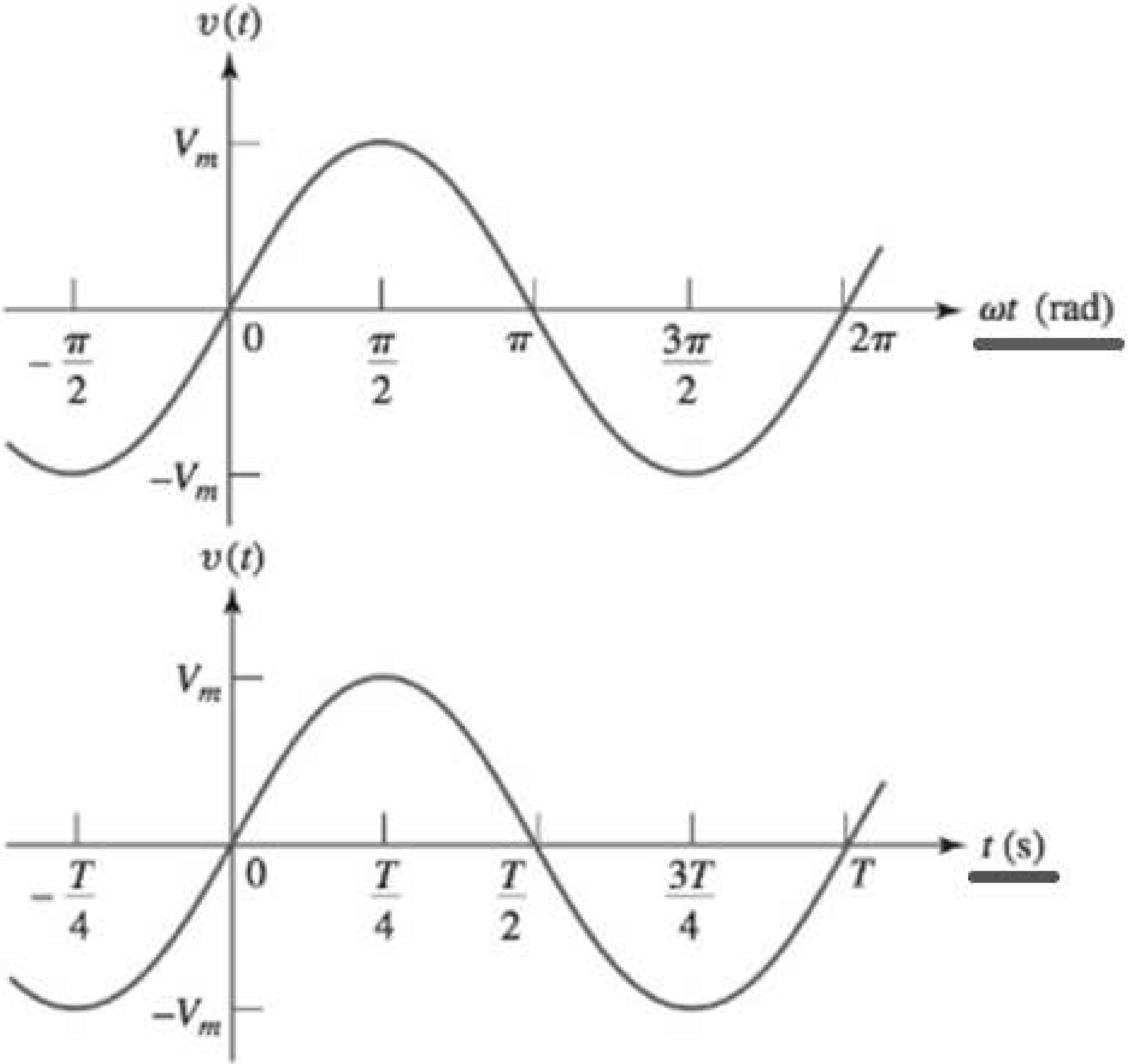
Lição 1

Coordenação de Engenharia Elétrica

Apucarana, 2022

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Funções Senoidais



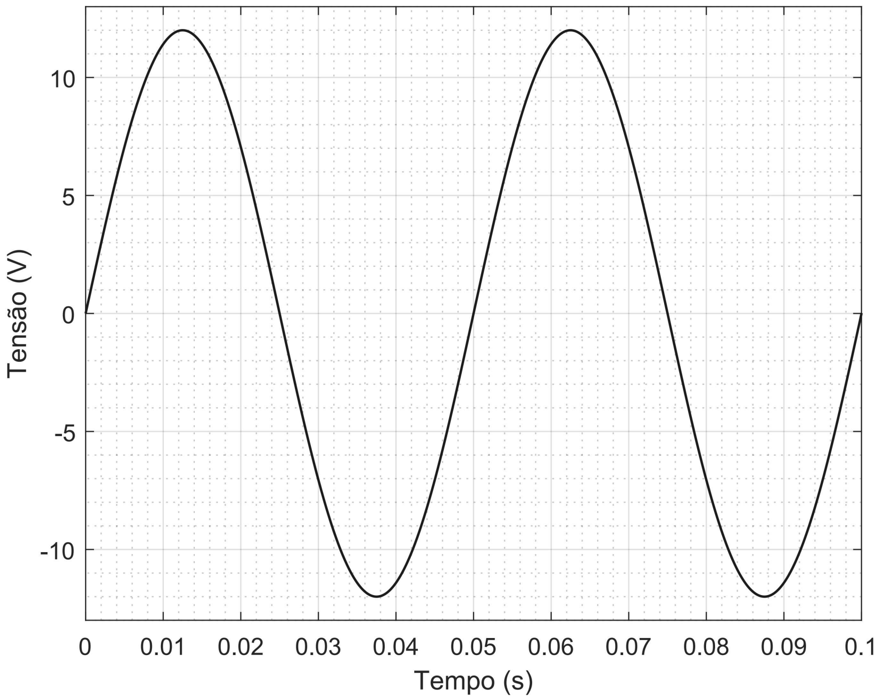
$$v(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t)$$

- V_p: amplitude de pico da senoide
- ω: frequência angular (rad/s)
- ωt: argumento da senoide (rad)

Período: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (s)

