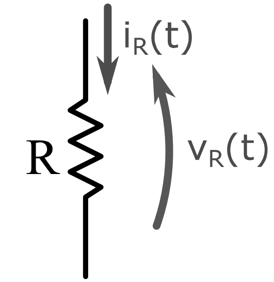
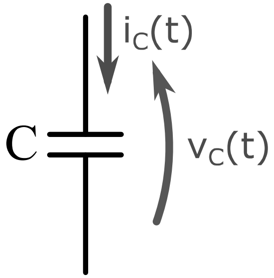
# Lição 3

# Impedância (**Z**) e Admitância (**Y**)

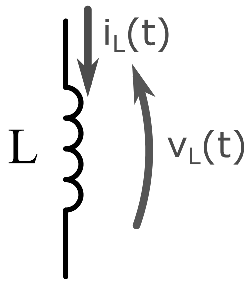
Sejam os seguintes componentes pertencentes a um circuito de corrente alternada (CA), representados no **domínio do tempo**:




$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$




$$i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v_C(t)$$



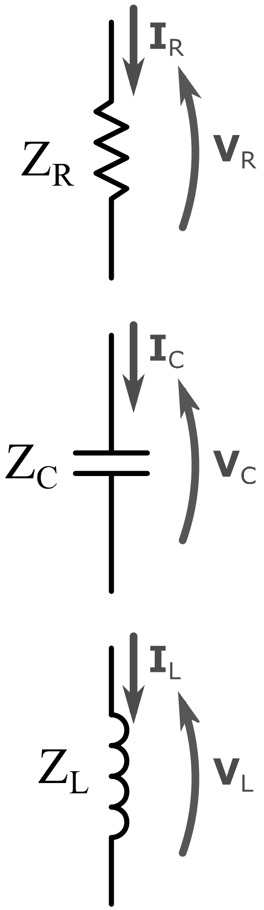

$$v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$

- $v_R(t)$, $v_C(t)$, $v_L(t)$, $i_R(t)$, $i_C(t)$ e $i_L(t)$ são senoides.

$R$: Resistência [Ohm ($\Omega$)]
$C$: Capacitância [Farad ($F$)]
$L$: Indutância [Henry ($H$)]

# Impedância (**Z**) e Admitância (**Y**)

Sejam os mesmos componentes representados no **domínio da frequência**:




$$\mathbf{V}_R = \mathbf{Z}_R \cdot \mathbf{I}_R$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{Z}_C \cdot \mathbf{I}_C$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_L$$

- $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_C$, $\mathbf{V}_L$, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_C$ e $\mathbf{I}_L$ são fasores.

$\mathbf{Z}_R$: Impedância do resistor [Ω]
$\mathbf{Z}_C$: Impedância do capacitor [Ω]
$\mathbf{Z}_L$: Impedância do indutor [Ω]

**Impedância** (**Z**): definida como a razão entre os fasores de tensão e corrente

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$$

# Impedância (**Z**) e Admitância (**Y**)

Impedância de um Resistor ($\mathbf{Z}_R$):

$$\mathbf{Z}_R = R \qquad \mathbf{Z}_R = R\underline{/0^\circ}$$

Impedância de um Capacitor ($\mathbf{Z}_C$):

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} \qquad \mathbf{Z}_C = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}$$

Impedância de um Indutor ($\mathbf{Z}_L$):

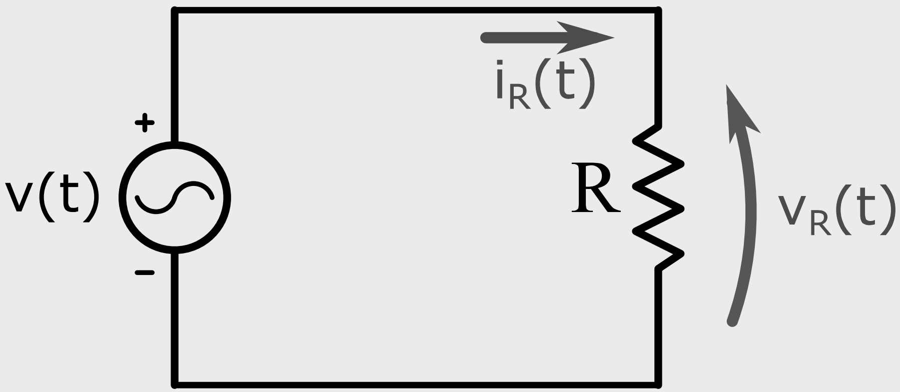
$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \qquad \mathbf{Z}_L = \omega L\underline{/90^\circ}$$

- A impedância é uma medida da oposição imposta por um componente à passagem da corrente elétrica, quando submetido a uma tensão **em um circuito CA** $\rightarrow$ Análogo à resistência em um circuito CC.
- A impedância também é um número complexo;
- O inverso da **Impedância (Z)** é denominado **Admitância (Y)** $\rightarrow$ Análogo à condutância em um circuito CC.

# Exemplo 1

## Circuito CA com um resistor

A tensão da fonte de tensão é $v(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)$ V, e a resistência $R = 20\Omega$. Determine $v_R(t)$ e $i_R(t)$.

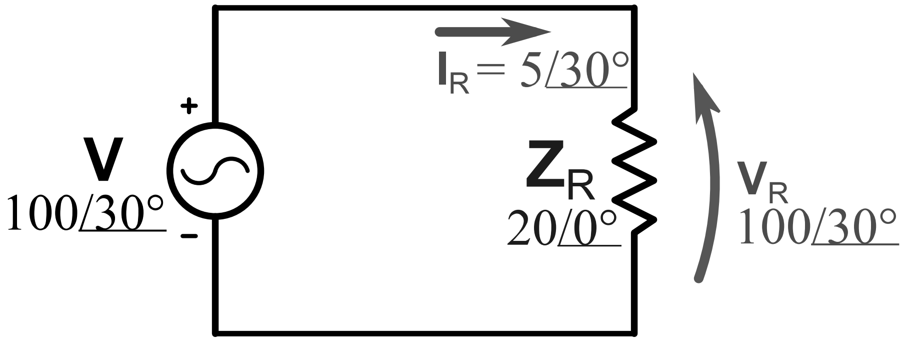



Solução: O circuito é alimentado por uma fonte de tensão senoidal com frequência angular $\omega = 50$ rad/s.
Representando o circuito no domínio da frequência, tem-se:

- Fasor da tensão da fonte: $\mathbf{V} = 100\underline{/30^\circ}$ V;
- Impedância do resistor: $\mathbf{Z}_R = R = 20\ \Omega$;

# Exemplo 1 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Aplicando a **Lei de Ohm para circuitos CA**: $\mathbf{V}_R = \mathbf{Z}_R \cdot \mathbf{I}_R$

Uma vez que $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}$, tem-se: $100\angle 30^\circ = 20\angle 0^\circ \cdot \mathbf{I}_R$

$$\mathbf{I}_R = \frac{100\angle 30^\circ}{20\angle 0^\circ} \Rightarrow \mathbf{I}_R = 5\angle 30^\circ \text{ A.}$$

