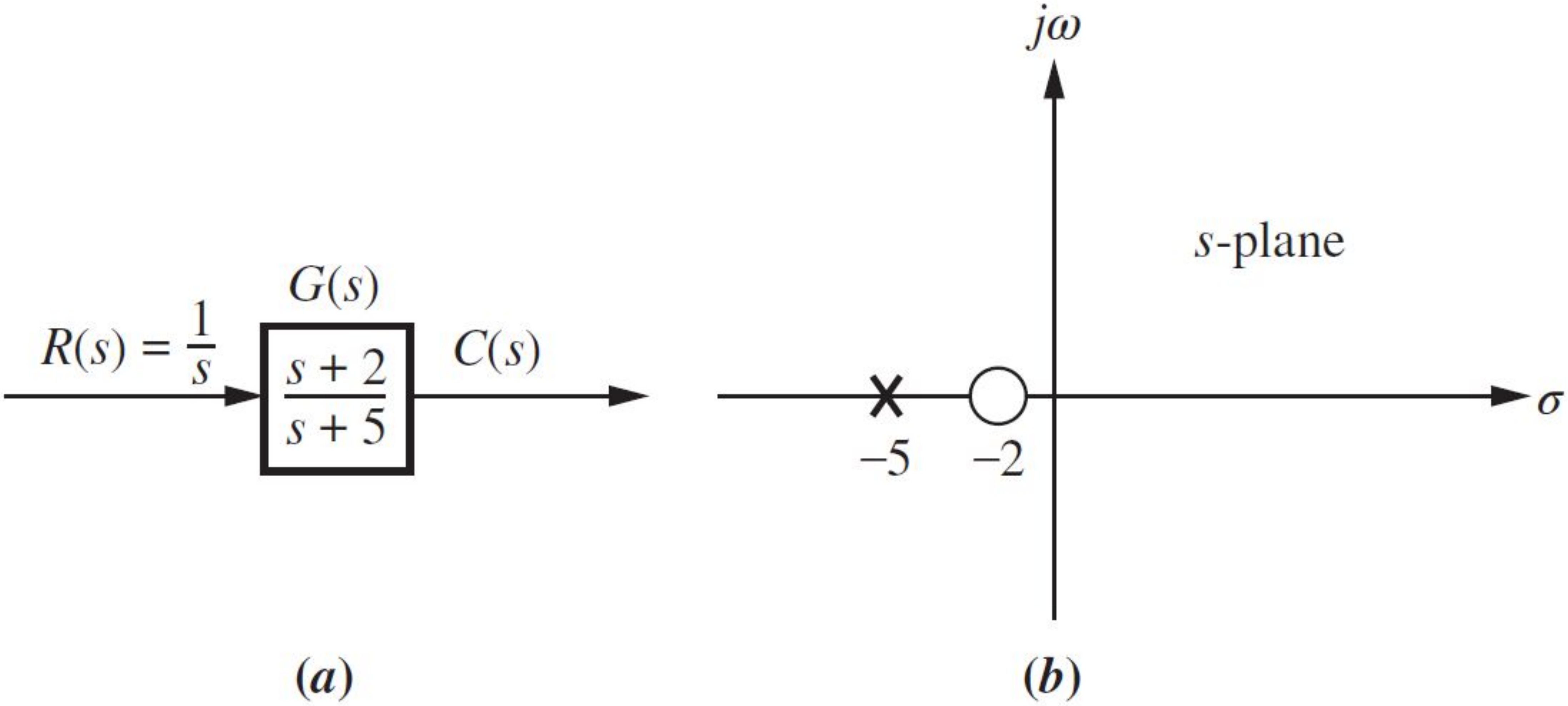
Polos, Zeros e a Resposta do Sistema

Fundamentos de Controle



G(s)
R(s) = 1/s
(s + 2)/(s + 5)
C(s)
jω
s-plane
σ
−5
−2
(a)
(b)

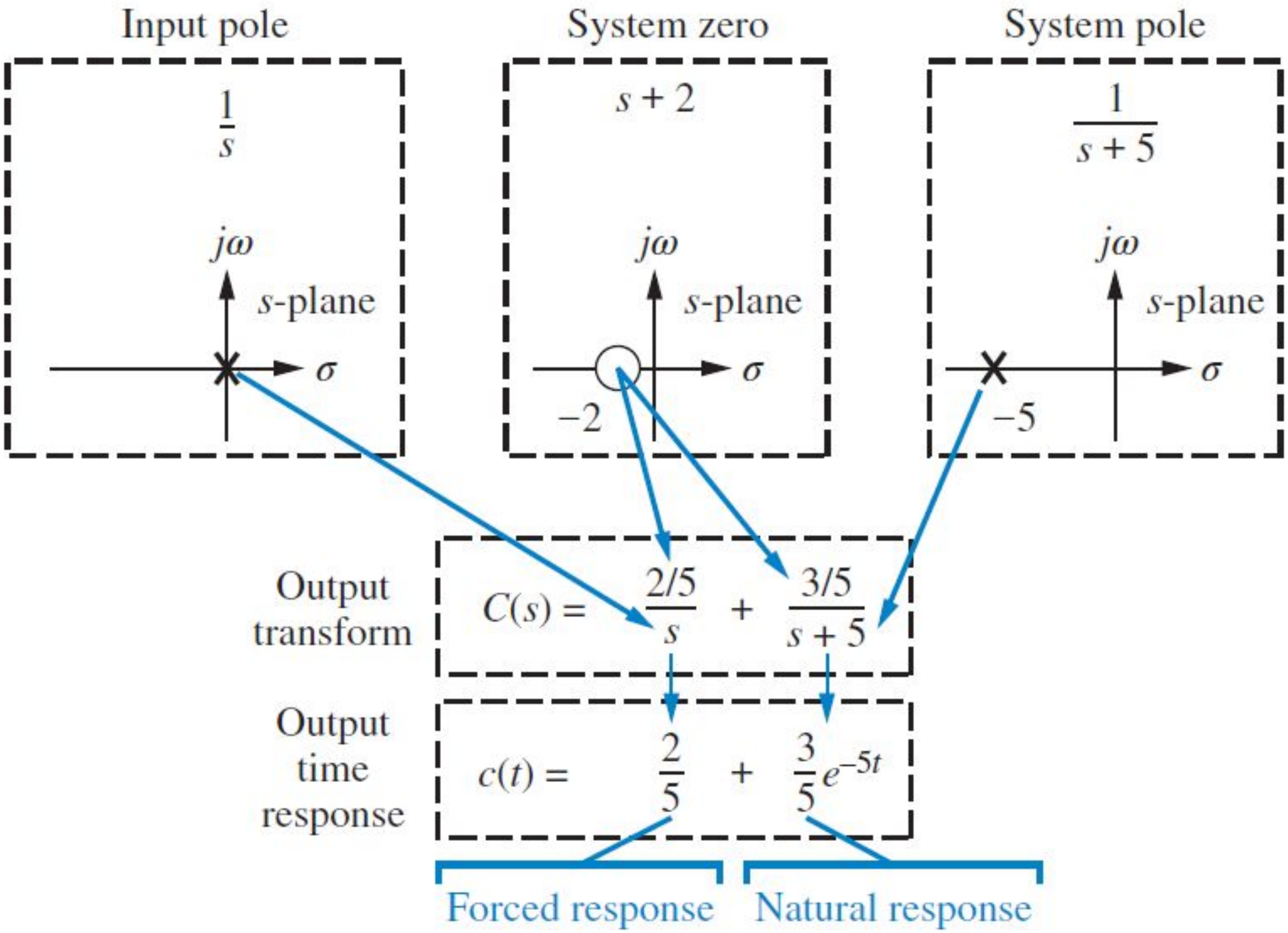
Polos e Zeros de um Sistema de Primeira Ordem: Um Exemplo

