Modelagem no domínio do tempo

Fundamentos de Controle

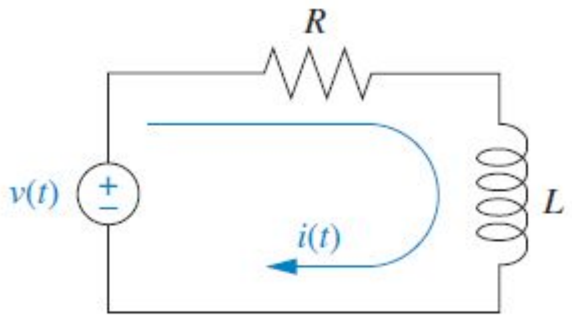
Controle Clássico

- Vantagem
  - Substituir uma equação diferencial por uma equação algébrica
  - Fornecem rapidamente informações sobre a estabilidade
  - Fornecem rapidamente informações sobre a resposta transitória
- Desvantagem
  - Aplicada apenas a sistemas lineares e invariantes no tempo, ou sistemas que assim podem ser aproximados.

Espaço de Estados

- Vantagens
  - Representar sistemas não lineares que possuam folgas, saturação e zona morta.
  - Tratar, convenientemente, sistemas com condições iniciais não nulas.
  - Sistemas variantes no tempo.
  - Sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas podem ser representados de forma compacta.

Solução Clássica



Resolvendo em I(s)/V(s)
Entrada degrau V(s) = 1/s

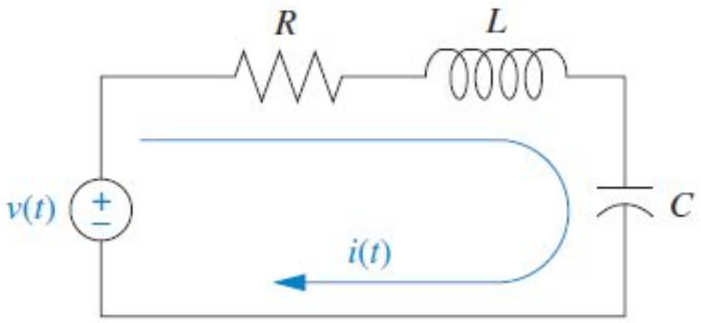
$$L\frac{di}{dt} + Ri = v(t)$$

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) = V(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right) + \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) + i(0)e^{-(R/L)t}$$

Variáveis de Estados



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = v(t)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = i$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v(t)$$

$$v_L(t) = -\frac{1}{C}q(t) - Ri(t) + v(t)$$

$$\frac{dv_R}{dt} = -\frac{R}{L}v_R - \frac{R}{L}v_C + \frac{R}{L}v(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{RC}v_R$$

TABLE 2.3 Voltage-current, voltage-charge, and impedance relationships for capacitors, resistors, and inductors

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^1 i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^1 v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} dq/dt \\ di/dt \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}; \quad u = v(t)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

$$y = v_L(t); \quad \mathbf{C} = [-1/C \quad -R]; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \quad D = 1; \quad u = v(t)$$

Exemplo 3.1

Representando um Circuito Elétrico

PROBLEMA: Dado o circuito elétrico da Figura 3.5, obtenha uma representação no espaço de estados, caso a saída seja a corrente através do resistor.