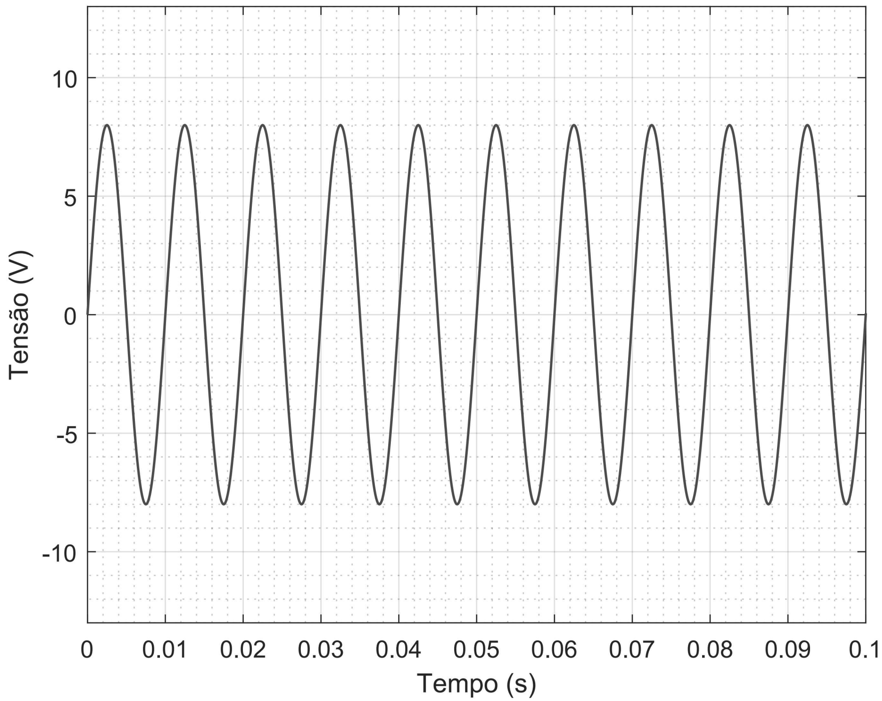
Frequência: $f = \dfrac{1}{T}$ (Hz)

Exemplos: Função trigonométrica Seno



$$v(t) = 12\,\text{sen}(40\pi t)$$

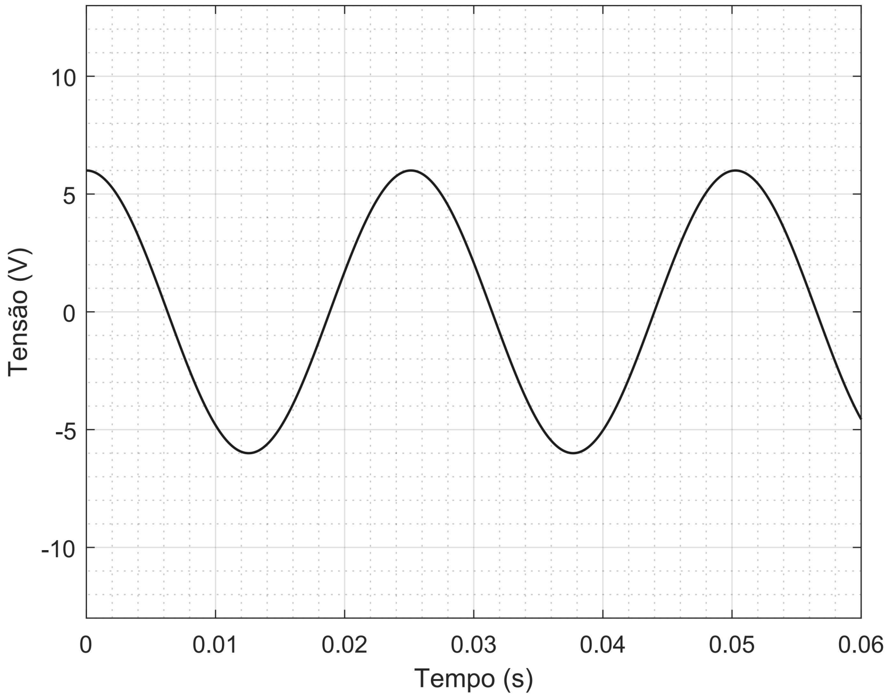
- Amplitude de pico: 12 V
- Freq. ang.: $\omega = 40\pi \approx 125,7$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/40\pi = 0,05$ s
- Frequência: $f = 1/0,05 = 20$ Hz



$$v(t) = 8\,\text{sen}(200\pi t)$$

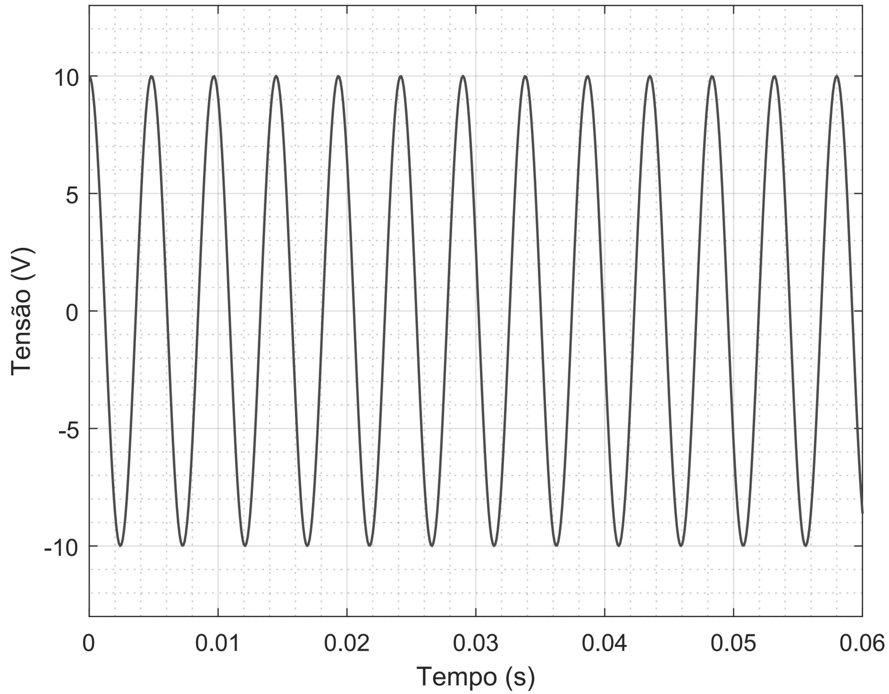
- Amplitude de pico: 8 V
- Freq. ang.: $\omega = 200\pi \approx 628,3$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/200\pi = 0,01$ s
- Frequência: $f = 1/0,01 = 100$ Hz

Exemplos: Função trigonométrica Cosseno



$$v(t) = 6\cos(250t)$$

- Amplitude de pico: 6 V
- Freq. ang.: $\omega = 250$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/250 \approx 25,13$ ms
- Frequência: $f = 250/2\pi \approx 39,79$ Hz