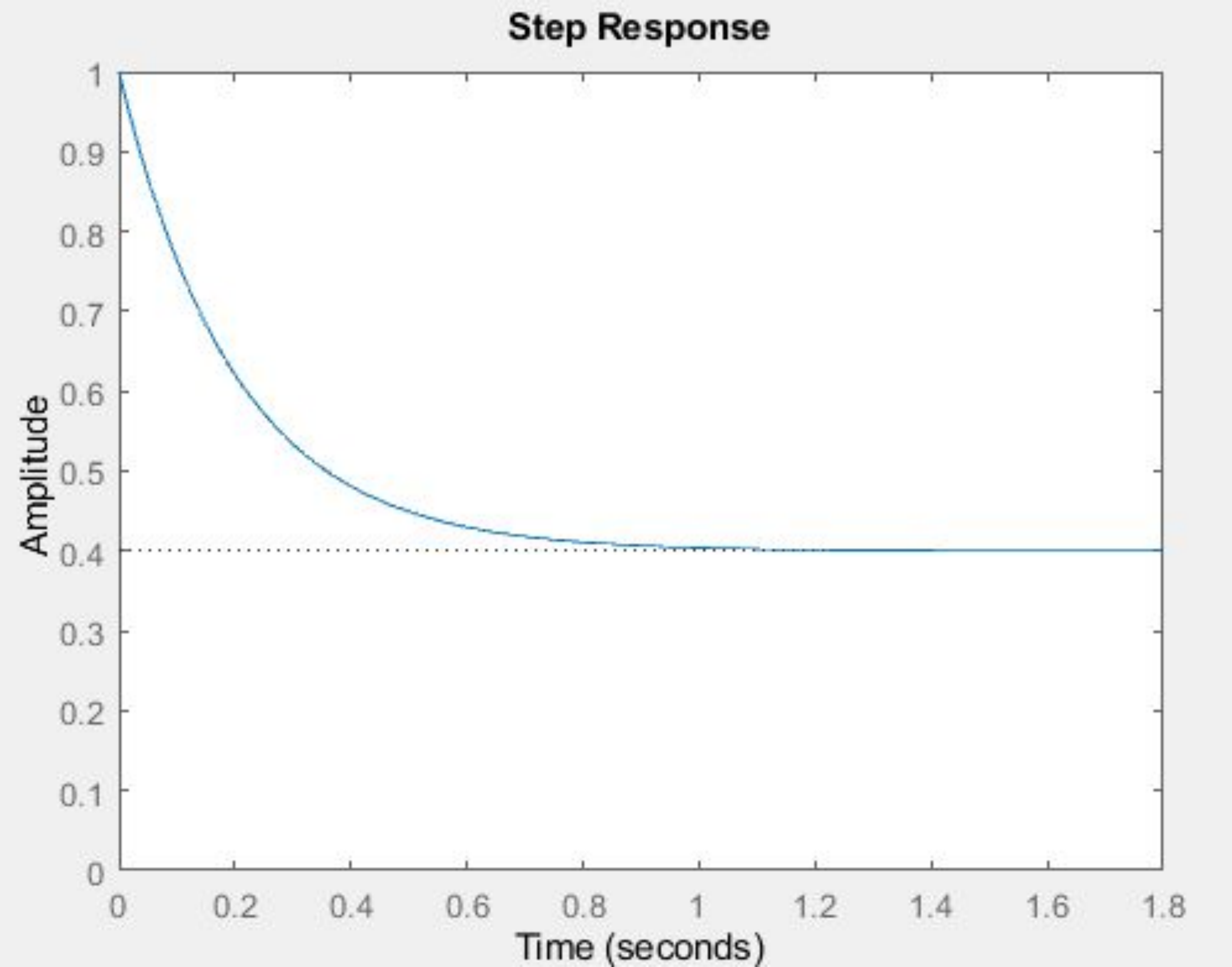
$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s\to 0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s\to -5} = \frac{3}{5}$$

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$$


Input pole
$\frac{1}{s}$
$j\omega$
s-plane
σ
System zero
$s + 2$
$j\omega$
s-plane
σ
-2
System pole
$\frac{1}{s+5}$
$j\omega$
s-plane
σ
-5
Output transform
$C(s) = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$
Output time response
$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$
Forced response
Natural response
(c)


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8

Exemplo 4.1

Calculando a Resposta Utilizando Polos

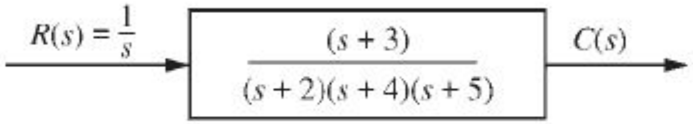


FIGURA 4.3 Sistema para o Exemplo 4.1.

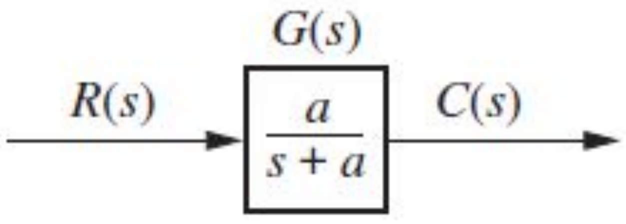
PROBLEMA: Dado o sistema da Figura 4.3, escreva a saída, $c(t)$, em termos gerais. Especifique as partes forçada e natural da solução.

$$C(s) \equiv \underbrace{\frac{K_1}{s}}_{\text{Forced response}} + \underbrace{\frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} + \frac{K_4}{s+5}}_{\text{Natural response}}$$

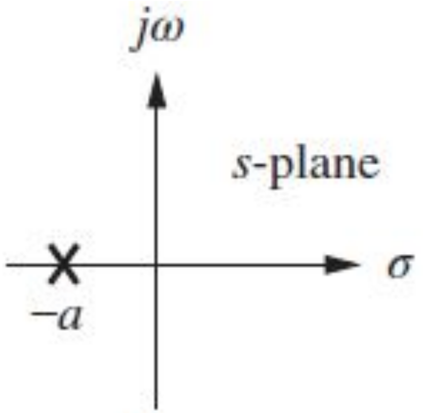
$$c(t) \equiv \underbrace{K_1}_{\text{Forced response}} + \underbrace{K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}}_{\text{Natural response}}$$

Sistemas de Primeira Ordem

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$



(a)