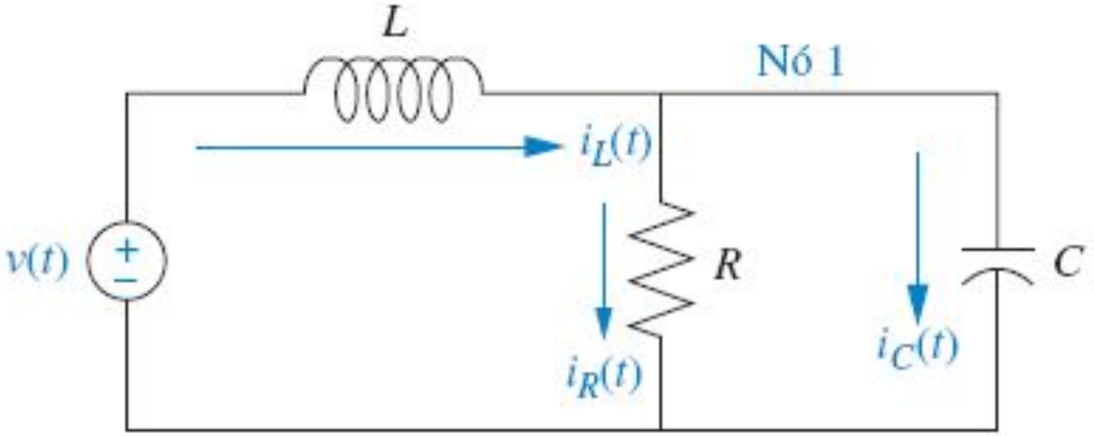


FIGURA 3.5 Circuito elétrico para representação no espaço de estados.

- Escolha as variáveis de estado escrevendo as equações diferenciais para todos os elementos armazenadores de energia, isto é, o indutor e o capacitor.

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L$$

- Obter iC e vL em função das variáveis de estado, vC e iL.

$$i_C = -i_R + i_L$$
$$= -\frac{1}{R}v_C + i_L$$

$$v_L = -v_C + v(t)$$

- Substitua os resultados das Equações

$$C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R}v_C + i_L$$

$$L\frac{di_L}{dt} = \quad -v_C + v(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{C}i_L$$

$$\frac{di_L}{dt} = \quad -\frac{1}{L}v_C + \frac{1}{L}v(t)$$

- Obtenha a equação de saída. Como a saída é iR(t),

$$i_R = \frac{1}{R} v_C$$

- Representação no espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v(t)$$

$$i_R = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2

Representando um Circuito Elétrico com uma Fonte Controlada

PROBLEMA: Obtenha as equações de estado e de saída para o circuito elétrico mostrado na Figura 3.6, caso o vetor de saída seja $\mathbf{y} = [v_{R_2} \quad i_{R_2}]^T$, em que T significa transposta.[7]

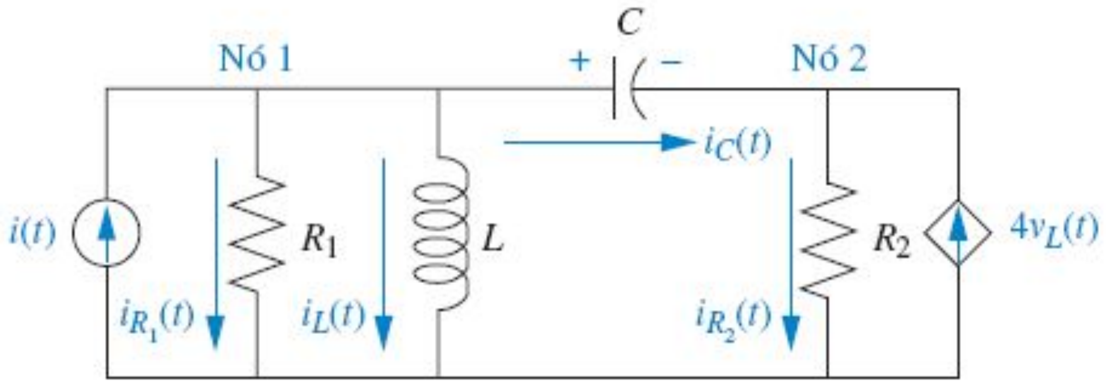


FIGURA 3.6 Circuito elétrico para o Exemplo 3.2.

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C$$

$$x_1 = i_L; \quad x_2 = v_C$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

- Ao longo da malha que contém L e C

$$v_L = v_C + v_{R_2} = v_C + i_{R_2}R_2$$

$$i_{R_2} = i_C + 4v_L$$

- Resolvendo para vL, obtemos

$$v_L = v_C + (i_C + 4v_L)R_2$$

$$v_L = \frac{1}{1 - 4R_2}(v_C + i_C R_2)$$

- Assim, no Nó 1 podemos escrever a soma das correntes como

$$\begin{aligned} i_C &= i(t) - i_{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_{R_1}}{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_L}{R_1} - i_L \end{aligned}$$

