Analisi Matematica III*

Questi appunti sono stati presi durante le lezioni dell'insegnamento "Analisi Matematica III" tenuto dal prof. Grasselli durante l'A. A. 2023/24. Non sono stati revisionati da alcun docente (potrebbero contenere errori, in forma e in sostanza, di qualsiasi tipo) e non sono in alcun modo sostitutivi della frequentazione delle lezioni. Essendo il corso da 5 CFU, questi appunti aiutano a seguirlo, ma non possono considerarsi una trattazione esaustiva degli argomenti, per la quale si rimanda al libro consigliato: "Analisi 3" di G. Gilardi.

*mariachiara.menicucci@mail.polimi.it per segnalare errori, richiedere il codice LaTeX ecc.

Indice

1 Analisi complessa

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo, cioè $(\mathbb{C}, +)$ e $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ sono due gruppi abeliani, e vale la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto. $\mathbb{C}$, come $\mathbb{R}^2$, non può essere ordinato compatibilmente con le sue operazioni: qualsiasi relazione d'ordine R si definisca, è possibile che aRb e non $(a+c)\,R\,(b+c)$.

Per ogni numero complesso sono possibili tre rappresentazioni: dato $z \in \mathbb{C}, z = \begin{cases} a+ib \\ \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \rho e^{i\theta} \end{cases}$ (algebrica, trigonometrica ed esponenziale). Ogni numero complesso può essere rappresentato graficamente sul piano di Argand-Gauss grazie alla corrispondenza biunivoca $a + ib \longleftrightarrow (a, b)$. (L'identità $i^2 + 1 = 0$ mostra che in $\mathbb{C}$ non vale il teorema di Pitagora, perché in $\mathbb{C}$, a differenza di $\mathbb{R}^2$, è definito un prodotto) Vale $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, e per $\theta = \pi$ $e^{i\theta} = -1$.

In generale $z^2 \neq |z|^2$.

Oltre alla struttura algebrica, per parlare di limiti di funzioni in $\mathbb{C}$ occorre anche una topologia; essendo $\mathbb{C}$ uno spazio metrico con la distanza $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\mathbb{C}$ è uno spazio topologico con la topologia τ indotta dalla metrica: la famiglia degli intorni è $\left\{ \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\}_{\substack{z_0 \in \mathbb{C} \\ r>0}} \right\} = \left\{ B_r(z_0)_{\substack{z_0 \in \mathbb{C} \\ r>0}} \right\}$ e $\tau = \{A \in \mathbb{C} : A \text{ è aperto rispetto a } d\}$.

Si può considerare anche $\mathbb{C}$ esteso, indicato con $\mathbb{C}^*$, che è $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$: gli intorni di ∞ sono del tipo $\bar{B}_r(0)^c = \{z : |z| > r\}$, al variare di $r > 0$. $\mathbb{C}^*$ è uno spazio topologico con aritmetizzazione parziale.

Esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C}$ e i punti della superficie di una sfera, che si realizza tramite la proiezione stereografica: la sfera rappresenta un "modello al finito" di un insieme infinito. Se per semplicità si suppone di avere la sfera goniometrica, in cui il polo Nord è il punto $N = (0, 0, 1)$, dato un punto P sulla superficie della sfera esiste un'unica retta che passa per (P, N): il punto in cui questa retta interseca il piano $z = 0$ è la proiezione del punto sul piano complesso. Più P è vicino a N, più la sua proiezione è un punto del piano con modulo grande. (p. 226)

Def Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice funzione complessa di variabile complessa.

Tali funzioni ci interessano in particolare se D è aperto.

Def Dato $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \to \mathbb{C}$, z_0 punto di accumulazione per A e $l \in \mathbb{C}$, si dice che $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) : z \in (B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}) \cap A \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$.

La definizione di limite è quella naturale di ogni spazio metrico e topologico. Non ci sono tutte le definizioni aggiuntive di limite destro o sinistro, dato che non esiste una relazione d'ordine in $\mathbb{C}$.

1. Si noti che $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ è equivalente a $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = 0$.

Def Dato $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : A \to \mathbb{C}$, si dice che f è continua in $z_0 \in A$ se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, cioè $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, z_0) : z \in B_\delta(z_0) \cap A \Longrightarrow d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$.

Si può sempre scrivere $f(z) = Ref(z) + iImf(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Viceversa, date $u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si può definire $f(z) = u(Rez, Imz) + iv(Rez, Imz)$: c'è una corrispondenza biunivoca tra f e la coppia di funzioni reali (u, v).

1. $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$: $u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$.

2. $f(z) = Rez = x$: $u(x,y) = x, v(x,y) = 0$.

Se u, v sono continue in $\mathbb{R}^2$, f è continua in $\mathbb{C}$.

La definizione di derivata si può facilmente dare grazie all'esistenza di un prodotto in $\mathbb{C}$, come in $\mathbb{R}$.

Def Dato $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$, si dice che f è derivabile in z_0 se esiste finito $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. In tal caso, il valore di tale limite si dice derivata prima di f in z_0 e si indica con $f'(z_0)$.

A aperto fa sì che z_0 sia interno ad A e si possa calcolare $f(z)$ per z in un intorno di z_0. Il rapporto incrementale è ben definito perché in $\mathbb{C}$ è definito un prodotto, mentre in $\mathbb{R}^2$ si dovrebbe calcolare il reciproco di un vettore.

Def Dato $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : A \to \mathbb{C}$, si dice che f è differenziabile in $z_0 \in A$ se $\exists\, \alpha \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + o(z - z_0)$ per $|z - z_0| \to 0$ (equivalentemente, $z \to z_0$).

Prop 1.1 (equivalenza tra derivabilità e differenziabilità)

Hp: $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$

Ts: f è derivabile in $z_0 \Longleftrightarrow$ è differenziabile in z_0 e in tal caso risulta $\alpha = f'(z_0)$

Valgono tutte le usuali regole di derivazione, anche quella per la derivazione di una funzione composta.

1. $f(z) = z^2$; $f'(z) = 2z$.

2. $f(z) = z^2 e^z$; $f'(z) = 2ze^z + z^2 e^z$.

3. $f(z) = \mathrm{Re}(z)$: per calcolare $f'(z)$ non posso usare regole di derivazione. Devo calcolare $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{x - x_0}{x - x_0 + i(y - y_0)}$; considero la restrizione lungo la retta $x = x_0 + t, y = y_0$ (movimento orizzontale sul piano di Argand-Gauss) e calcolo $\lim_{t \to 0} \frac{x_0 + t - x_0}{t} = 1$; considero la restrizione lungo la retta $x = x_0, y = y_0 + t$ (movimento verticale) e calcolo $\lim_{t \to 0} \frac{x_0 - x_0}{it} = 0$. Poiché il valore del limite dipende dal cammino, non esiste, e f non è derivabile in alcun punto.

Scopriremo che la condizione di differenziabilità in $\mathbb{C}$ è molto più restrittiva che in $\mathbb{R}$: se f è differenziabile in $\mathbb{C}$ in ogni punto, allora possiede molte proprietà significative (e. g. è somma di una serie di potenze). Infatti in $\mathbb{R}$ le funzioni non derivabili sono più complicate della semplice $f(z) = \mathrm{Re}(z)$.

Teo 1.2 (condizioni di Cauchy-Riemann)

$$\text{Hp: } A \subseteq \mathbb{C} \text{ aperto, } f : A \to \mathbb{C},\ z_0 = x_0 + iy_0 \in A$$

$$\text{Ts: } f \text{ è derivabile in } z_0 \iff u, v \text{ sono differenziabili in } z_0$$
$$\text{e } \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Questo teorema fornisce una caratterizzazione delle funzioni derivabili che rende evidente quanto siano rare. Le uguaglianze nella tesi si dicono condizioni di Cauchy-Riemann, e sono equivalenti a dire che i campi vettoriali $(u, -v)$ e (v, u) hanno rotore nullo.

Ovviamente le condizioni non sono verificate per Rez.

Dim $\Longrightarrow$ Essendo f differenziabile, $\exists\ \alpha : f(z_0 + h) - f(z_0) = \alpha h + o(h)$, con $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, h = h_1 + ih_2$. Pongo $u := u(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$, $v := v(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$, $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$: essendo $f = u + iv$, vale $u + iv - u_0 - iv_0 = (\alpha_1 + i\alpha_2)(h_1 + ih_2) + o(h_1, h_2) + io(h_1, h_2) = \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2 + o(h_1, h_2) + i(\alpha_1 h_2 + \alpha_2 h_1 + o(h_1, h_2))$: allora, eguagliando parte reale e immaginaria dei due lati, dev'essere $u - u_0 = \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2 + o(h_1, h_2), v - v_0 = \alpha_1 h_2 + \alpha_2 h_1 + o(h_1, h_2)$, cioè u, v sono differenziabili come funzioni di due variabili e vale $\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \alpha_2 = -\frac{\partial u}{\partial y}, \alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$.

$\Longleftarrow$ Se u, v sono differenziabili, si ripete il conto all'indietro e concludo che $f(z_0 + h) - f(z_0) = u + iv - u_0 - iv_0 = (\alpha_1 + i\alpha_2)(h_1 + ih_2) + o(h_1, h_2) + io(h_1, h_2)$, per cui f è differenziabile in z_0. ■

1. E' possibile sfruttare le condizioni di Cauchy-Riemann per verificare la derivabilità di f in altro modo. Sia z^* il coniugato di $z \in \mathbb{C}$ qualsiasi: vale $Rez = \frac{z+z^*}{2}, Imz = \frac{z-z^*}{2i}$. Allora $f(z) = u\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right)$: quindi $\frac{\partial f}{\partial z^*} = \left\langle \nabla u(x, y), \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \nabla v(x, y), \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right) + \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\right)$.
   Quindi f è derivabile in z_0 se e solo se $\frac{\partial f}{\partial z^*}(z_0) = 0$.

Def Dato $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : A \to \mathbb{C}$, si dice che f è olomorfa in A se è derivabile in ogni punto di A; in tal caso si scrive $f \in \mathcal{H}(A)$. Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, f si dice intera.

1. Preso Ω connesso e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se f assume solo valori reali allora f è costante.

2. Se f e f^* sono in $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, allora $f(z) = c \in \mathbb{C}\ \forall\ z$.

3. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $u : A \to \mathbb{R}$ si dice armonica se $u \in C^2(A)$ e $\Delta u = 0$. Si può inoltre dimostrare che se u è armonica allora $u \in C^\infty(A)$. Inoltre, se $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa in A con $u, v \in C^2(A)$, allora u, v sono armoniche: si dimostra applicando le condizioni e poi usando il teorema di Schwarz per le derivate miste. Questo conferma ancora che le funzioni olomorfe sono tanto rare che le funzioni a esse associate sono estremamente regolari.

   Data $u \in C^2(A)$ armonica, si dice armonica coniugata di u una funzione $v : \Delta v = 0$ e $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa. Un teorema afferma che la definizione è ben posta se A è ben fatto: se A è semplicemente connesso, $\forall\ u \in C^2(A) : \Delta u = 0\ \exists\ v \in C^2(A) : \Delta v = 0$, con v unica a meno di una costante, e $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa.

   Per trovare l'armonica coniugata di u si applicano semplicemente le condizioni di Cauchy-Riemann.

1.1 Serie di potenze

Def La successione $\left\{\sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$, che si indica con $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$, si dice serie di potenze di coefficienti $a_n \in \mathbb{C}$ e centro $z_0 \in \mathbb{C}$.

Una serie di potenze è quindi una successione S_N di polinomi in z. In $z = z_0$ la serie converge a 0.

Fissato z, se la successione converge a $l \in \mathbb{C}$, allora $|a_n (z - z_0)^n| \to^{n\to+\infty} 0$. Infatti $S_N = S_{N-1} + a_N (z - z_0)^N$, cioè $a_N (z - z_0)^N = S_N - S_{N-1}$. Poiché $\lim_{N\to+\infty} (S_N - S_{N-1}) = 0$, anche $\lim_{N\to+\infty} a_N (z - z_0)^N = \lim_{N\to+\infty} \left|a_N (z - z_0)^N\right| = 0$: questa condizione si dice condizione necessaria di convergenza.

Ricordiamo che $\limsup_n a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k$, mentre $\liminf_n a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} a_k$; esistono sempre perché $\sup_{k\geq n} a_k$ e $\inf_{k\geq n} a_k$ sono successioni monotone in n (rispettivamente decrescente e crescente).

Teo 1.3 (convergenza delle serie di potenze)

$$\text{Hp: } a_n \in \mathbb{C}\ \forall\ n,\ z_0 \in \mathbb{C},\ \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \alpha \in \bar{\mathbb{R}}^* = [0, +\infty],\ r = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Ts: (i) } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n \text{ converge assolutamente } \forall\ z : |z - z_0| < r$$

$$\text{(ii) } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n \text{ non converge per alcun } z : |z - z_0| > r$$

Le ipotesi sono sempre verificate: il teorema è estremamente generale. Resta da determinare cosa accade agli $z : |z - z_0| = r$.

Dim Senza perdita di generalità si suppone $z_0 = 0$. Sia $z \in \mathbb{C}$.

(i) Sia $r > 0$. Se $|z| < r$, allora $\exists\ q \in (0,1)\,, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : |a_n|^{\frac{1}{n}}\,|z| < q\ \forall\ n > n_0$. Infatti, se per assurdo così non fosse, si avrebbe che $\forall\ q \in (0,1)\,, \forall\ n_0 \in \mathbb{N} : \exists\ n > n_0 : |a_n|^{\frac{1}{n}}\,|z| \geq q$. Ma allora $\forall\ n_0\ \sup_{m \geq n_0} |a_m|^{\frac{1}{m}}\,|z| \geq 1$: dunque $\limsup_n\ |a_n|^{\frac{1}{n}}\,|z| \geq 1$, cioè $\alpha\,|z| \geq 1$, cioè $|z| \geq r$, che è assurdo.

Quindi definitivamente $|a_n|\,|z|^n \leq q^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, in quanto serie geometrica con ragione < 1, converge: quindi $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge assolutamente[1].

Se $r = 0$, la serie converge solo per $z = z_0$ (anche alla luce di (ii)).

Se $r = +\infty$, r nel ragionamento sopra può essere scelto grande a piacere, quindi la serie converge assolutamente $\forall\ z$.

(ii) Sia $|z| > r$. Allora $\exists\ \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} : |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}\,|z| > 1\ \forall\ k$: infatti, se per assurdo non fosse così, vorrebbe dire che $\exists\ \nu : |a_n|^{\frac{1}{n}}\,|z| \leq 1\ \forall\ n > \nu$. Allora si avrebbe $\sup_{m \geq n} |a_m|^{\frac{1}{m}}\,|z| \leq 1\ \forall\ n > \nu$, da cui $\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}\,|z| \leq 1$, cioè $\alpha\,|z| \leq 1 \Longleftrightarrow |z| \leq r$, che è assurdo. Allora non è possibile che $|a_n|^{1/n}\,|z| \to 0$ per $n \to +\infty$: è violata la condizione necessaria di convergenza. ■

Def Data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n$ con $a_n \in \mathbb{C}\ \forall\, n$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \alpha \in \bar{\mathbb{R}}^* = [0, +\infty]$ e $r = \frac{1}{\alpha}$, r si dice raggio di convergenza della serie; si dice centro di convergenza della serie, e si indica con $C_r\,(z_0)$, $\{z \in \mathbb{C}^* : |z - z_0| \leq r\}$.

Il centro di convergenza è un disco chiuso, anche se in generale non sappiamo se includere il bordo; esso contiene anche $+\infty$ se $r = +\infty$.

Se $|z| < r$, dalla dimostrazione si ricava che $|a_n|\,|z|^n \leq q^n$, dove al lato destro si ha il termine generale di una serie convergente: quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ è totalmente convergente nel disco aperto di raggio r. Per il criterio di Weierstrass, la convergenza è anche uniforme in qualsiasi disco chiuso di raggio $\rho = \delta < R$ e centrato in z_0.

Poiché la convergenza uniforme preserva la continuità, nel disco aperto $\mathring{C}_r\,(z_0)$ la somma della serie è una funzione $f\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n$ continua.

1. Sul bordo del disco possono presentarsi la situazioni più varie (esistono teoremi a riguardo).

   $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ha $\alpha = R = 1$; sul bordo, $\{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$, non converge perché è violata la condizione necessaria di convergenza.

   $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$ ha $\alpha = R = 1$; sul bordo, $\{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$, converge per $z = -1$ grazie al criterio di Leibniz, non converge per $z = 1$; con un teorema si può dimostrare che converge per $z \neq 1$.

   $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ ha $\alpha = R = 1$; sul bordo, $\{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$, converge.

[1] sarebbe necessario citare un criterio di convergenza assoluta per le serie complesse

Prop 1.4 (raggio di convergenza della serie derivata)

$$\text{Hp: } a_n \in \mathbb{C}\ \forall\ n,\ z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\text{Ts: } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n \ \text{ e } \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n (z-z_0)^{n-1} \ \text{ hanno lo stesso raggio di convergenza}$$

Dim Vale $\limsup |na_n|^{\frac{1}{n}} \leq^{2} \limsup |n|^{\frac{1}{n}} \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, ma vale anche $\limsup |na_n|^{\frac{1}{n}} \geq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, quindi $\limsup |na_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, e le due serie di potenze hanno lo stesso raggio di convergenza. ■

Teo 1.5 (la somma di una serie di potenze è olomorfa)

$$\text{Hp: } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n \ \text{ ha raggio di convergenza } r>0,\ f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n \ \ \forall\ z : |z-z_0| < r$$

$$\text{Ts: } f \in \mathcal{H}(C_r(z_0)) \ \text{ e } f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n (z-z_0)^{n-1} \ \ \forall\ z : |z-z_0| < r$$

Ovviamente la somma di una serie di potenze in generale è ben definita solo per $|z-z_0| < r$.

Dim Sia $z_0 = 0$ per semplicità. Considero $\tilde{z} \in C_r(z_0) : |\tilde{z}| < r$ e $\delta < r - |\tilde{z}|$. Considero il rapporto incrementale $\frac{f(\tilde{z}+h)-f(\tilde{z})}{h}$ con $|h| < \delta$ (per cui il rapporto è ben definito: si è all'interno del disco). $\frac{f(\tilde{z}+h)-f(\tilde{z})}{h} = \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\tilde{z}+h)^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \tilde{z}^n}{h} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n((\tilde{z}+h)^n - \tilde{z}^n)}{h}$: affinché f sia derivabile in $\tilde{z} \in C_r(z_0)$ è necessario mostrare che la serie al lato destro converge quando $|h|$ abbastanza piccolo.

Infatti, poiché $a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j-1}$, vale $\frac{(\tilde{z}+h)^n - \tilde{z}^n}{h} = \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{z}+h)^j \tilde{z}^{n-j-1}$, quindi $\frac{f(\tilde{z}+h)-f(\tilde{z})}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{z}+h)^j \tilde{z}^{n-j-1}$. Osservo che $\left|\sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{z}+h)^j \tilde{z}^{n-j-1}\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left|(\tilde{z}+h)^j \tilde{z}^{n-j-1}\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} (|\tilde{z}|+|h|)^j |\tilde{z}|^{n-j-1}$. Poiché $|h| < \delta$ e $|\tilde{z}| \leq |\tilde{z}| + \delta$, si ottiene l'ulteriore maggiorazione $\sum_{j=0}^{n-1} (|\tilde{z}|+\delta)^{n-1} = n(|\tilde{z}|+\delta)^{n-1}$: dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left|\sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{z}+h)^j \tilde{z}^{n-j-1}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (|\tilde{z}|+\delta)^{n-1}$: questa serie converge per $|\tilde{z}|+\delta < r$ perché ci si trova nel disco di convergenza. Inoltre la convergenza è uniforme per $|h| \leq \frac{\delta}{2}$.

Allora, passando al limite, esiste finito $\lim_{|h|\to 0} \frac{f(\tilde{z}+h)-f(\tilde{z})}{h} = \lim_{|h|\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{z}+h)^j \tilde{z}^{n-j-1}$ (l'uniformità consente lo scambio di limite e serie) e risulta uguale alla serie della derivata $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n \tilde{z}^{n-1}$, per cui $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n \tilde{z}^{n-1}$. ■

Corollario

$$\text{Hp: } f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n \ \text{ ha raggio di convergenza } r > 0$$

$$\text{Ts: } f \text{ ha derivata continua di ogni ordine in } C_r(z_0) \ \text{ e } f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} k! \binom{n}{k} a_n (z-z_0)^{n-k}$$

Dim La serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie originaria, quindi vale l'argomento già visto.

■

[2] Si ricorda che il limsup del prodotto di due successioni è minore o uguale del prodotto dei limsup; in generale non vale l'uguaglianza.

In particolare $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$, per cui $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$: una serie di potenze è la serie di Taylor della sua somma.

1.2 Estensione delle funzioni trascendenti elementari

Le funzioni trascendenti elementari sono somma della loro serie di Taylor in $\mathbb{R}$. Si può estendere banalmente la cosa in campo complesso?

Teo 1.6 (estensione delle funzioni reali in campo complesso)

$$\text{Hp: } f : (a,b) \subseteq \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \text{ è derivabile in } (a,b), \exists\, F : A \supset (a,b) \to \mathbb{C} : F|_{(a,b)} = f$$

$$\text{Ts: } F \text{ è unica}$$

Quindi, dato che $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, la funzione $E(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ è l'unica estensione di e^x: infatti $E(z)|_{\mathbb{R}} = e^x$. E' allora naturale definire $e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$; non è banale definire in altro modo e^z. Analogamente si definiscono le funzioni $\sin z, \cos z, \tan z, \sinh z, \cosh z, \tanh z$, e valgono quasi tutte le proprietà già note: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1 z_2}$, dimostrabili con proprietà delle serie di potenze.

Diventa così banale l'uguaglianza $e^z = \cos z + i \sin z$, cioè $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$: si dimostra sommando le due serie. Vale inoltre $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$: ponendo $z = iy$ si trova $\cos z = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y)$, che è una funzione superiomente illimitata in modulo. Non vale quindi $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ in campo complesso.

1.3 Trasformazioni conformi

Teo 1.7

$$\text{Hp: } f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ è derivabile in } z_0 \in A,\ |f'(z_0)| \neq 0$$

$$\text{Ts: } f \text{ preserva gli angoli}$$

Segue una giusitificazione informale del risultato. Se f è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ e h coinvolto nella definizione del rapporto incrementale è $h \in \mathbb{R}$, vale $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ (il valore del limite è lo stesso lungo qualsiasi direzione: infatti $\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0+h, y_0) + iv(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$). Ma per Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, quindi $|f'(z_0)|^2 = u_x^2(x_0, y_0) + v_x^2(x_0, y_0) = u_y^2(x_0, y_0) + v_y^2(x_0, y_0)$.

Sia $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$: la sua matrice jacobiana è $J_{\mathbf{F}}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$.

Moltiplicando e dividendo per $f'(z_0)$ si ottiene $|f'(z_0)| \begin{bmatrix} \frac{u_x(x_0,y_0)}{|f'(z_0)|} & \frac{u_y(x_0,y_0)}{|f'(z_0)|} \\ \frac{v_x(x_0,y_0)}{|f'(z_0)|} & \frac{v_y(x_0,y_0)}{|f'(z_0)|} \end{bmatrix} = |f'(z_0)| \, \Theta(x_0,y_0)$. Θ è una matrice ortogonale con $\det \Theta(x_0,y_0) = \frac{1}{|f'(z_0)|} (u_x v_y - v_x u_y) |_{(x_0,y_0)} = \frac{1}{|f'(z_0)|} \left(u_x^2 + v_x^2\right) |_{(x_0,y_0)} = 1$ per quanto scritto sopra. Quindi la matrice Θ rappresenta una rotazione che preserva l'ordinamento, il fattore $\frac{1}{|f'(z_0)|}$ un'omotetia (una riduzione o aumento di scala). Questo significa che il differenziale di $\mathbf{F}$ è un'applicazione lineare (rappresentata dalla matrice jacobiana) che preserva gli angoli in z_0 (cioè gli angoli tra le rette tangenti in z_0 di due curve qualsiasi passanti per z_0), nel senso che $\langle \Theta\mathbf{x}, \Theta\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ e $||\Theta\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}|| \; \forall \; \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Dunque f localmente si comporta come composizione di una traslazione, una rotazione e un'omotetia e anch'essa "preserva gli angoli".

Def Data $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f si dice trasformazione conforme di A se f preserva l'orientamento delle curve a sostegno in A e gli angoli che esse formano.

Tali trasformazioni aiutano a risolvere problemi in dominii complicati, preservando e. g. le linee di flusso.

1.4 Cammini, circuiti e integrali lungo cammini

Def Una funzione $r : [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice di classe C^1 a tratti se è continua in $[a,b]$ e $\exists$ una partizione $[t_0,t_1], ..., [t_{n-1},t_n]$ di $[a,b]$ tale che $r|_{[t_{j-1},t_j]}$ è $C^1([t_{j-1},t_j]) \; \forall \; j = 1,...,n$.

Def r_1, r_2 C^1 a tratti si dicono equivalenti se $\exists \; \phi : D_{r_2} \to D_{r_1}$ biunivoca e strettamente crescente tale che $r_2 = r_1 \circ \phi$.

Tale relazione è di equivalenza nell'insieme delle curve C^1 a tratti.

Def Si dice cammino orientato in $\mathbb{C}$, e si indica con C, una classe di equivalenza di curve C^1 a tratti, dette parametrizzazioni.

Le parametrizzazioni nella stessa classe di equivalenza hanno tutte lo stesso sostegno e lo stesso orientamento.

Def Dato C cammino orientato e $r : [a,b] \to \mathbb{C}$ una sua parametrizzazione qualsiasi, $r(a), r(b)$ si dicono primo e secondo estremo; $r([a,b]) = Imr$ si dice sostegno di C; se $r(a) = r(b)$ C si dice chiuso e prende il nome di circuito, altrimenti si dice aperto; se $\gamma = r([a,b]) \subseteq A \subseteq \mathbb{C}$, C si dice cammino di A; la classe di equivalenza delle parametrizzazioni $r(b + t(a-b)), t \in [0,1]$, si dice cammino inverso di C e si indica con $-C$; se $c \in (a,b)$ e C_1, C_2 sono parametrizzati da $r|_{(a,c)}, r|_{(c,b)}$ rispettivamente, si dice che C è somma dei cammini C_1, C_2 e si scrive $C = C_1 + C_2$.

Le nozioni definite non dipendono dalla parametrizzazione scelta.

1. La circonferenza di raggio R e centro z_0 è parametrizzata da $r(t) = z_0 + Re^{it}$.

2. Cammini diversi possono avere lo stesso sostegno. $r_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, r_1(t) = \cos t + i \sin t$ e $r_2 : [0, 3\pi] \to \mathbb{C}, r_2(t) = \cos t + i \sin t$ hanno lo stesso sostegno, ma non sono equivalenti. Generano quindi cammini diversi.

Def Dato C cammino di A e $f : A \to \mathbb{C}$ continua, si dice integrale di f lungo il cammino C e si indica con $\int_C f(z)\, dz$ il numero complesso $\int_a^b f(r(t))\, r'(t)\, dt$, dove r è una qualsiasi parametrizzazione di C. Si pone inoltre $L_C := \int_a^b |r'(t)|\, dt$.

La definizione è ben posta perché l'integrale scritto è invariante per parametrizzazioni equivalenti, ed esiste perché la funzione integranda è continua. L_C è una possibile definizione di lunghezza del cammino C.

Proprietà

- $\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$

- $\int_{C_1 + C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$

- $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq L_C \sup_{t \in [a,b]} |f(r(t))|$

Le proprietà enunciate mostrano che l'operazione tra cammini $C_1 *_f C_2 = \int_{C_1 + C_2} f(z)\, dz$ ha per elemento neutro il cammino nullo e per elemento inverso il cammino opposto.

1. $m \in \mathbb{Z}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^m$. Parametrizzo la circonferenza di raggio $R > 0$ come $r(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. $\int_C z^m dz = \int_0^{2\pi} \left(Re^{it}\right)^m Rie^{it} dt = R^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{(m+1)it} dt = 0$ se $m \neq -1$. Per $m = -1$ si ottiene $2\pi i$. Si noti che quindi l'integrale del termine generale di una serie di potenze dà zero se $m \neq -1$.

Questa intuizione può essere meglio formalizzata come segue.

Def Data $f : A \to \mathbb{C}$ con funzioni scalari associate u, v, si dicono forme differenziali associate a f le forme differenziali $udx - vdy$ e $vdx + udy$.

Vale allora, se C è parametrizzato da $r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$, $\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(r(t))\, r'(t)\, dt = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy)$, dove C è il cammino parametrizzato da $(r_1(t), r_2(t))$. [Infatti $\int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) = \int_a^b u(r(t))\, r_1'(t) - v(r(t))\, r_2'(t) + i\left[v(r(t))\, r_1'(t) + u(r(t))\, r_2'(t)\right] dt = \int_a^b u(r(t))\left[r_1'(t) + ir_2'(t)\right] + iv(r(t))\left[r_1'(t) + ir_2'(t)\right] dt = \int_a^b f(r(t))\left(r_1'(t) + ir_2'(t)\right) dt = \int_C f(z)\, dz.$]

1. $f(z) = z^2$ ha forme differenziali associate $\left(x^2 - y^2\right) dx - 2xydy$, $2xydx + \left(x^2 - y^2\right) dy$.

D'ora in poi supponiamo per semplicità che le funzioni u, v associate a f siano $C^1(A)$ [3].