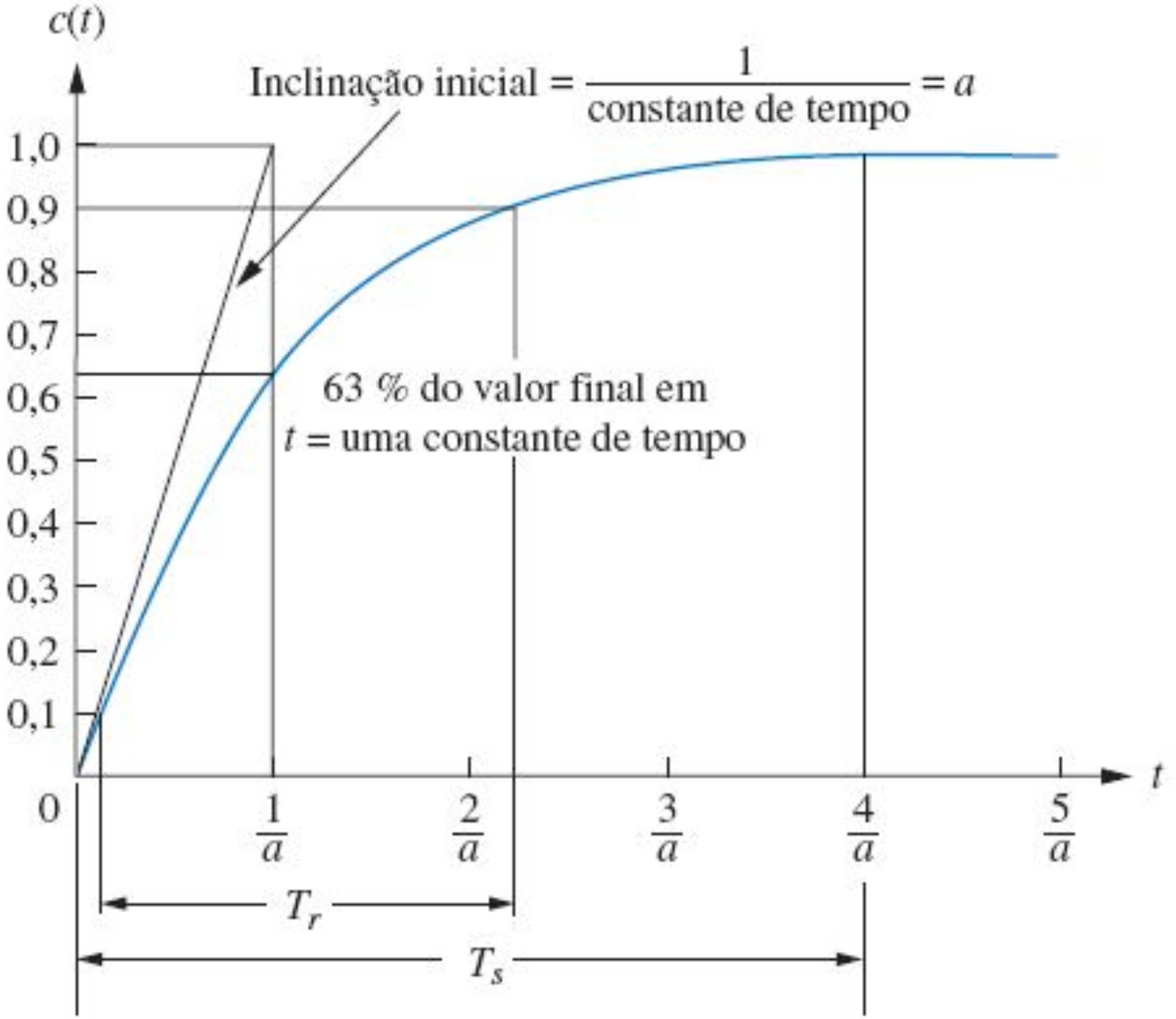
(b)

$$\boxed{c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at}}$$

$$e^{-at}\big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0.37$$

$$c(t)\big|_{t=1/a} = 1 - e^{-at}\big|_{t=1/a} = 1 - 0.37 = 0.63$$

Constante de Tempo



Tempo de Subida, Tr (0,1 a 0,9 de seu valor final.)

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a}$$

Tempo de Acomodação, Ts (2 % em torno de seu valor final)

$$T_s = \frac{4}{a}$$

Exercício 4.2

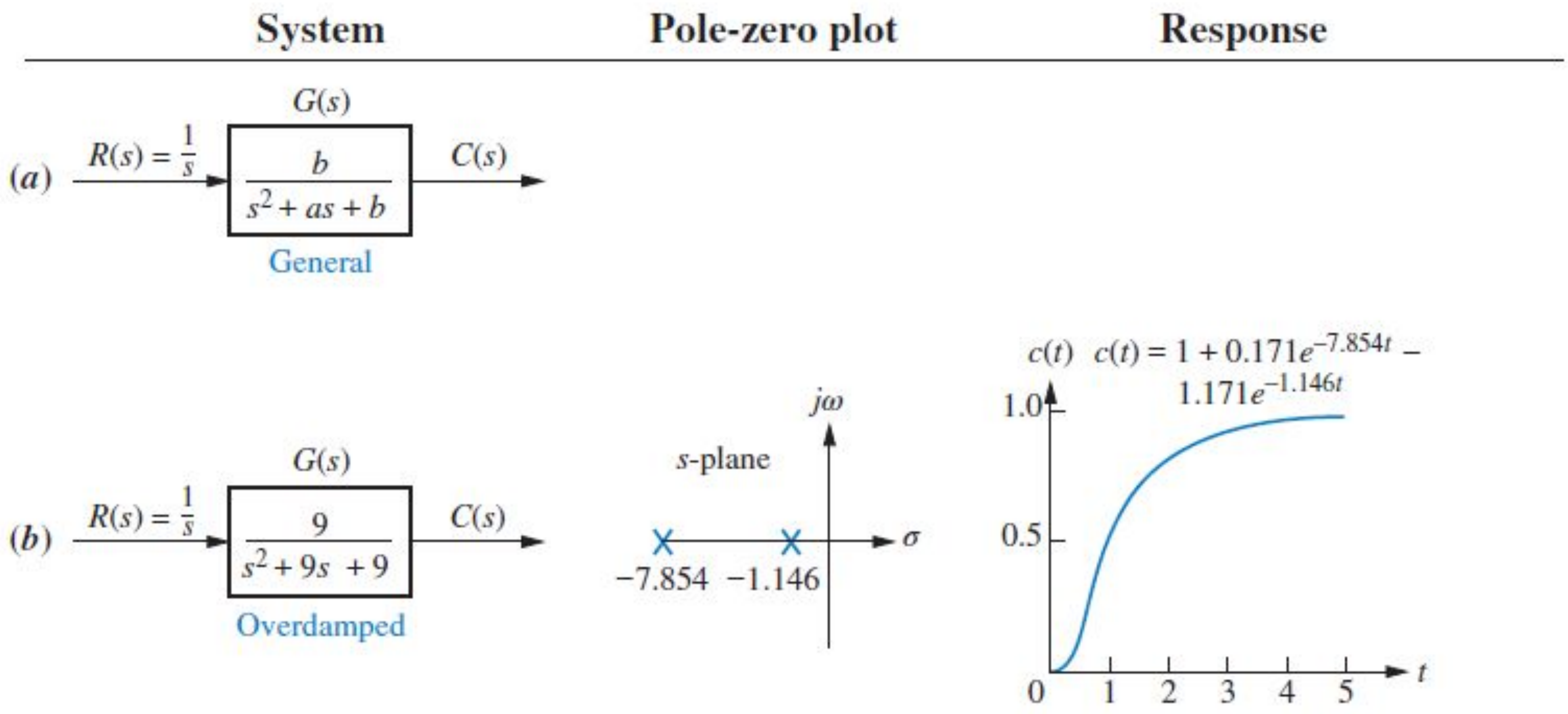
PROBLEMA: Um sistema possui uma função de transferência, $G(s) = \frac{50}{s+50}$. Determine a constante de tempo, T_c, o tempo de acomodação, T_s, e o tempo de subida, T_r.