$$(1-4R_2)v_L - R_2 i_C = v_C$$

$$-\frac{1}{R_1}v_L - i_C = i_L - i(t)$$

- Resolvendo simultaneamente para vL e iC resulta

$$v_L = \frac{1}{\Delta}[R_2 i_L - v_C - R_2 i(t)]$$

$$i_C = \frac{1}{\Delta}\left[(1-4R_2)i_L + \frac{1}{R_1}v_C - (1-4R_2)i(t)\right]$$

$$\Delta = -\left[(1-4R_2) + \frac{R_2}{R_1}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2/(L\Delta) & -1/(L\Delta) \\ (1-4R_2)/(C\Delta) & 1/(R_1 C\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_2/(L\Delta) \\ -(1-4R_2)/(C\Delta) \end{bmatrix} i(t)$$

$$v_{R_2} = -v_C + v_L$$

$$i_{R_2} = i_C + 4v_L$$

$$\begin{bmatrix} v_{R_2} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2/\Delta & -(1+1/\Delta) \\ 1/\Delta & (1-4R_1)/(\Delta R_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_2/\Delta \\ -1/\Delta \end{bmatrix} i(t)$$

Exercício 3.1

PROBLEMA: Obtenha a representação no espaço de estados do circuito elétrico mostrado na Figura 3.8. A saída é $v_s(t)$.

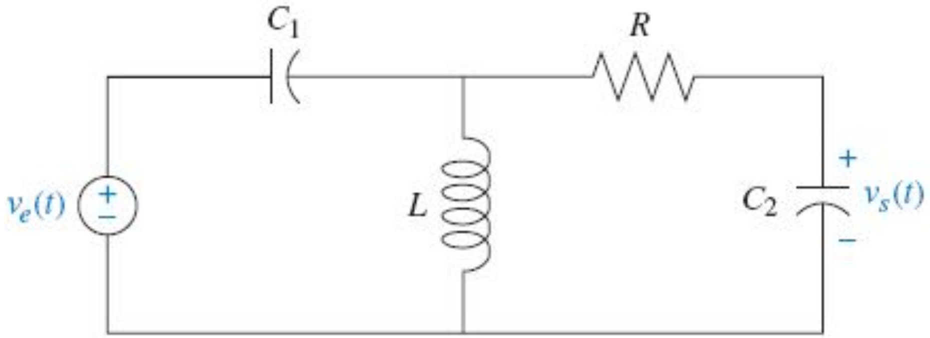


FIGURA 3.8 Circuito elétrico para o Exercício 3.1.

RESPOSTA:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 1/C_1 & -1/C_1 \\ -1/L & 0 & 0 \\ 1/C_2 & 0 & -1/C_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_i(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{RC_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} v_i(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Modelagem no domínio do tempo

Fundamentos de Controle

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}}$$

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}}$$

$\mathbf{x}$ = vetor de estado

$\dot{x}$ = derivada do vetor de estado em relação ao tempo

$\mathbf{y}$ = vetor de saída

$\mathbf{u}$ = vetor de entrada ou vetor de controle

$\mathbf{A}$ = matriz do sistema

$\mathbf{B}$ = matriz de entrada

$\mathbf{C}$ = matriz de saída

$\mathbf{D}$ = matriz de transmissão direta

Exemplo 3.3

Representando um Sistema Mecânico Translacional

PROBLEMA: Obtenha as equações de estado para o sistema mecânico translacional mostrado na Figura 3.7.

