare.

$$\text{Quindi } u \text{ risolve } \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = f \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \iff u(x) = \mathbf{E}^x(f(X_{T_\Omega})).$$

7.2 Classificazione delle EDP lineari del second'ordine

Abbiamo studiato 3 equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti: l'equazione di Laplace, del calore, delle onde. Queste sono i prototipi di tre tipologie di equazioni, che procediamo a definire dopo aver ripercorso le caratteristiche delle 3 equazioni viste.

Le tre equazioni menzionate hanno proprietà molto diverse. Infatti l'equazione di Laplace è stazionaria, mentre le equazioni del calore e delle onde sono di evoluzione: anche prescindendo dal significato fisico di una variabile che si pensa come "variabile tempo", dal punto di vista matematico per le equazioni di evoluzione sono diversi i problemi al contorno che è naturale studiare, e per i quali si dimostra che il problema è ben posto.

1. Pensando a un dominio rettangolare $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ per l'equazione di Laplace e analogamente $\Omega = (0, L) \times (0, T)$ per calore e onde, tipicamente nel primo caso è assegnata una condizione relativa a u su tutto il bordo di Ω ; nel secondo una condizione relativa a u sulla frontiera parabolica; nel terzo è assegnata una condizione relativa a u sulla frontiera parabolica, e inoltre una condizione su u_t .

L'equazione del calore incorpora in sé "la freccia del tempo", infatti il problema all'indietro è malposto; al contrario, l'equazione delle onde è invariante anche per riflessioni temporali, e il problema in avanti e all'indietro si equivalgono.

L'equazione di Laplace e l'equazione del calore regolarizzano; invece la soluzione dell'equazione delle onde è regolare quanto i dati, o addirittura meno: questo fenomeno è dovuto al fatto che l'informazione è trasportata lungo linee caratteristiche, e quindi non c'è modo di guadagnare regolarità (come accade per l'equazione del trasporto), anche se d'altro canto lo stesso fenomeno permette di scrivere l'integrale generale dell'equazione.

L'unicità per l'equazione di Laplace e del calore si è stabilita con principi di massimo, che nascono da un'idea geometrica, mentre per l'equazione delle onde si è usato il metodo dell'energia, che nasce da un'idea fisica³⁴.

Ci sono quindi differenze profonde tra queste tre equazioni, anche se sono tutte lineari del second'ordine a coefficienti costanti. A uno sguardo superficiale si potrebbero pensare molto simili: perché dovremmo aspettarci grandi differenze tra $u_{xx} + u_{yy}$ o $u_{xx} - u_{tt}$? Invece questa differenza di segno è la differenza tra l'equazione di Laplace e quella delle onde, ed è dunque naturale chiedersi in che modo l'informazione di questa differenza sia scritta nella forma dell'equazione.

Def Date le funzioni $a_{ij}, b_k, c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ al variare di $i, j, k = 1, \dots, n$, si dice operatore lineare del second'ordine un operatore del tipo $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{x}) u_{x_k} + c(\mathbf{x}) u$, qualora tale espressione sia ben definita. Si dice parte principale dell'operatore L l'operatore $Au := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j}$.

Ci stiamo occupando quindi delle EDP lineari del second'ordine, con coefficienti eventualmente non costanti. La parte principale dell'operatore L è la parte del second'ordine.

In realtà, per motivi legati alla deduzione fisica del modello differenziale (per esempio nel caso dell'equazione di diffusione), a volte l'equazione si presenta scritta nella forma “di divergenza”: $Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i} + b_j(\mathbf{x}) u)_{x_j} + \sum_{k=1}^n c_k(\mathbf{x}) u_{x_k} + d(\mathbf{x}) u$. In questo caso si chiama ancora parte principale dell'operatore la parte del second'ordine, cioè $Au := \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i} + b_j(\mathbf{x}) u)_{x_j}$. Si potrebbe pensare: calcolando le derivate, ogni equazione in forma di divergenza si può riscrivere nella forma standard (detta “di non divergenza”). Si preferisce però non fare quest'operazione per non dover scrivere le derivate dei coefficienti e tenersi aperta la possibilità che queste derivate possano non esistere, almeno in senso classico.

Ora ci concentriamo sul caso $n = 2$: le variabili sono x e t .

Def Dato un operatore lineare del second'ordine L con parte principale $Pu = a(x, t) u_{xx} + b(x, t) u_{xt} + c(x, t) u_{tt}$ e fissato $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, si dice che L in (x, t) è

i ellittico se $b^2(x, t) - 4a(x, t)c(x, t) < 0$

ii parabolico se $b^2(x, t) - 4a(x, t)c(x, t) = 0$

³⁴In effetti l'intuizione fisica suggerisce anche che non ha senso appellarsi a principi di massimo: è naturale che le soluzioni abbiano punti di massimo anche interni al dominio.

iii iperbolico se $b^2(x, t) - 4a(x, t)c(x, t) > 0$.

Il numero $b^2(x, t) - 4a^2(x, t)c^2(x, t)$ prende il nome di discriminante, proprio come per le equazioni di secondo grado. Le condizioni i, ii, iii nella definizione possono essere riscritte equivalentemente dicendo che $A(x, t) = \begin{bmatrix} a(x, t) & \frac{b(x, t)}{2} \\ \frac{b(x, t)}{2} & c(x, t) \end{bmatrix}$ (matrice dei coefficienti della parte principale) ha determinante positivo, nullo e negativo, rispettivamente. Se l'operatore è a coefficienti costanti, il suo tipo sarà il medesimo $\forall (x, t)$.

1. L'operatore di Laplace $Lu = u_{xx} + u_{yy}$, fissato (x, y) qualsiasi, ha discriminante -4 , per cui è ellittico.

L'operatore di diffusione, trasporto e reazione $Lu = u_t - Du_{xx} + vu_x + cu$ ha parte principale $Au = -Du_{xx}$: fissato (x, t) qualsiasi, ha discriminante 0 , per cui è parabolico.

L'operatore delle onde $Lu = u_{tt} - \omega^2 u_{xx}$ ha discriminante $4\omega^2$, per cui è iperbolico.

Gli operatori a coefficienti non costanti possono cambiare tipo da punto a punto. Questo naturalmente rende molto difficile studiare l'equazione associata.

1. L'operatore di Tricomi $Lu = u_{tt} - tu_{xx}$ ha discriminante $4t$, dunque è iperbolico per $t > 0$, parabolico per $t = 0$ e ellittico per $t < 0$.

Ora si estende la definizione al caso di n variabili.

Def Dato un operatore lineare del second'ordine L con parte principale $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j}$ e matrice A e fissato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice che L in \mathbf{x} è ellittico se la matrice $A(\mathbf{x})$ è definita positiva oppure definita negativa; si dice ellittico in un dominio Ω se lo è in ogni punto di Ω ; si dice che è uniformemente ellittico in Ω se A è uniformemente definita positiva in Ω , cioè $\exists \alpha > 0 : \langle \xi, A\xi \rangle \geq \alpha \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ (q. o. in Ω , cioè con α indipendente da \mathbf{x})

L'ultima condizione è equivalente a richiede che il minimo autovalore di $A(\mathbf{x})$ sia maggiore o uguale di una costante indipendente da \mathbf{x} , e in tal caso non succede che per \mathbf{x} tendente a un certo valore il minimo autovalore tenda a 0 (quindi è una condizione più forte dell'ellitticità). Ovviamente, se L ha coefficienti costanti ed è ellittico in un punto, allora è ellittico e uniformemente ellittico in Ω .

1. L'operatore di Laplace è uniformemente ellittico.

Def Dato un operatore lineare del second'ordine L con parte principale $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j}$ e matrice A e fissato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice che L in \mathbf{x} è iperbolico se la matrice $A(\mathbf{x})$ è indefinita; si dice iperbolico in un dominio Ω se lo è in ogni punto di Ω .

1. L'operatore delle onde $Lu = c^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} - u_{x_{n+1} x_{n+1}}$ è iperbolico in \mathbb{R}^{n+1} : infatti $\langle \xi, A\xi \rangle = c^2 (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) - \xi_{n+1}^2$ cambia segno a seconda di ξ .

Def Dato un operatore lineare del second'ordine del tipo $Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{x}) u_{x_k} + c(\mathbf{x}) u$ e matrice A e fissato $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, si dice che L in (\mathbf{x}, t) è parabolico se la matrice $A(\mathbf{x})$ è definita positiva; si dice parabolico in un dominio $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ se lo è in ogni punto di Q ; si dice che è uniformemente parabolico in Q se A è uniformemente definita positiva in Q , cioè $\exists \lambda > 0 : \langle \xi, A\xi \rangle \geq \lambda \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ (q. o. in $\Omega?$).

L'operatore del calore $u_t - D\Delta u$ è uniformemente parabolico.

Quindi ciò che decide che un operatore sia ellittico o iperbolico è solo la sua parte principale (quella che contiene le derivate seconde); i termini di ordine inferiore (cioè nelle derivate prime o nella u) sono ininfluenti da questo punto di vista. Ad esempio: se al laplaciano sommiamo dei termini qualsiasi contenenti le derivate prime di u , l'operatore rimane uniformemente ellittico.

Per un operatore parabolico la situazione è leggermente diversa. Ciò che conta è $u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j}$: i termini di ordine inferiore sono in questo caso quelli nelle derivate prime rispetto alle sole x_i e nella u , mentre u_t è nella parte principale anche se è una derivata prima. In un'equazione parabolica la derivata rispetto al tempo “pesa” come una derivata seconda rispetto alle variabili spaziali.

Come già accennato, l'equazione di Laplace, del calore e delle onde sono i prototipi di equazioni ellittica, parabolica, iperbolica. A equazioni dei vari tipi corrispondono, in generale, proprietà simili a quelle delle equazioni prototipo, ad esempio dai seguenti punti di vista:

- a** quali sono i problemi al contorno e/o ai valori iniziali che è naturale studiare e per i quali ci si può aspettare che il problema sia ben posto;
- b** quali sono le proprietà di regolarizzazione che l'operatore ha o non ha;
- c** quali tecniche dimostrative si possono utilizzare per dimostrare risultati di esistenza, unicità o dipendenza continua.

Quello che certamente non potremo aspettarci da un operatore (ellittico, parabolico o iperbolico) a coefficienti variabili, eventualmente non regolari, è di essere capaci di calcolare esplicitamente la soluzione, come accade, in situazioni geometriche semplici, per gli operatori di Laplace, calore, onde.

Procediamo a trattare a e b più nel dettaglio, con una premessa su a.

a Cosa vuol dire “problema di Cauchy” per una generica EDP del 2° ordine (che magari non contiene una variabile tempo)? Significa assegnare, lungo un'ipersuperficie Σ di \mathbb{R}^n (e. g. $t = 0$) il valore di u e della sua derivata

normale a Σ . Perché “derivata normale”? Se conosco u su $\mathbb{U}3a3$ posso calcolare le derivate tangenziali a $\mathbb{U}3a3$: la derivata normale è un’informazione indipendente da questa, e conoscendo sia la normale sia le tangenziali si può calcolare qualsiasi derivata direzionale. Il caso particolare che abbiamo visto finora corrisponde all’ipersuperficie $t = 0$, per cui derivata normale significa $\frac{\partial}{\partial t}$. Per sua natura, la soluzione di un problema di Cauchy si cerca, a priori, definita (almeno) in un intorno dell’ipersuperficie in cui si assegna il dato.

Fatta questa premessa, veniamo ai confronti tra i tipi di operatori. A prescindere dalle ipotesi di regolarità sui coefficienti e sul dominio, che andranno precisate, si può dire che per gli operatori ellittici si studiano problemi al contorno (di Dirichlet, Neumann...), mentre non si studia il problema di Cauchy. “Non si studia” significa che non è naturale farlo per i significati fisici che l’equazione ha, e che dal punto di vista matematico non è un problema ben posto per quest’equazione.

Per un operatore iperbolico, invece, tipicamente si studia proprio un problema di Cauchy (con eventuali condizioni al contorno se il dominio spaziale è limitato), con condizioni iniziali assegnate su una ipersuperficie (che generalizza il caso $t = 0$ dell’equazione delle onde). L’ipersuperficie $\mathbb{U}3a3$ su cui si assegnano i dati di Cauchy deve soddisfare una certa condizione, però (dipendente dallo specifico operatore): $\mathbb{U}3a3$ dev’essere una superficie non caratteristica. Senza dare la definizione generale di superficie caratteristica, spieghiamola su un esempio particolare: l’equazione della corda vibrante. L’equazione della corda vibrante $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ha due famiglie di rette caratteristiche, $x \pm ct = k$.

Invece di assegnare le condizioni di Cauchy sulla retta $t = 0$, potremmo assegnarle su (quasi) qualsiasi altra retta $ax + bt + c = 0$, purché non sia proprio una retta caratteristica. Infatti lungo quelle rette si propaga l’informazione, perciò i valori di u e della derivata normale di u su quelle rette non sono tra loro indipendenti, non si possono assegnare arbitrariamente.

Per operatori parabolici si studia il problema di Cauchy globale o di Cauchy con condizioni al contorno nel caso di domini spaziali limitati, nello stesso senso visto per l’equazione del calore: vedendo l’operatore parabolico definito su un dominio Q dello spazio-tempo, si può dire che il dato al contorno è assegnato sulla frontiera parabolica. Ci sono alcune precisazioni da fare. Anzitutto, “problema di Cauchy”, per una EDP del 2° ordine, dovrebbe significare assegnare, per $t = 0$, il valore di u e di u_t ; invece, come per l’equazione del calore, per le equazioni paraboliche si assegna solo u su $\partial_p Q$. Questa anomalia dipende da un’altra anomalia: un operatore parabolico ha una sola famiglia di superfici caratteristiche, che sono proprio le $t = k$. Quindi si sta assegnando la condizione di Cauchy proprio su una superficie caratteristica, ciò che per le equazioni iperboliche è proibito fare; e infatti non è possibile assegnare sia u che u_t , ma solo u . Rispetto alle equazioni iperboliche, quindi, per le paraboliche si assegnano

condizioni di Cauchy “ridotte” (solo sulla u e non su u_t); rispetto alle equazioni ellittiche, per le paraboliche si assegna la condizione di Dirichlet su una frontiera “ridotta”, la frontiera parabolica.

b Gli operatori uniformemente ellittici e uniformemente parabolici con coefficienti costanti oppure variabili ma C^∞ condividono con l'operatore di Laplace e del calore una proprietà di regolarizzazione forte: all'interno del dominio (in spazio o spazio-tempo, rispettivamente), la soluzione dell'equazione omogenea è C^∞ . Se i coefficienti hanno solo una regolarità limitata, ovviamente, anche la regolarità della soluzione ne risentirà. Gli operatori iperbolici, invece, non sono regolarizzanti.

