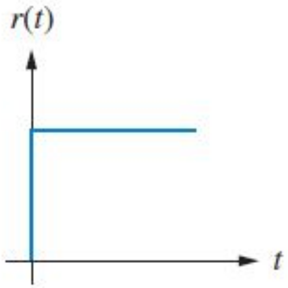
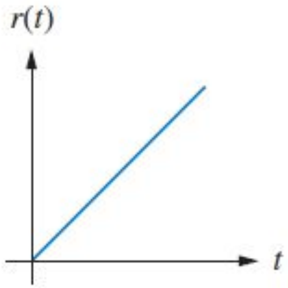
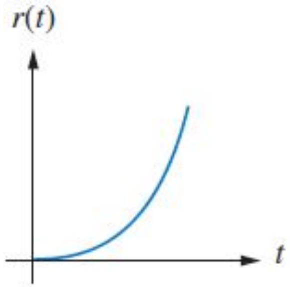
Erros em Regime Permanente

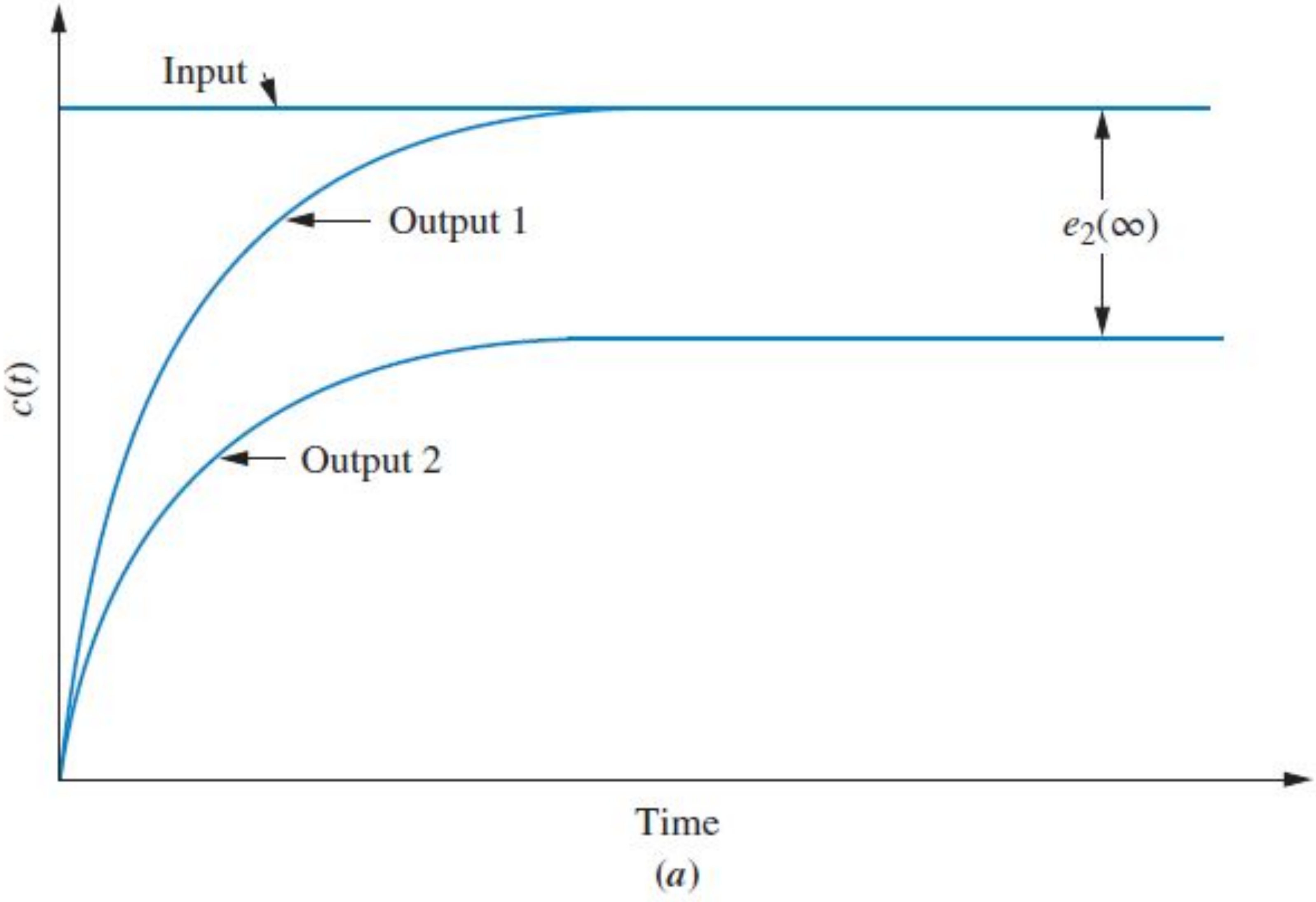