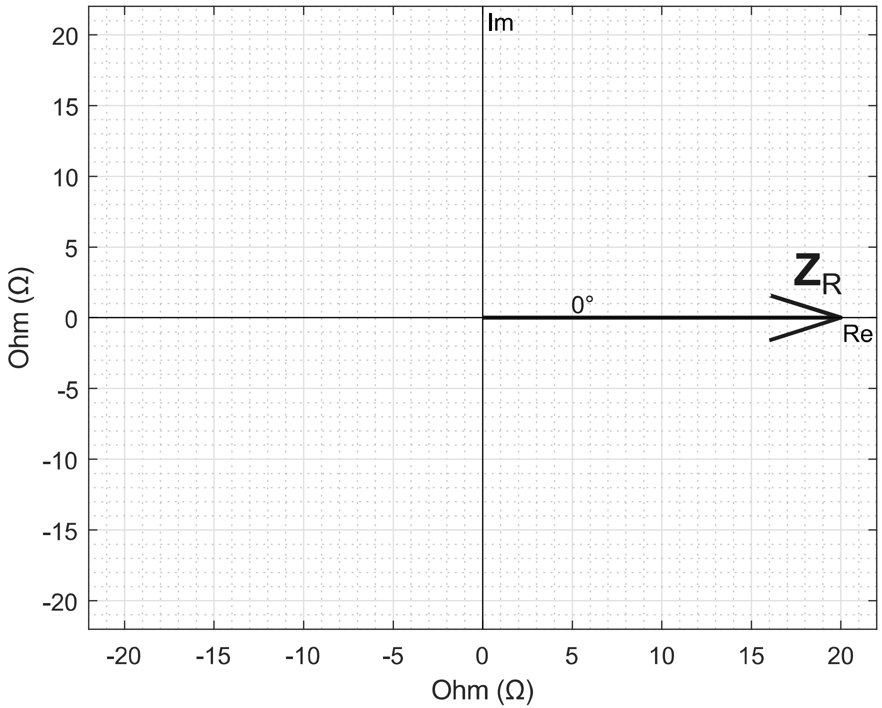
Transformando $\mathbf{V}_R$ e $\mathbf{I}_R$ para o domínio do tempo, lembrando que $\omega = 50$ rad/s:

$v_R(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)$ V; e

$i_R(t) = 5\cos(50t + 30^\circ)$ A.

# Exemplo 1 (continuação...)

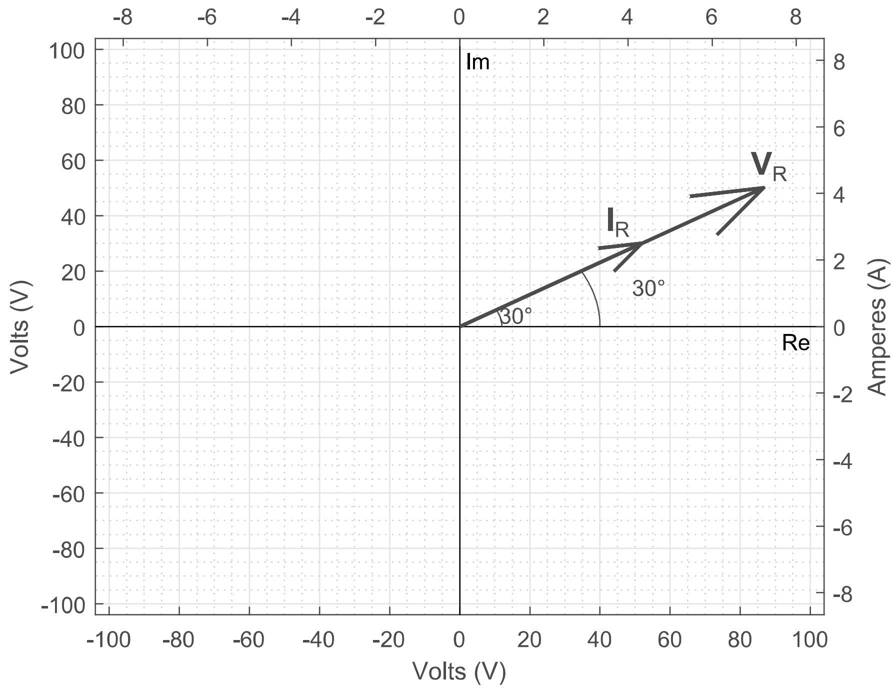
Representação da impedância $\mathbf{Z}_R$ no Plano Complexo:




$$\mathbf{Z}_R = 20\underline{/0^\circ}\ \Omega$$

A impedância de um **resistor** tem **ângulo 0**$^\circ$

Representação dos fasores $\mathbf{V}_R$ e $\mathbf{I}_R$ no Plano Complexo:

