Atividade Prática 2

Maria Eduarda Pedroso

23 de abril de 2023

1 Resumo

Nesta prática, há quatro problemas a serem resolvidos. Na primeira questão é dado um sinal x[n] e é preciso determinar teoricamente e confirmar com um gráfico o período do sinal. Além disso, é necessário criar uma função Matlab que realize algumas operações no sinal, como multiplicar por um fator, inverter e dividir em partes pares e ímpares. Na segunda questão, é necessário analisar o comportamento de um sistema com entradas A e B, com A = 0,5 e B = 2, para diferentes tipos de entrada, como pulso, degrau unitário e cosseno unitário. Além disso, é necessário verificar se o sistema é linear, gerando dois sinais de teste e verificando graficamente as propriedades de uniformidade e aditividade. Na terceira questão, é necessário representar graficamente as partes real e imaginária, bem como a amplitude e a fase do sinal x[n]. Finalmente, na quarta questão, é necessário representar os dois sinais graficamente e determinar teoricamente e praticamente a convolução y = x * h. Essa prática é útil para estudantes e profissionais de áreas como engenharia elétrica, processamento de sinais e matemática, pois permite a aplicação prática de conceitos fundamentais dessas áreas, além de utilizar ferramentas como o Matlab para análise de sinais e sistemas

2 Requisitos do Projeto

Para essa pratica foi passado um roteiro com 4 perguntas sendo elas:

1. Considere o sinal abaixo e faça o que se pede:

   $x[n] = 2\cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{\pi}{5}n)$

   a) Determine de forma teórica o período da função abaixo e confirme de forma prática por meio de um gráfico em Matlab.

   b) Crie uma função do Matlab que realize as operações abaixo no sinal e esboce um gráfico do resultado:

      i) $y[n] = x[2n]$

      ii) $y[n] = x[-n]$

      iii) $y[n] = x[n-2]$

      iv) $y[n] = x[n]\cos(\omega_0 n), \omega_0 = \frac{\pi}{2}$

      v) Decomposição em parte par e ímpar

   c) Crie uma função que calcula a potência do sinal (conhecendo o período)

2. Considere o sistema abaixo:

   $y[n] = Ax[n] + B$

   a) Mostre como se comporta o sistema ($A = 0,5$ e $B = 2$) caso a entrada seja:

i) Um impulso
ii) Um degrau unitário
iii) Um cosseno unitário com frequência $\frac{\pi}{2}$

b) Mostre que o sistema não é linear por meio de simulação em Matlab. Dica: crie dois sinais de teste e verifique as propriedades de homogeneidade e aditividade de forma gráfica.

3. Considere o sinal abaixo:
$x[n] = 0.9ne^{j\frac{\pi}{10}n}$

a) Esboce o gráfico da parte real e da parte imaginária do sinal
b) Esboce o módulo e a fase do sinal

4. Considere os dois sinais abaixo:
$x[n] = \frac{1}{2^n}u[n], |a| < 1$
$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.5\delta[n+1]$

a) Faça o gráfico dos dois sinais no Matlab
b) Determine a convolução $y = x * h$ de forma teórica e prática. Dica: você pode determinar apenas a função que representa a saída y de forma teórica e criar o gráfico em Matlab.

3 Métodos e Técnicas

Utilizamos de várias tecnicas vistas em sala de aula e também na matéria de analise de sistemas lineares, sendo essas:

3.1 Sinais

Um sinal discreto é uma sequência de valores discretos que representam uma função de tempo discreta. Esses sinais são amplamente utilizados em sistemas de comunicação, processamento de sinais e outras aplicações de engenharia. Ao contrário dos sinais contínuos, que variam de forma suave e contínua, os sinais discretos mudam em intervalos regulares de tempo.

Comportamento do Sinal Discreto:

O comportamento do sinal discreto é descrito por suas propriedades, como amplitude, frequência, fase e período. A amplitude é a magnitude do sinal em um determinado instante de tempo, enquanto a frequência é a quantidade de ciclos por segundo. A fase é a defasagem do sinal em relação a um sinal de referência, e o período é o intervalo de tempo em que o sinal se repete.

Transformada de Fourier Discreta:

A análise de sinais discretos pode ser realizada através da Transformada de Fourier Discreta (DFT), que é uma técnica matemática utilizada para converter um sinal discreto de domínio do tempo para o domínio da frequência. A DFT é representada por uma série de coeficientes complexos, onde a parte real e imaginária de cada coeficiente representa a amplitude e a fase do sinal em uma determinada frequência.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}, \quad k = 0, 1, ..., N-1$$

Encontrando o Gráfico da Parte Real e Imaginária:

Para obter o gráfico da parte real e imaginária de um sinal discreto, podemos plotar a parte real e imaginária dos coeficientes da DFT em um gráfico cartesiano, onde o eixo x representa a frequência e o eixo y representa a amplitude ou fase. O gráfico da parte real representa a amplitude do sinal em cada frequência, enquanto o gráfico da parte imaginária representa a fase do sinal em cada frequência.