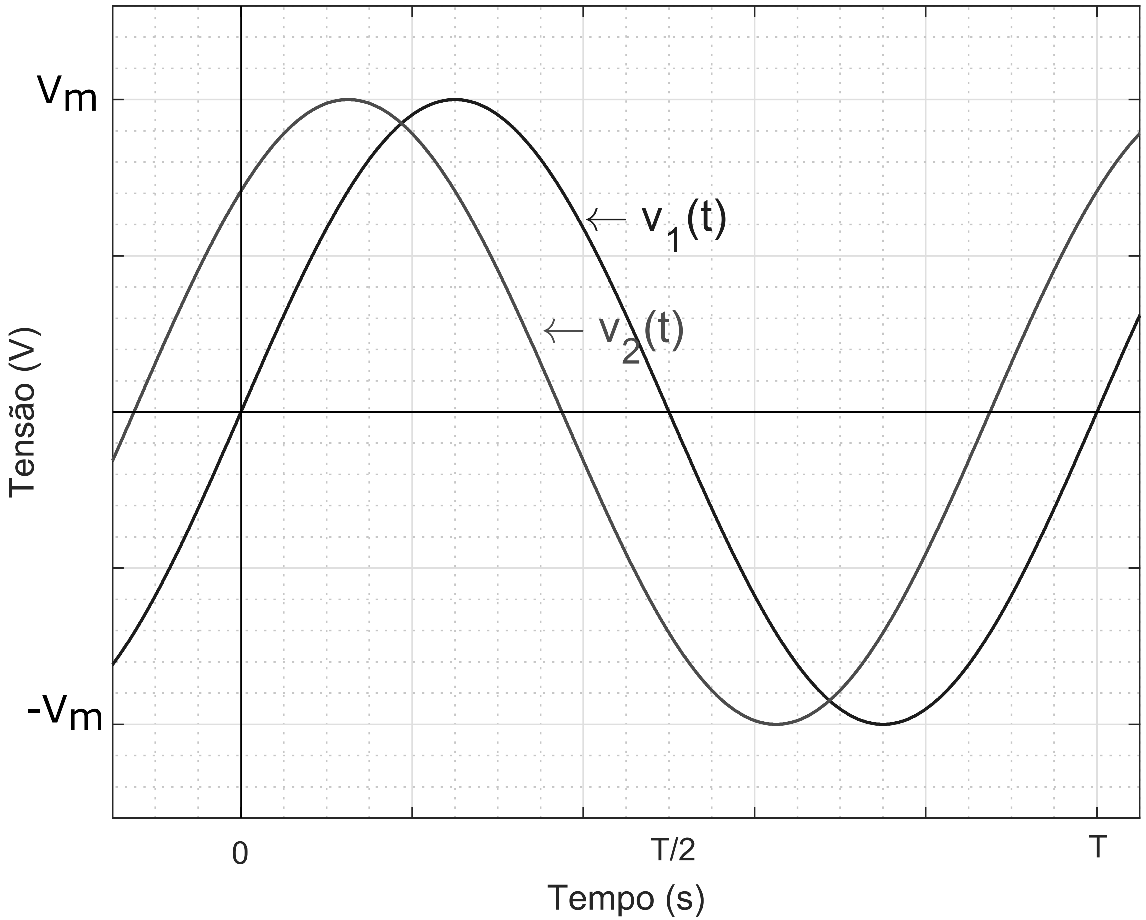


$$v(t) = 10\cos(1300t)$$

- Amplitude de pico: 10 V
- Freq. ang.: $\omega = 1300$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/1300 = 4,83$ ms
- Frequência: $f = 1300/2\pi \approx 206,9$Hz

Acrescentando um ângulo de fase (θ)

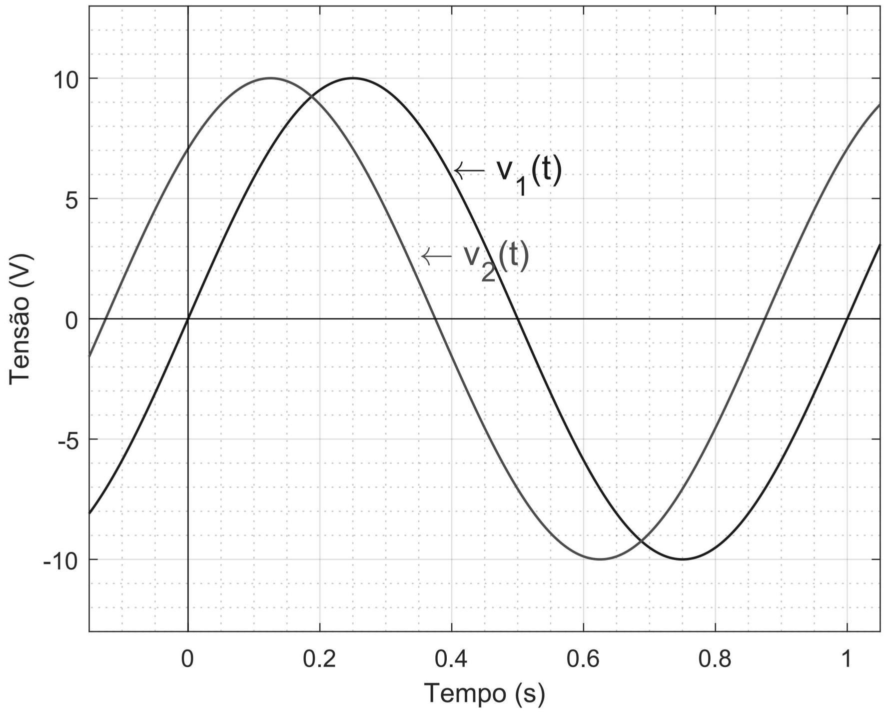
$v_1(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t)$
$v_2(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$

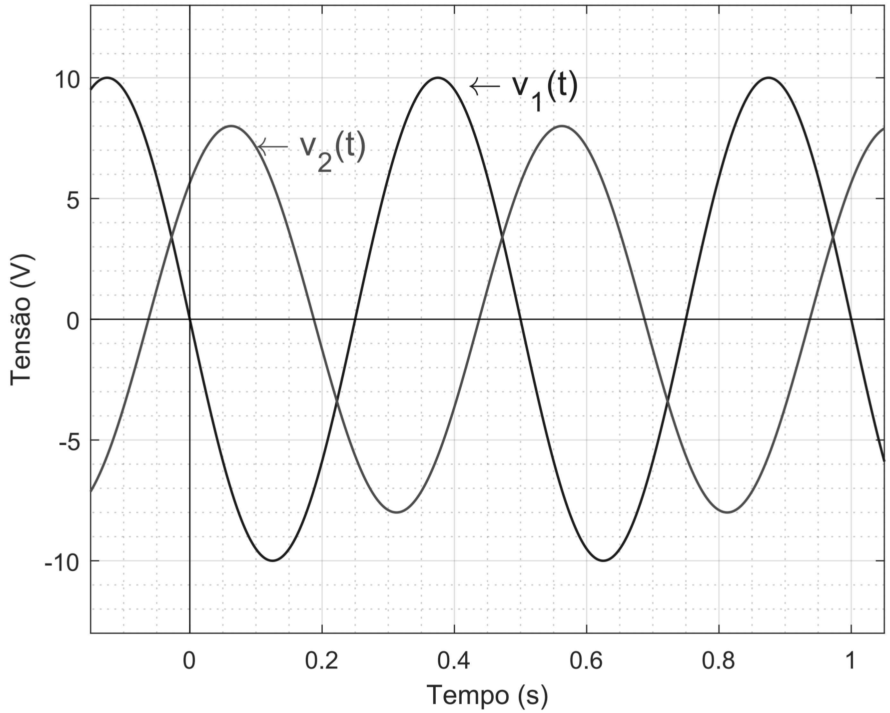


- θ: ângulo de fase (graus ou rad)

