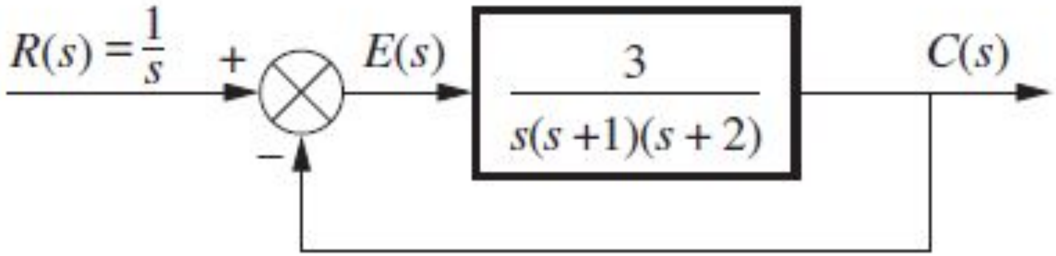
Estabilidade

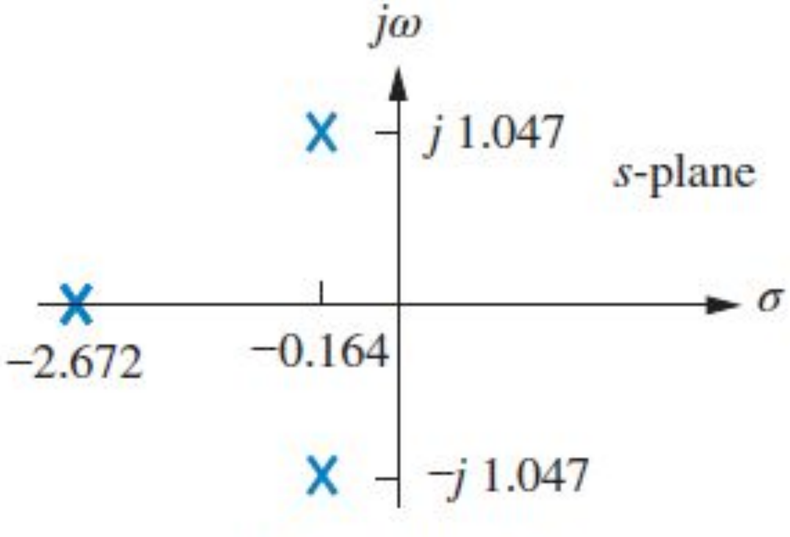
Fundamentos de Controle

- Usando a resposta natural:
  - Um sistema é **estável** se a resposta natural tende a zero, à medida que o tempo tende a infinito.
  - Um sistema é **instável** se a resposta natural tende a infinito, à medida que o tempo tende a infinito.
  - Um sistema é **marginalmente estável** se a resposta natural não decair nem crescer, mas permanecer constante ou oscilar.

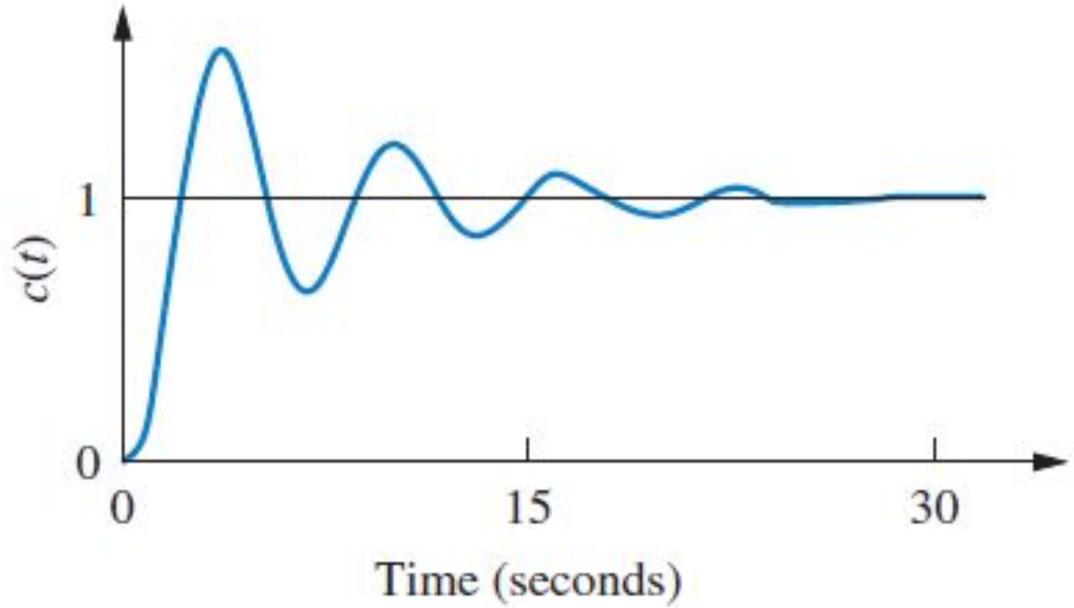
- Usando a resposta total (BIBO):
  - Um sistema é **estável** se toda entrada limitada gerar uma saída limitada.
  - Um sistema é **instável** se alguma entrada limitada gerar uma saída ilimitada.