Fundamentos de Controle

Definição e Entradas de Teste

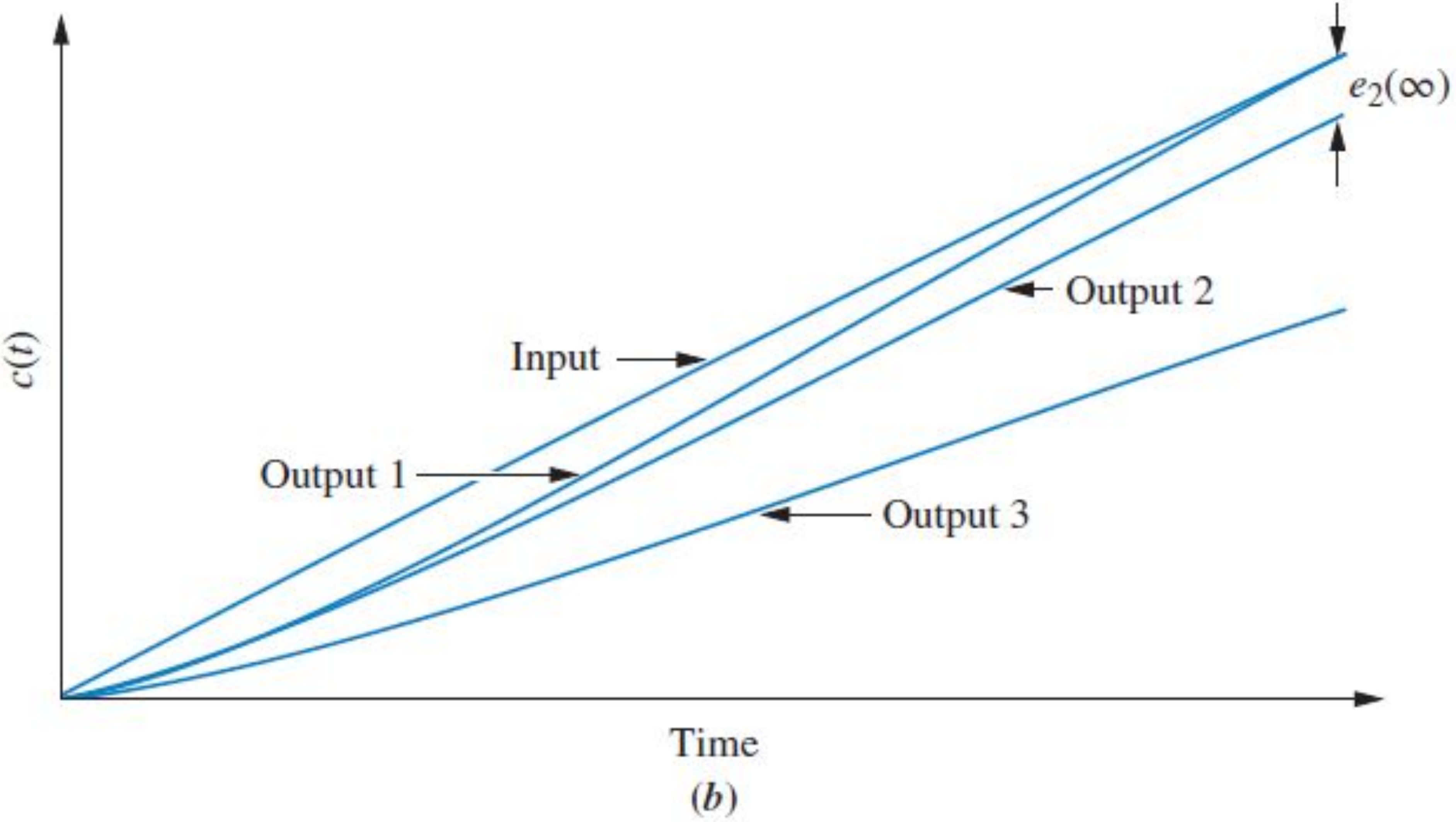
TABLE 7.1 Test waveforms for evaluating steady-state errors of position control systems

