



Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro Tecnológico – CTC

Departamento de Automação e Sistemas – DAS

Disciplina DAS 5109 – Modelagem e Simulação de Processos

Prof. Marcelo De Lellis Costa de Oliveira

Experimento de laboratório 3:

Modelagem, identificação e controle de um sistema de refrigeração

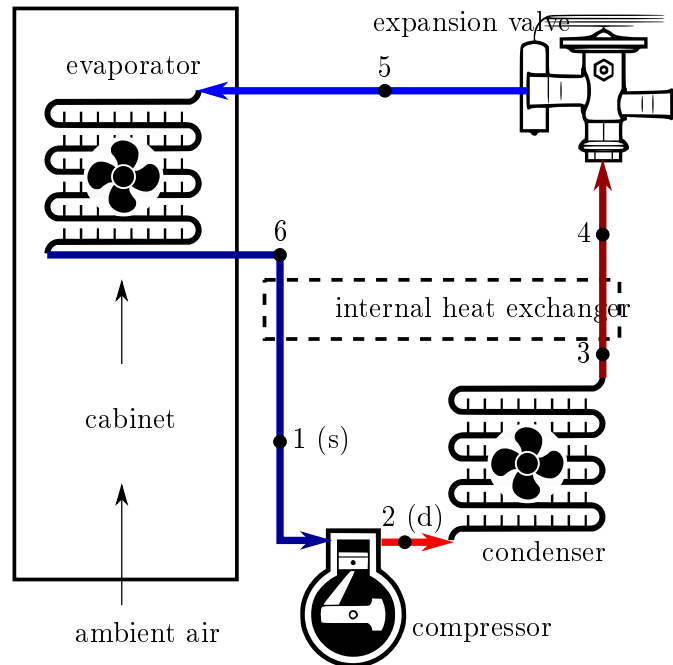
(atualizado em 10 de maio de 2023)

1 Introdução

Neste experimento iremos trabalhar aspectos de modelagem, identificação e controle de um sistema de refrigeração. O objeto de estudo é um congelador comercial (sorveteira) com um único compartimento refrigerado (“gabinete”) de 572 litros, convecção forçada (por ventilador) e temperatura interna controlada em $-20 \pm 2^\circ\text{C}$, ilustrado na Fig. 1a. Um esquemático contendo os principais componentes do ciclo de compressão de vapor e como eles são interconectados é apresentado na Fig. 1b. As setas indicam os fluxos de calor ou o sentido de circulação do refrigerante (propano).



(a) Aspecto geral.



(b) Arquitetura de ciclo.

Figura 1: Sorveteira comercial (*freezer*) como objeto de estudo do experimento.

O produto foi colocado em uma câmara de testes nos laboratórios POLO, do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, com temperatura ambiente (T_a) e umidade controladas. Por meio de termopares foram medidas as temperaturas do gabinete (T_i), evaporador (T_e) e condensador (T_c), com um período de amostragem $\tau = 5\text{ s}$. O congelador foi submetido a um controle *on-off*

programado em um computador conectado diretamente ao *drive* eletrônico do compressor, o que permitiu a medição do sinal de acionamento, $S = \{0, 1\}$, bem como a velocidade de rotação ω , que são sinais fundamentais para a identificação do modelo matemático do sistema.

O fluxo de *entalpia* do evaporador para o condensador se dá por meio de migração de massa do fluido refrigerante, conforme diagrama pressão-entalpia da Fig. 2. Sabendo que o ponto 1 é a sucção do compressor (vide definição dos pontos na Fig. 1b), entre os pontos 1 e 2 ocorre a compressão do fluido no estado *gasoso*, que portanto sofre um aumento de pressão e de entalpia, aquecendo. Na passagem pelo condensador o gás perde calor (entalpia) para o ar ambiente, de forma que a temperatura na saída do condensador (ponto 3) é menor do que na entrada, causando a condensação do fluido – ou seja, a passagem para a fase *líquida*. Na sequência, ao atravessar o trocador de calor interno chegando à entrada (ponto 4) do dispositivo de expansão (tubo capilar ou válvula), a entalpia – e portanto a temperatura – do líquido é reduzida ainda mais. O líquido então chega ao dispositivo de expansão, que gera uma perda de carga (“estrangulamento”) no circuito em um processo *adiabático*, de forma que a pressão P na saída (ponto 5) se torna menor do que na entrada (ponto 4) do dispositivo. Como o volume V de gás no circuito é constante, a temperatura T se reduz, em conformidade com a lei dos gases ideais:

$$PV = nRT, \quad (1)$$

na qual R é a constante universal dos gases perfeitos, e n é o número de mols de gás no circuito.