RESPOSTA: $T_c = 0{,}02$ s, $T_s = 0{,}08$ s e $T_r = 0{,}044$ s.

Sistemas de Segunda Ordem

Fundamentos de Controle

Resposta Superamortecida

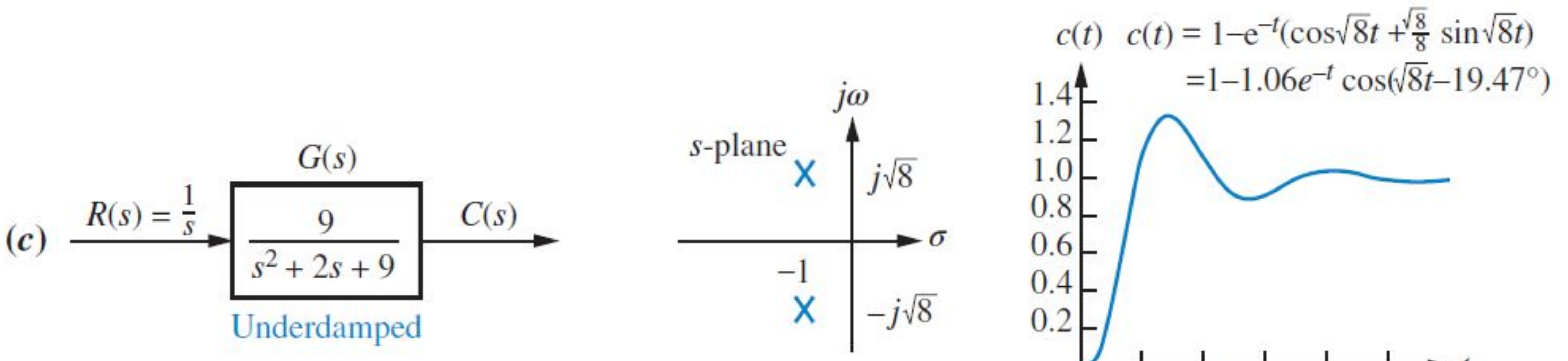


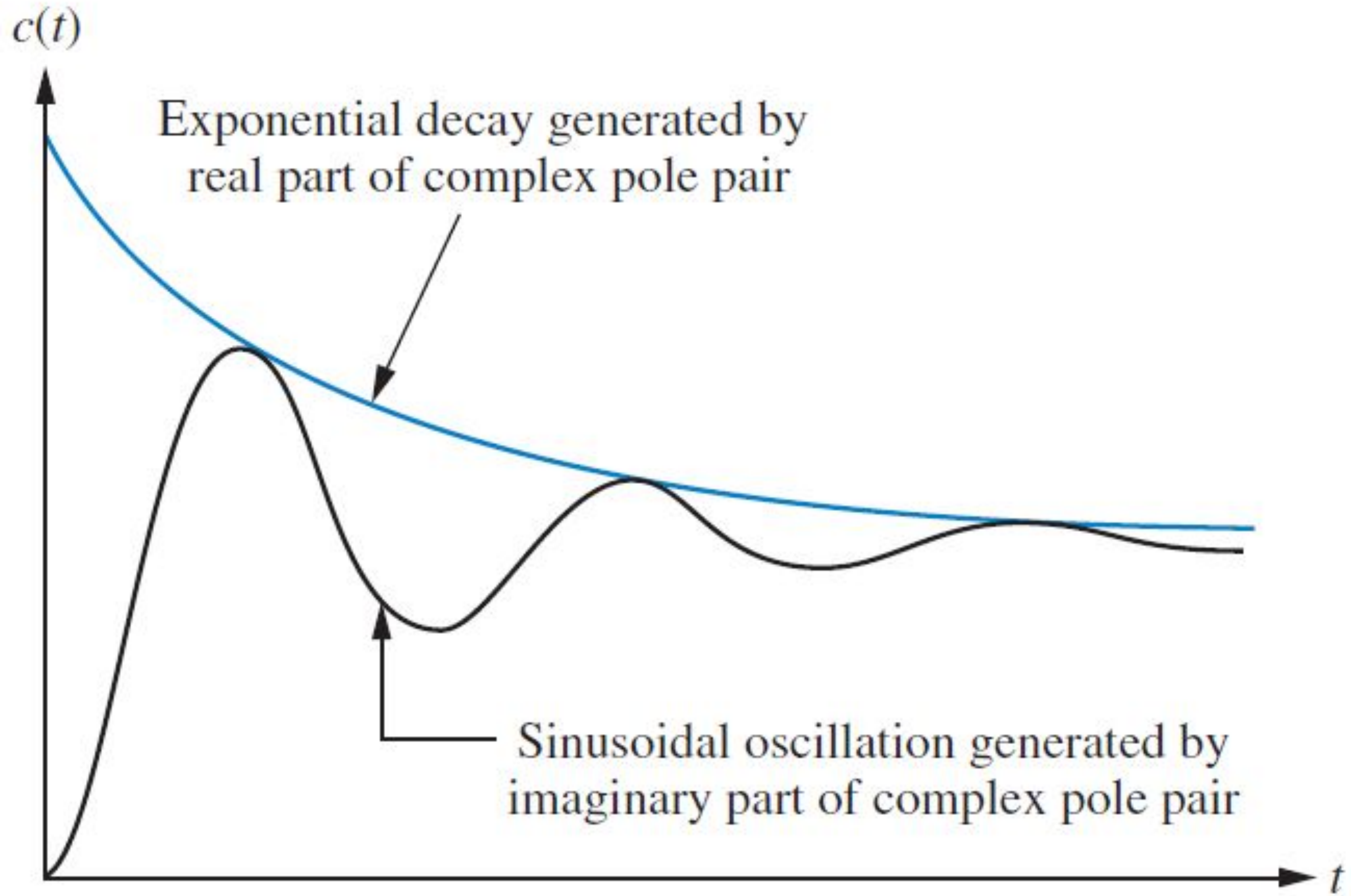
Polos: Dois reais em –σ1 e –σ2

Resposta natural: Duas exponenciais com constantes de tempo iguais ao inverso das posições dos pólos, ou