[3] è un'ipotesi necessaria sulle componenti di una forma differenziale per usare l'implicazione esatte -¿ chiuse

Teo 1.8 (caratterizzazione dell'olomorfia)

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ ha funzioni associate } u, v$$

$$\text{Ts: } f \text{ è olomorfa in } A \iff \text{ le forme differenziali a essa associate sono chiuse}$$

Dim E' noto che f è olomorfa in $A \iff u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$ in A per Cauchy-Riemann. Le forme differenziale associate sono per definizione chiuse se e solo se $u_y = -v_x$ e $v_y = u_x$, rispettivamente, quindi le affermazioni sono equivalenti. ■

Def Date $F, f : A \to \mathbb{C}$, si dice che F è una primitiva per f in A se F è olomorfa in A e $F'(z) = f(z)\ \forall\ z \in A$.

Teo 1.9

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ ha funzioni associate } u, v$$

$$\text{Ts: } f \text{ ha primitive in } A \iff \text{le forme differenziali a essa associate sono esatte}$$

Dim Se U, V sono le funzioni associate a F, F è una primitiva se e solo se $\frac{\partial U}{\partial x} = u$ e $\frac{\partial V}{\partial x} = v$ e, per derivabilità, $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ e $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$: si chiede quindi che $\nabla U = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, \nabla V = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$, cioè che le forme differenziali associate a f abbiano potenziale. ■

Quando f ha primitive le funzioni associate a una sua primitiva sono potenziali delle fd associate a f.

Teo 1.10

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è continua e ha primitive}$$

$$\text{Ts: } f \text{ è olomorfa in } A$$

Dim Se f ha primitive, le forme differenziali a essa associate sono esatte, quindi chiuse, quindi valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. ■

Teo 1.11

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è continua, } A \text{ è semplicemente connesso}$$

$$\text{Ts: } f \text{ è olomorfa in } A \iff \text{ha primitive in } A$$

La proprietà topologica del dominio permette di sfruttare l'implicazione inversa tra esattezza e chiusura delle forme differenziali.

Corollario

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è continua}$$

$$\text{Ts: } f \text{ è olomorfa in } A \Longleftrightarrow \forall\, z \in A\ \exists\, B_R(z) \subseteq A : f \text{ ha primitive in } B_R(z)$$

Dim $\Longrightarrow$ Se f è olomorfa, le forme differenziali a essa associate sono chiuse; allora, fissato $z \in A$, poiché A è aperto esiste $B_R(z) \subseteq A$ e tale intorno è semplicemente connesso: dunque, per 1.11 applicato a $f|_{B_R(z)}$, f ha primitive in $B_R(z)$.

$\Longleftarrow$ Fissato $z \in A$, $\exists\, B_R(z) \subseteq A : f$ ha primitive in $B_R(z)$: allora, per 1.11 applicato a $f|_{B_R(z)}$, f è olomorfa in $B_R(z)$ e in particolare in z. Poiché il ragionamento vale $\forall\, z \in A$, f è olomorfa in A. ■

Teo 1.12

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è continua}$$

$$\text{Ts: } f \text{ ha primitive in } A \Longleftrightarrow \int_C f(z)\, dz = 0\ \forall\, C \text{ circuito di } A$$

Quindi si intende lungo ogni cammino chiuso.

Dim $\Longrightarrow$ Se f ha primitive, le forme differenziali associate sono esatte, quindi $\int_C f(z)\, dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) = 0$ perché ogni addendo è nullo.

$\Longleftarrow$ Se $\int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) = 0\ \forall\, C$ circuito, allora le fd associate sono esatte e f ha primitive. ■

Corollario

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è continua, } \int_C f(z)\, dz = 0\ \forall\, C \text{ circuito di } A,\ z_0 \in A$$

$$\text{Ts: } F(z) = \int_C f(w)\, dw, \text{ con } C \text{ cammino da } z_0 \text{ a } z, \text{ è una primitiva di } f$$

Teo 1.13 (Cauchy)

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è olomorfa, } A \text{ è semplicemente connesso}$$

$$\text{Ts: } \int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz\ \forall\, C_1, C_2 \text{ circuiti } A\text{-omòtopi}$$

$$/ \int_C f(z)\, dz = 0\ \forall\, C \text{ circuito di } A$$

Dim Se f è olomorfa, le forme differenziali a essa associate sono chiuse, ma anche esatte perché A è semplicemente connesso, quindi per entrambe ogni integrale lungo una curva chiusa è nullo. ■

Le due tesi sono equivalenti grazie alle proprietà topologiche di A semplicemente connesso (C_1 può essere trasformato in C_2 mediante una deformazione continua senza uscire da A).

In realtà vale una versione più generale di tale teorema, che rimuove l'ipotesi di semplice connessione di A; la dimostrazione si basa sulla formula di Green.

Teo (Cauchy)'

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è olomorfa}$$
$$\text{Ts: } \int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz \ \forall\ C_1, C_2 \text{ circuiti } A\text{-omotopi;}$$
$$\text{in particolare } \int_{C} f(z)\, dz = 0 \ \forall\ C \text{ circuito } A\text{-omotopo a zero}$$

Ci si sta ancora implicitamente avvalendo dell'ipotesi di u, v C^1, che non è necessaria (basta la differenziabilità) ma facilita le dimostrazioni.

Teo 1.14 (Morera)

$$\text{Hp: } \quad f : A \to \mathbb{C} \text{ è continua}, \int_{C} f(z)\, dz = 0 \ \forall\ C \text{ circuito di } A$$
$$\text{Ts: } \quad f \text{ è olomorfa}$$

Dim L'ipotesi implica che f ammetta primitive: allora le forme differenziali associate sono esatte, quindi chiuse, quindi vale l'olomorfia. ■

Si è quindi scoperta un'enorme differenza rispetto alle funzioni di variabile reale: avere primitive implica avere derivate. Infatti le proprietà che le funzione complesse devono soddisfare per esibire tali comportamenti sono molto forti.

1.5 Analiticità

Si è dimostrato che ogni funzione somma di una serie di potenze è olomorfa: ora si vuole mostrare anche il contrario, cioè che ogni funzione olomorfa è localmente scrivibile come serie di potenze.

Def Data $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f si dice analitica se $\forall\ z \in A\ \exists\ \delta > 0, B_\delta(z) \subseteq A$ e una serie di potenze di centro 0 che converge a $f(z+h)\ \forall\ h \in \mathbb{C} : |h| < \delta$.

Essere analitica significa quindi essere localmente (in un intorno di z, $\forall\ z$) sviluppabile in serie di potenze. Questa proprietà non può essere richiesta che localmente: A può essere terribilmente strano, mentre l'insieme di convergenza di una serie di potenze è un disco, quindi non ha senso richiedere che f sia la somma di un'unica serie di potenze in tutto A.

Se f è analitica, allora è olomorfa in A.

1. Sia $f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}t^2} \text{ se } t \neq 0 \\ 0 \text{ se } t = 0 \end{cases}$: si dimostra che $f \in C^\infty$ e $f^{(k)}(0) = 0$, quindi f è "olomorfa", ma non può essere somma della sua serie di potenze centrata in 0, perché essa ha coefficienti tutti nulli. Quindi essere C^∞ non implica l'analiticità.

In effetti essere somma di serie di potenze significa essere limite di successioni di polinomi, cioè funzioni estremamente regolari: è una proprietà molto forte, tuttavia si vedrà che in $\mathbb{C}$ olomorfia e analiticità sono equivalenti.

Teo 1.15 (formula di Cauchy per le derivate)

$$\text{Hp: } \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ è una serie di potenze con somma } f(z) \text{ e disco}$$

$$\text{di convergenza } B_R(z_0)\,;\ r : B_r(z_0) \subset B_R(z_0)$$

$$\text{Ts: } f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \ \forall\ k = 0, 1, ...$$

Le derivate di f sono ben definite perché f, in quanto somma di una serie di potenze, è C^∞. Il teorema mostra che i valori delle derivate di f in z_0 dipendono solo dal valore di f sul bordo del disco di convergenza, e si calcolano mediante integrali.

Questo teorema potrà essere visto come un caso particolare del teorema dei residui e di 1.25.

Dim Sia $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ in $B_r(z_0) \subseteq A$. Allora $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1}$. Integrando sul bordo del disco $\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_{\partial B_r(z_0)} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\partial B_r(z_0)} c_n (z-z_0)^{n-k-1} dz$; lo scambio è lecito grazie alla convergenza uniforme nel disco. Per quanto visto in un esempio sopra, c'è un solo addendo nella sommatoria che non è nullo: quello per $n = k$, che vale $\int_{\partial B_r(z_0)} c_k (z-z_0)^{-1} dz = \int_0^{2\pi} c_k \left(Re^{it} + z_0 - z_0\right)^{-1} \left(Rie^{it}\right) dt = \int_0^{2\pi} c_k \left(Re^{it}\right)^{-1} \left(Rie^{it}\right) dt = 2\pi i c_k$. Ma è noto che $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, quindi si ha $\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. ■

La formula nel caso $k = 0$ è $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$. Il seguente teorema la generalizza a un intero intorno di z_0.

Teo 1.16 (formula di Cauchy: rappresentazione integrale di f)

$$\text{Hp: } f : A \to \mathbb{C} \text{ è olomorfa, } \bar{B}_r(z_0) \subseteq A$$

$$\text{Ts: } \forall\ z \in B_r(z_0)\ \ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Incredibilmente, i valori di f nel disco dipendono solo dai valori di f sul bordo: in $\mathbb{R}$ non avrebbe senso.

Anche questo teorema potrà essere visto come un caso particolare del teorema dei residui e di 1.25.

Dim Sia $z \in B_r(z_0)$, $A_z = A \setminus \{z\}$ (che resta un insieme aperto). Sia $g : A_z \to \mathbb{C}, g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$: g è olomorfa in A_z perché rapporto di funzioni olomorfe. Sia $0 < \varepsilon < r - |z - z_0|$: allora il disco $B_\varepsilon(z)$ è contenuto in $B_r(z_0)$, e i due circuiti $C_r(z_0) = \partial B_r(z_0)$ e $C_\varepsilon(z) = \partial B_\varepsilon(z)$ sono A-omotopi. Allora per il teorema di Cauchy (in forma generale) $\int_{C_r(z_0)} g(w)\,dw = \int_{C_\varepsilon(z)} g(w)\,dw$. Osservo che $\int_{C_\varepsilon(z)} g(w)\,dw = \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw + \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{w-z}dw$ e $\left|\int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw\right| \leq 2\pi\varepsilon \sup_{w:|w-z|\leq\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$: f è olomorfa, quindi il rapporto incrementale è limitato. Inoltre $\int_{C_\varepsilon(z)} \frac{1}{w-z}dw = \int_0^{2\pi} \left(z + \varepsilon e^{it} - z\right)^{-1} \varepsilon i e^{it} dt = 2\pi i$. Quindi $\int_{C_\varepsilon(z)} g(w)\,dw = \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw + 2\pi i f(z)$: allora $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon(z)} g(w)\,dw = 0 + 2\pi i f(z)$, ma $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon(z)} g(w)\,dw = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_r(z_0)} g(w)\,dw = \int_{C_r(z_0)} g(w)\,dw = 2\pi i f(z)$, che è la tesi. ■

Teo 1.17 (Weierstrass)

Hp: $f : A \to \mathbb{C}$ è olomorfa

Ts: f è analitica

Dim Sia $z_0 \in A, R > 0 : B_R(z_0) \subseteq A$: mostro che esiste una serie di potenze che converge a f se $|z - z_0| < R$. Posto $h = z - z_0, z \in B_R(z_0) : |h| < r < R$, posso applicare la formula di Cauchy a f in $\bar{B}_r(z_0)$, per cui vale $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0-h}dw$. Osservo che $\frac{1}{w-z_0-h} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{h}{w-z_0}}$: poiché $\frac{|h|}{|w-z_0|} < 1$ ($|h| < r, |w - z_0| = r$), la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{h}{w-z_0}\right)^n$ converge a $\frac{1}{1-\frac{h}{w-z_0}}$. Quindi $\frac{f(w)}{w-z_0-h} = f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ e vale $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0-h}dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw$: grazie alla convergenza uniforme si possono scambiare serie e integrale e si ottiene $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right] (z - z_0)^n$, cioè f è la somma di una serie di potenze (dalla formula di Cauchy per le derivate si ricava che i coefficienti della serie sono $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$). ■

1.6 Singolarità e sviluppi di Laurent

Si è visto che f è olomorfa in A aperto se e solo se è localmente sviluppabile in serie di potenze. Si vuole estendere questa proprietà al caso in cui f è olomorfa in un aperto privo di alcuni punti: il prezzo da pagare sarà una serie di potenze in senso più generale di quanto visto finora.

Sia $f : A\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}, z_0 \in A$, f olomorfa. In tal caso si dice che z_0 è una singolarità isolata di f: in effetti z_0 è un punto isolato per l'insieme dei punti di A in cui f non è olomorfa. Ci occuperemo nel seguito solo di funzioni con singolarità isolate.

1. $f(z) = \frac{1}{z}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata di f.

2. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$: $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ è un insieme di soli punti isolati, che sono quindi tutte singolarità isolate.

3. $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$: $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ è un insieme di soli punti isolati eccetto 0, che è punto di accumulazione per l'insieme. Quindi solo gli elementi di $\left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ sono singolarità isolate.

Def Dato $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}\ \forall\ n$, si dice serie bilatera di potenze, e si indica con $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

La successione a_n è qui intesa come una funzione a valori complessi avente dominio $\mathbb{Z}$ e non più $\mathbb{N}$.

Indicando con R', R i raggi di convergenza delle due serie rispettivamente, si ha che la prima converge quando $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < R'$, la seconda quando $|z-z_0| < R$: la serie bilatera dunque converge quando $\frac{1}{R'} < |z-z_0| < R$; se $\rho := \frac{1}{R'} \geq R$ la serie non converge per alcun z.

L'insieme di convergenza menzionato è una corona circolare; come al solito, la convergenza sui bordi non è nota. Si pone $A_{\rho,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z-z_0| < R\}$, detto campo di convergenza. Se è non vuoto, la serie bilatera converge assolutamente in $A_{\rho,R}(z_0)$ e uniformemente in ogni $E \subseteq A_{\rho,R}(z_0) : \bar{E} \subseteq A_{\rho,R}(z_0)$ (in tal caso si dice che E è contenuto con compattezza in $A_{\rho,R}(z_0)$).

Nel caso particolare di $\rho = 0$, $A_{\rho,R}(z_0)$ diventa un cerchio di raggio R privato del centro.

Se $R = +\infty$, $A_{\rho,R}(z_0)$ diventa l'esterno di un cerchio di raggio ρ. Se inoltre $a_n = 0\ \forall\ n > 0$, detta f la somma della serie (per semplicità $z_0 = 0$) $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n} + a_0$, vale $f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n + a_0$: la serie in $w = 0$ converge ad a_0, dunque $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è olomorfa in $w = 0$ (supponendo di prolungarla con olomorfia). In tal caso si dice che f è olomorfa in $z = +\infty$.

Teo 1.18 (una funzione olomorfa in una corona è sviluppabile in serie di Laurent)

$$\text{Hp: } f \text{ è olomorfa in } A_{\rho,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z-z_0| < R\}$$

$$\text{Ts: vale } f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n \text{ in } A_{\rho,R}(z_0)\text{, con } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

$$\text{e } \gamma \text{ circuito qualsiasi a sostegno in } A_{\rho,R}(z_0)$$

In tal caso la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ è detta sviluppo di Laurent di f; la prima serie è detta parte singolare, la seconda parte regolare dello sviluppo. Quindi, come si è visto che una funzione olomorfa in un disco è analitica e quindi sviluppabile in serie di potenze (di Taylor), una funzione olomorfa in una corona circolare è sviluppabile in serie di Laurent, con coefficienti che si calcolano in modo identico al primo caso (a meno del circuito). Nel caso la funzione sia olomorfa in un aperto senza singolarità, la parte singolare è nulla e la serie di Laurent coincide con la serie di Taylor.

Per calcolare i coefficienti a_n tipicamente si sceglie come γ una circonferenza di raggio $r \in (\rho, R)$. La dimostrazione del teorema si basa sulla formula di Cauchy.

1. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Se si considera come centro dello sviluppo $z_0 = 1$, f è olomorfa nella corona $A_{0,+\infty}(z_0)$ ed è già sviluppata in serie di Laurent: $f(z) = \frac{-1}{z-1}$. Se invece si prende $z_0 = 0$, f è

olomorfa nelle due corone $A_{0,1}(z_0)$ e $A_{1,+\infty}(z_0)$, dunque si avranno due sviluppi separati. Nel primo caso, $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ (che ha la sola parte regolare), nel secondo $f(z) = \frac{-1/z}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{k+1}}$.

2. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Scelto $z_0 = 0$, ci sono due corone circolari da considerare. In primo luogo $A_{0,1}(z_0)$: in tal caso $\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Quindi lo sviluppo in serie di Laurent di f per $0 < |z| < 1$, centrato in 0, è $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, dove $\frac{1}{z}$ è la parte singolare dello sviluppo.

   In secondo luogo $A_{1,+\infty}(z_0)$: allora $f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$.

   Se invece si sceglie $z_0 = 1$, si hanno ancora $A_{0,1}(z_0)$ e $A_{1,+\infty}(z_0)$. Nel primo caso si ha $f(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-z)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-z)^{k-1}$. Nel secondo $f(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{(1-z)^2}\frac{-1}{1-\frac{1}{1-z}} = \frac{-1}{(1-z)^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-z)^k} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-z)^{k+2}}$.

3. Negli sviluppi di Laurent i coefficienti a_n in generale non hanno legami con le derivate di f in $z_0 = 0$, a differenza di quanto accade con gli sviluppi di Taylor. Sia $f(z) = \frac{z}{z-1}$, ben definita per $z \neq 1$: sviluppo secondo Laurent in $z_0 = 0$. Se $|z| > 1$ $f(z) = \frac{-z}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} + 1$, cioè f è somma di una serie bilatera con $a_n = 0\ \forall\ n > 0, a_0 = 1$; f è olomorfa in $z = +\infty$ e in tal caso vale 1. Tuttavia, $\begin{cases} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$: valori che non hanno niente a che fare con i coefficienti.

Si possono ora classificare i tipi di singolarità, la cui definizione si basa sulla differenza di comportamento della f intorno a una singolarità isolata.

Def Data $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, z_0 \in A$, $f \in \mathcal{H}(A \setminus \{z_0\})$, z_0 si dice:

i singolarità eliminabile se $\exists\ g : A \to \mathbb{C} : g|_{A\setminus\{z_0\}} = f$ e g è olomorfa in A

ii singolarità polare, o polo, se $\lim_{z\to z_0} f(z) = +\infty$

iii singolarità essenziale altrimenti.

(i) significa che f è la restrizione di una funzione olomorfa in A, e g è detta prolungamento olomorfo di f; vale necessariamente $g(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$, dovendo g essere continua in z_0; l'esistenza finita di tale limite è necessaria e sufficiente affinché z_0 sia una singolarità eliminabile. (ii) è equivalente a dire $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = +\infty$.

Data la serie di Laurent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ di f centrata in z_0 e definita in un intorno di z_0, valgono le seguenti caratterizzazioni: z_0 è una singolarità eliminabile $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow a_n = 0\ \forall\ n \leq -1$; z_0 è un polo $\Longleftrightarrow \exists\ m < 0 : a_n = 0\ \forall\ n < m$; z_0 è una singolarità essenziale $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) \nexists \Longleftrightarrow \forall\ m > 0\ \exists\ n > m : a_{-n} \neq 0$.

Quindi la serie di Laurent ha solo i termini nonnegativi nel primo caso, un numero finito di termini negativi nel secondo, un numero infinito di termini negativi nel terzo.

1. $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Poiché per definizione $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\forall\ z \neq 0$ $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = g(z)$, che è olomorfa in $\mathbb{C}$ ed estende f: quindi 0 è una singolarità eliminabile.

2. $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^m}, m \in \mathbb{N}$. $\forall\ m$ 0 è un polo. Il caso è banale: f è già scritta come somma di una serie di Laurent, che consta del solo termine di grado $-m$ con $a_{-m} = 1$ e coincide con la sua parte singolare.

3. $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$. $e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^n}$: $\nexists \lim_{z\to 0} f(z)$, quindi 0 è una singolarità essenziale. Nel caso di singolarità essenziale un teorema di Picard afferma che l'immagine di f ristretta a un disco centrato in z_0 è tutto $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

Teo 1.19 (rimozione delle singolarità eliminabili)

$$\text{Hp: } f : A\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}, z_0 \in A,\ f \in \mathcal{H}(A_{z_0});\ \exists\ R > 0 : f \text{ è limitata in } B_R(z_0)\setminus\{z_0\} \subseteq A_{z_0}$$

$$\text{Ts: } z_0 \text{ è una singolarità eliminabile per } f$$

Quindi se f è limitata allora $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

1.7 Residui integrali

Data f olomorfa in $A_{\rho,R}(z_0) \subseteq A_{z_0}$, sia $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ il suo sviluppo di Laurent in un intorno di z_0.

Teo 1.20 (residui)

$$\text{Hp: } f : A_{z_0} \to \mathbb{C}, z_0 \in A,\ f \in \mathcal{H}(A_{\rho,R}(z_0)) \text{ con sviluppo di Laurent}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n;\ \gamma \text{ è una circonferenza a sostegno in } A_{\rho,R}(z_0) \text{ centrata in } z_0$$

$$\text{Ts: } \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

Si suppone che la circonferenza sia orientata in senso antiorario, positivamente rispetto alla singolarità. Conoscere la serie di Laurent di f rende estremamente rapido il calcolo dell'integrale.

Il teorema è un'immediata conseguenza del teorema sullo sviluppo in serie di Laurent con $n = -1$.

[**Dim alternativa con lacune** Dato che la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ converge uniformemente a f in γ compatto a sostegno in $A_{\rho,R}(z_0)$, è lecito scambiare serie e integrale e $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n\,dz$. Si è già visto più volte che $\int_\gamma (z-z_0)^n\,dz = 0$ se $n > 0$; se invece $n < -1$, si applica la formula delle derivate di Cauchy $g^{(k)}(z_0) =$

$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z_0)}\frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$ con $g(z)=1, k=-n-1, \partial B_R(z_0)=\gamma$: allora $\int_\gamma (z-z_0)^n dz = 2\pi i k! g^{(k)}(z_0)=0$. Mancano i casi di $n=0, n=-1$.]

[**Dim alternativa**: scrivo la circonferenza γ come $\partial B_r(z_0), \rho<r<R$. Parametrizzo γ con $r:[0,2\pi]\to\mathbb{C}, r(t)=z_0+re^{it}$ e dato che la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente a f in γ compatto a sostegno in $A_{\rho,R}(z_0)$, è lecito scambiare serie e integrale: vale $\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\int_\gamma (z-z_0)^n dz=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\int_0^{2\pi} r^n e^{int} rie^{it}dt$. L'integrale è $r^{n+1}i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt=\begin{cases} 0 \text{ se } n\neq -1 \\ 2\pi i \text{ se } n=-1\end{cases}$, quindi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\int_\gamma (z-z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}$. ■]

L'ipotesi di orientamento positivo è usata implicitamente nella scelta della parametrizzazione $r(t)=z_0+re^{it}$.

Def Data $f: A_{z_0}\to\mathbb{C}, z_0\in A$, $f\in\mathcal{H}(A_{\rho,R}(z_0))$ con sviluppo di Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$, a_{-1} si dice residuo integrale di f in z_0 e si indica con $Res(f,z_0)$.

1. $Res(f,z_0)=0$ se z_0 è una singolarità eliminabile: in tal caso infatti la parte singolare dello sviluppo di Laurent non c'è. L'implicazione inversa non vale.

2. $Res(f,z_0)=0$ se z_0 è un punto non singolare per f.

3. $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$ è ben definita per $z\neq 0$; per trovare $Res(f,0)$ è utile calcolare la serie di Laurent di f. Poiché $e^z-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, si dimostra che $\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z+\frac{1}{2}z^2+\dots}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\dots\right)}=\frac{1}{z}+o(1)$ per $z\to 0$ e quindi vale $a_{-1}=1$. Peraltro questo mostra che 0 è una singolarità polare.

Sia ora $f: A_{z_0}=A\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ olomorfa in $A_{\rho,+\infty}(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|>\rho\}$: f è olomorfa nel complementare di un compatto. In tal caso si dice che f ha una singolarità isolata[4] a $+\infty$, e si definisce singolarità all'infinito di f la singolarità in 0 della funzione $f\left(\frac{1}{w}\right)$.

Se lo sviluppo di Laurent centrato in z_0 di tale f è $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$, data una curva γ a sostegno in $A_{\rho,R}(z_0)$ orientata in senso antiorario, si dice residuo di f a $+\infty$ $\frac{\int_{-\gamma} f(z)dz}{2\pi i}$, o alternativamente $Res\left(\frac{-1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$.

Si noti che vale $\int_{-\gamma} f(z)\,dz=-2\pi i a_{-1}$, per il teorema immediatamente sopra, dato che si è invertito il senso di percorrenza della curva. E' l'orientamento orario (positivo rispetto alla singolarità) della curva a produrre il residuo all'infinito, perché è con tale orientamento che "ci si lascia a sinistra la singolarità".

1. Se ∞ è un punto non singolare per f (cioè f è olomorfa a $+\infty$), non vale necessariamente $Res(f,\infty)=0$. Si prenda e. g. $f(z)=\frac{1}{z}$.

[4]Infatti, se non esiste un compatto nel complementare del quale f sia olomorfa, significa che per ogni intorno di $+\infty$ esiste una singolarità che vi appartiene, cioè l'infinito è un punto di accumulazione per le singolarità (l'insieme delle singolarità è illimitato) e quindi non è una singolarità isolata.

Lemma (Jordan)

$$\text{Hp: } C \text{ è un circuito semplice}$$

$$\text{Ts: } \exists\ A_1, A_2 \subseteq \mathbb{C} \text{ aperti tali che } A_1 \cup C \cup A_2 = \mathbb{C},$$

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \partial A_1 = \partial A_2 = C$$

Intuitivamente, ogni curva chiusa semplice divide il piano in due regioni, una interna alla curva e una esterna, illimitata.

Corollario del teorema di Cauchy

$$\text{Hp: } A \text{ aperto, } \partial A \text{ circuito semplice, } D \supseteq A \text{ chiuso,}$$

$$f : D \to \mathbb{C} \text{ olomorfa in } A \text{ e continua in } \bar{A}$$

$$\text{Ts: } \int_{\partial A} f(z)\, dz = 0$$

Il teorema di Cauchy afferma che l'integrale su qualsiasi curva in A è nullo; il corollario estende il risultato anche alla frontiera di A, utilizzando il teorema di Cauchy all'interno di A e passando al limite.

Teo 1.21 (residui I)

$$\text{Hp: } A \text{ aperto, } \partial A \text{ circuito semplice, } f : A \to \mathbb{C} \text{ è olomorfa in } A \text{ e continua}$$

$$\text{in } \bar{A} \text{ tranne al più in un numero finito di singolarità } z_1, ..., z_N \in A$$

$$\text{Ts: } \int_{\partial^+ A} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j)$$

Nel caso particolare in cui non si hanno singolarità i residui sono tutti nulli e l'integrale è nullo, in accordo con il corollario del teorema di Cauchy sopra. L'idea intuitiva è che l'integrale di f sul bordo di A orientato positivamente, se si hanno delle singolarità in A, non è nullo: ciò che rimane sono appunto i residui, che si ottengono con lo sviluppo di Laurent di f nell'intorno di ogni singolarità.

Dim Considero le singolarità $z_1, ..., z_N$ e di ciascuna considero un intorno contenuto in A, con bordo parametrizzato in senso orario dalla curva $\gamma_j, j = 1, ..., N$. Allora, se si considera f ristretta ad A privato di tutti questi intorni (con la loro frontiera), si ha che f è olomorfa in tale dominio e l'integrale lungo il bordo parametrizzato positivamente è $\int_{\partial^+ A} f(z)\, dz + \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz = 0$, in quanto somma di integrali lungo il bordo di due forme differenziali chiuse, per la formula di Green. Ma $\forall\ j$ vale $-\int_{\gamma_j} f(z)\, dz = \int_{-\gamma_j} f(z)\, dz = 2\pi i Res(f, z_j)$, da cui la tesi. ■

Teo 1.22 (residui II)

Hp: $K \subseteq \mathbb{C}$ chiuso, ∂K circuito semplice, $f : K^c \to \mathbb{C}$ è olomorfa in K^c e

continua in $\bar{K}^c$ tranne al più in un numero finito di singolarità $z_1, ..., z_N \in K^c$

$$\text{Ts: } \int_{\partial^- K} f(z)\, dz = 2\pi i Res(f, \infty) + 2\pi i \sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j)$$

Dim Considero γ circuito semplice che contenga tutte le singolarità e osservo che $\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = 2\pi i Res(f, \infty)$. Considero ora f ristretta all'area racchiusa da γ, privata di K e degli intorni chiusi di tutte le singolarità: vale, di nuovo per la formula di Green, $\int_{\gamma^+} f(z)\, dz + \int_{\partial K^-} f(z)\, dz + \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j^-} f(z)\, dz = 0$. Vale $\int_{\gamma^+} f(z)\, dz = -2\pi i Res(f, \infty)$, quindi $\int_{\gamma^+} f(z)\, dz + \int_{\partial K^-} f(z)\, dz + \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j^-} f(z)\, dz = -2\pi i Res(f, \infty) + \int_{\partial K^-} f(z)\, dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j) = 0$, da cui la tesi. ■

Corollario

Hp: f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_N\}$

$$\text{Ts: } Res(f, \infty) + \sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j) = 0$$

Nel caso particolare in cui si abbia una sola singolarità z_0, il residuo all'infinito è $-a_{-1}$, l'opposto di $Res(f, z_0)$.