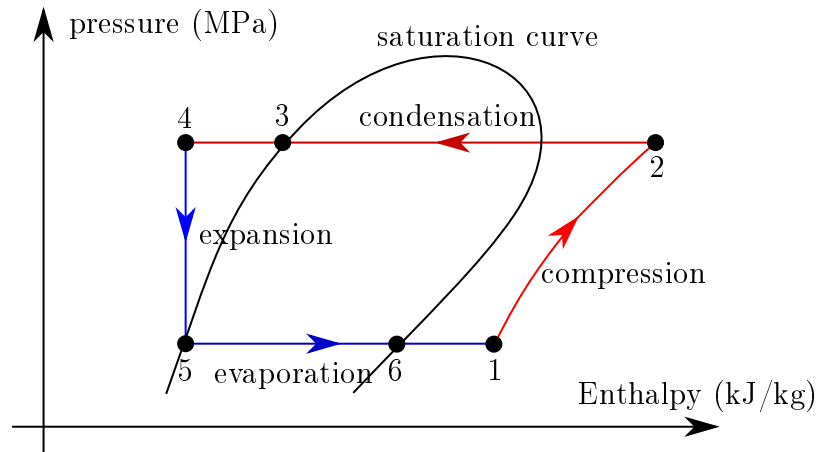


Figura 2: Diagrama pressão-entalpia (qualitativo) de um sistema de refrigeração por compressão de vapor.

Entrando no evaporador a uma pressão e temperatura mais baixas, o fluido retorna à fase *gasosa*, evaporando-se. Ao longo do evaporador, o gás, por estar a uma temperatura menor que a do gabinete, recebe calor, de forma que sua entalpia aumenta. Entre a saída do evaporador (ponto 6) e sucção do compressor (ponto 1) o gás recebe ainda mais calor pois atravessa o outro lado do trocador de calor interno, completando uma volta no circuito.

2 Modelo matemático

Neste estudo será considerado *inicialmente* um modelo fenomenológico bastante simplificado, com alto grau de abstração, proposto por Schné, Jaskó e Simon (2015). Para isto, não apenas a capacidade térmica do gabinete foi considerada, mas também a do evaporador e condensador, obtendo-se portanto um modelo dinâmico a parâmetros concentrados de 3ª ordem. Tal modelo foi formulado considerando uma analogia bem conhecida entre sistemas elétricos e mecânicos, resumida na Tabela 1, onde o operador Δ representa uma variação da quantidade que ele precede, e $t \in \mathbb{R}^+$ é o tempo.

Tabela 1: Analogia entre sistemas elétricos e térmicos

Sistemas Elétricos	Sistemas Térmicos
corrente: i [A]	fluxo de calor: q [W]
tensão: u [V]	temperatura: T [K]
resistência: R [Ω]	resistência: R [K/W]
capacitância: C [F]	capacitância: C [J/K]
lei de Ohm: $\Delta u = Ri$	lei de Fourier: $\Delta T = Rq$
dinâmica: $C\dot{V}(t) = i(t)$	dinâmica: $C\dot{T}(t) = q(t)$

2.1 Circuito elétrico equivalente

O raciocínio por trás do modelo proposto por Schné, Jaskó e Simon (2015) é o seguinte. Uma capacitância térmica foi atribuída ao gabinete (C_i), evaporador (C_e) e condensador (C_c), uma vez que estes componentes podem armazenar uma quantidade significativa de calor. O fluxo de calor entre o ar ambiente (com temperatura T_a) e o ar no gabinete é dado pela razão entre a diferença de temperatura $T_a - T_i$ e a resistência térmica das paredes, R_{ai} , segundo a *lei de Fourier*. De modo similar, a resistência térmica R_{ei} entre o evaporador e o gabinete determina o fluxo de calor entre eles.