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t}$$

Resposta Subamortecida





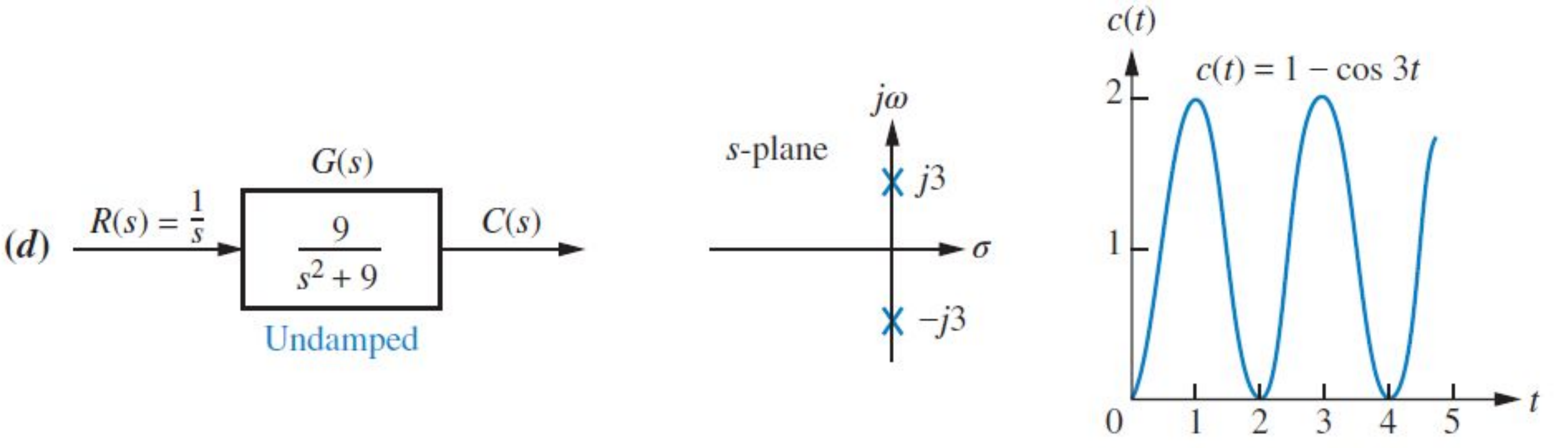
$c(t)$
Exponential decay generated by
real part of complex pole pair
Sinusoidal oscillation generated by
imaginary part of complex pole pair
t

Polos: Dois complexos em $-\sigma d \pm j\omega d$

Resposta natural: Senóide amortecida com uma envoltória exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da parte real do polo. A frequência, em radianos, da senóide, a frequência de oscilação amortecida, é igual à parte imaginária dos polos, ou

$$c(t) = Ae^{-\sigma_d t}\cos(\omega_d t - \phi)$$

Resposta Não Amortecida

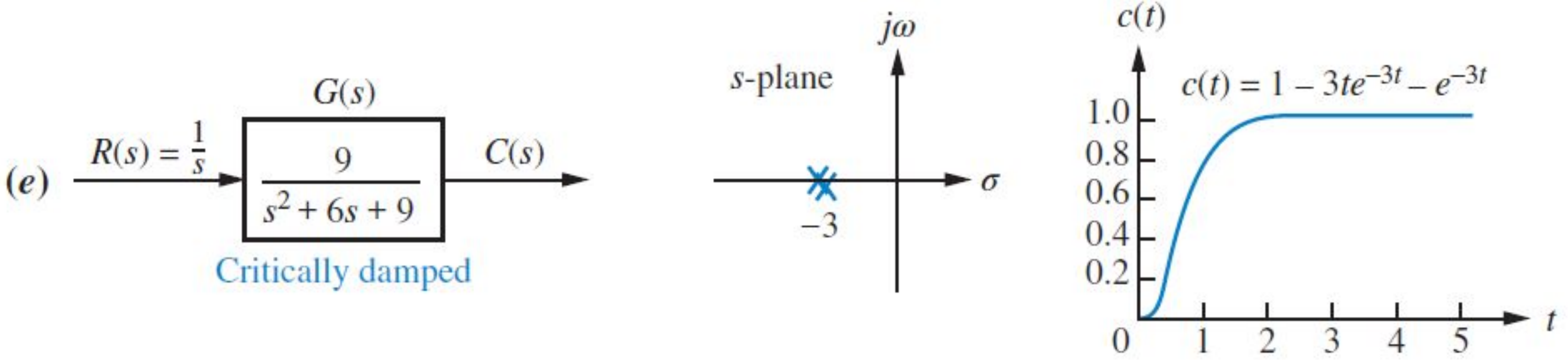


Polos: Dois imaginários em ±jω1

Resposta natural: Senoide não amortecida com frequência, em radianos, igual à parte imaginária dos polos, ou

$$c(t) = A\cos(\omega_1 t - \phi)$$

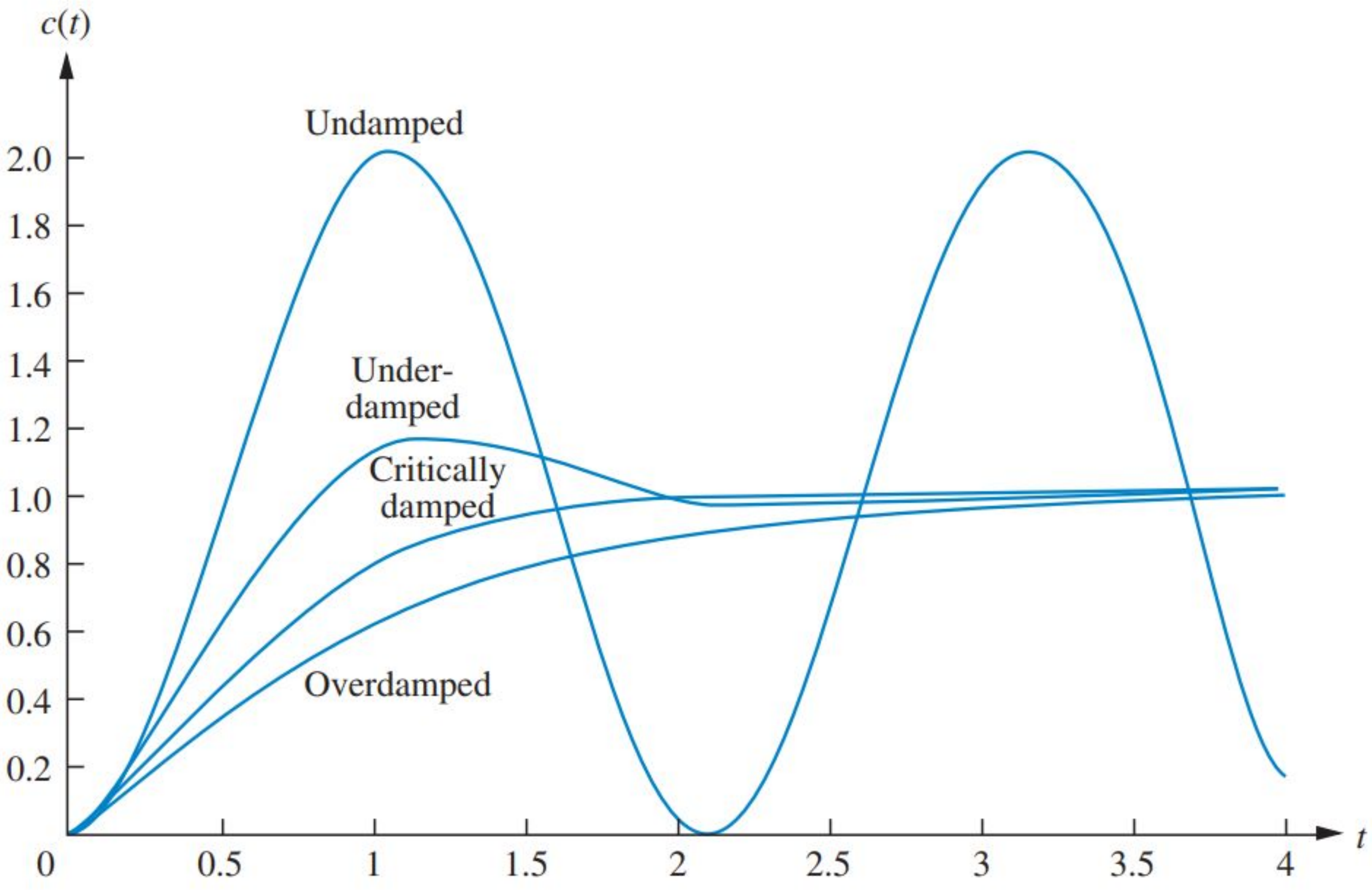
Resposta Criticamente Amortecida



Polos: Dois reais em $-\sigma_1$

Resposta natural: Um termo é uma exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da posição do polo. O outro termo é o produto do tempo, t, por uma exponencial com constante de tempo igual ao inverso da posição do polo, ou