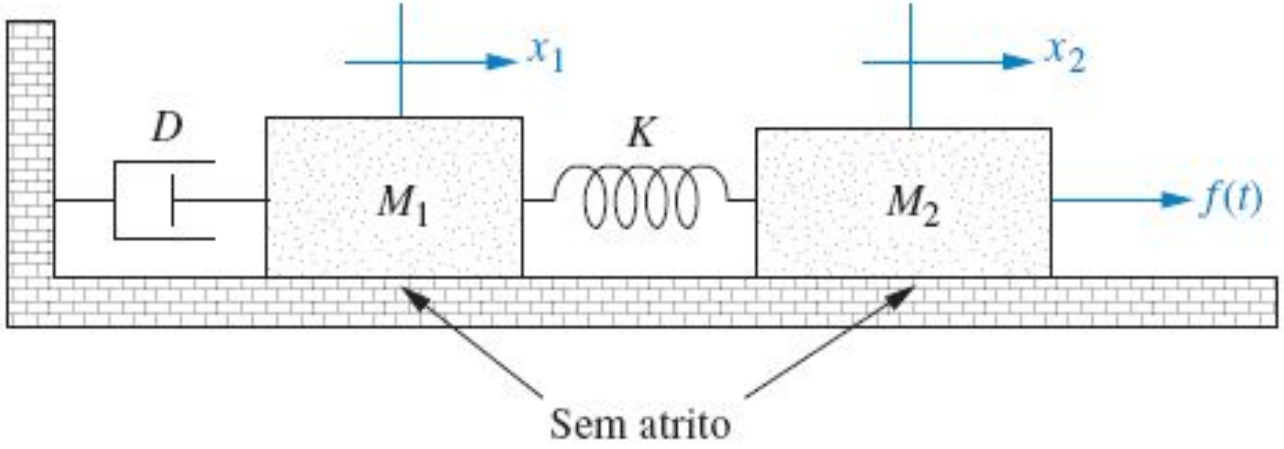


FIGURA 3.7 Sistema mecânico translacional.

$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+D\frac{dx_1}{dt}+Kx_1-Kx_2=0$$

$$-Kx_1+M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+Kx_2=f(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt}= \qquad +v_1$$

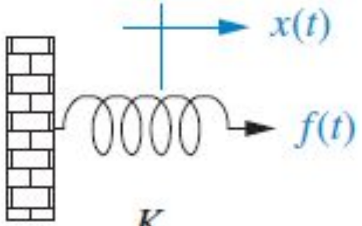
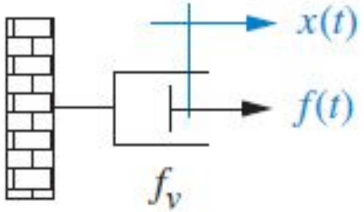
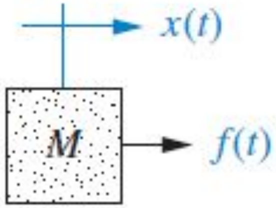
$$\frac{dv_1}{dt}=-\frac{K}{M_1}x_1-\frac{D}{M_1}v_1+\frac{K}{M_1}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}= \qquad +v_2$$

$$\frac{dv_2}{dt}=+\frac{K}{M_2}x_1 \qquad -\frac{K}{M_2}x_2 \qquad +\frac{1}{M_2}f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{v}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{v}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -K/M_1 & -D/M_1 & K/M_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ K/M_2 & 0 & -K/M_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ v_1\\ x_2\\ v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1/M_2\end{bmatrix}f(t)$$

TABLE 2.4 Force-velocity, force-displacement, and impedance translational relationships for springs, viscous dampers, and mass

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedence $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring  K	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper  f_v	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass 	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $f(t)$ = N (newtons), $x(t)$ = m (meters), $v(t)$ = m/s (meters/second), K = N/m (newtons/meter), f_v = N-s/m (newton-seconds/meter), M = kg (kilograms = newton-seconds^2/meter).

Exercício 3.2

PROBLEMA: Represente o sistema mecânico translacional mostrado na Figura 3.9 no espaço de estados, em que $x_3(t)$ é a saída.

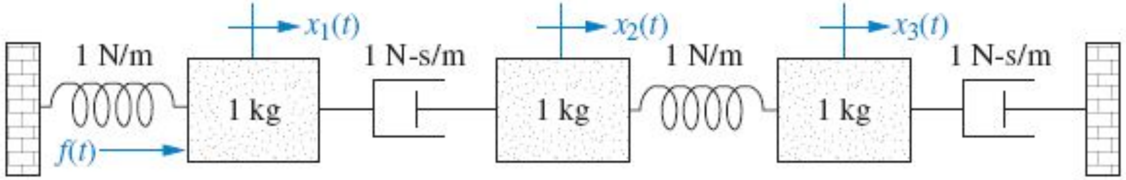


FIGURA 3.9 Sistema mecânico translacional para o Exercício 3.2.

