Funções de Transferência de Circuitos Elétricos

Fundamentos de Controle

Componente	Tensão-corrente	Corrente-tensão	Tensão-carga	Impedância $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admitância $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Indutor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Observação: O seguinte conjunto de símbolos e unidades é utilizado neste livro: $v(t)$ – V (volts), $i(t)$ – A (ampères), $q(t)$ – Q (coulombs), C – F (farads), R – Ω (ohms), G – S (siemens), L – H (henrys).

Exemplo 2.6

Função de Transferência – Malha Única Através da Equação Diferencial

PROBLEMA: Determine a função de transferência que relaciona a tensão no capacitor, $V_C(s)$, à tensão de entrada, $V(s)$, na Figura 2.3.

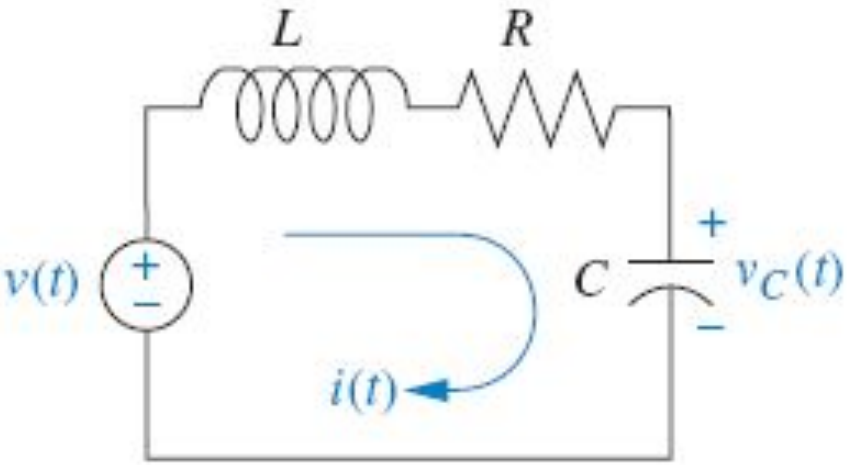


FIGURA 2.3 Circuito *RLC*.

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = v(t)$$

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=v(t)$$

$$v(t)=\frac{1}{C}q(t) \qquad q(t)=Cv_C(t)$$

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=v(t)$$

$$(LCs^2+RCs+1)V_C(s)=V(s)$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)}=\frac{1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

Exemplo 2.7

Função de Transferência – Malha Única Através do Método da Transformada

PROBLEMA: Repita o Exemplo 2.6 utilizando a análise das malhas e o método da transformada sem escrever a equação diferencial.

Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$
$\frac{1}{Cs}$
R
Ls

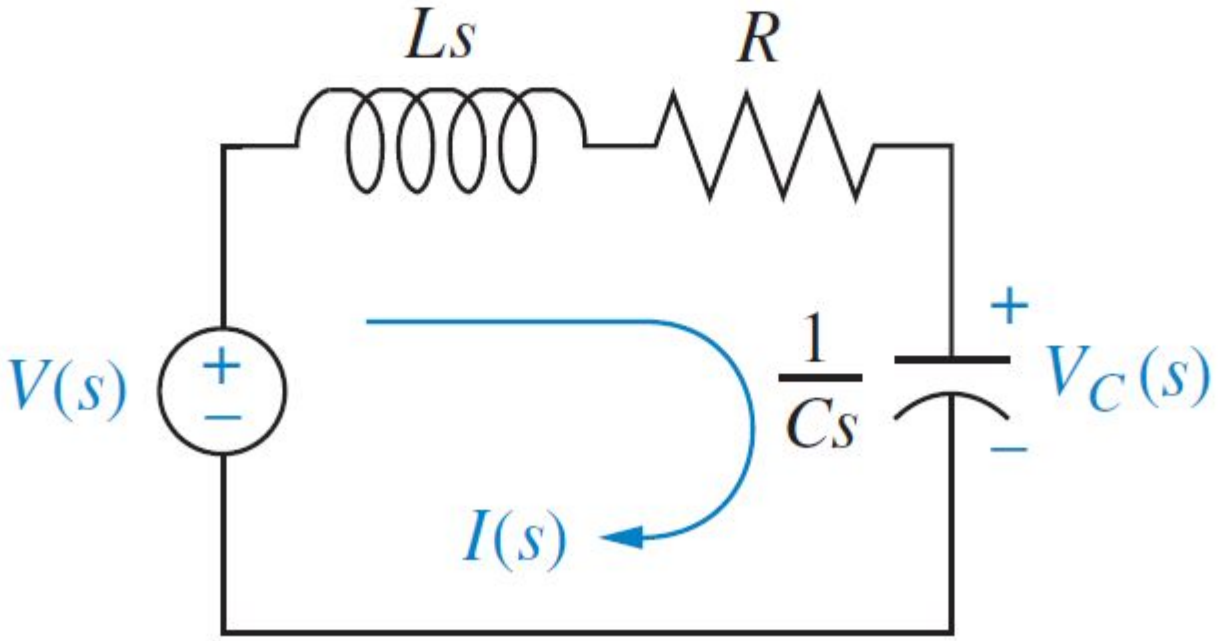
$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$V(s) = LsI(s)$$

