Modelagem no domínio do tempo

Fundamentos de Controle

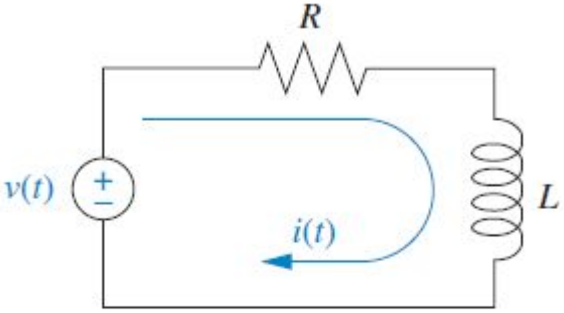
Controle Clássico

- Vantagem
  - Substituir uma equação diferencial por uma equação algébrica
  - Fornecem rapidamente informações sobre a estabilidade
  - Fornecem rapidamente informações sobre a resposta transitória
- Desvantagem
  - Aplicada apenas a sistemas lineares e invariantes no tempo, ou sistemas que assim podem ser aproximados.

Espaço de Estados

- Vantagens
  - Representar sistemas não lineares que possuam folgas, saturação e zona morta.
  - Tratar, convenientemente, sistemas com condições iniciais não nulas.
  - Sistemas variantes no tempo.
  - Sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas podem ser representados de forma compacta.

Solução Clássica



Resolvendo em I(s)/V(s)
Entrada degrau V(s) = 1/s

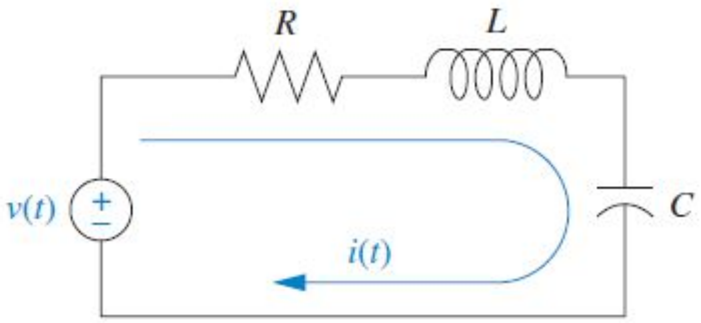
$$I(s) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right) + \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}}$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v(t)$$

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) = V(s)$$

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) + i(0)e^{-(R/L)t}$$

Variáveis de Estados



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = v(t)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = i$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v(t)$$

$$v_L(t) = -\frac{1}{C}q(t) - Ri(t) + v(t)$$

$$\frac{dv_R}{dt} = -\frac{R}{L}v_R - \frac{R}{L}v_C + \frac{R}{L}v(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{RC}v_R$$

TABLE 2.3 Voltage-current, voltage-charge, and impedance relationships for capacitors, resistors, and inductors

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^1 i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^1 v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} dq/dt \\ di/dt \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}; \quad u = v(t)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

$$y = v_L(t); \quad \mathbf{C} = [-1/C \quad -R]; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \quad D = 1; \quad u = v(t)$$

Exemplo 3.1

Representando um Circuito Elétrico

PROBLEMA: Dado o circuito elétrico da Figura 3.5, obtenha uma representação no espaço de estados, caso a saída seja a corrente através do resistor.

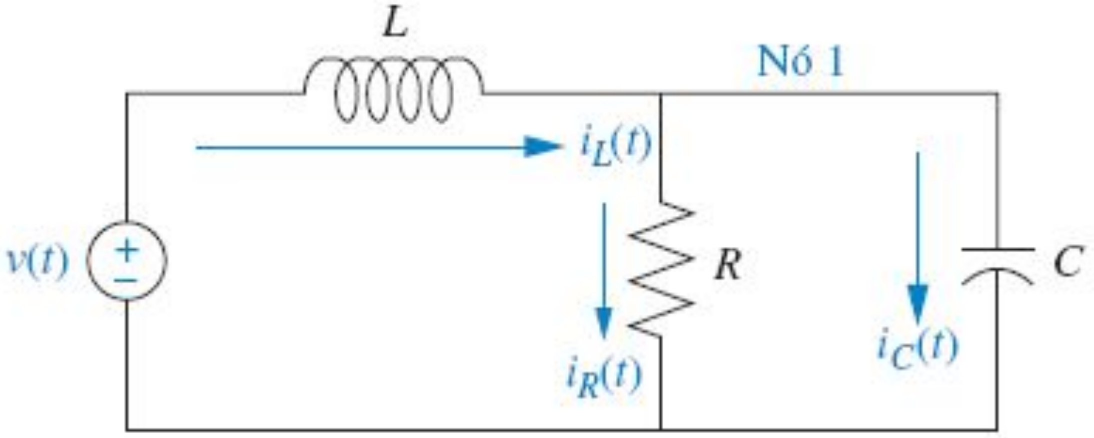


FIGURA 3.5 Circuito elétrico para representação no espaço de estados.

- Escolha as variáveis de estado escrevendo as equações diferenciais para todos os elementos armazenadores de energia, isto é, o indutor e o capacitor.