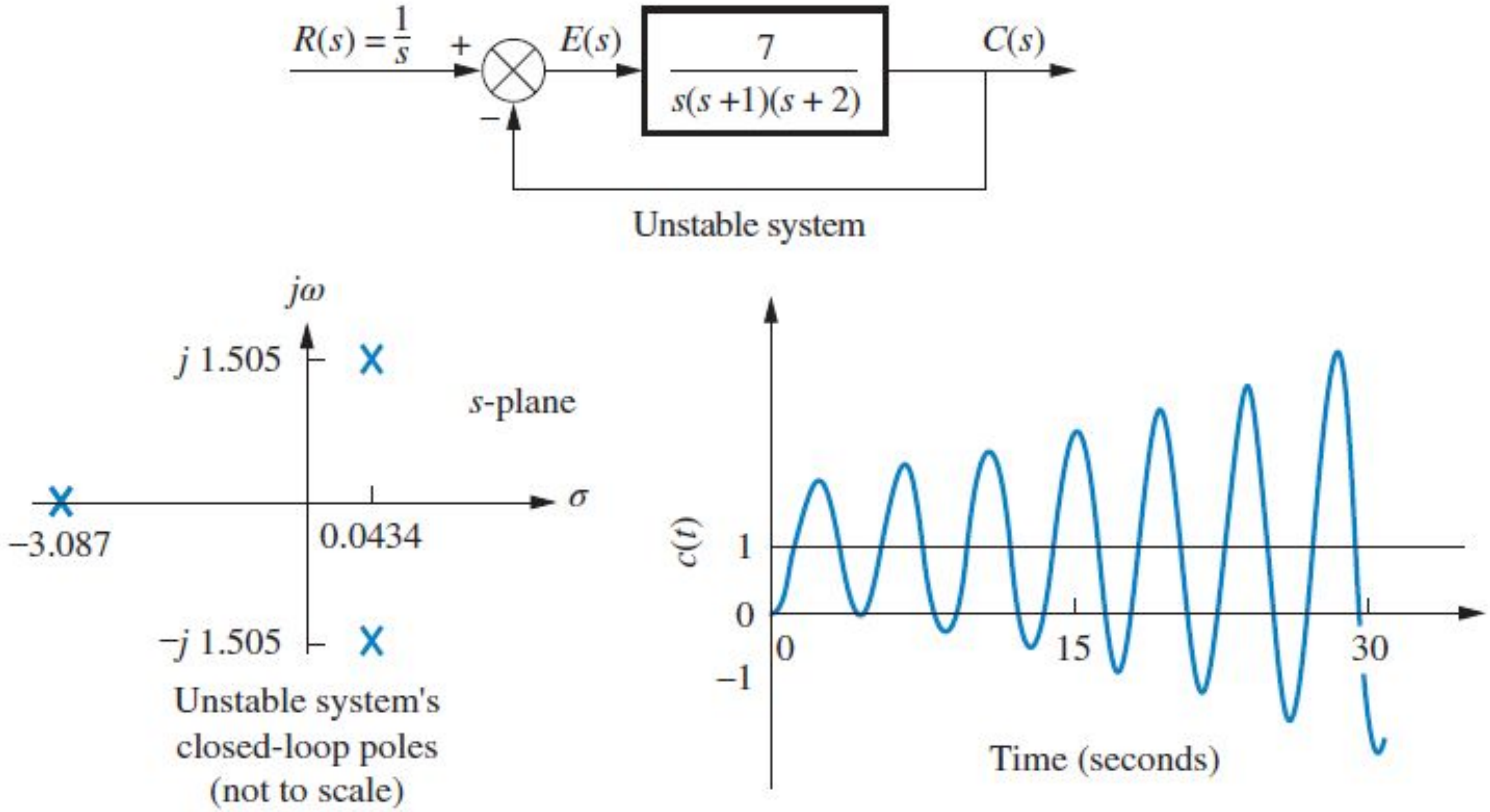


Stable system

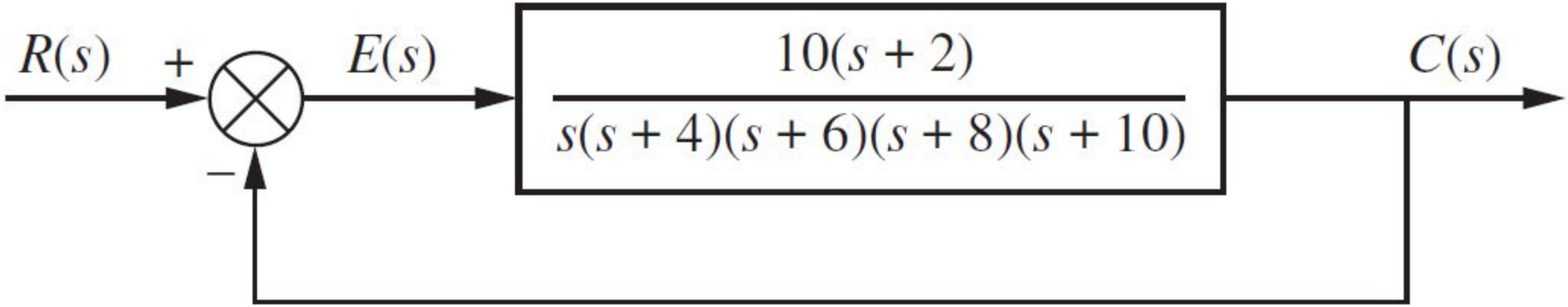


Stable system's
closed-loop poles
(not to scale)



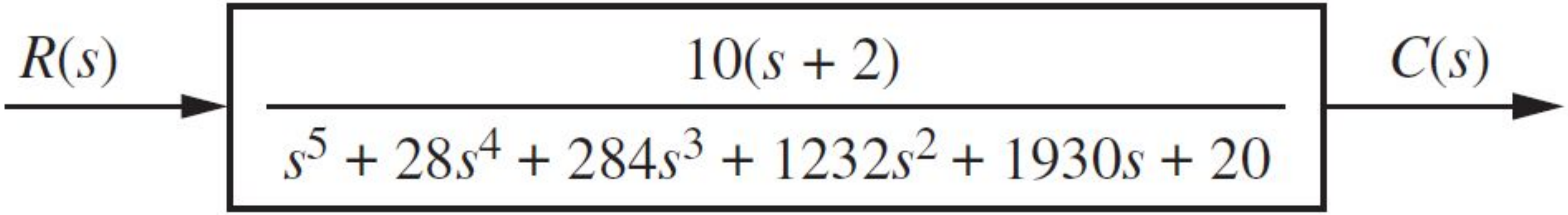


R(s) = 1/s
+
−
E(s)
7
s(s+1)(s+2)
C(s)
Unstable system
jω
j 1.505
s-plane
σ
−3.087
0.0434
−j 1.505
Unstable system's
closed-loop poles
(not to scale)
c(t)
1
0
−1
0
15
30
Time (seconds)