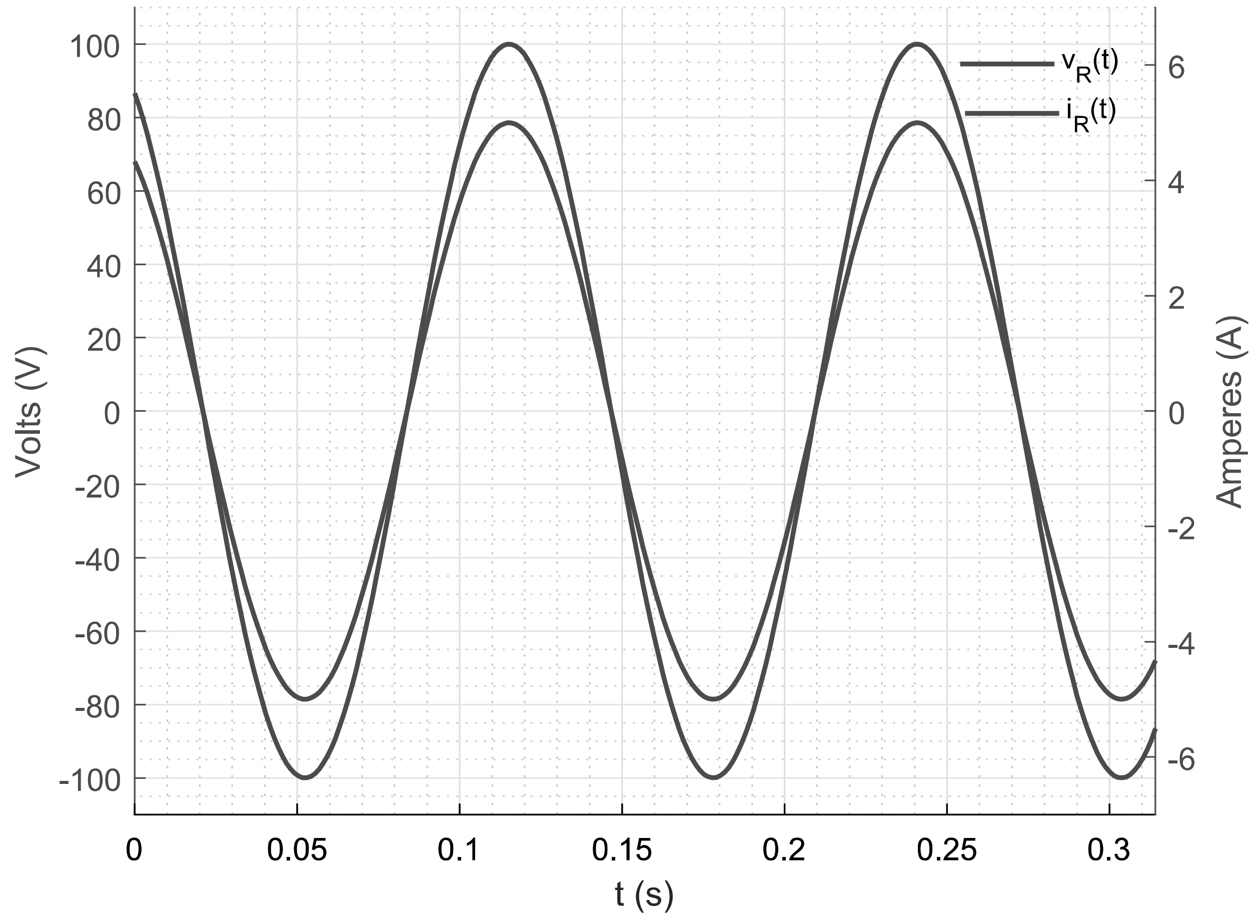



$$\mathbf{V}_R = 100\underline{/30^\circ}\ \text{V};\ \mathbf{I}_R = 5\underline{/30^\circ}\ \text{A}$$

A defasagem entre tensão e corrente em um **resistor** é **0**$^\circ$

# Exemplo 1 (continuação...)

Gráfico das senoides $v_R(t)$ e $i_R(t)$



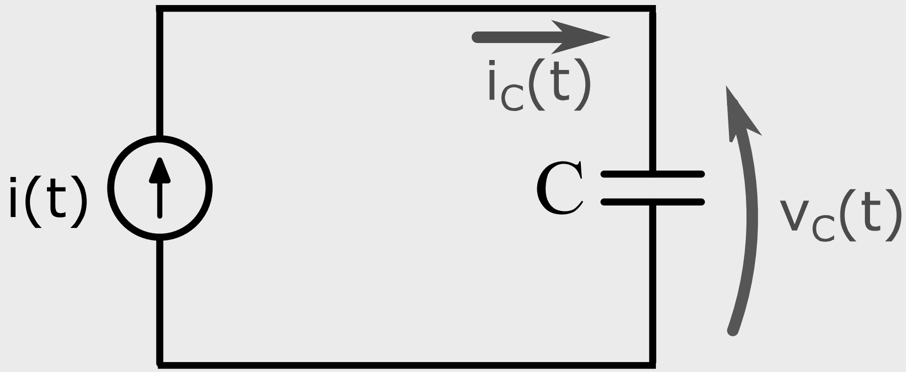

$$v_R(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)\text{ V};\ i_R(t) = 5\cos(50t + 30^\circ)\text{ A}.$$

As senoides de tensão e corrente em um **resistor** estão **em fase**

# Exemplo 2

## Circuito CA com um capacitor

A corrente da fonte de corrente é $i(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)$ A, e a capacitância $C = 1250\mu F$. Determine $v_C(t)$ e $i_C(t)$.




Solução: O circuito é alimentado por uma fonte de corrente senoidal com frequência angular $\omega = 200$ rad/s.

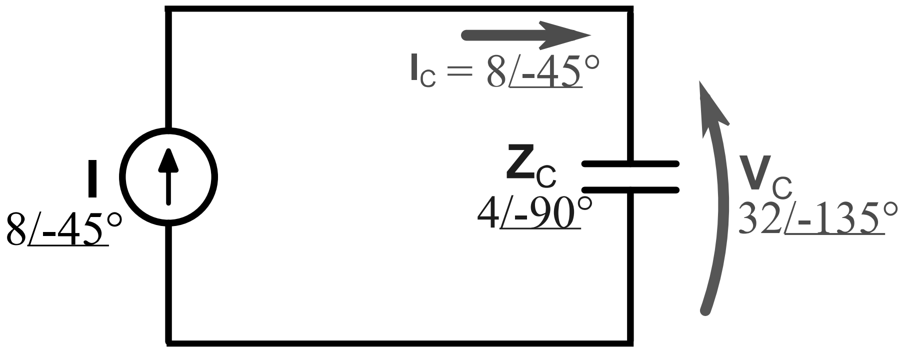
Representando o circuito no domínio da frequência, tem-se:

- Fasor da corrente da fonte: $\mathbf{I} = 8\underline{/-45^\circ}$ A;
- Impedância do capacitor:

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{200 \cdot 1250 \times 10^{-6}} = -j4\ \Omega;$$

# Exemplo 2 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:



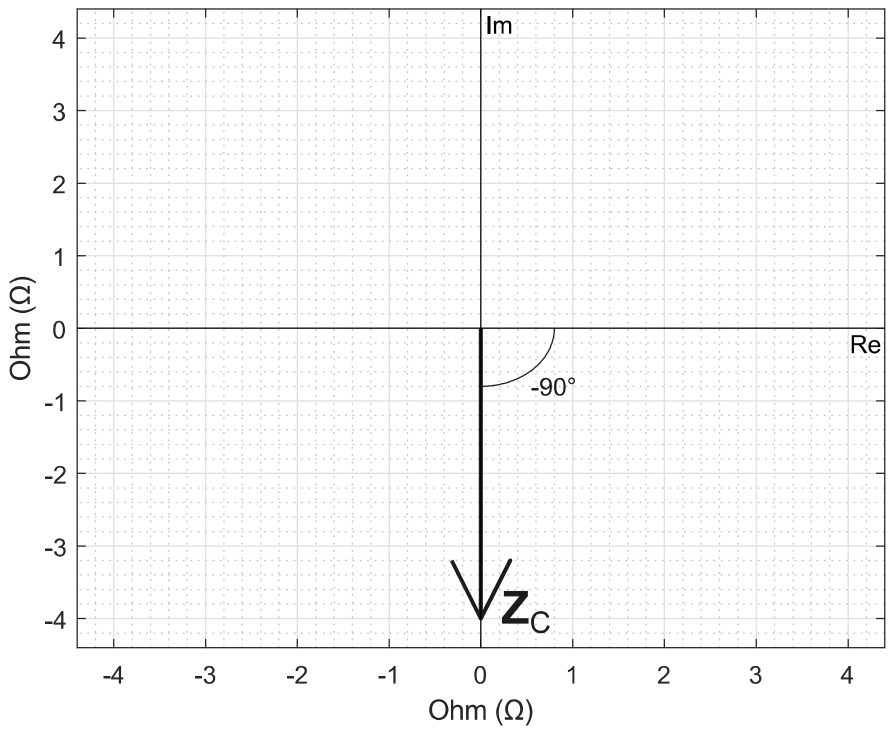

Aplicando a **Lei de Ohm para circuitos CA**: $\mathbf{V}_C = \mathbf{Z}_C \cdot \mathbf{I}_C$

Uma vez que $\mathbf{I}_C = \mathbf{I}$, tem-se:
$\mathbf{V}_C = 4\underline{/-90^\circ} \cdot 8\underline{/-45^\circ} \Rightarrow \mathbf{V}_C = 32\underline{/-135^\circ}$ V

Transformando $\mathbf{V}_C$ e $\mathbf{I}_C$ para o domínio do tempo, lembrando que $\omega = 200$ rad/s:
$v_C(t) = 32\cos(200t - 135^\circ)$ V; e $i_C(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)$ A.