Para evitar a complexidade física associada à migração de massa de refrigerante, responsável pelo fluxo de entalpia entre evaporador e condensador através do compressor, é atribuída uma temperatura fictícia ao compressor, que poder ser modelada como

$$T_p = \gamma \omega, \quad (2)$$

em que ω é a velocidade/frequência de operação (Hz) e γ é um coeficiente de ajuste¹. Desta forma, na medida que T_p aumenta (aumentando-se a velocidade), entalpia é transferida do compressor ao condensador, de maneira inversamente proporcional à também fictícia resistência térmica R_{cp} entre os dois elementos. Além disto, o fluxo de entalpia removido do evaporador pelo condensador é também inversamente proporcional à resistência térmica R_{ec} entre eles.

Para montar o circuito elétrico equivalente utilizando as ideias discutidas, pode-se dispor em paralelo os cinco elementos que trocam energia – o compressor, condensador, evaporador, gabinete e ar ambiente – através de resistências térmicas entre eles, como ilustrado na Fig. 3. Como deve haver uma malha para cada dois elementos adjacentes, o circuito completo apresenta quatro malhas, com correntes (fluxos de energia) q_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Na malha 2 os capacitores que modelam o condensador e evaporador são percorridos com a mesma polaridade pela corrente de malha (q_2) pois é necessário $T_c > T_a > T_e \Rightarrow T_c > T_e$ para que o sistema possa “expulsar” calor para o ar ambiente. Note que, se as polaridades fossem as mesmas, $q_2 > 0$ necessitaria $T_e > T_c$, o que não faria sentido.

2.2 Equilíbrio

Para investigar se essas hipóteses de modelagem são adequadas, pode-se estudar analiticamente o equilíbrio do sistema. Supondo que todas as temperaturas se estabilizaram, deve ser observado que $\bar{q}_c = \bar{q}_e = \bar{q}_i = 0$. Uma vez que, da Fig. 3, $q_c = q_1 - q_2$, $q_e = q_3 - q_2$ e $q_i = q_4 - q_3$, pode ser concluído que $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \bar{q}_4 = \bar{q}$. Agora, considere a chave S fechada. O objetivo é computar todas as temperaturas dadas as condições de contorno \bar{T}_a e $\bar{T}_i < \bar{T}_a$. Aplicando-se a lei de Kirchhoff das malhas à 4ª malha, obtém-se

¹Aqui temos um aspecto “caixa-preta” (empírico) do modelo.

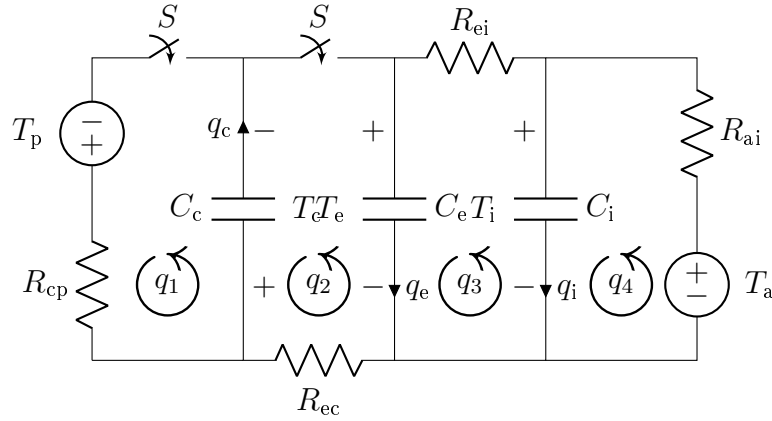


Figura 3: Circuito elétrico equivalente de um ciclo de refrigeração baseado em compressão de vapor. Adaptado do artigo de Schné, Jaskó e Simon (2015).

$$\bar{q} = \frac{\bar{T}_a - \bar{T}_i}{R_{ai}}, \quad (3)$$

o que corresponde à carga térmica penetrando o congelador. Empregando o mesmo método na 3^a malha resulta em

$$-\bar{T}_e + \bar{T}_i - R_{ei}\bar{q} = 0 \Rightarrow \bar{T}_e = \bar{T}_i - R_{ei}\bar{q}. \quad (4)$$

Sabendo que $\bar{q} > 0$, pode ser concluído que $\bar{T}_e < \bar{T}_i < \bar{T}_a$, como esperado. Ademais, se \bar{T}_a aumenta, também o faz \bar{q} , e a temperatura do evaporador \bar{T}_e tem de tornar-se ainda mais baixa para que a carga térmica adicional possa ser removida do gabinete, permitindo que \bar{T}_i mantenha-se no valor desejado. Aplicando a lei das malhas à 2^a malha resulta em

$$\bar{T}_c - R_{ec}\bar{q} + \bar{T}_e = 0 \Rightarrow \bar{T}_c = R_{ec}\bar{q} - \bar{T}_e. \quad (5)$$

