Modelagem no domínio do tempo

Fundamentos de Controle

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}}$$

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}}$$

$\mathbf{x}$ = vetor de estado

$\dot{x}$ = derivada do vetor de estado em relação ao tempo

$\mathbf{y}$ = vetor de saída

$\mathbf{u}$ = vetor de entrada ou vetor de controle

$\mathbf{A}$ = matriz do sistema

$\mathbf{B}$ = matriz de entrada

$\mathbf{C}$ = matriz de saída

$\mathbf{D}$ = matriz de transmissão direta

Exemplo 3.3

Representando um Sistema Mecânico Translacional

PROBLEMA: Obtenha as equações de estado para o sistema mecânico translacional mostrado na Figura 3.7.

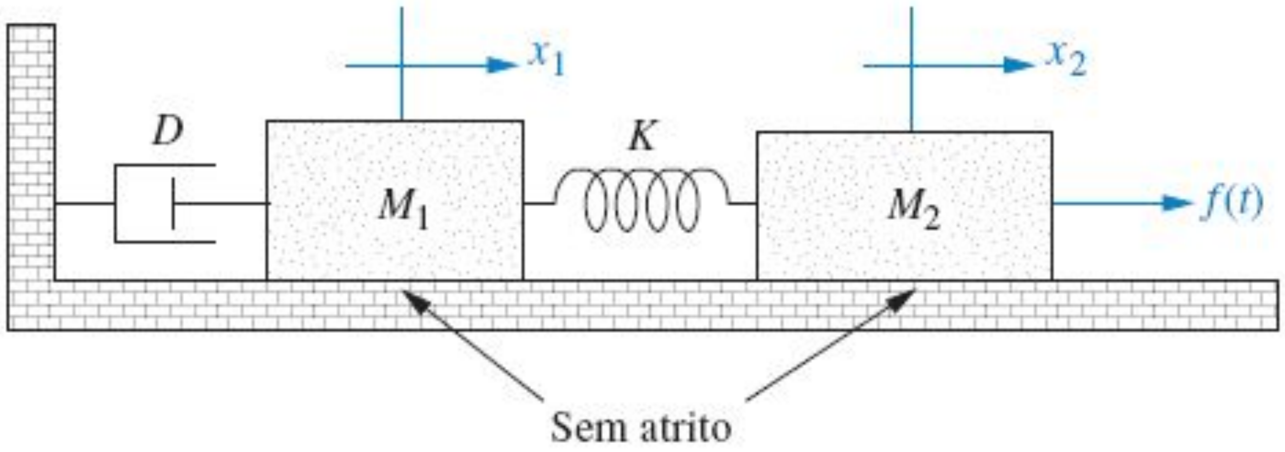


FIGURA 3.7 Sistema mecânico translacional.

$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+D\frac{dx_1}{dt}+Kx_1-Kx_2=0$$

$$-Kx_1+M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+Kx_2=f(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt}= \quad +v_1$$

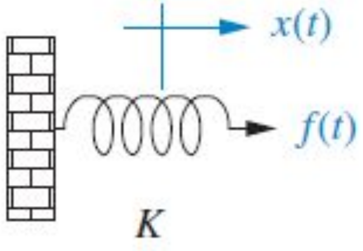
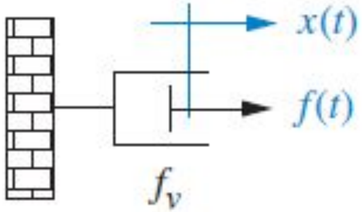
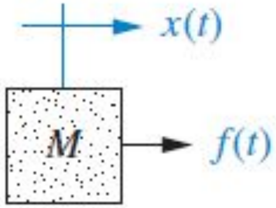
$$\frac{dv_1}{dt}=-\frac{K}{M_1}x_1-\frac{D}{M_1}v_1+\frac{K}{M_1}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}= \quad +v_2$$

$$\frac{dv_2}{dt}=+\frac{K}{M_2}x_1 \quad -\frac{K}{M_2}x_2 \quad +\frac{1}{M_2}f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{v}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{v}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -K/M_1 & -D/M_1 & K/M_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ K/M_2 & 0 & -K/M_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ v_1\\ x_2\\ v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1/M_2\end{bmatrix}f(t)$$

TABLE 2.4 Force-velocity, force-displacement, and impedance translational relationships for springs, viscous dampers, and mass

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedence $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \dfrac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass 	$f(t) = M\dfrac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $f(t)$ = N (newtons), $x(t)$ = m (meters), $v(t)$ = m/s (meters/second), K = N/m (newtons/meter), f_v = N-s/m (newton-seconds/meter), M = kg (kilograms = newton-seconds^2/meter).

Exercício 3.2

PROBLEMA: Represente o sistema mecânico translacional mostrado na Figura 3.9 no espaço de estados, em que $x_3(t)$ é a saída.