Abbiamo detto che gli operatori uniformemente ellittici o parabolici regolarizzano: il termine “uniformemente” offre lo spunto per fare qualche ulteriore precisazione sulla classificazione degli operatori descritta fin qui. Consideriamo un operatore lineare del second'ordine la cui parte principale sia definita oppure semidefinita (positiva, per fissare le idee): questi operatori si dicono “operatori con forma caratteristica non negativa”. Gli operatori ellittici e parabolici rientrano in questa categoria, ma non solo loro. Vediamo che fenomeni si possono presentare per questi operatori.

a. Un operatore può avere forma quadratica $A(\mathbf{x})$ che è definita positiva per quasi ogni \mathbf{x} del dominio, ma in qualche punto isolato, o lungo certe linee o superfici, la forma quadratica è solo semidefinita positiva. In questo caso si dice che l'operatore è ellittico degenere.

1. $Lu = u_{xx} + x^2 u_{yy}$ è ellittico in \mathbb{R}^2 privato della retta $x = 0$. Lungo tale retta l'operatore degenera.
2. $Lu = \operatorname{div}((x^2 + y^2) \nabla u)$ è ellittico in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, dove degenera.

Per un operatore ellittico degenerare, anche se a coefficienti molto regolari come in questi due esempi, non è necessariamente vero che valgano buone proprietà di regolarizzazione.

b. Un operatore in n variabili può coinvolgere le derivate seconde di un numero di variabili $k < n$, con la matrice dei coefficienti delle derivate seconde definita positiva (su \mathbb{R}^k); se $k = n - 1$ si tratta di un operatore parabolico; se però $k < n - 1$ l'operatore non è né ellittico né parabolico, e si dice ultraparabolico.

1. $Lu = u_t + u_x + u_{yy} + u_{zz}$ agisce su 4 variabili ma solo 2 compaiono nelle derivate seconde; sullo spazio \mathbb{R}^2 delle variabili (y, z) la forma quadratica delle derivate seconde è positiva: l'operatore è ultraparabolico.
2. $Lu = u_t + u_x + u_{yy} - u_{zz}$ non è nemmeno ultraparabolico perché la parte del second'ordine non è definita positiva nella sua dimensione: è iperbolico.

Anche dagli operatori ultraparabolici non ci si possono aspettare a priori le stesse proprietà di regolarità degli operatori uniformemente ellittici o parabolici. Lo studio delle proprietà che rendono “buoni” dal punto di vista

delle proprietà di regolarizzazione anche certi operatori ultraparabolici o ellittici degeneri (non tutti!) rientra in un filone di ricerca noto come teoria degli operatori ipoellittici.

7.3 Concetti diversi di soluzione di un'equazione alle derivate parziali

Il concetto di “soluzione” di un'equazione alle derivate parziali si evolve nella storia e dipende dalla classe di equazioni considerate. Non ci sono solo nozioni più o meno generali di soluzione: l'applicabilità di un concetto di soluzione dipende anche dalle ipotesi sui coefficienti. Vediamo alcuni concetti di soluzione che hanno ciascuno il proprio ambito di interesse e applicabilità nel contesto delle equazioni alle derivate parziali lineari.

Abbiamo visto che le equazioni ellittiche, paraboliche, iperboliche, perfino a coefficienti costanti, possono avere proprietà molto diverse tra loro, e questo già rimanendo nell'ambito delle sole equazioni lineari del second'ordine. Ci si può chiedere se si possa stabilire qualche risultato veramente generale sulle equazioni alle derivate parziali, o per lo meno affrontarle con un approccio unitario.

Teoria delle distribuzioni Una possibilità di affronto unitario alle EDP lineari è offerta dalla teoria delle distribuzioni (Schwartz, > 1950), *limitatamente però alle equazioni a coefficienti C^∞* . Infatti si ricorda che se Ω è un dominio di \mathbb{R}^n , ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è derivabile infinite volte; se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ allora $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (se f è meno regolare, il prodotto fT in generale non è definito). Perciò la teoria delle distribuzioni fornisce il quadro concettuale adatto allo studio delle EDP lineari, di qualunque ordine, a coefficienti reali o complessi infinitamente derivabili (o, come caso particolare, coefficienti costanti). Un operatore differenziale lineare in n variabili e di ordine m si può scrivere nella forma $Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha u$; se i $c_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ allora L si può vedere come operatore lineare $L : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Riguardo a questi operatori differenziali ci sono due problemi molto generali che è naturale porsi:

- i La risolubilità di un operatore differenziale L : si può affermare che per ogni termine noto $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (soddisfacente eventuali ulteriori ipotesi) l'equazione $Lu = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ha almeno una soluzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$?
- ii La regolarità delle soluzioni: si può affermare che per ogni soluzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dell'equazione $Lu = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, se T è regolare (e. g. $C^\infty(\Omega)$), anche $u \in C^\infty(\Omega)$?

Questi due problemi sono meglio precisati nelle due definizioni seguenti.

Def Un operatore differenziale lineare L a coefficienti $C^\infty(\Omega)$ si dice localmente risolubile se $\forall x_0 \in \Omega \exists U(x_0)$ intorno tale che $\forall f \in \mathcal{D}(U(x_0)) \exists u \in \mathcal{D}'(U(x_0))$ soluzione di $Lu = u_f$ in $\mathcal{D}'(U(x_0))$.

Def Un operatore differenziale lineare L a coefficienti $C^\infty(\Omega)$ si dice ipoellittico in Ω se per ogni soluzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dell'equazione $Lu = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, se per un certo aperto $A \subset \Omega$ è $T \in C^\infty(A)$, allora anche $u \in C^\infty(A)$ (i. e. è associata a una distribuzione C^∞ ?).

In tal caso quindi ogni soluzione distribuzionale dell'equazione è regolare negli aperti in cui il termine noto è regolare. In particolare, se L è ipoellittico, ogni distribuzione che risolve l'equazione omogenea $Lu = 0$ in un aperto Ω è in realtà una funzione $C^\infty(\Omega)$!

Il problema di dare delle condizioni sufficienti (o meglio ancora necessarie e sufficienti) affinché un operatore sia localmente risolubile oppure ipoellittico è un problema molto difficile e vasto, nella sua generalità; risposte soddisfacenti si trovano delimitando più strettamente la classe di operatori differenziali che si considerano.

Diamo qualche cenno riguardo a questi problemi nel caso particolare degli operatori a coefficienti costanti.

Consideriamo quindi ora un operatore differenziale lineare in n variabili e di ordine m , a coefficienti costanti (reali o complessi): $Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha u$. In questo contesto, un concetto importante è quello di soluzione fondamentale.

Def Se L è un operatore del tipo $Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha u$, si dice soluzione fondamentale per L una distribuzione $\Gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ che risolve $L\Gamma = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

La soluzione fondamentale Γ , se esiste, non è in generale unica, perché se u risolve $Lu = 0$ allora $L(\Gamma + u) = \delta_0$ e quindi anche $\Gamma + u$ è una soluzione fondamentale.

L'interesse per le soluzioni fondamentali sta nel fatto che se $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora $\Gamma * f$ è ben definita come distribuzione, e soddisfa, per le proprietà della convoluzione, $L(\Gamma * f) = L\Gamma * f = \delta * f = f$. Perciò la distribuzione $u = \Gamma * f$ risolve l'equazione $Lu = f$: in particolare, se l'operatore ammette una soluzione fondamentale, allora è risolubile.

Perciò è importante il seguente risultato (tra i primi successi della teoria delle distribuzioni):

Teo (Malgrange-Ehrenpreis, 1954-1956)

Hp : L è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti

Ts : L ha una soluzione fondamentale (e perciò è risolubile)

Abbiamo determinato in precedenza le soluzioni fondamentali dell'equazione di Laplace e del calore (in qualsiasi dimensione n), e delle onde (in dimensione $n = 1, 2, 3$).

Riguardo al problema della regolarità (cioè l'ipoellitticità dell'operatore) vale il seguente:

Teo

Hp: L è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti

Ts: L è ipoellittico \iff ha una soluzione fondamentale $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

Si osservi che le soluzioni fondamentali che abbiamo determinato per gli operatori di Laplace e del calore sono $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, perciò questi operatori sono ipoellittici. Non è ipoellittico invece l'operatore delle onde, per il quale

$$\text{ad esempio } \Gamma(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} u(ct - |\mathbf{x}|) & \text{se } n = 1 \\ \frac{1}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}} u(ct - \|\mathbf{x}\|) & \text{se } n = 2 \end{cases} \quad \text{con } u \text{ gradino di Heaviside.}$$

Dunque la teoria delle distribuzioni permette di considerare soluzioni distribuzionali, quindi anche molto poco regolari, addirittura non rappresentate da funzioni, purché però l'equazione abbia coefficienti estremamente regolari. Perciò anche questa teoria non è sufficiente.

EDP ellittiche del second'ordine D'ora in poi si considerano solo equazioni lineari del second'ordine uniformemente ellittiche, a coefficienti variabili ma non necessariamente C^∞ : diamo un'idea dei vari concetti di soluzione e le corrispondenti teorie che sono state sviluppate.

Si dice che u è una soluzione classica di un'equazione differenziale $Lu = f$ se u possiede in ogni punto del dominio tutte le derivate che sono coinvolte nell'equazione, e l'uguaglianza $Lu = f$ vale in tutti i punti del dominio ed è un'uguaglianza tra funzioni continue.

Se l'equazione è del second'ordine, questo significa richiedere che u sia almeno $C^2(\Omega)$ e coefficienti e termine noto siano almeno continui. In realtà, si scopre che richiedere la sola continuità di termine noto e coefficienti è troppo poco per avere soluzioni classiche: esistono esempi di funzioni f continue in \mathbb{R}^n per cui l'equazione $\mathbb{U}394u = f$ non ha alcuna soluzione $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Per avere una buona teoria classica bisogna richiedere qualcosa di più della continuità, o meglio una forma quantitativa di continuità. Il concetto chiave è contenuto nella prossima:

Def Si dice che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è hoelderiana di esponente $\alpha \in (0, 1)$ se $\exists c > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| \leq c |x_1 - x_2|^\alpha \forall x_1, x_2 \in \Omega$.

Si dimostra che se f è hoelderiana allora f è uniformemente continua in Ω . L'hölderianità è una condizione più debole rispetto alla lipschitzianità, che è l'analogo con $\mathbb{U}3b1 = 1$, e implica la derivabilità quasi ovunque; le funzioni hölderiane, invece, non sono generalmente derivabili.

Se Ω è un dominio limitato, allora f è anche limitata e si può definire la norma $\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} = \max_{\bar{\Omega}} |f| + \sup_{x_1, x_2 \in \Omega, x_1 \neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}$, che rende l'insieme delle funzioni hoelderiane uno spazio di Banach, indicato con $C^\alpha(\Omega)$. Si dice che $f \in C^{k, \alpha}(\Omega)$ se $f \in C^k(\Omega)$ e tutte le derivate di ordine k di f appartengono a $C^\alpha(\Omega)$.

La teoria di Schauder, sviluppata negli anni 1930, è la teoria classica standard che si applica agli operatori lineari del second'ordine uniformemente ellittici, ed è ambientata negli spazi di tipo Hölder. Il risultato base è il seguente:

Teo

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato con frontiera sufficientemente³⁵ regolare,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{x}) u_{x_k} + c(\mathbf{x}) u, \quad a_{ij}, b_k, c \in C^\alpha(\bar{\Omega}); \quad L \text{ è uniformemente}$$

$$\text{ellittico in } \Omega \text{ e } c(x) \leq 0 \text{ in } \Omega; \quad \begin{cases} Lu = f \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{ha } f \in C^\alpha(\bar{\Omega}), g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$$

Ts: esiste un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema di Dirichlet e vale

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq c \left(\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \right)$$

La teoria di Schauder è soddisfacente nel suo ambito, che richiede coefficienti (più che) continui.

Se pensiamo a un'equazione ellittica in forma di divergenza come caso stazionario di un'equazione di diffusione, per semplicità con la sola parte principale, $Lu = \sum_{i=1}^n (a(\mathbf{x}) u_{x_i})_{x_i}$, allora $a(\mathbf{x})$ descrive la conducibilità termica del materiale, e può essere discontinuo. In questo caso, per quanto regolare sia u , in generale $a(\mathbf{x})u_{x_i}$ non sarà derivabile, e il significato stesso dell'operatore non è chiaro. D'altro canto, se riandiamo al procedimento con cui si è dedotta l'equazione differenziale, vediamo che la quantità dotata di un significato fisico diretto è il flusso di corrente termica $a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})$ attraverso un'opportuna superficie.

L'idea quindi è indebolire la definizione di soluzione, accontentandosi di richiedere che $a(\mathbf{x})u_{x_i}$ sia effettivamente una funzione per $i = 1, 2, \dots, n$, e la derivata $(a(\mathbf{x}) u_{x_i})_{x_i}$ esista solo in senso distribuzionale.

