Técnica do Lugar Geométrico das Raízes

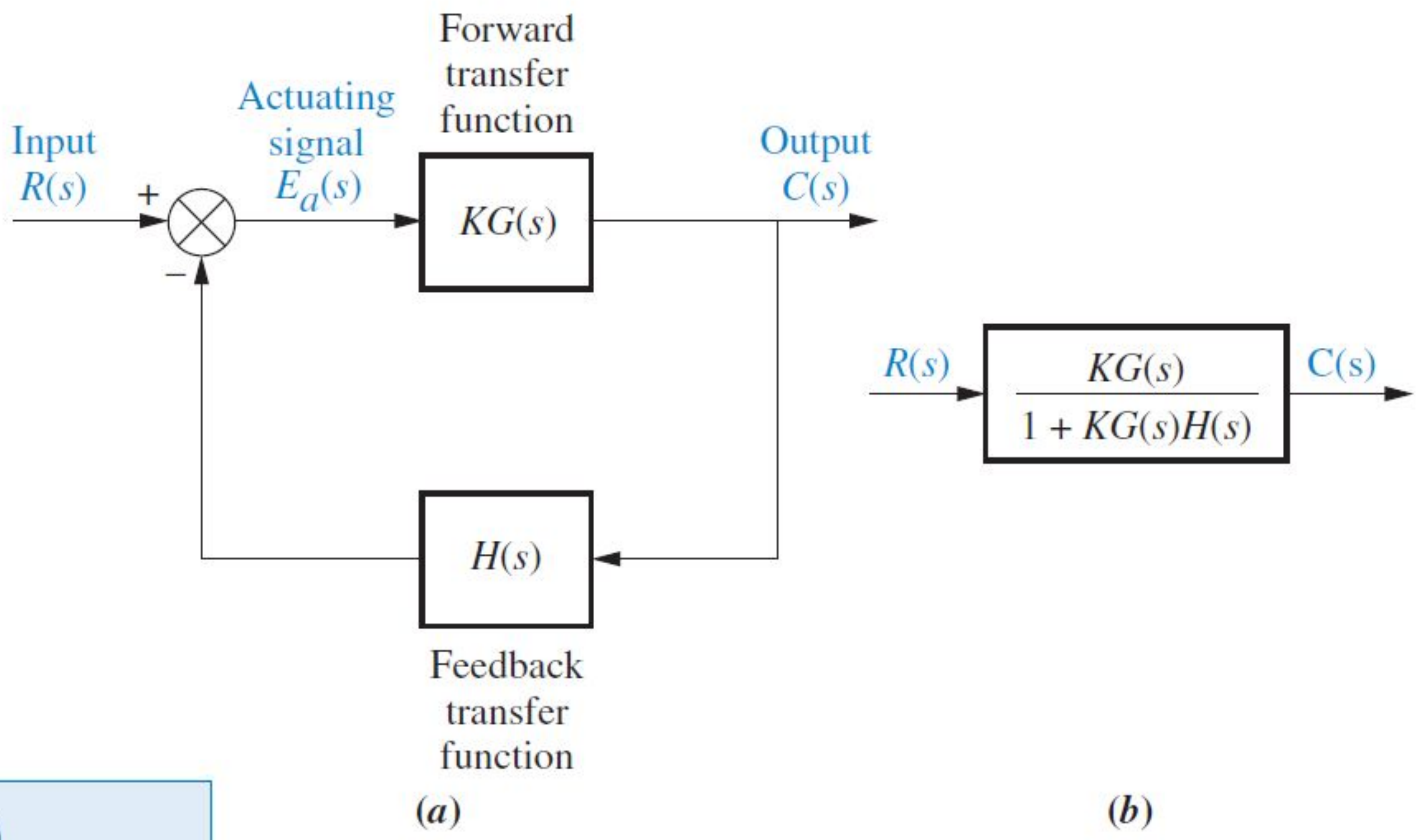
Fundamentos de Controle

O Problema do Sistema de Controle

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

$$T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)}$$



Representação Vetorial de Números Complexos

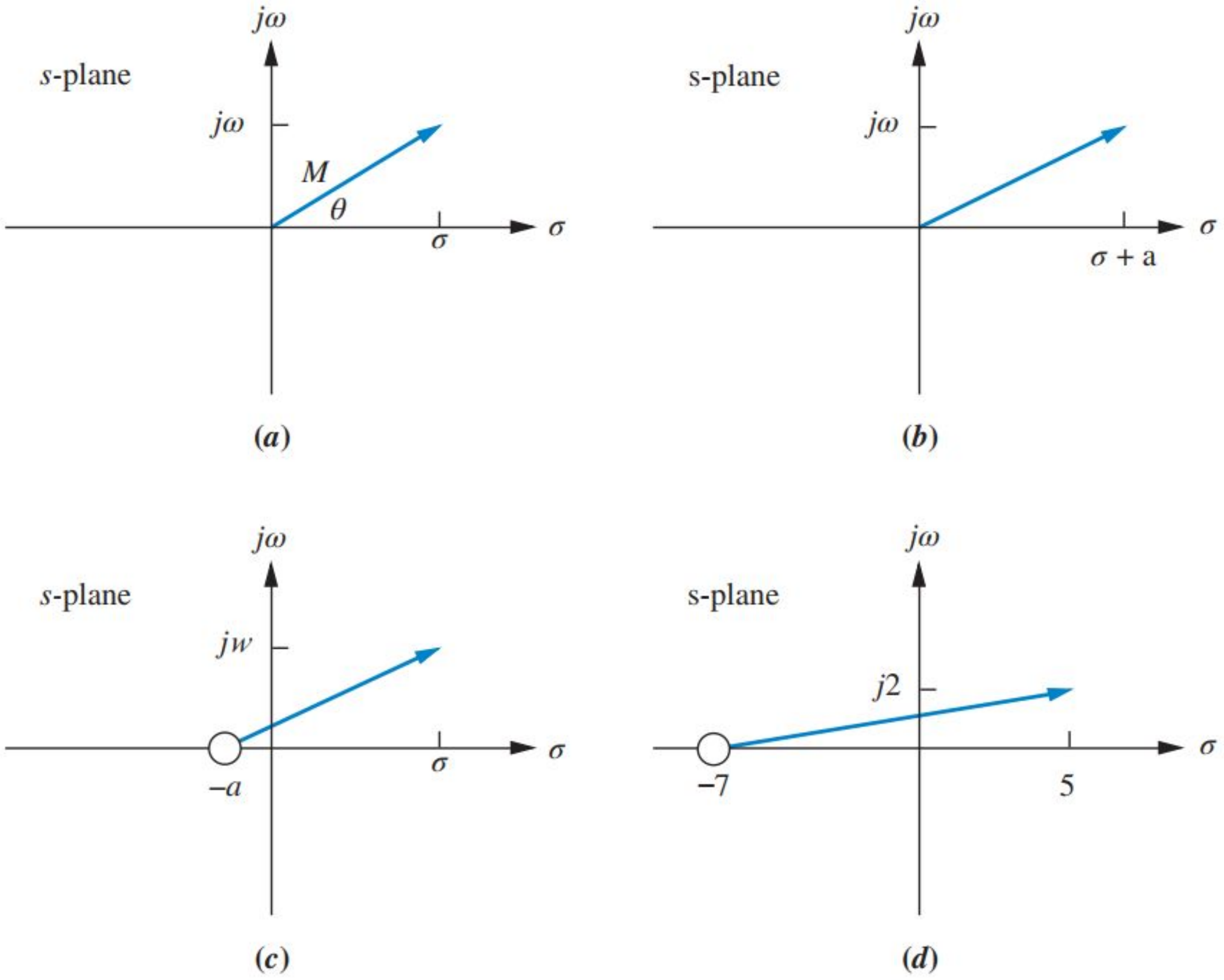


FIGURE 8.2 Vector representation of complex numbers: **a.** $s = \sigma + j\omega$; **b.** $(s + a)$; **c.** alternate representation of $(s + a)$; **d.** $(s + 7)|_{s \to 5+j2}$