Waveform	Name	Physical interpretation	Time function	Laplace transform
	Step	Constant position	1	$\frac{1}{s}$
	Ramp	Constant velocity	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parabola	Constant acceleration	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

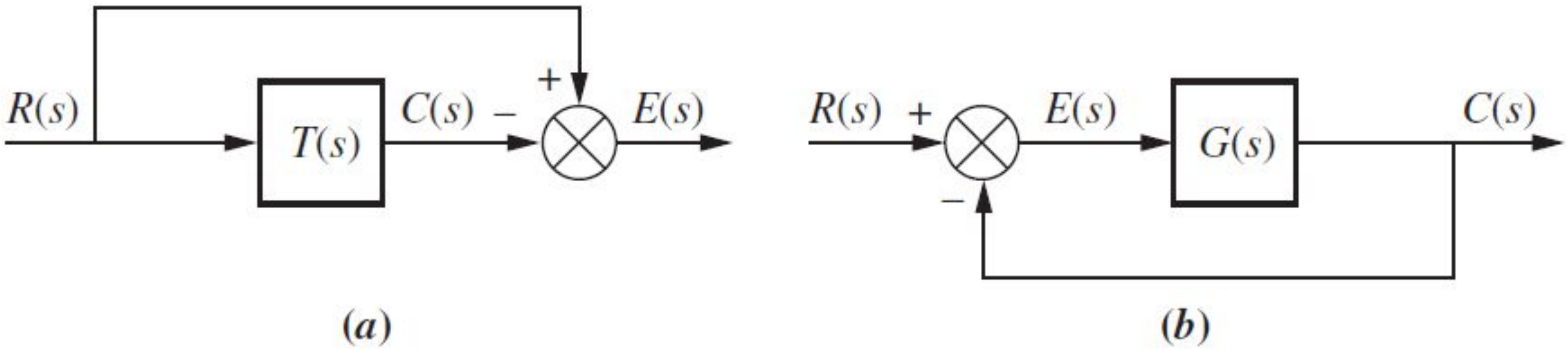
Aplicação a Sistemas Estáveis



Aplicação a Sistemas Estáveis



Calculando Erros em Regime Permanente



Erro em Regime Permanente para Sistemas com Realimentação Unitária

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = R(s)T(s)$$

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)]$$

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sR(s)[1 - T(s)]$$

Exemplo 7.1

Erro em Regime Permanente em Função de $T(s)$

PROBLEMA: Determine o erro em regime permanente para o sistema da Figura 7.3(a), caso $T(s) = 5/(s^2 + 7s + 10)$ e a entrada seja um degrau unitário.

SOLUÇÃO: A partir do enunciado do problema, $R(s) = 1/s$ e $T(s) = 5/(s^2 + 7s + 10)$. Substituindo na Equação (7.4), resulta

$$E(s) = \frac{s^2 + 7s + 5}{s(s^2 + 7s + 10)} \tag{7.7}$$

Uma vez que $T(s)$ é estável e, subsequentemente, $E(s)$ não tem polos no semiplano da direita, nem polos $j\omega$ que não estejam na origem, podemos aplicar o teorema do valor final. Substituindo a Equação (7.7) na Equação (7.5), temos $e(\infty) = 1/2$.