# Exemplo 2 (continuação...)

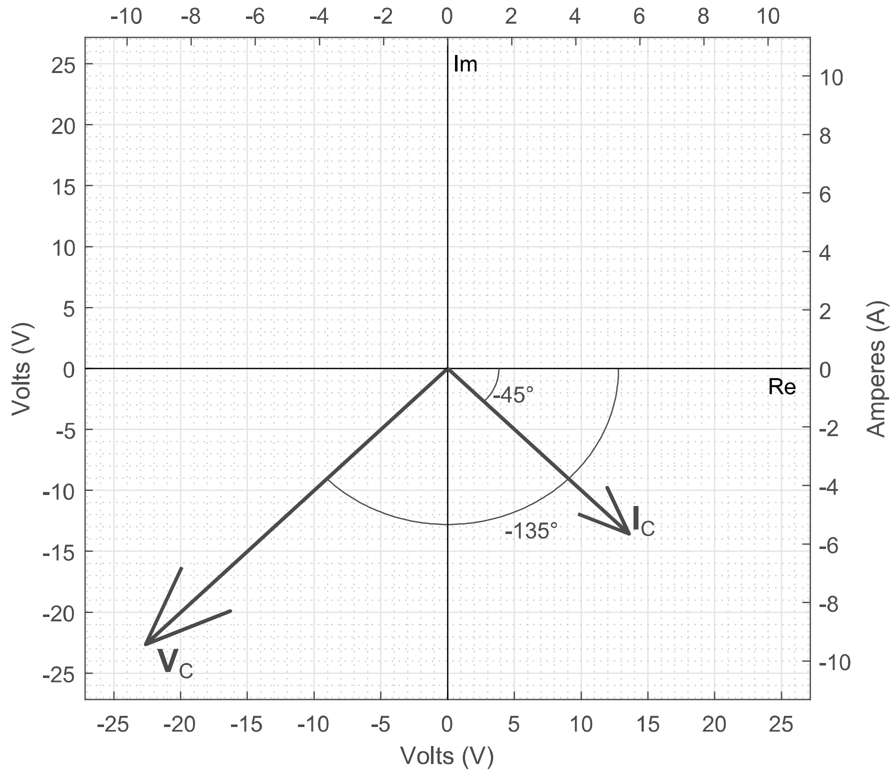
Representação da impedância $\mathbf{Z}_C$ no Plano Complexo:




$$\mathbf{Z}_C = 4\underline{/-90^\circ}\ \Omega$$

**A impedância de um capacitor tem ângulo -90°**

Representação dos fasores $\mathbf{V}_C$ e $\mathbf{I}_C$ no Plano Complexo:

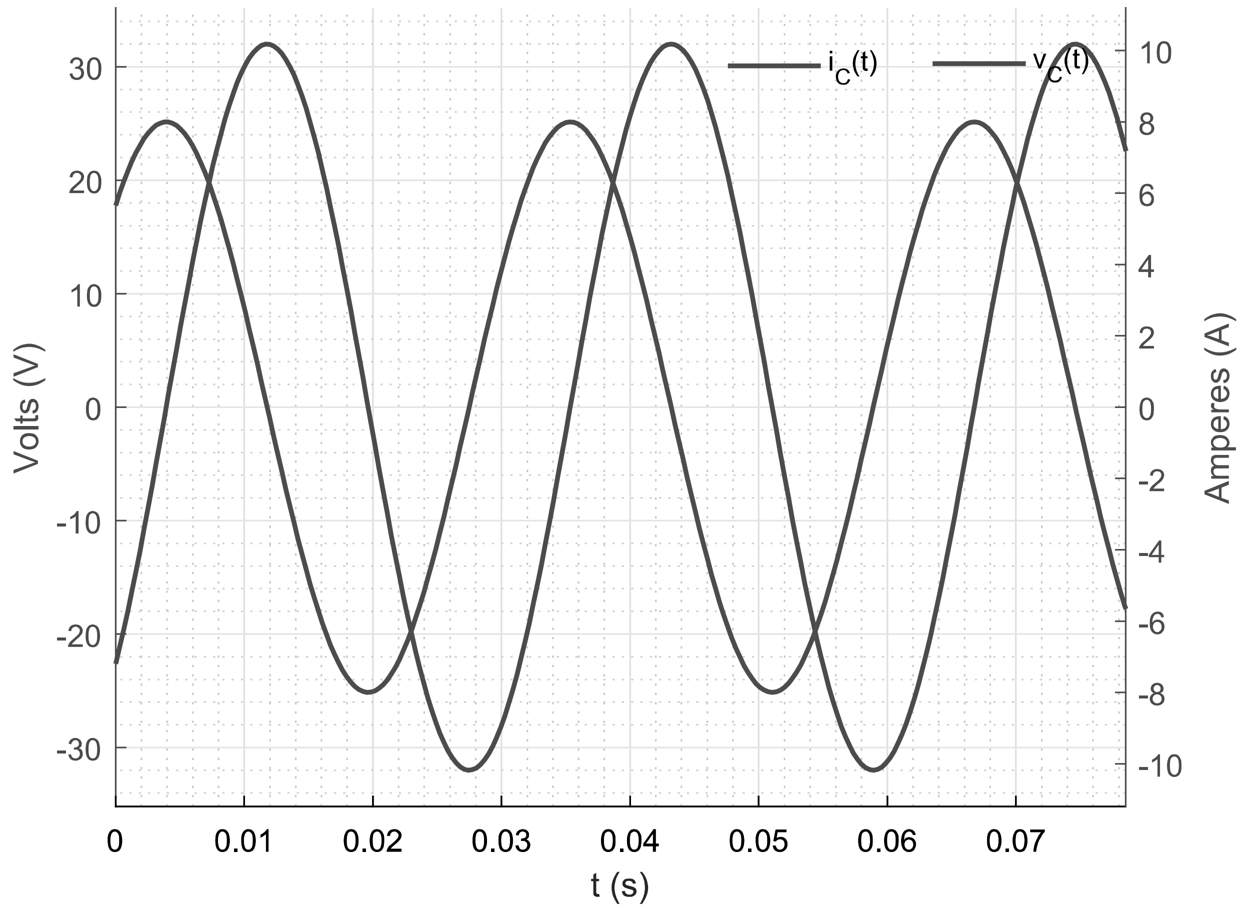



$$\mathbf{V}_C = 32\underline{/-135^\circ}\ \text{V};\ \mathbf{I}_R = 8\underline{/-45^\circ}\ \text{A}$$

Em um **capacitor**, a corrente está defasada **+90°** em relação à tensão.