Come al solito, si suppone in un primo tempo che il coefficiente a e la soluzione u siano regolari quanto occorre perché Lu sia ben definito in senso classico e, volendo interpretare l'equazione $Lu = f$ in Ω , moltiplichiamo ambo i membri per $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integriamo su Ω : si ha $\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (a(\mathbf{x}) u_{x_i})_{x_i} \phi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x}$. Integrando per parti il lato sinistro si ottiene $-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a(\mathbf{x}) u_{x_i} \phi_{x_i} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x}$: tale uguaglianza ha senso sotto la sola ipotesi che (ad esempio) $u \in C^1(\Omega)$. In questo caso infatti $v_i := a(\mathbf{x}) u_{x_i} \in L^\infty(\Omega)$, in particolare è una funzione localmente integrabile e quindi ha una distribuzione associata, e l'uguaglianza precedente esprime il fatto che $\sum_{i=1}^n D_{x_i} u_{v_i} = u_f$. Potremmo quindi dare la seguente definizione di soluzione debole dell'equazione $Lu = f$:

Def (soluzione debole, primo tentativo) Si dice che u è soluzione debole di $Lu = f$, con $a \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, se $u \in C^1(\Omega)$ e vale $-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a(\mathbf{x}) u_{x_i} \phi_{x_i} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Questa definizione ha il pregio di dar senso all'equazione anche nel caso in cui a è discontinuo (purché limitato). Il difetto della definizione è il quadro funzionale: lo spazio $C^1(\Omega)$ si accorda male con la definizione di soluzione data mediante un'identità integrale. Infatti gli sviluppi dell'analisi del '900 hanno mostrato che difficilmente si riesce a dimostrare teoremi di esistenza se non si ambienta la ricerca della soluzione u in un opportuno spazio di funzioni, vettoriale, normato e completo. Se un'uguaglianza integrale entra in modo determinante nella definizione di soluzione, lo spazio funzionale in cui cercare la soluzione dovrà essere uno spazio vettoriale munito di una norma di tipo integrale, ma lo spazio $C^1(\Omega)$ munito di una norma integrale non è completo.

Occorre allargare questo spazio $C^1(\Omega)$ a uno spazio più stabile rispetto alle approssimazioni in norma integrale; ma questo significa che anche la definizione di derivata di u va indebolita, nella direzione di una definizione di tipo integrale. Questo porta a introdurre la definizione di derivata debole e di spazi di funzioni derivabili in senso debole, gli spazi di Sobolev, che come vedremo sono spazi di Hilbert di funzioni derivabili in senso debole.

8 Spazi di Sobolev (1935)

Def Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo eventualmente illimitato e $f \in L^1_{loc}(I)$, si dice che f è derivabile in senso debole in I se esiste $g \in L^1_{loc}(I) : -\int_I f(x) \phi'(x) dx = \int_I g(x) \phi(x) dx \forall \phi \in C^1_0(I)$. In tal caso g si dice derivata debole di f in I .

Se vale l'uguaglianza nella definizione $\forall \phi \in C^1_0(I)$, allora vale anche $\forall \phi \in C^\infty_0(I)$. La sostanza della definizione quando $I = \mathbb{R}$ è la seguente: si considera la distribuzione u_f e se ne calcola la derivata distribuzionale Du_f ; se Du_f è rappresentabile come distribuzione associata a una funzione g , quest'ultima funzione si dice derivata debole di f .

Si noti che la derivabilità in senso debole è un concetto globale, perché l'uguaglianza richiesta è globale: o f è derivabile in senso debole in I , oppure non lo è; non esiste la derivabilità debole in un punto.

Se f è derivabile in senso debole in I , lo è anche in ogni intervallo I' contenuto in I (basta considerare solo le ϕ con supporto in $I' \subseteq I$).

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, integrando per parti si mostra che f è derivabile in senso debole con derivata debole $g = f'$.

1. $f(x) = |x|$ non è derivabile in senso classico in \mathbb{R} ; lo è in senso debole? $-Du_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 x \phi'(x) dx + \int_0^{+\infty} x \phi'(x) dx = -\left([x\phi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx\right) + [x\phi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \phi(x) dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) dx$,
con $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (non occorre definirla in 0: comunque è definita quasi ovunque). Dunque f è derivabile in senso debole in \mathbb{R} con derivata debole g , che è la funzione segno (in effetti questo poteva essere dedotto immediatamente sapendo che la derivata distribuzionale di $u_{|x|}$ è associata alla funzione segno).

Questo esempio potrebbe far pensare che la derivata debole, quando esiste, coincida con la derivata classica.

Il seguente esempio confuta (?) questa ipotesi.

2. La funzione gradino $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è derivabile in senso debole in \mathbb{R} ? $-Du_H(\phi) = \int_{\mathbb{R}} H(x) \phi'(x) dx = \int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = -\phi(0)$, che non può essere uguale a $-\int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) dx$ per alcuna $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: il valore dell'integrale non può essere univocamente determinato dal valore di g in un solo punto, dato che questa è definita in un solo punto. Dunque H non è derivabile in senso debole in \mathbb{R} (mentre lo è in qualsiasi intervallo contenuto in $(-\infty, 0)$, e ha derivata debole 0). In effetti questo poteva essere dedotto immediatamente sapendo che Du_H è la delta. Il risultato può essere esteso a qualsiasi funzione con discontinuità a salto.

Si estende la definizione a \mathbb{R}^n .

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio eventualmente illimitato e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, si dice che f è derivabile in senso debole in Ω rispetto alla variabile x_j se esiste $g \in L^1_{loc}(\Omega) : -\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \forall \phi \in C^1_0(\Omega)$. In tal caso g si dice derivata debole di f rispetto a x_j in Ω . Se f è derivabile in senso debole rispetto a $x_j \forall j$, si dice che f è derivabile in senso debole in Ω .

Se f è derivabile in senso debole rispetto a x_j , la sua derivata debole è unica in $L^1_{loc}(\Omega)$: se esistono $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(\Omega) : -\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_1(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_2(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \forall \phi \in C^1_0(\Omega)$, allora si ha in particolare $\int_{\Omega} (g_1 - g_2) \phi d\mathbf{x} = 0 \forall \phi \in C^1_0(\Omega)$, e per il lemma di annullamento $g_1 = g_2$ q. o.³⁶

Per le derivate deboli valgono vari teoremi ben noti per le derivate classiche.

Teo (derivata nulla implica costante)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e connesso, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ è derivabile in

senso debole in Ω , $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ q. o. in $\Omega \forall j = 1, \dots, n$

Ts: f è costante q. o. in Ω

Si noti l'usuale ipotesi di connessione.

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso e $p \in [1, +\infty]$, si dice che $f \in W^{1,p}(\Omega)$ se $f \in L^p(\Omega)$, esistono le sue derivate deboli $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ e tutte appartengono a $L^p(\Omega)$.

Allora è ben definita in $W^{1,p}(\Omega)$, se $p < +\infty$, la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

³⁶alla fine, è la stessa cosa che dire che se una distribuzione è associata a una funzione, allora tale funzione è unica

Invece $\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$ (si può mostrare che sono effettivamente norme). Il significato centrale di queste norme è che tengono conto non solo dei valori di u , ma anche delle sue derivate, a differenza dell'usuale norma L^p : una successione di funzioni che converga in norma $W^{1,p}$ a u deve avere non solo "integrale simile", ma anche "integrale del gradiente simile".

Si definisce $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$, in cui è naturale definire un prodotto scalare: poiché $\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$, si pone

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} f g d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mathbf{x}$$

Effettivamente è bilineare e commutativo, $\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 d\mathbf{x} \geq 0$ e $\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} = 0 \iff u = 0$ q.o. Peraltro $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ ha il significato fisico di energia: un segnale u tale che $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty$ si dice a energia finita (da approfondire).

Teo (completezza degli spazi di Sobolev)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio, $p \in [1, +\infty]$

Ts: $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach, $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert

$H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert sostanzialmente perché $L^2(\Omega)$ lo è.

Dim Ovviamente i $W^{1,p}(\Omega)$ sono spazi vettoriali normati e $H^1(\Omega)$ è uno spazio prehilbertiano.

Dimostriamo solo che $H^1(\Omega)$ è di Hilbert, quindi che è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare, cioè che se $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ è una successione di Cauchy in $H^1(\Omega)$ allora $\{f_k\}$ è convergente in $H^1(\Omega)$. Suppongo quindi che $\|f_k - f_h\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|f_k - f_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(f_k - f_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{k,h \rightarrow +\infty} 0$: allora anche $\|f_k - f_h\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla(f_k - f_h)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k,h \rightarrow +\infty} 0$ e in particolare $\left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_h}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k,h \rightarrow +\infty} 0$. Ma allora $\{f_k\}_k, \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right\}_k \forall j = 1, \dots, n$ sono successioni di Cauchy in $L^2(\Omega)$, il quale è completo: quindi $\exists g, g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega) : f_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} g, \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \xrightarrow{L^2(\Omega)} g_j$. Vorrei dire che f_k converge in norma H^1 a g , quindi mostro che le g_j sono le derivate deboli di g . Poiché $f_k \in H^1(\Omega)$, le f_k sono derivabili in senso debole, cioè $\int_{\Omega} f_k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \phi d\mathbf{x} \forall \phi \in C_0^1(\Omega)$. Ma $f_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} g, \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \xrightarrow{L^2(\Omega)} g_j$, quindi per continuità del prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ il lato sinistro per $k \rightarrow +\infty$ tende a $\int_{\Omega} g \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\mathbf{x}$, mentre il lato destro tende a $-\int_{\Omega} g_j \phi d\mathbf{x}$. Allora vale $\int_{\Omega} g \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} g_j \phi d\mathbf{x} \forall \phi \in C_0^1(\Omega)$, cioè $g \in H^1(\Omega)$ con derivate deboli g_j . Allora $f_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} g, \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \xrightarrow{L^2(\Omega)} g_j$ e dunque $\|f_k - g\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|f_k - g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(f_k - g)\|_{L^2(\Omega)}^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, cioè $f_k \xrightarrow{H^1(\Omega)} g$. ■

L'idea è che in $H^1(\Omega)$ cercheremo le soluzioni delle EDP, quindi interessa sapere quanto le funzioni di $H^1(\Omega)$ possono essere regolari o irregolari. Dagli esempi visti, abbiamo $|x| \in H^1(-1, 1), H(x) \notin H^1(-1, 1)$.

Teo (caratterizzazione di $H^1(a, b)$ per $n = 1$)

$$f \in H^1(a, b) \iff (i) f \in C^0([a, b])$$

$$(ii) \exists f' \text{ derivata classica q. o. in } (a, b) \text{ e } f' \in L^2(a, b)$$

$$(iii) \forall x_1, x_2 \in [a, b] \text{ vale } f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt$$

(i) potrebbe apparire nebulosa: $f \in H^1(a, b)$ è in realtà una classe di equivalenza di funzioni. (i) sarebbe quindi, più precisamente, "esiste almeno una funzione continua nella classe di equivalenza di f ", e a tale funzione continua si riferisce (iii) (? da accertare). La verità di (iii) è invece legata all'assoluta continuità di f (concetto che non trattiamo).

Il teorema è coerente con gli esempi visti: per $n = 1$, le funzioni con discontinuità a salto non soddisfano (i).

1. Per quali α $x^\alpha \in H^1(0, 1)$? $x^\alpha \in C^0([0, 1]) \iff \alpha \geq 0$, e in tal caso è anche in $L^2(0, 1)$. La derivata classica $\alpha x^{\alpha-1}$ è definita q. o. in $(0, 1) \forall \alpha$; $\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(0, 1) \iff \alpha \int_0^1 x^{2\alpha-2} dx$, cioè $\alpha > \frac{1}{2}$. Quindi se $\alpha > \frac{1}{2}$ $x^\alpha \in H^1(0, 1)$. Si noti che se $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ $x^\alpha \in H^1(0, 1)$, ma non è in $C^1([0, 1])$: $H^1(0, 1)$ è uno spazio più grande.

Quindi se $n = 1$ in realtà le funzioni di H^1 non possono essere troppo irregolari: devono essere comunque almeno continue. Se invece $n > 1$, è possibile che ci siano funzioni $H^1(\Omega)$ ma discontinue?

1. Per quali α $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \in H^1(B_1(\mathbf{0}))$? $f \in L^2(B_1(\mathbf{0})) \iff \int_{B_1(\mathbf{0})} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2\alpha}} d\mathbf{x} = c \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \rho^{n-1} d\rho < +\infty$, cioè $\alpha < \frac{n}{2}$. Invece $\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| = \left| \frac{-\alpha x_j}{\|\mathbf{x}\|^{\alpha+1}} \right| = \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^{\alpha+1}}$, che è in L^2 se e solo se $\int_{B_1(\mathbf{0})} \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^{2\alpha+2}} d\mathbf{x} = \int_{B_1(\mathbf{0})} \frac{c}{\rho^{2\alpha+2}} \rho^{n-1} d\mathbf{x} < +\infty$, cioè $\alpha < \frac{n-2}{2}$.

La condizione per la discontinuità è $\alpha > 0$; se $n = 2$ la richiesta per l'appartenenza a H^1 è $\alpha < 0$, quindi da questo esempio non si ricavano casi di funzioni in $H^1(B_1(\mathbf{0}))$ ma discontinue. Si hanno invece per $n \geq 3$: basta prendere f con $\alpha \in (0, \frac{n-2}{2})$. E. g. per $n = 3$ $\alpha = \frac{1}{4}$.