As duas senoides estão **defasadas** entre si de um ângulo θ.
$v_2(t)$ está **adiantada** de θ em relação a $v_1(t)$ (pois chega no pico primeiro); ou
$v_1(t)$ está **atrasada** de θ em relação a $v_2(t)$ (pois chega no pico depois)

Exemplos:





$$v_1(t) = 10\,\text{sen}(2\pi t)$$
$$v_2(t) = 10\,\text{sen}(2\pi t + \frac{\pi}{4})$$

- em relação a $v_2(t)$ está **adiantada** de $\pi/4$ rad (45°) em relação a $v_1(t)$

$$v_1(t) = 10\cos(4\pi t + 90^\circ)$$
$$v_2(t) = 8\cos(4\pi t - 45^\circ)$$

- $v_2(t)$ está **atrasada** de $90 - (-45) = 135^\circ$em relação a $v_1(t)$

Observações importantes

- O conceito de defasagem (ou diferença de fase) só é aplicável quando se compara duas senoides de mesma frequência.
- Deve-se avaliar com maior cuidado a defasagem entre uma função **seno** e outra **cosseno**.
- Dizer que $v_2(t)$ está **adiantada** de 45° em relação a $v_1(t)$ é o mesmo que dizer $v_2(t)$ está **atrasada** de 315° em relação a $v_1(t)$. Contudo, adota-se a primeira forma (especifica-se sempre a defasagem entre 0° e 180°).
- Uma notação do tipo $v(t) = 10\,\text{sen}(2\pi t + 45^\circ)$, com o ângulo de fase expresso em graus, é mais comumente utilizada. Contudo, deve-se notar que existe um conflito de unidades no argumento da senoide: $2\pi t$ radianos $+$ 45 graus.
- A defasagem entre duas senoides pode ser determinada mais facilmente por meio de fasores, como será estudado na sequência.

Senos e cossenos

Uma função **seno** pode ser reescrita como uma função **cosseno**, e vice-versa, modificando-se o ângulo de fase da respectiva função, de acordo com as seguintes relações:

$$\mp sen(x) = cos(x \pm 90^\circ)$$
$$\pm cos(x) = sen(x \pm 90^\circ)$$

Exemplos:

- $v_1(t) = 180\,\mathrm{sen}(40t + 23^\circ) = 180\cos(40t + 23^\circ - \mathbf{90}^\circ) = 180\cos(40t - 67^\circ)$ V
- $i_1(t) = 15\,\mathrm{sen}(5t + 100^\circ) = 15\cos(5t + 100^\circ - \mathbf{90}^\circ) = 15\cos(5t + 10^\circ)$ A
- $v_2(t) = 30\cos(200t - 48^\circ) = 30\,\mathrm{sen}(200t - 48^\circ + \mathbf{90}^\circ) = 30\cos(200t + 42^\circ)$ mV

Trabalhando com as senoides

Exemplo 1

Dada a senoide $v(t) = 130\cos(5\pi t + 60^\circ)V$, determine o instante de tempo t_1 em que $v(t)$ atinge o primeiro pico positivo após t = 0.

Solução: Primeiramente, deve-se reescrever o argumento da senoide para uma mesma unidade (graus ou radianos). Transformando o ângulo de fase para radianos, tem-se: $v(t) = 130\cos(5\pi t + \frac{\pi}{3})$.

A função cosseno possui valor máximo quando o seu argumento assume os ângulos 0, 2π, 4π, 6π, etc. Portanto, v(t) atinge o primeiro pico positivo após t = 0 quando o argumento da função cosseno vale 2π rad, isto é,

para $t = t_1 \Rightarrow 5\pi t_1 + \frac{\pi}{3} = 2\pi$

$\mathbf{t_1 = \frac{1}{3} \approx 0,333}$ **s**.

Trabalhando com as senoides

Exemplo 2

Faça o gráfico da senoide $v(t) = 130\cos(5\pi t + 60^\circ)V$, sem o auxílio de um computador ou calculadora gráfica.

Solução: passo 1: A senoide descreve uma tensão com amplitude de pico de 130V e **período** $T = 2\pi/5\pi = 0,4$ s. Portanto, a escala mínima no eixo das ordenadas deve ser de -130 a 130 V, e a escala no eixo das abcissas pode ser estabelecida como 0 a 0,8 s, o que abrange dois períodos da senoide.
passo 2: determina-se alguns valores chave de v(t) dentro do intervalo 0 a 0,8 s, que servirão de guias para a construção do gráfico.

Trabalhando com as senoides

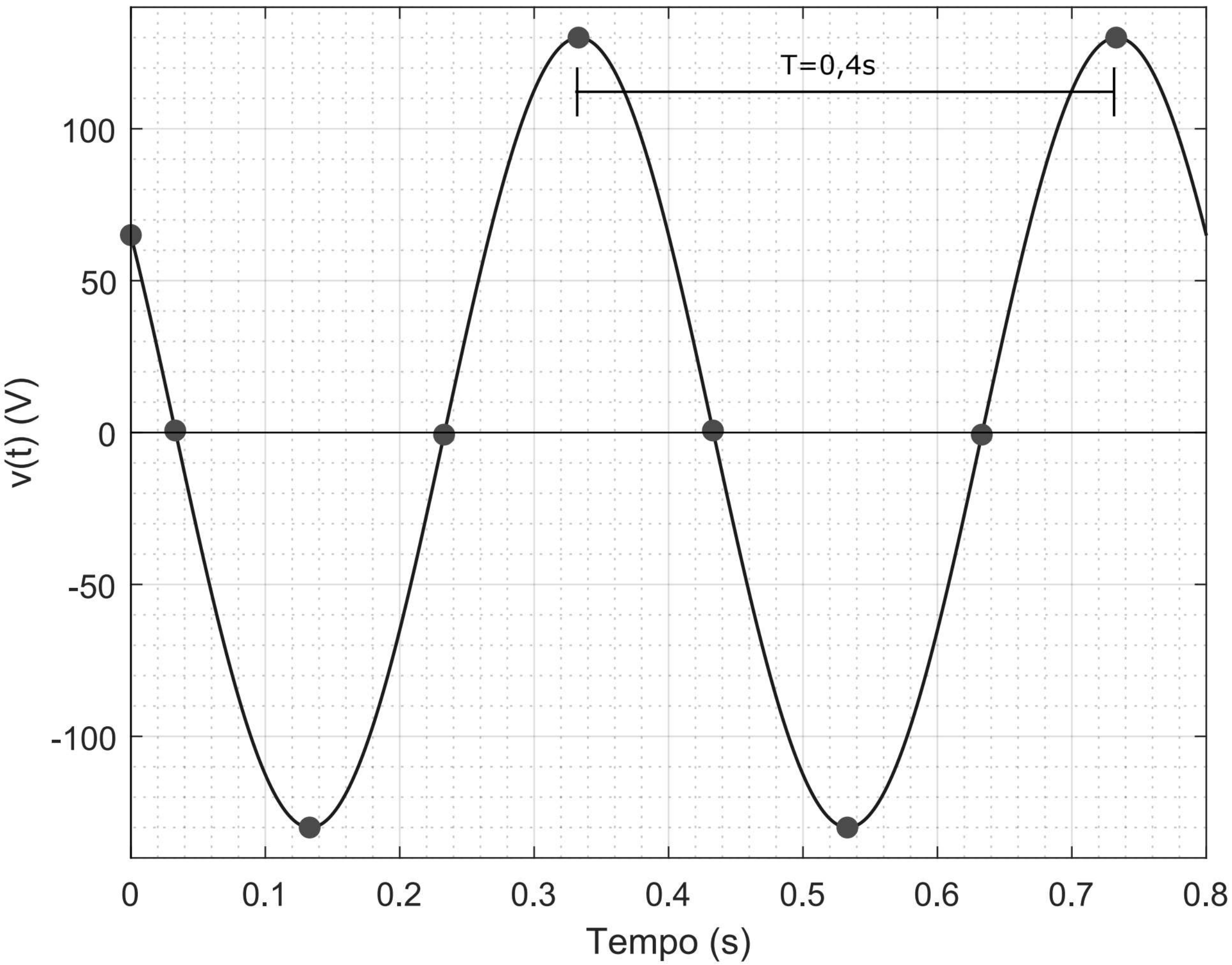
(Exemplo 2 - continuação...)