RESPOSTA:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

em que

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 & \dot{x}_1 & x_2 & \dot{x}_2 & x_3 & \dot{x}_3 \end{bmatrix}^T$$

Convertendo uma Função de Transferência para o Espaço de Estados

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y & \dot{x}_1 &= \frac{dy}{dt} \\
x_2 &= \frac{dy}{dt} & \dot{x}_2 &= \frac{d^2 y}{dt^2} \\
x_3 &= \frac{d^2 y}{dt^2} & \dot{x}_3 &= \frac{d^3 y}{dt^3} \\
&\vdots & &\vdots \\
x_n &= \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} & \dot{x}_n &= \frac{d^n y}{dt^n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 \cdots - a_{n-1} x_n + b_0 u
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.4

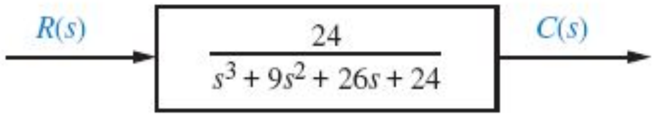
Convertendo uma Função de Transferência com Termo Constante no Numerador

PROBLEMA: Obtenha a representação no espaço de estados na forma de variáveis de fase para a função de transferência mostrada na Figura 3.10(*a*).

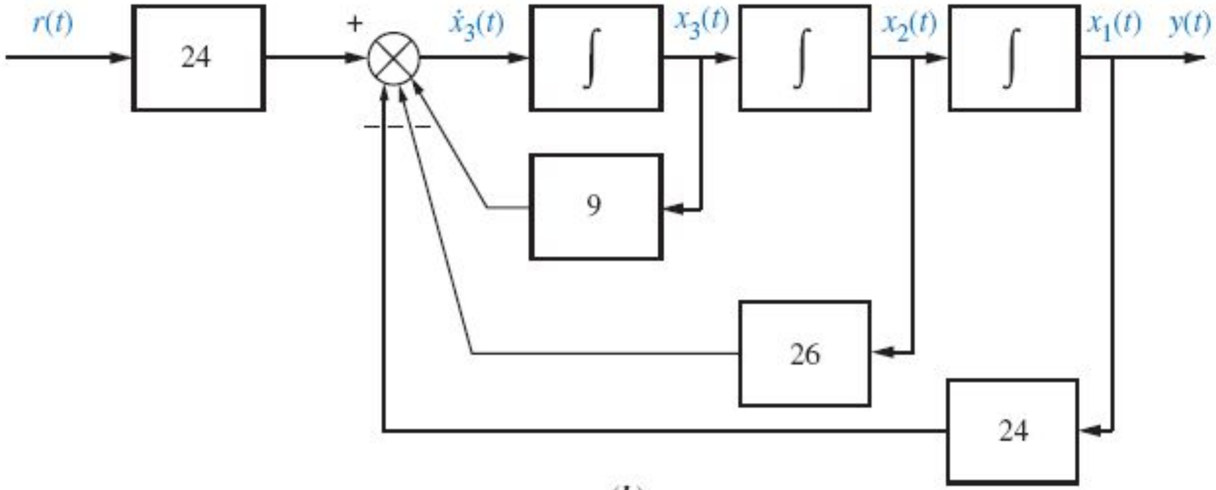
SOLUÇÃO:

Passo 1 Determine a equação diferencial associada. Como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)} \tag{3.54}$$



(*a*)



(*b*)