$$V(s) = RI(s)$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s)$$

Equações de Laplace para modelagem elétrica



$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right) I(s) = V(s)$$

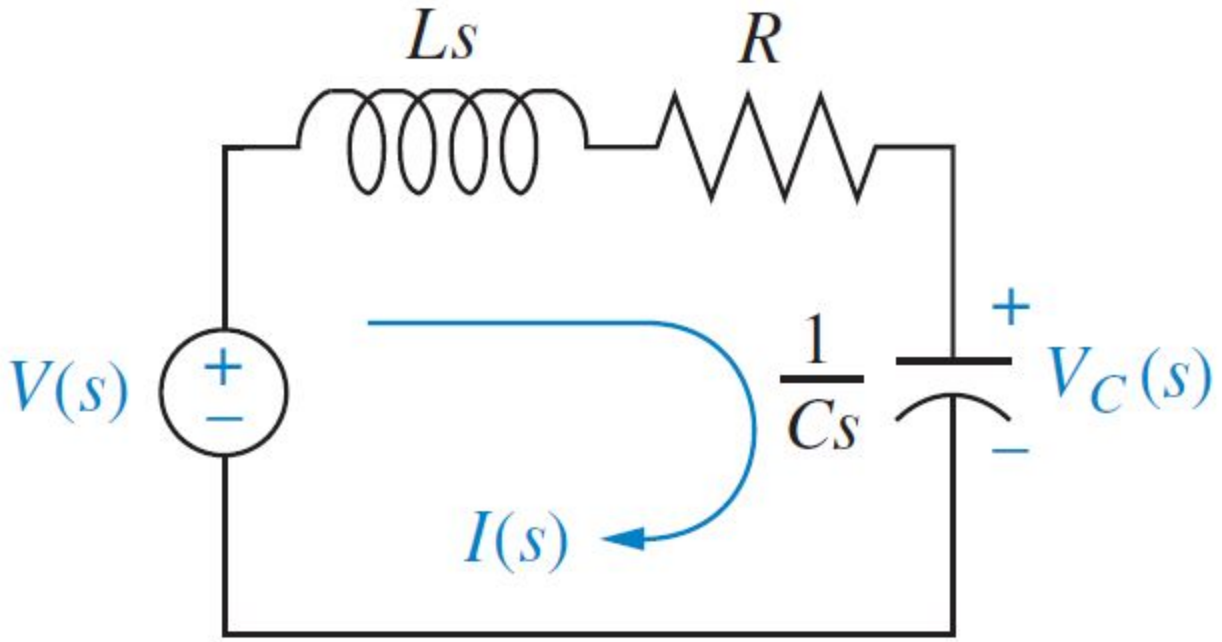
$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

$$V_C(s) = I(s)\frac{1}{Cs}$$

Exemplo 2.8

Função de Transferência – Nó Único Através do Método da Transformada

PROBLEMA: Repita o Exemplo 2.6 utilizando a análise nodal e sem escrever a equação diferencial.