Erro em Regime Permanente em Função de G(s)

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = E(s)G(s)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

Teorema do Valor Final

$$\mathscr{L}[\dot{f}(t)] = \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0-)$$

$$\int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)dt = f(\infty) - f(0-) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0-)$$

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Entrada em Degrau

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

$$e(\infty) = e_{\text{step}}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} G(s)}$$

Entrada em Rampa

$$e(\infty) = e_{\text{ramp}}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^2)}{1 + G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}$$

Entrada em Parabólica

$$e(\infty) = e_{\text{parabola}}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^3)}{1 + G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2G(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)}$$

Exemplo 7.2

Erros em Regime Permanente para Sistemas sem Integração

PROBLEMA: Determine os erros em regime permanente para entradas de $5\theta(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2\theta(t)$ para o sistema mostrado na Figura 7.5. A função $\theta(t)$ é o degrau unitário.

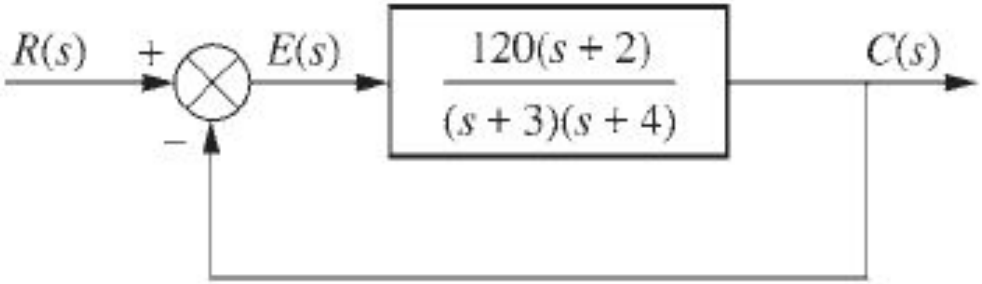


FIGURA 7.5 Sistema de controle com realimentação para o Exemplo 7.2.

$$e(\infty) = e_{\text{step}}(\infty) = \frac{5}{1 + \lim\limits_{s \to 0} G(s)} = \frac{5}{1 + 20} = \frac{5}{21}$$

$$e(\infty) = e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{5}{\lim\limits_{s \to 0} sG(s)} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$e(\infty) = e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{10}{\lim\limits_{s \to 0} s^2 G(s)} = \frac{10}{0} = \infty$$

Exercício 7.1

PROBLEMA: Um sistema com realimentação unitária possui a seguinte função de transferência à frente:

$$G(s) = \frac{10(s+20)(s+30)}{s(s+25)(s+35)}$$

a. Determine o erro em regime permanente para as seguintes entradas: $15u(t)$, $15tu(t)$ e $15t^2u(t)$.

b. Repita para

$$G(s) = \frac{10(s+20)(s+30)}{s^2(s+25)(s+35)(s+50)}$$

RESPOSTAS:

a. O sistema em malha fechada é estável. Para $15u(t)$, $e_{\text{degrau}}(\infty) = 0$; para $15tu(t)$, $e_{\text{rampa}}(\infty) = 2{,}1875$; para $15t^2u(t)$, $e_{\text{parábola}}(\infty) = \infty$.

b. O sistema em malha fechada é instável. Os cálculos não podem ser realizados.

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.

Constantes de Erro Estático

$$e(\infty) = e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$e(\infty) = e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG(s)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

$$e(\infty) = e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

Exemplo 7.4

Erro em Regime Permanente Via Constantes de Erro Estático

PROBLEMA: Para cada um dos sistemas da Figura 7.7, calcule as constantes de erro estático e obtenha o erro esperado para as entradas padronizadas em degrau, em rampa e em parábola.