Isto significa que, se o fluxo de calor \bar{q} penetrando o gabinete crescer, e T_e decrescer – como já concluído –, a temperatura do condensador irá aumentar, o que também corresponde ao comportamento esperado de um congelador. No que tange à 1^a malha, a relação algébrica obtida é

$$\bar{T}_p - R_{cp}\bar{q} - \bar{T}_c = 0 \Rightarrow \bar{T}_p = \bar{T}_c + R_{cp}\bar{q}. \quad (6)$$

Novamente, se $\bar{q} > 0$, pode ser inferido que $\bar{T}_p > \bar{T}_c$, conforme o que se pretendia quando se propôs o modelo fictício de temperatura do compressor em (2).

Finalmente, o equilíbrio do sistema com o compressor desligado é trivial: abrindo-se a chave S faz com que $\bar{q}_1 = \dots = \bar{q}_4 = 0$, ocasionando $\bar{T}_e = \bar{T}_i = \bar{T}_a$, que é o equilíbrio térmico natural esperado de um congelador desligado.

2.3 Modelo transiente de temperaturas

A formulação do modelo dinâmico inicia-se com a declaração da dinâmica de cada capacitor térmico, como segue:

$$\begin{aligned} C_i \dot{T}_i(t) &= q_i(t) = q_4(t) - q_3(t) \\ C_e \dot{T}_e(t) &= q_e(t) = q_3(t) - q_2(t) \\ C_c \dot{T}_c(t) &= q_c(t) = q_1(t) - q_2(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Tenha em mente aqui que, na verdade, há dois modelos dinâmicos: uma para quando o compressor está desligado ($S = 0$) e outro para quando ele está ligado ($S = 1$). Portanto, a composição destes modelos por meio da entrada S produz um modelo contínuo suave por partes – em inglês, *piecewise smooth continuous system* (PWS) (SIMPSON, 2010). As expressões das correntes de malha podem ser obtidas aplicando-se novamente a lei de Kirchhoff das tensões a cada malha, resultando em

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{T_p - T_c}{R_{cp}} S \\ q_2 &= \frac{T_c + T_e}{R_{ec}} S \\ q_3 &= \frac{T_i - T_e}{R_{ei}} \\ q_4 &= \frac{T_a - T_i}{R_{ai}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Observe na Fig. 3 que q_1 e q_2 devem ser nulas se $S = 0$. Finalmente, substituindo as expressões das correntes de malha de (8) em (7) chega-se ao seguinte conjunto de EDOs:

$$\begin{aligned} C_i \dot{T}_i(t) &= \frac{T_a(t) - T_i(t)}{R_{ai}} - \frac{T_i(t) - T_e(t)}{R_{ei}} \\ C_e \dot{T}_e(t) &= \frac{T_i(t) - T_e(t)}{R_{ei}} - S(t) \frac{T_c(t) + T_e(t)}{R_{ec}} \\ C_c \dot{T}_c(t) &= S(t) \left(\frac{T_p(t) - T_c(t)}{R_{cp}} - \frac{T_c(t) + T_e(t)}{R_{ec}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Ao executar este modelo, quando o compressor é desligado força-se $T_c(t) = T_a(t)$, ou seja, a dinâmica de resfriamento do condensador (perda de calor para o ar ambiente) é desprezada.

Por último, cabe observar que o modelo em (9) possui 3 entradas, T_a , S e ω ; e 3 saídas, T_i , T_e e T_c .

3 Exercícios

Importante: inclua entre os anexos todo o código utilizado para a resolução dos exercícios.

Trabalho analítico

1. Discretize o modelo em (9) utilizando o método de diferença progressiva (*Euler forward*), isolando, em cada equação, os próximos valores ($k + 1$) de T_i , T_e e T_c , colocando o modelo discretizado na forma de *regressão linear² multivariável*:

$$\mathbf{y}(k + 1) = \varphi^T(k) \theta, \quad (10)$$

em que $\mathbf{y} = [T_i \ T_e \ T_c]^T$ e $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{n_\theta}]^T$ é composto pelos n_θ coeficientes que multiplicam os regressores. Tenha em mente que os coeficientes θ_i , $i \in \{1, \dots, n_\theta\}$, são *funções* dos parâmetros do modelo em (9). Seguem algumas instruções importantes.