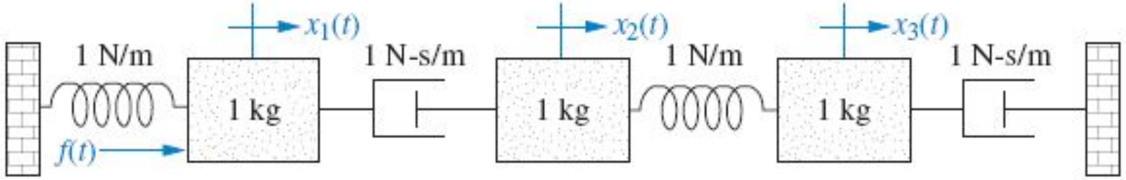


FIGURA 3.9 Sistema mecânico translacional para o Exercício 3.2.

RESPOSTA:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

em que

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 & \dot{x}_1 & x_2 & \dot{x}_2 & x_3 & \dot{x}_3 \end{bmatrix}^T$$

Convertendo uma Função de Transferência para o Espaço de Estados

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y & \dot{x}_1 &= \frac{dy}{dt} \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} & \dot{x}_2 &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ x_3 &= \frac{d^2y}{dt^2} & \dot{x}_3 &= \frac{d^3y}{dt^3} \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} & \dot{x}_n &= \frac{d^n y}{dt^n} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

Exemplo 3.4

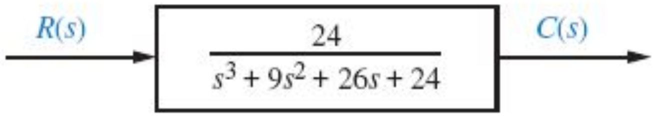
Convertendo uma Função de Transferência com Termo Constante no Numerador

PROBLEMA: Obtenha a representação no espaço de estados na forma de variáveis de fase para a função de transferência mostrada na Figura 3.10(*a*).

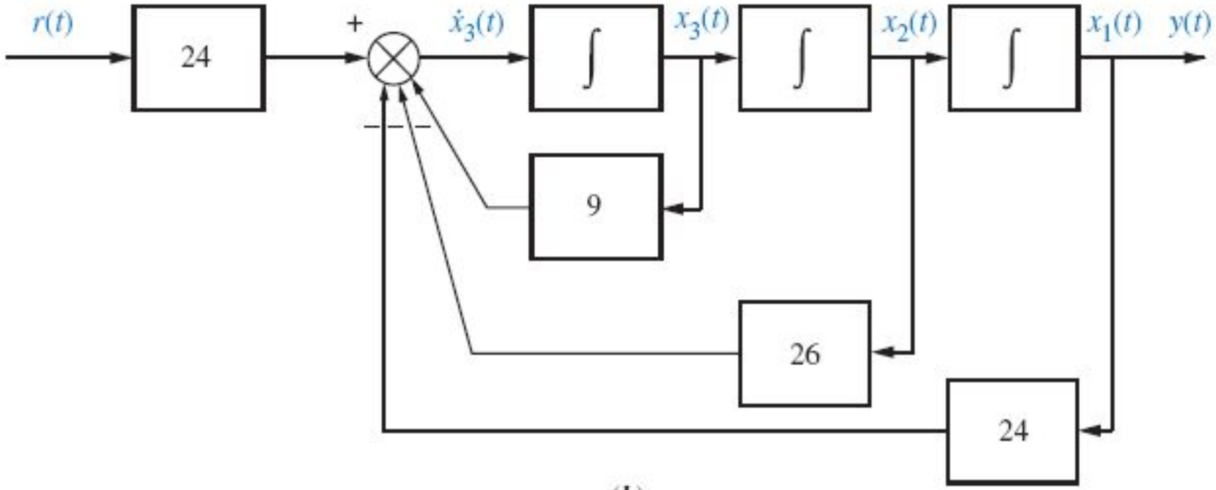
SOLUÇÃO:

Passo 1 Determine a equação diferencial associada. Como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)} \tag{3.54}$$



(*a*)



(*b*)

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s)$$

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r$$

$$x_1 = c$$

$$x_2 = \dot{c}$$

$$x_3 = \ddot{c}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

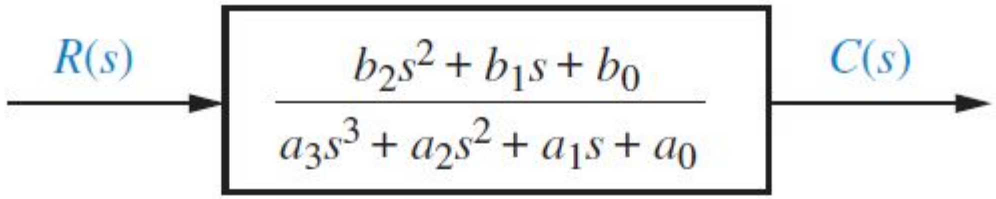
$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r$$