$$\frac{V_C(s)}{1/Cs} + \frac{V_C(s) - V(s)}{R + Ls} = 0$$

Exemplo 2.9

Função de Transferência – Malha Única Através da Divisão de Tensão

PROBLEMA: Repita o Exemplo 2.6 utilizando divisão de tensão e o circuito transformado.

$$V_C(s) = \frac{1/Cs}{\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)} V(s)$$

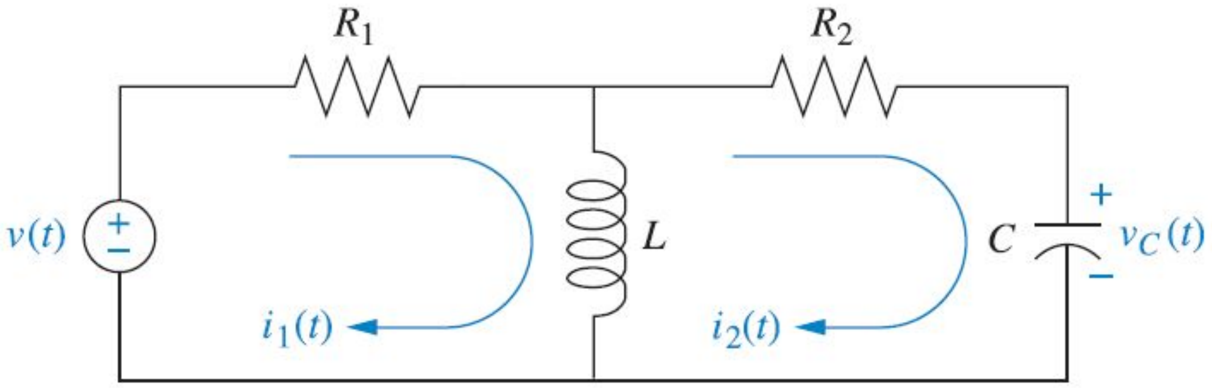
Circuitos Complexos Através da Análise das Malhas

1. Substituir os valores dos elementos passivos por suas impedâncias.
2. Substituir todas as fontes e variáveis temporais por suas transformadas de Laplace.
3. Admitir uma corrente transformada e um sentido de corrente em cada malha.
4. Escrever a lei de Kirchhoff das tensões para cada malha.
5. Resolver as equações simultâneas para a saída.
6. Formar a função de transferência.

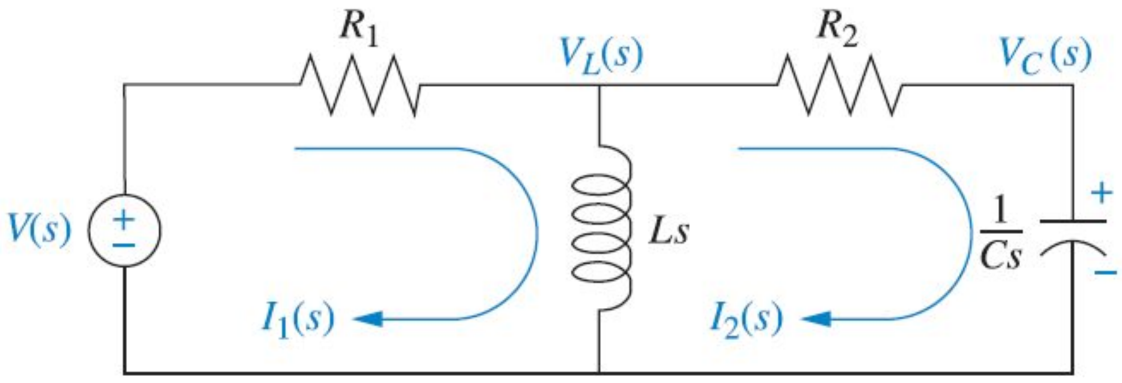
Exemplo 2.10

Função de Transferência – Múltiplas Malhas

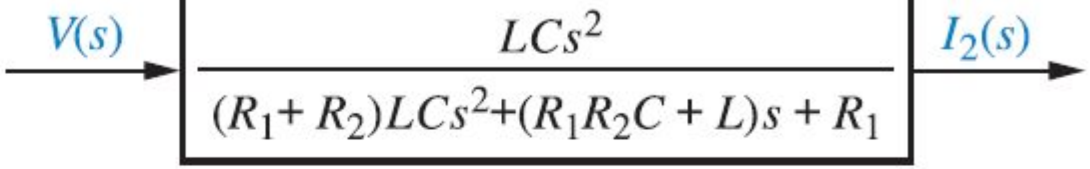
PROBLEMA: Dado o circuito mostrado na Figura 2.6(a), determine a função de transferência, $I_2(s)/V(s)$.