Dim Preso γ circuito che circonda tutte le singolarità, vale $\int_{-\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i Res(f, \infty)$, $\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j)$: sommando membro a membro si ha la tesi. ■

Si osservano ora i comportamenti degli zeri delle funzioni olomorfe.

Teo 1.23 (principio di identità delle funzioni olomorfe)

Hp: $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa in A connesso, $Z(f) = \{z \in A : f(z) = 0\}$

Ts: $Z(f) = A$ oppure $Z(f)$ non ha punti di accumulazione in A

Gli zeri delle funzioni olomorfe non possono avere punti di accumulazione se f non è nulla. Se $f^{(k)} = 0\ \forall k = 0, 1, ...,$, allora f è identicamente nulla nell'insieme di sviluppo.

Teo 1.24 (unicità del prolungamento analitico)

Hp: $g : E \subseteq A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A connesso, $\mathcal{D}E \neq \varnothing$

Ts: $\exists$ al più una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f|_E = g$

f è detta prolungamento analitico di g.

Dim Se f_1, f_2 prolungano entrambe g, allora $f_1(z) - f_2(z) = g(z) - g(z) = 0 \; \forall \; z \in E$, ma allora si è trovata una funzione olomorfa in A connesso per cui l'insieme degli zeri è E, che ha punti di accumulazione, perciò può essere solo $f_1(z) - f_2(z) = 0 \; \forall \; z \in A$. ■

1. Dal teorema si deduce che anche in campo complesso vale $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ e $\sin 2z = 2\sin z \cos z$, essendo coinvolte solo funzioni olomorfe.

2. $g(x) = x|x|$ non ammette prolungamento analitico. Infatti, se per assurdo ci fosse, per $Rez < 0$ si dovrebbe avere $f(z) = -|z|^2$, per $Rez > 0$ $f(z) = |z|^2$, ma sull'asse immaginario tale f non è continua e dunque non può essere olomorfa.

Corollario

Hp : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I è un intervallo aperto

Ts : f è analitica in $I \iff$ ha un prolungamento analitico in $A \subseteq \mathbb{C}$

L'implicazione inversa è ovvia. Il corollario è coerente col fatto che $x|x|$ non è analitica, non essendo C^∞.

Def Data $f : A \to \mathbb{C}$ e z_0 zero isolato per f, si dice ordine dello zero il più piccolo $n_0 \in \mathbb{N} : f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$.

Si chiede che lo zero sia isolato affinché f non sia identicamente nulla, per il principio di identità.

L'ordine di uno zero può essere caratterizzato nel seguente modo: n_0 è l'ordine dello zero z_0 per f se e solo se $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n_0}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti, se z_0 ha ordine n_0, vale $f(z) = f^{(n_0)}(z_0)(z-z_0)^{n_0} + o((z-z_0)^{n_0})$ per $z \to z_0$, e $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n_0}} = \lim_{z\to z_0} \left(f^{(n_0)}(z_0) + \frac{o((z-z_0)^{n_0})}{(z-z_0)^{n_0}} \right) = f^{(n_0)}(z_0)$. Viceversa, se $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n_0}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ significa che $f(z) \sim k(z-z_0)^{n_0}$ per $z \to z_0$, per cui non possono esserci termini di grado inferiore a n_0 nello sviluppo di Taylor di f.

Corollario

Hp: $f : A \to \mathbb{C}$ è olomorfa in A connesso e non identicamente nulla

Ts: f ha al più zeri isolati di ordine finito

L'ordine degli zeri è ovviamente intero.

Dim Per il principio di identità $Z(f)$ non ha punti di accumulazione, quindi è vuoto oppure è formato da punti isolati. Per definizione di ordine dello zero, n_0 è finito, perché se per assurdo valesse $f^{(n)}(z_0) = 0 \; \forall \; n$ lo sviluppo di Taylor di f (ben definito perché f è olomorfa in un aperto) sarebbe nullo e f sarebbe identicamente nulla, contro l'ipotesi. ■

Il corollario mostra peraltro che, se A è aperto, la definizione di ordine dello zero è sempre ben posta se z_0 è uno zero isolato per f (cioè f non è identicamente nulla).

Supponiamo che f abbia un polo in z_0 e che $f(z) \neq 0$ in un intorno di z_0. Allora $\frac{1}{f(z)}$ è ben definita in tale intorno a meno di z_0; ma poiché $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, $\frac{1}{f(z)}$ ha una singolarità eliminabile in z_0 e si prolunga in modo olomorfo in z_0. Sia g il prolungamento ($g(z_0) = 0$): g, che non può essere identicamente nulla, soddisfa le ipotesi del corollario e ha uno zero isolato di ordine n in z_0 (quindi $\exists \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e dunque esisterà anche il limite del reciproco $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$). Viceversa, se $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, allora $\lim_{z\to z_0} f(z) = +\infty$ e z_0 è un polo per f. Si è quindi detto che z_0 è un polo per f se e solo se z_0 è uno zero per l'estensione olomorfa di $\frac{1}{f}$.

Allora la seguente definizione è ben posta.

Def Data $f : A\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa, z_0 polo per f e g prolungamento di $\frac{1}{f}$, si dice ordine del polo z_0 l'ordine dello zero z_0 per g.

Per la caratterizzazione vista, z_0 è un polo di ordine n per f se e solo se n è tale che $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^n \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ (o equivalentemente il più piccolo naturale tale che $f(z)(z-z_0)^n \in \mathcal{H}(A)$), o equivalentemente il più grande naturale tale che $a_{-n} \neq 0$. La seconda caratterizzazione si dimostra facilmente usando lo sviluppo di Laurent.

Più in generale, se f ha un numero finito di singolarità $z_1, ..., z_n$ polari o eliminabili in A, ciascuna di ordine n_j (per singolarità eliminabili $n_j = 0$), $g(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-z_j)^{n_j} f(z)$ è prolungabile a una funzione olomorfa in A. f è in tal caso detta meromorfa ed è scrivibile come quoziente di due funzioni olomorfe in A.

1. L'ordine n del polo è dunque il numero di termini con indice negativo presenti nello sviluppo di Laurent di f. Se $f(z) = \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + ...$, f ha un polo in 0 di ordine 3: $z^3 f(z) = c_{-3} + c_{-2}z + c_{-1}z^2 + c_0 z^3 + c_1 z^4 + ...$

2. Più in generale, sia $f(z) = \sum_{k=\nu}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k$, con $c_\nu \neq 0$. Sicuramente z_0 non è una singolarità essenziale, altrimenti esisterebbero infiniti termini della serie con indice negativo. Se $\nu = 0$, z_0 è una singolarità eliminabile e il prolungamento olomorfo di f vale c_ν in z_0; se $\nu > 0$, è eliminabile e il prolungamento ha uno zero di ordine ν in z_0; se $\nu < 0$, z_0 è un polo di ordine $-\nu$.

   Se $\nu > 0$, f' ha uno zero di ordine $\nu - 1$ in z_0; se $\nu < 0$, f' ha un polo di ordine $\nu + 1$ in z_0. In entrambi i casi vale $\lim_{z\to z_0} (z-z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \nu$. Infatti $f'(z) = \sum_{k=\nu}^{+\infty} c_k k (z-z_0)^{k-1}$ (per il corollario sulla serie di potenze della derivata; non c'è bisogno di alcuna estensione alla serie di Laurent, perché i termini con indice negativo sono in numero finito), per cui $(z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)\sum_{k=\nu}^{+\infty} c_k k (z-z_0)^{k-1}}{\sum_{k=\nu}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k} = \frac{\sum_{k=\nu}^{+\infty} c_k k (z-z_0)^k}{\sum_{k=\nu}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k} \sim \frac{c_\nu \nu (z-z_0)^\nu}{c_\nu (z-z_0)^\nu}$ per $z \to z_0$, per cui $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = \nu$.

Vale inoltre il teorema di de L'Hopital: se z_0 è uno zero isolato o un polo di f e g, allora $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}, \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$ esistono, finiti o infiniti, e coincidono. Quindi, se z_0 non è un singolarità essenziale né per f né per g, non è una singolarità essenziale per $\frac{f}{g}$.

Teo 1.25 (calcolo dei residui I)

Hp: $f : A\setminus\{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa, z_0 è un polo di ordine m per f

Ts: $$Res\,(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-z_0)^m\right)$$

Dim Poiché l'ordine di z_0 è m, la funzione $P(z) = f(z)(z-z_0)^m$ è olomorfa in A e quindi analitica, cioè $P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$. D'altronde $f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$, per cui vale anche $P(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k+m}$, cioè - traslando l'indice - $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j-m}(z-z_0)^j$. $Res\,(f, z_0)$ è il termine a_{-1}: poiché $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j-m}(z-z_0)^j$, prendendo $m = j+1$ si ottiene $a_{-1} = \frac{P^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$. ■

1. $f(z) = \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{z^2-1}$ ha le singolarità eliminabili $1, -1$ e la singolarità essenziale 0. ∞ è una singolarità isolata: ne valuto la natura. Posto $w = \frac{1}{z}, g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w^2\sin\pi w}{1-w^2}$. g ha una singolarità eliminabile in 0, quindi ∞ è una singolarità eliminabile per f. Voglio calcolare $\int_\gamma f(z)\,dz$ con γ circuito che contiene solo 0: occorre quindi $Res\,(f, 0)$ oppure $Res\,(f,\infty), Res\,(f, 1), Res\,(f, -1)$. Questi sono tutti nulli, quindi $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Teo 1.26 (calcolo dei residui II)

Hp: $F : A\setminus\{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa, $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, $f, g \in \mathcal{H}(A), g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$

Ts: $Res\,(F, z_0) = \dfrac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

Le ipotesi su g implicano che z_0 sia un polo di ordine 1 per F. Infatti $g(z) = g'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)$ per $z \to z_0$, quindi $F(z) = \frac{f(z)}{g'(z_0)(z-z_0)+o(z-z_0)} = \frac{\frac{f(z)}{z-z_0}}{g'(z_0)+\frac{o(z-z_0)}{z-z_0}} \sim \frac{f(z_0)}{g'(z_0)(z-z_0)}$ per $z \to z_0$. D'altra parte F è sviluppabile in serie di Laurent, per cui sicuramente $F(z) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$, e per transitività $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \sim \frac{f(z_0)}{g'(z_0)(z-z_0)}$ per $z \to z_0$. Allora non possono esserci altri termini singolari nello sviluppo di F oltre a $\frac{f(z_0)}{g'(z_0)(z-z_0)}$, altrimenti non varrebbe la relazione di asintotico; possono invece esserci i termini regolari, che tendono a 0 per $z \to z_0$.

Dim Si applica il teorema 1.25 calcolo dei residui I a F con $m = 1$: $Res\,(F, z_0) = \lim_{z\to z_0} F(z)(z-z_0)$, e poiché $F(z) \sim \frac{f(z_0)}{g'(z_0)(z-z_0)}$ per $z \to z_0$, si ottiene $Res\,(F, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$. ■

1. Calcolo il residuo di $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{2-z}$ in 0. Vale $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!z^k}$, $\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2^k}$. Il prodotto delle serie è $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!z^k}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^j}{2^j} =$[5] $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!z^j}\frac{z^{k-j}}{2^{k-j}}$. $Res\,(f, 0)$ è il coefficiente di $\frac{1}{z}$: $\frac{1}{z}$ si ottiene quando

[5] Si ricorda che $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.

$k-2j=-1$, cioè il termine generale della serie diventa $\frac{1}{j!}\frac{z^{-1}}{2^{j-1}}$. Vale quindi $Res\,(f,0)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j!2^{j-1}}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j!2^{j}}=e^{\frac{1}{2}}-1$.

1.8 Applicazioni

Si possono anche calcolare integrali di funzioni reali usando l'analisi complessa.

1. Voglio calcolare $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+2}d\theta$. Con la sostituzione $z=e^{i\theta}$, dato che $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, si ottiene $\int_\gamma\frac{1}{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}+2}\frac{1}{ie^{i\theta}}dz$, con γ parametrizzata da $r\,(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Poiché $\frac{1}{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}+2}\frac{1}{e^{i\theta}}=\frac{1}{\frac{e^{2i\theta}+1}{2}+2e^{i\theta}}=\frac{2}{z^2+4z+1}$, si ottiene $-2i\int_\gamma\frac{1}{z^2+4z+1}dz$, che può essere calcolato con i residui. $f\,(z)=\frac{1}{z^2+4z+1}$ ha i due poli $-2\pm\sqrt{3}$: $z_0=-2+\sqrt{3}$ è contenuto in γ e quindi produce un residuo. Per il teorema sopra, z_0 è un polo di ordine 1 per f e può quindi essere calcolato come $Res\,(f,z_0)=\frac{1}{(z+2+\sqrt{3})|_{z_0}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Ne segue che l'integrale originario è $-2i\left(2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Ci interessa calcolare in particolare gli integrali coinvolti nei coefficienti della trasformata di Fourier, che sono del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}f\,(x)\,dx$, con $\omega>0$, integrale improprio nel senso di Riemann (può accadere $f\,(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$). Si calcola l'integrale lungo la frontiera di una semicirconferenza superiore di raggio R, parametrizzata da γ_R, e se ne valuta il limite per $R\to+\infty$. La correttezza di questa tecnica è assicurata dal seguente lemma.

Lemma (Jordan)

Hp: $R,\omega>0,\rho:I=[0,\pi]\to[0,+\infty)$ C^1 a tratti, C_R cammino

parametrizzato da $r_R:I\to\mathbb{C},r_R\,(t)=R\rho\,(t)\,e^{it}$, f continua su $\gamma_R=Imr_R$

Ts: $\exists$ $c^*>0$, dipendente solo da ρ, tale che $\left|\int_{C_R}e^{i\omega z}f\,(z)\,dz\right|\leq\frac{c_*}{\omega}\sup_{z\in\gamma_R}|f\,(z)|$

[NB: grasselli dice c^* dipendente solo da f, vs pag. 210 gilardi]

Si ricorda che C_R è una classe di equivalenza di parametrizzazioni, r_R è una parametrizzazione e γ_R è il sostegno di r_R.

Se ρ è costante r_R parametrizza una circonferenza, come serve nel nostro caso.

Corollario

Hp: $f:\{z\in\mathbb{C}:Imz>0\}\to\mathbb{C}$ è tale che $\exists$ $\alpha>0$:

$$|f\,(z)|\leq\frac{1}{|z|^\alpha}\text{ definitivamente per }|z|\to+\infty$$

$$\text{Ts: }\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{C_R}e^{i\omega z}f\,(z)\,dz\right|=0$$

In tal caso infatti $\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|\leq\sup_{z\in\gamma_R}\frac{1}{|z|^\alpha}=\frac{1}{\left(\min_{[0,\pi]}\rho\right)|R|^\alpha}$.

Per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}f(x)\,dx$ si procede come segue. Si considera $\int_{C_R\cup[-R,R]}e^{i\omega z}f(z)\,dz=C$, dove $C_R\cup[-R,R]$ indica la parametrizzazione della semicirconferenza incollata alla parametrizzazione del segmento orizzontale. Tale integrale è indipendente da R, una volta scelto R abbastanza grande in modo che il circuito contenga le eventuali singolarità di f, e si può calcolare con i residui. Per additività $C=\int_{C_R}e^{i\omega z}f(z)\,dz+\int_{[-R,R]}e^{i\omega z}f(z)\,dz$; il secondo addendo coincide con $\int_{-R}^{R}e^{i\omega x}f(x)\,dx$. Quindi, se si dimostra che $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}e^{i\omega z}f(z)\,dz=0$, si ha $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}e^{i\omega z}f(z)\,dz=C=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}f(x)\,dx$. Ma questo è garantito dal corollario sopra, se $|f(z)|\leq\frac{1}{|z|^\alpha}$ definitivamente.

1. Voglio calcolare $\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}\frac{1}{x^2+1}dx$. Se $\xi<0$ si applica il lemma di Jordan con $\omega=-\xi$ e si ha $\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{C_R}e^{i\omega z}f(z)\,dz\right|=0$ perché $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ soddisfa le ipotesi del corollario. Allora $\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}e^{i\omega z}f(z)\,dz=2\pi iRes\left(e^{i\omega z}f(z),i\right)=\pi e^{\xi}$ (perché il circuito è un semicirconferenza superiore e contiene solo il polo i, non $-i$).

2. Voglio calcolare $\int_{\mathbb{R}}e^{-i(\xi+5)x}\frac{x}{(3x-2i)^2}dx$. Per $\xi<-5$ si applica il lemma di Jordan sulla semicirconferenza goniometrica superiore e si calcola l'integrale con i residui. Per $\xi>-5$ si considera invece come circuito la semicirconferenza inferiore per applicare il lemma. !!

Esiste poi un risultato che permette di calcolare più facilmente gli integrali di funzioni reali. Si premette il seguente lemma.

Lemma (piccolo cerchio locale)

$$\text{Hp: } \varepsilon>0,\ f\in\mathcal{H}\left(\mathbb{C}\backslash\{z_0\}\right)\ \text{ con } z_0\in\mathbb{C} \text{ polo di ordine 1 per } f;$$

$$C_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)\ \text{ cammino parametrizzato da } r_\varepsilon:[\theta_1,\theta_2]\to\mathbb{C}, r_\varepsilon(t)=z_0+\varepsilon e^{it}$$

$$\text{Ts: } \lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)}f(z)\,dz=(\theta_2-\theta_1)\,iRes(f,z_0)$$

Il lemma fornisce dunque un modo per calcolare il limite dell'integrale di f su un arco di circonferenza che insiste su un angolo di ampiezza $\theta_2-\theta_1$.

Dim Poiché z_0 è un polo semplice, f può essere sviluppata secondo Laurent come $f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+g(z)$, con $a_{-1}=Res(f,z_0)$ e $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Allora $\int_{C_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)}f(z)\,dz=a_{-1}\int_{C_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{z-z_0}dz+\int_{C_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)}g(z)\,dz$. Il secondo addendo è per definizione $\varepsilon\int_{\theta_1}^{\theta_2}g\left(z_0+\varepsilon e^{it}\right)ie^{it}dt$: poiché g è olomorfa e dunque continua, il secondo fattore è finito, dunque il prodotto tende a 0 per $\varepsilon\to0$. Il primo addendo è per definizione $a_{-1}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\varepsilon e^{it}}i\varepsilon e^{it}dt=Res(f,z_0)\,i(\theta_2-\theta_1)\ \forall\ \varepsilon$, da cui la tesi. ■

Teo 1.27 (poli reali)

Hp: $\varepsilon > 0, f \in \mathcal{H}\left(\{z \in \mathbb{C} : Imz > -\varepsilon\} \setminus \{x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_k\}\right)$ con $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$

e $z_1, ..., z_k \in \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ poli di ordine 1 per f; C_R cammino

parametrizzato da $r(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$

Ts: $pv \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j) + \pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, x_j)$

Se invece $z_1, ..., z_k \in \{z \in \mathbb{C} : Imz < 0\}$, nella tesi cambia di segno il termine relativo ai residui nei poli non reali.

Dim Considero un circuito $S_{R,\varepsilon}$, parametrizzato in senso antiorario, che contenga i poli complessi $z_1, ..., z_k$ e sia semicircolare ad eccezione di n "buchi semicircolari" che lasciano all'esterno di $S_{R,\varepsilon}$ i poli reali: si indica con S_ε^i il cammino che parametrizza la semicirconferenza bordo di ogni buco siffatto, con raggio ε e $i = 1, ..., n$. Allora, per il teorema dei residui, $\int_{S_{R,\varepsilon}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j)$. Ma $\int_{S_{R,\varepsilon}} f(z)\, dz = \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{[-R,R] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]} f(z)\, dz + \sum_{i=1}^{n} \int_{S_\varepsilon^i} f(z)\, dz$. Per $\varepsilon \to 0$ il secondo addendo tende a $pv \int_{[-R,R]} f(z)\, dz$, e - per il lemma del piccolo cerchio - il terzo addendo tende a $\sum_{j=1}^{n} (-\pi i Res(f, x_j))$. Allora, sfruttando l'ipotesi, si ottiene $\lim_{R \to +\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{R,\varepsilon}} f(z)\, dz = pv \int_{\mathbb{R}} f(z)\, dz - \pi \sum_{j=1}^{n} i Res(f, x_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j)$, da cui la tesi.

■

Questo teorema permette di calcolare integrali di funzioni reali (che quando esistono coincidono con il loro valore principale) sfruttando il calcolo dei residui.

1. E' noto che $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx < +\infty$[6]. Per calcolarne il valore numerico si può sfruttare il teorema dei poli reali: infatti $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx$, ma $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{ix} dx$ perché l'integrale in cui compare il coseno è nullo. Si applica il teorema dei poli reali a $f(z) = \frac{e^{iz}}{iz}$, che ha il solo polo reale $z = 0$, da cui $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \frac{1}{i} = \pi$.

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

1.9 Funzioni polidrome

Ci si interroga sulla possibilità di invertire alcune funzioni note, come l'esponenziale in campo complesso.

Logaritmo E' noto che in $\mathbb{R}$, se $z > 0$, $\exists\, w \in \mathbb{R} : e^w = z$. Se invece $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, esistono infiniti $w \in \mathbb{C} : e^w = z$ e sono della forma $w = \ln|z| + i\theta$, al variare di θ nell'insieme degli argomenti di z. Dall'infinità di queste soluzioni

[6] Infatti $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ e $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx = \left(\frac{(-1)^k}{\pi}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right)\right) + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx$. La $\sum_{k=1}^{+\infty}$ di ciò dà una serie convergente (per il criterio di Leibniz) più $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

si ricava che non è possibile definire un'unica funzione "inversa" dell'esponenziale, cioè una funzione logaritmo in $\mathbb{C}$: si definiscono allora, stabilendo un certo intervallo di appartenenza per θ, dei rami del logaritmo, che però non sono olomorfi.

Si definisce funzione logaritmo principale di z, e si indica con Lnz, $w = \ln|z| + i\theta : \theta = \arg z$ e $\theta \in (-\pi, \pi)$. Tale funzione è ben definita e olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : Rez \leq 0 \text{ e } Imz = 0\}$ (il piano complesso privato della semiretta corrispondente al "taglio" fatto con la scelta $\theta \in (-\pi, \pi)$).

Analogamente al logaritmo principale, si possono definire infiniti rami olomorfi del logaritmo con diversi tagli, ad esempio $(0, 2\pi)$. Questi rami non possono essere estesi con olomorfia: e. g. $f(z) = \ln|z| + i\theta : \theta = \arg z$ e $\theta \in (0, 2\pi)$, ben definita e olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : Rez \geq 0 \text{ e } Imz = 0\}$ è tale che, dato $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\substack{z \to x \\ x \geq 0}} f(z) = \begin{cases} -\infty \text{ se } x = 0 \\ \nexists \text{ se } x > 0 \end{cases}$ (infatti, se $x > 0$, scegliendo per calcolare il limite i due cammini verticali $Imz = y > 0$ e $Imz = y < 0$, si ottiene rispettivamente $\lim_{\substack{z \to x \\ x > 0}} f(z) = \ln|x|$, $\lim_{\substack{z \to x \\ x > 0}} f(z) = \ln|x| + 2\pi i$). Non è quindi possibile definire una funzione olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ che prolunghi f: non sarebbe continua in $\{z \in \mathbb{C} : Rez > 0, Imz = 0\}$.

Dunque in generale, nonostante questi rami coincidano in una parte dell'intersezione dei loro domini, non possono essere "incollati" in un'unica funzione olomorfa: non esiste una funzione olomorfa che abbia tra le sue restrizioni tutti i rami del logaritmo. Si dice quindi che il logaritmo complesso è una funzione polidroma: non è una funzione in senso classico (a ogni $z \neq 0$ associa un unico $w : f(w) = z$), ma si dirama in branche che lo sono. In quest'ottica, le funzioni classiche sono dette monodrome. In realtà una funzione polidroma potrebbe essere monodroma se come codominio si considerasse l'insieme delle parti di $\mathbb{C}$, ma non è la scelta migliore per maneggiare tali funzioni.

Si può tuttavia stabilire una corrispondenza biunivoca (un omeomorfismo) tra i valori assunti da tutti i rami e i punti di una superficie complessa, detta superficie di Riemann.

Funzioni potenza Sia $z \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$. Il tentativo naturale di definizione della funzione potenza è $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$. Esplicitando il logaritmo si ottiene $e^{\alpha(\ln|z| + i\theta)} = |z|^{Re\alpha} e^{i \ln|z| Im\alpha} e^{i\alpha\theta}$, $\theta \in \arg z$.

Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, z^α è una funzione monodroma: $z^\alpha = |z|^n e^{in\theta}$, che coincide con l'usuale z^n, per la regola di De Moivre. Se $n \geq 0$ z^α è olomorfa, altrimenti ha un polo in 0.

Se $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $z^\alpha = (z^m)^{\frac{1}{n}}$ ha un numero finito di rami (calcolare f richiede infatti di estrarre una radice n-esima).

Se $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$, z^α ha infiniti rami.

1. Se $\alpha = i$, $z^i = \left\{e^{i\ln|z|} e^{-\theta} = e^{-\theta}(\cos\ln|z| + i \sin\ln|z|) : \theta \in \arg z\right\}$. Se in particolare $z = i$, si trova $i^i = e^{-\pi/2}$.

2 Analisi reale e funzionale

2.1 Spazi di Banach

Def Dato un insieme X non vuoto, una funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ si dice distanza o metrica su X se soddisfa le seguenti proprietà:

M1 annullamento: $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

M2 simmetria: $\forall\ x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$;

M3 disuguaglianza triangolare: $\forall\ x, y, z \in X,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

In tal caso (X, d) si dice spazio metrico, o si dice che X è uno spazio metrico rispetto alla distanza d.

1. Se $X = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$, (X, d) è uno spazio metrico. Più in generale, se $X = \mathbb{R}^n$ e $d(x, y) = ||x - y||$, (X, d) è uno spazio metrico.

2. Ogni spazio metrico (X, d) è uno spazio topologico (X, τ). Infatti, definito $B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$ intorno di x di raggio r, si può dare la definizione di punto interno (dato $A \subseteq X$, si dice che $x \in A$ è interno ad A se $\exists\ r : B_r(x) \subseteq A$) e di parte interna (dato $A \subseteq X$, si dice parte interna di A, e si indica con A, l'insieme dei punti interni ad A): allora si chiama aperto di X ogni insieme $A \subseteq X$ che coincide con la sua parte interna, e la collezione τ degli insiemi aperti in X rende (X, τ) uno spazio topologico.

Per coniugare struttura metrica e struttura lineare si introduce la seguente nozione.

Def Dato $X \neq \varnothing$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$, si dice norma una funzione $N : X \to [0, +\infty)$ con le seguenti proprietà:

N1 annullamento: $N(x) = 0 \iff x = 0$;

N2 omogeneità: $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)\ \forall\ x \in X, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$;

N3 disuguaglianza triangolare: $N(x + y) \leq N(x) + N(y)\ \forall\ x, y \in X$.

In tal caso la coppia (X, N) si dice spazio vettoriale normato, e $N(x)$ si indica con $||x||$ o $||x||_X$.

Si noti che le operazioni che appaiono in N1, N2, N3 sono ben definite grazie alla struttura lineare.

1. $\mathbb{R}$ è uno spazio normato con $N(x) = |x|$; $\mathbb{C}$ lo è con $N(z) = |z|$.

Prop 2.1 (la norma induce una metrica)

$$\text{Hp: } (X, ||\cdot||) \text{ è uno spazio vettoriale normato}$$

$$\text{Ts: } (X, d) \text{ è uno spazio metrico con la distanza } d(x,y) = ||x-y||$$

Tale metrica si dice indotta dalla norma.

Dim E' evidente che $d(x,y) \geq 0\ \forall\ x,y$; $||x-y|| = 0 \Longleftrightarrow x = y$ per N1. Vale $d(x,y) = d(y,x)$ per N2 con $\lambda = -1$. Inoltre $d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(y,z)$, per cui vale anche la disuguaglianza triangolare. ■

Le seguenti definizioni, seppure date per uno spazio vettoriale normato, necessitano solo di una struttura metrica.

Def Dato $(X, ||\cdot||)$ spazio vettoriale normato, data una successione $\{x_n\}$ a valori in X e $x \in X$, si dice che in X x_n converge a x per $n \to +\infty$, e si scrive $x_n \to^{n\to+\infty} x$, se $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x|| = 0$.

Tale nozione è detta convergenza in norma. Il limite è unico: se $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x|| = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x^*|| = 0$, anche $\lim_{n\to+\infty} (||x_n - x|| + ||x^* - x_n||) = 0$, ma $||x_n - x|| + ||x^* - x_n|| \geq ||x^* - x||$, quindi $\lim_{n\to+\infty} ||x^* - x|| = 0$, ma essendo l'argomento costante può essere solo $x^* = x$.

Def Dato $(X, ||\cdot||)$ spazio vettoriale normato e $f : X \to \mathbb{C}$, si dice che f è continua in $x_0 \in X$ se $\forall\ \{x_n\} \subseteq X :$ $x_n \to x$ vale $f(x_n) \to f(x)$.

Si noti che nella definizione sopra figura la convergenza in norma di X (quando si scrive $x_n \to x$) e la convergenza in $\mathbb{C}$ (quando si scrive $f(x_n) \to f(x)$), secondo l'usuale norma del modulo.

In uno spazio normato vale $|||x|| - ||y||| \leq ||x-y||$. Se $x_n \to x$, $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x|| = 0$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} |||x_n|| - ||x||| = 0$, cioè $||x_n|| \to ||x||$, che è una convergenza in $\mathbb{R}$. Questo significa che la convergenza in norma implica la convergenza delle norme, cioè la norma è una funzione continua secondo la definizione sopra.