Per $n = 2$ si considera $f(\mathbf{x}) = |\log(\|\mathbf{x}\|)|^\alpha$, che se $\alpha > 0$ è discontinua. $f \in H^1(B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0}))$? $f \in L^2(B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0}))$ perché $\int_{B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0})} |\log(\|\mathbf{x}\|)|^{2\alpha} d\mathbf{x} = \int_0^{1/2} |\log \rho|^{2\alpha} \rho d\rho < +\infty \forall \alpha$; $\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| = \left| \alpha |\log(\|\mathbf{x}\|)|^{\alpha-1} \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|} \right| \in L^2 \iff \int_0^{1/2} \rho \frac{|\log \rho|^{2\alpha-2}}{\rho^2} d\rho < +\infty$, cioè $2 - 2\alpha > 1$, da cui $\alpha < \frac{1}{2}$. Dunque scegliendo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ si hanno esempi di funzioni H^1 e discontinue.

$$2. f_1(x) = \sin|x| \in H^1(-1, 1) \text{ in quanto continua e derivabile classicamente q. o. con derivata } \begin{cases} \cos x & \text{se } x > 0 \\ -\cos(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$L^2(-1, 1). f_2(x) = \frac{\sin|x|}{x} \notin H^1(-1, 1) \text{ perché non è continua in } 0. f_3(x) = \frac{\sin x}{|x|^{\frac{3}{4}}} = \frac{\sin x}{|x|^{\frac{3}{4}}} |x|^{\frac{1}{4}} \in C^0([-1, 1]) \text{ e}$$

$$f'_3(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{3}{4}} \cos x - \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} \sin x}{x^{\frac{3}{2}}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{(-x)^{\frac{3}{4}} \cos x + \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} \sin x}{(-x)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } x < 0 \end{cases}, \text{ che non è } L^2 \text{ (controlla): quindi } f_3 \notin H^1(-1, 1).$$

Tuttavia anche se $n > 1$ le funzioni con discontinuità a salto non possono essere H^1 , e. g. $f(\mathbf{x}) = I_{B_R}(\mathbf{0})$: la derivata distribuzionale su u_f sarebbe una delta sul cerchio.

Teo (Rellich)

Hp: f è lipschitziana in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Ts: f è derivabile in senso classico q. o., $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega) \forall j$

e le sue derivate classiche sono anche derivate deboli

Questo teorema istituisce un collegamento tra derivate classiche e derivate deboli. E' coerente con quanto visto: $|x|$ è lipschitziana.

Dunque se Ω è limitato allora $Lip(\Omega) \subseteq W^{1,\infty}(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$ (ricordando che una funzione lipschitziana su un dominio limitato è limitata). In generale, $Lip(\Omega)$ è l'analogo soboleviano delle funzioni "regolari": se Ω è limitato, $Lip(\Omega)$ sta in qualsiasi spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Teo (derivata del prodotto)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, f \in H^1(\Omega), g \in Lip(\Omega)$ è limitata

Ts: $fg \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_j}g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$

Gli spazi di appartenenza delle funzioni al lato destro sono coerenti col fatto che $fg \in H^1$: $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2, g \in L^\infty$, quindi il prodotto è L^2 , e lo stesso vale per il secondo addendo grazie a Rellich.

8.1 Spazi di Sobolev di funzioni nulle sul bordo del dominio

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che $f \in H^1(\Omega)$ vale zero sul bordo, e si scrive $f \in H_0^1(\Omega)$, se $\exists \{\phi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq C_0^1(\Omega) : \phi_k \xrightarrow{H^1(\Omega)} f$.

La definizione è ben posta perché $C_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$.

La definizione significa che $H_0^1(\Omega)$ è la chiusura di $C_0^1(\Omega)$ in norma $H^1(\Omega)$; equivalentemente, che $C_0^1(\Omega)$ è denso in $H_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma $H^1(\Omega)$. La definizione data cattura bene l'idea di funzione nulla al bordo

perché si chiede la convergenza in norma $H^1(\Omega)$, che è una convergenza in L^2 delle ϕ_k e delle sue derivate: per una funzione su $I \subseteq \mathbb{R}$ non nulla al bordo esisterebbe $\{\phi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq C_0^1(\Omega) : \phi_k \rightarrow^{L^2(\Omega)} f$, ma non tale che $\phi_k \rightarrow^{H^1(\Omega)} f$, perché le derivate delle ϕ_k agli estremi dell'intervallo sarebbero ripidissime, dovendo raggiungere la f che non è nulla agli estremi, e dunque le derivate di ϕ_k non convergerebbero alle derivate di f .

Si può mostrare che $H_0^1(\Omega)$ è chiuso in norma $H^1(\Omega)$ (cioè ogni successione di $H_0^1(\Omega)$ convergente in norma $H^1(\Omega)$ converge a una funzione $H_0^1(\Omega)$) e quindi è completo in tale norma, essendo un sottospazio vettoriale di $H^1(\Omega)$ completo.

Teo (funzioni nulle al bordo in una dimensione)

$$\text{Hp} : (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Ts} : f \in H_0^1(a, b) \iff f \in H^1(a, b) \text{ e } f(a) = f(b) = 0$$

Quindi la definizione data sembra essere un'estensione sensata del caso ben noto in una dimensione. Come al solito, la condizione $f(a) = f(b) = 0$ è richiesta in realtà alla funzione continua appartenente alla classe di equivalenza di $f \in H^1(a, b)$.

Teo (integrazione per parti)

$$\text{Hp:} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, f \in H^1(\Omega), g \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{Ts:} \quad \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} g dx$$

Si noti che gli integrali sono ben posti: le funzioni integrande sono prodotto di due funzioni L^2 . Quindi le funzioni $H_0^1(\Omega)$ si comportano proprio come le funzioni nulle al bordo, dato che soddisfano una formula di integrazione per parti identica a quella vista per le ϕ a supporto compatto.

Dim E' una conseguenza immediata della definizione di derivata debole e della densità di $C_0^1(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$.

Infatti, per ipotesi $\exists \{\phi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq C_0^1(\Omega) : \phi_k \rightarrow^{H^1(\Omega)} g$. Inoltre, per definizione di derivata debole, $\forall k$ vale $\int_{\Omega} f \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \phi_k$. Per $k \rightarrow +\infty$ $\phi_k \rightarrow^{L^2(\Omega)} g$ e $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \rightarrow^{L^2(\Omega)} \frac{\partial g}{\partial x_j}$, quindi, per continuità del prodotto scalare in L^2 , si ha che $\int_{\Omega} f \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} dx \rightarrow^{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx$ e $-\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \phi_k dx \rightarrow^{k \rightarrow +\infty} -\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} g dx$: allora $\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} g dx$. ■

Teo (disuguaglianza di Poincaré)

$$\text{Hp:} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ è un dominio limitato, } u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{Ts} : \exists c = c(\Omega) > 0 : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Questa maggiorazione potrebbe apparire strana: tipicamente accade il contrario, cioè una funzione si maggiora con le sue derivate, e in effetti per funzioni qualsiasi la disuguaglianza non ha senso (si pensi alle funzioni costanti e positive). La disuguaglianza potrebbe avere senso però in $H_0^1(\Omega)$, per funzioni che si annullano al bordo.

Dim Si dimostra il risultato supponendo $u \in C_0^1(\Omega)$ e poi si estende a $H_0^1(\Omega)$, per densità.

Essendo Ω limitato, esiste $R : \Omega \subseteq B_R(\mathbf{0})$, e quindi si può applicare il teorema della divergenza: $\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{x}u^2(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{B_R(\mathbf{0})} \operatorname{div}(\mathbf{x}u^2(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} \langle \mathbf{x}u^2(\mathbf{x}), \mathbf{n} \rangle dS = 0$ perché u è a supporto compatto in Ω . In questo modo si è applicato il teorema della divergenza senza chiedere alcuna regolarità a Ω . Ma $\operatorname{div}(\mathbf{x}u^2(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i u^2(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \left(u^2(\mathbf{x}) + 2x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u(\mathbf{x}) \right) = nu^2 + 2u \langle \mathbf{x}, \nabla u \rangle$, quindi si è scritto $\int_{\Omega} (nu^2 + 2u \langle \mathbf{x}, \nabla u \rangle) d\mathbf{x} = 0$. Allora $\left| n \int_{\Omega} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| = \left| 2 \int_{\Omega} u \langle \mathbf{x}, \nabla u \rangle d\mathbf{x} \right| \leq 2 \int_{\Omega} |u| |\langle \mathbf{x}, \nabla u \rangle| d\mathbf{x}$: poiché $|\langle \mathbf{x}, \nabla u \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\nabla u\| \leq R \|\nabla u\|$, si ha $\left| n \int_{\Omega} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq 2R \int_{\Omega} |u| \|\nabla u\| d\mathbf{x} \leq 2R \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, per la disuguaglianza di Hoelder. Dunque $n \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2R \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, e si ha la tesi con $c = \frac{2R}{n}$.

Ora suppongo che $u \in H_0^1(\Omega)$: per ipotesi esiste $\{u_k\} \subseteq C_0^1(\Omega) : u_k \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$, e $\forall k$ vale $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}$: per $k \rightarrow +\infty$ il lato sinistro tende a $\|u\|_{L^2(\Omega)}$, il lato destro a $c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (perché la convergenza in norma implica la convergenza delle norme H^1 e quindi di ciascuna delle norme L^2), che è la tesi. ■

Raffinando un poco la dimostrazione si può ottenere la tesi con $c_{\Omega} = \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{n}$. La disuguaglianza perde ovviamente di significato se Ω è illimitato: $\operatorname{diam}(\Omega) = +\infty$.

Corollario (equivalenza tra norme)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato

Ts: in $H_0^1(\Omega)$ la norma $H^1(\Omega)$ è equivalente alla norma $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$

Si ricorda che in uno spazio X una norma $\|\cdot\|_1$ su X si dice equivalente a un'altra norma $\|\cdot\|_2$ su X se $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \forall x \in X$.

E' proprio un'applicazione del teorema sopra: la convergenza in H^1 , che sarebbe una convergenza in L^2 delle funzioni e delle derivate, si riduce a una convergenza in L^2 delle derivate grazie alla disuguaglianza sopra.

Dim Ovviamente $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$; d'altra parte, per la disuguaglianza sopra, $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left((c_{\Omega}^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + c_{\Omega}^2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. ■

8.2 Duale di $H_0^1(\Omega)$

Considero ora $T \in H_0^1(\Omega)^*$, cioè T funzionale lineare e continuo su $H_0^1(\Omega)$, che si è detto essere uno spazio di Hilbert. Voglio capire se T può essere in generale associato a un'espressione specifica.

Per il teorema di Riesz, $\exists ! f \in H_0^1(\Omega) : \forall g \in H_0^1(\Omega)$ vale $T(g) = \langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (fg + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\mathbf{x}$, e la norma del funzionale è $\|T\|_{H_0^1(\Omega)^*} = \|f\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Se in particolare $g \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_{\Omega} (fg + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (fg + \sum_{i=1}^n f_{x_i} g_{x_i}) d\mathbf{x}$ può essere vista come azione della distribuzione $u_f - \sum_{i=1}^n D_{x_i} u_{f_{x_i}}$ su g (B dice, con abuso di notazione, $f - \sum_{i=1}^n (f_{x_i})_{x_i}$). Quindi, se $T \in H_0^1(\Omega)^*$, la restrizione di T a $\mathcal{D}(\Omega)$ è la distribuzione $u_f - \sum_{i=1}^n D_{x_i} u_{f_{x_i}}$, (B dice, con abuso, la distribuzione $f - \sum_{i=1}^n (f_{x_i})_{x_i}$), con $f, f_{x_i} \in L^2(\Omega)$, e in generale non è associata ad alcuna funzione.

Viceversa, prese $f_0, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$, considero la distribuzione $u_{f_0} - \sum_{i=1}^n D_{x_i} u_{f_i}$ (B dice la distribuzione $f_0 - \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i}$): $T(g) = (\text{abuso } \int_{\Omega} (f_0 - \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i}) g d\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (f_0 g + \sum_{i=1}^n f_i g_{x_i}) d\mathbf{x} \forall g \in \mathcal{D}(\Omega)$. Quest'ultimo integrale sarebbe ben definito anche se g non fosse una funzione test, ma solo $H_0^1(\Omega)$: si avrebbe sempre il prodotto tra due funzioni L^2 . Ma allora l'estensione di T da distribuzione a elemento di $H_0^1(\Omega)^*$ è univocamente determinata, grazie alla densità di $C_0^1(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$: sapere quanto vale T sulle funzioni test è sufficiente per sapere quanto vale su tutte le funzioni $H_0^1(\Omega)$.

Questo dimostra il seguente

Teo (caratterizzazione distribuzionale di $H_0^1(\Omega)^*$)

$H_0^1(\Omega)^*$ si può identificare con lo spazio delle distribuzioni su Ω

$$\text{del tipo } u_{f_0} - \sum_{i=1}^n D_{x_i} u_{f_i}, \text{ con } f_i \in L^2(\Omega) \forall i = 0, \dots, n$$

B dice: si identifica con le distribuzioni del tipo $\langle f_0 - \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i}, g \rangle$

Si noti che questo non è vero per $H^1(\Omega)^*$: l'estensione di T da $\mathcal{D}(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$ non è unica, perché $C_0^1(\Omega)$ non è denso in $H^1(\Omega)$.

Talvolta si indica $H_0^1(\Omega)^*$ con $H^{-1}(\Omega)$: pensando che $H^1(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni L^2 con derivata L^2 e $H^0(\Omega)$ è usato per le funzioni solo L^2 , $H^{-1}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni che sono "derivata" (B dice debole, ma in realtà distribuzionale?) di una funzione (in realtà di una distribuzione associata a una funzione) L^2 .

1. Un elemento di $H^{-1}(-1, 1)$ è la distribuzione δ_0 , poiché può essere scritta come Du_H e la funzione gradino H è $L^2(-1, 1)$.

Se $n > 1$ la delta non può essere un funzionale lineare continuo su $H_0^1(\Omega)$ perché sappiamo che le funzioni di $H^1(\Omega)$ possono essere discontinue, quindi non necessariamente nella loro classe di equivalenza c'è una funzione continua e parlare del loro valore in un punto è privo di significato [ma quindi perché la delta in più variabili non si può rappresentare nella forma $u_{f_0} - \sum_{i=1}^n D_{x_i} u_{f_i}$?).

2. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$, con $B_R(\mathbf{0}) \subset \Omega$, si considera $f(\mathbf{x}) = I_{B_R(\mathbf{0})}(\mathbf{x})$. $f \in L^2(\Omega)$; le derivate distribuzionali di u_f non sono associabili ad alcuna funzione e sono in $H^{-1}(\Omega)$. Infatti, se $g \in H_0^1(\Omega)$, $D_{x_i} u_f(g) = -u_f(g_{x_i}) = -\int_{B_R(\mathbf{0})} g_{x_i} d\mathbf{x}$, che ha perfettamente senso. Se g fosse abbastanza regolare da poter applicare il teorema della divergenza, l'integrale si riscriverebbe come integrale di superficie: il valore del funzionale dipenderebbe solo dai valori di g sulla superficie della sfera, ed è naturale che non possa essere rappresentato come funzione (è più una distribuzione del tipo misura).