$$M = \frac{\Pi \text{ zero lengths}}{\Pi \text{ pole lengths}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |(s + z_i)|}{\prod_{j=1}^{n} |(s + p_j)|}$$

$$\theta = \sum \text{zero angles} - \sum \text{pole angles}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s + p_j)$$

Exemplo 8.1

Cálculo de uma Função Complexa Através de Vetores

PROBLEMA: Dado

$$F(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)} \tag{8.7}$$

determine $F(s)$ no ponto $s = -3 + j4$.

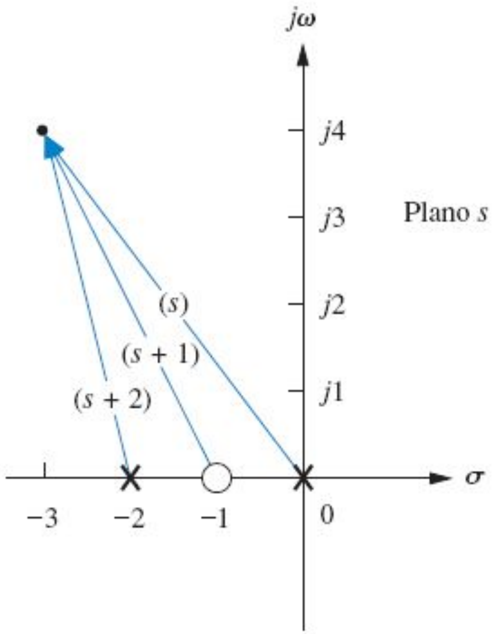


FIGURA 8.3 Representação vetorial da Equação (8.7).

$$\sqrt{20}\angle 116.6^\circ$$

$$5\angle 126.9^\circ$$

$$\sqrt{17}\angle 104.0^\circ$$

$$M\angle\theta = \frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{17}}\angle 116.6^\circ - 126.9^\circ - 104.0^\circ = 0.217\angle -114.3^\circ$$

Exercício 8.1

PROBLEMA: Dado

$$F(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+6)}$$

determine $F(s)$ no ponto $s = -7 + j9$ das seguintes formas:

a. Substituindo diretamente o ponto em $F(s)$

b. Calculando o resultado utilizando vetores

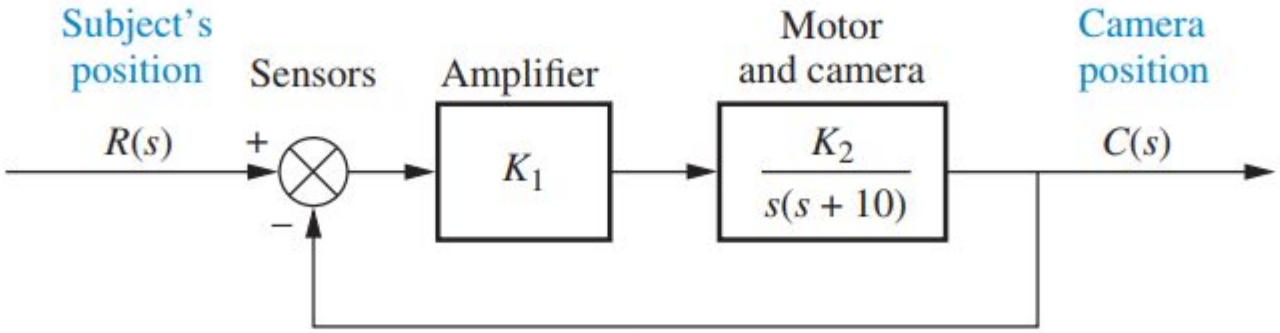
$$-0.0339 - j0.0899 = 0.096 \angle -110.7^\circ$$

Experimente 8.1

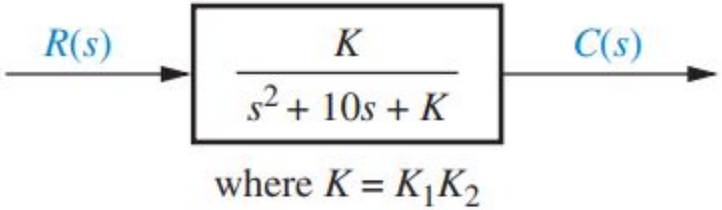
Use as seguintes instruções MATLAB para resolver o problema dado no Exercício 8.1.

```
s=-7+9j;
G=(s+2)*(s+4)/...(s*(s+3)*(s+6));
Theta=(180/pi)*...angle(G)
M=abs(G)
```