Def Dato $(X, ||\cdot||)$ spazio vettoriale normato, data una successione $\{x_n\}$ a valori in X, si dice che x_n è di Cauchy se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu : m, n > \nu \Longrightarrow ||x_n - x_m|| < \varepsilon$.

Intuitivamente, se $\lim_{m,n\to+\infty} ||x_n - x_m|| = 0$. E' facile dimostrare che una successione convergente è di Cauchy; il fenomeno contrario è descritto dalla seguente definizione.

Def Dato $(X, ||\cdot||)$ spazio vettoriale normato, $(X, ||\cdot||)$ si dice spazio di Banach se ogni successione di Cauchy in X converge a un elemento $x \in X$.

La completezza è utile perché permette di dedurre che una successione converge anche senza avere idea del valore del limite della successione, che è ciò che accade di solito.

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\left(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p\right)$ con $||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N |x_i|^p}$ e $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ con $||x||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ sono tutti spazi di Banach.

Teo (funzionali lineari su spazi di Banach)

Hp: $(X, ||\cdot||)$ è di Banach, $F : X \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ è un funzionale lineare

Ts: sono equivalenti

(i) F è continuo in 0

(ii) F è continuo in X

(iii) $\exists\ k > 0 : |F(x)| \leq k\,||x||\ \ \forall\ x \in X$

(iii) è la definizione di funzionale limitato. Se $X = \mathbb{R}^n$, k in (iii) è la norma della matrice che rappresenta F. In generale se X ha dimensione finita F lineare è continuo; questo non è vero se $\dim X = +\infty$.

Completezza dello spazio delle funzioni continue $C^0([a,b])$ è uno spazio vettoriale a dimensione infinita, perché contiene il sottospazio vettoriale dei polinomi algebrici, che ha dimensione infinita: una base algebrica di tale sottospazio è $\{1, ..., x^n, ...\}$, di cardinalità infinita.

$C^0([a,b])$ è inoltre uno spazio di Banach con la norma $||f||_{C^0([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$: essa è ben definita per il teorema di Weierstrass. La convergenza di una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0([a,b])$ in tale norma è la convergenza uniforme, cioè $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{C^0([a,b])} = 0$ se e solo se f_n converge uniformemente a f.

Si dimostra che $\left(C^0([a,b]), ||\cdot||_{C^0([a,b])}\right)$ è uno spazio di Banach, cioè che ogni successione di Cauchy è convergente. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0([a,b])$ di Cauchy: significa che $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\nu > 0 : m, n > \nu \Longrightarrow \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Questo implica che se $m, n > \nu$ allora $\forall\ x \in [a,b]\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Ne segue che, fissato $x \in [a,b]$, la successione numerica $f_n(x)$ è di Cauchy: ma questa è una successione in $\mathbb{R}$, che è di Banach, quindi essa è anche convergente. Allora posso definire punto per punto $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$: devo mostrare che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f. Da quanto scritto sopra si deduce che ν dipende solo da ε e non da x: cioè $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon) : m, n > \nu \Longrightarrow \forall\ x \in [a,b]\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. In tal disuguaglianza si può allora passare al limite per $n \to +\infty$, per cui $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu : m > \nu \Longrightarrow \forall\ x \in [a,b]\ |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$: per definizone allora $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, e poiché la convergenza uniforme preserva la continuità, f è continua e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $C^0([a,b])$.

Si può definire in $C^0([a,b])$ anche una norma integrale $||f||_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$, ma con tale norma $C^0([a,b])$ non è completo. Infatti, presi $a = -1, b = 1$, sia $f_n(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x \in [-1, -1/n] \\ nx \text{ se } |x| < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$: si mostra che è di Cauchy, ma non converge secondo tale norma integrale. f_n converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x \in [-1,0) \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x \in (0,1] \end{cases}$ e $\|f_n - f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_{-1/n}^{0} |nx+1|\, dx + \int_0^{1/n} |nx-1|\, dx = \frac{1}{n}$ (da questo so già che $f_n \to f$ in norma integrale, ma f non è continua). Allora $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu : n, m > \nu$ implica, separatamente, $\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$ e $\|f_m - f\|_1 < \varepsilon$ (dato che $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \to 0$ per $n, m \to +\infty$). Ne segue per disuguaglianza triangolare che $\|f_n - f_m\|_1 \le \|f_n - f\|_1 + \|f_m - f\|_1 < 2\varepsilon$, dunque $\{f_n\}$ è di Cauchy secondo la norma integrale. Tuttavia, $\{f_n\}$ non converge a una funzione continua in tale norma. Infatti, si supponga per assurdo che esista $f^* \in C^0([a,b])$: $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f^*(x)|\, dx = 0$. f_n, f^* sono continue in un compatto, quindi certamente limitate, dunque $|f_n(x) - f^*(x)|$ è limitata e per convergenza dominata vale $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f^*(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} |f(x) - f^*(x)|\, dx = 0$. Essendo la funzione integranda nonnegativa, questo implica anche $\int_0^1 |f(x) - f^*(x)|\, dx = 0$, cioè $f^*(x) = 1\ \forall\ x \in (0,1)$, e $\int_{-1}^{0} |f(x) - f^*(x)|\, dx = 0$, cioè $f^*(x) = -1\ \forall\ x \in (-1,0)$, per cui f^* non è continua, che è assurdo.

Evidentemente la norma integrale definita (che più avanti prenderà il nome di norma L^1) non è adatta a C^0, e in effetti non ha alcun legame con la continuità, a differenza della norma del max.

Visto questo esempio, è naturale chiedersi quale sia invece uno spazio a cui questa norma integrale è adatta, e più in gnerale se esistono spazi di funzioni che sono di Banach secondo norme integrali. Per rispondere positivamente occorre una nuova nozione di integrale.

2.2 Integrale di Lebesgue

Def Dato $R \subseteq \mathbb{R}^n$, R si dice rettangolo pluridimensionale se $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ con $a_j \le b_j\ \forall\ j = 1, ..., n$.

Def Dato $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ rettangolo a n dimensioni, si dice misura di R in $\mathbb{R}^n$ il numero reale nonnegativo $|R|_n := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Def Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A si dice di misura nulla secondo Lebesgue se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{R_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \supseteq A$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} |R_k|_n < \varepsilon$. In tal caso si pone $|A|_n = 0$.

Un insieme è quindi di misura nulla se può essere ricoperto da una famiglia numerabile di rettangoli di misura totale arbitrariamente piccola. Questa definizione si distingue da quella di misura di Peano-Jordan perché la famiglia di rettangoli considerata in generale è numerabile, non necessariamente finita.

1. Un punto (x, y) nel piano ha misura nulla secondo Lebesgue. Infatti $R_k = \left(x - \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{6\varepsilon}{2\pi^2}}, x + \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{6\varepsilon}{2\pi^2}}\right) \times \left(y - \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{6\varepsilon}{2\pi^2}}, y + \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{6\varepsilon}{2\pi^2}}\right)$ è tale che $\sum_{k=1}^{+\infty} |R_k|_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6\varepsilon}{2\pi^2}\frac{1}{k^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

2. Una conseguenza della definizione è che un'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla: se $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è tale che $|A_k|_n = 0\ \forall\ k$, allora $\left|\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right|_n = 0$. Infatti $\forall\ k\ \exists\ \{R_{i,k}\}_{i\in\mathbb{N}} : \bigcup_{i=1}^{+\infty} R_{i,k} \supseteq A_k$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} |R_{i,k}|_n < \varepsilon$. Dato che si può scegliere ε arbitrariamente piccolo, $\forall\ k$ si ha anche che $\exists\ \{R_{i,k}\}_{i\in\mathbb{N}}$: $\bigcup_{i=1}^{+\infty} R_{i,k} \supseteq A_k$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} |R_{i,k}|_n < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Allora $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ è ricoperta da $\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{i=1}^{+\infty} R_{i,k}$, tale che $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\bigcup_{i=1}^{+\infty} R_{i,k}\right|_n =$ $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} |R_{i,k}|_n < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

   E. g. $\mathbb{Q}$, unione numerabile di singoletti, in $\mathbb{R}$ ha misura nulla. L'insieme degli insiemi numerabili in $\mathbb{R}$ è strettamente contenuto nell'insieme degli insiemi di misura nulla: e. g. l'insieme di Cantor ha misura nulla ma non è numerabile.

Vale la proprietà di completezza: se $|A|_n = 0$, $\forall\ B \subseteq A\ |B|_n = 0$.

Def Si dice che una proprietà $p(\mathbf{x})$ vale quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$ se $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{non } p(\mathbf{x})\}$ ha misura nulla.

1. $I_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ q. o. in $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{1}{x} I_{(x\neq 0)}$ è continua q. o. in $\mathbb{R}$.

3. $f_n(x) = \arctan(n|x|)$ converge a $\frac{\pi}{2}$ q. o. in $\mathbb{R}$ (infatti solo se $x = 0$ $f_n(x) \to^{n\to+\infty} 0 \neq \frac{\pi}{2}$).

4. $f(x,y) = \frac{1}{|x^2-y^2|} I_{(x\neq\pm y)}$ è positiva q. o. in $\mathbb{R}^2$, ove le rette hanno misura nulla.

In generale, in $\mathbb{R}^n$ ogni sottospazio vettoriale di dimensione inferiore a n ha misura nulla.

Def Data f a valori in $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, si dice che f è definita q. o. in $\mathbb{R}^n$ se il suo dominio può essere scritto come $\mathbb{R}^n \backslash E$ con $E : |E|_n = 0$.

Def Dati $R_1, ..., R_m$ n-rettangoli disgiunti, una funzione $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ della forma $h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} h_j I_{R_j}(\mathbf{x})$, con $h_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\ \forall\ j$, si dice funzione semplice o a scala.

L'insieme delle funzioni semplici è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ rispetto alle operazioni canoniche[7].

Def $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ si dice funzione misurabile secondo Lebesgue se esiste una successione di funzioni semplici $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} : h_n \to^{n\to+\infty} u$ q. o. in $\mathbb{R}^n$.

Questa è l'unica regolarità che si richiede alle funzioni per essere candidate a essere integrabili.

Prop 2.2

Hp:	$\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to I \subseteq \mathbb{R}^m$ è misurabile, $F : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ è continua
Ts:	$F \circ \mathbf{u}$ è misurabile

[7] da approfondire dim

Ne segue che somma, prodotto, quoziente di funzioni misurabili è misurabile, dove $F(x,y) = x+y, xy, \frac{x}{y} I_{(y\neq 0)}$ rispettivamente.

Prop 2.3

$$\text{Hp: } \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è una successione di funzioni misurabili, } u_n \to^{n\to+\infty} u \text{ q. o. in } \mathbb{R}^n$$

$$\text{Ts: } u \text{ è misurabile}$$

In generale la misurabilità è una proprietà estremamente debole: è difficile costruire funzioni non misurabili.

Def Data $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} h_j I_{R_j}(\mathbf{x})$ funzione semplice, si dice integrale di Lebesgue di h, e si indica con $\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, il numero reale (complesso) $\sum_{j=1}^{m} h_j |R_j|_n$.

Def Data $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, si dice che u è integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ se valgono le seguenti condizioni:

I1 esiste una successione di funzioni semplici $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} : h_n \to^{n\to+\infty} u$ q. o. in $\mathbb{R}^n$

I2 $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) : m, n > n_0 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |h_m(\mathbf{x}) - h_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \varepsilon$.

In tal caso $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ si dice integrale di Lebesgue di u in $\mathbb{R}^n$, e si indica con $\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Dunque, come si vedrà più avanti, se u è integrabile esiste una successione di funzioni semplici che converge a u in L^1.

I1 è equivalente a chiedere che u sia misurabile e ciò fa sì che l'integrale in I2 sia ben posto. I2 implica che la successione $\left\{\int_{\mathbb{R}^n} h_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia di Cauchy: infatti, se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : m, n > n_0 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |h_m(\mathbf{x}) - h_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \varepsilon$, allora $\left|\int_{\mathbb{R}^n} h_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} h_m(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h_m(\mathbf{x}) - h_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \varepsilon$. In tal caso, la successione $\left\{\int_{\mathbb{R}^n} h_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$: si può dimostrare che α non dipende dalla scelta della successione $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dunque la definizione è ben posta.

Prop 2.4 (proprietà dell'integrale di Lebesgue I)

$$\text{Hp: } u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ è integrabile secondo Lebesgue}$$

$$\text{Ts: (i) se } u = v \text{ q. o., allora } v \text{ è integrabile e } \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$\text{(ii) } |u| \text{ è integrabile}$$

(ii) è una novità dell'integrale di Lebesgue e segue da I2; vale anche l'implicazione inversa.

1. Siano $f(x) = I_{\mathbb{Q}\cap[-1,1]} - I_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[-1,1]}$, $g(x) = -I_{(|x|\leq 1)}$: g è semplice e $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx = -2$, ma $g = f$ q. o., quindi anche $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = -2$.

Esistono quindi funzioni Riemann-integrabili ma non Lebesgue su intervalli illimitati, e. g. $u(x) = \frac{\sin x}{x}$. Infatti $|u|$ non è Lebesgue-integrabile.

Prop 2.5 (proprietà dell'integrale di Lebesgue II)

$$\text{Hp: } u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$$

$$\text{Ts: (i) } u \text{ è integrabile } \iff u^+, u^- \text{ sono integrabili}$$

$$\text{(ii) se } u, v \text{ sono integrabili, } \max\{u, v\}, \min\{u, v\} \text{ sono integrabili}$$

$$\text{(iii) se } u \text{ è reale, nonnegativa e integrabile, } \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geq 0$$

$$\text{(iv) se } u, v \text{ sono integrabili e } u \leq v \text{ q. o., } \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$\text{(v) se } u \text{ è integrabile, } \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}$$

$$\text{(vi) se } u, v \text{ sono integrabili, } \alpha u + \beta v \text{ è integrabile } \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$$

(iii) (positività dell'integrale), (iv) (monotonia dell'integrale), (v) (disuguaglianza triangolare), (vi) (linearità dell'integrale) sono proprietà ben note anche dell'integrale di Riemann.

Teo 2.6

$$\text{Hp: } u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) \text{ è misurabile, } \exists\, \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) : |u| \leq \phi \text{ q. o. e } \phi \text{ è integrabile}$$

$$\text{Ts: } u \text{ è integrabile}$$

Una funzione misurabile dominata quasi ovunque da una funzione integrabile è dunque integrabile.

Teo 2.7 (convergenza dominata)

$$\text{Hp: } u_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ \forall\, n,\ \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione di funzioni misurabili,}$$

$$u_n \to^{n\to+\infty} u \text{ q. o., } \phi \text{ è integrabile, } |u_n| \leq \phi \text{ q. o. } \forall\, n$$

$$\text{Ts: } u \text{ è integrabile, } u_n \text{ è integrabile } \forall\, n \text{ e } \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = 0$$

Le prime due tesi sono una consegunza del teorema sopra. La terza tesi, ancora conseguenza di I2, implica per disuguaglianza triangolare che $\left|\int_{\mathbb{R}^n} (u(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\right| \to^{n\to+\infty} 0$, cioè $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Teo 2.8 (convergenza monotona)

$$\text{Hp: } u_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ \forall\, n,\ \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione di funzioni integrabili}$$

$$\text{nonnegative, } u_n \to^{n\to+\infty} u \text{ q. o., } \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \in \mathbb{R},\ u_n \leq u_{n+1} \text{ q. o. } \forall\, n$$

$$\text{Ts: } u \text{ è integrabile e } \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = 0$$

Si noti che, essendo $\{u_n(x)\}$ monotona quasi $\forall\, x$ e $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, u limite di u_n è ben definita quasi ovunque. Senza l'ipotesi $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ è possibile che $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = +\infty$: in tal caso u limite puntuale q. o. è misurabile ma in generale non integrabile; è possibile inoltre che u non sia ben definita q. o.

Se $u_n : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ è misurabile ma non integrabile, in generale si scrive $\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = +\infty$.

A questo punto è naturale voler definire un integrale di Lebesgue anche su sottinsiemi propri di $\mathbb{R}^n$.

Def Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che E è misurabile secondo Lebesgue se la funzione indicatrice di E è integrabile in $\mathbb{R}^n$, cioè se $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. In tal caso si definisce misura di Lebesgue di E $|E|_n := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

In caso contrario si scrive, con abuso, $|E|_n = +\infty$.

Come sono fatti gli insiemi misurabili?

Prop 2.9

Gli aperti, i chiusi, le intersezioni numerabili e le unioni numerabili di insiemi aperti o chiusi sono insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$

Def Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, si dice che u è integrabile in E secondo Lebesgue se la funzione $\tilde{u} := u\chi_E$ è integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. In tal caso si definisce integrale di u in E $\int_E u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\, \chi_E(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Se inoltre $\tilde{E} \subseteq E$ è misurabile, si dice che u è integrabile in $\tilde{E}$ se $u|_{\tilde{E}}$ è integrabile. Si dice che u è misurabile in E se $\tilde{u}$ è misurabile in $\mathbb{R}^n$.

Le proprietà e i teoremi visti per l'integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ si estendono anche agli integrali su $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

E' naturale voler stabilire un collegamento tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue.

Teo 2.10 (confronto tra Riemann e Lebesgue)

Hp: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\exists\, K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto tale che $f(\mathbf{x}) = 0\ \forall\, \mathbf{x} \in K^c$,

f è Riemann integrabile in K

Ts: f è Lebesgue integrabile in K e i due integrali coincidono

Grazie a questo teorema, se si vuole calcolare l'integrale di Lebesgue di una funzione g che differisce per un insieme di misura nulla da una funzione f che si sa essere integrabile secondo Riemann, si può calcolare direttamente l'integrale di Riemann di f con le tecniche usuali: non occorre sviluppare nuove tecniche di integrazione per gli integrali di Lebesgue.

Si noti che il teorema esclude il caso degli integrali di Riemann impropri: è infatti possibile che f sia integrabile in senso improprio secondo Riemann, ma non secondo Lebesgue.

2.3 Spazi L^p

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile e $|\Omega|_n > 0$, l'insieme delle funzioni misurabili su Ω $\mathcal{M}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ misurabili}\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, avente come 0 la funzione nulla. Si vuole normare tale spazio $X = \mathcal{M}(\Omega)$ con una norma integrale (che usa l'integrale di Lebesgue): tuttavia, con queste premesse, non può essere soddisfatta la proprietà N1 della norma, perché è possibile che $N(u) = \int_\Omega u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$ anche se u non è lo zero di $\mathcal{M}(\Omega)$.

Per riuscire a normare $\mathcal{M}(\Omega)$ si introduce allora una relazione di equivalenza: si dice che u è equivalente a v, e si scrive $u \sim v$, se $u = v$ quasi ovunque. E' allora ben definito l'insieme $M(\Omega) := \frac{\mathcal{M}(\Omega)}{\sim} = \{[u] : u \in \mathcal{M}(\Omega)\}$: è l'insieme $\mathcal{M}(\Omega)$ quozientato rispetto alla relazione di equivalenza introdotta, cioè l'insieme delle classi di equivalenza $[u]$ indotte in $\mathcal{M}(\Omega)$ da $\sim$ [8].

$M(\Omega)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni $+ : M(\Omega) \times M(\Omega) \to M(\Omega)$, $\cdot : \mathbb{R} \times M(\Omega) \to M(\Omega)$ così definite: $[u] + [v] := [u + v]\ \forall\ [u], [v] \in M(\Omega)$ e $\lambda [u] := [\lambda u]\ \forall\ [u] \in M(\Omega)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$. Lo zero di $M(\Omega)$ è $0_{M(\Omega)} := [0]$.

Tali operazioni sono ben definite perché $\mathcal{M}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale; inoltre si può dimostrare che, essendo $[u] + [v] = [u + v]$, se $w \in [u], z \in [v]$ vale $[w + z] = [u + v]$, cioè la somma tra classi di equivalenza che si è definita non dipende dai rappresentanti scelti.

1. Si noti che se $v, w \in [u]$ allora $\int_\Omega v = \int_\Omega w$ per la proprietà (i) dell'integrale di Lebesgue. Ad esempio se $\Omega = (0, 1)$, $u(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap \Omega}(x) \in [0]$ (funzione di Dirichlet) e vale $\int_\Omega u = 0$.

2. Se Ω è aperto, allora $\forall\ [u] \in M(\Omega), [u] \neq [0]$, esiste al più una funzione f continua tale che $f \in [u]$. Infatti, se esistesse anche g continua tale che $g \in [u]$, $f - g$ sarebbe continua e nulla quasi ovunque, ma allora deve essere costantemente nulla[9], dunque $f = g$.

Si può ora definire, per $p \geq 1$, $L^p(\Omega) := \left\{[u] \in M(\Omega) : \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x} \in \mathbb{R}\right\}$. Si noti che, per come è definita la relazione di equivalenza, la scelta del rappresentante è indifferente per il valore dell'integrale. $L^p(\Omega)$ è finalmente lo spazio adeguato per definire una norma con l'integrale di Lebesgue: le due disuguaglianze seguenti sono necessarie per mostrare che esso è uno spazio vettoriale normato.

[8] Se $[u]$ è una classe di equivalenza, u è detto rappresentante della classe.

[9] Se per assurdo esistesse x tale che $f(x) - g(x) = k > 0$, per continuità esisterebbe un intorno $\mathcal{B}(x)$ in cui f sarebbe nonnegativa, ma dato che la misura di $\mathcal{B}(x)$ non è nulla non varrebbe $f - g = 0$ q.o.

Teo 2.11 (disuguaglianza di Hoelder)

$$\text{Hp:} \qquad u, v : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\text{Ts:} \qquad uv \in L^1(\Omega) \ \text{ e } \ \int_\Omega |u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})|\, dx \le \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(\mathbf{x})|^q\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}}$$

p, q come nell'ipotesi si dicono esponenti coniugati. Tale teorema mostra che se $u \in L^p, v \in L^q$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ allora $uv \in L^1$ e $||uv||_{L^1} \le ||u||_{L^p}\, ||v||_{L^q}$.

Teo 2.12 (disuguaglianza di Minkowski)

$$\text{Hp:} \qquad u, v : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ u, v \in L^p(\Omega)$$

$$\text{Ts:} \qquad \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x})|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Per $p = 1$ la disuguaglianza è ovvia per disuguaglianza triangolare. La tesi è che $||u + v||_{L^p} \le ||u||_{L^p} + ||v||_{L^p}$.

Prop 2.13 (norma L^p)

$$\text{Hp:} \qquad ||u||_p := \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}},\ p \in [1, +\infty)$$

$$\text{Ts:} \qquad \left(L^p(\Omega), ||\cdot||_p\right) \text{ è uno spazio normato}$$

Dim Per la disuguaglianza di Minkowski $L^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale: se $[u], [v] \in L^p(\Omega)$, $[u] + [v] \in L^p(\Omega)$.

Si verifica che valgono le proprietà della norma. Evidentemente $||u||_p \ge 0$. Inoltre $||u||_p = 0 \iff [u] = [0]$: l'implicazione da destra a sinistra segue dalla proprietà (i) dell'integrale di Lebesgue, quella da sinistra a destra vale perché se per assurdo l'insieme in cui $u \ne 0$ non avesse misura nulla allora l'integrale in $||u||_p$ non sarebbe nullo.

Vale N2 perché $||\alpha u||_p = \left(\int_\Omega |\alpha u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} = |a|\, ||u||_p$. N3 è una conseguenza diretta della disuguaglianza di Minkowski: $||u + v||_p \le ||u||_p + ||v||_p$. ■

La convergenza in norma L^p è una convergenza in norma integrale. In generale non c'è relazione tra la convergenza in norma L^p e la convergenza puntuale quasi ovunque.

Si può definire anche $L^\infty(\Omega) := \{[u] \in M(\Omega) : \exists\ M \ge 0 : |u| \le M \text{ q.o. in } \Omega\}$. Una funzione in $L^\infty(\Omega)$ si dice essenzialmente limitata in Ω, perché è limitata da M a meno di un insieme di misura nulla. Si noti che tale proprietà non dipende dal rappresentante scelto della classe di equivalenza. $L^\infty(\Omega)$ è ovviamente uno spazio vettoriale.

Data $[u] \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha := \min\{M \ge 0 : |u| \le M \text{ q.o. in } \Omega\}$ si dice estremo superiore essenziale di u e si indica con $\sup\text{ess}(u)$: si può dimostrare che $L^\infty(\Omega)$ è uno spazio normato con $||u||_\infty := \sup\text{ess}(u)$. La convergenza secondo tale norma è una convergenza uniforme quasi ovunque; quindi la convergenza in noma L^∞ implica la convergenza puntuale quasi ovunque.

1. $\sup ess\left(\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}\right) = 0$.

2. La disuguaglianza di Hoelder si può estendere al caso $p = 1, q = +\infty$ (che con abuso si possono dire soddisfare $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$): infatti, se $u \in L^1(\Omega)$ e $v \in L^\infty(\Omega)$ con $||v||_\infty = M$, allora $\int_\Omega |u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x})| \, dx \leq M \int_\Omega |u(\mathbf{x})| \, dx = ||u||_1 \, ||v||_\infty = \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}}$.

Si è visto che $L^p(\Omega)$, al variare di $p \in [1, +\infty]$, è una famiglia di spazi vettoriali normati. Vale il seguente risultato fondamentale.

Teo 2.14 (completezza degli L^p)

$$\text{Hp: } p \in [1, +\infty]$$

$$\text{Ts: } \left(L^p(\Omega), ||\cdot||_p\right) \text{ è uno spazio di Banach}$$

2.4 Spazi di Hilbert

Def Dato $H \neq \varnothing$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, si dice che p è un prodotto scalare su H se $p : H \times H \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ha le seguenti proprietà:

P1 annullamento e positività: $p(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $p(x,x) \geq 0 \ \forall \ x \in H$

P2 simmetria: $p(x,y) = \bar{p}(y,x) \ \forall \ x, y \in H$

P3 bilinearità: $p(\alpha x + \beta y, z) = \alpha p(x,z) + \beta p(y,z) \ \forall \ x, y, z \in H$, $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

In tal caso la coppia (H, p) si dice spazio prehilbertiano.

La simmetria permette di dedurre la linearità anche rispetto al secondo argomento: quindi il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica.

Prop 2.15 (Cauchy-Schwarz; il prodotto scalare induce una norma; identità del parallelogramma)

$$\text{Hp: } (H, p) \text{ è uno spazio prehilbertiano}$$

$$\text{Ts: (i) } |p(x,y)| \leq \sqrt{p(x,x)}\sqrt{p(y,y)}$$

$$\text{(ii) } (H, ||\cdot||) \text{ è uno spazio normato con la norma } ||x|| = \sqrt{p(x,x)}$$

$$\text{(iii) } ||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right) \ \forall \ x, y \in H$$

(i) serve per dimostrare (ii).

Dim (ii) $\sqrt{p(x,x)} \geq 0 \ \forall \ u$ e $\sqrt{p(x,x)} = 0 \Longleftrightarrow p(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Inoltre $\sqrt{p(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 p(x,x)} = |\alpha| \sqrt{p(x,x)} = |\alpha| \, ||x||$. $||x+y|| = \sqrt{p(x+y, x+y)} = \sqrt{p(x,x) + p(y,y) + 2p(x,y)} = \sqrt{|p(x,x) + p(y,y) + 2p(x,y)|}$,

per bilinearità, e usando la disuguaglianza triangolare e Cauchy-Schwarz si ottiene la maggiorazione $\sqrt{p(x,x)+p(y,y)+2\sqrt{p(x,x)}}$
$\sqrt{\left(\sqrt{p(x,x)}+\sqrt{p(y,y)}\right)^2} = \sqrt{p(x,x)}+\sqrt{p(y,y)} = ||x||+||y||.$

(iii) $\langle x-y, x-y\rangle + \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 - 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 + ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 = 2\left(||x||^2+||y||^2\right)$. ■

Nel seguito il prodotto scalare $p(x,y)$ si indica con $\langle x,y\rangle$.

Sia H uno spazio prehilbertiano. E' già noto che la norma è una funzione continua, cioè se $x_n \to x$ in H, allora $||x_n||^2 = \langle x_n, x_n\rangle \to ||x||^2 = \langle x,x\rangle$ (con la norma indotta dal prodotto scalare di H). Questo è un caso particolare del seguente fatto: data $x_n \to x$ in H, se inoltre $y_n \to y$, si ha che $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$ in $\mathbb{R}$ (continuità del prodotto scalare).

Prop 2.16 (continuità del prodotto scalare)

Hp: H è uno spazio prehilbertiano, $x_n \to x, y_n \to y$ in H

Ts: $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$

Dim Dimostro che $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \to 0$ per $n \to +\infty$. Per Cauchy-Schwarz $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n - y\rangle| \leq ||x_n - x||\,||y_n - y|| \to 0$, quindi per confronto si ha la tesi. ■

Def Dato uno spazio prehilbertiano $(H, \langle \_, \_\rangle)$, esso si dice spazio di Hilbert se $\left(H, \sqrt{\langle \_, \_\rangle}\right)$ è uno spazio di Banach.

Uno spazio di Hilbert è quindi uno spazio prehilbertiano completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.

Teo 2.17 (caratterizzazione degli spazi di Hilbert)

Hp: $(X, ||\cdot||)$ è di Banach e $||\cdot||$ è indotta da un prodotto scalare

$\iff$ $||\cdot||$ soddisfa l'identità del parallelogramma

Quindi, per verificare se uno spazio di Banach è anche di Hilbert, è sufficiente verificare che la norma soddisfi l'identità del parallelogramma. L'implicazione da sinistra a destra è ovvia e si è dimostrata sopra.