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 t e^{-\sigma_1 t}$$


c(t)
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
t
Undamped
Under-
damped
Critically
damped
Overdamped

Exercício 4.3

PROBLEMA: Para cada uma das funções de transferência a seguir, escreva, por inspeção, a forma geral da resposta ao degrau:

a. $G(s) = \dfrac{400}{s^2 + 12s + 400}$

b. $G(s) = \dfrac{900}{s^2 + 90s + 900}$

c. $G(s) = \dfrac{225}{s^2 + 30s + 225}$

d. $G(s) = \dfrac{625}{s^2 + 625}$

RESPOSTAS:

a. $c(t) = A + Be^{-6t}\cos(19{,}08t + \phi)$

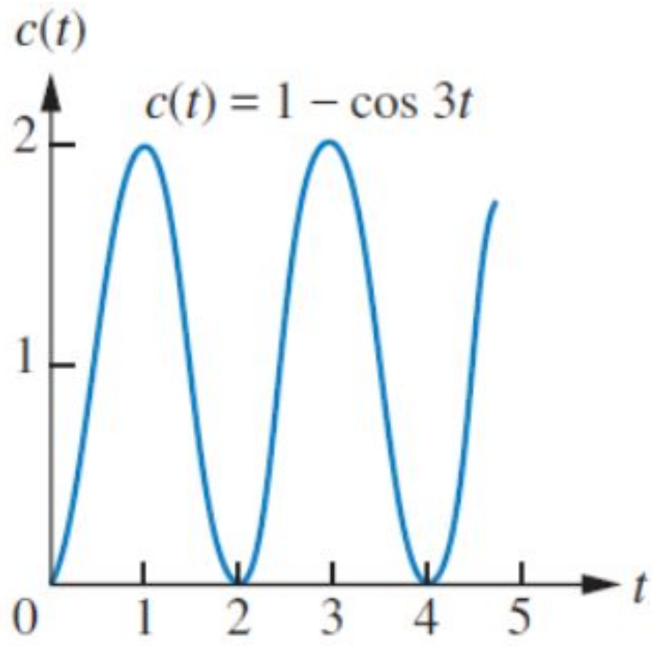
b. $c(t) = A + Be^{-78{,}54t} + Ce^{-11{,}46t}$

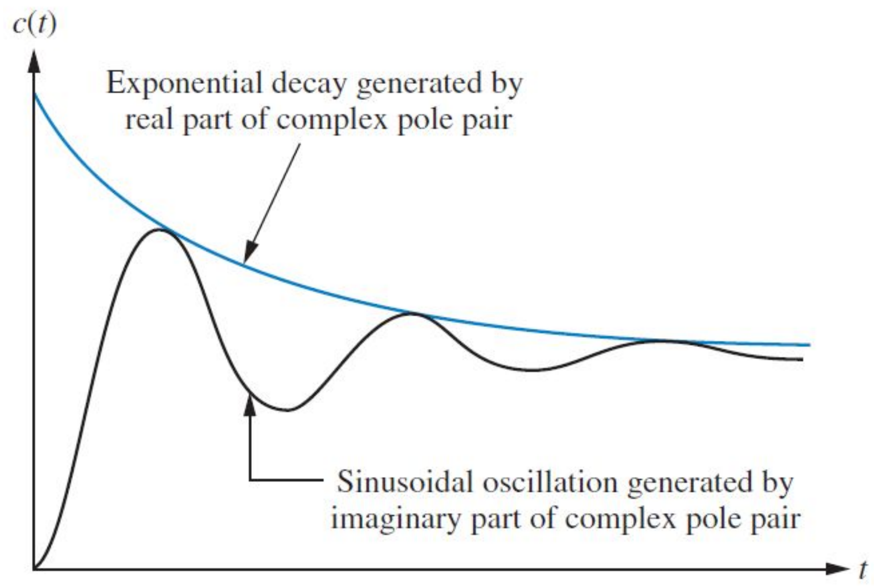
c. $c(t) = A + Be^{-15t} + Cte^{-15t}$

d. $c(t) = A + B\cos(25t + \phi)$

Frequência Natural, ωn

A frequência natural de um sistema de segunda ordem é a frequência de oscilação do sistema sem amortecimento. Por exemplo, a frequência de oscilação de um circuito RLC em série com a resistência em curto-circuito seria a frequência natural.





Fator de Amortecimento, ζ

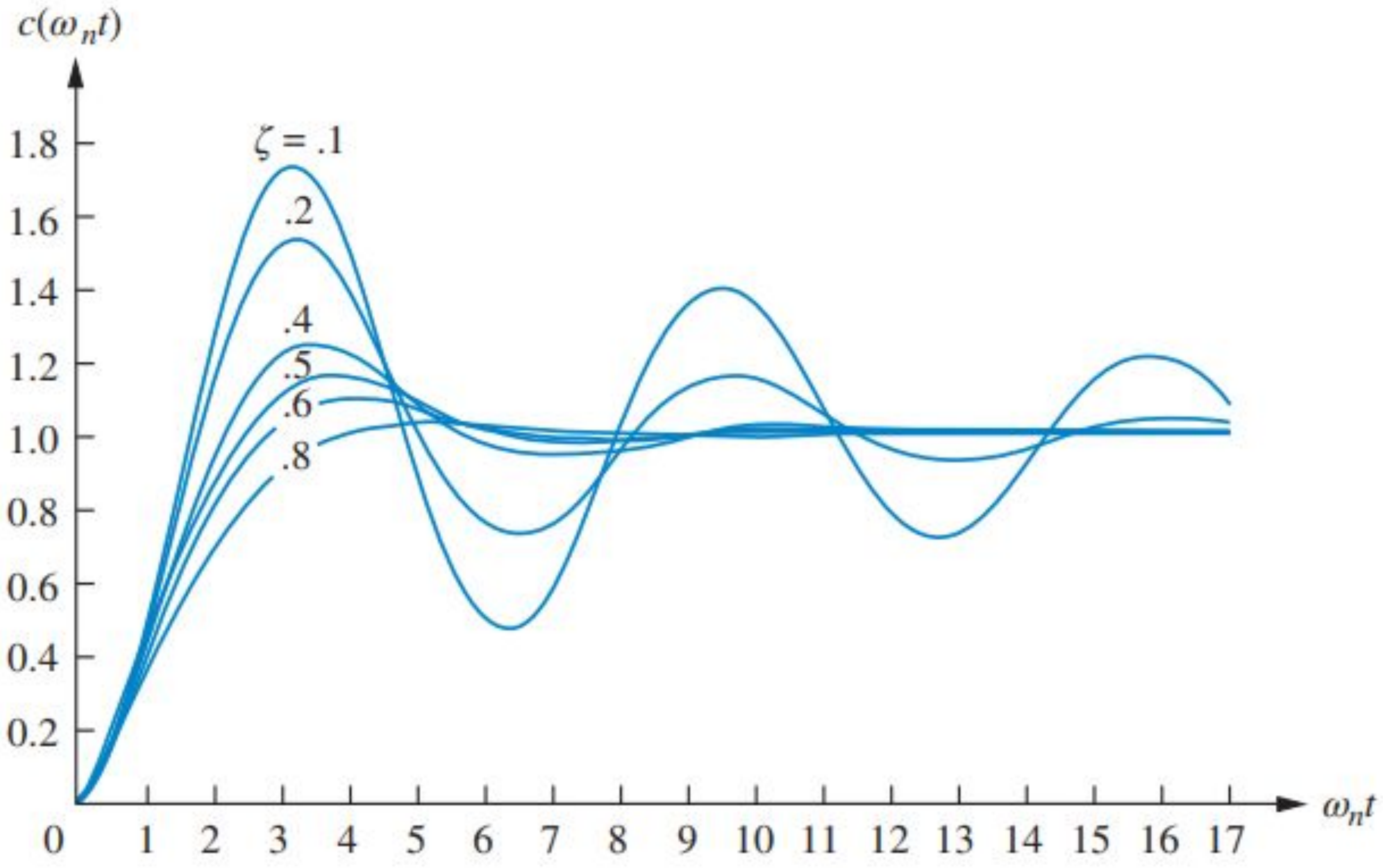
Uma definição viável para essa grandeza é aquela que considera a razão entre a frequência de decaimento exponencial da envoltória e a frequência natural. Esta razão é constante, independentemente da escala de tempo da resposta.