8.3 Spazi di Sobolev di funzioni derivabili m volte

Si definisce $W^{2,p}(\Omega) := \left\{ f \in W^{1,p}(\Omega) : \forall i = 1, \dots, n \text{ esistono tutte}^{37} \text{ le derivate deboli di } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ e appartengono a } L^p(\Omega) \right\}$.

Iterando si ottiene la definizione naturale

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ f \in W^{m-1,p}(\Omega) : \forall \alpha : |\alpha| = m-1 \text{ esistono tutte le derivate deboli di } D^\alpha f \text{ e appartengono a } L^p(\Omega) \right\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$. Si definisce allora $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, che è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(fg + \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f D^\alpha g \right) d\mathbf{x}$.

8.4 Approssimazione di funzioni $H^1(\Omega)$

I teoremi di approssimazione di funzioni $H^1(\Omega)$ con funzioni più regolari sono estremamente utili per dimostrare teoremi: si dimostra la tesi desiderata sulle funzioni più regolari e poi per densità ci si estende alle funzioni $H^1(\Omega)$, proprio come si è fatto nella dimostrazione dell'uguaglianza di Poincaré.

Teo (approssimazione locale)

$$\text{Hp: } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio, } u \in H^1(\Omega), \Omega' \subset \subset \Omega$$

$$\text{Ts: } \exists \{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) : \|u_k - u\|_{H^1(\Omega')} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$\Omega' \subset \subset \Omega$ significa che Ω' è contenuto con compattezza in Ω , cioè Ω' è limitato e $\bar{\Omega}' \subseteq \Omega$.

La convergenza c'è solo in $H^1(\Omega')$, non in $H^1(\Omega)$, quindi è solo lì che l'approssimazione è buona: vicino al bordo le derivate delle u_k saranno molto grandi, perché u_k deve essere a supporto compatto e al contempo approssimare u , che in generale non è nulla sul bordo.

Teo (approssimazione globale in \mathbb{R}^n)

$$\text{Hp: } u \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts: } \exists \{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \|u_k - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

cioè $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $H^1(\mathbb{R}^n)$. Questo implica che ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ in realtà soddisfa la definizione di $H_0^1(\mathbb{R}^n)$, cioè $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ (che intuitivamente ha senso, pensando al fatto che \mathbb{R}^n non ha bordo).

Teo (approssimazione globale in un dominio con frontiera regolare)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano oppure un semispazio, $u \in H^1(\Omega)$

$$\text{Ts: } \exists \{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \|u_k - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow^{k \rightarrow +\infty} 0$$

Quindi in particolare $\exists \{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq C^1(\bar{\Omega}) : \|u_k - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow^{k \rightarrow +\infty} 0$.

Il terzo risultato permette di dimostrare il seguente

Teo (derivazione del prodotto)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano, $f, g \in H^1(\Omega)$

$$\text{Ts: } fg \in W^{1,1}(\Omega) \text{ e } (fg)_{x_i} = f_{x_i}g + fg_{x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Si noti che in generale il prodotto di due funzioni H^1 non è H^1 , perché il prodotto di funzioni L^2 è solo L^1 .

Dim $fg \in L^1(\Omega)$ perché $f, g \in L^2(\Omega)$. Si applica il teorema immediatamente sopra: $\exists \{f_k\}_k, \{g_k\}_k \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \|f_k - f\|, \|g_k - g\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow^{k \rightarrow +\infty} 0$. Essendo $f_k, g_k \in C^1$, vale la regola di derivazione: $(f_k g_k)_{x_i} = (f_k)_{x_i} g_k + f_k (g_k)_{x_i}$, e $f_k \rightarrow^{L^2(\Omega)} f, g_k \rightarrow^{L^2(\Omega)} g, (f_k)_{x_i} \rightarrow^{L^2(\Omega)} f_{x_i}, (g_k)_{x_i} \rightarrow^{L^2(\Omega)} g_{x_i}$.

Osservo la convergenza del lato destro dell'uguaglianza. Per continuità del prodotto scalare $\int_{\Omega} (f_k)_{x_i} g_k d\mathbf{x} \rightarrow \int_{\Omega} f_{x_i} g d\mathbf{x}$, cioè $(f_k)_{x_i} g_k \rightarrow^{L^1(\Omega)} f_{x_i} g$, e analogamente $f_k (g_k)_{x_i} \rightarrow^{L^1(\Omega)} f g_{x_i}$: quindi $(f_k)_{x_i} g_k + f_k (g_k)_{x_i} \rightarrow^{L^1} f_{x_i} g + f g_{x_i}$. Per quanto riguarda il lato sinistro, so (per la formula di integrazione per parti, essendo $f_k g_k \in H^1(\Omega)$) che $\forall \phi \in C_0^1(\Omega)$ (e quindi $H_0^1(\Omega)$) vale $-\int_{\Omega} (f_k g_k) \phi_{x_i} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f_k g_k)_{x_i} \phi d\mathbf{x}$. Quindi, poiché $f_k \rightarrow^{L^2} f, g_k \rightarrow^{L^2} g$, per continuità del prodotto scalare $f_k g_k \rightarrow^{L^1} fg$ e quindi il lato sinistro tende a $-\int_{\Omega} fg \phi_{x_i} d\mathbf{x}$ (moltiplicare per ϕ non cambia nulla); il lato destro, per quanto mostrato sopra, tende a $\int_{\Omega} (f_{x_i} g + f g_{x_i}) \phi d\mathbf{x}$. Si ha quindi $-\int_{\Omega} fg \phi_{x_i} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f_{x_i} g + f g_{x_i}) \phi d\mathbf{x}$, cioè \exists la derivata debole di fg ed è proprio $f_{x_i} g + f g_{x_i}$. ■

8.5 Traccia di una funzione $H^1(\Omega)$

Abbiamo dato una definizione di funzioni $H^1(\Omega)$ che sono nulle sul bordo; se non sono nulle, possiamo comunque dare una definizione del loro comportamento sul bordo? Se $u \in H^1(\Omega)$, non ha senso - perlomeno in senso stretto - parlare della sua restrizione a $\partial\Omega$, perché se Ω è aperto $\partial\Omega$ ha misura nulla, u è definita solo quasi ovunque e non necessariamente nella sua classe di equivalenza c'è una funzione continua.

Allora si introduce il concetto di traccia, che generalizza quello di restrizione: vorremmo poter assegnare a ogni $u \in H^1(\Omega)$ una sua funzione "traccia" appartenente a $L^2(\partial\Omega)$ in modo che:

i sia coerente con il significato classico di restrizione, cioè se $u \in C^1(\bar{\Omega})$ allora la traccia di u coincide con $u|_{\partial\Omega}$;

ii sia coerente con il caso già definito, cioè se $u \in H_0^1(\Omega)$ allora la traccia di u è la funzione nulla.

Si noti che essere $L^2(\partial\Omega)$, se $\partial\Omega$ è abbastanza regolare (cioè è grafico di una funzione f abbastanza regolare; tipicamente si chiede Ω dominio lipschitziano), significa essere L^2 rispetto alla misura di superficie del grafico di f (e tale misura si scriverà quindi, come al solito, $d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} d\mathbf{y}$).

1. Se e. g. $\Omega = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ e $u \in H^1(\Omega)$, $\partial\Omega = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$; si sta cercando $tr(u)$ tale che se $u \in C^1(\bar{\Omega})$ allora $tr(u) = u|_{\partial\Omega} = u(x, 0)$, e $tr(u) \in L^2(\partial\Omega)$ se $\|tr(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\mathbb{R}} u^2(x, 0) dx < +\infty$. Se $\partial\Omega$ fosse stata una curva, si sarebbe calcolato un integrale curvilineo.

Teo (esistenza della traccia)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano oppure un semispazio

Ts: $\exists \tau_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ lineare e continuo tale che

$$(i) \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \tau_0 u = u|_{\partial\Omega}$$

$$(ii) \quad \ker \tau_0 = H_0^1(\Omega)$$

La dimostrazione si fa tipicamente sul semipiano, usando il terzo teorema di approssimazione (infatti le ipotesi sono le stesse).

Abbiamo già visto che se $f \in H^1(\Omega)$, $g \in H_0^1(\Omega)$ allora vale la formula di integrazione per parti $\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} g dx$; l'esistenza di un operatore di traccia permette di generalizzare la formula a $f, g \in H^1(\Omega)$, poiché ora è ben definito un termine di bordo.

Teo (integrazione per parti di funzioni $H^1(\Omega)$)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano oppure un semispazio, $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\text{Ts:} \quad \int_{\Omega} u_{x_i} v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\tau_0 u) (\tau_0 v) n_i dS - \int_{\Omega} u v_{x_i} d\mathbf{x}$$

Le ipotesi sono quelle necessarie per l'esistenza della traccia.

Dim Per il terzo teorema di approssimazione $\exists \{u_k\}_k, \{v_k\}_k \subseteq C^1(\bar{\Omega}) : u_k \rightarrow^{H^1(\Omega)} u, v_k \rightarrow^{H^1(\Omega)} v$. Per il teorema della divergenza³⁸ $\int_{\Omega} (u_k)_{x_i} v_k d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u_k v_k n_i dS - \int_{\Omega} u_k (v_k)_{x_i} d\mathbf{x}$. Per $k \rightarrow +\infty$ il lato sinistro converge a $\int_{\Omega} u_{x_i} v d\mathbf{x}$ per continuità del prodotto scalare, il secondo addendo del lato destro a $-\int_{\Omega} u v_{x_i} d\mathbf{x}$. Invece, poiché

³⁸sarebbe la formula di integrazione per parti generalizzata grazie al teorema della divergenza, ma non abbiamo mai visto prima questa versione

τ_0 è continuo, se $u_k \rightarrow^{H^1(\Omega)} u$ allora $\tau_0 u_k \rightarrow^{L^2(\partial\Omega)} \tau_0 u$; ma $\tau_0 u_k = u_k|_{\partial\Omega}$, e lo stesso vale per le v_k . Quindi, sempre per continuità del prodotto scalare su $L^2(\partial\Omega)$, il primo addendo del lato destro converge a $\int_{\partial\Omega} (\tau_0 u) (\tau_0 v) n_i dS$. Si ha quindi l'uguaglianza della tesi. ■

1. Vediamo un esempio di funzionale lineare e continuo su $H^1(\Omega)$ definito con la traccia. $T : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int_{\partial\Omega} \tau_0 f dS$: è lineare per linearità di integrale e traccia, e $|T(f)| \leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\tau_0 f\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|f\|_{H^1(\Omega)}$ (l'ultima disuguaglianza vale per continuità della traccia), quindi effettivamente T è continuo. Si nota che $T|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ è il funzionale nullo perché $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$. Da questo è evidente che un elemento di $H^1(\Omega)^*$ non è univocamente determinato dai valori che assume su $\mathcal{D}(\Omega)$, a differenza degli elementi di $H_0^1(\Omega)^*$.

Ovviamente nel contesto delle EDP si userà l'operatore di traccia per assegnare i dati al bordo. Ha quindi senso chiedersi se qualsiasi funzione in $L^2(\partial\Omega)$ possa essere vista come traccia di una funzione in $H^1(\Omega)$, cioè se data $f \in L^2(\partial\Omega)$ qualsiasi, $\exists u \in H^1(\Omega) : \tau_0 u = f$. In generale la risposta è no: l'operatore traccia non è suriettivo, cioè $Im\tau_0 = \tau_0(H^1(\Omega)) \subsetneq L^2(\partial\Omega)$. L'immagine dell'operatore $Im\tau_0 = \{f \in L^2(\partial\Omega) : \exists u \in H^1(\Omega) : \tau_0 u = f\}$ si indica con $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Il significato del simbolo è che queste funzioni sono "mezza volta derivabili": un po' meglio che $L^2(\partial\Omega)$ ³⁹.

Una $u \in H^1(\Omega) : \tau_0 u = f$ si dice un rilevamento di f . Quindi se $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ vale $\|f\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ per ogni u rilevamento di f .

Allora si definisce $\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf \left\{ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \mid u \in H_0^1(\Omega) : \tau_0 u = f \right\}$. L'idea è considerare tutte le funzioni u che hanno come bordo f , calcolarne la norma e prendere tra queste la norma minima.

9 Formulazione debole⁴⁰

9.1 Complementi su spazi di Hilbert, problemi variazionali astratti, minimi di funzionali

Def Dato V spazio prehilbertiano su \mathbb{R} , si dice forma bilineare su V una funzione $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ vale $a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w)$ e $a(u, \lambda v + \mu w) = \lambda a(u, v) + \mu a(u, w)$.

Def Data a forma bilineare su V , si dice che a è:

a simmetrica se $a(u, v) = a(v, u) \forall u, v \in V$

³⁹questa intuizione è formalizzata dalla teoria degli spazi di Sobolev con esponente reale

⁴⁰l'ultimo miglio, per così dire

b continua se $\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \forall u, v \in V$

c coerciva se $\exists \lambda > 0 : a(u, u) \geq \lambda \|u\|^2 \forall u \in V$

d nonnegativa se $a(u, u) \geq 0 \forall u \in V$

a e d sono le definizioni consuete. b ricorda la definizione di continuità di un funzionale; in questo caso però, essendo due gli elementi in ingresso di a , al lato destro compaiono due norme. c significa che a è discosta da 0 quando $u = v$; si noti che non avrebbe senso richiedere una disuguaglianza del genere su $a(u, v)$, perché a cambierebbe segno considerando $a(u, -v)$. Ovviamente c implica d.

1. Il prodotto scalare definito su V è una forma bilineare simmetrica per definizione, continua con $M = 1$ per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, coerciva con uguaglianza e $\lambda = 1$ per definizione di norma in uno spazio prehilbertiano.