Si vedono alcuni esempi di spazi di Hilbert: poiché gli spazi vettoriali di dimensione finita n sono isomorfi a $\mathbb{R}^n$ o a $\mathbb{C}^n$, gli spazi di Hilbert realmente interessanti per l'analisi sono quelli a dimensione infinita.

1. $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare standard $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ che induce la norma euclidea $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, è uno spazio di Hilbert di dimensione finita.

2. $\mathbb{C}^n$, dotato del prodotto scalare $\langle u, w\rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{w}_i$ che induce la norma $||u|| = \sum_{i=1}^n |u_i|^2$, è uno spazio di Hilbert di dimensione finita.

3. In $C^0([a,b])$ $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ è un prodotto scalare. $||f|| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$, che è la norma L^2. Questo spazio vettoriale normato, prehilbertiano, non è completo: esiste una successione di funzioni continue che in tale norma è di Cauchy ma converge a una funzione discontinua (e. g. la successione $f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq 0 \\ nx \text{ se } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } x > \frac{1}{n} \end{cases}$).

4. In $L^2(\Omega)$ il prodotto scalare $\langle u,v\rangle = \int_\Omega u\bar{v}$ induce la norma L^2 $||u||_2 = \sqrt{\int_\Omega |u|^2}$: L^2 è uno spazio di Hilbert (di dimensione infinita) rispetto a tale prodotto scalare perché sappiamo già che L^2 è uno spazio di Banach. $L^p(\Omega)$, per $p \neq 2$, è di Banach ma non di Hilbert.

5. $l^2 = \left\{\{x_n\} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\right\}$ è l'insieme delle successioni reali la cui serie dei quadrati converge (la versione discreta di L^2). Dati $x,y \in l^2$, $\langle x,y\rangle := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\bar{y}_n$ (si dimostra che converge): l^2 con tale prodotto scalare è di Hilbert. $||x||_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2}$.

Def Dato $(H, \langle \_,\_\rangle)$ spazio prehilbertiano e $x,y \in H, x \neq 0, y \neq 0$, si dice angolo tra x e y $\alpha := \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{||x||\,||y||}$. Si dice che x e y sono ortogonali in H, e si scrive $x \perp y$, se $\langle x,y\rangle = 0$.

α è ben definito per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; $\alpha \in [0,\pi]$. Se $\langle x,y\rangle = 0$ si ritrova il teorema di Pitagora $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Teo

Hp: $(H, \langle \_,\_\rangle)$ spazio prehilbertiano, $\{x_1, ..., x_n\}$ sono a due a due ortogonali in H

Ts: $||x_1 + ... + x_n||^2 = ||x_1||^2 + ... + ||x_n||^2$

Dim $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i\rangle$. ■

Si è già visto ad algebra lineare un teorema sulla proiezione ortogonale per spazi euclidei a dimensione finita. Per togliere l'ipotesi di dimensione finita occorre la struttura di spazio di Hilbert. Infatti tutti gli spazi euclidei sul campo $\mathbb{R}$ a dimensione finita sono spazi di Hilbert[10].

Teo 2.18 (minima distanza)

Hp: $(H, \langle \_,\_\rangle)$ è uno spazio di Hilbert, V è un sottospazio chiuso di H

Ts: $\forall\, x \in H\ \exists\,!\ y : V : ||y-x|| = \inf_{w\in V} ||w-x||$

[10]Si noti che questo non è vero se si considera un campo qualsiasi. Infatti $\mathbb{Q}^n$ sul campo $\mathbb{Q}$ è uno spazio prehilbertiano con il prodotto scalare standard, ma $\mathbb{Q}^n$ non è completo rispetto alla norma euclidea, cioè non è di Banach.

In tal caso si definisce distanza tra x e V $d(x,V) := ||y-x||$.

Nell'ipotesi si intende che V è chiuso rispetto alla metrica indotta dalla norma[11]. La tesi afferma che per ogni elemento x di H esiste un unico $y \in V$ che, tra tutti gli elementi di V, è quello più vicino a x (secondo la metrica indotta dalla norma).

Def Dato E sottospazio di H e $(H, \langle \_, \_ \rangle)$ spazio di Hilbert, si definisce sottospazio ortogonale a E l'insieme $E^{\perp} := \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall \ y \in E\}$.

Dalla continuità del prodotto scalare segue che $E^{\perp}$ è chiuso[12]. Si può dimostrare che vale inoltre $\left(\bar{E}\right)^{\perp} = E^{\perp}$.

Def Dato $(H, \langle \_, \_ \rangle)$ spazio di Hilbert e $V, W \subseteq H$, V e W si dicono sottospazi ortogonali, e si scrive $V \perp W$, se $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall \ x \in V, \ \forall \ y \in W$.

Ovviamente $V^{\perp}$ e V sono ortogonali.

1. Se $V \perp W$, $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$ per la proprietà di annullamento del prodotto scalare.

Def Dato $(H, \langle \_, \_ \rangle)$ spazio di Hilbert e $V, W \subseteq H$ sottospazi ortogonali, si dice somma diretta di V e W l'insieme $V \oplus W = \{x + y : x \in V, y \in W\}$.

Si può dimostrare che $\forall \ z \in V \oplus W \ \exists \ ! \ x \in V$ e $\exists \ ! \ y \in W : z = x + y$, cioè ogni z in $V \oplus W$ può essere decomposto in un unico modo come somma di un elemento di V e uno di W.

Teo 2.20 (proiezioni)

Hp: $(H, \langle \_, \_ \rangle)$ spazio di Hilbert, $V \subseteq H$ sottospazio chiuso

Ts: $H = V \oplus V^{\perp}$

Inoltre per il teorema di minima distanza, essendo sia V che $V^{\perp}$ chiusi, sono ben definiti le seguenti funzioni, dette operatori di proiezione: $p_V : H \to V, p_V(x) = y = \arg\min_{w \in V} d(x,w)$ e $p_{V^{\perp}} : H \to V^{\perp}, p_{V^{\perp}}(x) = z = \arg\min_{w \in V^{\perp}} d(x,w)$, e vale $x = p_V(x) + p_{V^{\perp}}(x) \ \forall \ x \in H$.

[11] Un generico sottinsieme E di uno spazio metrico (X,d) si dice chiuso se ogni successione $\{x_n\}$ a valori in E e convergente in X converge a un elemento di E.

Tale ipotesi non sarebbe necessaria in $\mathbb{R}^n$, tutti i sottospazi del quale sono chiusi.

[12] Si vuole dimostrare che $\forall \ \{x_n\} \subseteq E^{\perp}$ che converge in H a x vale $x \in E^{\perp}$.

Poiché $\{x_n\} \subseteq E^{\perp}$, vale $\langle x_n, y \rangle = 0 \ \forall \ n, \ \forall \ y \in E$. Allora, se $x_n \to x$ in H, per continuità del prodotto scalare vale $\langle x, y \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y \rangle = 0 \ \forall \ y \in E$, cioè $x \in E^{\perp}$.

2.5 Serie di Fourier astratte

Def Dato $(H, \langle\_,\_\rangle)$ spazio di Hilbert, $E \subseteq \mathbb{N}$ e $\{u_n\}_{n\in E} \subseteq H$, $\{u_n\}_{n\in E}$ si dice sistema ortogonale se $\langle u_n, u_m\rangle = 0$ $\forall\ m, n \in E, m \neq n$. Se inoltre $\langle u_n, u_n\rangle = 1\ \forall\ n \in E$, il sistema si dice ortonormale.

Teo 2.19

Hp: $(H, \langle\_,\_\rangle)$ spazio di Hilbert, $E \subseteq \mathbb{N}$, $\{u_n\}_{n\in E} \subseteq H$ sistema ortogonale, $\{c_j\}_{j\in E} \subseteq \mathbb{C}$

Ts: $\displaystyle\sum_{n\in E} c_n u_n$ converge $\iff \displaystyle\sum_{n\in E} |c_n|^2 < +\infty$; in tal caso $\exists\ x \in H : x = \displaystyle\sum_{n\in E} c_n u_n$;

se inoltre il sistema è ortonormale vale $c_n = \langle x, u_n\rangle\ \ \forall\ n \in E$, e se inoltre

$y = \displaystyle\sum_{n\in E} d_n u_n$, allora $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{n\in E} c_n \bar{d}_n$ e in particolare $||x||^2 = \displaystyle\sum_{n\in E} |c_n|^2$ (identità di Parseval)

Il teorema è rilevante se $E = \mathbb{N}$. Si ricorda che $\sum_{n\in E} c_n u_n$ è la successione delle somme parziali $\left\{\sum_{j=0}^{n} c_j u_j\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, e la convergenza di cui si parla è la convergenza nella norma indotta dal prodotto scalare.

Inoltre, per gli $x \in H$ che possono essere scritti come somma di una serie del tipo $\sum_{n\in E} c_n u_n$ il calcolo di norme e prodotti scalari si riduce al calcolare somme di serie numeriche. In particolare, $||x||^2$ può essere calcolata come la norma in l^2 della successione dei suoi coefficienti $\{c_n\}$ e $\langle x, y\rangle$ come prodotto scalare in l^2 delle successioni dei coefficienti.

Dim (i) Sia $E = \mathbb{N}$. Si dimostra solo che se $x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n$, allora $c_j = \langle x, u_j\rangle$. Questo è vero perché $\langle x, u_j\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n, u_j \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle c_n u_n, u_j\rangle = c_n\, ||u_n||^2 = c_n$; lo scambio tra serie e prodotto scalare è lecito per la continuità del prodotto scalare. ■

Def Dato $(H, \langle\_,\_\rangle)$ spazio di Hilbert, $E \subseteq \mathbb{N}$ e $\{u_n\}_{n\in E} \subseteq H$ sistema ortogonale (ortonormale), se $\forall\ x \in H\ \exists\ !\ \{c_n\}_{n\in E} \subseteq \mathbb{C} : x = \sum_{n\in E} c_n u_n$, $\{u_n\}_{n\in E}$ si dice base ortogonale (ortonormale) di H.

In tal caso tutte le proprietà enunciate nel teorema sopra sono soddisfatte. Si può dimostrare grazie all'assioma della scelta che ogni spazio di Hilbert H separabile (cioè per il quale $\exists\ S \subseteq H$ denso in H e numerabile) ammette una base ortonormale al più numerabile (che si può costruire con l'algoritmo di Gram-Schmidt). Se $\dim H = +\infty$ spesso non è affatto banale trovare una base.

Def Dato $(H, \langle\_,\_\rangle)$ spazio di Hilbert, $E \subseteq \mathbb{N}$ e $\{u_n\}_{n\in E} \subseteq H$ sistema ortogonale (ortonormale), se $\forall\ x \in H$ $\langle x, u_n\rangle = 0\ \forall\ n \Longrightarrow x = 0$, $\{u_n\}_{n\in E}$ si dice sistema ortogonale (ortonormale) completo di H.

Dato $(H, \langle\_,\_\rangle)$ spazio di Hilbert con base ortonormale $\{u_n\}_{n\in E}$, per definizione $\forall\ x \in H\ \exists\ !\ \{c_n\}_{n\in E} : x = \sum_{n\in E} c_n u_n$ e $c_n = \langle x, u_n\rangle$. L'uguaglianza $x = \sum_{n\in E} \hat{x}_n u_n$ significa solo che la successione delle somme parziali converge a x nella norma indotta dal prodotto scalare di H, quindi a seconda dello spazio in cui si lavora occorreranno teoremi che permettano di dedurre anche altri tipi di convergenza.

Se $E=\mathbb{N}$, i coefficienti c_n si dicono coefficienti di Fourier astratti e si indicano con $\hat{x}_n$, mentre la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{x}_n u_n$ si dice serie di Fourier astratta di x. dal teorema segue dunque che l'operatore $\mathcal{F}: H\to l^2$ che a ogni $x\in H$ associa la successione $\hat{x}_n=\langle x,u_n\rangle$ dei suoi coefficienti di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma, cioè è un'isometria: $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{x}_n\hat{y}_n$.

Poiché per il teorema $\sum_{n\in E}|\hat{x}_n|^2<+\infty$, allora per la condizione necessaria di convergenza delle serie reali $\lim_{n\to+\infty}|\hat{x}_n|^2=0$, quindi $\hat{x}_n\to^{n\to+\infty}0$.

1. Se $\{u_n\}_{n\in E}$ è una base ortonormale di H, vale $x=\sum_{n\in E}\hat{x}_n u_n$. D'altra parte, se si fissa k e si prende $V=span\{u_1,...,u_k\}$, vale anche $x=p_V(x)+p_{V^\perp}(x)=\sum_{n=1}^{k}\hat{x}_n u_n+\sum_{n=k+1}^{+\infty}\hat{x}_n u_n$

Si affronta ora l'esempio fondamentale di $H=L^2([-\pi,\pi])$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, in cui $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,g(t)\,dt$ (l'integrale è ben definito per la disuguaglianza di Hoelder). Si può dimostrare che $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale per H (è facile dimostrare che è un sistema ortonormale, molto meno che è una base). Per quanto detto, se $f\in H$ la serie di Fourier di f è

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\langle f,u_n\rangle u_n=\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

cioè $f=\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\langle f,\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\langle f,\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$. Dal teorema visto è noto che la serie di Fourier converge a f in norma L^2 (il che non implica la convergenza quasi ovunque). I termini con il coseno catturano la parte pari, quelli con il seno la parte dispari di f: infatti se f è pari $b_n=\left\langle f,\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle=0\ \forall\ n$, se f è dispari $a_n=0\ \forall\ n$.

Ogni somma parziale della serie si dice polinomio trigonometrico (in analogia con la serie di Taylor, per la quale le somme parziali sono polinomi effettivi).

1. Considero la serie di Fourier $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\sin kx$ e la sua somma f (quando è ben definita) in $[0,\pi]$. Se $\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2<+\infty$, allora $f\in L^2$. Infatti sono soddisfatte le condizioni di 2.19, per cui $\exists\ f\in L^2: f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\sin kx$.

Def Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, si dice che f soddisfa la condizione di Dirichlet (D) in $x_0\in(a,b)$ se (i) f è derivabile in x_0 oppure (ii) f è continua in x_0 ma ha un punto angoloso in x_0 oppure (iii) f ha una discontinuità a salto in x_0 ma esistono finiti $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$.

Se f soddisfa la condizione di Dirichlet in tutto $[a,b]$ allora è integrabile e L^2.

Si definisce funzione regolare a tratti una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata prima continua in $[a, b]$ a eccezione di un numero finito di punti in cui f può essere non derivabile o addirittura discontinua, ma in cui esistono finiti i limiti destro e sinistro sia di f che di f'.

Teo 2.22 (convergenza puntuale della serie di Fourier)

$$\text{Hp: } f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ soddisfa (D) in } x_0 \in (-\pi, \pi)$$

$$\text{Ts: la serie di Fourier di } f \text{ converge in } x_0 \text{ e la sua somma vale } \frac{\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)}{2}$$

Se vale (i) o (ii) di D f è continua in x_0 e la somma è $f(x_0)$.

Teo

$$\text{Hp: } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ è } T\text{-periodica, continua, regolare a tratti in } [0, T];$$

$$f(0) = f(T), \; a_k = \left\langle f, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle, b_k = \left\langle f, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$$

$$\text{Ts: le serie } \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|, \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| \text{ convergono}$$

Prop 2.21 (convergenza assoluta della serie di Fourier)

$$\text{Hp: } a_n = \left\langle f, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle, b_n = \left\langle f, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle, \; \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \text{ convergono}$$

$$\text{Ts: la serie di Fourier di } f \text{ converge assolutamente e uniformemente in } [-\pi, \pi] \text{ a } f$$

La dimostrazione si basa sull'applicazione del criterio di Weierstrass: in realtà la convergenza è totale. Se si applica questa proposizione, f è continua.

Dalle ipotesi segue che $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2, \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2$ convergono, quindi $f \in L^2$: le ipotesi più forti permettono di concludere di più sulla convergenza della serie di Fourier.

1. Considero la serie di Fourier $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx$ e la sua somma f (quando è ben definita) in $[0, \pi]$. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|$ converge, allora $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$. Infatti in tal caso la convergenza a f è uniforme, quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x \to 0^+} b_k \sin kx = 0$.

2. Considero la serie di Fourier $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx$ e la sua somma f (quando è ben definita) in $[0, \pi]$. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} k |b_k|$ converge, allora $f \in C^1$. Infatti in tal caso la convergenza della serie delle derivate è uniforme per 2.21, quindi[13] la funzione somma è C^1.

[13] vedi teo analisi 2 su scambio serie e derivata

Teo 2.23 (convergenza uniforme della serie di Fourier)

Hp: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ è C^1 tranne al più in un numero finito di punti angolosi

Ts: la serie di Fourier di f converge assolutamente e uniformemente a f in $[-\pi, \pi]$

L'ipotesi implica che f soddisfi (i) o (ii) di (D) in tutto $[-\pi, \pi]$ e che f sia L^2. 2.23 è una conseguenza immediata del teorema sopra e di 2.21.

Quindi (**corollario**) se $f \in C^1([-\pi, \pi])$ vale la tesi del teorema: questo risultato è particolarmente utile perché l'ipotesi si verifica facilmente.

Si noti che se $f \in L^1([-\pi, \pi])$, poiché $u_n \in L^\infty \ \forall \ n$, per la disuguaglianza di Hoelder si possono comunque costruire i coefficienti della serie di Fourier. Si può dimostrare che esiste una serie di Fourier che diverge q.o.

Il motivo per cui si considera proprio l'intervallo $[-\pi, \pi]$ è che, avendo ottenuto dei risultati in tale intervallo, essi possono essere estesi con periodicità alle funzioni di variabile reale: quindi le funzioni di variabile reale che si approssimano con la serie di Fourier sono le funzioni periodiche. Si noti che mentre per scrivere la serie di Taylor di una funzione occorre che essa sia C^∞, la serie di Fourier può essere scritta anche per funzioni discontinue: per questo i risultati sulla convergenza della seconda sono molto più variegati.

Se invece $H = L^2([-\pi, \pi])$ spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, in cui $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \bar{g}(t)\, dt$, si può dimostrare che $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale per H. Per quanto detto, se $f \in H$ la serie di Fourier di f è

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, u_n \rangle u_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle f, \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

Se $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ è periodica di periodo 2π, $f' \in C^0$ e $f' \in L^2([-\pi, \pi])$ (in quanto continua in un compatto, è limitata e quindi appartiene a $L^p \ \forall \ p$). Come già notato, $\left(\hat{f'}\right)_n \to^{n \to +\infty} 0$; ma poiché $\left(\hat{f'}\right)_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t)\, e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{-in}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt = \frac{in}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt$ (grazie alla formula di integrazione per parti e alla periodicità di f), si ottiene $in\hat{f}_n \to^{n \to +\infty} 0$, il che significa che $\hat{f}_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$. Reiterando questo procedimento si ricava che se $f \in C^k$ allora $\hat{f}_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$: più f è regolare, più in fretta i coefficienti di Fourier di f tendono a 0. Si osserverà un fenomeno analogo per la trasformata di Fourier.

1. Il ragionamento vale anche in campo reale per funzioni pari. Se ad esempio $f(x) = e^{|x|}$ con serie di Fourier $\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$, f è C^∞ in $[-\pi, \pi]$ (a meno di un insieme di misura nulla), quindi i suoi coefficienti di Fourier tendono a 0 più in fretta di qualsiasi polinomio. Questo implica peraltro che $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge e dunque la serie di Fourier converge uniformemente a f.

   Non si può concludere lo stesso per $f(x) = \begin{cases} e^x \text{ se } x \geq 0 \\ -e^{-x} \text{ se } x < 0 \end{cases}$, dato che $f(\pi) \neq f(-\pi)$.

2.6 Convoluzione

Si definisce un'operazione tra funzioni che, come si vedrà nel seguito, ha una proprietà di centrale importanza che permette di risolvere le equazioni differenziali con la trasformata di Fourier.

Def Date $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si dice convoluzione di f e g la funzione $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy$.

La seguente disuguaglianza mostra che la definizione è ben posta: se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy$ esiste finito.

Teo 2.24 (disuguaglianza di Young)

$$\text{Hp: } f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

$$\text{Ts: } \exists\ f * g \in L^r \text{ e } ||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}$$

Si noti che se in particolare $p = q = r = 1$ si ha $||f * g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1} ||g||_{L^1}$.

Il teorema vale anche per L^∞ con la convenzione $\frac{1}{\infty} = 0$.

Si può mostrare che il prodotto di convoluzione è commutativo, associativo e distributivo.

Il teorema sopra permette di determinare la norma di vari operatori limitati.

1. Dati $X = Y = L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definisco l'operatore di convoluzione $T_f : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $T_f(g) = f * g$. Per 2.24, se $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ anche $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, quindi è ben definito, e inoltre lineare. Poiché $||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1} ||g||_{L^p}$, T_f è lineare e continuo con $||T||_{(X,Y)} \leq ||f||_{L^1}$.

2. Considero la trasformata di Fourier su $L^1(\mathbb{R}^n)$ (che si vedrà meglio più avanti): $\forall\ f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si definisce trasformata di Fourier di f $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, e^{-i\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x}$, ben definita perché l'argomento è assolutamente integrabile. Si può dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$: quindi $\hat{f} \in C^0_*(\mathbb{R}^n)$ e posso usare la norma del massimo. Allora si può vedere la trasformata come un operatore $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_*(\mathbb{R}^n)$. Inoltre $\forall\ \xi$ $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = ||f||_{L^1}$, quindi anche $\max_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right| = \left|\left|\hat{f}\right|\right|_{C^0_*(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^1}$: l'operatore è lineare e continuo con norma operatoriale $k \leq 1$.

Teo 2.25 (regolarità della convoluzione)

$$(1)\ \text{Hp: } f \in L^p(\mathbb{R}^n), \phi \in C^0(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts: } f * \phi \in C^0(\mathbb{R}^n)$$

$$(2)\ \text{Hp: } f \in L^p(\mathbb{R}^n), \phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts: } f * \phi \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } \frac{\partial (f*\phi)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

In generale, la convoluzione tra due funzioni eredita la regolarità della funzione più regolare tra le due.

Inoltre se $f \in L^p(\mathbb{R}^n), \phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\nabla(f*\phi) = f * \nabla\phi$. Se $\phi \in C^\infty$, $f*\phi \in C^\infty$.

Se $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R})$ hanno supporti rispettivamente I, J compatti, anche $\phi * \psi$ è a supporto compatto. Questo si può giustificare informalmente con il seguente ragionamento. $(\phi*\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) I_I(y) \psi(x-y) I_J(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) I_I(y) \psi(x-y) I_{J+x}(y)\, dy$, dove $J+x$ indica sinteticamente - posto $J = [a_1, b_1] \cup ... \cup [a_n, b_n]$ - l'insieme $[x-b_1, x+a_1] \cup ... \cup [x-b_n, x+a_n]$. Allora $(\phi*\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\psi(y) I_{I\cap J+x}(y)\, dy$ e se x è abbastanza grande in modulo si ha che $I \cap J + x = \varnothing$, cioè al di fuori di un intervallo del tipo $[-a, a]$ per x si ha $(\phi*\psi)(x) = 0$.

Un'applicazione della convoluzione è l'approssimazione di funzioni irregolari con funzioni regolari definite mediante la convoluzione.

Def Data $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$, essa si dice successione regolarizzante se $\rho_k(y) \geq 0\ \forall\ y, \forall\ k$, se $\int_{\mathbb{R}} \rho_k(y)\, dy = 1\ \forall\ k$ ed esiste una successione ε_k positiva e infinitesima tale che supp$(\rho_k) \subseteq \mathcal{B}_{\varepsilon_k}\ \forall\ k$.

Quindi le ρ_k hanno supporto sempre più piccolo; di contro, dato che l'integrale è sempre uno, assumono in tale supporto valori sempre più grandi.

Teo 2.26 (regolarizzazione di una funzione L^p)

$$\text{Hp: } f \in L^p(A), A \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Ts: } \exists\ \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A) : f_k \to^{L^p} f \text{ e } f_k \to f \text{ q.o.}$$

Quindi una funzione L^p è limite di una successione di funzioni $\mathcal{D}(\Omega)$, cioè estremamente regolari.

Uno dei modi per costruire $\{f_k\}$ è il seguente. Fissata $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\int_{\mathbb{R}} \rho(y)\, dy = 1$ (ρ si dice nucleo mollificatore), si definisce $\rho_k(x) = k\rho(kx)$: allora ρ_k è tale che $\int_{\mathbb{R}} \rho_k(x)\, dx = 1$ e, se supp$(\rho) \subseteq \mathcal{B}_r$, supp$(\rho_k) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{r}{k}}$.

1. $\rho(y) = e^{\frac{1}{y^2-1}} I_{(|y|<1)}(y)$ è un nucleo mollificatore.

2. $\rho(y) = \frac{1}{2} I_{(-1,1)}(y)$ ha tutte le proprietà richieste, eccetto l'essere C^∞.

Si definisce $f_k(x) = f(x) * \rho_k(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, k\rho(k(x-y))\, dy$: $f_k \in C^\infty$ per le proprietà di regolarità della convoluzione. Allora $f_k \to f$ q.o. per $k \to +\infty$ e $f_k \to^{L^p} f$.

1. Fissato $A = [-1, 1]$, ci si può convincere della verità della prima convergenza considerando il nucleo mollificatore $\rho(y) = \frac{1}{2} I_{[-1,1]}(y)$. $\rho_{1/\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\varepsilon} I_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x)$: allora $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{2\varepsilon} I_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{2\varepsilon} I_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(y)\, dy$, cioè $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\, dy$: per il teorema della media integrale - che vale se f è continua - $\exists\ x^* \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) : f_\varepsilon(x) = f(x^*)$, dunque, fissato x, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x) = f(x)$.

3 Teoria delle distribuzioni

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $v : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, si dice supporto di v $\text{supp}(v) := \mathit{clos}(\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\})$.

La chiusura è fatta in $\mathbb{R}^n$.

1. $f(x) = x \sin \frac{1}{x} I_{(x \neq 0)}$ è nulla in $\left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$, la chiusura del cui complementare è $\mathbb{R}$, dunque $\text{supp}(f) = \mathbb{R}$.

2. $g(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} I_{(|x|<1)}$ ha $\text{supp}(g) = [-1, 1]$

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $C^\infty(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha v$ è continua in $\Omega\ \forall\ \alpha$ multindice$\}$.

Con multiindice si intende un vettore $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $D^\alpha v = \frac{\partial^{(\alpha_1)} v}{\partial x_1^{(\alpha_1)}} ... \frac{\partial^{(\alpha_n)} v}{\partial x_n^{(\alpha_n)}}$: α_i indica il numero di volte che si deriva v rispetto a x_i.

Def Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, si dice spazio delle funzioni test $\mathcal{D}(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} : v \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(v)$ è compatto in $\mathbb{R}^n\}$.

Se $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora v è limitata (e lo sono anche tutte le sue derivate), in quanto continua su un compatto: questo implica che $v \in L^p(\Omega)\ \forall\ p$, in quanto funzione limitata su un insieme di misura finita. Sia C^∞ che $\mathcal{D}$ sono spazi vettoriali rispetto all'usuale somma tra funzioni, ma si può dimostrare che non esiste una norma che li renda spazi di Banach (sono solo spazi topologici localmente convessi). Non c'è quindi una scelta naturale della metrica in base a cui definire la convergenza.

Def Data una successione di funzioni test $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$, si dice che ϕ_n converge a ϕ in $\mathcal{D}(\Omega)$, e si scrive $\phi_n \to^{\mathcal{D}(\Omega)} \phi$ per $n \to +\infty$, se valgono le seguenti condizioni:

D1 $\exists\ K \subseteq \Omega, K \neq \varnothing$ compatto tale che $\text{supp}(\phi_n) \subseteq K\ \forall\ n$

D2 $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$ uniformemente $\forall\ \alpha$ multiindice

La condizione saliente è D2, la convergenza uniforme di tutte le derivate di ϕ_n (e, prendendo $\alpha = \mathbf{0}$, di ϕ_n stessa). Richiedere la convergenza uniforme è naturale, essendo $\mathcal{D}(\Omega)$ uno spazio di funzioni C^∞: se $\phi_n \to \phi$, D2 implica che allora anche $\phi \in C^\infty$, D1 implica che ϕ ha supporto compatto.

Def Data una successione di funzioni test $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$, si dice che ϕ_n è di Cauchy in $\mathcal{D}(\Omega)$ se valgono le seguenti condizioni:

D1 $\exists\, K \subseteq \Omega, K \neq \varnothing$ compatto tale che $\text{supp}(\phi_n) \subseteq K\ \forall\, n$

D2 $\forall\, \alpha$ multiindice $D^\alpha \phi_n$ è di Cauchy uniformemente, cioè $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : m, n > n_0 \Longrightarrow \max_{x \in K} |D^\alpha \phi_m - D^\alpha \phi_n| < \varepsilon$.

Si può dimostrare che ogni successione di Cauchy in $\mathcal{D}(\Omega)$ è convergente: segue dal criterio di Cauchy per la convergenza uniforme applicato a $D^\alpha \phi_n$.

Def Dato X spazio vettoriale su $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, si dice funzionale lineare su X una funzione $L : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ tale che $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)\ \forall\, x, y \in X, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. L'insieme dei funzionali lineari su X si dice duale algebrico di X e si indica con X^*.

Tipicamente si sceglie come X uno spazio di funzioni. Un funzionale è una generica funzione $L : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ e non è un operatore: $L(x)$ non è un elemento di un altro spazio di funzioni, ma uno scalare.