- instante inicial: para $t = 0s \Rightarrow v(0) = 130cos(\pi/3) = 65V$;
- primeiro pico positivo: do Exemplo 1, para $t \approx 0,333s \Rightarrow v(1/3) = 130V$;
- segundo pico positivo: ocorre **um período** após o primeiro pico positivo, em $t = 0,333 + T = 0,733s$;
- picos negativos: ocorrem em intervalos de **meio período** de cada pico positivo, em $t = 0,333 - \frac{T}{2} = 0,133s$ e em $t = 0,333 + \frac{T}{2} = 0,533s$.
- cruzamentos por zero: ocorrem em intervalos de **um quarto de período** de cada pico positivo ou negativo, em $t = 0,133 - \frac{T}{4} = 0,033s$; em $t = 0,333 - \frac{T}{4} = 0,233s$; em $t = 0,333 + \frac{T}{4} = 0,433s$; em $t = 0,533 + \frac{T}{4} = 0,633s$.

Assim, tem-se os seguintes pares ordenados (t, v(t)):
(0, 65); (0,333, 130); (0,733, 130); (0,133, -130); (0,533, -130);(0,033, 0); (0,233, 0); (0,433, 0); (0,633, 0).

Trabalhando com as senoides

(Exemplo 2 - continuação...) passo 3: no plano cartesiano, anota-se os pares ordenados calculados no passo anterior. Em seguida, um esboço do gráfico da função pode ser traçado, como mostrado abaixo.



Atividades

Leitura Complementar

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seção 10.2

Atividade 1

Resolva os Exercícios **1 a 3** do **Caderno de Exercícios**.

Sugestões de Exercícios Complementares

[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 10, Exercícios 3 e 5

Lição 2

Números Complexos

Seja um número complexo C. Este número pode ser expresso de três formas distintas:

- Em coordenadas retangulares: $C = x + jy$;
- Em coordenadas polares: $C = r\underline{/\theta}$;
- Na forma exponencial: $C = r \cdot e^{j\theta}$;

$$j = \sqrt{-1}$$

Onde:

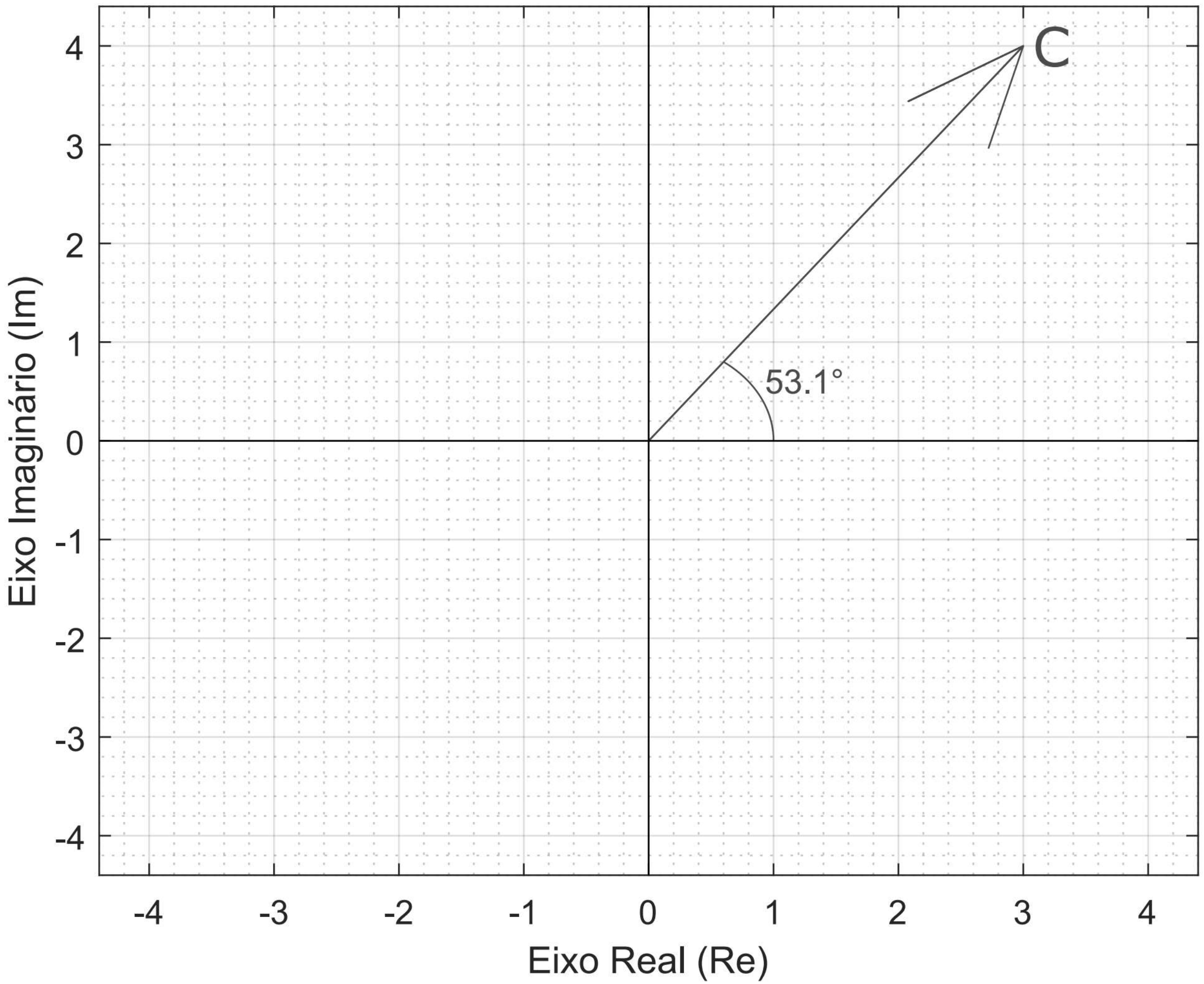
- x: parte **real** do número complexo;
- y: parte **imaginária** do número complexo
- r: **módulo** do número complexo
- θ: **ângulo** do número complexo