Definindo o Lugar Geométrico das Raízes



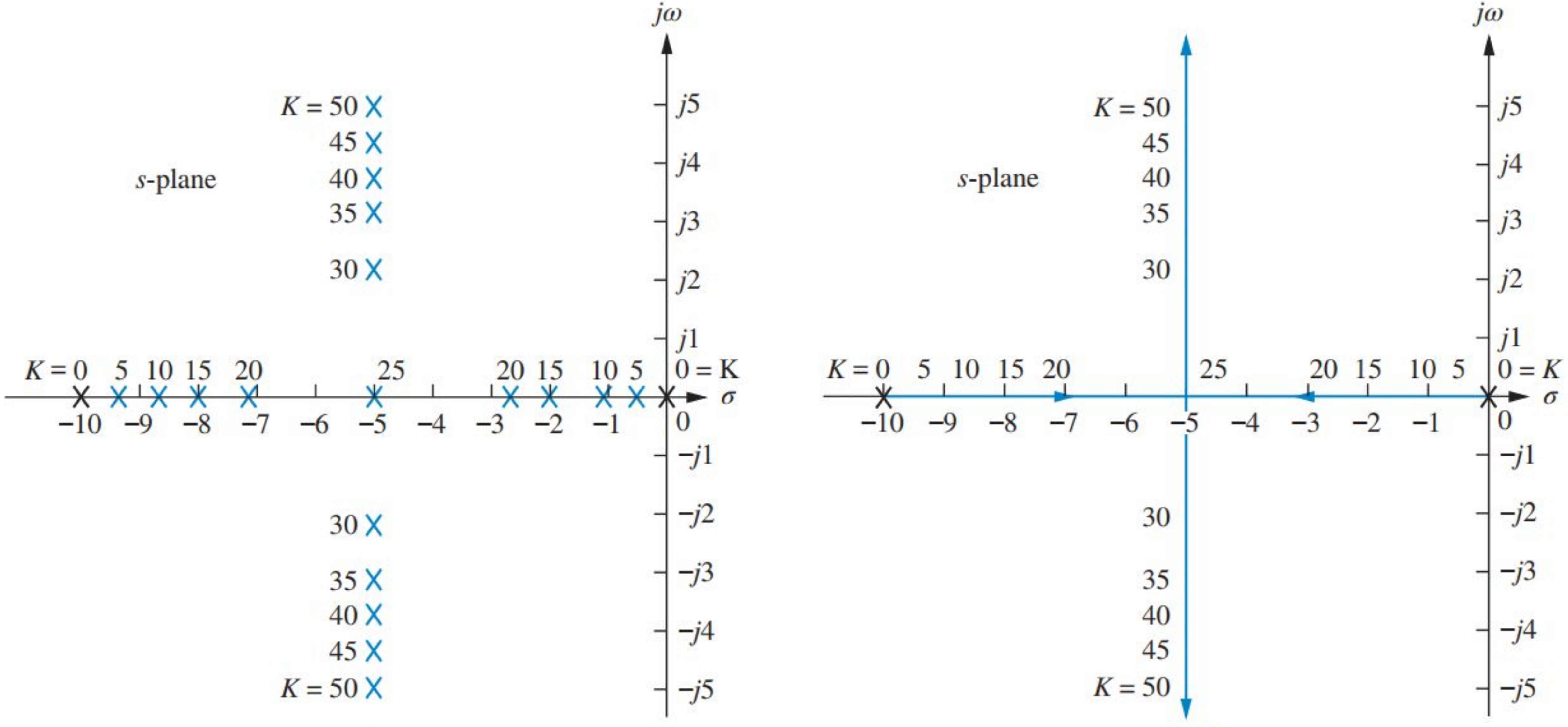
(b)



(c)

TABLE 8.1 Pole location as function of gain for the system of Figure 8.4

K	Pole 1	Pole 2
0	-10	0
5	-9.47	-0.53
10	-8.87	-1.13
15	-8.16	-1.84
20	-7.24	-2.76
25	-5	-5
30	$-5+j2.24$	$-5-j2.24$
35	$-5+j3.16$	$-5-j3.16$
40	$-5+j3.87$	$-5-j3.87$
45	$-5+j4.47$	$-5-j4.47$
50	$-5+j5$	$-5-j5$



jω
s-plane
K = 50
45
40
35
30
K = 0
5
10
15
20
25
0 = K
σ
j5
j4
j3
j2
j1
0
−j1
−j2
−j3
−j4
−j5
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1

(a)
(b)

Propriedades do Lugar Geométrico das Raízes

$$\boxed{T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}}$$

um polo, s, existe quando o polinômio característico no denominador se anula:

$$\boxed{KG(s)H(s) = -1 = 1\angle(2k+1)180^\circ \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots}$$

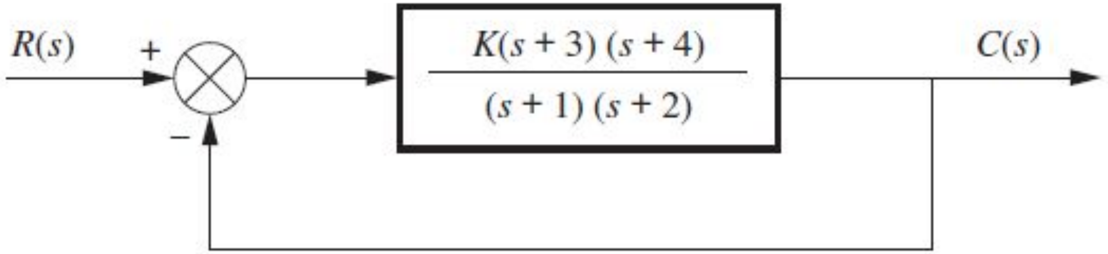
$$\boxed{|KG(s)H(s)| = 1}$$

$$\boxed{\angle KG(s)H(s) = (2k+1)180^\circ}$$

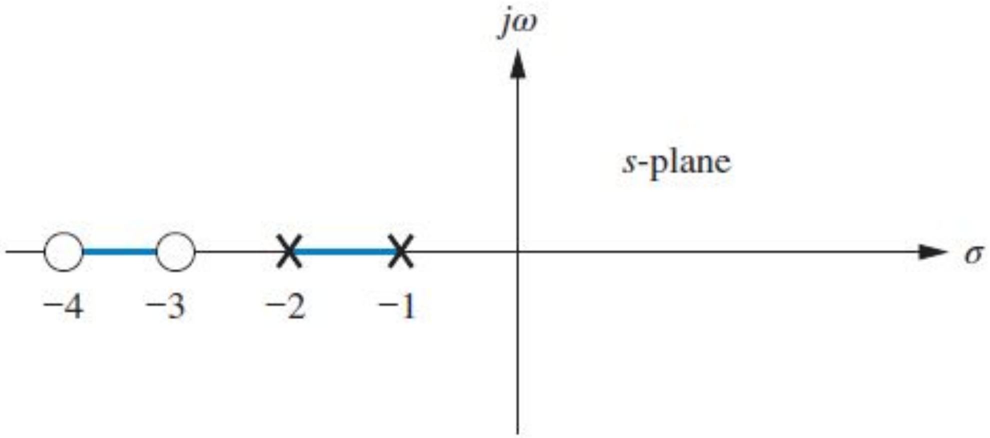
O fato de existirem pólos em malha fechada em –9,47 e –0,53 quando o ganho é 5 já foi estabelecido na Tabela 8.1. Para esse sistema,

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s+10)}$$

Vamos aplicar os conceitos de números complexos revisados



(a)



(b)

$$T(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2 + (3+7K)s + (2+12K)}$$

Considere o ponto –2 + j3

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = 56{,}31^\circ + 71{,}57^\circ - 90^\circ - 108{,}43^\circ = -70{,}55^\circ$$

Caso esses cálculos sejam repetidos para o ponto –2 + j(√2/2) a soma dos ângulos será 180º.

$$\boxed{K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{1}{M} = \frac{\Pi \text{ pole lengths}}{\Pi \text{ zero lengths}}}$$

$$K = \frac{L_3 L_4}{L_1 L_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1.22)}{(2.12)(1.22)} = 0.33$$

Exercício 8.2

PROBLEMA: Dado um sistema com realimentação unitária que possui a função de transferência à frente

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2+4s+13)}$$

faça o seguinte:

a. Calcule o ângulo de $G(s)$ no ponto $(-3 + j0)$ determinando a soma algébrica dos ângulos dos vetores traçados a partir dos zeros e dos polos de $G(s)$ até o ponto dado.

b. Determine se o ponto especificado em **a** está sobre o lugar geométrico das raízes.

c. Se o ponto especificado em **a** estiver sobre o lugar geométrico das raízes, determine o ganho, K, utilizando os comprimentos dos vetores.