R(s)
+
E(s)
10(s + 2)
s(s + 4)(s + 6)(s + 8)(s + 10)
C(s)
−

(*a*)



R(s)
10(s + 2)
s^5 + 28s^4 + 284s^3 + 1232s^2 + 1930s + 20
C(s)

(*b*)

Critério de Routh-Hurwitz

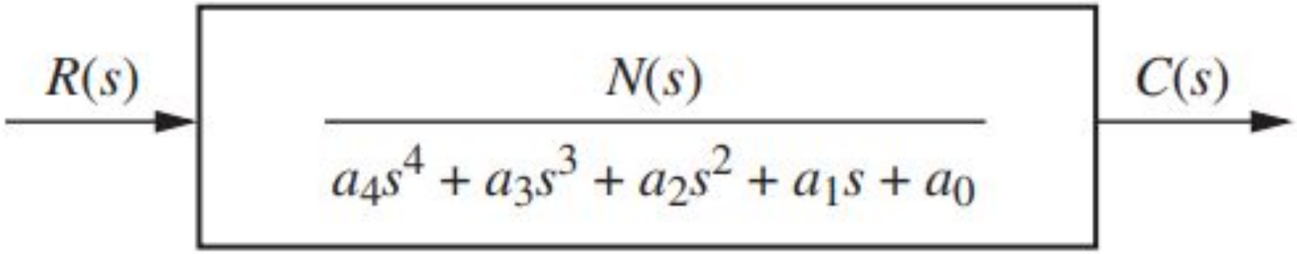


TABLE 6.1 Initial layout for Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

TABLE 6.2 Completed Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Exemplo 6.1

Criando uma Tabela de Routh

PROBLEMA: Construa a tabela de Routh para o sistema mostrado na Figura 6.4(*a*).

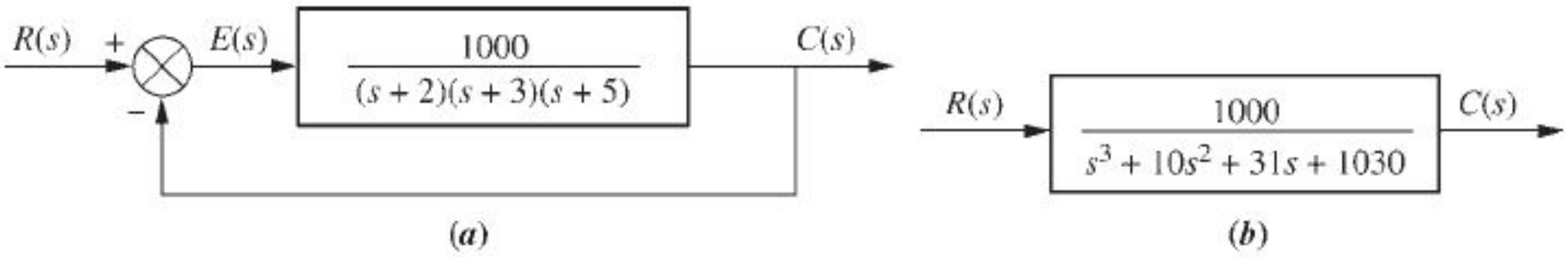


FIGURA 6.4 **a.** Sistema com realimentação para o Exemplo 6.1; **b.** sistema em malha fechada equivalente.

TABLE 6.3 Completed Routh table for Example 6.1

s^3	1	31	0
s^2	$\cancel{10}\quad 1$	$\cancel{1030}\quad 103$	0
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

Exercício 6.1

PROBLEMA: Construa uma tabela de Routh e diga quantas raízes do polinômio a seguir estão no semiplano da direita e no semiplano da esquerda.

$$P(s) = 3s^7 + 9s^6 + 6s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 8s^2 + 2s + 6$$

RESPOSTA: Quatro no semiplano da direita (spd) e três no semiplano da esquerda (spe).