Números Complexos

Representação no Plano Complexo:

Exemplo 1:

- Em coordenadas retangulares: $C = 3 + j4$
- Em coordenadas polares: $C = 5\underline{/53,13^\circ}$
- Na forma exponencial: $C = 5 \cdot e^{j \cdot 53,13^\circ}$

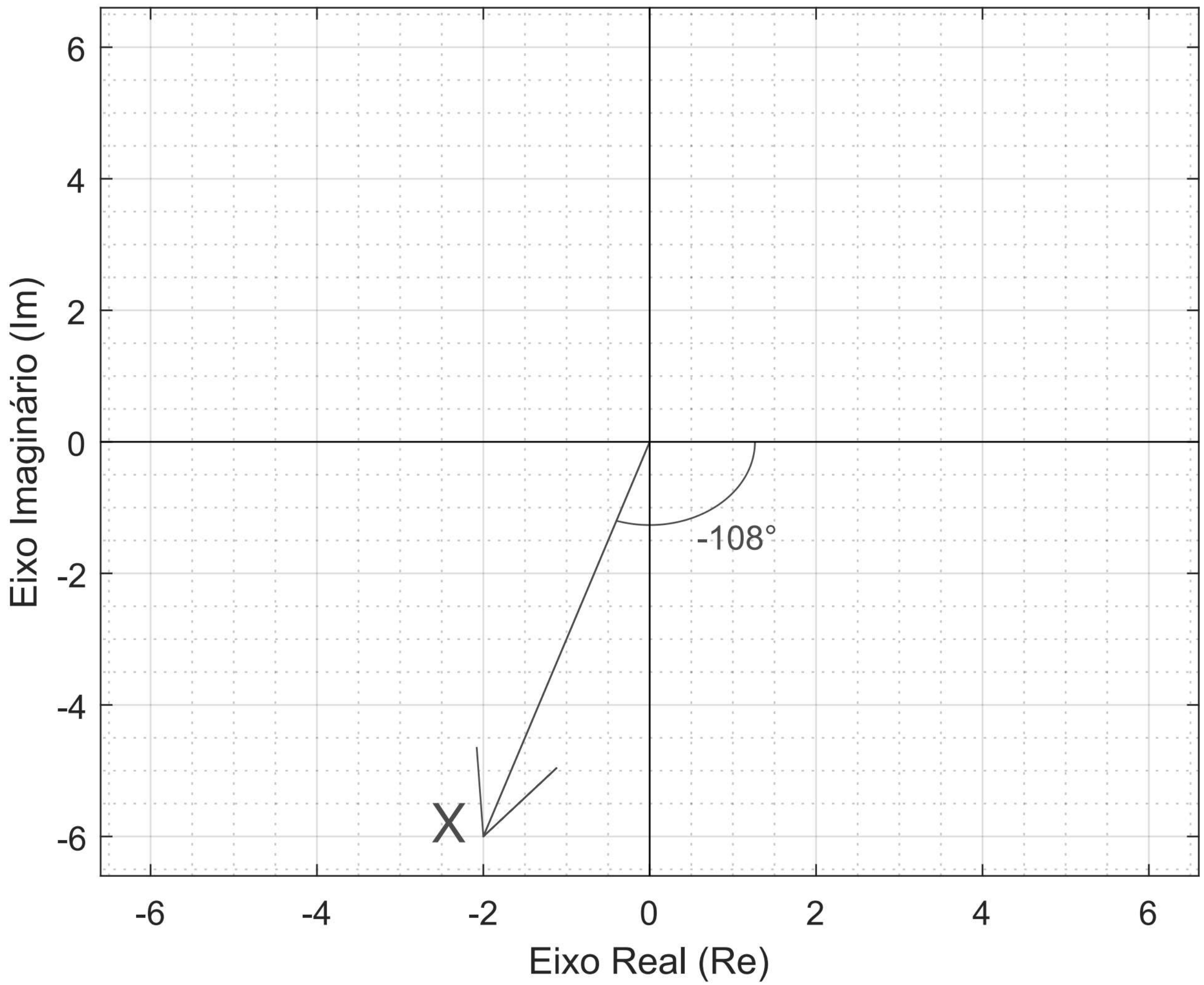


Números Complexos

Representação no Plano Complexo:

Exemplo 2:

- Em coordenadas retangulares: $X = -2 - j6$
- Em coordenadas polares: $X = 7,834\underline{/-108,4^{\circ}}$
- Na forma exponencial: $X = 7,834 \cdot e^{j \cdot -108,4^{\circ}}$



Conversão forma retangular para forma polar

Se $C = x + jy$:

- Módulo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Ângulo:

$$\theta = \begin{cases} tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0; \\ 180^\circ - tg^{-1}\left(\frac{y}{-x}\right), & x < 0. \end{cases}$$

Então, $C = r\underline{/\theta}$.

Exemplo: $C = 5 - j8$:

- Módulo:
  $r = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{89} \approx 9,434$
- Ângulo:
  $\theta = tg^{-1}\left(\frac{-8}{5}\right) \approx -57,9^\circ$

Portanto, $C = 9,434\underline{/-57,9^\circ}$

Conversão forma polar para forma retangular

Se $C = r\underline{/\theta}$:

- Parte real:

$$x = r \cdot cos(\theta)$$

- Parte imaginária:

$$y = r \cdot sen(\theta)$$

Então, $C = x + jy$.

Exemplo: $C = 45\underline{/115^\circ}$:

- Parte real:
  $x = 45\cos(115^\circ) \approx -19,02$
- Parte imaginária:
  $y = 45\,\text{sen}(115^\circ) \approx 40,78$

Portanto,
$C = -19,02 + j \cdot 40,78$

Operações com números complexos

Adição e subtração: podem ser calculadas mais facilmente quando os operandos estão representados em coordenadas retangulares.

Se $C_1 = x_1 + jy_1$ e $C_2 = x_2 + jy_2$, então:

- Adição:

$$C_1 + C_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

- Subtração:

$$C_1 - C_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Exemplo:
$C_1 = 8 + j15$ e
$C_2 = 10 + j6$,

- Adição:
  $C_1 + C_2 =$
  $(8 + 10) + j(15 + 6) = 18 + j21$
- Subtração:
  $C_1 - C_2 =$
  $(8 - 10) + j(15 - 6) = -2 + j9$

Operações com números complexos

Multiplicação e divisão: podem ser calculadas mais facilmente quando os operandos estão representados em coordenadas polares.