(a)



(b)



(c)

- Malha 1

$$R_1 I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$$

$$(R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$$

- Malha 2

$$LsI_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - LsI_1(s) = 0$$

$$-LsI_1(s) + \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I_2(s) = 0$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & V(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{LsV(s)}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & -Ls \\ -Ls & \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) \end{vmatrix}$$

$$G(s) = \frac{I_2(s)}{V(s)} = \frac{Ls}{\Delta} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1}$$

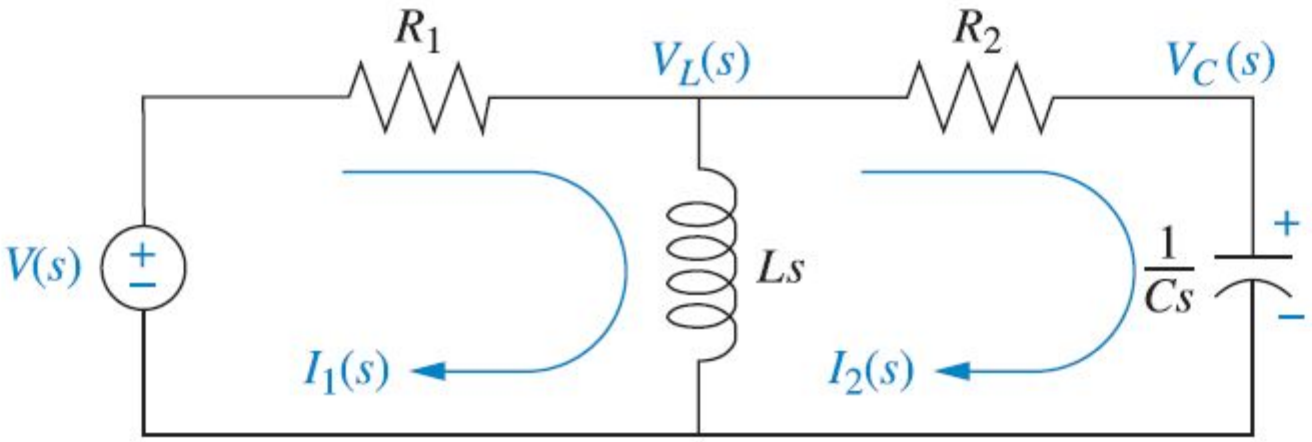
Circuitos Complexos Através da Análise Nodal

1. Substituir os valores dos elementos passivos por suas admitâncias.
2. Substituir todas as fontes e variáveis temporais por suas transformadas de Laplace.
3. Substituir as fontes de tensão transformadas por fontes de corrente transformadas.
4. Escrever a lei de Kirchhoff das correntes para cada nó.
5. Resolver as equações simultâneas para a saída.
6. Formar a função de transferência.

Exemplo 2.11

Função de Transferência – Múltiplos Nós

PROBLEMA: Determine a função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, para o circuito mostrado na Figura 2.6(*b*). Utilize a análise nodal.



(*b*)

$$\frac{V_L(s) - V(s)}{R_1} + \frac{V_L(s)}{Ls} + \frac{V_L(s) - V_C(s)}{R_2} = 0$$

$$CsV_C(s) + \frac{V_C(s) - V_L(s)}{R_2} = 0$$

$$\left(G_1 + G_2 + \frac{1}{Ls}\right)V_L(s) \qquad - G_2V_C(s) = V(s)G_1$$

$$-G_2V_L(s) + (G_2 + Cs)V_C(s) = 0$$

$$G_1 = 1/R_1$$

$$G_2 = 1/R_2$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\dfrac{G_1G_2}{C}s}{(G_1 + G_2)s^2 + \dfrac{G_1G_2L + C}{LC}s + \dfrac{G_2}{LC}}$$