$$y = c = x_1$$

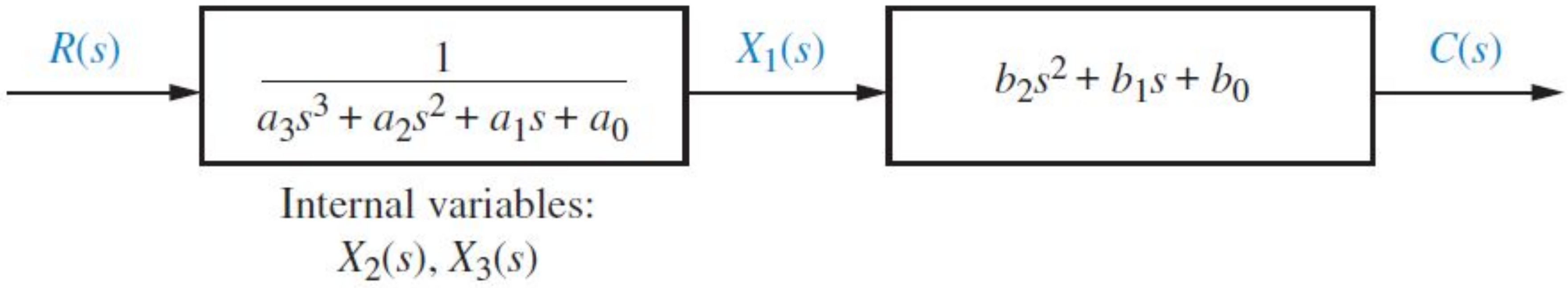
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Função de transferência com polinômio em “s” no numerador



(*a*)



(*b*)

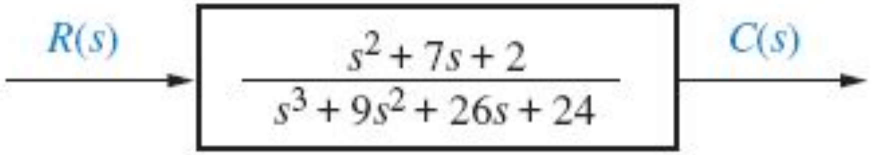
Exemplo 3.5

Convertendo uma Função de Transferência com Polinômio no Numerador

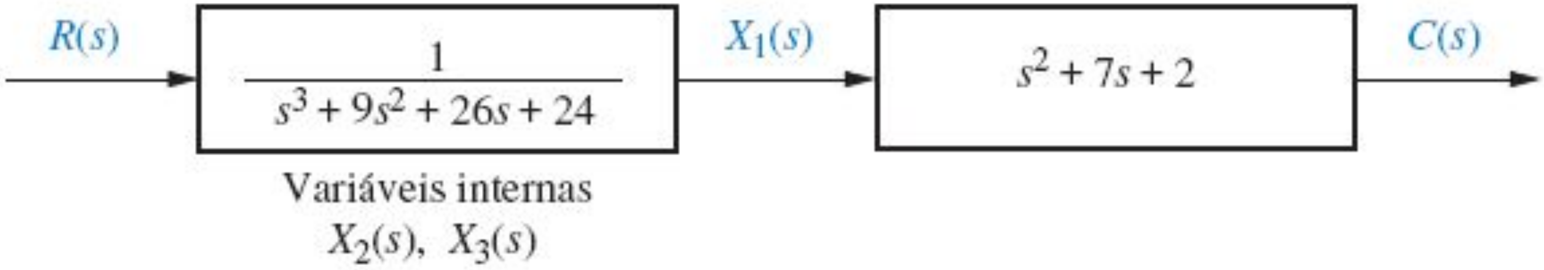
PROBLEMA: Obtenha a representação no espaço de estados da função de transferência mostrada na Figura 3.12(*a*).

SOLUÇÃO: Este problema difere do Exemplo 3.4, uma vez que o numerador possui um polinômio em *s*, em vez de apenas um termo constante.

Passo 1 Separe o sistema em dois blocos em cascata, como mostrado na Figura 3.12(*b*). O primeiro bloco contém o denominador e o segundo bloco contém o numerador.



(*a*)



(*b*)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$C(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)X_1(s) = (s^2 + 7s + 2)X_1(s)$$

$$c = \ddot{x}_1 + 7\dot{x}_1 + 2x_1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \ddot{x}_1 &= x_3 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Experimente 3.1

Use as seguintes instruções MATLAB para criar uma representação LTI no espaço de estados a partir da função de transferência mostrada na Figura 3.12(a). A matriz **A** e o vetor **B** são mostrados na Eq. (3.63). O vetor **C** é mostrado na Eq. (3.67).

```
 num=[1 7 2];
den=[1 9 26 24];
[A,B,C,D]=tf2ss...
 (num,den);
P=[0 0 1;0 1 0;1 0 0];
A=inv(P)*A*P
B=inv(P)*B
C=C*P
```

Exercício 3.3

PROBLEMA: Obtenha as equações de estado e a equação de saída para a representação em variáveis de fase da função de transferência $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+7s+9}$.

RESPOSTA:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$