Critério de Routh-Hurwitz: Casos Especiais
Zero Apenas na Primeira Coluna

Exemplo 6.2

Estabilidade Via Método do Épsilon

PROBLEMA: Determine a estabilidade da função de transferência em malha fechada

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3} \tag{6.2}$$

TABLE 6.4 Completed Routh table for Example 6.2

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	$\frac{7}{2}$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

TABLE 6.5 Determining signs in first column of a Routh table with zero as first element in a row

Label	First column	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	+	+
s^4	2	+	+
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	+	−
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	−	+
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	+	+
s^0	3	+	+

Uma Linha Inteira de Zeros

Exemplo 6.4

Estabilidade Via Tabela de Routh com Linha de Zeros

PROBLEMA: Determine o número de polos no semiplano da direita da função de transferência em malha fechada

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56} \tag{6.8}$$

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

TABLE 6.7 Routh table for Example 6.4

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}$ 1	$\cancel{42}$ 6	$\cancel{56}$ 8
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{4}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	3	8	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0
s^0	8	0	0

Exemplo 6.5

Distribuição de Polos Via Tabela de Routh com Linha de Zeros

PROBLEMA: Para a função de transferência

$$T(s) = \frac{20}{s^8 + s^7 + 12s^6 + 22s^5 + 39s^4 + 59s^3 + 48s^2 + 38s + 20} \tag{6.11}$$

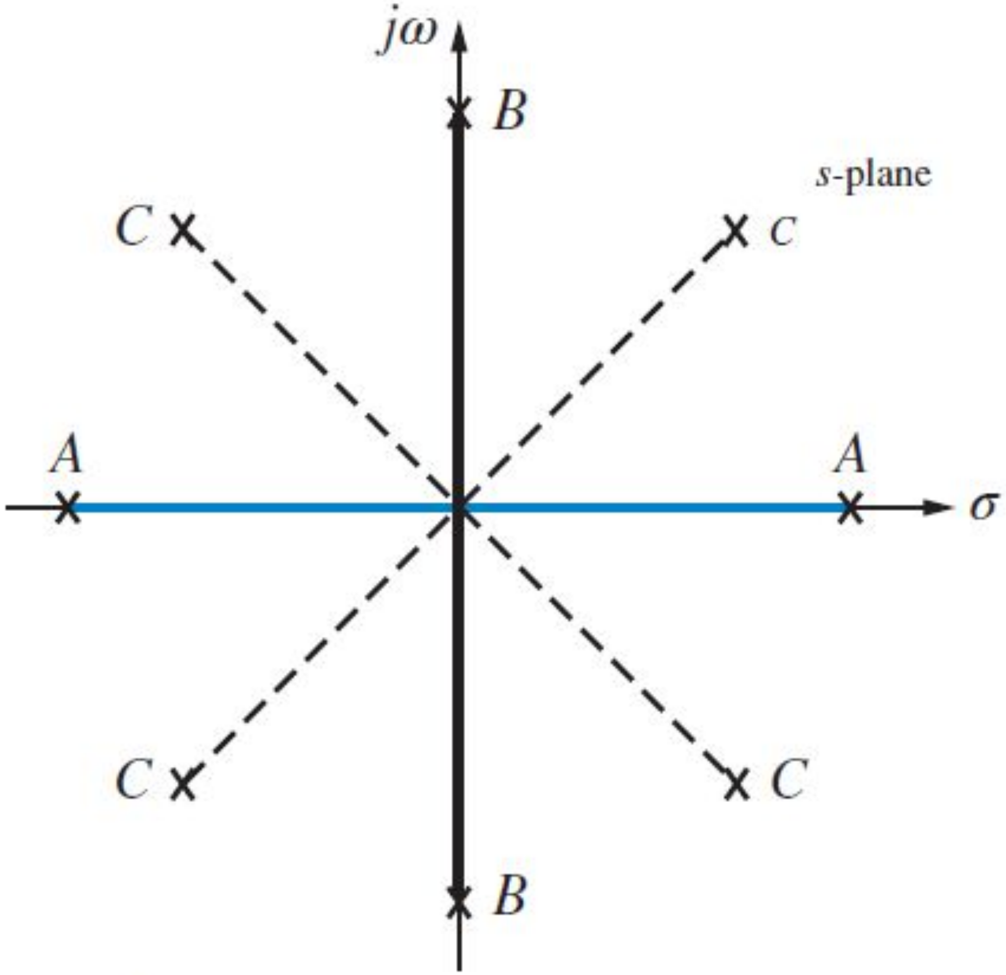
diga quantos polos estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