2. Sia $V = C_0^1([0, 1])$, dotato del prodotto scalare $\langle u, v \rangle_V = \int_0^1 (uv + u'v') dx$ (V è prehilbertiano, ma non di Hilbert); si definisce $a(u, v) = \int_0^1 (\alpha(x) u'(x) v'(x) + \beta(x) u'(x) v(x) + \gamma(x) u(x) v(x)) dx$. Se $\alpha, \beta, \gamma \in L_{loc}^1([0, 1])$, a è ben definita. Quali proprietà devono avere α, β, γ affinché a sia simmetrica, continua, coerciva, nonnegativa?

Se $\beta = 0$ a è simmetrica. Se $\alpha, \beta, \gamma \in L^\infty$, per la disuguaglianza di Hölder $|a(u, v)| \leq \|\alpha\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|\beta\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$. Poiché $\|u\|_V^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$, $\|u'\|_{L^2} \leq \|u\|_V$ (lo stesso vale per v) e il lato destro è maggiorato da $(\|\alpha\|_{L^\infty} + \|\beta\|_{L^\infty} + \|\gamma\|_{L^\infty}) \|u\|_V \|v\|_V$, dunque a è continua.

Poiché $a(u, u) = \int_0^1 (\alpha(x) u'(x)^2 + \beta(x) u'(x) u(x) + \gamma(x) u^2(x)) dx$, vale $a(u, u) \geq \lambda \|u\|_V^2$ se $\beta = 0$ e $\alpha, \beta \geq \lambda$: in tal caso a è coerciva. Se $\beta = 0$ e $\alpha, \beta \geq 0$, a è nonnegativa.

Def Dato H spazio di Hilbert e a forma bilineare su H , si dice problema variazionale astratto (PVA) il problema: "dato $T \in H^*$, determinare $u \in H : T(v) = a(u, v) \forall v \in H$ ".

Un problema variazionale è quindi il problema di determinare u tale che un dato funzionale lineare e continuo su H possa essere rappresentato come azione di una forma bilineare data, con un ingresso fissato a u .

Teo (esistenza della soluzione di un PVA)

Hp: H è uno spazio di Hilbert, a è una forma bilineare su H simmetrica,

continua con costante M e coerciva con costante λ ; $T \in H^*$

Ts: $\exists ! u \in H : T(v) = a(u, v) \forall v \in H$ e $\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda} \|T\|_{H^*}$

La disuguaglianza nella tesi può essere interpretata come continuità dell'operatore $S_a : H^* \rightarrow H$ che a ogni funzionale T associa la soluzione del PVA associato a T e a .

La dimostrazione è di fatto un'applicazione del teorema di rappresentazione di Riesz.

Dim Sia $\langle -, - \rangle_H$ il prodotto scalare di H , che induce la norma $\|\cdot\|_H$. Si definisce il prodotto scalare $\langle u, v \rangle_{H_a} = a(u, v)$.

(1) Mostriamo che è effettivamente un prodotto scalare e che induce su H una norma equivalente a $\|\cdot\|_H$. E' bilineare e commutativo perché a è una forma bilineare e simmetrica; è nonnegativo perché a è coerciva: $a(u, u) \geq \lambda \|u\|_H^2 \geq 0$; $a(u, u) = 0 \iff \|u\|_H = 0 \iff u = 0_H$, per continuità e coercività. Inoltre $\|u\|_{H_a}^2 \geq \lambda \|u\|_H^2$ e d'altra parte $a(u, u) \leq M \|u\|_H^2$ per continuità: quindi $\lambda \|u\|_H^2 \leq \|u\|_{H_a}^2 \leq M \|u\|_H^2$, cioè le norme H_a e H sono equivalenti.

(2) Mostriamo che H dotato del prodotto scalare $\langle -, - \rangle_{H_a}$ è uno spazio di Hilbert. E' noto che se $\{u_k\} \subseteq H$ è una successione di Cauchy secondo la norma H , allora converge in H ; mostriamo che se $\{u_k\}$ è di Cauchy secondo la norma H_a , allora converge in H_a . Si suppone quindi che $\|u_k - u_h\|_{H_a} \rightarrow^{k, h \rightarrow \infty} 0$: ma poiché $\sqrt{\lambda} \|u_k - u_h\|_H \leq \|u_k - u_h\|_{H_a}$, allora $\|u_k - u_h\|_H \rightarrow^{k, h \rightarrow \infty} 0$: poiché H è di Hilbert, $\exists u : \|u_k - u\|_H \rightarrow^{k \rightarrow \infty} 0$. Ma $\|u_k - u\|_{H_a} \leq \sqrt{M} \|u_k - u\|_H$, quindi vale anche $\|u_k - u\|_{H_a} \rightarrow^{k \rightarrow \infty} 0$ e H è completo con la norma H_a .

(3) Consideriamo il PVA "dato $T \in H^*$, determinare $u \in H : T(v) = a(u, v) \forall v \in H$ ". Mostriamo che T è un funzionale lineare e continuo su H anche secondo la norma H_a . La linearità è ovvia; $|T(v)| \leq \|T\|_{H^*} \|v\|_H$, ma $\|v\|_H \leq \frac{\|u\|_{H_a}}{\sqrt{\lambda}}$, quindi $|T(v)| \leq \|T\|_{H^*} \frac{\|u\|_{H_a}}{\sqrt{\lambda}}$, quindi T è continuo anche secondo H_a con $\|T\|_{H_a^*} \leq \frac{\|T\|_{H^*}}{\sqrt{\lambda}}$. Allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz, $\exists ! u \in H : T(v) = \langle u, v \rangle_{H_a} \forall v \in H$ e inoltre $\|u\|_{H_a} = \|T\|_{H_a^*}$. Traducendo tutto in H , $\exists ! u \in H : T(v) = a(u, v) \forall v \in H$ e inoltre $\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda} \|T\|_{H^*}$. ■

Si osservi che in (2) si è in realtà mostrato in generale che se $(H, \langle -, - \rangle_1)$ è uno spazio di Hilbert e $\langle -, - \rangle_2$ è un prodotto scalare che induce una norma equivalente a quella indotta da $\langle -, - \rangle_1$, allora anche $(H, \langle -, - \rangle_2)$ è uno spazio di Hilbert.

Inoltre le ipotesi di continuità e coercività si sono usate in modo *quantitativo*, cioè per scrivere disuguaglianze essenziali alla dimostrazione, mentre la simmetria si è usata in modo solo qualitativo, cioè per affermare che $a(u, v)$ è un prodotto scalare. Esiste infatti una versione più generale del teorema, che rimuove quest'ipotesi, enunciata di seguito.

Teo (Lax-Milgram)

Hp: H è uno spazio di Hilbert, a è una forma bilineare su H

continua con costante M e coerciva con costante λ ; $T \in H^*$

Ts: $\exists ! u \in H : T(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H$ e $\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda} \|T\|_{H^*}$

Noi sopra abbiamo dimostrato il teorema di Lax-Milgram per forme simmetriche.

La risoluzione di un PVA è strettamente connessa alla risoluzione di problemi di minimo di funzionali.

Dato il PVA "dato $T \in H^*$, determinare $u \in H : T(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H$ ", si considera il funzionale $J : H \rightarrow \mathbb{R}, J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - T(u)$. Esso ha spesso il significato fisico di energia; e. g. la soluzione del problema di Dirichlet è quella che minimizza l'energia...?.

Teo (equivalenza tra PVA e minimo di un funzionale)

Hp: H è uno spazio di Hilbert, a è una forma bilineare su H simmetrica e nonnegativa; $T \in H^*$

Ts: $u \in H$ risolve il PVA $T(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H \iff u = \arg \min_{v \in H} J(v)$

Quindi u risolve il problema variazionale astratto se e solo se è il punto di minimo di un opportuno funzionale legato a a e T .

Dim $u \in H$ è tale che $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H \iff$ ⁴¹ $J(u) \leq J(u + \varepsilon v) \quad \forall v \in H, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$. Sostituendo la definizione di J e sfruttando la bilinearità di a si ha $J(u) \leq J(u + \varepsilon v) \iff 0 \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v) + \varepsilon a(u, v) - \varepsilon T(v)$: quindi $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H \iff (*) \varepsilon(a(u, v) - T(v)) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

Mostriamo che l'ultima proposizione scritta è equivalente a dire che u risolve il PVA. Se u risolve il PVA, allora $T(u) = a(u, v) \quad \forall v \in H$, quindi $\varepsilon(a(u, v) - T(v)) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, per nonnegatività di a . Viceversa, se u soddisfa $*$ e per assurdo $\exists v \in H : T(v) \neq a(u, v)$, allora $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon(a(u, v) - T(v)) < 0$ ($a(u, v) - T(v)$ è un numero con segno, basta prendere ε discorde), e se ε è abbastanza piccolo si ha $\varepsilon(a(u, v) - T(v)) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v) < 0$ (perché per $\varepsilon \rightarrow 0$ il termine quadratico è trascurabile rispetto a quello lineare), che è assurdo. ■

⁴¹Dalla scrittura seguente, che calcola una "piccola variazione" di J , nasce il nome della disciplina del calcolo delle variazioni.

9.2 Formulazione debole di problemi ai limiti per equazioni uniformemente ellittiche in forma di divergenza

9.2.1 Problema di Dirichlet

Consideriamo il problema di Dirichlet
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$
. L'equazione è quella di diffusione con anche il termine di reazione, ma senza il termine del prim'ordine. a è il coefficiente di conducibilità, eventualmente discontinuo grazie alla formulazione debole che definiremo; in base al significato fisico dovrebbe essere $a, d \geq 0$. L'obiettivo è dimostrare, con l'apparato teorico appena presentato, un risultato di *buona posizione* in senso debole per tale problema: cioè l'esistenza e unicità della soluzione debole e la sua dipendenza continua dai dati.

Ricaviamo come al solito la definizione di soluzione debole: supponiamo u soluzione classica del problema, per cui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio qualsiasi, $u \in C^2(\Omega)$, $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $a \in C^1(\Omega)$, $d, f \in C^0(\Omega)$. Moltiplicando per $\phi \in C_0^1(\Omega)$ e integrando su Ω si ottiene $\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \phi(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Si può pensare in realtà di star integrando su un qualsiasi dominio limitato lipschitziano contenente Ω (dato che ϕ ha supporto contenuto in Ω), per cui si può applicare la formula di integrazione per parti generalizzata, basata sul teorema della divergenza, senza ulteriori ipotesi su Ω : si ottiene $\int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \forall \phi \in C_0^1(\Omega)$ (il termine di bordo è nullo perché $\phi \in C_0^1(\Omega)$). Quali sono le ipotesi minime per cui entrambi gli integrali sono ben definiti? Poiché $\nabla \phi \in L^2(\Omega)$, è sufficiente che $u \in H^1(\Omega)$, $a, d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, e in tal caso l'uguaglianza scritta vale $\phi \in H_0^1(\Omega)$ (data la densità di $C_0^1(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$). Si noti che non si è ancora imposta la condizione al bordo.

Def Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $a, d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, si dice che $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole del problema
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$
 se vale $\int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$.

Ovviamente dal punto di vista matematico non è necessaria alcuna richieste su a, d , sebbene non abbiano significato fisico qualora negativi.

I calcoli fatti sopra mostrano che se $u \in C^2(\Omega)$, $a \in C^1(\Omega)$, $d, f \in C^0(\Omega)$ e u è soluzione classica del problema, allora u è soluzione debole dell'equazione. Per concludere che $u \in H_0^1(\Omega)$ occorre richiedere Ω dominio limitato lipschitziano e $u \in C^1(\bar{\Omega})$, che sono le ipotesi per applicare il teorema di esistenza della traccia. In tal caso infatti, poiché $u = 0$ su $\partial\Omega$ (nel senso classico), si ha $\tau_0 u = u|_{\partial\Omega} = 0$, e $\ker \tau_0 = H_0^1(\Omega)$. Allora abbiamo dimostrato

Teo (soluzione classica implica debole)

Hp: Ω è un dominio limitato lipschitziano, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$,

$a \in C^1(\Omega)$, $d, f \in C^0(\Omega)$, u risolve il problema in senso classico

Ts: u è soluzione debole del problema

Viceversa, se u è soluzione debole e valgono tutte le ipotesi del teorema sopra, u è soluzione classica. Infatti, sapendo che $u \in H_0^1(\Omega)$, si ha $\tau_0 u = 0 = u|_{\partial\Omega}$, quindi $u = 0$ su $\partial\Omega$ in senso classico. Si sa inoltre che $\int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$; allora, considerando in particolare $\phi \in C_0^1(\Omega)$ e integrando per parti con il teorema della divergenza, si trova $\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a \nabla u) \phi + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \forall \phi \in C_0^1(\Omega)$, per cui l'integranda è nulla e u risolve l'equazione in senso classico.

Per ottenere dei risultati di esistenza della soluzione debole vogliamo usare il teorema di Lax-Milgram, e dobbiamo dunque riformulare il problema di trovare $u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$ come PVA. Ciò è molto semplice: dato lo spazio di Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$, si definisce su H la forma bilineare $a(u, v) = \int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla v \rangle + duv) d\mathbf{x}$. Si definisce inoltre, data $f \in L^2(\Omega)$, il funzionale $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $T(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}$: la linearità è ovvia, e T è un funzionale continuo perché (si ricordi quanto detto sulla rappresentazione degli elementi di $H_0^1(\Omega)^*$), ristretto a $\mathcal{D}(\Omega)$, è una distribuzione associata a una funzione L^2 ; volendo comunque verificare direttamente la continuità si ha $|T(v)| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$, per cui $\|T\|_{H^*} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Dunque $T \in H_0^1(\Omega)^*$.