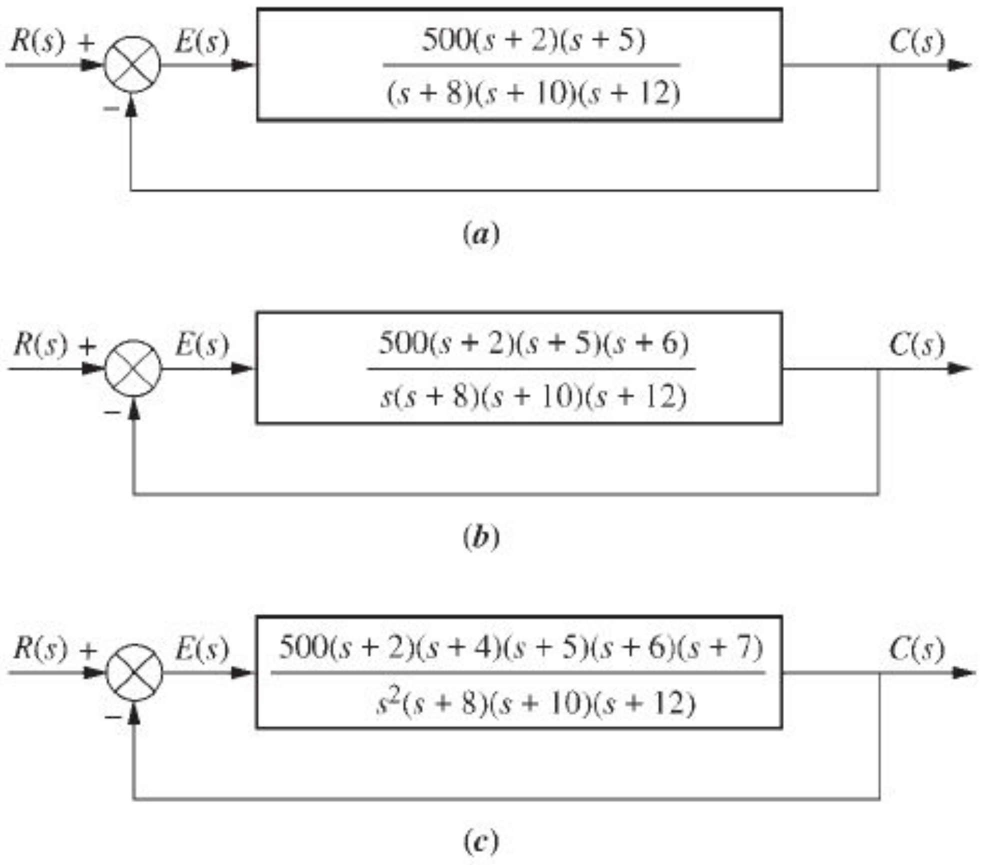
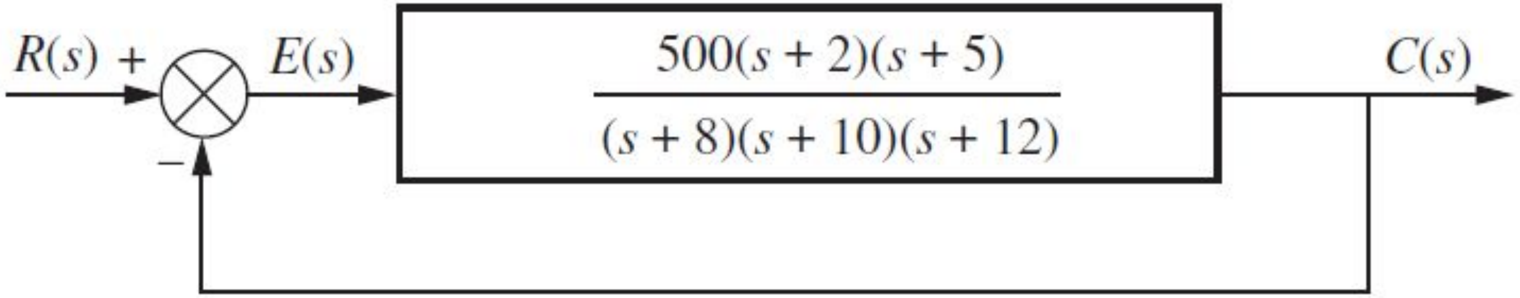


FIGURA 7.7 Sistemas de controle com realimentação para o Exemplo 7.4.