RESPOSTAS:

a. Soma dos ângulos $= 180^o$

b. O ponto está sobre o lugar geométrico das raízes

c. $K = 10$

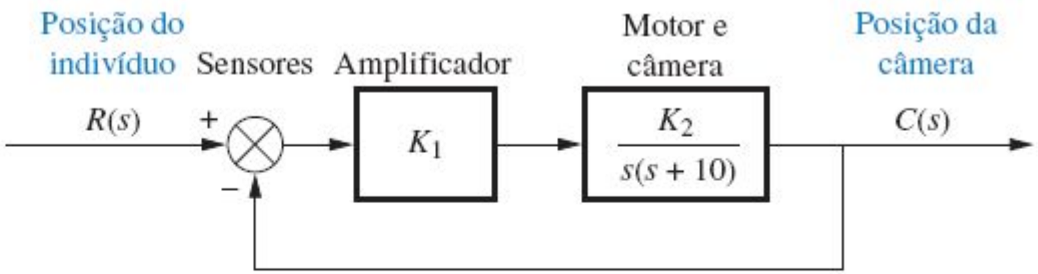
Experimente 8.2

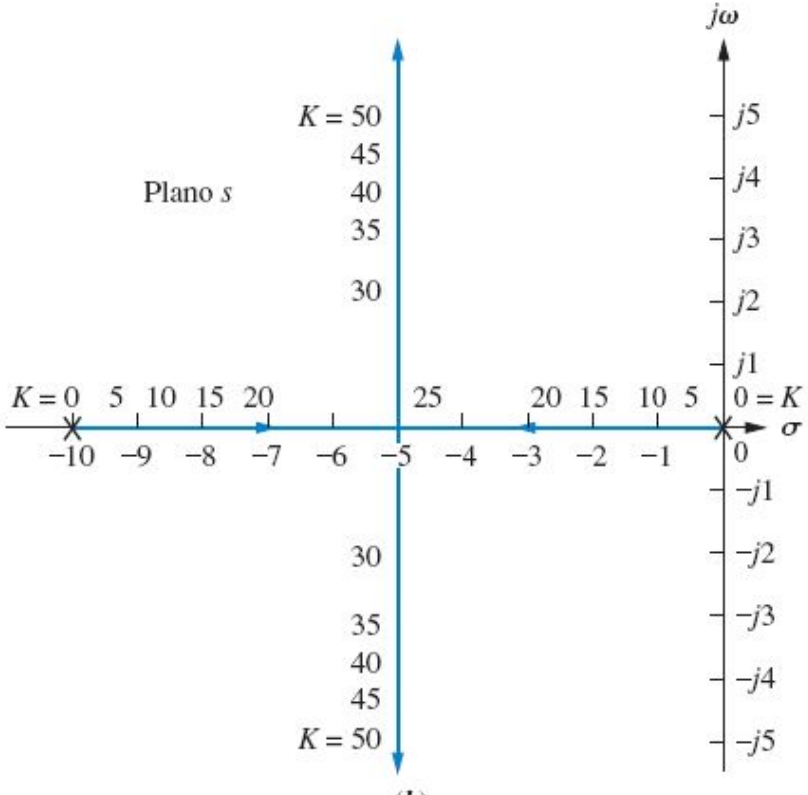
Utilize o MATLAB e as instruções a seguir para resolver o Exercício 8.2.

```
s=-3+0j;
G=(s+2)/(s^2+4*s+13);
Theta=(180/pi)*...angle(G)
M=abs(G);
K=1/M
```

Número de ramos.

O número de ramos do lugar geométrico das raízes é igual ao número de polos em malha fechada.





(b)

Simetria

O lugar geométrico das raízes é simétrico em relação ao eixo real.

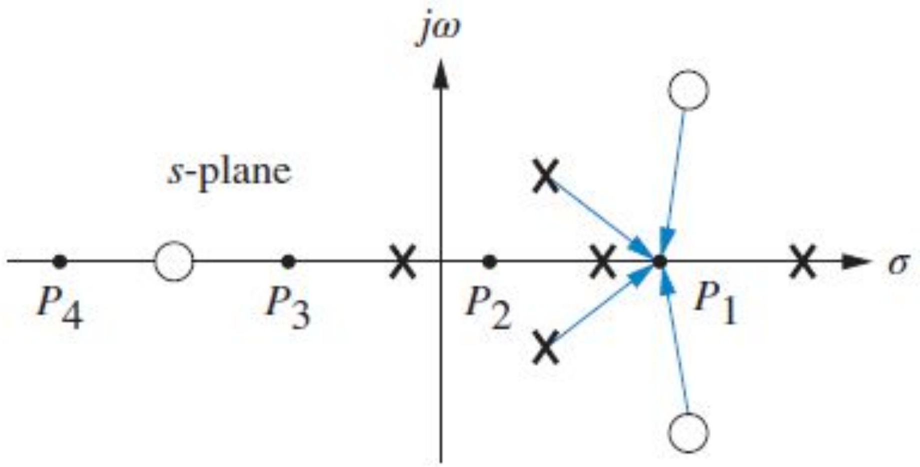
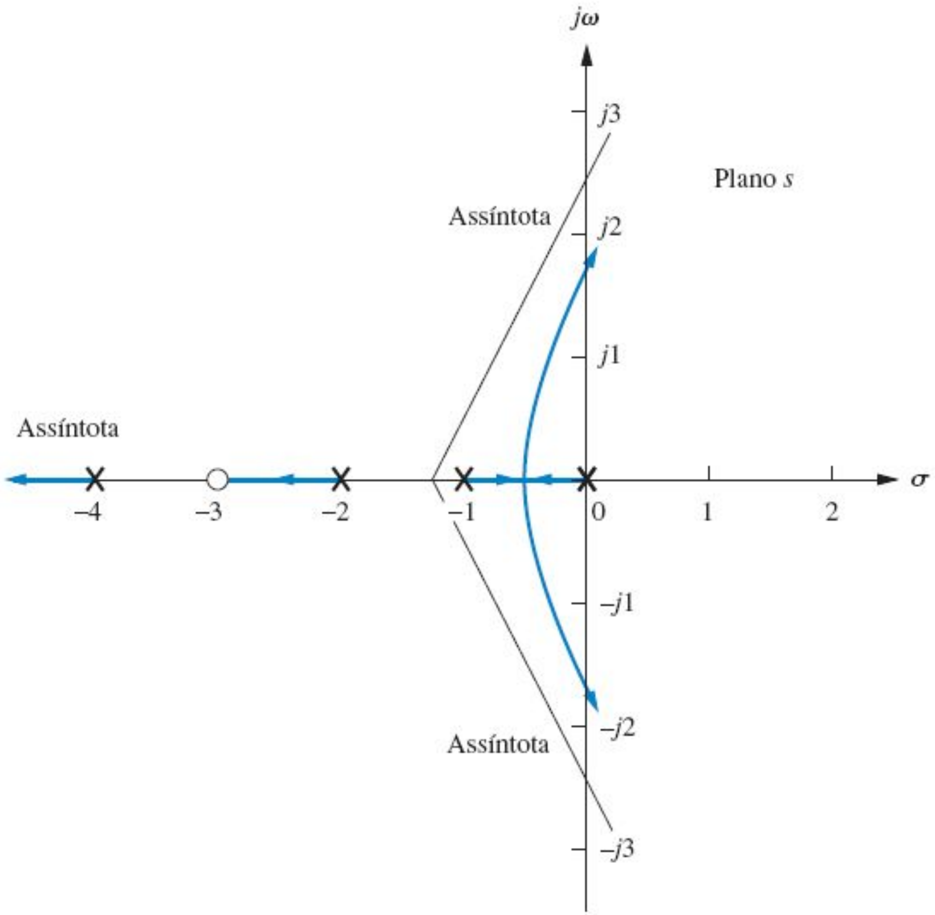


FIGURE 8.8 Poles and zeros of a general open-loop system with test points, P_i, on the real axis

Segmentos do eixo real

No eixo real, para K > 0 o lugar geométrico das raízes existe à esquerda de um número ímpar de polos e/ou zeros finitos em malha aberta sobre o eixo real.