Il PVA è dunque trovare $u \in H_0^1(\Omega) : a(u, v) = T(v) \forall v \in H_0^1(\Omega)$. Per applicare Lax-Milgram (o la sua versione più debole) occorre verificare sotto quali ipotesi la forma bilineare a è simmetrica, continua e coerciva. Da tali ipotesi seguirà la buona posizione del problema.

a è ovviamente simmetrica. $|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla v \rangle + duv) d\mathbf{x} \right| \leq \|a\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|d\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq (\|a\|_{L^\infty} + \|d\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$: quindi a è continua se i coefficienti $a, d \in L^\infty$.

$a(u, u) = \int_{\Omega} (a \|\nabla u\|^2 + du^2) d\mathbf{x}$: se si fanno le ipotesi di uniforme ellitticità $a(\mathbf{x}) \geq \lambda > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ e $d \geq 0$, si ha $a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2$. Per la disuguaglianza di Poincaré, se Ω è un dominio limitato allora $\|u\|_{L^2} \leq c_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}$: allora $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + c_\Omega^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ e quindi $a(u, u) \geq \frac{\lambda}{1 + c_\Omega^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$. Perciò a è coerciva.

Sotto tutte queste ipotesi, per il teorema di buona posizione si ha che $\exists ! u \in H_0^1(\Omega) : a(u, \phi) = T(\phi) \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, e $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_\Omega + 1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Abbiamo dimostrato il seguente

Teo (buona posizione del problema di Dirichlet)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato, $a, d \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda > 0 : a(\mathbf{x}) \geq \lambda \forall \mathbf{x}, d \geq 0, f \in L^2(\Omega)$

$$\text{Ts: } \exists ! \text{ soluzione debole di } \begin{cases} -\operatorname{div}(a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_\Omega^2 + 1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Vale quindi esistenza e unicità della soluzione, che dipende in maniera continua dal termine noto f . La disuguaglianza perde di significato se Ω è illimitato.

La costante $\frac{c_\Omega^2 + 1}{\lambda}$ è una traduzione quantitativa dell'ipotesi di uniforme ellitticità e della disuguaglianza di Poincaré.

Corollario

Hp: le medesime del teorema sopra

Ts: la soluzione debole del problema è punto di minimo in $H_0^1(\Omega)$ di $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - T(u)$

dove a e T sono definite come sopra. Più esplicitamente, $J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (a \|\nabla u\|^2 + du^2) d\mathbf{x} - \int_\Omega f u d\mathbf{x}$.

Dim Poiché sotto le ipotesi date a è coerciva e quindi nonnegativa, la tesi segue immediatamente dal teorema visto sull'equivalenza tra soluzioni di PVA e punti di minimo di funzionali. ■

9.2.2 Problema di Neumann

Vediamo ora, per la stessa equazione, il problema di Neumann con condizione al bordo omogenea:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

L'obiettivo è di nuovo dimostrare un risultato di buona posizione in senso debole per tale problema.

Ricaviamo come al solito la definizione di soluzione debole: supponiamo u soluzione classica del problema, per cui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio qualsiasi $u \in C^2(\Omega), u \in C^1(\bar{\Omega})$ (la condizione al bordo deve avere significato in senso classico!), $a \in C^1(\Omega), d, f \in C^0(\Omega)$. Moltiplicando per $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ e integrando su Ω si ottiene $\int_\Omega (-\operatorname{div}(a \nabla u) \phi + du \phi) d\mathbf{x} = \int_\Omega f \phi d\mathbf{x}$. Stavolta, non essendo ϕ a supporto compatto, non si può evitare l'ipotesi di Ω dominio limitato lipschitziano per applicare il teorema della divergenza: in tal caso si ottiene $\int_\Omega (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du \phi) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \langle a \nabla u, n \rangle \phi dS = \int_\Omega f \phi d\mathbf{x}$; il termine di bordo è nullo perché $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, n \rangle = 0$ su $\partial\Omega$.

Si ha quindi $\int_\Omega (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du \phi) d\mathbf{x} = \int_\Omega f \phi d\mathbf{x} \forall \phi \in C^1(\bar{\Omega})$. Quali sono le ipotesi minime per cui entrambi gli integrali sono ben definiti? E' sufficiente che $u \in H^1(\Omega), a, d \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$, e in tal caso l'uguaglianza

vale non solo $\forall \phi \in C^1(\bar{\Omega})$, ma $\forall \phi \in H^1(\Omega)$, data la densità di $C^1(\bar{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$ (per il terzo teorema di approssimazione).

Def Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, $a, d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, si dice che $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{se vale } \int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

I calcoli fatti sopra mostrano che se Ω è un dominio limitato e lipschitziano, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $a \in C^1(\Omega)$, $d, f \in C^0(\Omega)$ e u è soluzione classica del problema, allora u è soluzione debole del problema.

Viceversa:

Teo (una soluzione debole con ingredienti regolari è classica)

Hp: Ω è un dominio limitato e lipschitziano, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$u \in H^1(\Omega)$, $a \in C^1(\Omega)$, $d, f \in C^0(\Omega)$, u è soluzione debole del problema

Ts: u è soluzione classica del problema

Dim Applicando la definizione di soluzione debole in particolare alle $\phi \in C_0^1(\Omega)$ e poi il teorema di divergenza all'indietro si trova $\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a \nabla u) \phi + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in C_0^1(\Omega)$, da cui $-\operatorname{div}(a \nabla u) + du - f = 0$ punto per punto in Ω : quindi u risolve l'equazione in senso classico.

Applicando la definizione di soluzione debole in particolare alle $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ (in modo che ci sia anche il termine di bordo) e poi il teorema di divergenza all'indietro si trova $\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a \nabla u) + du - f) \phi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \phi \in C^1(\bar{\Omega})$: il primo addendo è nullo per il punto precedente della dimostrazione, quindi $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ in $\partial\Omega$, e u soddisfa la condizione al bordo in senso classico. ■

Per ottenere dei risultati di esistenza della soluzione debole vogliamo usare il teorema di Lax-Milgram, e dobbiamo dunque riformulare il problema di trovare $u \in H^1(\Omega)$: $\int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\phi d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega)$ come PVA. Dato lo spazio di Hilbert $H = H^1(\Omega)$, si definisce su H la forma bilineare $a(u, v) = \int_{\Omega} (\langle a \nabla u, \nabla v \rangle + duv) d\mathbf{x}$, con $a, d \in L^\infty$. Si definisce inoltre, data $f \in L^2(\Omega)$, il funzionale $T : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $T(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}$: la linearità è ovvia, e T è un funzionale continuo perché come sopra $|T(\phi)| \leq \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$, per cui $\|T\|_{H^*} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Il PVA è dunque trovare $u \in H^1(\Omega)$: $a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$. Per applicare Lax-Milgram (o la sua versione più debole) occorre verificare sotto quali ipotesi la forma bilineare a è simmetrica, continua e coerciva. a è simmetrica e continua se $a, d \in L^\infty$, grazie agli stessi passaggi già visti.

$a(u, u) = \int_{\Omega} (a \|\nabla u\|^2 + du^2) d\mathbf{x}$: se anche si suppone $a(\mathbf{x}) \geq \lambda > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$, si ottiene $a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + d \int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x}$, ma non si può applicare la disuguaglianza di Poincaré perché non si lavora in $H_0^1(\Omega)$. Occorre richiedere

anche $d(\mathbf{x}) \geq c_0 > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$: in tal caso $a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_0 \|u\|_{L^2}^2 \geq \min\{\lambda, c_0\} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$. Abbiamo dimostrato il

Teo (buona posizione del problema di Neumann)

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio, $a, d \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda, c_0 > 0 : a(\mathbf{x}) \geq \lambda, d(\mathbf{x}) \geq c_0 > 0 \forall \mathbf{x}, f \in L^2(\Omega)$

Ts: $\exists !$ soluzione debole di
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min\{\lambda, c_0\}} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Si noti che logicamente non è più richiesto che Ω sia un dominio limitato (anche se da un punto di vista sostanziale è comunque un'ipotesi da fare, insieme alla lipschitzianità).

Corollario

Hp: le medesime del teorema sopra

Ts: la soluzione debole del problema è punto di minimo in $H^1(\Omega)$ di $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - T(u)$

dove a e T sono definite come sopra. Più esplicitamente, $J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a \|\nabla u\|^2 + du^2) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f u d\mathbf{x}$.

Dim Poiché sotto le ipotesi date a è coerciva e quindi nonnegativa, la tesi segue immediatamente dal teorema visto sull'equivalenza tra soluzioni di PVA e punti di minimo di funzionali. ■

Se Ω è un dominio limitato e lipschitziano valgono le relazioni già viste: u soluzione classica e a, d, f regolari $\implies u$ soluzione debole, u soluzione debole e a, d, f regolari $\implies u$ soluzione classica.

Si noti che se $d = 0$ il teorema di buona posizione non vale: viene a mancare l'ipotesi $d \geq c_0 > 0$. Infatti in tal caso il problema diventa
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} : \text{ non può valere l'unicità, perché se } u \text{ è soluzione classica}$$
 anche $u + k$ lo è, e se u è soluzione debole anche $u + k$ lo è. Inoltre, se u è soluzione debole, u è tale che $\int_{\Omega} \langle a \nabla u, \nabla \phi \rangle d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x} \forall \phi \in H^1(\Omega)$: se in particolare $\phi = 1$, si ottiene $0 = \int_{\Omega} f d\mathbf{x}$, cioè c'è una condizione necessaria che il termine noto deve soddisfare per poter parlare di soluzioni deboli. Quindi sicuramente non si può neanche più affermare l'esistenza di una soluzione debole " $\forall f \in L^2$ ".

Con una teoria più raffinata, che fa uso dell'alternativa di Fredholm, si può dimostrare che, se $d = 0$ e $a \geq \lambda > 0$ e $f \in L^2$ soddisfa la condizione necessaria, allora il problema ha almeno una soluzione, che è unica a meno di una costante additiva.

9.2.3 Equazione ellittica più generale

Problema di Dirichlet Adesso si occupiamo del problema di Dirichlet per un'equazione più generale, con condizione al bordo non omogenea:
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} .$$
 L'equazione

descrive la diffusione (con trasporto e reazione) in un mezzo che non solo non è omogeneo, ma neanche isotropo:

$A : \Omega \rightarrow M_{\mathbb{R}}(n, n)$ è simmetrica. Esplicitamente l'equazione è $-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + du = f$.

Iniziamo da $g = 0$.

Ricaviamo come al solito la definizione di soluzione debole: supponiamo u soluzione classica del problema, per cui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio qualsiasi $u \in C^2(\Omega)$, $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $b_i, d, f \in C^0(\Omega)$. Moltiplicando per $\phi \in C_0^1(\Omega)$ e integrando su Ω si ottiene $\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \phi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle \phi(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Si suppone in realtà di star integrando su un dominio limitato lipschitziano contenente $\operatorname{supp}(\phi)$, per cui si può applicare la formula di integrazione per parti generalizzata, basata sul teorema della divergenza, senza ulteriori ipotesi su Ω : si ottiene $\int_{\Omega} (\langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle + \langle \mathbf{b}, \nabla u \rangle \phi + du\phi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x}$ (il termine di bordo è nullo perché $\phi \in C_0^1(\Omega)$), cioè $\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \phi + du\phi \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in C_0^1(\Omega)$. Quali sono le ipotesi minime per cui entrambi gli integrali sono ben definiti? E' sufficiente che $u \in H^1(\Omega)$, $a_{ij}, d, b_i \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, e in tal caso l'uguaglianza vale anche $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$ (data la densità di $C_0^1(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$). Si noti che non si è ancora imposta la condizione al bordo: si chiede $u \in H_0^1(\Omega)$.

Def Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, $a_{ij}, b_i, d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, si dice che $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole del problema
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$
 se vale $\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \phi + du\phi \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$.

Per ottenere dei risultati di esistenza della soluzione debole vogliamo usare il teorema di Lax-Milgram, e dobbiamo dunque riformulare il problema come PVA. Dato lo spazio di Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$, si definisce su H la forma bilineare $a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v + duv \right) d\mathbf{x}$. Si definisce inoltre, data $f \in L^2(\Omega)$, il funzionale $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $T(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}$, funzionale lineare e continuo.

Il PVA è dunque trovare $u \in H_0^1(\Omega) : a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$. La forma bilineare a non è simmetrica: verifichiamo sotto quali ipotesi la forma bilineare a è continua e coerciva per applicare Lax-Milgram.

Per la continuità basta $a_{ij}, b_i, d \in L^\infty$: infatti come al solito, avendo posto $\alpha = \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty}$, $\beta = \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty}$, $\gamma = \|d\|_{L^\infty}$, vale $|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|\nabla u\| \|\nabla v\| + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty} \|\nabla u\| |v| + \|d\|_{L^\infty} |u| |v| \right) d\mathbf{x} \leq \alpha \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \beta \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \gamma \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq (\alpha + \beta + \gamma) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$.

In vista della dimostrazione della coercività supponiamo A simmetrica e uniformemente definita positiva, cioè

che $\exists \lambda > 0 : \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) t_i t_j \geq \lambda \|\mathbf{t}\|^2 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \Omega$ (è l'ipotesi di uniforme ellitticità). Allora, se inoltre $d \geq 0$, $a(u, u) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u + du^2 \right) d\mathbf{x} \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u d\mathbf{x}$. Poiché $|\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u d\mathbf{x}| \leq \beta \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$, si ha $a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \beta \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$. Se Ω è un dominio limitato, con la disuguaglianza di Poincaré si ottiene $a(u, u) \geq (\lambda - c_{\Omega} \beta) \|\nabla u\|_{L^2}^2$. Se $\beta \leq \frac{\lambda}{2c_{\Omega}}$, allora $\lambda - c_{\Omega} \beta \geq \frac{\lambda}{2}$ e infine dalla disuguaglianza di Poincaré $a(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\lambda}{2} \frac{1}{1+c_{\Omega}^2} \|u\|_{H^1}^2$. Perciò a è coerciva.