(a)

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{500 \times 2 \times 5}{8 \times 10 \times 12} = 5.208$$

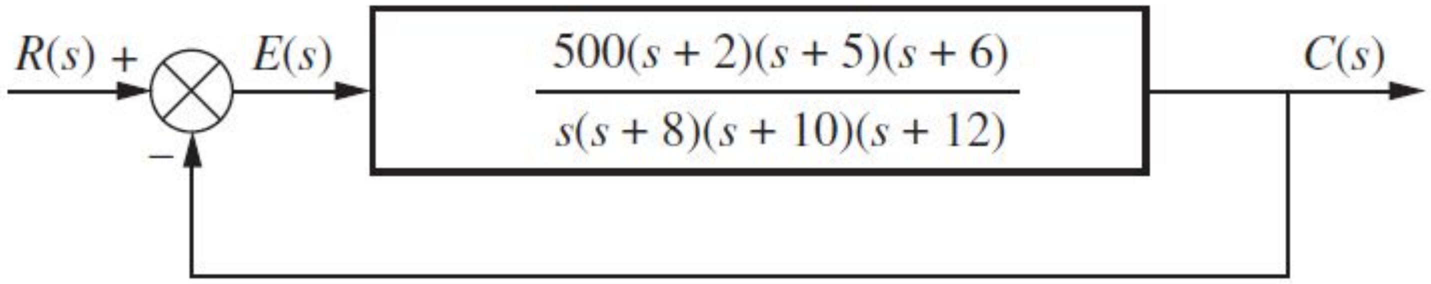
$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0.161$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \infty$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$



(b)

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty$$

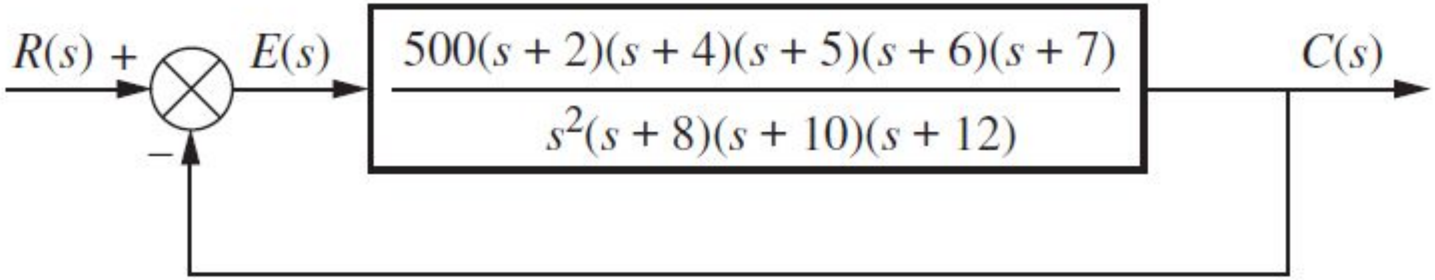
$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{500\times 2\times 5\times 6}{8\times 10\times 12} = 31.25$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{31.25} = 0.032$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$



(c)

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \infty$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \frac{500\times 2\times 4\times 5\times 6\times 7}{8\times 10\times 12} = 875$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{875} = 1.14\times 10^{-3}$$

TABLE 7.2 Relationships between input, system type, static error constants, and steady-state errors

		Type 0		Type 1		Type 2	
Input	**Steady-state error formula**	**Static error constant**	**Error**	**Static error constant**	**Error**	**Static error constant**	**Error**
Step, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \text{Constant}$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = \text{Constant}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = \text{Constant}$	$\frac{1}{K_a}$

Experimente 7.1

Use as seguintes instruções MATLAB e *Control System Toolbox* para determinar K_p, $e_{degrau}(\infty)$, e os polos em malha fechada para verificar a estabilidade do sistema do Exercício 7.2.

```
numg=1000*[1 8];
deng=poly([-7 -9]);
G=tf(numg,deng);
Kp=dcgain(G)
estep=1/(1+Kp)
T=feedback(G,1);
poles=pole(T)
```

Especificações de Erro em Regime Permanente

Exemplo 7.5

Interpretando a Especificação de Erro em Regime Permanente

PROBLEMA: Que informações estão contidas na especificação $K_p = 1000$?

SOLUÇÃO: O sistema é estável. O sistema é do Tipo 0, uma vez que apenas um sistema do Tipo 0 possui um K_p finito. Os sistemas do Tipo 1 e Tipo 2 têm $K_p = \infty$. O sinal de teste de entrada é um degrau, uma vez que K_p foi especificado. Finalmente, o erro por unidade do degrau é

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+1.000} = \frac{1}{1.001} \tag{7.54}$$