1. Se $X = \mathbb{R}^n$, X' è l'insieme delle applicazioni lineari su $\mathbb{R}^n$.

Def Dato X spazio vettoriale in cui è definita una convergenza per successioni e $L : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ funzionale su X, L si dice funzionale continuo se $\forall\, x \in X, \forall\, \{x_n\} \subseteq X : x_n \to^{n \to +\infty} x$ vale $L(x_n) \to^{n \to +\infty} L(x)$. L'insieme dei funzionali lineari e continui su X si dice duale continuo di X e si indica con X'.

La convergenza $x_n \to^{n \to +\infty} x$ è quella definita in X (non necessariamente una convergenza in norma), $L(x_n) \to^{n \to +\infty} L(x)$ è la consueta convergenza scalare. [DA QUI IN POI $*$ INDICA IL DUALE CONTINUO]

[Si può dimostrare che negli spazi di Hilbert vale il teorema di rappresentazione di Riesz: se $(H, \langle \_, \_ \rangle)$ è di Hilbert e $L \in H^*$, L è continuo $\Longleftrightarrow \exists\, !\, y \in H : L(x) = \langle x, y \rangle\ \forall\, x \in H$. Quindi ogni funzionale lineare continuo su uno spazio di Hilbert può essere rappresentato come un prodotto scalare, con un fattore fissato.

La dimostrazione di $\Longleftarrow$ è immediata: se $x_n \to x$, allora $|L(x_n) - L(x)| = |\langle x_n - x, y \rangle| \leq ||x_n - x||\, ||y|| \to^{n \to +\infty} 0$, cioè $L(x_n) \to L(x)$, quindi L è continuo.]

Def Dato $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ funzionale lineare e continuo sullo spazio delle funzioni test, u si dice distribuzione (o funzione generalizzata) su Ω.

Si noti che la convergenza di $\phi_n \to \phi$ a cui si fa riferimento, necessaria per definire la continuità di L, è quella definita sopra con D1, D2. Per indicare $u(\phi)$ si usa spesso la notazione $\langle u, \phi \rangle$ (che è un abuso di notazione perché non è definito alcun prodotto scalare in $\mathcal{D}(\Omega)$), in analogia con la scrittura che si usa negli spazi di Hilbert, dove - per il teorema di Riesz - l'azione di ogni funzionale lineare può essere scritta come prodotto scalare.

Def Dato $\mathcal{D}'(\Omega)$ insieme delle distribuzioni su Ω e una successione di distribuzioni $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, si dice che u_j converge a u, e si scrive $u_j \to^{\mathcal{D}'(\Omega)} u$ per $j \to +\infty$, se $u_j(\phi) \to^{j \to +\infty} u(\phi)\ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

La convergenza definita si dice convergenza successionale ed è di fatto una convergenza puntuale. Si può mostrare che se $\lim_{j\to+\infty} u_j(\phi)$ è finito $\forall\ \phi$, allora esiste una distribuzione cui $\{u_j\}$ converge nel senso delle distribuzioni.

1. Se $f_n(x) = n^2 x e^{-n|x|}$, $u_{f_n} \to^{\mathcal{D}'(\Omega)} 0$. Infatti, fissata ϕ, $u_{f_n}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 x e^{-n|x|}\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} n^2 x e^{nx}\phi(x)\,dx + \int_0^{+\infty} n^2 x e^{-nx}\phi(x)\,dx$. Il secondo addendo è $\int_0^{+\infty} n^2 x e^{-nx}\phi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} y e^{-y}\phi\left(\frac{y}{n}\right)dy$, la cui funzione integranda è maggiorata da $ye^{-y}\max_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)$, che è integrabile. Dunque per convergenza dominata è lecito scambiare limite e integrale e $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n^2 x e^{-nx}\phi(x)\,dx = 0$. Analogamente si conclude per il primo addendo.

2. La convergenza uniforme di $f_n(x)\phi(x)$ a $f(x)\phi(x)$, con f limite puntuale di f_n, è sufficiente per concludere che u_{f_n} converge a u_f in distribuzione: infatti è lecito lo scambio tra limite e integrale.

Def Dato $\mathcal{D}'(\Omega)$ insieme delle distribuzioni su Ω e $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, si dice che u_j è di Cauchy se $\forall\ \phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ $\{u_j(\phi)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Si noti che, fissato ϕ, $\{u_j(\phi)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali. Quindi una successione di distribuzioni converge (è di Cauchy) se la successione di numeri reali che si ottiene fissando ϕ converge (è di Cauchy). Si può dimostrare che ogni successione di Cauchy in $\mathcal{D}'(\Omega)$ è convergente.

E' ora naturale voler trovare qualche esempio di distribuzione, cioè mostrare che $\mathcal{D}'(\Omega)\neq\varnothing$.

Si definisce l'insieme delle funzioni localmente integrabili $L^1_{loc}(\Omega) := \left\{f\in M(\Omega) : \forall\ K\subseteq\Omega \text{ compatto } f|_K \text{ è } L^1(K)\right\}$, con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$. E' uno spazio vettoriale, che non può essere reso di Banach.

1. Se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $\Omega = (0,1)$, $f\notin L^1(\Omega)$, ma $f\in L^1_{loc}(\Omega)$.

2. Se $f\in L^p_{loc}(\Omega)$ con $p\in(1,+\infty)$, allora $f\in L^1_{loc}(\Omega)$. Infatti, se $K\subseteq\Omega$ è compatto, allora $\int_K |f|\,dx = \int_K |f|\cdot 1 \leq ||f||_{L^p(K)}\left(\int_K 1 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}} = (|K|_n)^{\frac{1}{q}}\,||f||_{L^p(K)} < +\infty$. Se $p=+\infty$, $\int_K |f|\,dx \leq |K|_n \sup ess_K f < +\infty$.

Si definisce ora $u_f : \mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{R}, u_f(\phi) = \int_\Omega f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, con $f\in L^1_{loc}(\Omega)$. E' una distribuzione? L'integrale è ben definito perché per definizione di $\mathcal{D}(\Omega)$ ϕ è limitata ed è in $L^\infty(K)$ con $K = \text{supp}(\phi)$: allora, per Hoelder, $\int_\Omega f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_K f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ è finito. u_f è un funzionale lineare per linearità dell'integrale di Lebesgue: $u_f(\alpha\phi+\beta\psi) = \alpha u_f(\phi) + \beta u_f(\psi)$, $\forall\ \phi,\psi,\forall\ \alpha,\beta$. E' continuo? Occorre mostrare che se $\phi_n \to^{\mathcal{D}(\Omega)} \phi$ allora $|u_f(\phi_n) - u_f(\phi)| \to^{n\to+\infty} 0$. Ma $|u_f(\phi_n) - u_f(\phi)| = \left|\int_\Omega f\phi_n - \int_\Omega f\phi\right| = \left|\int_\Omega f(\phi_n-\phi)\right| \leq \int_\Omega |f(\phi_n-\phi)| \leq ||f||_{L^1}\,||\phi_n-\phi||_{L^\infty}$, per la disuguaglianza di Hoelder. Poiché la convergenza in norma L^∞ è una convergenza uniforme q.o. e per ipotesi $\phi_n \to^{\mathcal{D}(\Omega)} \phi$, si ha in particolare (per $\alpha = \mathbf{0}$) che $\phi_n\to\phi$ uniformemente, dunque vale

$||\phi_n - \phi||_{L^\infty} \to^{n\to+\infty} 0$. Di conseguenza $|u_f(\phi_n) - u_f(\phi)| \to^{n\to+\infty}$e il funzionale è anche continuo, perciò è una distribuzione.

Teo 3.1 (annullamento)

Hp: $f \in L^1_{loc}(\Omega)\,,\, u_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, u_f(\phi) = \int_\Omega f\phi = 0\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Ts: $f = 0$ quasi ovunque

Quindi conoscere $\forall\ \phi$ il valore della distribuzione associata a f in questo caso permette di determinare interamente f. Il risultato sarebbe ovvio se f fosse continua.

Dim Preso $K \subseteq \Omega$ compatto qualsiasi, $\int_K f(x)\,dx \in \mathbb{R}$. Definisco $w(x) = sgn(f(x))\,I_K(x)$: $w \in L^p(K)\ \forall\ p \in [1,+\infty]$, in quanto funzione limitata. Allora[14] $\exists\ \{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) : w_k \to w$ in $L^p(\Omega)$ e q.o., e per ipotesi $\int_\Omega f w_k = 0\ \forall\ k$. Ma $w_k = w * \rho_k$, e, poiché w è L^∞ e ρ_k è L^1, per 2.24 $||w_k||_{L^\infty} \leq \int_{\mathbb{R}} |\rho_k(y-x)|\,dy = 1$. Allora per Hoelder $||fw_k||_{L^1(K)} \leq ||f||_{L^1(K)}$ e per convergenza dominata (con funzione dominante f: vale $|fw_k| \leq f\ \forall\ k$ q. o. perché w_k è essenzialmente limitata) $0 = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f w_k = \int_\Omega \lim_{k\to+\infty} f w_k = \int_\Omega f w = \int_K |f|$, il che implica $|f| = 0$ q.o. in K. Essendo K un compatto arbitrario, si deduce che $f = 0$ q.o. in Ω. ■

A questo punto è naturale chiedersi quanto l'esempio di distribuzione fatto sia significativo. L'applicazione $\mathcal{F} : L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, che a ogni funzione localmente integrabile associa la distribuzione u_f a essa associata, è iniettiva (si dice che $L^1_{loc}(\Omega)$ è *immerso* in $\mathcal{D}'(\Omega)$). Infatti se $f \neq g$[15] allora u_f e u_g non sono la stessa distribuzione, cioè $\exists\ \phi : u_f(\phi) \neq u_g(\phi)$: se per assurdo fosse $\int_\Omega f\phi = \int_\Omega g\phi\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si avrebbe $\int_\Omega (f-g)\,\phi = 0\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cioè, per il teorema di annullamento, $f = g$ q.o., contro l'ipotesi $f \neq g$.

Da ciò segue che la distribuzione u_f caratterizza f: data f, esiste un'unica u_f a essa associata, ma soprattutto, data u_f, essa è associata a un'unica funzione $f \in L^1_{loc}(\Omega)$[16]. Questo mostra che la nozione di distribuzione dà un nuovo modo di vedere le funzioni $f \in L^1_{loc}(\Omega)$: ad esempio, oltre alle usuali nozioni di convergenza puntuale quasi ovunque, in norma L^p ecc., si può dire che $f_n \to f$ in distribuzione quando $u_{f_n} \to^{\mathcal{D}'(\Omega)} u_f$.

L'applicazione $\mathcal{F}$ tuttavia non è suriettiva: non per ogni distribuzione u esiste $f : u(\phi) = u_f(\phi) = \int_\Omega f\phi\ \forall\ \phi$, come mostra il seguente esempio.

1. Sia $u(\phi) = \phi(0)$: è lineare; inoltre se $\phi_n \to^{\mathcal{D}(\Omega)} \phi$ allora in particolare $\phi_n \to \phi$ uniformemente e dunque puntualmente, in particolare in 0, per cui $u(\phi_n) \to u(\phi)$. Dunque u è continua ed è una distribuzione. Tale

[14] vedi paragrafo "convoluzione"

[15] Per non appesantire la notazione si è scritto, ogniqualvolta si è trattato di elementi di spazi L^p o L^1_{loc}, f invece che $[f]$.

[16] Come al solito si parla con abuso di $f \in L^1_{loc}(\Omega)$: in termini più precisi, a u_f è associata un'unica classe di equivalenza in $L^1_{loc}(\Omega)$, cioè u_f individua un'unica f a meno di un insieme di misura nulla.

distribuzione è detta delta di Dirac in 0 (più in generale la delta di Dirac in x_0 è $\delta_{x_0}(\phi) := \phi(x_0)$) e dal punto di vista fisico rappresenta un impulso centrato in un punto.

Si può dimostrare che non esiste $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \phi(0) = \int_{\mathbb{R}} f\phi$. Questo intuitivamente è vero perché un integrale di Lebesgue non può dipendere dal valore della funzione integranda in un certo punto: l'integrale non varia se l'integranda è alterata in un insieme di misura nulla.

Analiticamente, se per assurdo esistesse $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \phi(0) = \int_{\mathbb{R}} f\phi \ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora in particolare per le ϕ a supporto in (a,b) con $0 < a < b$ si avrebbe $0 = \int_{\mathbb{R}} f\phi \ \forall\ \phi \in \mathcal{D}((a,b))$, dunque per il teorema di annullamento sarebbe $f = 0$ q.o. in (a,b). Essendo (a,b) arbitrario si conclude che $f = 0$ q.o. in $(0,+\infty)$, e con un analogo ragionamento che $f = 0$ q.o. in $(-\infty, 0)$, per cui $f = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Questo è assurdo perché si avrebbe $u_f(\phi) = 0 \ \forall\ \phi$, anche se $\phi : \phi(0) \neq 0$.

2. Si può definire in un altro modo la delta di Dirac. Sia $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left|B_{1/n}(\mathbf{0})\right|_N} I_{B_{1/n}(\mathbf{0})}(\mathbf{x})$. $\forall\ n$ $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ in quanto funzione limitata. Allora $u_{f_n}(\phi) = \int_{B_{1/n}(\mathbf{0})} \frac{1}{\left|B_{1/n}(\mathbf{0})\right|_N}\phi$: per il teorema della media integrale esiste $\alpha \in B_{1/n}(\mathbf{0}) : \phi(\alpha) = \frac{\int_{B_{1/n}(\mathbf{0})}\phi}{\left|B_{1/n}(\mathbf{0})\right|_N}$, dunque $u_{f_n}(\phi) = \phi(\alpha)$ e per $n \to +\infty$ $u_{f_n}(\phi) \to \phi(0) = \delta_0$. La delta, che non può essere rappresentata come u_f, è limite di una successione di distribuzioni del tipo u_{f_n}.

3. Sia $f_n(x) = \arctan(nx)$. Il limite puntuale quasi ovunque è $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ se } x < 0 \end{cases}$. Fissata ϕ, calcolo $\lim_{n\to+\infty} u_{f_n}(\phi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(nx)\,\phi(x)\,dx$. $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} \arctan(nx)\,\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} -\frac{\pi}{2}\phi(x)\,dx$ per convergenza dominata, e analogamente $\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \arctan(nx)\,\phi(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\pi}{2}\phi(x)\,dx$, quindi $\lim_{n\to+\infty} u_{f_n}(\phi) = \int_{-\infty}^{0} -\frac{\pi}{2}\phi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\pi}{2}\phi(x)\,dx$: il limite in distribuzione coincide con il limite puntuale.

Distribuzioni e valori principali Esiste un'altra distribuzione che non è del tipo u_f. Sia $f(t) = \frac{1}{t}$ per $t \neq 0$: $f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ perché $\frac{1}{t}$ non è integrabile su $\mathbb{R}$ - né secondo Riemann né secondo Lebesgue - né su qualsiasi compatto contenente 0, quindi la distribuzione $u_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f\phi$ non è ben definita.

Per ovviare a tale problema si ricorre alla nozione di valore principale di un integrale, che permette di assegnare un valore reale anche a integrali non ben definiti in base alla teoria degli integrali impropri di Riemann.

Se $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, si dice valore principale di $\int_a^b f(t)\,dt$ (e si scrive $vp \int_a^b f(t)\,dt$) il valore di

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt\right)$$

qualora esso esista finito. Rispetto all'integrale improprio di Riemann non si considerano due limiti indipendenti (uno per $\varepsilon_1 \to 0^+$, l'altro per $\varepsilon_2 \to 0^+$), ma si introduce il vincolo che ε sia lo stesso in entrambi i limiti.

Se invece $f : (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \to \mathbb{R}$, si dice valore principale di $\int_{(-\infty,a)\cup(b,+\infty)} f(t)\,dt$ il valore di

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{a-\frac{1}{\varepsilon}}^{a} f(t)\,dt + \int_{b}^{b+\frac{1}{\varepsilon}} f(t)\,dt\right)$$

qualora esso esista finito. Di nuovo, si introduce il vincolo che l'estremo mobile dell'integrale sia lo stesso in entrambi i limiti. Infine, se $f : \mathbb{R}\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$, si definisce valore principale di $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$ il valore di $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{c-\frac{1}{\varepsilon}}^{c-\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{c+\varepsilon}^{c+\frac{1}{\varepsilon}} f(t)\,dt\right)$, qualora esso esista finito.

1. Se e. g. si cerca il valore principale di $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}dt$, si calcola $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{t}dt\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|t|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{t}dt$. Poiché $\forall\ \varepsilon > 0\ \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{t}dt = 0$ (in quanto integrale di una funzione dispari su un intervallo limitato e simmetrico attorno all'origine), il valore del limite è 0.

Con queste definizioni si può valutare se esiste il valore principale di $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\phi(t)\,dt$ (data $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$), così che la distribuzione sia definita. Essendo supp(ϕ) compatto, $\exists\ a > 0 : \text{supp}(\phi) \subseteq [-a, a]$, dunque si cerca di determinare il valore principale di $\int_{-a}^{a} \frac{\phi(t)}{t}dt$. Per definizione esso è $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\phi(t)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\phi(t)}{t}dt\right)$, qualora il limite esista finito. Ma $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\phi(t)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\phi(t)}{t}dt\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|t|<a} \frac{\phi(t)}{t}dt$, che è uguale a $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon<|t|<a} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt + \int_{\varepsilon<|t|<a} \frac{\phi(0)}{t}dt\right)$. Il secondo addendo è nullo $\forall\ \varepsilon$; $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|t|<a} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt$ esiste finito perché per il teorema di Lagrange applicato a $\phi \in C^\infty\ \exists\ \xi \in (0,1) : \phi(t) - \phi(0) = \phi'(t)\,t$, dunque $\int_{\varepsilon<|t|<a} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt = \int_{\varepsilon<|t|<a} \phi'(\xi)\,dt$ e la funzione integranda è limitata $\forall\ \varepsilon$. Allora è ben definito il v.p. di $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\phi(t)\,dt$, che coincide con il v.p. di $\int_{-a}^{a} \frac{\phi(t)}{t}dt$ ed è uguale a $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|t|<a} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt$.

Si vuole ora dimostrare che $u(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt$ è una distribuzione (che si dirà *associata al v.p. di* $\frac{1}{t}$). La linearità è ovvia. E' inoltre continua perché, se $\phi_n \to^{\mathcal{D}(\Omega)} \phi$, allora $\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi_n(t)-\phi_n(0)}{t}dt - \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|t|<a}\left(\frac{\phi_n(t)-\phi_n(0)}{t} - \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}\right)dt\right|$. $\int_{\varepsilon<|t|<a}\left(\frac{\phi_n(t)-\phi(t)-(\phi_n(0)-\phi(0))}{t}\right)dt = \int_{\varepsilon<|t|<a} \frac{\left(\phi_n'(\xi)-\phi'(\xi)\right)t}{t}dt$, ma per $n \to +\infty$ tutte le derivate di ϕ_n convergono uniformemente a ϕ, quindi in particolare $\phi_n'(\xi) \to^{n\to+\infty} \phi'(\xi)$, l'integranda tende a 0, dunque l'integrale tende a 0 (lo scambio è lecito grazie alla convergenza uniforme) e così anche il limite.

Inoltre $\exists\ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ che rappresenti questa distribuzione, cioè tale che $u(\phi) = vp\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t}dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt$ sia uguale a $\int_{\mathbb{R}} f\phi dt\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Infatti, se così fosse, in particolare si avrebbe $\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt = \int_{\mathbb{R}} f\phi dt$, cioè $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{t} - f\right)\phi dt = 0\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \phi(0) = 0$, ma allora per il teorema di annullamento sarebbe $f(t) = \frac{1}{t}$ q.o., cioè $f \in \left[\frac{1}{t}\right]$, ma $\left[\frac{1}{t}\right]$ non può essere in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Ha senso cercare una caratterizzazione delle distribuzioni che eviti ogni volta la verifica di linearità e continuità.

Teo 3.2 (caratterizzazione delle distribuzioni)

$$\text{Hp: } u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ è un funzionale lineare}$$

$$\text{Ts: } u \text{ è una distribuzione } \iff \forall\, K \subseteq \Omega \text{ compatto } \exists\, c(K) > 0,$$

$$m(K) \in \mathbb{N} : u(\phi) \le c \sum_{|\alpha| \le m} ||D^\alpha \phi||_\infty \;\; \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp}(\phi) \subseteq K$$

Si noti che $||D^\alpha \phi||_\infty$ (norma del sup essenziale in $L^\infty(K)$) è ben definita perché ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ è continua in un compatto, dunque è limitata. La somma è fatta su tutti i multiindici che hanno lunghezza[17] minore o uguale di m.

Dim $\Longleftarrow$ Si mostra che u è continua. Questo segue facilmente dalla definizione di convergenza nello spazio delle funzioni test: data $\phi_n \to^{\mathcal{D}(\Omega)} \phi$, si sa che vale $u(\phi_n - \phi) \le c \sum_{|\alpha| \le m} ||D^\alpha \phi_n - D^\alpha \phi||_\infty$: ma la convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$ implica la convergenza uniforme di tutte le derivate, e poiché la convergenza uniforme è equivalente alla convergenza in norma infinito, il lato destro della disuguaglianza tende a 0 per $n \to +\infty$ e quindi, per confronto, anche il lato sinistro. ■

Questo teorema deve essere visto come un adattamento al caso delle distribuzioni del teorema che afferma che un funzionale lineare tra due spazi normati è limitato se e solo se è continuo: in questo caso la continuità del funzionale u è caratterizzata dalla limitatezza non solo del suo argomento ma anche di un certo numero di sue derivate.

1. $u(\phi) = pv \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt$ soddisfa la condizione del teorema perché, preso $K = [-a, a]$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$: supp$(\phi) \subseteq K$, per il teorema di Lagrange $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon < |t| < a} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt \le \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon < |t| < a} \frac{||\phi'||_{L^\infty(K)} t}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} ||\phi'||_{L^\infty(K)} \int_{\varepsilon < |t| < a} dt = 2a \, ||\phi'||_{L^\infty(K)}$: $c = 2a$, $m = 1$.

Se u soddisfa il teorema con m indipendente da K e minimale, m si dice ordine della distribuzione.

1. Data $u_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f \phi dt$ con $f \in L^1_{loc}$, u è una distribuzione di ordine 0. Infatti $\int_{\mathbb{R}} f \phi dt = \int_K f \phi dt \le ||\phi||_{L^\infty(K)} \int_K f dt$ (il secondo fattore è un numero reale perché $f \in L^1_{loc}$): dunque u soddisfa la condizione del teorema con $c = ||f||_{L^1(K)}$ e $m = 0$. u_f si dice misura.

2. $u(\phi) = \phi(0) \le ||\phi||_{L^\infty(K)}$, quindi anche δ_0 ha ordine 0.

[17] $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$

3.1 Derivate distribuzionali

1. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$: allora f, f' sono continue, quindi limitate in ogni compatto, dunque $f, f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e hanno distribuzioni associate $u_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f\phi dt, u_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'\phi dt$. Sarebbe coerente con l'intuizione definire derivata della distribuzione u_f la distribuzione $u_{f'}$. Tuttavia integrando per parti si osserva che vale $\int_{\mathbb{R}} f'\phi dt = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' dt$ (basta considerare K che contenga propriamente supp(ϕ)), quindi è possibile definire $u_{f'}$ anche senza chiedere $f \in C^1(\mathbb{R})$, ma solo $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, sfruttando la grande regolarità di ϕ: $v(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' dt$.

Def Data $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si definisce derivata distribuzionale prima di u la distribuzione $v(\phi) := -u(\phi')$ e si indica con Du.

E' evidente che v così definita è una distribuzione. Se u ha ordine m, v ha ordine $m+1$: infatti $\forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:supp$(\phi) \subseteq K$ vale $v(\phi) = -u(\phi') \leq -c\sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha \phi'||_\infty = -c\sum_{|\alpha|\leq m+1} ||D^\alpha \phi||_\infty$.

La definizione data è coerente con l'esempio sopra: se $f \in C^1$, $v(\phi) = Du(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' dt$ è la derivata distribuzionale di u, cioè $Du_f = u_{f'}$: la derivata distribuzionale della distribuzione associata a $f \in C^1$ è la distribuzione associata alla derivata di f.

La definizione si estende a distribuzioni su $\mathcal{D}(\Omega)$ con Ω generico usando il teorema della divergenza.

Def Data $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindice, si dice derivata distribuzionale di ordine α di u $D^\alpha u(\phi) := (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \phi)$.

Essa è ben definita $\forall\ \alpha$ perché $\phi \in C^\infty$. In analogia al caso di $\Omega = \mathbb{R}$ e $|\alpha| = 1$, se $f \in C^m(\mathbb{R})$ (quindi $D^\alpha f \in C(\Omega)\ \forall\ \alpha : |\alpha| \leq m$) vale $D^\alpha u_f = u_{D^\alpha f}\ \forall\ \alpha : |\alpha| \leq m$, quindi la definizione rispetta l'intuizione originaria.

1. Si verifica ciò per $m = 1$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\exists\ R_n = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \supseteq$ supp(ϕ) e si ha - considerando $\alpha : |\alpha| = 1$ con $\alpha_j = 1$ - $u_{D^\alpha f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi D_{x_j} f = \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_j}^{b_j} \phi D_{x_j} f ... \int_{a_n}^{b_n} d\mathbf{x} = -\int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_j}^{b_j} f D_{x_j}\phi ... \int_{a_n}^{b_n} d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}^n} f D_{x_j}\phi = (D^\alpha u_f)(\phi)$, cioè la derivata distribuzionale di ordine α di u_f è effettivamente la distribuzione associata a $D^\alpha f$. Se invece fosse stato $m = 2$, si sarebbe considerato $\alpha : |\alpha| \leq 2$ e per $|\alpha| = 2$ si sarebbe integrato due volte per parti.

2. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $D_{x_i} D_{x_j} u = D_{x_j} D_{x_i} u$. Infatti $D_{x_i} D_{x_j} u = u\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\right) = u\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}\right) = D_{x_j} D_{x_i} u$ per definizione e il teorema di Schwarz applicato a ϕ, che è C^∞.

3. Data $\delta(\phi) = \phi(0)$ e $\alpha = k$, $D^k \delta = (-1)^k \left(D^k \phi\right)(0)$. Quindi $D^k \delta$ è una distribuzione di ordine k.

Se $u_n \to^{\mathcal{D}'(\Omega)} u$, allora $D^\alpha u_n \to^{\mathcal{D}'(\Omega)} D^\alpha u\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$: per una successione di distribuzioni è sempre lecito scambiare il $\lim_{n\to+\infty}$ e la derivata distribuzionale. Infatti, se $\forall\ \phi$ vale $u_n(\phi) \to^{n\to+\infty} u(\phi)$, si ha anche

$(-1)^{|\alpha|} u_n (D^\alpha \phi) \to^{n\to+\infty} (-1)^{|\alpha|} u (D^\alpha \phi)$, perché $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. In particolare, se $\sum_{i=1}^n u_i \to^{n\to+\infty, \mathcal{D}'(\Omega)} u$, allora $\sum_{i=1}^n D^\alpha u_i \to^{n\to+\infty, \mathcal{D}'(\Omega)} D^\alpha u$. Le operazioni di passaggio al limite sono quindi molto semplificate nello spazio delle distribuzioni.

1. Sia $f(t) = I_{([0,+\infty))}(t) =: H(t)$ la funzione scalino di Heaviside. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $u_f(\phi) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt$. La derivata distribuzionale di u_f è $Du_f = -u_f(\phi') = -\int_0^{+\infty} \phi'(t)\,dt = \phi(0) = \delta_0(\phi)$, la distribuzione delta.

   Si è visto che se $f \in C^1$, $Du_f = u_{f'}$: per H, che non è continua in 0, questo non vale perché $Du_H = \delta_0$, mentre $u_{H'}$ è la distribuzione nulla.

In generale la differenza tra $u_{f'}$ e Du_f si osserva quando f ha discontinuità a salto.

Prop 3.4 (relazione tra derivata distribuzionale e distribuzione della derivata)

$$\text{Hp: } f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{x_0\}) : \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f\left(x_0^-\right), \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f\left(x_0^+\right),$$

$$Sf(x_0) = f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)$$

$$\text{Ts: } Du_f = Sf(x_0)\,\delta_{x_0} + u_{f'}$$

$Sf(x_0)$ è la misura del salto di f in x_0. Si noti che poiché f, f' sono continue a meno di un insieme di misura nulla, sono essenzialmente limitate in ogni compatto e dunque appartengono a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$: sono ben definite $u_f, u_{f'}$.

Questa proposizione fornisce un metodo per calcolare in fretta la derivata di una distribuzione associata a una funzione C^1 con una discontinuità a salto.

La proposizione può essere facilmente estesa a funzioni $C^1(\mathbb{R}\setminus\{x_0, ..., x_m\})$ con $m+1$ discontinuità a salto.

Dim Per definizione $Du_f = -u_f(\phi')$: si calcola $u_f(\phi')$ sfruttando un procedimento di limite. Integrando per parti si ha $\int_{|x-x_0|>\varepsilon} f\phi' = \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f\phi' + \int_{x_0+\varepsilon}^{+\infty} f\phi' = [f\phi]_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f'\phi + [f\phi]_{x_0+\varepsilon}^{+\infty} - \int_{x_0+\varepsilon}^{+\infty} f'\phi = f(x_0-\varepsilon)\,\phi(x_0-\varepsilon) - f(x_0+\varepsilon)\,\phi(x_0+\varepsilon) - \int_{|x-x_0|>\varepsilon} f'\phi$. Passando al limite $u_f(\phi') = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-x_0|>\varepsilon} f\phi' = \phi(x_0)\left(f\left(x_0^-\right) - f\left(x_0^+\right)\right) - \int_{\mathbb{R}} f'\phi$, quindi $Du_f = \phi(x_0)\,Sf(x_0) + u_{f'}$. ■

Si è dunque visto che si possono effettuare operazioni sulle distribuzioni (ad esempio calcolo di derivate) riconducendosi - seguendo l'esempio di ciò che accade per le distribuzioni del tipo u_f - a operazioni sulle funzioni test ϕ, di cui si sfrutta l'enorme regolarità, senza alcuna richiesta sulle f eccetto l'appartenenza a L^1_{loc}.