Se $C_1 = r_1\angle\theta_1$ e $C_2 = r_2\angle\theta_2$, então:

- Multiplicação:

$$C_1 \cdot C_2 = (r_1 \cdot r_2)\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

- Divisão:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplo:
$C_1 = 54\angle 28^\circ$ e
$C_2 = 9\angle -132^\circ$,

- Multiplicação:
  $C_1 \cdot C_2 =$
  $(54 \cdot 9)\angle(28 + (-132)) =$
  $486\angle -104^\circ$
- Divisão:
  $\frac{C_1}{C_2} = \frac{54}{9}\angle(28^\circ - (-132^\circ)) =$
  $6\angle 160^\circ$

Observações importantes

- Embora as operações com números complexos necessárias para este curso sejam executadas com o auxílio de calculadora, é necessário sempre realizar uma **análise crítica dos resultados** a fim de identificar erros.
- Alguns exemplos de números complexos nas formas retangular, polar e exponencial, de uso frequente:

$$
\begin{array}{lclll}
C_1 = 8 & \rightarrow & C_1 = 8 + j0 & = 8\underline{/0^\circ} & = 8 \cdot e^{j0^\circ} \\
C_2 = j & \rightarrow & C_2 = 0 + j1 & = 1\underline{/90^\circ} & = 1 \cdot e^{j90^\circ} \\
C_3 = -j & \rightarrow & C_3 = 0 - j1 & = 1\underline{/-90^\circ} & = 1 \cdot e^{-j90^\circ} \\
C_4 = -6 & \rightarrow & C_4 = -6 + j0 & = 6\underline{/180^\circ} & = 6 \cdot e^{j180^\circ} \\
C_5 = \dfrac{1}{j} & \rightarrow & C_5 = \dfrac{1}{j} = -j & &
\end{array}
$$

Atividades

Leitura Complementar

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seção 10.3.

Atividade 1

Descubra como utilizar a sua calculadora para realizar operações com números complexos e conversão de coordenadas entre polares e retangulares. Em seguida, confira os resultados das operações mostradas nos exemplos desta Lição. Inclusive, um dos exemplos apresentados está incorreto. Localize-o e determine o resultado correto.

Atividade 2

Resolva os Exercícios **4 a 6** do **Caderno de Exercícios**.

Sugestões de Exercícios Complementares

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Problemas P 10.3-2, P 10.3-3, P 10.3-4.

Fasores e senoides

- Um **fasor** é um número complexo utilizado para **representar no domínio da frequencia** uma tensão ou corrente senoidal.
- Um fasor denota a amplitude e o ângulo de fase de uma senoide, quando expressa por meio de uma função trigonométrica cosseno.

Seja uma tensão $v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta)$ V. Esta tensão pode ser representada por meio do fasor $\mathbf{V} = V_p \underline{/\theta}$ V.

Seja uma corrente $i(t) = I_p \cos(\omega t + \theta)$ A. Esta corrente pode ser representada por meio do fasor $\mathbf{I} = I_p \underline{/\theta}$ A.

Exemplos:

- $v_1(t) = 12 \cos(50t + 36^\circ)$ V $\rightarrow$ Fasor correspondente: $\mathbf{V_1} = 12\underline{/36^\circ}$ V
- $i_1(t) = 46 \cos(200t - 140^\circ)$ mA $\rightarrow$ Fasor correspondente: $\mathbf{I_1} = 46\underline{/-140^\circ}$ mA
- $i_2(t) = 28 \,\mathrm{sen}(3t + 120^\circ)$ A $\rightarrow$ Fasor correspondente: $\mathbf{I_2} = 28\underline{/30^\circ}$ A

Observações importantes

- Uma senoide é denotada por letra mínuscula, enquanto o fasor correspondente é denotado por letra maiúscula. Alguns autores destacam esta letra em negrito (forma adotada neste documento); outros expressam como uma função da frequência angular, no formato $V(\omega)$ e $I(\omega)$.
- Como é um número complexo, um fasor pode ser representado também na forma retangular ou exponencial.
- Em um circuito elétrico alimentado por uma fonte senoidal, todas as tensões e correntes possuem a mesma frequência angular ω. Por isso, omite-se o termo ωt na representação fasorial.
- O conceito de **domínio da frequência** será melhor explorado e poderá ser melhor compreendido nas aulas seguintes.

Operações com Fasores

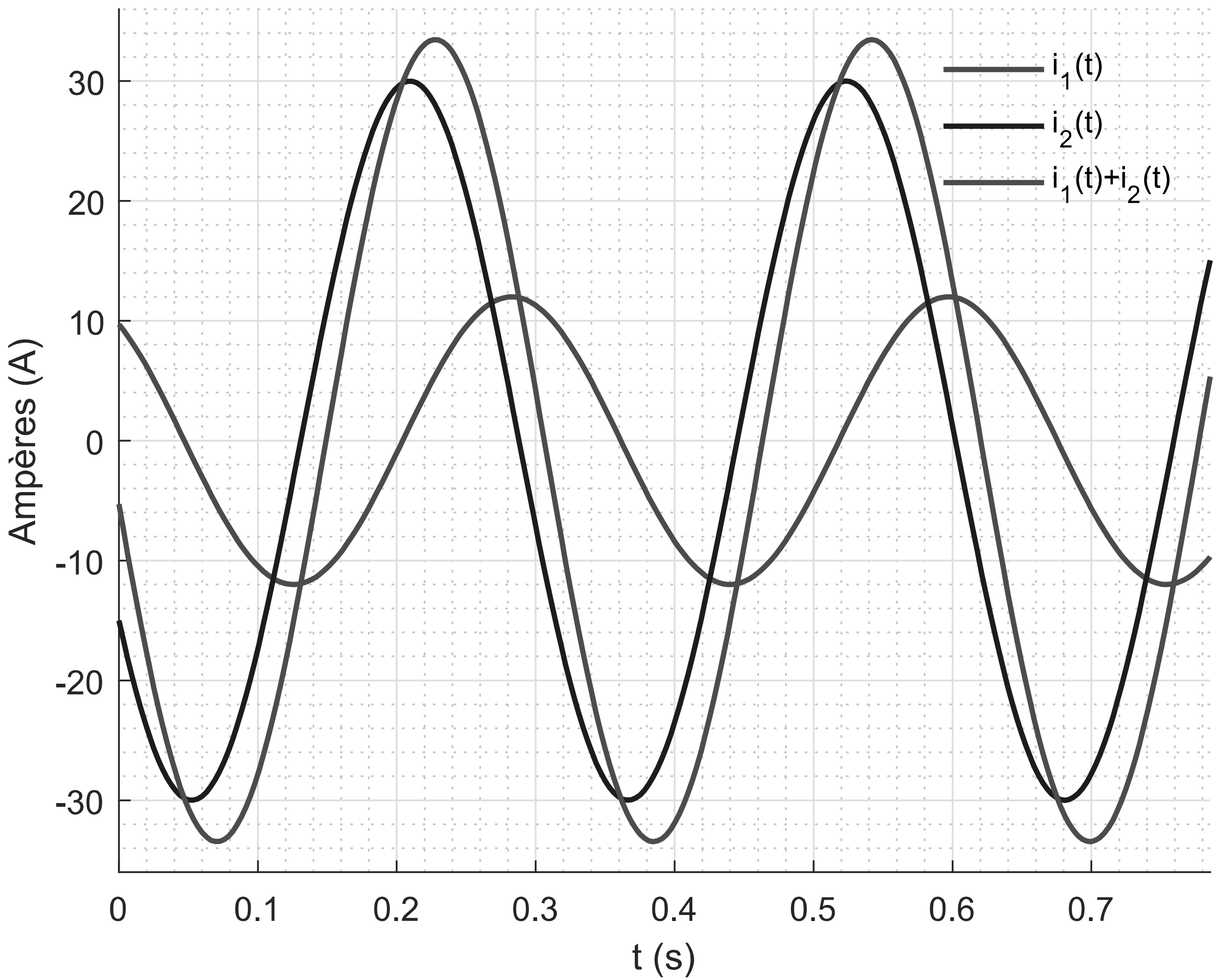
- Em um circuito elétrico alimentado por uma fonte senoidal, todas as tensões e correntes possuem a mesma frequência angular ω. Por isso, omite-se o termo ωt na representação fasorial.
- A soma e a subtração de tensões e correntes senoidais **de mesma frequência** resultam em senoides. Estas operações podem ser feitas mais facilmente por meio dos fasores.

