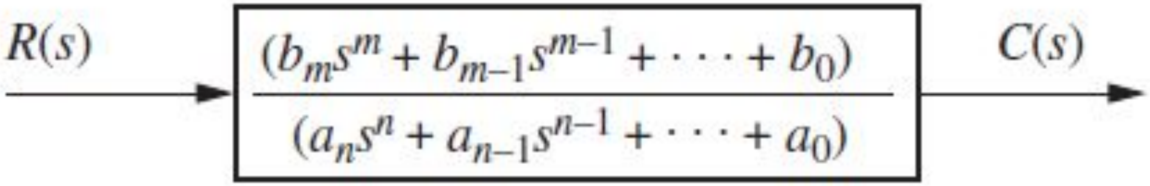
Função de Transferência

Fundamentos de Controle

Função de Transferência



$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}}$$

Example 2.4

Transfer Function for a Differential Equation

PROBLEM: Find the transfer function represented by

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t) \tag{2.55}$$

SOLUTION: Taking the Laplace transform of both sides, assuming zero initial conditions, we have

$$sC(s) + 2C(s) = R(s) \tag{2.56}$$

The transfer function, $G(s)$, is

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+2} \tag{2.57}$$

TABLE 2.2 Laplace transform theorems

Item no.	Theorem	Name
1.	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definition
2.	$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s)$	Linearity theorem
3.	$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)] = F_1(s)+F_2(s)$	Linearity theorem
4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Frequency shift theorem
5.	$\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$	Time shift theorem
6.	$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaling theorem
7.	$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)-f(0-)$	Differentiation theorem
8.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s)-sf(0-)-f'(0-)$	Differentiation theorem
9.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Differentiation theorem
10.	$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Integration theorem
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Final value theorem[1]
12.	$f(0+) = \lim_{s\to \infty} sF(s)$	Initial value theorem[2]

TABLE 2.1 Laplace transform table

Item no.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Exemplo 2.5

Resposta do Sistema a Partir da Função de Transferência

PROBLEMA: Utilize o resultado do Exemplo 2.4 para obter a resposta, $c(t)$, para uma entrada $r(t) = u(t)$, um degrau unitário, admitindo condições iniciais nulas.

SOLUÇÃO: Para resolver o problema, utilizamos a Equação (2.54), em que $G(s) = 1/(s + 2)$ conforme obtido no Exemplo 2.4. Uma vez que $r(t) = u(t)$, $R(s) = 1/s$, a partir da Tabela 2.1. Como as condições iniciais são nulas,

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \tag{2.58}$$

Expandindo em frações parciais, obtemos

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2} \tag{2.59}$$

Finalmente, fazendo a transformada de Laplace inversa de cada um dos termos, resulta

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \tag{2.60}$$

Experimente 2.6

Use as seguintes instruções MATLAB e *Symbolic Math Toolbox* para ajudá-lo a obter a Equação (2.60).

```
 syms s
C=1/(s*(s+2))
C=ilaplace(C)
```

Experimente 2.7

Use as seguintes instruções MATLAB para representar graficamente a Equação (2.60) para *t* variando de 0 a 1 em intervalos de 0,01 s.

```
 t=0:0.01:1;
plot...
 (t,(1/2-1/2*exp(-2*t)))
```

Exercício 2.3

PROBLEMA: Obtenha a função de transferência, $G(s) = C(s)/R(s)$, correspondente à equação diferencial $\frac{d^3c}{dt^3} + 3\frac{d^2c}{dt^2} + 7\frac{dc}{dt} + 5c = \frac{d^2r}{dt^2} + 4\frac{dr}{dt} + 3r$.

RESPOSTA: $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.

Exercício 2.4

PROBLEMA: Obtenha a equação diferencial correspondente à função de transferência,

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 6s + 2}$$

RESPOSTA: $\frac{d^2c}{dt^2} + 6\frac{dc}{dt} + 2c = 2\frac{dr}{dt} + r$

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.

Exercício 2.5

PROBLEMA: Obtenha a resposta à rampa para um sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{s}{(s+4)(s+8)}$$

RESPOSTA: $c(t) = \frac{1}{32} - \frac{1}{16}e^{-4t} + \frac{1}{32}e^{-8t}$

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.