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s)$$

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r$$

$$x_1 = c$$

$$x_2 = \dot{c}$$

$$x_3 = \ddot{c}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

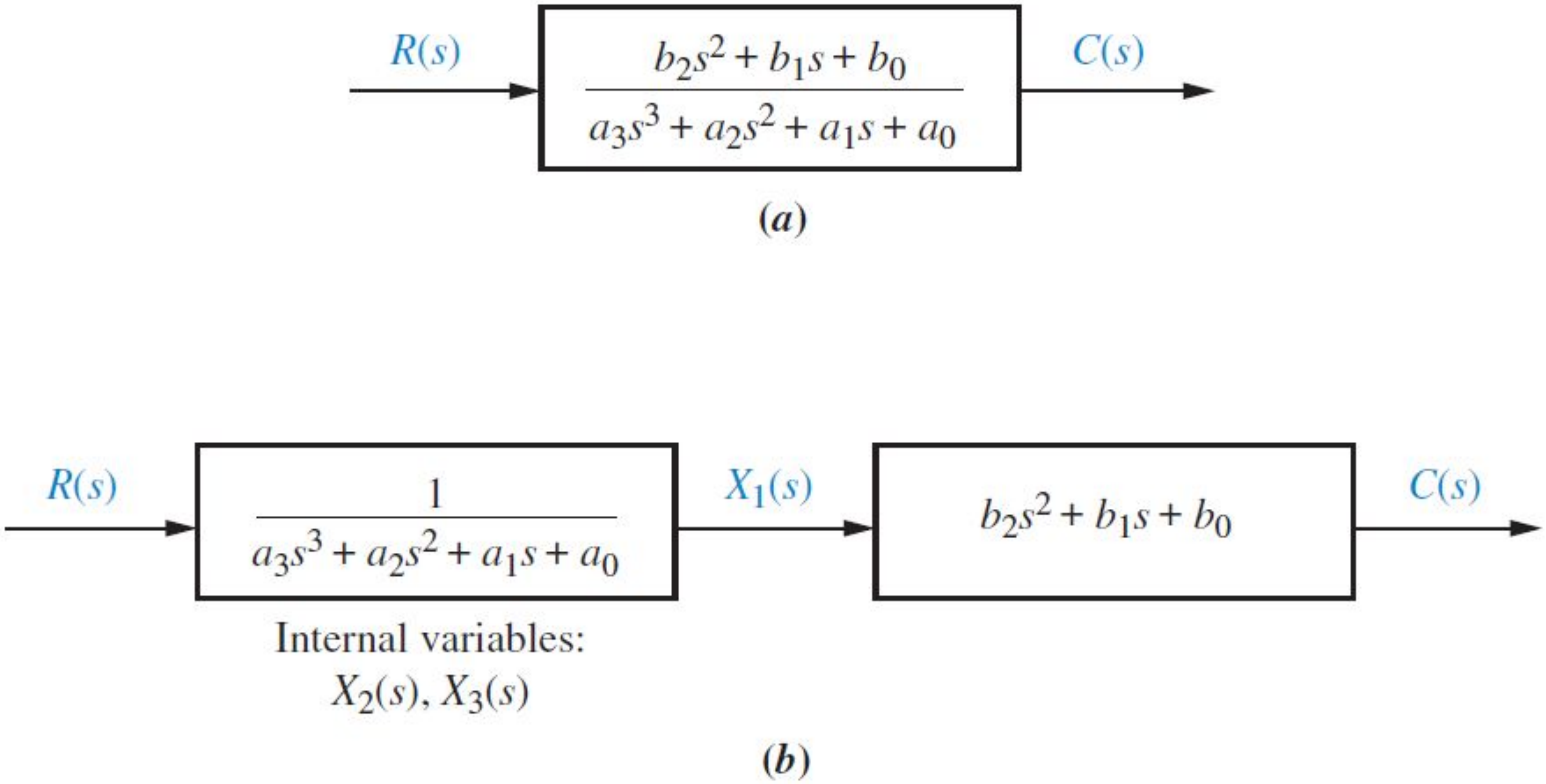
$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r$$