# Exemplo 2 (continuação...)

Gráfico das senoides $v_C(t)$ e $i_C(t)$



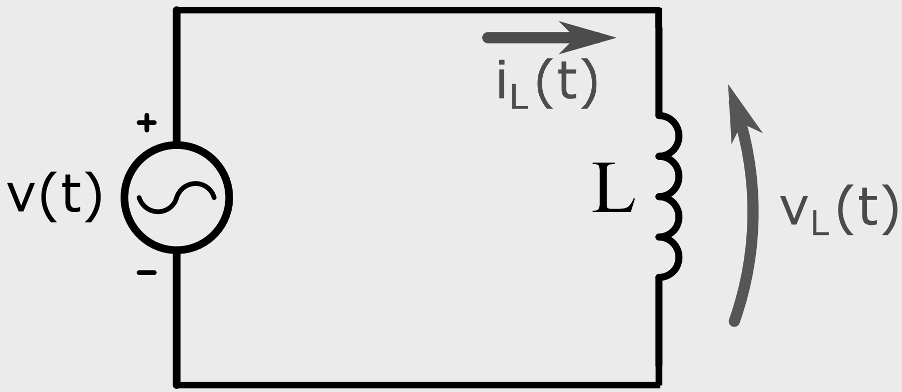

$$v_C(t) = 32\cos(200t - 135^\circ)\ \text{V};\ i_C(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)\ \text{A}.$$

Em um **capacitor**, a corrente está **adiantada 90°** em relação à tensão.

# Exemplo 3

## Circuito CA com um indutor

A tensão da fonte de tensão é $v(t) = 90\cos(40t + 110°)$ V, e a indutância $L = 500mH$. Determine $v_L(t)$ e $i_L(t)$.

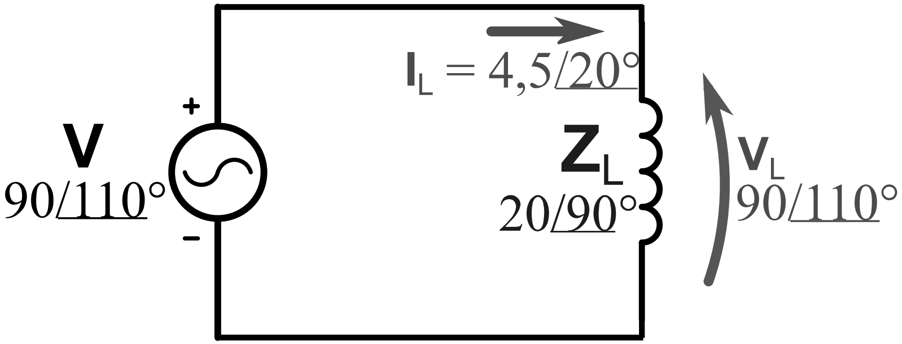



Solução: O circuito é alimentado por uma fonte de tensão senoidal com frequência angular $\omega = 40$ rad/s.
Representando o circuito no domínio da frequência, tem-se:

- Fasor da tensão da fonte: $\mathbf{V} = 90\underline{/110°}$ V;
- Impedância do indutor: $\mathbf{Z}_L = j\omega L = j40 \cdot 500 \times 10^{-3} = j20\ \Omega$;

# Exemplo 3 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Aplicando a **Lei de Ohm para circuitos CA**: $\mathbf{V}_L = \mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_L$

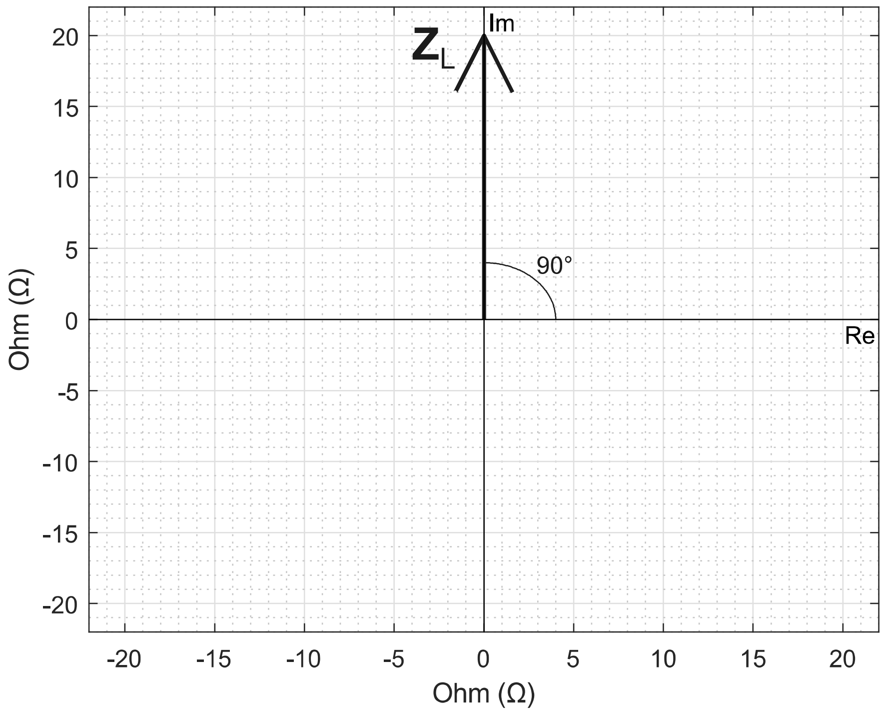
Uma vez que $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}$, tem-se:
$90\angle 110° = 20\angle 90° \cdot \mathbf{I}_L$

$$\mathbf{I}_L = \frac{90\angle 110°}{20\angle 90°} \Rightarrow \mathbf{I}_L = 4,5\angle 20° \text{ A}.$$

Transformando $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{I}_L$ para o domínio do tempo, lembrando que $\omega = 40$ rad/s:
$v_L(t) = 90\cos(40t + 110°)$ V; e $i_L(t) = 4,5\cos(40t + 20°)$ A.