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

$$\omega_n = \sqrt{b} \qquad\qquad b = \omega_n^2$$

$$\zeta = \frac{\text{Exponential decay frequency}}{\text{Natural frequency (rad/second)}} = \frac{|\sigma|}{\omega_n} = \frac{a/2}{\omega_n}$$

$$a = 2\zeta\omega_n \qquad\qquad \boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$



$c(\omega_n t)$
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
$\zeta = .1$
.2
.4
.5
.6
.8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
$\omega_n t$

Exemplo 4.3

Determinando ζ e ω_n para um Sistema de Segunda Ordem

PROBLEMA: Dada a função de transferência da Equação (4.23), determine ζ e ω_n.

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4{,}2s + 36} \tag{4.23}$$

SOLUÇÃO: Comparando a Equação (4.23) à Equação (4.22), $\omega_n^2 = 36$, a partir do que $\omega_n = 6$. Além disso, $2\zeta\omega_n = 4{,}2$. Substituindo o valor de ω_n, $\zeta = 0{,}35$.

Tempo de subida, Tr

O tempo necessário para que a forma de onda vá de 0,1 do valor final até 0,9 do valor final.

Instante de pico, Tp

O tempo necessário para alcançar o primeiro pico, ou pico máximo.

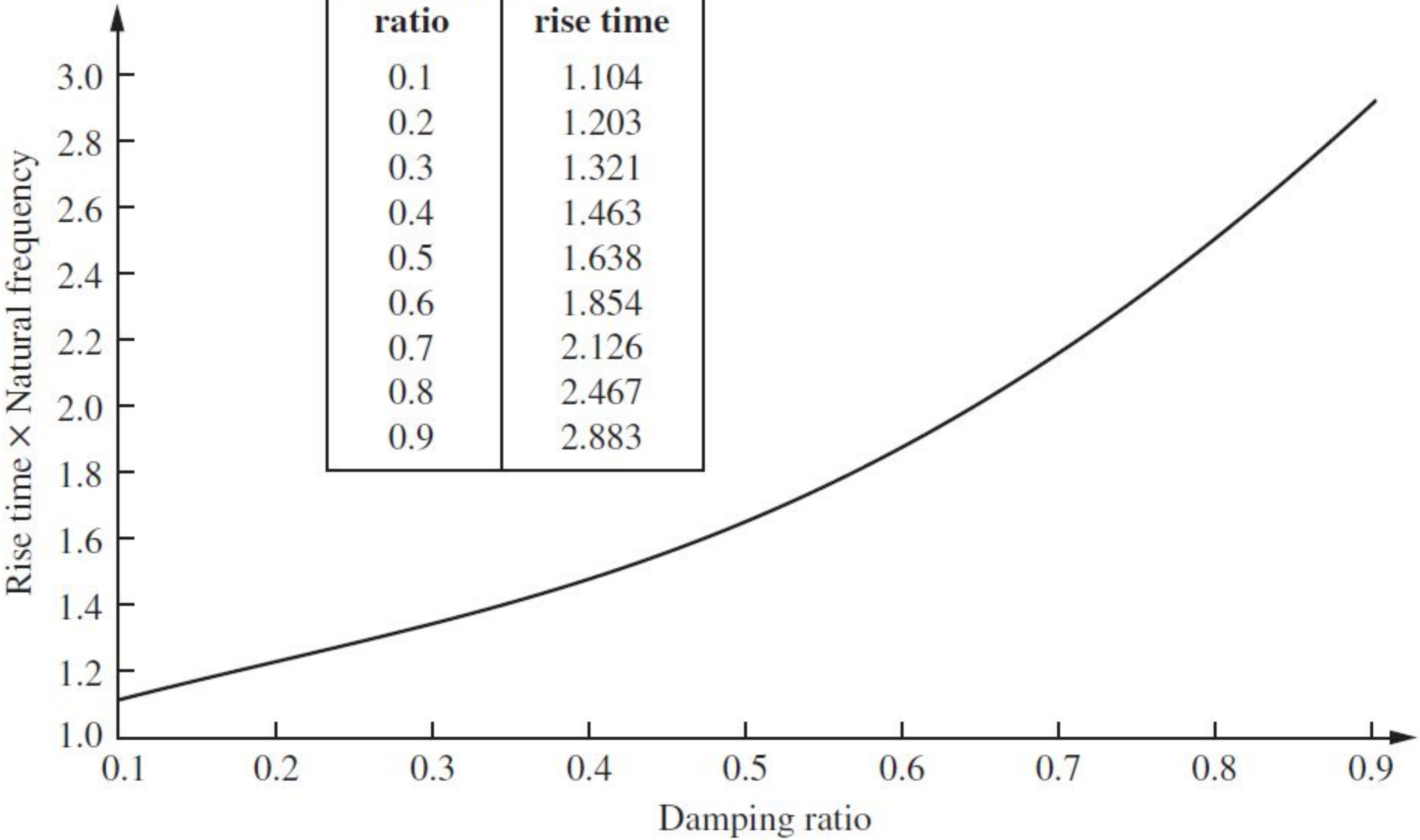
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Formas alternativas de cálculo de Tp e Ts