- Procure definir os regressores tal que n_θ coincida com o número de parâmetros do modelo fenomenológico que se deseja identificar, na expectativa de que haja um mapeamento exato de $\theta_1 \dots \theta_{n_\theta}$ nos parâmetros do modelo em (9).

²Lembre-se de que a linearidade deve estar nos parâmetros, e não (necessariamente) nos sinais medidos (regressores).

- Se algum coeficiente θ_i não possuir nenhum grau de liberdade – ou seja, for composto *somente* por constantes já conhecidas –, defina uma nova saída que elimine o problema. Por exemplo, pode-se propor uma saída $T_i(k+1) - T_i(k)$ para evitar que a constante 1 faça parte de θ , dessa forma eliminando $T_i(k)$ do vetor de regressores.

Questão: com a regressão linear encontrada, é possível mapear $\theta_1 \dots \theta_{n_\theta}$ nos parâmetros do modelo em (9)? Se for possível, indique o mapeamento, ou seja, as funções com as quais se calculam os parâmetros do modelo fenomenológico a partir dos elementos de θ .

2. Proponha mudanças no modelo em (9) para considerar os seguintes fenômenos.

- O calor gerado pelo ventilador de convecção forçada no gabinete, o qual consome uma potência elétrica $\dot{W}_e = 11.5 \text{ W}$. Importante: o ventilador é acionado juntamente com o compressor.
- A troca térmica entre condensador e ar ambiente, *que ocorre a todo instante*, mas é particularmente importante para representar a dinâmica de resfriamento quando o compressor é desligado, desprezada por Schné, Jaskó e Simon (2015). Para isto considere uma resistência térmica R_{ca} entre condensador e ar ambiente.

Feito isso, discretize este novo modelo da mesma forma que no item 1.

Trabalho numérico

Foram realizados testes experimentais com o sistema em uma câmara climatizada, resultando nos conjuntos de dados indicados na Tab. 2, obtidos com controle *on-off* da temperatura do gabinete. Cada conjunto define um ponto de operação do sistema e *deve ser considerado pelo grupo indicado*.

Grupo	T_a [°C]	ω [RPM]	arquivo MS Excel
G1 e G9	20	1800	dados_20_1800.xlsx
G2 e G10	20	2100	dados_20_2100.xlsx
G3 e G11	20	2400	dados_20_2400.xlsx
–	20	2700	dados_20_2700.xlsx
G4 e G12	20	3000	dados_20_3000.xlsx
–	20	3300	dados_20_3300.xlsx
G5 e G13	20	3600	dados_20_3600.xlsx
–	32	2700	dados_32_2700.xlsx
G6 e G14	32	3000	dados_32_3000.xlsx
G7 e G15	32	3300	dados_32_3300.xlsx
G8 e G16	32	3600	dados_32_3600.xlsx

Tabela 2: Conjuntos de dados experimentais para identificação do congelador.

O arquivo `medicoes.odt` indica, em fundo verde, o nome das colunas que contêm os sinais de interesse para a identificação. O script `setup.m` fornece um exemplo de como extrair os dados do arquivo pré-processado `dados_20_2100.txt`, obtidos a partir do arquivo Microsoft Excel correspondente.

3. Utilizando o conjunto de dados atribuído ao seu grupo, identifique o modelo discretizado *aperfeiçoado* do item 2. Para isto você terá que formular o vetor de saída \mathbf{Y} e a matriz de regressores Φ na equação

$$\mathbf{Y} = \Phi\theta + \mathbf{V} \quad (11)$$

para as N amostras, sendo \mathbf{V} o ruído branco (sinal não medido), e logo então encontrar uma estimativa $\hat{\theta}$ por meio do método MQ. *Atenção:* atente para as unidades dos coeficientes.