# Exemplo 3 (continuação...)

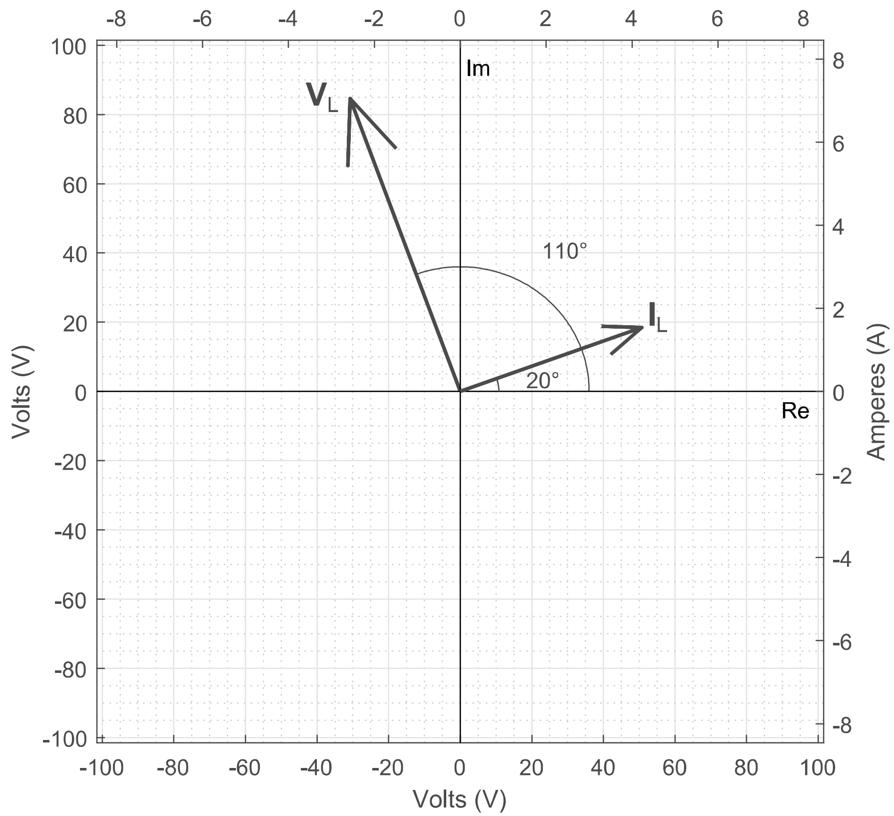
Representação da impedância $\mathbf{Z}_L$ no Plano Complexo:




$$\mathbf{Z}_L = 20\underline{/90^\circ}\ \Omega$$

A impedância de um **indutor** tem **ângulo +90°**

Fasores $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{I}_L$ no Plano Complexo:

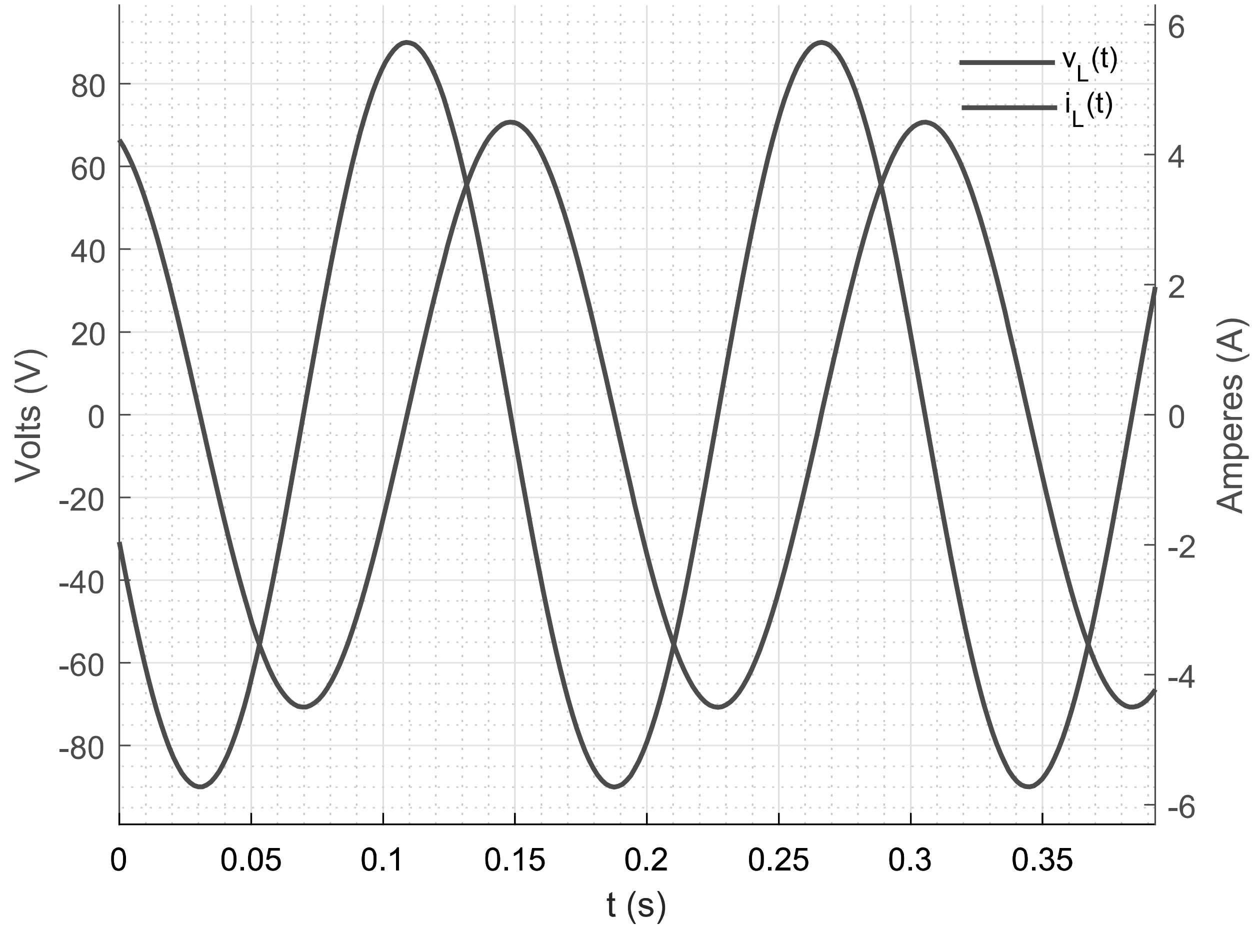



$$\mathbf{V}_L = 90\underline{/110^\circ}\ \text{V};\ \mathbf{I}_L = 4,5\underline{/20^\circ}\ \text{A}$$

Em um **indutor**, a corrente está defasada -**90**° em relação à tensão.

# Exemplo 3 (continuação...)

## Gráfico das senoides $v_L(t)$ e $i_L(t)$




$$v_L(t) = 90\cos(40t + 110^\circ)\ \text{V};\ i_L(t) = 4,5\cos(40t + 20^\circ)\ \text{A}.$$

Em um **indutor**, a corrente está **atrasada 90°** em relação à tensão.

# Cálculos de Impedâncias

- Analogamente à análise de circuitos CC, impedâncias de diferentes elementos (resistores, capacitores e indutores) em um circuito elétrico CA podem ser combinadas para gerar uma **Impedância Equivalente**;
- Impedâncias equivalentes em associações série e paralelo de elementos podem ser calculadas de forma idêntica ao cálculo de resistências equivalentes em circuitos CC.