1. Ad esempio, si vuole definire la traslata di una distribuzione. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, è coerente con l'intuizione definire distribuzione traslata la distribuzione associata a f traslata, cioè $v(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(t+a)\,\phi(t)\,dt$. Con il cambio di variabile $y = t+a$ si ha $\int_{\mathbb{R}} f(t+a)\,\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\phi(y-a)\,dy$, per cui si può definire, per $f \in L^1_{loc}$, la distribuzione traslata di u_f come $u_{1,a}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\phi(y-a)\,dy$.

Più in generale, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si definisce distribuzione traslata di u, con $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ parametri di traslazione, la distribuzione $u_{A,\mathbf{b}}(\phi) = u\left(\phi\left(A^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{b})\right)\frac{1}{|\det A|}\right)$.

1. La distribuzione delta traslata di x_0 è $\delta_{1,-x_0}(\phi) = \delta(\phi(y+x_0)) = \phi(y+x_0)|_{y=0} = \phi(x_0)$.

Con la definizione di distribuzione traslata si possono estendere alle distribuzioni definizioni già note per le funzioni di più variabili reali.

Def Data $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{v}|| = 1$, si dice derivata distribuzionale direzionale di u nella direzione $\mathbf{v}$ la distribuzione $w(\phi) := \lim_{h\to 0} \frac{u_{Id,h\mathbf{v}}(\phi)-u(\phi)}{h}$, che si indica con $D_{\mathbf{v}}u$.

$v_{Id,h\mathbf{v}}(\phi)$ è la distribuzione u traslata con $\mathbf{x}+h\mathbf{v}$, per cui $u_{Id,h\mathbf{v}}(\phi) = u(\phi(\mathbf{y}-h\mathbf{v}))$. w è ben definita perché $\mathcal{D}'(\Omega)$ è uno spazio vettoriale e inoltre si può dimostrare che $\lim_{h\to 0} \frac{u_{Id,h\mathbf{v}}(\phi)-u(\phi)}{h}$ è una distribuzione.

Def Data $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si dice che u è periodica di periodo $T > 0$ se $u_{1,T}(\phi) = u_1(\phi)\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Se una funzione periodica definisce una distribuzione, allora tale distribuzione è periodica.

In tal caso le due distribuzioni coincidono, cioè - fissato y - $u(\phi(y-T)) = u(\phi)\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Si dice che u è pari se $u_{-1} = u_1$; si dice che è dispari se $u_{-1} = -u_1$.

1. Ogni distribuzione associata a una funzione dispari (pari) è dispari (pari).

2. $u(\phi) = vp\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t}dt$ è dispari. Infatti $u(\phi(-y)) = vp\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(-y)}{-y}dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t}dt$.

3. Se $f(x) = \log|x|$, $D(u_f) = vp\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}dx$. Infatti $D(u_f) = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\,\phi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\phi'(x)\,dx$. L'obiettivo è sfruttare l'integrazione per parti: $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x|\,\phi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\,\phi'(x)\,dx = -\ln|\varepsilon|\,\phi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,dx + \ln|-\varepsilon|\,\phi'(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx = \ln|\varepsilon|\,[\phi(-\varepsilon)-\phi(\varepsilon)] - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx$, quindi $D(u_f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\varepsilon|\,[\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)]$. Il primo addendo è $vp\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}dx$, il secondo è nullo perché $\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon) = 2\phi'(0)\,\varepsilon + o(\varepsilon)$ e quindi $\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\varepsilon|\,(2\phi'(0)\,\varepsilon + o(\varepsilon)) = 0$.

4. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x-k}$ converge nel senso delle distribuzioni a una distribuzione 1-periodica (per definizione $\delta_{x-k}(\phi) = \delta(\phi(y+k)) = \phi(k)$). Infatti la successione delle somme parziali è $\left(\sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}} \delta_{x-k}\right)(\phi) = \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}} \delta_{x-k}(\phi) = \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}} \phi(k)$, ma $\lim_{n\to+\infty}\sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}} \phi(k)$ è di fatto una somma finita perché le ϕ hanno supporto compatto, quindi la serie converge a una distribuzione u. Inoltre u ha periodo 1 perché $u_{1,1}(\phi) = u(\phi(y-1)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(k-1) = u(\phi)$.

5. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{x-\frac{1}{k}}$ converge? Dove?

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{x-\frac{1}{k}}\right)(\phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{x-\frac{1}{k}}(\phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi\left(\frac{1}{k}\right)$. E' evidente che in generale la serie non converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, perché se $\phi(0) \neq 0$ non è neanche verificata la condizione necessaria di convergenza. Tuttavia converge in $\mathcal{D}'((0,+\infty))$ perché le ϕ hanno supporto compatto e quindi la serie si riduce a una somma finita.

Si può inoltre dare la definizione di primitiva di una distribuzione.

Teo 3.5 (esistenza della primitiva)

$$\text{Hp: } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$\text{Ts: (i) } \exists\ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : Dv = u\text{; in tal caso, se } c \in \mathbb{R}, \forall\ \bar{v} = v + u_c \text{ vale } D\bar{v} = u$$

$$\text{Hp: } v_1, v_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : Dv_1 = Dv_2$$

$$\text{Ts: } \exists\ c \in \mathbb{R} : v_1 = v_2 + c$$

Quindi tutte le distribuzioni hanno primitive.

E' naturale, una volta definite traslate e derivate di distribuzioni, pensare anche alla definizione di un prodotto tra distribuzioni. Questo si rivela essere un proposito estremamente ostico - nei fatti, impossibile: non si riesce a dare una buona definizione del prodotto di due distribuzioni. Si può però definire il prodotto tra una distribuzione e una funzione standard.

Def Data $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C^\infty(\Omega)$, si definisce la distribuzione $u\psi(\phi) := u(\psi\phi)$.

$\phi\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, quindi tale distribuzione è ben definita $\forall\ \phi$.

1. Data $u = \delta_0$ e la funzione $\psi(x) = \frac{1}{x^2+1}$, si ha $u\psi(\phi) = u\left(\frac{1}{x^2+1}\phi\right) = \phi(0) = \delta_0$.

Prop 3.6 (regola di Leibniz)

$$\text{Hp: } u \in \mathcal{D}'(\Omega), \psi \in C^\infty(\Omega)$$

$$\text{Ts: } D(\psi u) = \psi' u + \psi Du$$

Dim Per definizione $D(\psi u) = -\psi u(\phi') = -u(\psi\phi') = u\left(\psi'\phi - (\psi\phi)'\right) = (\psi' u)(\phi) + Du(\phi\psi) = (\psi' u)(\phi) + \psi Du(\phi)$. ■

3.2 Distribuzioni temperate

Def Data $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ϕ si dice funzione a decrescenza rapida se $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ vale $D^\alpha\phi = o\left(\frac{1}{||\mathbf{x}||^k}\right)$ per $||\mathbf{x}|| \to +\infty$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. L'insieme delle funzioni a decrescenza rapida si dice spazio di Schwartz e si indica con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale, grazie alla linearità della derivata.

1. $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $e^x, e^{-x} \notin S(\mathbb{R}^n)$. Nessun polinomio è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si noti che se $P(\mathbf{x})$ è un polinomio algebrico nelle variabili $x_1, ..., x_n$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $P \cdot D^\alpha \phi$ è anch'essa a decrescenza rapida per qualsiasi multiindice.

Inoltre $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è anche limitata e in $L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall\ p$, perché, fissato un qualsiasi compatto, ϕ è ivi limitata, e fuori dal compatto qualsiasi sua potenza p-esima è limitata e integrabile perché $\phi = o\left(\frac{1}{||\mathbf{x}||^k}\right)$ per $||\mathbf{x}|| \to +\infty$.

Def Data $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si dice che ϕ_n converge a ϕ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall\ P$ polinomio $PD^\alpha\phi_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R}^n$ a $PD^\alpha\phi$.

Si può mostrare che le successioni di Cauchy in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergono.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ perché se ϕ ha supporto compatto è definitivamente nulla per $||\mathbf{x}|| \to +\infty$, dunque è certamente un o piccolo di $\frac{1}{||\mathbf{x}||^k}\ \forall\ k$. L'inclusione è propria perché $e^{-x^2} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Se una successione converge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, converge anche in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [18].

Allora l'insieme dei funzionali lineari continui su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sarà più piccolo di quelli definiti su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: un funzionale definito su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è anche definito su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, mentre il viceversa in generale non è vero perché un funzionale su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ potrebbe non poter essere esteso a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. In generale, più un insieme è "grande", più il suo duale è "piccolo".

Def Un funzionale $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ lineare e continuo si dice distribuzione temperata. L'insieme delle distribuzioni temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

La continuità è definita come al solito: $\forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall\ \{\phi_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \phi_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \phi$ vale $u(\phi_n) \to u(\phi)$. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è il duale continuo di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed è uno spazio vettoriale.

Def Data una successione di distribuzioni temperate $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si dice che u_j converge a u, e si scrive $u_j \to^{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} u$ per $j \to +\infty$, se $u_j(\phi) \to^{j\to+\infty} u(\phi)\ \forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Le successioni di Cauchy in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ convergono. La convergnza puntuale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ovviamente implica la convergenza puntuale in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

1. Se $f(x) = e^x$, $u_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ma non è possibile estendere u_f in modo che sia una distribuzione definita su $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Intuitivamente è ovvio: non è possibile che $\int_{\mathbb{R}^n} f\phi$ sia ben definito $\forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, perché tali ϕ tendono a zero più in fretta dei reciproci di polinomi, non necessariamente di e^x.

[18] in generale il prodotto di due successioni di funzioni uniformemente convergenti converge uniformemente al prodotto delle funzioni limite se queste sono entrambe limitate, cosa vera nel nostro caso (essendo le ϕ a supporto compatto, ai fini del prodotto anche P può essere considerato a supporto compatto)

Analiticamente, se per assurdo $u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, in particolare dovrebbe essere finito $u_f\left(e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^x e^{-\sqrt{1+|x|^2}} dx$, ma la funzione integranda è asintotica a 1 per $x \to +\infty$, quindi l'integrale è infinito.

2. Se $P(\mathbf{x})$ è un polinomio algebrico, $u_P(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} P(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ è una distribuzione temperata: l'integrale è ben definito perché $P\phi$ appartiene anch'essa a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, dunque è in L^1, e si mostrano facilmente linearità e continuità. In particolare ogni costante definisce una distribuzione temperata.

3. Se $P(\mathbf{x})$ è un polinomio algebrico e $w(\mathbf{x}) \in L^1$, $u_{Pw}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} P(\mathbf{x})\,w(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ è una distribuzione temperata: l'integrale è ben definito per Hoelder (perché $P\phi$ è limitata e w è L^1) e si mostrano facilmente linearità e continuità. Pw si dice funzione a crescita lenta.

   Quindi ad esempio $f(x) = \frac{\cos x}{x^{1/3}}$ definisce una distribuzione temperata perché $f = Pw$ con $w(x) = \cos x \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{x^2+1}$ e $P(x) = x^2 + 1$.

4. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p \in [1, +\infty]$ qualsiasi, $u_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ è una distribuzione temperata: l'integrale è ben definito per Hoelder (perché $\phi \in L^q$ se q è l'esponente coniugato di p) e si mostrano facilmente linearità e continuità.

   Se f è solamente L^1_{loc} (e. g. e^x) in generale non definisce una distribuzione temperata.

5. Visto l'esempio sopra, ha senso chiedersi se anche per le distribuzioni standard $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto) definisce una distribuzione, essendo già noto il risultato per $p = 1$. Ma questo è vero perché $\int_\Omega f\phi = \int_{\text{supp}(\phi)} f\phi$ e $\int_{\text{supp}(\phi)} |f| < +\infty$ perché $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ (quindi è L^p e dunque L^1 sul compatto supp(ϕ)): essendo ϕ limitata, $f\phi$ è integrabile e l'integrale è ben definito. Si mostrano facilmente linearità e continuità, dunque u_f è una distribuzione.

6. Se in particolare $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, è ben definita u_f sia come distribuzione temperata che standard. Si hanno allora quattro diverse nozioni di convergenza: puntuale quasi ovunque, in norma L^p, in distribuzione standard, in distribuzione temperata. In tutti i casi, il limite - se esiste - è lo stesso. Perciò, se si vuole valutare la convergenza in distribuzione o in norma, è naturale calcolare prima il limite puntuale: se esiste, è l'unico candidato per la convergenza in distribuzione o in norma.

7. $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \delta_{x-k}$, data $\{c_k\}_k$ qualsiasi, in generale converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ma non in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Infatti, se ϕ ha supporto compatto, $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \phi(k)$ si riduce a una somma finita. Invece, se $\phi(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}}$ e $c_k = e^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \phi(k)$ ha termine generale asintotico a 1 e quindi non converge.

Rafforzando le ipotesi su $f \in L^1_{loc}$ si può vedere quando essa definisce una distribuzione temperata.

Prop 3.7

$$\text{Hp:} \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \exists\, N \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^N} f(x)\,dx < +\infty$$

$$\text{Ts:} \quad u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

Si noti che queste ipotesi non servono ad altro che ad assicurare che f sia a crescita lenta: se valgono, si ha che f si può scrivere come prodotto di $\frac{1}{(1+|x|)^N} f(x)$ funzione integrabile e $(1+|x|)^N$ polinomio.

Dim $\int_{\mathbb{R}} f\phi = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+|x|)^N} (1+|x|)^N \phi(x)\,dx$. Il primo fattore dell'integranda è integrabile per ipotesi e $(1+|x|)^N \phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dunque per Hoelder l'integrale è ben definito.

u_f è ovviamente lineare. E' inoltre continuo: se $\phi_j \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \phi$, allora $\lim_{j\to+\infty} u_f(\phi_j) = \lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+|x|)^N} (1+|x|)^N \phi_j(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+|x|)^N} (1+|x|)^N \phi(x)\,dx$: lo scambio è lecito grazie alla convergenza uniforme di $\phi_j \to \phi$. Allora si ha $\lim_{j\to+\infty} u_f(\phi_j) = u_f(\phi)$. ■

1. Sia $n=1$. Se $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è naturale - come per le distribuzioni standard - voler definire la derivata della distribuzione associata a f come distribuzione associata a f' $\int_{\mathbb{R}} f'\phi = \lim_{M\to+\infty} ((f\phi)(M) - (f\phi)(-M)) - \int_{\mathbb{R}} f\phi' = -\int_{\mathbb{R}} f\phi'$ perché f è limitata e ϕ è infinitesima. Questo esempio suggerisce la seguente definizione.

Def Data $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si definisce distribuzione derivata prima di u $Du(\phi) := -u(\phi')$. Dato $\alpha \in \mathbb{N}^n$, si definisce derivata di ordine α di u $D^\alpha u(\phi) := (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \phi)$.

$D^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Si può mostrare che se $u_n \to^{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} u$, allora $PD^\alpha u_n \to PD^\alpha u$ per ogni polinomio algebrico, $\forall$ $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Come per le distribuzioni standard, si può definire il prodotto tra una distribuzione e una funzione.

Def Data $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si definisce la distribuzione $u\psi(\phi) := u(\psi\phi)$.

$\phi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quindi tale distribuzione è ben definita $\forall\ \phi$.

Prop 3.8 (regola di Leibniz)

$$\text{Hp: } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$\text{Ts: } D(\psi u) = \psi' u + \psi Du$$

Se $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ e P è un polinomio algebrico allora Pu è ben definita ed è in $\mathcal{S}'(\Omega)$; continua a valere la regola di Leibniz.

Teo 3.9 (densità di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{S}(\Omega)$)

$$\text{Hp: } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts: } \exists \ \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \phi_n \to^{\mathcal{S}(\Omega)} \psi$$

E' ben definita la convergenza in $\mathcal{S}(\Omega)$ per ϕ_n perché tutte le ϕ_n sono in particolare elementi di $\mathcal{S}(\Omega)$. Il teorema afferma che ogni funzione a decrescita rapida può essere approssimata con una successione di funzioni C^∞ a supporto compatto, cioè $\mathcal{D}(\Omega)$ è *denso* in $\mathcal{S}(\Omega)$.

Data $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, essa può essere estesa a $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se e solo se u è continua in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, che è equivalente alla continuità nella funzione nulla, cioè $u(v_n) \to 0 \ \forall \ \{v_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) : v_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$.[19] Da questo, per densità, si deduce che la proprietà vale $\forall \ \{v_n\} \subseteq \mathcal{S}(\Omega) : v_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$.

1. $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ può essere estesa a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti se $\{\phi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) : \phi_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$, allora c'è anche convergenza puntuale e $\phi_n(0) \to 0$.

Problemi di divisione Come si è definito il prodotto, si può cercare di definire il rapporto tra due distribuzioni.

Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\exists \ t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : ft = u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? Una soluzione ovvia è $t(\phi) = \frac{1}{f} u(\phi)$, ma essa non è ben definita quando f è nulla.

1. Siano $f(x) = x, g(x) = 1$. $\exists \ t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : xt = u_g$? $\frac{1}{x} u_g$ non è ben definita.

   Si procede allora come per le equazioni differenziali ordinarie: si cerca una soluzione T dell'equazione omogenea $xt = 0_D$ con $h(x) = 0$ (0_D indica la distribuzione nulla, elemento neutro della somma in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) e le si somma una soluzione particolare. $t(\phi) = \alpha\delta_0(\phi) \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Vale il seguente risultato più generale.

Prop 3.10 (soluzione di equazioni distribuzionali omogenee)

Hp: $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; il polinomio P ha gli zeri $x_1, ..., x_m$, di molteplicità algebrica rispettivamente $a_1, ..., a_m$

$$\text{Ts: } t = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{a_i-1} c_j \delta_{x_i}^{(j)} \text{ è tale che } Pt = 0_D$$

Infatti $P(x)$ è, a meno di una costante, $(x - x_1)^{a_1} ... (x - x_m)^{a_m}$, quindi $(P(x)t)(\phi) = t(P(x)\phi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{a_i-1} c_j \delta_{x_i}^{(j)} (P(x)\phi$ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{a_i-1} c_j (-1)^j \left(\frac{d^j}{dx^j}(P(x)\phi(x))\right)|_{x=x_i} = 0$ perché $\left(\frac{d^j}{dx^j}(P(x)\phi(x))\right)|_{x=x_i} = 0 \ \forall \ j = 0, ..., a_i - 1$, dato che a_i è l'ordine dello zero x_i.

[19] vedi inizio paragrafo sulle derivate distribuzionali

però il teo riguarda spazi di banach e lo spazio di schwarz non è di banach, quindi c'è qualcosa da aggiustare

Nel caso particolare di $m = 1$ si ha che $xt = 0_D$ è risolta da $t = c_0\delta_0$. Si vedrà con la trasformata di Fourier che nel dominio della trasformata la ricerca di primitive si trasforma proprio in un problema di divisione.

Prop 3.11 (soluzione di equazioni distribuzionali)

$$\text{Hp: } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\text{Ts: } ft = u \text{ ha come soluzione generale } t = t_0 + t_p,$$

$$\text{con } t_0 : ft_0 = 0_D \text{ e } T_p : ft_p = u$$

1. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione sopra. $T(\phi) = \frac{1}{x}u_g(\phi)$ non è ben definita, ma invece di usare $\frac{1}{x}$ si può ricorrere al $\left(vp\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}dx\right)(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$. Infatti $(fT)(\phi) = T(f\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\phi(x)\,dx = u_g(\phi)$.

Def Data una funzione $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e una distribuzione $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si definisce prodotto di convoluzione di u e $w = w(\mathbf{y})$ la funzione $(u * w)(\mathbf{x}) = u(w(\mathbf{x} - \mathbf{y}))$.

Si può mostrare che $u * w$ così definito è una funzione C^∞ e che definisce una distribuzione temperata.

1. Nel caso particolare in cui u_f è una distribuzione temperata associata a f, $(u_f * w)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,w(x-y)\,dy = (f * w)(x)$: il prodotto di convoluzione tra w e u_f coincide con $w * f$.

2. Se $u = \delta_0$ e $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è qualsiasi, $(u * w)(x) = u(w(x-y)) = w(x-y)\,|_{y=0} = w(x)$: la delta è l'elemento neutro del prodotto di convoluzione.

3. Se $u = \delta_0'$, $(u * w)(x) = u(w(x-y)) = -\left[\frac{d}{dy}w(x-y)\right]|_{y=0} = -\left[-\frac{d}{dy}w(x-y)\right]|_{y=0}$.

4 Trasformata di Fourier

Def Data $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si dice trasformata di Fourier di f la funzione $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

La seguente proposizione mostra che $\hat{f}$ è ben definita, e non solo: è molto regolare.

Prop 4.1 (regolarità della trasformata)

$$\text{Hp:} \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts:} \quad \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$$

Dim Per definizione $\forall\, \xi$ $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}f(\mathbf{x})\right|d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ q.o. in $\mathbb{R}^n$ per ipotesi, dunque $\hat{f}$ è limitata e $\left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$.

Inoltre, se $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\xi_n \to \xi \in \mathbb{R}^n$ (secondo una qualsiasi norma di $\mathbb{R}^n$), allora per continuità dell'esponenziale complesso $e^{-i\langle \mathbf{x},\xi_n\rangle} f(\mathbf{x}) \to e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x})$. Quindi, per il teorema di convergenza dominata (essendo $\psi_n(\mathbf{x}) = \left(e^{-i\langle \mathbf{x},\xi_n\rangle} - e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}\right) f(\mathbf{x})$ tale che $|\psi_n(\mathbf{x})| \leq 2|f(\mathbf{x})|\ \forall\, \mathbf{x}, \forall\, n$), $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(e^{-i\langle \mathbf{x},\xi_n\rangle} - e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}\right) f(\mathbf{x})\right| d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to+\infty} \left(e^{-i\langle \mathbf{x}\right.$
0, quindi $\hat{f}(\xi_n) \to^{n\to+\infty} \hat{f}(\xi)$. ■

Lemma 4.2 (Riemann-Lebesgue)

$$\text{Hp:} \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts:} \qquad \lim_{||\xi||\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

E' l'analogo del risultato già visto per i coefficienti della serie di Fourier.

Dim Sia $n = 1$ per semplicità. Dati $a < b$ in $\mathbb{R}$, vale $\chi_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$, e inoltre $\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\chi_{[a,b]}dx = \int_a^b e^{-ix\xi}dx = \frac{e^{-ia\xi}-e^{-ib\xi}}{i\xi}$. Poiché $\left|\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi)\right| \leq \frac{2}{i\xi} \to^{|\xi|\to+\infty} 0$, la tesi vale per funzioni del tipo $\chi_{[a,b]}$, e dunque anche per qualsiasi funzione semplice grazie alla linearità dell'integrale.

Sia ora $\varepsilon > 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$ qualsiasi. Allora, per definizione di funzione integrabile secondo Lebesgue, $\exists\, s$ funzione semplice tale che $||f - s||_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$. Dunque $\left|\hat{f}(\xi)\right| = \left|\hat{f}(\xi) - \hat{s}(\xi) + \hat{s}(\xi)\right| \leq \left|\hat{f}(\xi) - \hat{s}(\xi)\right| + |\hat{s}(\xi)| < \varepsilon + |\hat{s}(\xi)|$. Ma s è una funzione semplice, quindi $\exists\, M > 0 : ||\xi|| > M$ implica $|\hat{s}(\xi)| < \varepsilon$, dunque $\left|\hat{f}(\xi)\right| < 2\varepsilon$ e si ha la tesi. ■

Più in astratto, l'applicazione $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n), \mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ è lineare e vale $\forall\, f, g \in L^1$ $||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(g)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq ||f - g||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, dunque è anche continua secondo le convergenze in norma di dominio e codominio. Inoltre $Im\mathcal{F} = \{h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ continue} : h(\xi) \to 0 \text{ per } ||\xi|| \to +\infty\}$. Talvolta come codominio dell'operatore trasformata di usa $C^0_*(\mathbb{R}) := \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue tali che } \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0\right\}$ (l'appartenenza al quale implica la limitatezza).

E' ora naturale chiedersi quale sia l'effetto della trasformata di Fourier su una funzione soggetta a operazioni consuete (la traslazione, la derivazione,...).

Teo 4.3 (proprietà algebriche della trasformata di Fourier)

$$\text{Hp: } f \in L^1(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}_0, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, A \in M_{\mathbb{R}}(m,n), \det A \neq 0$$

$$\text{Ts: (i) } \mathcal{F}(f(a\mathbf{x})) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

$$\text{(ii) } \mathcal{F}(f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = e^{-i\langle \mathbf{x}_0,\xi\rangle}\mathcal{F}(f)$$

$$\text{(iii) } \mathcal{F}\left(e^{i\langle \mathbf{x},\mathbf{x}_0\rangle} f(\mathbf{x})\right) = \hat{f}(\xi - \mathbf{x}_0)$$

$$\text{(iv) } \mathcal{F}\left(f\left(A^{-1}\mathbf{x}\right)\right) = |\det A|\, \hat{f}\left(A^t\xi\right)$$

$$\text{(v) } \mathcal{F}\left(\bar{f}(\mathbf{x})\right) = \left(\hat{f}(-\xi)\right)^*$$

Dunque $\mathcal{F}$ trasforma una traslazione di f in un prodotto per un esponenziale, e viceversa; trasforma un cambiamento lineare di coordinate in un altro cambiamento lineare di coordinate (a meno di una costante). Il coniugio è lasciato inalterato da $\mathcal{F}$, a meno del segno dell'argomento della trasformata.

Dim (ii) $\mathcal{F}(f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{y}+\mathbf{x}_0,\xi\rangle} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = e^{-i\langle \mathbf{x}_0,\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{y},\xi\rangle} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$, grazie alla sostituzione $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$.

(iii) $\mathcal{F}\left(e^{i\langle \mathbf{x},\mathbf{x}_0\rangle} f(\mathbf{x})\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} e^{i\langle \mathbf{x},\mathbf{x}_0\rangle} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi-\mathbf{x}_0\rangle} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \hat{f}(\xi-\mathbf{x}_0)$.

(iv) $\mathcal{F}\left(f\left(A^{-1}\mathbf{x}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f\left(A^{-1}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |\det A|\, e^{-i\langle A\mathbf{y},\xi\rangle} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$, grazie alla sostituzione $\mathbf{y}=A^{-1}\mathbf{x}$ e al teorema di cambio di variabile negli integrali. Si ha la tesi perché $\langle A\mathbf{y},\xi\rangle = \langle \mathbf{y}, A^t\xi\rangle$.

(i) è una conseguenza di (iv) nel caso particolare $A=\left[\frac{1}{a}\right]$.

(v) Posto $f=f_1+if_2$, il lato destro è $\left(\hat{f}(-\xi)\right)^* = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}\left(f_1(\mathbf{x})+if_2(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}\right)^*$: spezzando l'esponenziale complesso e dividendo l'integrale in parte reale e immaginaria si ottiene $\left(\hat{f}(-\xi)\right)^* = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\cos\langle \mathbf{x},\xi\rangle f_1(\mathbf{x}) - \sin\langle \mathbf{x},\xi\rangle f_2(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} + i \int\right.$ $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\cos\langle \mathbf{x},\xi\rangle f_1(\mathbf{x}) - \sin\langle \mathbf{x},\xi\rangle f_2(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} - i\int_{\mathbb{R}^n} \left(\cos\langle \mathbf{x},\xi\rangle f_2(\mathbf{x}) + \sin\langle \mathbf{x},\xi\rangle f_1(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}\left(f_1(\mathbf{x})-if_2(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}$, che è proprio $\mathcal{F}\left(\bar{f}\right)$. ■

Teo 4.4 (simmetria della trasformata di Fourier)

Hp: $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$

Ts: (i) se f è radiale, $\hat{f}$ è radiale

(ii) se f è pari (dispari), $\hat{f}$ è pari (dispari)

(iii) se f è reale pari, $\hat{f}$ è reale pari

(iv) se f è reale dispari, $\hat{f}$ è immaginaria pura dispari

Dim (i) Poiché f è radiale, per ogni matrice ortogonale R vale $f(R\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$. Allora la sua trasformata ha la stessa proprietà: $\hat{f}(R\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},R\xi\rangle} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle R\mathbf{y},R\xi\rangle} f(R\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{y},\xi\rangle} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \hat{f}(\xi)$, grazie alla sostituzione $\mathbf{x}=R\mathbf{y}$ e alla proprietà delle matrici ortogonali per cui $R^tR=Id$. ■

Teo 4.5 (trasformata della convoluzione)

Hp: $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$

Ts: $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$

Inoltre $f*g\in L^1$.

Dim Per definizione $\mathcal{F}(f*g) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}(f*g)(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},\xi\rangle}e^{-i\langle \mathbf{y},\xi\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\right.$

Per il teorema di Fubini-Tonelli si può invertire l'ordine di integrazione: $\mathcal{F}(f*g) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{y},\xi\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},\xi\rangle} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right) g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$

cioè, con la sostituzione $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{u}$, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{y},\xi\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{u},\xi\rangle} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{x}\right) g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \mathcal{F}(f)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{y},\xi\rangle} g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$. ■

La proprietà più rilevante della trasformata di Fourier riguarda però come essa agisce sulla derivata di una funzione.