4. Com a estimativa $\hat{\theta}$ encontrada no item 3, simule o mesmo modelo discretizado com os mesmos sinais de entrada considerados na identificação. Utilize como condições iniciais os valores iniciais das respectivas medidas.
 - (a) Visando a uma análise *qualitativa*, apresente um gráfico comparativo para cada saída *medida* com a sua respectiva saída *estimada* (gráficos sobrepostos, com legenda).
 - (b) Visando a uma análise *quantitativa*, construa uma tabela em que os seguintes indicadores de desempenho sejam utilizados para cada uma das saídas $y \in \{T_i, T_e, T_c\}$:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2 ; \quad (12)$$

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|y(k) - \hat{y}(k)|}{|y(k)|} ; \quad (13)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2}{\sum_{k=1}^N [y(k) - \bar{y}]^2} . \quad (14)$$

5. Definindo o vetor de parâmetros do modelo fenomenológico em (9) como

$$\mathbf{p} = [R_{ai} \quad R_{ei} \quad R_{ec} \quad R_{cp} \quad C_i \quad C_e \quad C_c \quad \gamma]^T , \quad (15)$$

ao qual é adicionado R_{ca} no caso do modelo aperfeiçoado no item 2, resolva as seguintes questões.

- (a) Considerando novamente o conjunto de dados atribuído ao seu grupo na Tab. 2, realize o procedimento de identificação do modelo fenomenológico *original*, em (9), da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 \beta_i [y_i(k) - \hat{y}_i(k, \mathbf{p})]^2 , \quad (16)$$

em que $\beta_i \geq 1$ é o peso de cada saída. Você pode aumentar o peso de uma determinada saída na tentativa de melhorar a identificação do canal entrada-saída correspondente. Para realizar a minimização sugere-se utilizar, no caso do Matlab, a função `fmincon`, que permite considerar restrições nas variáveis de busca (por exemplo, os parâmetros físicos não podem ter valor negativo). *Importante:* para obter a estimativa das saídas em cada instante k em (16), considere as estimativas das saídas no instante anterior ($k - 1$), e não o seu valor medido (saída do processo real) no instante anterior.

- (b) Compare o valor identificado de C_i com uma estimativa dada por

$$C_i = c_v \rho V , \quad (17)$$

em que c_p , ρ e V são o calor específico a volume constante³, densidade (massa específica) e volume do ar no gabinete.

- (c) Repita o procedimento de identificação por minimização do erro quadrático em 16, desta vez para o modelo fenomenológico *aperfeiçoado* no item 2.
 - (d) Apresente os gráficos e tabelas similares aos do item 4 estabelecendo uma comparação entre o sistema real, o modelo original e o modelo aperfeiçoado. Comente a respeito.
6. Com base na identificação do modelo aperfeiçoado, realize as seguintes tarefas.
- (a) Implemente as EDOs do modelo *aperfeiçoado* no item 2. *Observação*: você pode implementar o modelo no tempo contínuo e utilizar um *solver* (automaticamente feito pelo Simulink/Matlab e Xcos/Scilab), ou trabalhar diretamente com o modelo discretizado.
 - (b) Determine o equilíbrio do sistema para $T_i = -20^\circ\text{C}$ e a temperatura ambiente do seu conjunto de dados, aplique essas condições iniciais no modelo, considere $S(t) = 0$ e avalie se o comportamento de malha aberta faz sentido.
 - (c) Implemente um controlador *on-off* para $T_i(t)$, com banda de histerese em $-20 \pm 2^\circ\text{C}$, que atue em $S(t)$, sendo a velocidade do compressor, quando ligado, fixada no valor correspondente ao conjunto de dados considerado para a identificação.
 - (d) Realize uma simulação na qual o congelador, inicialmente em equilíbrio térmico com o ar ambiente, é ligado. O sistema entrará em uma fase de *pulldown*, em que T_i será trazido para dentro da banda de histerese. Neste momento o sistema entrará no chamado *regime transiente periódico*, em que T_i passará a oscilar aproximadamente dentro da banda de histerese. Logo então aplique uma rampa na temperatura ambiente ao longo de 12 horas até T_a aumentar em 10°C , mantendo-se nesse valor a partir daí. Apresente os seguintes gráficos e comente sobre os resultados:
 - Fig. 1: T_a , T_i , T_e e T_c ;
 - Fig. 2: período e razão cíclica do sinal de ω resultante.

³Supondo que o gabinete é hermético – i.e. o volume de ar no compartimento é constante –, de modo que variações de temperatura alteram (a rigor) a pressão.

Referências

SCHNé, T.; JASKó, S.; SIMON, G. Dynamic models of a home refrigerator. In: *5th International Conference on Recent Achievements in Mechatronics, Automation, Computer Science and Robotics*. [S.l.: s.n.], 2015. v. 1, p. 103–112.

SIMPSON, D. J. W. *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*. [S.l.]: WORLD SCIENTIFIC, 2010.