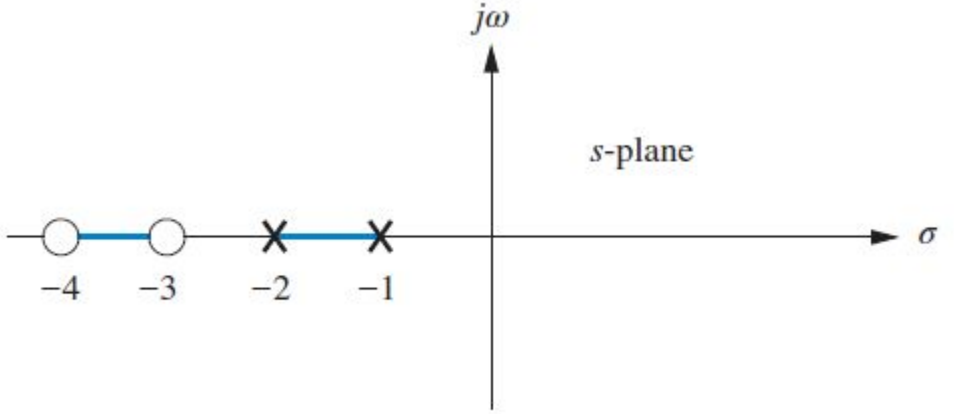


FIGURE 8.9 Real-axis segments of the root locus for the system of Figure 8.6

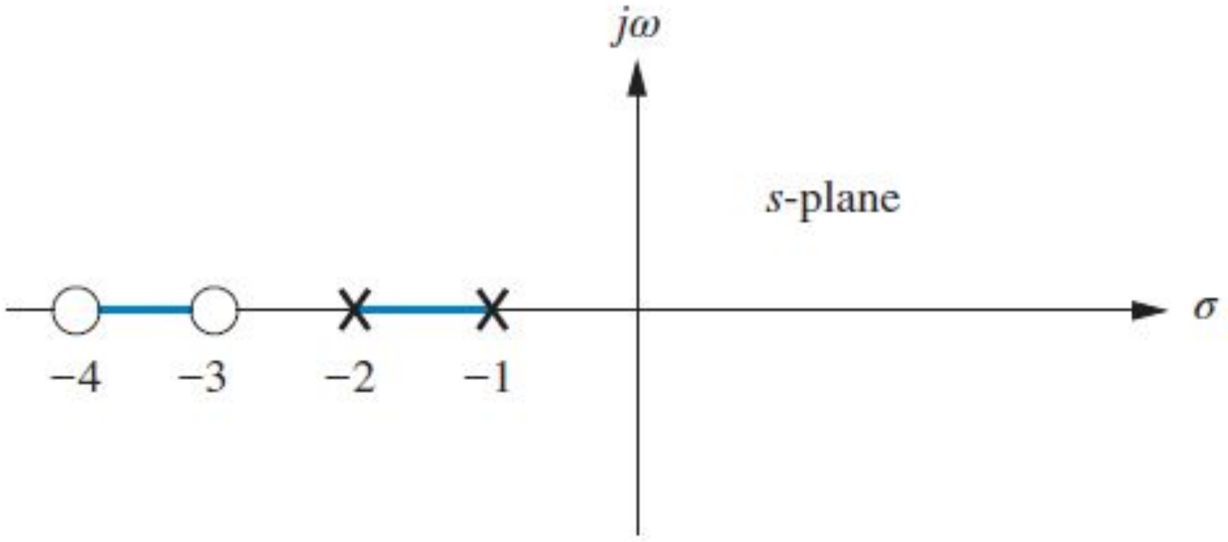
Pontos de início e de término

O lugar geométrico das raízes se inicia nos polos finitos e infinitos de G(s)H(s) e termina nos zeros finitos e infinitos de G(s)H(s).

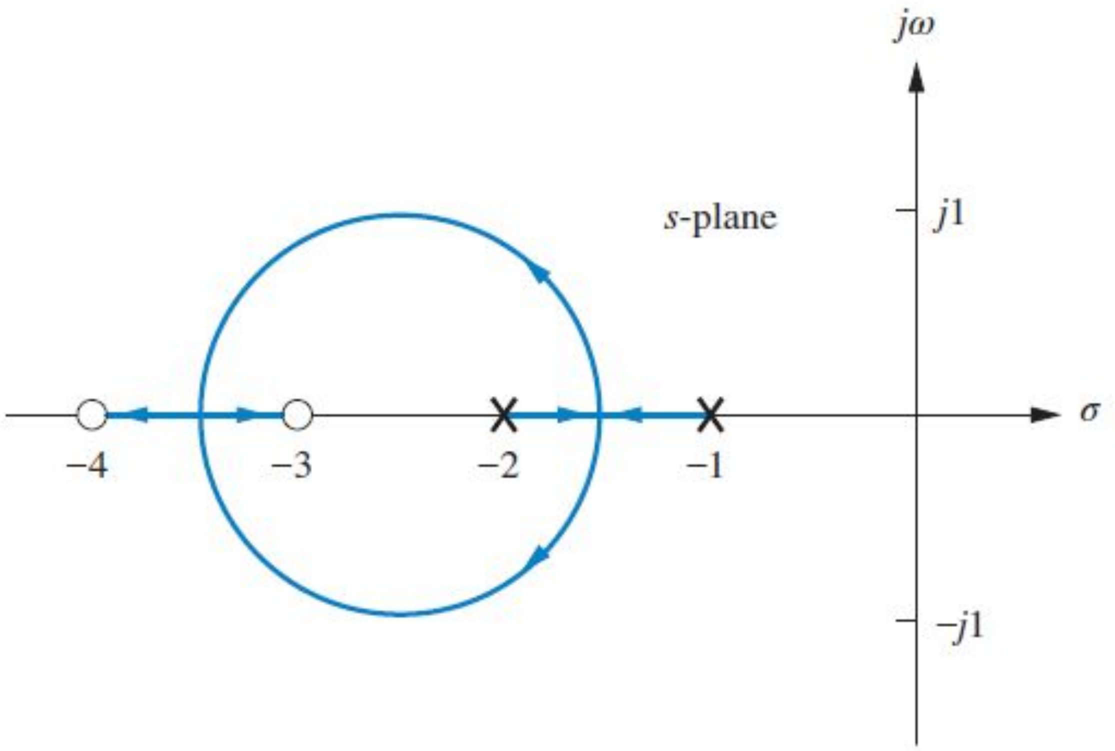
$$\boxed{T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)}}$$

$$T(s) \approx \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + \epsilon}$$

$$T(s) \approx \frac{KN_G(s)D_H(s)}{\epsilon + KN_G(s)N_H(s)}$$



jω
s-plane
σ
−4
−3
−2
−1



jω
s-plane
j1
σ
−4
−3
−2
−1
−j1

Comportamento no infinito

O lugar geométrico das raízes tende a retas assintóticas quando o lugar geométrico tende a infinito. Além disso, a equação das assíntotas é dada pela interseção com o eixo real, sa, e o ângulo, ua, como se segue:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{finite poles} - \sum \text{finite zeros}}{\#\,\text{finite poles} - \#\,\text{finite zeros}}$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\#\,\text{finite poles} - \#\,\text{finite zeros}}$$