Teo 4.6 (**trasformata della derivata**)

$$\text{Hp: } u \in C^1(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts: (i) } \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = i\xi_j\mathcal{F}(u)$$

$$\text{(ii) } \mathcal{F}(u) = o\left(\frac{1}{\xi_j}\right) \text{ per } \xi_j \to +\infty$$

Quindi la trasformata della derivata (ben definita perché $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$) è un opportuno monomio per la trasformata della funzione: la derivazione diventa un prodotto. Si noti che ogni funzione nello spazio di Schwartz soddisfa le ipotesi di questo teorema.

La dimostrazione usa l'integrazione per parti.

Se $n=1$, dal teorema segue che $\mathcal{F}(u) = o\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ per $|\xi| \to +\infty$: infatti, poiché per il lemma di Riemann-Lebesgue ogni trasformata tende a 0 se $|\xi| \to +\infty$, $i\xi\mathcal{F}(u) \to 0$ e allora $\mathcal{F}(u)$ deve tendere a 0 più in fretta di $\frac{1}{\xi}$.

Se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^1$, applicando il teorema alla funzione $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ si trova che $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = i^2\xi^2\mathcal{F}(u)$, per cui $\mathcal{F}(u) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$; iterando il procedimento - sotto l'ipotesi di $\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in L^1(\mathbb{R})\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ - si ha che $\mathcal{F}(u) = o\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)\ \forall\ k$ per $|\xi| \to +\infty$. All'appartenenza a L^1 di un numero maggiore di derivate di u corrisponde dunque un più veloce annullamento di $\mathcal{F}(u)$.

Questo risultato si generalizza facilmente al caso di n qualsiasi.

$$\text{Hp: } D^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$$

$$\text{Ts: (i) } \mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathcal{F}(u)$$

$$\text{(ii) } \mathcal{F}(u) = o\left(\frac{1}{||\xi||^k}\right) \text{ per } ||\xi|| \to +\infty, \forall k$$

Con ξ^α si indica, con abuso di notazione, $\prod_{j=1}^n \xi_j^{\alpha_j}$.

Teo 4.7 (**derivata della trasformata**)

$$\text{Hp: } u \in L^1(\mathbb{R}^n), x_j u \in L^1(\mathbb{R}^n)$$
$$\text{Ts: } \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial \xi_j} = -i\mathcal{F}(x_j u)$$

La derivata della trasformata è, a meno di una costante, la trasformata della funzione moltiplicata per un monomio.

Dal teorema segue che $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_j} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ perché ogni trasformata è continua; applicando il teorema alla funzione $x_j u : x_j^2 u \in L^1$ si ha che $\frac{\partial \mathcal{F}(x_j u)}{\partial \xi_j} = -i\mathcal{F}\left(x_j^2 u\right)$, ma $\mathcal{F}(x_j u) = i\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial \xi_j}$ e sostituendo si ha $i\frac{\partial^2 \mathcal{F}(u)}{\partial \xi_j^2} = -i\mathcal{F}\left(x_j^2 u\right)$: dunque anche la derivata seconda di $\mathcal{F}(u)$ è continua. Iterando il procedimento - sotto l'ipotesi $u : Pu \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni polinomio algebrico P, in modo che siano ben definite $\mathcal{F}(x_j u), \mathcal{F}\left(x_j^2 u\right), ...)$ - si ottiene che $\mathcal{F}(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Da questo stesso ragionamento si conclude che tutte le derivate di $\mathcal{F}(u)$ sono uguali, a meno di una costante, a una trasformata, e perciò tendono a 0 per $||\xi|| \to +\infty$.

Questo risultato si generalizza facilmente.

$$\text{Hp: } Pu \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ per ogni polinomio algebrico } P$$
$$\text{Ts: (i) } D^\alpha \mathcal{F}(u) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(\mathbf{x}^\alpha u)$$
$$\text{(ii) } \mathcal{F}(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

L'operatore trasformata di Fourier ha una proprietà sgradevole: $\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R}^n)\right) \not\subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$. Questo rende difficile invertire l'operatore, cioè, data $\mathcal{F}(f)$, risalire a f.

1. Data $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$, $\mathcal{F}(f) = \int_{-1}^1 e^{-i\xi x}dx = \begin{cases} 2\frac{\sin\xi}{\xi} I_{(\xi\neq 0)}(\xi) \text{ se } \xi \neq 0 \\ 2 \text{ se } \xi = 0 \end{cases}$, che non è una funzione integrabile (pur essendo analitica).

Teo 4.8 (formula di inversione)

$$\text{Hp: } \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n), \lim_{||\mathbf{x}|| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = 0, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$
$$\text{Ts : } \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, \mathbf{x}\rangle}\hat{f}(\xi)\,d\xi \;\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

In tal caso la funzione definita dal lato destro della tesi si dice antitrasformata di $\hat{f}$, e l'operatore che agisce in tal modo su $\hat{f}$ si indica con $\mathcal{F}^{-1}$: $\mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, \mathbf{x}\rangle} g(\xi)\,d\xi$. Si noti che tale operatore è ben definito se $g \in L^1$, quindi per scrivere che $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ è necessario sapere che $\mathcal{F}(f) \in L^1$ (che è un'ipotesi restrittiva, come si è visto nell'esempio sopra): quindi la trasformata di Fourier in L^1 è un operatore in generale non invertibile.

E' importante notare che, se $\hat{f} = g \in L^1$, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi$ è legata alla trasformata di $\hat{f}$: si ha che $\hat{g}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} g(\xi)\, d\xi = (2\pi)^n f(-\mathbf{y})$, cioè

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = (2\pi)^n f(-\mathbf{y})$$

1. $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \in L^1 \cap C^\infty$ e $f^{(j)} \in L^1\ \forall\, j$. Allora per la conseguenza del teorema 4.6 dev'essere $\mathcal{F}(f) = o\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)$ per $|\xi| \to +\infty\ \forall\, k$ (dal che segue $\mathcal{F}(f) \in L^1$). Non vale invece $Pf \in L^1\ \forall\, P$ (neanche per $P(x) = x$), quindi non si applica la conseguenza del teorema 4.7: non si può dire che $\mathcal{F}(f) \in C^\infty$.

   $\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi e^{-|\xi|}$ (con il teorema dei residui): c'è un punto angoloso in 0, quindi $f \notin C^1$.

   f soddisfa le ipotesi del teorema di inversione: allora $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \pi e^{-|\xi|} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \pi e^{-|\xi|} d\xi$ (l'uguaglianza vale perché $\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \pi e^{-|\xi|} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\xi)\, \pi e^{-|\xi|} d\xi + i \int_{\mathbb{R}} \sin(x\xi)\, \pi e^{-|\xi|} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\xi)\, \pi e^{-|\xi|} d\xi$ e la funzione integranda è pari). Quindi $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left(\pi e^{-|\xi|}\right)$: $\mathcal{F}\left(e^{-|\xi|}\right) = \frac{2}{x^2+1}$.

   Inoltre $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(e^{-|\xi|}\right)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = 2\pi e^{-|\xi|}$.

2. I risultati visti possono essere combinati per ricavare informazioni a priori su u quando è nota la sua trasformata, e viceversa.

   In particolare, supponiamo che $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\xi^2+1)^2}$. Poiché $\hat{u}$ è L^1, l'antitrasformata è ben definita e u può essere vista come trasformata di $\hat{u}$, a meno di una costante: u ha dunque tutte le buone proprietà delle trasformate. $\hat{u}$ è pari e reale, dunque u è pari e reale; $\hat{u} \in L^1 \cap L^2$, dunque $u \in L^2 \cap C^0 \cap L^\infty$ e $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$. Poiché $\xi \hat{u} \in L^1 \cap L^2$, $u \in C^1$; poiché $\xi^2 \hat{u} \in L^1 \cap L^2$, $u \in C^2$.

   Noto inoltre che $\hat{u}$ è abbastanza regolare da avere la seguente proprietà: $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, h \in \mathbb{N} : \xi^k \hat{u}^{(h)} \in L^2 \cap L^1$ (infatti derivando la regolarità aumenta). Allora $\frac{d^k}{dx^k} x^h u \in L^2 \cap L^\infty \cap C^0$: infatti $\mathcal{F}\left(\frac{d^k}{dx^k} x^h u\right) = i\xi^k \mathcal{F}\left(x^h u\right) = i\xi^k \frac{d^h \hat{u}}{dx^h} \frac{1}{(-i)^h}$, quindi si può antitrasformare. Poiché $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, h \in \mathbb{N} : \frac{d^k}{dx^k} x^h u \in L^2 \cap L^\infty \cap C^0$, si ha $x^h u \in C^k$ e in particolare $u \in C^k(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Se ne conclude che $u \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

La situazione migliora se si considera l'operatore trasformata definito sullo spazio di Schwartz.

Prop 4.9

Hp: $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Ts: $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dim Mostro che $\mathcal{F}(\phi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$ vale $D^\alpha(\mathcal{F}(\phi)) = o\left(\frac{1}{||\xi||^k}\right)$ per $||\xi|| \to +\infty$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

E' noto che $P\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni polinomio algebrico P: allora per la conseguenza vista del teorema 4.7 vale $\mathcal{F}(\phi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dalle ipotesi segue che $P\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni polinomio algebrico P: per quanto scritto sopra allora $D^\alpha \mathcal{F}(\phi) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(\mathbf{x}^\alpha \phi)$. Ma dalla conseguenza del teorema 4.6 si sa che se $D^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$, allora $\mathcal{F}(u) = o\left(\frac{1}{||\xi||^k}\right)$ $\forall\ k$ per $||\xi|| \to +\infty$: prendendo $u = \mathbf{x}^\alpha \phi$, poiché anche u è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha che $\mathcal{F}(\mathbf{x}^\alpha\phi) = o\left(\frac{1}{||\xi||^k}\right)$ $\forall\ k$ per $||\xi|| \to +\infty$ e anche $D^\alpha\mathcal{F}(\phi) = o\left(\frac{1}{||\xi||^k}\right)$ $\forall\ k$. ■

[Fissato $\alpha \in \mathbb{N}^n$, considero l'operatore differenziale lineare $\sum_{j=1}^n c_j D^{\beta_j}$, con $c_j \in \mathbb{C}$ e $\beta_j \in \mathbb{N}^n$ multiindice. Calcolando la trasformata di tale operatore applicato a $D^\alpha\phi$ si ottiene $\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n c_j D^{\beta_j}(D^\alpha\phi)\right) = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{F}\left(D^{\beta_j}(D^\alpha\phi)\right)$. Per il teorema 1 $\mathcal{F}\left(D^{\beta_j}(D^\alpha\phi)\right) = i^{|\beta_j|}\xi^{|\beta_j|}\mathcal{F}(D^\alpha\phi)$: dunque $\mathcal{F}(D^\alpha\phi)$ tende a zero più in fretta di $\xi^{|\beta_j|}$ per $||\xi|| \to +\infty$. Ma poiché i β_j sono tutti arbitrari, se ne ricava che $\mathcal{F}(D^\alpha\phi) = o\left(\frac{1}{||\xi||^k}\right)$ $\forall\ k$.]

Si può mostrare che l'operatore $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{F}(\phi) = \hat{\phi}$ è biunivoco e bicontinuo[20]. Inoltre, poiché $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ e $\lim_{||\mathbf{x}|| \to +\infty}\phi(\mathbf{x}) = 0$, vale il teorema di inversione con $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\xi,\mathbf{x}\rangle}\hat{\phi}(\xi)\, d\xi$ e $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi)) = \phi$. Lo spazio di Schwartz è dunque il dominio ideale per la trasformata di Fourier.

4.1 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Lemma 4.10

$$\text{Hp:} \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$
$$\text{Ts:} \quad \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}$$

Dim $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,\mathbf{x}\rangle}f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right)g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,\mathbf{x}\rangle}g(\xi)\,d\xi\right)f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, scambiando l'ordine di integrazione grazie al teorema di Fubini-Tonelli. ■

Allora, se si vuole definire la trasformata di Fourier di una distribuzione, per il caso particolare di distribuzioni del tipo u_f la candidata naturale è la distribuzione $\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}$: come al solito, l'operazione è fatta sulla funzione test, in modo che si possa facilmente generalizzare questa definizione a distribuzioni non associate a una funzione.

Il seguente lemma mostra che tale definizione è ben posta.

Lemma 4.11

$$\text{Hp: } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$
$$\text{Ts: } L: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, L(\phi) = u\left(\hat{\phi}\right) \text{ è una distribuzione temperata}$$

[20] $\phi_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \phi \Longleftrightarrow \hat{\phi}_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \hat{\phi}$

Dim L è ovviamente lineare. Se inoltre $\phi_n \to^{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \phi$, allora (si può mostrare che) $\hat{\phi}_n \to^{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \hat{\phi}$, dunque L è una distribuzione standard. E' anche temperata perché è verificata la condizione di estensione: se $\phi_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$, allora $u\left(\hat{\phi}_n\right) \to 0$ perché anche $\hat{\phi}_n \to^{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$ e u è una distribuzione temperata in $\psi = \hat{\phi}$. ■

Def Data $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si dice trasformata di Fourier di u, e si indica con $\hat{u}$, la distribuzione temperata $u\left(\hat{\phi}\right)$.

1. Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sono ben definite le distribuzioni temperate $u_f, u_{\hat{f}}$. In tal caso la trasformata di Fourier di u_f e la distribuzione temperata associata alla trasformata di Fourier coincidono per il lemma visto all'inizio del paragrafo: $\hat{u}_f = u_{\hat{f}}$.

   [Dim, ma ridondante: per definizione $\hat{u}_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\,\hat{\phi}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle}\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\xi)\,\phi$ Supponendo che tale distribuzione sia associata a una funzione g, si ha $\hat{u}_f(\phi) = u_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Dunque dev'essere $\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\xi)\,d\xi\right)\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, da cui, per il lemma di annullamento, $g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\xi)\,d\xi$ e $g = \hat{f}$.]

2. Data $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\delta}(\phi) := \delta\left(\hat{\phi}\right) = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, che è la distribuzione associata alla funzione $f(\mathbf{x}) = 1$.

Tutte le proprietà della trasformata di Fourier integrale si estendono alla trasformata distribuzionale, con l'accortezza di sostituire alla derivata classica la derivata distribuzionale. [RISCRIVERE LE PROPRIETA']

$$\mathcal{F}(Du) = i\xi\mathcal{F}(u)$$

Dim Per semplicità si suppone $n = 1$. Usando le definizioni e le proprietà della trasformata di Fourier integrale, $\mathcal{F}(Du)(\phi) = Du(\mathcal{F}(\phi)) = -u\left(\frac{d\mathcal{F}(\phi)}{d\xi}\right) = -u(-i\mathcal{F}(x\phi)) = \mathcal{F}(u)(i\xi\phi)$, che è la distribuzione $i\xi\mathcal{F}(u)$ calcolata in ϕ. ■

Questa proprietà è molto utile per trovare $\mathcal{F}(u)$ quando la trasformata di Du è nota.

1. Sia $f(x) = (|x| - 2)\,I_{[-2,2]}(x)$. Si vogliono calcolare Du_f, D^2u_f e $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(f''), \mathcal{F}(u_f), \mathcal{F}(u_{f''})$.

   Poiché f è C^1 a meno di un insieme di misura nulla e non ha discontinuità a salto, vale $Du_f = u_{f'}$, con $f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \notin [-2,2] \\ 1 \text{ se } x \in (0,2) \\ -1 \text{ se } x \in (-2,0) \end{cases}$ (il fatto che non sia ben definita in alcuni punti è irrilevante, dato che $[f']$ è determinata). Poiché f' è C^1 a meno di un insieme di misura nulla, vale $D^2u_f = u_{f''} - \delta_{-2} + 2\delta_0 - \delta_2 = -\delta_{-2} + 2\delta_0 - \delta_2$. Dunque $\mathcal{F}\left(D^2u_f\right) = \left(-e^{-2i\xi} + 2 - e^{2i\xi}\right)u_1 = (2 - 2\cos 2\xi)\,u_1$. Allora $\mathcal{F}\left(D^2u_f\right) = -\xi^2\mathcal{F}(u_f)$, da cui $\mathcal{F}(u_f) = \left(-\frac{2-2\cos 2\xi}{\xi^2}\right)u_1 = \left(-\frac{4\sin^2\xi}{\xi^2}\right)u_1$. Da quest'ultima scrittura si intuisce che

$\mathcal{F}(f) = -\frac{4\sin^2\xi}{\xi^2}$ è, a meno di un segno, la trasformata di un prodotto di convoluzione: infatti $\mathcal{F}\left(I_{[-1,1]}(x)\right) = 2\frac{\sin\xi}{\xi}$ (da estendere per continuità), dunque $f = -I_{[-1,1]} * I_{[-1,1]}$.

Per ricavare $\mathcal{F}(f)(0)$ si può sfruttare la continuità, dalla quale è ovvio che $\mathcal{F}(f)(0) = -4$, oppure si usa la definizione.

Def Data $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si dice antitrasformata di Fourier di u, e si indica con $\check{u}$, la distribuzione temperata $u\left(\mathcal{F}^{-1}(\phi)\right)$.

L'antitrasformata di una distribuzione è dunque la distribuzione calcolata nell'antitrasformata integrale di una ϕ. $\check{u}$ è una distribuzione temperata grazie alla biunivocità e bicontinuità di $\mathcal{F}^{-1}$.

Di nuovo, se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n), f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e $f \to 0$ per $||\mathbf{x}|| \to +\infty$ (cioè f soddisfa le ipotesi del teorema di inversione), l'antitrasformata di u_f, cioè $\check{u}_f$, coincide con $u_{\check{f}}$ (distribuzione associata all'antitrasformata integrale di f).

Poiché si lavora nello spazio di Schwartz, l'antitrasformata della trasformata di Fourier di u coincide con u.

1. E' noto che la delta è una distribuzione temperata: $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Qual è la sua antitrasformata? Per definizione $\check{\delta}(\phi) = \delta\left(\check{\phi}\right) = \delta\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\langle\xi,\mathbf{x}\rangle}\phi(\xi)\,d\xi\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\phi(\xi)\,d\xi = u_{1/2\pi}(\phi)$. Se ne ricava anche che $\mathcal{F}\left(2\pi\check{\delta}\right) = \mathcal{F}(u_1)$, cioè $\mathcal{F}(u_1) = 2\pi\delta$.

2. Sfruttando alcune trasformate note e le proprietà delle trasformate è facile ricavare le trasformate di altre funzioni.

   $f(x) = 1$ è un polinomio e dunque definisce la distribuzione temperata u_f. Per il teorema sulla derivata della trasformata vale $D\mathcal{F}(u_1) = -i\mathcal{F}(xu_1) = -i\mathcal{F}(u_x)$, da cui $2\pi i D\delta = \mathcal{F}(u_x)$.

3. Si può mostrare che la distribuzione T associata a $vp\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{t}dt$ è una distribuzione temperata. Si è visto che tale distribuzione risolve il problema di divisione $xT = u_1$: allora vale $\mathcal{F}(xT) = 2\pi\delta$, cioè - per la proprietà già usata sopra - $D\mathcal{F}(T) = 2\frac{\pi}{i}\delta$. Si può calcolare la primitiva distribuzionale del lato destro: si trova $\mathcal{F}(T) = \frac{\pi}{i}u_{sign(\xi)} + u_c$[21], dove c è una costante il cui valore è 0 perché la trasformata deve essere dispari.

Si può dunque dimostrare che l'operatore trasformata di Fourier distribuzionale $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è biunivoco e bicontinuo.

[21] la funzione segno ha come derivata distribuzionale $2\delta_0$; ma dovrebbe andare bene come primitiva anche la funzione gradino per 2

4.2 Trasformata di Fourier in L^2

C'è un altro insieme in cui si può studiare la trasformata di Fourier: L^2. Poiché ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ definisce una distribuzione temperata u_f, la trasformata di Fourier di u_f è ben definita e la funzione cui essa è associata si dirà trasformata di f.

E' già noto che qualora f sia anche in L^1 la trasformata integrale coincide con quella distribuzionale, quindi non c'è incoerenza tra le definizioni.

Teo 4.12 (Plancherel)

Hp: $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Ts: $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \, ||f||_{L^2}$

Questo teorema (che è la versione continua del teorema già visto sulle serie di Fourier) mostra che l'operatore $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ è continuo secondo la norma L^2. Si può mostrare che è addirittura bicontinuo e biunivoco.

1. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ è in L^2, dunque la trasformata di u_f è ben definita e mi aspetto che sia (cioè sia associata a una funzione) in L^2. Poiché f è dispari, u_f è dispari e anche la trasformata sarà dispari. Si vuole calcolare $\hat{u}_f$.

   Poiché $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ e si è già visto che la derivata della distribuzione associata al logaritmo è $vp \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx$, si ha che $Du_f = vp \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x+1} dx - vp \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-1} dx$. Poiché $\mathcal{F}(Du_f) = i\xi\mathcal{F}(u)$ ed è noto che la trasformata del valor principale è $\mathcal{F}(T) = \frac{\pi}{i} u_{sign(\xi)}$, la trasformata delle distribuzioni traslate è $\frac{\pi}{i} e^{i\xi} u_{sign(\xi)}$, $\frac{\pi}{i} e^{-i\xi} u_{sign(\xi)}$ e si ottiene quindi $i\xi\mathcal{F}(u) = \frac{\pi}{i}\left(e^{i\xi} - e^{-i\xi}\right) u_{sign(\xi)} = 2\pi \sin\xi u_{sign(\xi)}$. Si deve allora risolvere il problema di divisione $\xi\mathcal{F}(u) = \frac{2\pi}{i} \sin\xi u_{sign(\xi)}$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono del tipo $c\delta$. Essendo poi $sign(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|}$, è facile intuire che una soluzione particolare è $\frac{2\pi}{i} \sin\xi u_{\frac{1}{|\xi|}}$. Allora $\mathcal{F}(u) = \frac{2\pi}{i} \sin\xi u_{\frac{1}{|\xi|}} + c\delta$.

Si noti che in generale $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})$, quindi non si può usare la definizione di trasformata integrale per $f \in L^2(\mathbb{R})$. E' comunque ragionevole cercare una rappresentazione integrale della trasformata di f: la seguente costruzione risponde a tale esigenza.

Data $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sia $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi compatti tale che $C_k \subseteq C_{k+1}$ $\forall$ k e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \mathbb{R}^n$ e $\{f_k(\mathbf{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni di termine generale $f_k = fI_{C_k}$. Allora la successione di funzioni $\left\{\hat{f}_k(\mathbf{x})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ di termine generale $\hat{f}_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,\mathbf{x}\rangle} f_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ è ben definita: I_{C_k} è in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall$ p e in particolare è in L^2, dunque fI_{C_k} è in L^1[22] e $\hat{f}_k$ è ben definita. Vale inoltre $f_k \to^{L^2} f$: infatti $||f_k - f||^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} (f_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}))^2\, d\mathbf{x} =$

[22] In realtà è anche in L^2, perché $f_k^2 = f^2 I_{C_k} \leq f^2$, che è integrabile.

$\int_{\mathbb{R}} \left(f_k^2(\mathbf{x}) + f^2(\mathbf{x}) - 2f_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}$ e $f_k^2 \leq f^2$, $f_k f \leq f^2$, quindi si applica il teorema di convergenza dominata e $\lim_{k\to+\infty} ||f_k - f||_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} (f_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = 0$ perché $f_k \to f$ q.o. Allora, per la continuità sopra menzionata di $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, vale anche che $\hat{f}_k \to^{L^2} \hat{f}$.

Si ricorda che $\hat{f}_k \to^{L^2} \hat{f}$ implica che esista una sottosuccessione $\{k_m\} : \hat{f}_{k_m} \to \hat{f}$ q.o.[23]

Teo 4.13 (trasformata e convoluzione)

$$\text{Hp: (i) } u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{(ii) } u \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{(iii) } u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{(iv) } v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ts: se vale una qualsiasi tra i, ii, iii, iv allora } \mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$$

La validità della tesi nel caso (i) si era già vista.

Si noti che nel caso (ii) $\mathcal{F}(u) \in L^\infty$ e $\mathcal{F}(v) \in L^2$, quindi il prodotto è in L^2 e l'uguaglianza con $\mathcal{F}(u * v) \in L^2$ ha senso.

Nel caso (iii) $u * v \in L^\infty$, mentre $\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v) \in L^1$ per Hoelder, quindi $\mathcal{F}(u * v) \in L^2 \cap L^1$ e l'antitrasformata è ben definita.

4.3 Applicazioni

L'idea è sfruttare la trasformata di Fourier per risolvere equazioni differenziali lineari. Infatti la trasformata di Fourier, grazie a 4.6, trasforma equazioni differenziali in equazioni algebriche, semplificando notevolmente il processo di risoluzione.

1. Data $f \in L^1$, considero l'equazione differenziale

$$-u'' + u = f$$

Cerco soluzioni $u \in L^1$ (altrimenti le operazioni di trasformata nel seguito non sarebbero ben definite). Trasformando secondo Fourier entrambi i lati si ottiene $\left(1 + \xi^2\right)\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(f)$, cioè $\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(f)}{1+\xi^2}$ (in questo caso non ci sono problemi di divisione perché $\xi^2 + 1$ non si annulla mai). Sapendo che la trasformata di un prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate e che $\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \frac{2}{1+\xi^2}$[24], si ha che $u = \frac{1}{2} f * e^{-|x|}$,

[23] cfr. teorema "rivincita della convergenza in probabilità" della giuseppina

[24] Si è già calcolato che $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \pi e^{-|\xi|}$. Applicando la formula $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f(-y)$, si ottiene che $\mathcal{F}\left(\pi e^{-|\zeta|}\right) = 2\pi \frac{1}{x^2+1}$, cioè $\mathcal{F}\left(e^{-|\zeta|}\right) = \frac{2}{x^2+1}$.

per cui $u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y)\, dy$ (poiché $e^{-|x|}$ è L^{∞} e f è L^1, il loro prodotto di convoluzione è L^{∞}). Ma u non è derivabile in $\mathbb{R}$, a causa del valore assoluto ad esponente: dunque u non risolve l'equazione in senso classico, ma nel senso delle distribuzioni. Infatti i passaggi svolti sono corretti anche se si vede il problema come segue: supponendo che u sia una distribuzione temperata, si risolve $-u'' + u = u_f$, cioè si cerca una distribuzione u tale che - per la formula della derivata seconda di una distribuzione e per linearità - $u(-\phi'' + \phi) = u_f(\phi)\ \forall\ \phi$. La formulazione distribuzionale dell'equazione è dunque più debole di quella classica, perché richiede meno regolarità alle soluzioni.

Si noti che la soluzione $u \in L^1$ è unica: se ne esistesse un'altra la loro differenza risolverebbe l'omogenea, e trasformando si troverebbe che la loro differenza è nulla.

Se e. g. $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f', f'' \in L^1$, allora $u = \frac{1}{2} f * e^{-|x|}$ è C^2 e risolve l'equazione in senso classico.

Si noti che inoltre l'ipotesi $u \in L^1$ è restrittiva, perché si escludono le funzioni non Fourier-trasformabili: ad esempio le soluzioni dell'equazione omogenea, che sono del tipo $c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$.

2. Data $f \in L^1$, considero l'equazione differenziale

$$u'' + u = f$$

Si interpreta subito l'equazione in senso distribuzionale: si risolve $u'' + u = u_f$ con u distribuzione temperata. Trasformando si ottiene $\left(1 - \xi^2\right)\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_f)$. Risolvendo il problema di divisione si ottiene $\mathcal{F}(u) = \left(vp\int \frac{1}{1-\xi^2}\right)\mathcal{F}(u_f) = \frac{1}{2}\left(vp\int \frac{1}{1-\xi} + vp\int \frac{1}{1+\xi}\right)\mathcal{F}(u_f)$. Occorre quindi antitrasformare la somma dei valori principali. Poiché $\mathcal{F}(u_{signx}) = \frac{2}{i} vp\int \frac{1}{\xi}$[25], per la regola di traslazione si ottiene $\mathcal{F}\left(e^{ix} u_{signx}\right) = -\frac{2}{i} vp\int \frac{1}{1-\xi}$, mentre $\mathcal{F}\left(e^{-ix} u_{signx}\right) = \frac{2}{i} vp\int \frac{1}{\xi+1}$. Allora $\mathcal{F}\left(\frac{i}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) u_{signx}\right) = vp\int \frac{1}{1-\xi^2}$, dove $\frac{i}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) u_{signx} = \frac{1}{2}\sin x u_{signx}$. Ne segue che u è il prodotto di convoluzione di u_f e $\frac{1}{2}\sin x signx$: risolve l'equazione nel senso delle distribuzioni.

Se f è abbastanza regolare, come sopra u è anche una soluzione classica.

Occorre recuperare le soluzioni dell'equazioni omogenea, che si sono escluse nel risolvere il problema di divisione: si risolve $\left(1 - \xi^2\right)\mathcal{F}(u) = 0_D$. Per il teorema visto, avendo $1-\xi^2$ due zeri semplici, $\mathcal{F}(u) = c_1\delta_{\xi+1} + c_2\delta_{\xi-1}$. Poiché $\delta_{\xi-1}$ $(\delta_{\xi+1})$ è a meno di una costante la trasformata della distribuzione associata a e^{ix} (e^{-ix}), antitrasformando si ha $u = c_2 u_{e^{ix}} + c_1 u_{e^{-ix}}$. Se si impone che le distribuzioni abbiano valori reali si ottiene $u = \alpha_1 u_{\sin x} + \alpha_2 u_{\cos x}$. Quindi tutte e sole le soluzioni distribuzionali dell'equazione sono del tipo $u = \alpha_1 u_{\sin x} + \alpha_2 u_{\cos x} + u_f * \frac{1}{2}\sin x u_{signx}$.

[25] si ottiene analogamente a quanto visto per la trasformata di $e^{-|x|}$