A associação de dois ou mais elementos resulta em uma impedância **Z** que pode ser representada na forma retangular:

$$\mathbf{Z} = R + jX \ (\Omega)$$

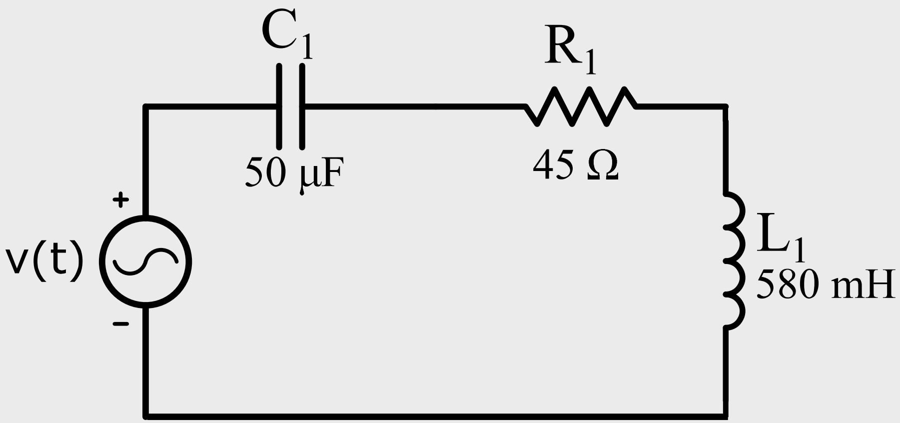
$R$ = Resistência ($\Omega$) $\rightarrow$ parte real da impedância, resultante dos **resistores**
$X$ = Reatância ($\Omega$) $\rightarrow$ parte imaginária da impedância, resultante de **capacitores e indutores**

A reatância depende da frequência

# Exemplo 4

## Impedância equivalente de um circuito série

Represente o circuito a seguir no domínio da frequência, para $\omega = 250$ rad/s. Em seguida, determine a impedância equivalente $\mathbf{Z}$.

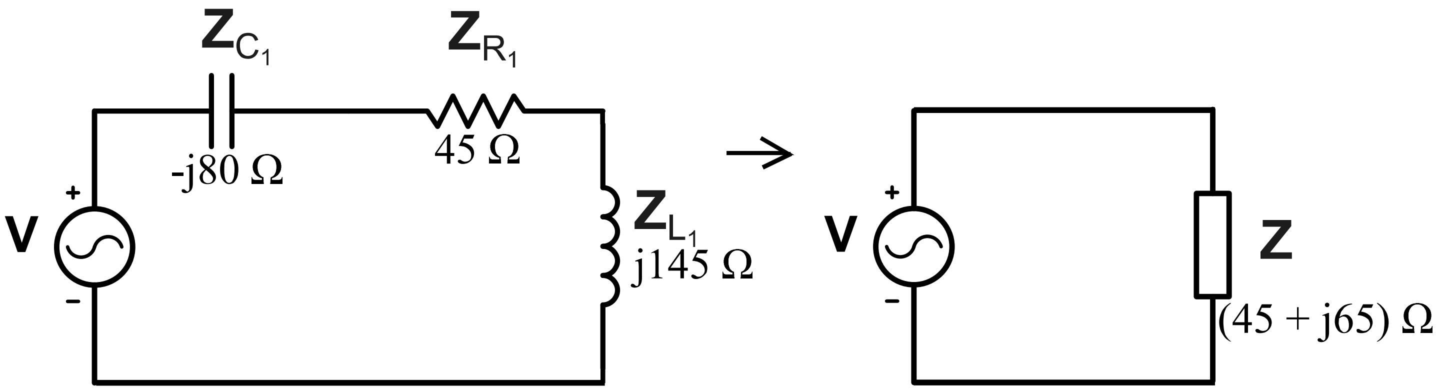



Solução: Cálculo das impedâncias de cada elemento:

- Capacitor: $\mathbf{Z}_{C_1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j\dfrac{1}{250 \cdot 50 \times 10^{-6}} = -j80\ \Omega$;
- Resistor: $\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 45\ \Omega$;
- Indutor: $\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j250 \cdot 580 \times 10^{-3} = j145\ \Omega$;

# Exemplo 4 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Uma vez que a associação é **série**, a impedância equivalente ($\mathbf{Z}$) é

$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{C_1} + \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1}$

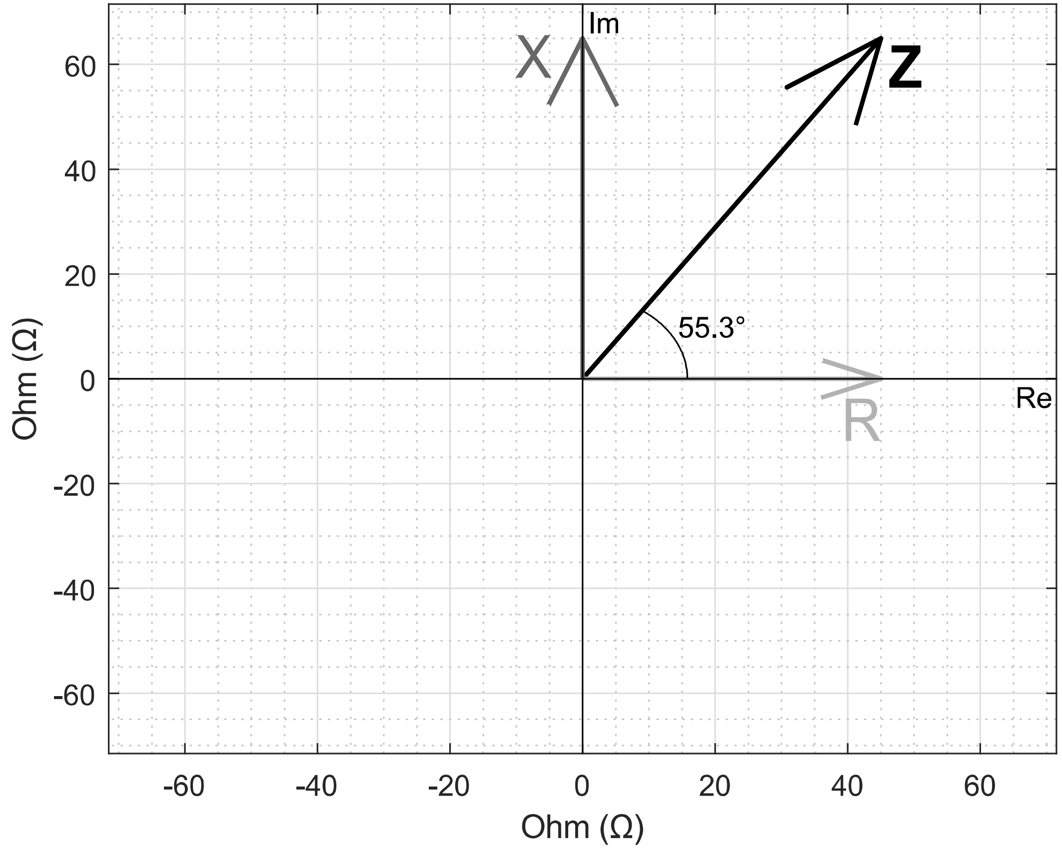
$\mathbf{Z} = -j80 + 45 + j145$

$\mathbf{Z} = 45 + j65\ \Omega$

A impedância equivalente é composta por uma resistência $R = 45\ \Omega$ e por uma reatância $X = 65\ \Omega$

# Exemplo 4 (continuação...)

Representação da impedância equivalente no Plano Complexo:



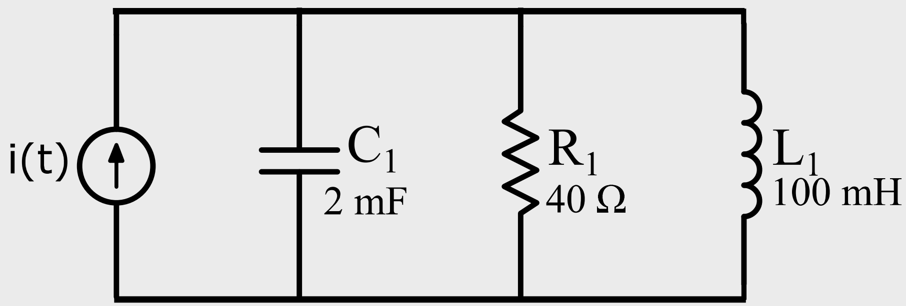

$$\mathbf{Z} = 45 + j65 = 79{,}06\underline{/55{,}3^\circ}\ \Omega$$

$X = 65\ \Omega$ corresponde a uma reatância **indutiva** de 65 $\Omega$.