Exemplo 8.2

Esboçando um Lugar Geométrico das Raízes com Assíntotas

PROBLEMA: Esboce o lugar geométrico das raízes para o sistema mostrado na Figura 8.11.

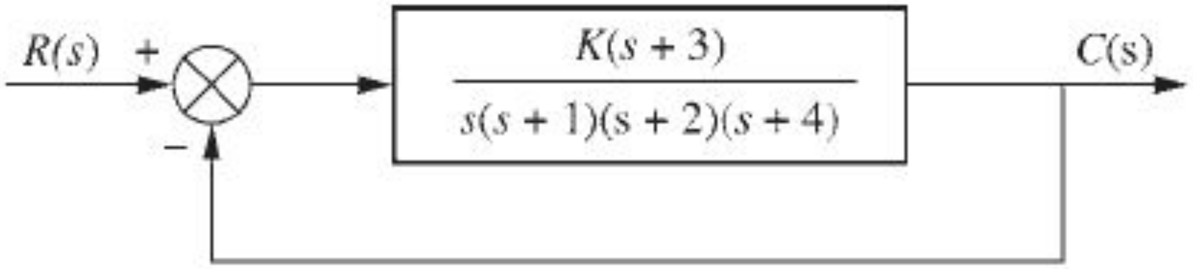


FIGURA 8.11 Sistema para o Exemplo 8.2.

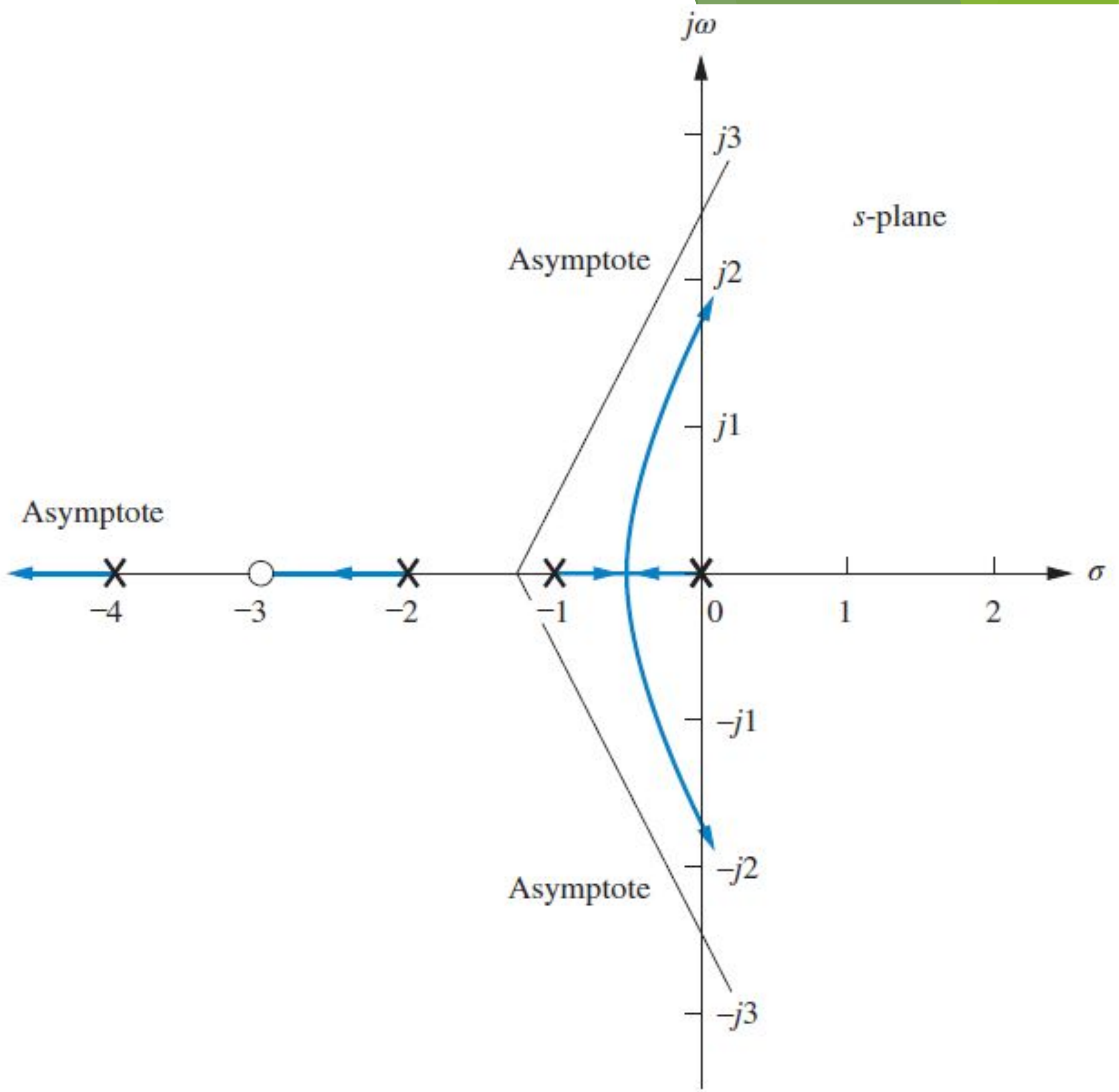
$$\sigma_a = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\#\,\text{finite poles} - \#\,\text{finite zeros}}$$

$$= \pi/3 \qquad \text{for } k = 0$$

$$= \pi \qquad \text{for } k = 1$$

$$= 5\pi/3 \qquad \text{for } k = 2$$



Exercício 8.3

PROBLEMA: Esboce o lugar geométrico das raízes e suas assíntotas para um sistema com realimentação unitária que possui a função de transferência à frente

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

Exemplo 8.8

Projeto de Ganho de Sistema de Terceira Ordem

PROBLEMA: Considere o sistema mostrado na Figura 8.21. Projete o valor do ganho *K*, para resultar em 1,52 % de ultrapassagem. Além disso, estime o tempo de acomodação, o instante de pico e o erro em regime permanente.