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{\pi}{\sigma_d}$$

Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883



Ultrapassagem percentual, %UP

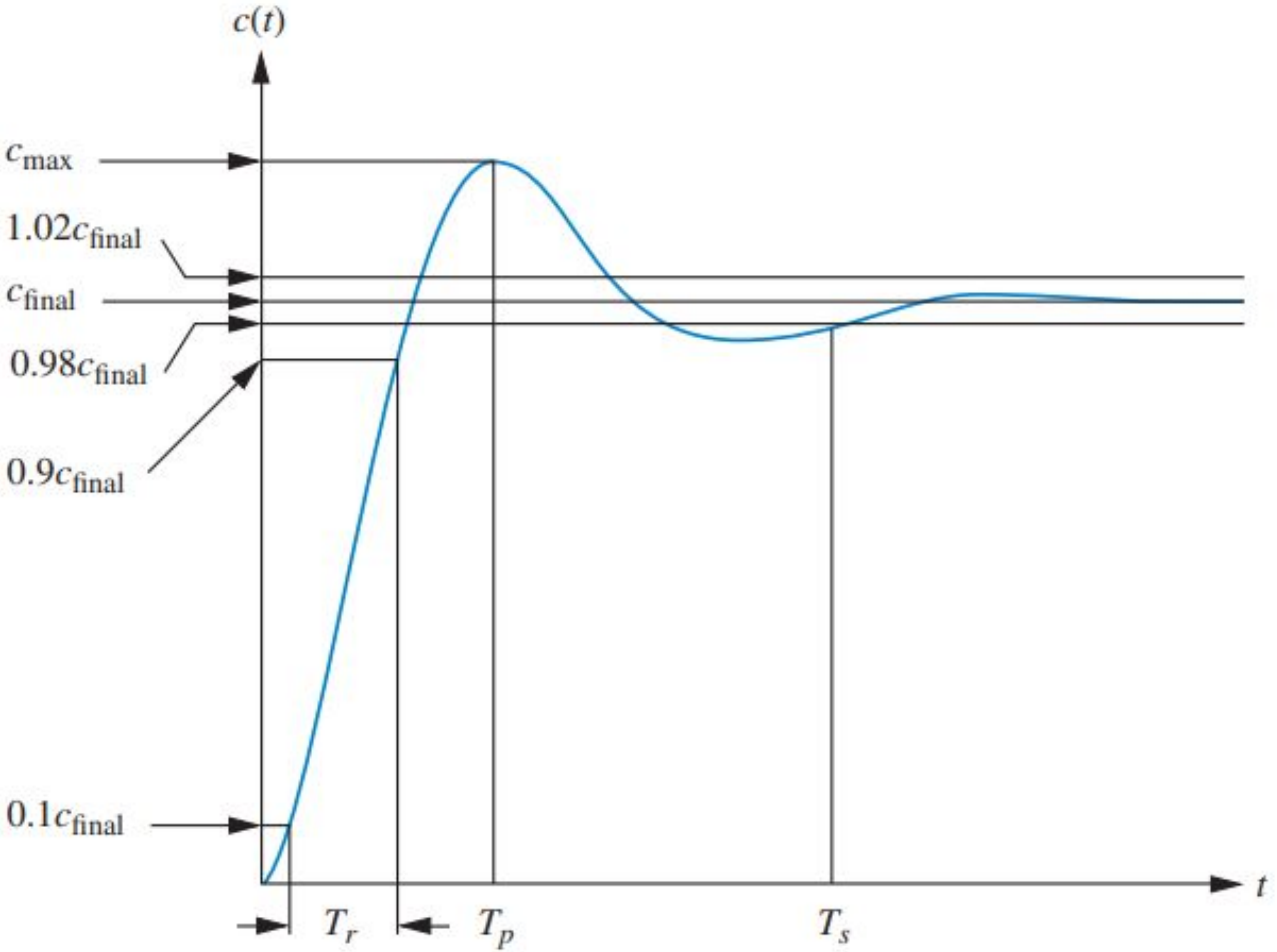
O valor pelo qual a forma de onda ultrapassa o valor em regime permanente, ou valor final, no instante de pico, expresso como uma percentagem do valor em regime permanente.

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$

Tempo de acomodação, Ts

O tempo necessário para que as oscilações amortecidas transitórias alcancem e permaneçam dentro de uma faixa de ±2 % em torno do valor em regime permanente.

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



c(t)
c_max
1.02c_final
c_final
0.98c_final
0.9c_final
0.1c_final
t
T_r
T_p
T_s

Exemplo 4.4

Caracterizando a Resposta a Partir do Valor de ζ

PROBLEMA: Para cada um dos sistemas mostrados na Figura 4.12, determine o valor de ζ e descreva o tipo de resposta esperado.

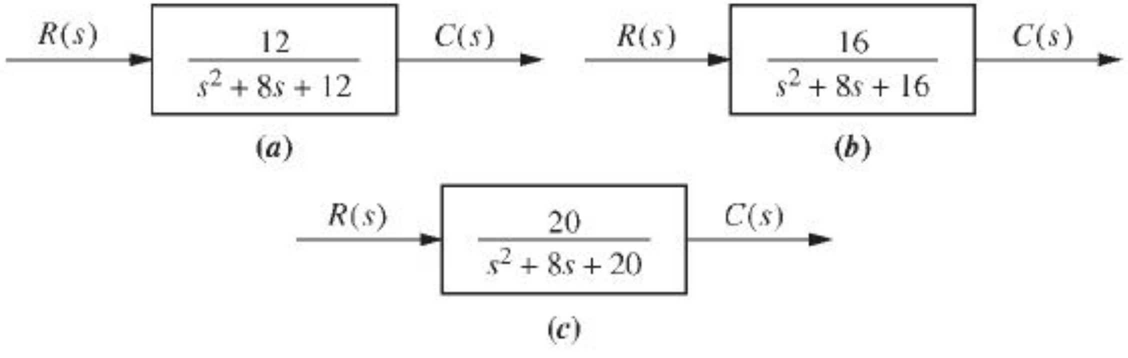


FIGURA 4.12 Sistemas para o Exemplo 4.4.

SOLUÇÃO: Primeiro iguale a forma desses sistemas com as formas mostradas nas Equações (4.16) e (4.22). Uma vez que $a = 2\zeta\omega_n$ e $\omega_n = \sqrt{b}$,

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}} \tag{4.25}$$

Utilizando os valores de a e b de cada um dos sistemas da Figura 4.12, obtemos $\zeta = 1{,}155$ para o sistema (a), que é, portanto, superamortecido, uma vez que $\zeta > 1$; $\zeta = 1$ para o sistema (b), que é, portanto, criticamente amortecido; e $\zeta = 0{,}894$ para o sistema (c), que é, portanto, subamortecido, uma vez que $\zeta < 1$.

Exemplo 4.5

Determinando T_p, $\%UP$, T_s e T_r a Partir de uma Função de Transferência

PROBLEMA: Dada a função de transferência

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100} \tag{4.43}$$

determine T_p, $\%UP$, T_s e T_r.

SOLUÇÃO: ω_n e ζ são calculados como 10 e 0,75, respectivamente. Agora, substitua ζ e ω_n nas Equações (4.34), (4.38) e (4.42) e determine, respectivamente, que $T_p = 0{,}475$ segundo, $\%UP = 2{,}838$ e $T_s = 0{,}533$ segundo. Utilizando a tabela da Figura 4.16, o tempo de subida normalizado é de aproximadamente 2,3 segundos. Dividindo por ω_n resulta $T_r = 0{,}23$ segundo. Este problema demonstra que podemos determinar T_p, $\%UP$, T_s e T_r sem a tarefa tediosa de aplicar a transformada inversa de Laplace, representar graficamente a resposta de saída e realizar as medições a partir do gráfico.