# Exemplo 5

## Impedância equivalente de um circuito paralelo

Represente o circuito a seguir no domínio da frequência, para $\omega = 120$ rad/s. Em seguida, determine a impedância equivalente $\mathbf{Z}$.

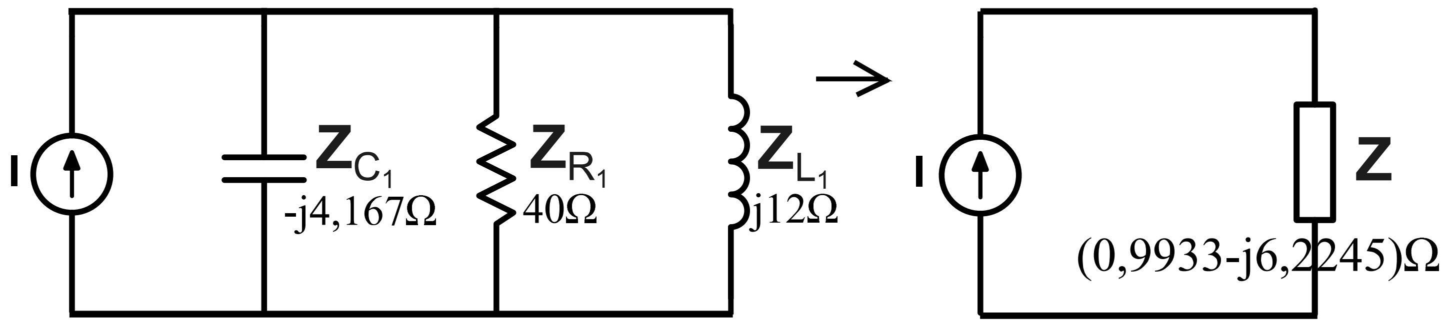



Solução: Cálculo das impedâncias de cada elemento:

- Capacitor: $\mathbf{Z}_{C_1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j\dfrac{1}{120 \cdot 2 \times 10^{-3}} \approx -j4,167\ \Omega$;
- Resistor: $\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 40\ \Omega$;
- Indutor: $\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j120 \cdot 0,1 = j12\ \Omega$;

# Exemplo 5 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Cálculo da impedância equivalente ($\mathbf{Z}$), para a associação em **paralelo**:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{C_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{R_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_1}}$$

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{-j4,167} + \frac{1}{40} + \frac{1}{j12} \approx 0,025 + j0,157$$

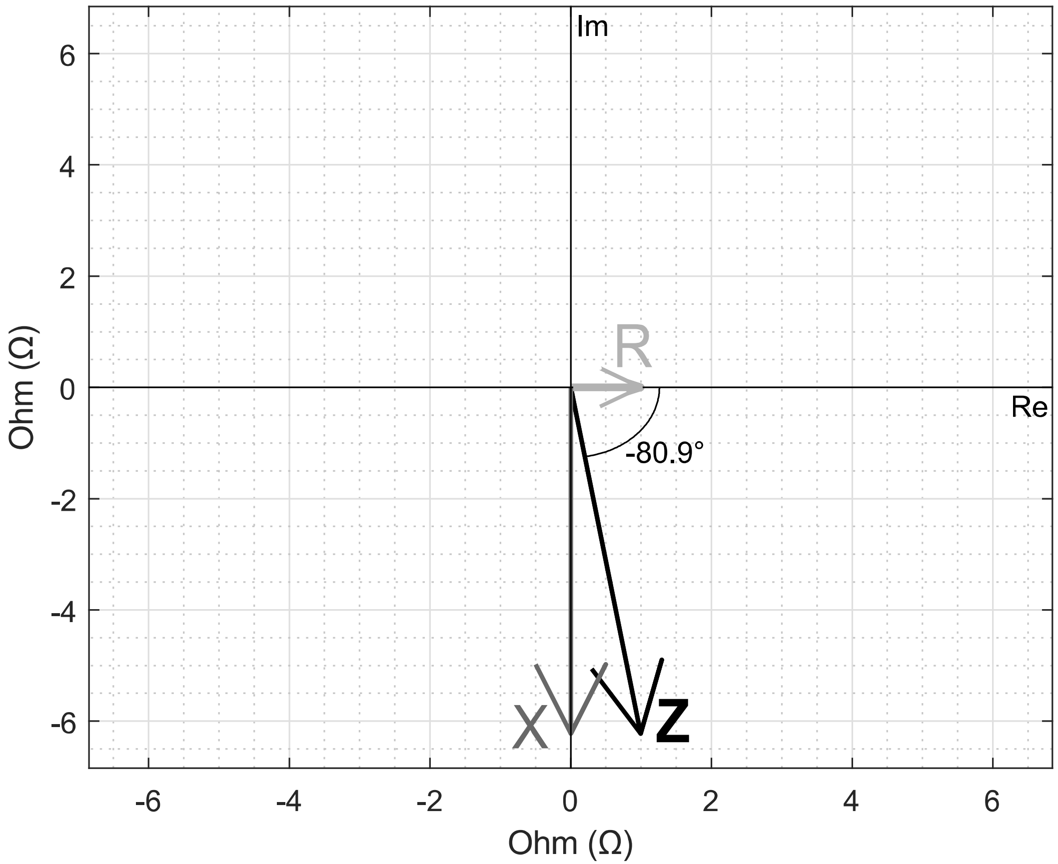
$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} \approx \frac{1}{0,025 + j0,157}$$

$$\mathbf{Z} \approx 0,9933 - j6,2245\ \Omega$$

A impedância equivalente é composta por uma resistência $R = 0,9933\ \Omega$ e por uma reatância $X = -6,2245\ \Omega$

# Exemplo 5 (continuação...)

Representação da impedância equivalente no Plano Complexo:




$$\mathbf{Z} \approx 0,9933 - j6,2245 = 6,3032\underline{/-80,93^\circ}\ \Omega$$

$X = -6,2245\ \Omega$ corresponde a uma reatância **capacitiva** de 6,2245 Ω.

# Atividades

## Leitura Complementar

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seção 10.5.

## Atividade 1

Resolva os Exercícios **8 a 11** do **Caderno de Exercícios**.

## Sugestões de Exercícios Complementares

[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 10, Exercícios 37, 39, 40, 41, 43.