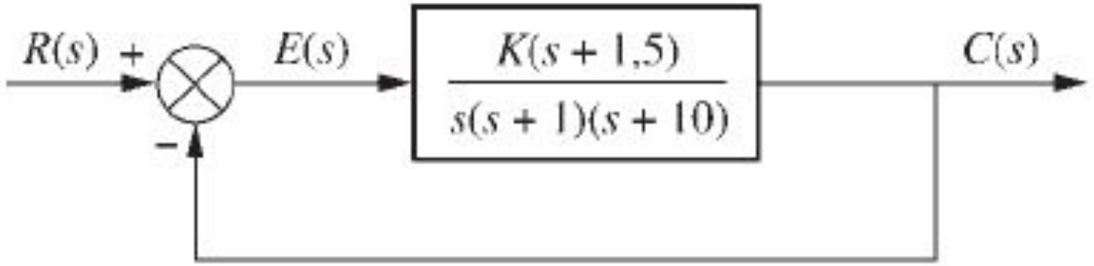
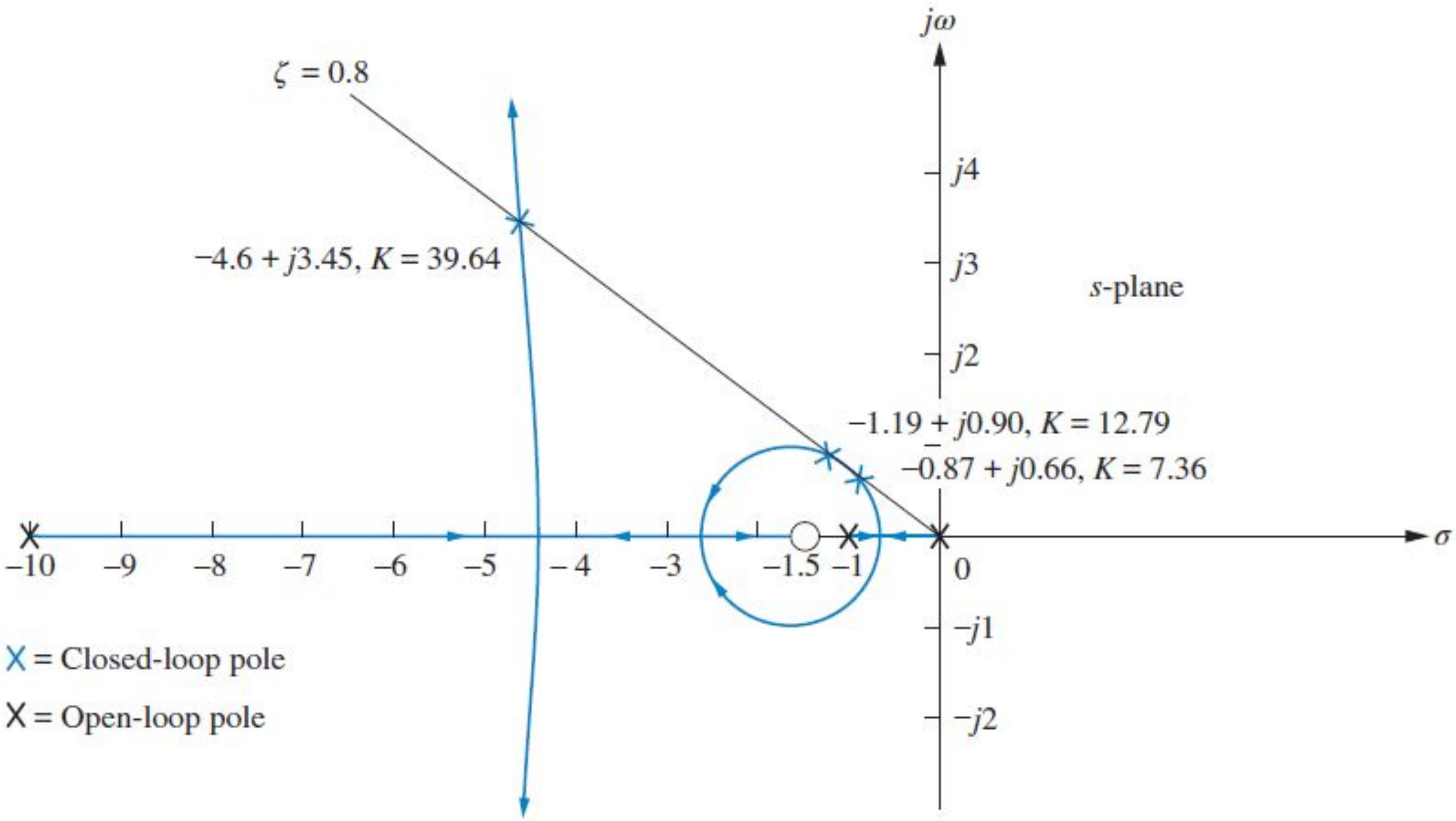


FIGURA 8.21 Sistema para o Exemplo 8.8.



jω
ζ = 0.8
j4
j3
j2
−j1
−j2
s-plane
−4.6 + j3.45, K = 39.64
−1.19 + j0.90, K = 12.79
−0.87 + j0.66, K = 7.36
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−1.5
−1
0
σ
X = Closed-loop pole
X = Open-loop pole

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

em que $\zeta\omega_n$ é a parte real do polo em malha fechada

e $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ é a parte imaginária do polo em malha fechada

TABLE 8.4 Characteristics of the system of Example 8.8

Case	Closed-loop poles	Closed-loop zero	Gain	Third closed-loop pole	Settling time	Peak time	K_v
1	$-0.87 \pm j0.66$	$-1.5 + j0$	7.36	-9.25	4.60	4.76	1.1
2	$-1.19 \pm j0.90$	$-1.5 + j0$	12.79	-8.61	3.36	3.49	1.9
3	$-4.60 \pm j3.45$	$-1.5 + j0$	39.64	-1.80	0.87	0.91	5.9

Exercício 8.6

PROBLEMA: Dado um sistema com realimentação unitária que possui a função de transferência do caminho à frente

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar geométrico das raízes.

b. Utilizando uma aproximação de segunda ordem, projete o valor de K para resultar em 10 % de ultrapassagem para uma entrada em degrau unitário.

c. Estime o tempo de acomodação, o instante de pico, o tempo de subida e o erro em regime permanente para o valor de K projetado no Item (b).

d. Determine a validade de sua aproximação de segunda ordem.