$$y = c = x_1$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

Função de transferência com polinômio em “s” no numerador



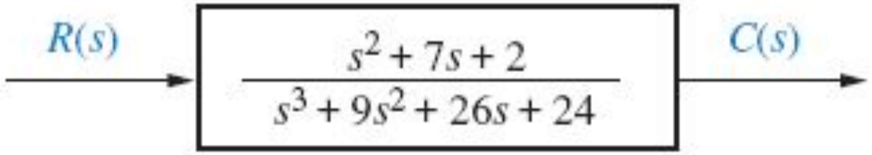
Exemplo 3.5

Convertendo uma Função de Transferência com Polinômio no Numerador

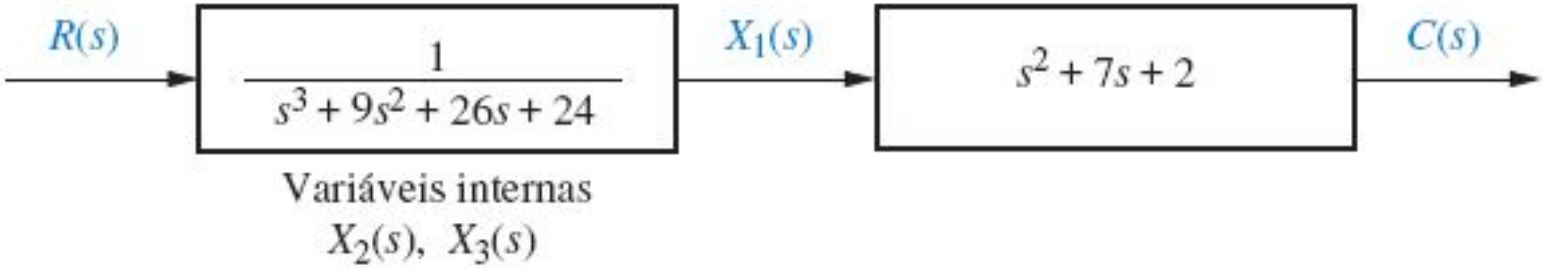
PROBLEMA: Obtenha a representação no espaço de estados da função de transferência mostrada na Figura 3.12(*a*).

SOLUÇÃO: Este problema difere do Exemplo 3.4, uma vez que o numerador possui um polinômio em *s*, em vez de apenas um termo constante.

Passo 1 Separe o sistema em dois blocos em cascata, como mostrado na Figura 3.12(*b*). O primeiro bloco contém o denominador e o segundo bloco contém o numerador.



(*a*)



(*b*)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$C(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)X_1(s) = (s^2 + 7s + 2)X_1(s)$$

$$c = \ddot{x}_1 + 7\dot{x}_1 + 2x_1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \ddot{x}_1 &= x_3 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Experimente 3.1

Use as seguintes instruções MATLAB para criar uma representação LTI no espaço de estados a partir da função de transferência mostrada na Figura 3.12(a). A matriz **A** e o vetor **B** são mostrados na Eq. (3.63). O vetor **C** é mostrado na Eq. (3.67).

```
  num=[1 7 2];
den=[1 9 26 24];
[A,B,C,D]=tf2ss...
 (num,den);
P=[0 0 1;0 1 0;1 0 0];
A=inv(P)*A*P
B=inv(P)*B
C=C*P
```

Exercício 3.3

PROBLEMA: Obtenha as equações de estado e a equação de saída para a representação em variáveis de fase da função de transferência $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+7s+9}$.

RESPOSTA:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Convertendo do Espaço de Estados para uma Função de Transferência

Fundamentos de Controle

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s)$$

$$\boxed{T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

Exemplo 3.6

Representação no Espaço de Estados para Função de Transferência

PROBLEMA: Dado o sistema definido pelas Equações (3.74), obtenha a função de transferência $T(s) = Y(s)/U(s)$, em que $U(s)$ é a entrada e $Y(s)$ é a saída.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u \tag{3.74a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{3.74b}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}=\frac{\begin{bmatrix} (s^2+3s+2) & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+3s^2+2s+1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = 0$$

$$T(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

```
syms s                               % Construct symbolic object for
                                     % frequency variable 's'.
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -2 -3];            % Create matrix A.
B=[10;0;0];                          % Create vector B.
C=[1 0 0];                           % Create vector C.
D=0;                                 % Create D.
I=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];               % Create identity matrix.
'T(s)'                               % Display label.
T=C*((s*I-A)^-1)*B+D;                % Find transfer function.
pretty(T)                            % Pretty print transfer function.
pause
```

Exercício 3.4

PROBLEMA: Converta as equações de estado e de saída mostradas nas Equações (3.78) em uma função de transferência.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -1{,}5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \tag{3.78a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}625 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{3.78b}$$

RESPOSTA:

$$G(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+6}$$

```
A=[-4 -1.5;4 0];
B=[2 0]';
C=[1.5 0.625];
D=0;
T=ss(A,B,C,D);
T=tf(T)
```