Sotto tutte queste ipotesi, per il teorema di buona posizione si ha che $\exists ! u \in H_0^1(\Omega) : a(u, \phi) = T(\phi) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, e $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 2 \frac{c_{\Omega}^2 + 1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Abbiamo dimostrato il seguente

Teo

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato, $a_{ij}, b_i, d \in L^{\infty}(\Omega)$, $\exists \lambda > 0 :$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) t_i t_j \geq \lambda \|\mathbf{t}\|^2 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \Omega; \beta \leq \frac{\lambda}{2c_{\Omega}}, d \geq 0, f \in L^2(\Omega)$$

$$\text{Ts: } \exists ! \text{ soluzione debole di } \begin{cases} -\operatorname{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + \langle b(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 2 \frac{c_{\Omega}^2 + 1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$

L'ipotesi $\beta \leq \frac{\lambda}{2c_{\Omega}}$ non è naturale: dipende dalla nostra tecnica dimostrativa, e può essere rimossa.

Poiché la forma bilineare a non è simmetrica, u non può essere interpretata come punto di minimo del funzionale J .

Ora risolviamo il problema di Dirichlet con dato al bordo non nullo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + \langle b(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

L'operatore che appare al lato sinistro dell'equazione d'ora in poi si indicherà con L . Essendo la prima volta - da quando è stata introdotta la formulazione debole - che si affronta la situazione di $g \neq 0$, occorre chiarire in quale senso è intesa la condizione al bordo.

Supponiamo in prima battuta che g sia definita in tutto Ω e $g \in H^1(\Omega)$: si può allora osservare che $u = g$ su $\partial\Omega \iff u - g = 0$ su $\partial\Omega \iff u - g \in H_0^1(\Omega)$. Allora si fa un cambio di funzione incognita per ricondursi al caso già noto: data $w := u - g$, si risolve $\begin{cases} Lw = f - Lg \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$ e poi si ricava $u = w + g$. Il termine noto però ora contiene anche Lg : essendo g solo H^1 , occorre specificare cosa significa Lg , essendo $Lu = -\operatorname{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + \langle b(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle + d(\mathbf{x}) u(\mathbf{x})$. Si nota che, se $a_{ij}, b_i, d \in L^{\infty}$, allora $du, \langle b, \nabla u \rangle, A \nabla u$ sono in L^2 , e dunque si ha una combinazione di funzioni L^2 e derivate di funzioni L^2 : $f - Lg$ può essere scritta come $g_0 - \sum_{i=1}^n (g_i)_{x_i}$ con

$g_i \in L^2(\Omega)$. Allora il lato destro dell'equazione può essere interpretato come elemento di $H_0^1(\Omega)^* = H^{-1}(\Omega)$, e l'uguaglianza $Lw = f - Lg$ come un'uguaglianza tra due funzionali definiti su $H_0^1(\Omega)$.

Per un teorema visto su $H^{-1}(\Omega)$ sappiamo che, se T è $f - Lg$, allora $\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} + \|dg\|_{L^2} + \|\langle b, \nabla g \rangle\|_{L^2} + \|A \nabla g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + (\|d\|_{L^\infty} + \|b\|_{L^\infty} + \|A\|_{L^\infty}) \|g\|_{H^1(\Omega)}$: il funzionale è lineare e continuo. Ci siamo quindi ricondotti a un problema del tipo
$$\begin{cases} Lw = T \in H^{-1}(\Omega) \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$
 : ma questo lo sappiamo già risolvere. Anche se abbiamo trattato finora solo problemi del tipo $Lu = f$ con $f \in L^2$, in realtà avremmo potuto subito scrivere $Lu = T \in H^{-1}(\Omega)$, interpretando l'uguaglianza alla base della definizione di soluzione debole come uguaglianza tra due funzionali lineari e continui. Quindi sappiamo già risolvere questo problema perché tutti i passaggi fatti per mostrare esistenza e unicità della soluzione (l'ultimo teorema visto) erano volti a mostrare le proprietà della forma bilineare al lato sinistro; il ruolo del lato destro è stato solo quello di funzionale lineare continuo su $H_0^1(\Omega)$, indipendentemente dal fatto che fosse associato alla funzione f . Infatti noi abbiamo scritto $|T(\phi)| \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}$, ma avremmo potuto direttamente scrivere $|T(\phi)| \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$. Vale quindi il seguente

Teo

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato, $a_{ij}, b_i, d \in L^\infty(\Omega)$, $\exists \lambda > 0$:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) t_i t_j \geq \lambda \|\mathbf{t}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \Omega; \beta \leq \frac{\lambda}{2c_\Omega}, d \geq 0, f \in L^2(\Omega), g \in H^1(\Omega)$$

$$\text{Ts: } \exists ! u \in H^1(\Omega) : w = u - g \in H_0^1(\Omega) \text{ e } w \text{ è soluzione debole di } \begin{cases} Lw = f - Lg \text{ in } \Omega \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases} ;$$

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)} \right) \text{ e } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c' \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

Per quanto detto sopra, le ipotesi (eccetto quella su g) sono le stesse del teorema precedente!

La seconda disuguaglianza nella tesi è conseguenza immediata della prima e della definizione di w ; la prima disuguaglianza segue dal teorema precedente e dal fatto che $\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} + (\|d\|_{L^\infty} + \|b\|_{L^\infty} + \|A\|_{L^\infty}) \|g\|_{H^1(\Omega)}$.

Vogliamo ora affrontare il caso in cui il dato al bordo g è definito solo su $\partial\Omega$, applicando il teorema della traccia. Se Ω è un dominio limitato lipschitziano e $g \in H^{1/2}(\Omega)$, allora $\exists \tilde{g} \in H^1(\Omega) : \tau_0 \tilde{g} = g$; \tilde{g} non è unica, e - come già menzionato - si dice rilevamento di g . Allora, visto che \tilde{g} è definita in tutto Ω , si può risolvere il problema
$$\begin{cases} Lu = f \text{ in } \Omega \\ u = \tilde{g} \text{ su } \partial\Omega \end{cases}, \text{ ponendo } w = u - \tilde{g} \text{ e risolvendo } \begin{cases} Lw = f - L\tilde{g} \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}. \text{ Però, dato che } \forall g \in H^{1/2}(\Omega) \text{ esistono infinite } \tilde{g} \in H^1(\Omega) : \tau_0 \tilde{g} = g \text{ (mentre } w \text{ e quindi } u \text{ sono univocamente determinate da } \tilde{g}) \text{: occorre quindi mostrare che la soluzione } u \text{ non dipende dal rilevamento } \tilde{g}, \text{ ma solo da } g.$$

Dim Siano $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in H^1(\Omega) : \tau_0 \tilde{g}_1 = \tau_0 \tilde{g}_2 = g$. Allora $\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 \in \ker \tau_0 = H_0^1(\Omega)$. Siano $w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$ soluzioni di
$$\begin{cases} Lw_i = f - L\tilde{g}_i \\ w_i \in H_0^1(\Omega) \end{cases} : \text{considero } u_i = w_i + \tilde{g}_i \text{ e } u = u_1 - u_2. \text{ Allora } u \text{ è tale che } Lu = Lu_1 - Lu_2 = L(w_1 - w_2) + L\tilde{g}_1 - L\tilde{g}_2 = 0.$$
 Come si comporta u sul bordo? Posto $w = w_1 - w_2$, vale $u = w + \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2$: essendo somma di funzioni H_0^1 , anche $u \in H_0^1$. Dunque u risolve
$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} : \text{per unicità della soluzione del problema,}$$
 $u = 0$. ■

Allora, risolvendo il problema in w in base al risultato sopra, si ha $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)} \right)$, e questa disuguaglianza vale per ogni \tilde{g} rilevamento di g . Si può quindi ottenere la maggiorazione più raffinata prendendo l'estremo inferiore delle norme delle \tilde{g} , e si ha $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\tilde{g} \in H^1(\Omega): \tau_0 \tilde{g} = g} \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)} \right)$, cioè - usando la definizione di norma $H^{1/2}$ -

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Omega)} \right)$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teo

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato lipschitziano, $a_{ij}, b_i, d \in L^\infty(\Omega)$, $\exists \lambda > 0$:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) t_i t_j \geq \lambda \|\mathbf{t}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \Omega; \beta \leq \frac{\lambda}{2c_\Omega}, d \geq 0, f \in L^2(\Omega), g \in H^{1/2}(\Omega)$$

$$\text{Ts: } \exists ! u \in H^1(\Omega) \text{ soluzione debole di } \begin{cases} Lu = f \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Omega)} \right)$$

Si è aggiunta l'ipotesi di lipschitzianità del dominio per usare il teorema di traccia, e si è dovuto chiedere $g \in H^{1/2}(\Omega)$. Come al solito, al lato destro della disuguaglianza si potrebbe scrivere, più in generale, $\|T\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

Problema di Neumann Affrontiamo il problema di Neumann direttamente per l'operatore completo, con dato

al bordo non nullo:
$$\begin{cases} Lu = -\text{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u) + \langle b, \nabla u \rangle + du = f \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_A} = g \text{ su } \partial\Omega \end{cases}.$$
 Ricaviamo come al solito la formulazione

debole, supponendo che $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ risolva l'equazione in senso classico con $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $b, d, f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$, Ω dominio limitato e lipschitziano. Allora, moltiplicando per $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ e integrando, u soddisfa anche $-\int_\Omega \text{div}(A \nabla u) \phi d\mathbf{x} + \int_\Omega \langle b, \nabla u \rangle \phi d\mathbf{x} + \int_\Omega du \phi d\mathbf{x} = \int_\Omega f \phi d\mathbf{x}$: per il teorema della divergenza il primo addendo al lato sinistro è $\int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \langle A \nabla u, n \rangle \phi dS = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ji} u_{x_i} \phi_{x_j} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \phi \sum_{i,j=1}^n a_{ji} u_{x_i} n_j dS$. $\langle A n, \nabla u \rangle$ è la derivata di u non nella direzione normale, ma nella direzione effettiva in cui avviene la diffusione (essendo il mezzo non isotropo): è quindi in quella direzione che ha senso stabilire la condizione al bordo, che rappresenta il flusso uscente. Per questo nella formulazione del problema si scrive $\frac{\partial u}{\partial n_A}$.

Si ottiene quindi $\int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \langle b, \nabla u \rangle \phi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} du \phi d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g \phi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x}$, che può essere scritta come $a(u, \phi) = T(\phi) \forall \phi \in C^1(\bar{\Omega})$, con le ovvie definizioni di a e T . Per densità, l'uguaglianza vale $\forall \phi \in H^1(\Omega)$.

Def Dati $a_{ij}, b_i, d \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega)$, si dice che u è soluzione debole di
$$\begin{cases} Lu = f \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_A} = g \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{se}$$
 $u \in H^1(\Omega)$ è tale che $\int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \langle b, \nabla u \rangle \phi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} du \phi d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g \phi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x} \forall \phi \in H^1(\Omega)$.

Si riformula l'uguaglianza come problema variazionale astratto: si cerca $u \in H^1(\Omega) : a(u, \phi) = T(\phi) \forall \phi \in H^1(\Omega)$, con $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega), a(u, \phi) = \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \langle b, \nabla u \rangle \phi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} du \phi d\mathbf{x}, T(\phi) = \int_{\partial\Omega} g \phi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f \phi d\mathbf{x}$.

T è lineare e continuo. Infatti $|T(\phi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\tau_0 \phi\|_{L^2(\partial\Omega)}$: poiché $\|\phi\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{H^1}$ e per continuità della traccia $\|\tau_0 \phi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$, vale $|T(\phi)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$. Dunque $\|T\|_{H^1(\Omega)^*} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$.

Occorre ora dimostrare sotto quali ipotesi $a(u, \phi)$ è continua e coerciva su $H^1(\Omega)$. Per $a_{ij}, b_i, d \in L^\infty$ a è continua (si sono già fatti i conti in un caso analogo). Per valutare la coercività non si può usare la disuguaglianza di Poincaré; si chiede, come già visto, che esista $\lambda > 0 : \sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j \geq \lambda \|\mathbf{t}\|^2$ e $d(\mathbf{x}) \geq c_0 > 0$. Allora $a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \langle b, \nabla u \rangle u d\mathbf{x} + c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$. $|\int_{\Omega} \langle b, \nabla u \rangle u d\mathbf{x}| \leq \beta \int_{\Omega} \|\nabla u\| |u| d\mathbf{x} \leq \beta \|\nabla u\|_2 \|u\|_2$ con $\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty}^2}$; poiché inoltre $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, si ottiene l'ulteriore maggiorazione $\frac{\beta}{2} (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2)$. Quindi $a(u, u) \geq (\lambda - \frac{\beta}{2}) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (c_0 - \frac{\beta}{2}) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$, che è maggiore o uguale di $c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ purché $\frac{\beta}{2} < \frac{\lambda}{2}, \beta < c_0$, quindi se $\beta \leq \min\{\lambda, c_0\}$.

Abbiamo dimostrato il seguente

Teo

Hp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato lipschitziano, $a_{ij}, b_i, d \in L^\infty(\Omega), \exists \lambda > 0 : \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) t_i t_j \geq \lambda \|\mathbf{t}\|^2$

$\forall t \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \Omega; d(\mathbf{x}) \geq c_0 > 0, \beta$ abbastanza piccolo in dipendenza da λ e $c_0, f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega)$

Ts: $\exists ! u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole di
$$\begin{cases} Lu = f \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_A} = g \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)})$$

ripeti osservazioni già viste per il pb di Neumann

Regolarizzazione Abbiamo visto finora risultati del tipo: se u è soluzione debole di un problema, i coefficienti, il dominio e u stessa sono regolari, allora u è anche soluzione classica. Questo è un risultato generalmente facile da dimostrare, e non molto utile. Molto più interessante è invece chiedersi: se u è soluzione debole e i coefficienti e il dominio sono regolari, è vero che allora u è regolare? Risultati di questo tipo si dicono di regolarizzazione, e permettono di concludere che u è soluzione classica.

Nei casi di massima regolarità si riescono a recuperare i teoremi di regolarità della teoria classica; se i coefficienti non sono C^∞ , la regolarità della soluzione che si riesce a dedurre è sempre un po' inferiore a quella dei coefficienti. Questo è un segno che la teoria debole non è quella giusta per ottenere risultati classici.