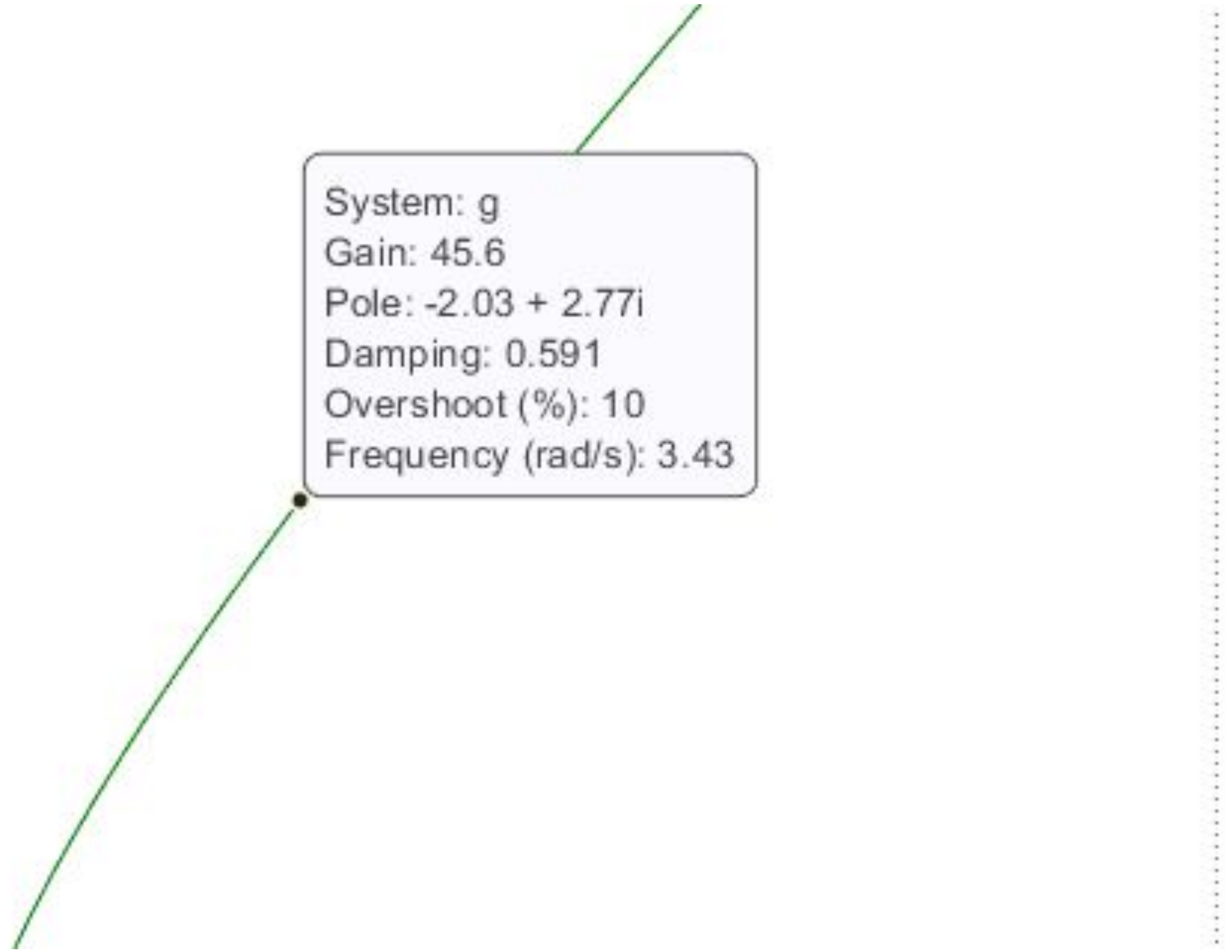
RESPOSTAS:

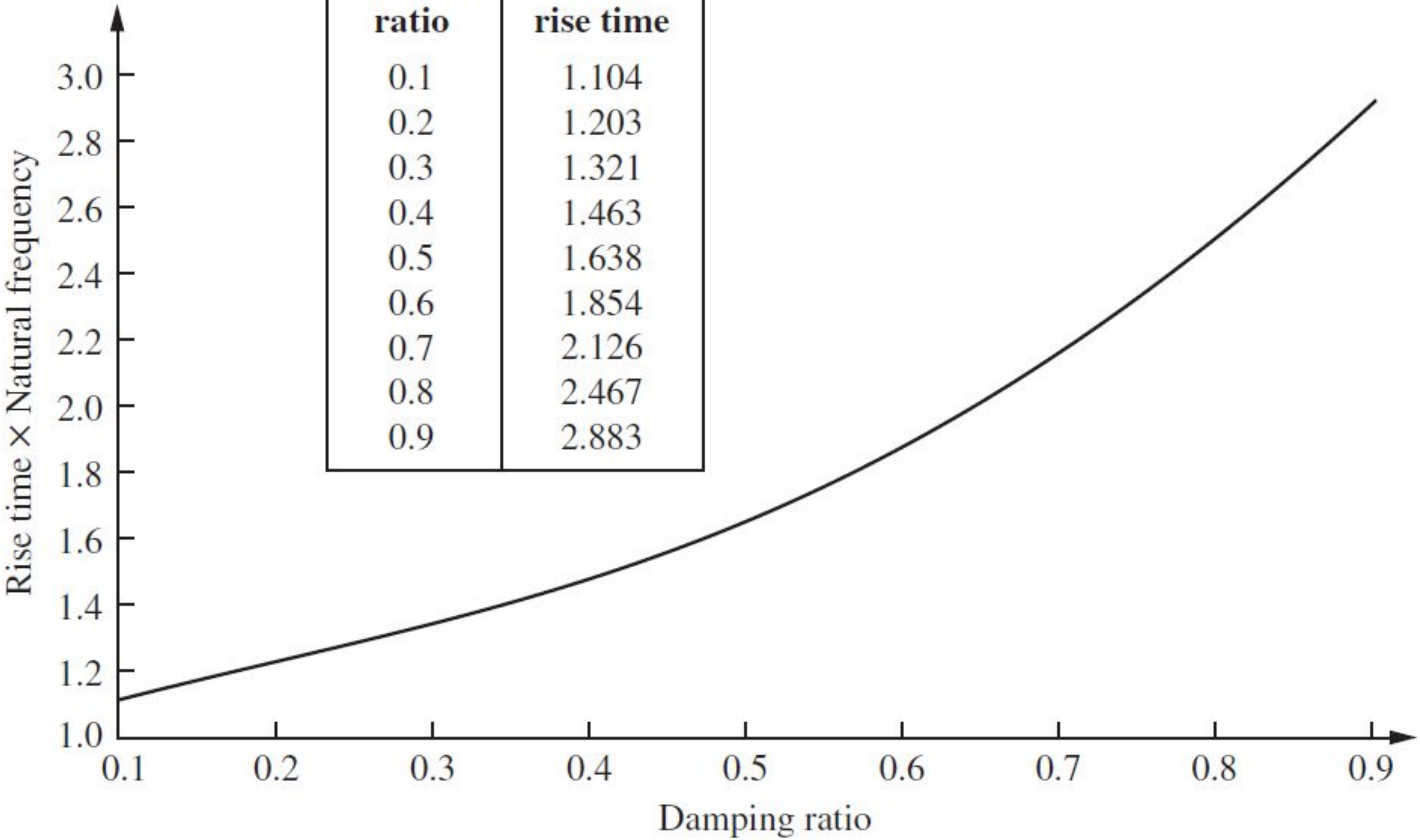
a. Veja a solução disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.

b. $K = 45{,}55$

c. $T_s = 1{,}97$ s, $T_p = 1{,}13$ s, $T_r = 0{,}535$ e $e_{degrau}(\infty) = 0{,}51$

d. A aproximação de segunda ordem não é válida.


System: g
Gain: 45.6
Pole: -2.03 + 2.77i
Damping: 0.591
Overshoot (%): 10
Frequency (rad/s): 3.43



Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{\pi}{\sigma_d}$$