TABLE 6.8 Routh table for Example 6.5

s^8	1	12	39	48	20
s^7	1	22	59	38	0
s^6	$-\cancel{10} \; -1$	$-\cancel{20} \; -2$	$\cancel{10} \quad 1$	$\cancel{20} \quad 2$	0
s^5	$\cancel{20} \quad 1$	$\cancel{60} \quad 3$	$\cancel{40} \quad 2$	0	0
s^4	1	3	2	0	0
s^3	$\cancel{0} \quad \cancel{4} \quad 2$	$\cancel{0} \quad \cancel{6} \quad 3$	$\cancel{0} \quad \cancel{0} \quad 0$	0	0
s^2	$\cancel{\frac{3}{2}} \quad 3$	$\cancel{2} \quad 4$	0	0	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s^0	4	0	0	0	0

TABLE 6.9 Summary of pole locations for Example 6.5

Location	Polynomial: Even (fourth-order)	Polynomial: Other (fourth-order)	Polynomial: Total (eighth-order)
Right half-plane	0	2	2
Left half-plane	0	2	2
$j\omega$	4	0	4



A: Real and symmetrical about the origin

B: Imaginary and symmetrical about the origin

C: Quadrantal and symmetrical about the origin

Exercício 6.2

PROBLEMA: Utilize o critério de Routh-Hurwitz para descobrir quantos polos do sistema em malha fechada a seguir, $T(s)$, estão no spd, no spe e sobre o eixo $j\omega$:

$$T(s) = \frac{s^3 + 7s^2 - 21s + 10}{s^6 + s^5 - 6s^4 + 0s^3 - s^2 - s + 6}$$

RESPOSTA: Dois no spd, dois no spe e dois sobre o eixo $j\omega$.

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.

Exemplo 6.9

Projeto de Estabilidade Via Routh-Hurwitz

PROBLEMA: Determine a faixa de valores de ganho, K, para o sistema da Figura 6.10, que fará com que o sistema seja estável, instável e marginalmente estável. Admita $K > 0$.

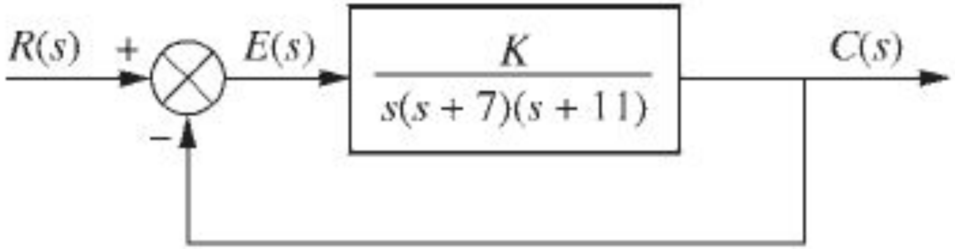


FIGURA 6.10 Sistema de controle com realimentação para o Exemplo 6.9.

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

TABLE 6.15 Routh table for Example 6.9

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\dfrac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

$$P(s) = 18s^2 + 1386$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 36s + 0$$

TABLE 6.16 Routh table for Example 6.9 with $K = 1386$

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	$\cancel{0}$ 36	
s^0	1386	

Exercício 6.3

PROBLEMA: Para um sistema com realimentação unitária com a função de transferência à frente

$$G(s) = \frac{K(s+20)}{s(s+2)(s+3)}$$

determine a faixa de valores de K que torna o sistema estável.

RESPOSTA: $0 < K < 2$

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.