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L$$

- Obter iC e vL em função das variáveis de estado, vC e iL.

$$i_C = -i_R + i_L$$
$$= -\frac{1}{R}v_C + i_L$$

$$v_L = -v_C + v(t)$$

- Substitua os resultados das Equações

$$C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R}v_C + i_L$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_C + v(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{C}i_L$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}v_C + \frac{1}{L}v(t)$$

- Obtenha a equação de saída. Como a saída é iR(t),

$$i_R = \frac{1}{R} v_C$$

- Representação no espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v(t)$$

$$i_R = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2

Representando um Circuito Elétrico com uma Fonte Controlada

PROBLEMA: Obtenha as equações de estado e de saída para o circuito elétrico mostrado na Figura 3.6, caso o vetor de saída seja $\mathbf{y} = [v_{R_2} \quad i_{R_2}]^T$, em que *T* significa transposta.[7]

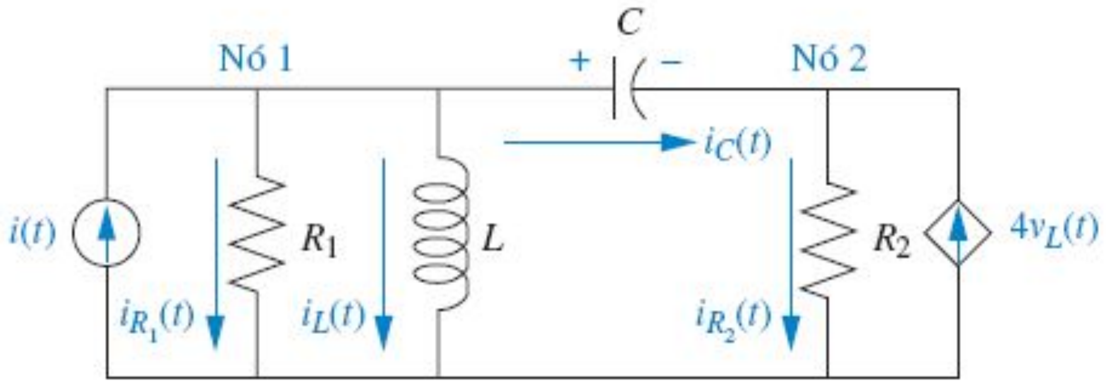


FIGURA 3.6 Circuito elétrico para o Exemplo 3.2.

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C$$

$$x_1 = i_L; \quad x_2 = v_C$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

- Ao longo da malha que contém L e C

$$v_L = v_C + v_{R_2} = v_C + i_{R_2}R_2$$

$$i_{R_2} = i_C + 4v_L$$

- Resolvendo para vL, obtemos

$$v_L = v_C + (i_C + 4v_L)R_2$$

$$v_L = \frac{1}{1 - 4R_2}(v_C + i_C R_2)$$

- Assim, no Nó 1 podemos escrever a soma das correntes como

$$\begin{aligned} i_C &= i(t) - i_{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_{R_1}}{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_L}{R_1} - i_L \end{aligned}$$

$$(1-4R_2)v_L - R_2 i_C = v_C$$

$$-\frac{1}{R_1}v_L - i_C = i_L - i(t)$$

- Resolvendo simultaneamente para vL e iC resulta

$$v_L = \frac{1}{\Delta}[R_2 i_L - v_C - R_2 i(t)]$$

$$i_C = \frac{1}{\Delta}\left[(1-4R_2)i_L + \frac{1}{R_1}v_C - (1-4R_2)i(t)\right]$$

$$\Delta = -\left[(1-4R_2) + \frac{R_2}{R_1}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2/(L\Delta) & -1/(L\Delta) \\ (1-4R_2)/(C\Delta) & 1/(R_1 C\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_2/(L\Delta) \\ -(1-4R_2)/(C\Delta) \end{bmatrix} i(t)$$

$$v_{R_2} = -v_C + v_L$$

$$i_{R_2} = i_C + 4v_L$$

$$\begin{bmatrix} v_{R_2} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2/\Delta & -(1+1/\Delta) \\ 1/\Delta & (1-4R_1)/(\Delta R_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_2/\Delta \\ -1/\Delta \end{bmatrix} i(t)$$

Exercício 3.1

PROBLEMA: Obtenha a representação no espaço de estados do circuito elétrico mostrado na Figura 3.8. A saída é $v_s(t)$.

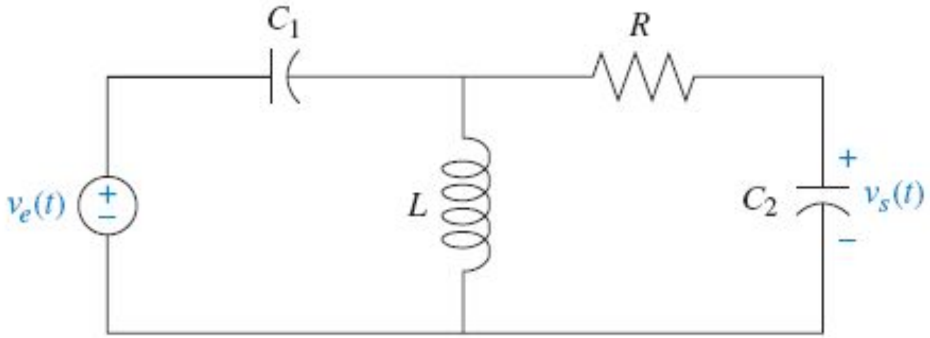


FIGURA 3.8 Circuito elétrico para o Exercício 3.1.

RESPOSTA:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 1/C_1 & -1/C_1 \\ -1/L & 0 & 0 \\ 1/C_2 & 0 & -1/C_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_i(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

A solução completa está disponível no GEN-IO, Ambiente de Aprendizagem do Grupo GEN.