



Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro Tecnológico – CTC

Departamento de Automação e Sistemas – DAS

Disciplina DAS 5109 – Modelagem e Simulação de Processos

Prof. Marcelo De Lellis Costa de Oliveira

Experimento de laboratório 2

Introdução à Mecânica Lagrangiana

(atualizado em 6 de abril de 2023)

1 Introdução

No ano de 2001 foi introduzido no mercado o veículo *segway*, ilustrado na Fig. 1. Trata-se de um dicio – i.e. veículo com duas rodas lado-a-lado – capaz de se equilibrar autonomamente e que é acionado pela interação com o equilíbrio do condutor. Uma das principais vantagens desse tipo de veículo é o fato de ser bastante compacto, ocupando praticamente o mesmo espaço que uma pessoa de pé, sendo portanto atrativo para o ambiente urbano, em baixas velocidades (até 20 km/h). A desvantagem, porém, é que se trata de um sistema dinâmico instável em malha aberta (assim como uma bicicleta), oferecendo um desafio significativo para o sistema de controle.



Figura 1: Exemplo de veículo *segway*, que pode ser idealizado como um pêndulo invertido com base móvel. Fonte: BRMobility (2022).

O veículo (robô) *segway* pode ser visto como um pêndulo invertido sobre uma base móvel, conforme esquemático da Fig. 2, em que apenas o movimento longitudinal é representado. O conjunto veículo-passageiro pode ser modelado por duas massas: uma massa pendular m , composta majoritariamente pela massa do passageiro, disposta a uma distância l da base móvel. Esta, por sua vez, possui uma massa M , composta majoritariamente pela massa do veículo, que sofre a ação

de uma força externa $F(t)$, a qual resulta do torque elétrico aplicado pelos motores das rodas. A posição da base é $x_b(t)$, enquanto a posição do pêndulo é $x_p(t)$. Ao movimento de translação da base se opõe uma força de atrito viscoso de magnitude $d\dot{x}_b(t)$, ao passo que a magnitude do torque de atrito viscoso no movimento pendular é $b\dot{\theta}(t)$. A altura da massa pendular é $z_p(t)$, e a aceleração da gravidade é g .

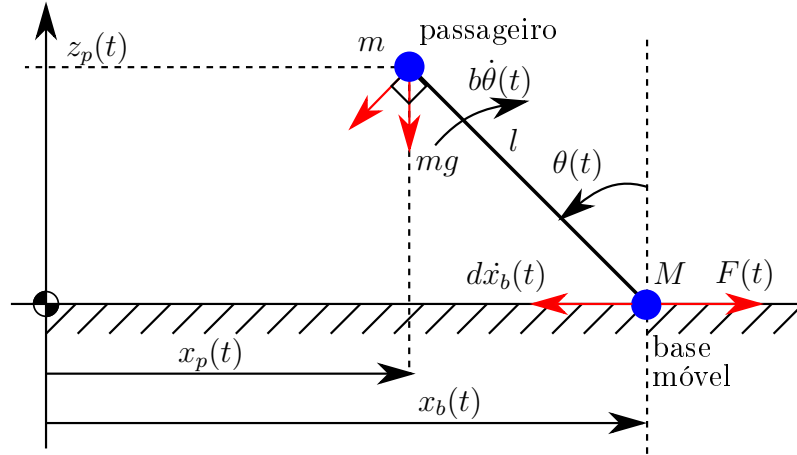


Figura 2: Esquemático do movimento longitudinal de um veículo *segway* modelado como um pêndulo invertido sobre base móvel.

Por simplicidade, iremos desprezar o torque binário que o passageiro aplica sobre o pêndulo – e, opostamente, na base –, no sentido de alterar o ângulo $\theta(t)$ e, com isso, fornecer uma referência de velocidade de translação (da base ou do passageiro).

2 Exercícios

Trabalho Analítico

1. Utilizando conceitos de *mecânica Lagrangiana* e a equação de *Euler-Lagrange* – conforme explanado na Seção 4.2.2 da apostila da disciplina (OLIVEIRA, 2019) –, resolva os seguintes itens.
 - (a) Encontre as equações do movimento para as coordenadas generalizadas $x_b(t)$ e $\theta(t)$. Em ambas as equações a força de controle $F(t)$ deve estar explícita.
 - (b) Com base na solução do item 1a, qual é a massa m_{eq} e o momento de inércia J_{eq} equivalente dos movimentos de translação da base e rotação do pêndulo, respectivamente? Esses parâmetros inerciais são constantes?
 - (c) Como o objetivo final de controle é a velocidade de translação, reescreva, se possível, a EDO de $x_b(t)$ em função de $v_b(t) = \dot{x}_b(t)$, i.e. aplique uma mudança de coordenadas.
2. Propondo $\mathbf{x} = [\theta \quad \dot{\theta} \quad v_b]^T$ como o vetor de estado, determine o equilíbrio do sistema. Apresente a expressão matemática de cada equilíbrio (se existir) e um gráfico correspondente, se relevante.
3. Considerando:
 - $u = F$ como a entrada de controle;
 - $y = v_b$ como a saída a ser controlada;

- e um ponto de linearização dado por $\bar{\mathbf{x}} = [0 \ 0 \ \bar{v}_b]^T$;

determine as matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ da representação linear no espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) . \end{cases} \quad (1)$$

4. Determine a função de transferência

$$G(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta F(s)} \quad (2)$$

e avalie a sua estabilidade.

Trabalho Numérico

5. Com base em uma aplicação real (busque informações na internet), proponha uma parametrização para o sistema. Não se esqueça de indicar a fonte da informação.
6. Realize um teste de malha aberta utilizando o sistema parametrizado conforme a questão anterior. Para isto, considere uma condição inicial apropriada e suponha que o pêndulo possa girar livremente – por exemplo, com a base erguida com relação ao solo. A simulação parece factível?
7. Projete um controlador por realimentação linearizante tal que a dinâmica $\ddot{\theta}(t) = f(F(t))$ seja linear. Avalie a factibilidade do controlador obtido.
8. Utilizando a camada linearizante da questão anterior, projete um controlador PID para $\theta(t)$ que alcance erro nulo, em regime permanente, no seguimento de referência.
9. Como uma camada de controle externa à da questão anterior, projete um controlador PID para a velocidade $v_b(t)$ que atinja erro nulo, em regime permanente, no seguimento de referência.

Referências

BRMobility. *Veículos Inteligentes*. 2022. Segway (Diciclo). Disponível em: <<https://brmobility.com.br/index.html>>.

OLIVEIRA, M. D. L. C. de. *Fundamentos de Modelagem, Identificação e Controle de Sistemas*. 2019. Edição do autor. Apostila da disciplina DAS 5109 - Modelagem e Simulação de Processos. Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <<https://arquivos.ufsc.br/f/b48cd56f256a4e4285c6/?dl=1>>.