Exemplo: Sejam $i_1(t) = 12\cos(20t + 36^\circ)$ A e $i_2(t) = 30\cos(20t + 120^\circ)$ A.
Determine $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Solução: As duas correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ possuem a mesma frequência angular $\omega = 20$ rad/s. Assim, representando as senoides por meio de fasores, tem-se: $\mathbf{I_1} = 12\underline{/36^\circ}$ A e $\mathbf{I_2} = 30\underline{/120^\circ}$ A.
A soma no domínio dos fasores é $\mathbf{I_3} = \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} = 12\underline{/36^\circ} + 30\underline{/120^\circ} = 33,46\underline{/99,1^\circ}$ A.

Transformando $\mathbf{I_3}$ para o domínio do tempo, com $\omega = 20$ rad/s, tem-se:
$i_3(t) = 33,46\cos(20t + 99,1^\circ)$ A.

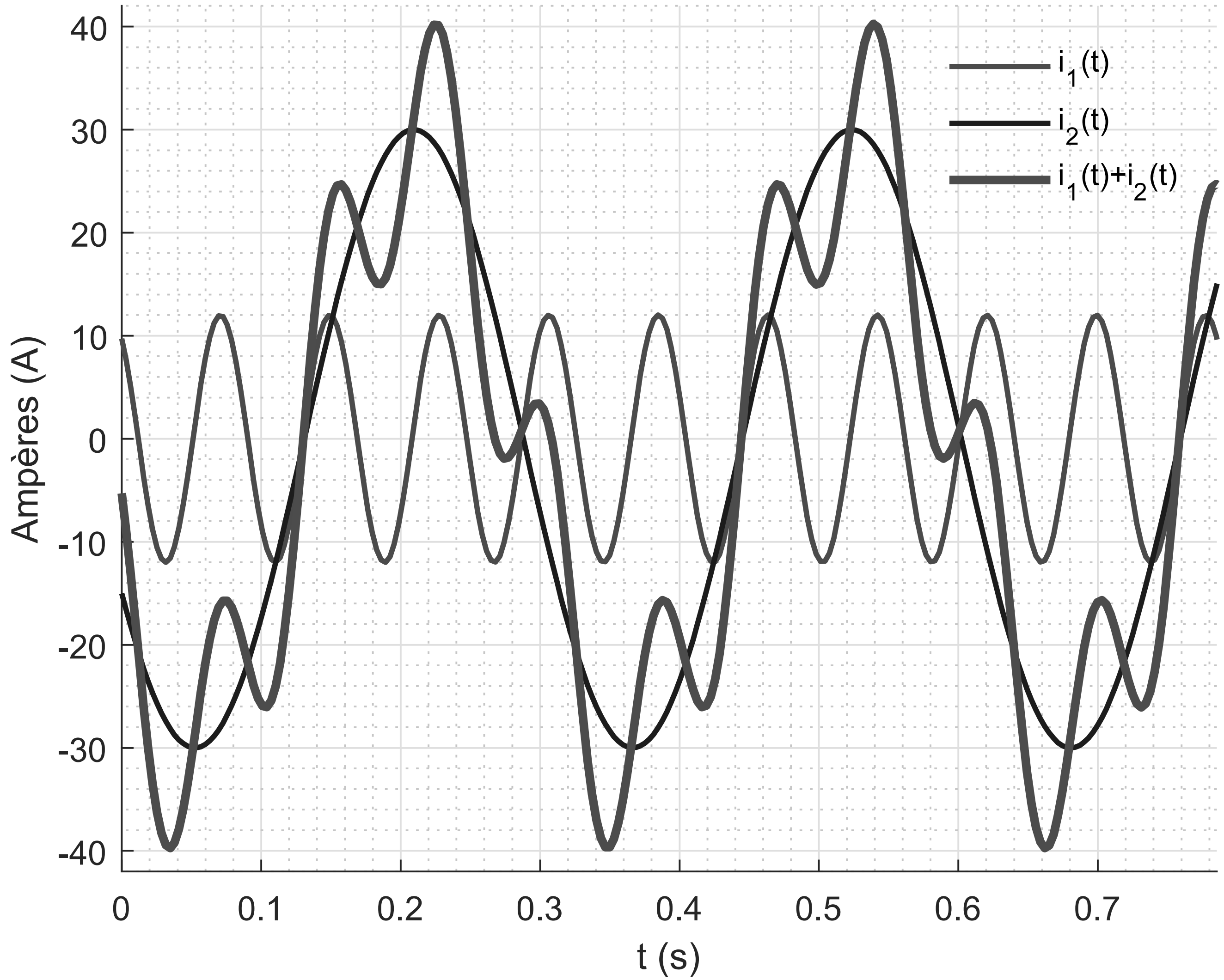
Exemplo: soma de senoides de mesma frequência



$i_1(t) = 12\cos(20t + 36^\circ)$ A; $i_2(t) = 30\cos(20t + 120^\circ)$ A

$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow i_3(t) = 33,46\cos(20t + 99,1^\circ)\mathrm{A}$

Exemplo: soma de senoides de frequências distintas



$$i_1(t) = 12\cos(80t + 36^\circ)\ \text{A};\ i_2(t) = 30\cos(20t + 120^\circ)\ \text{A}$$
$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow i_3(t) = 12\cos(80t + 36^\circ) + 30\cos(20t + 120^\circ)\mathrm{A}$$