Encontrando o Módulo e Fase:

Além do gráfico da parte real e imaginária, o módulo e a fase do sinal discreto também podem ser encontrados a partir dos coeficientes da DFT. O módulo representa a amplitude do sinal em cada frequência e pode ser obtido calculando a magnitude do coeficiente complexo correspondente. A fase representa a defasagem do sinal em cada frequência e pode ser obtida calculando o argumento do coeficiente complexo correspondente.

$$|X[k]| = \sqrt{\mathrm{Re}(X[k])^2 + \mathrm{Im}(X[k])^2}$$

$$\angle X[k] = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(X[k])}{\mathrm{Re}(X[k])}\right)$$

3.2 Linearidade

A linearidade é um conceito fundamental em muitas áreas da matemática e da engenharia, como processamento de sinais e sistemas lineares. Essencialmente, a linearidade refere-se à capacidade de um sistema se comportar proporcionalmente à sua entrada. Em outras palavras, a resposta do sistema às entradas combinadas é igual à soma das respostas individuais às entradas individuais.

Uma definição formal de um sistema linear é dada por:

O sistema S mapeia a entrada $x(t)$ para a saída $y(t)$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções de tempo contínuo. Diz-se que S é linear se satisfaz as seguintes propriedades:

Uniformidade: Para qualquer entrada $x(t)$ e qualquer constante a, S é uniforme se a saída correspondente for dada por $S(ax(t)) = aS(x(t))$.

Aditividade: Para quaisquer duas entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, se a saída correspondente for dada por $S(x_1(t) + x_2(t)) = S(x_1(t)) + S(x_2(t))$, S é aditivo.

Essas propriedades podem ser expressas de forma mais concisa usando operadores matemáticos. Se S é linear, podemos escrever:

$S(ax_1(t) + bx_2(t)) = aS(x_1(t)) + bS(x_2(t))$

onde a e b são constantes e $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são entradas.

A linearidade é importante porque o sistema pode ser modelado de maneira matemática simples. Além disso, técnicas matemáticas como as transformadas de Fourier e Laplace podem ser usadas para explorar mais de perto as propriedades dos sistemas lineares. Por exemplo, a transformada de Fourier de um sinal é uma técnica matemática que nos permite analisar o espectro de frequência de um sinal. Se o sistema for linear, a transformada de Fourier da resposta do sistema à entrada pode ser calculada como o produto da transformada de Fourier da entrada e a resposta do sistema a uma entrada exponencial complexa, conhecida como resposta de frequência.

3.3 Manipulação de sinais

Manipulação de sinais discretos é uma técnica fundamental em processamento de sinais digitais. Algumas operações básicas incluem o deslocamento, a inversão e o redimensionamento de um sinal discreto.

O deslocamento de um sinal discreto é feito através da mudança de seu índice. Um deslocamento para a direita em n unidades é representado pela expressão $x[n - n_0]$, enquanto um deslocamento para a esquerda em n unidades é representado por $x[n + n_0]$. Ou seja, se $x[n]$ é um sinal discreto, então $x[n - n_0]$ representa um sinal deslocado para a direita e $x[n + n_0]$ representa um sinal deslocado para a esquerda.

A inversão de um sinal discreto é simplesmente a mudança da ordem de seus valores. Se $x[n]$ é um sinal discreto, então $x[-n]$ representa um sinal com seus valores invertidos. Ou seja, se $x[n] = [1, 2, 3, 4]$, então $x[-n] = [4, 3, 2, 1]$.

O redimensionamento de um sinal discreto envolve a multiplicação do índice do sinal por um fator constante. Um redimensionamento por um fator de escala a é representado pela expressão $x[a * n]$, enquanto um redimensionamento por um fator de compressão b é representado por $x[n/b]$. Ou seja, se x[n] é um sinal discreto, então $x[a * n]$ representa um sinal redimensionado por um fator de escala a e $x[n/b]$ representa um sinal redimensionado por um fator de compressão b.

As operações de deslocamento, inversão e redimensionamento podem ser combinadas para criar efeitos complexos nos sinais discretos. Por exemplo, um sinal pode ser redimensionado e, em seguida, deslocado para criar uma série de ecos. Ou um sinal pode ser invertido e, em seguida, deslocado para criar um efeito de retrocesso.

3.4 Decomposição par e impar

A decomposição par e ímpar é uma técnica importante em análise de sinais e processamento de sinais. Ela é usada para decompor um sinal em duas componentes, uma par e uma ímpar. A componente par contém a parte do sinal que é simétrica em relação ao eixo vertical, enquanto a componente ímpar contém a parte do sinal que é anti-simétrica em relação ao eixo vertical. A decomposição pode ser realizada usando a seguinte fórmula:

$$f(t) = f_{par}(t) + f_{impar}(t)$$

Onde:

$$f_{par}(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$$
$$f_{impar}(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

A componente par é a parte do sinal que é simétrica em relação ao eixo vertical, ou seja, $f_{par}(t) = f_{par}(-t)$. A componente ímpar é a parte do sinal que é anti-simétrica em relação ao eixo vertical, ou seja, $f_{impar}(t) = -f_{impar}(-t)$.

A decomposição par e ímpar pode ser usada em diversas aplicações, como na análise de sinais de áudio e de imagens. Ela permite separar as diferentes componentes do sinal para facilitar sua análise e processamento.

3.5 Convolução

A convolução de sinais discretos é uma operação fundamental no processamento digital de sinais e tem aplicações em diversas áreas, como processamento de áudio, processamento de imagens, telecomunicações e controle. A convolução é utilizada para combinar dois sinais de forma a obter informações sobre a relação entre eles.

A convolução de dois sinais discretos x[n] e h[n] é definida como:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

onde o símbolo * indica a operação de convolução e y[n] é o sinal resultante. A convolução é uma operação comutativa, ou seja,

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n].$$

A convolução pode ser vista como uma operação de média móvel ponderada, em que cada amostra do sinal de saída é uma média ponderada das amostras dos sinais de entrada, em que os pesos são dados pelo sinal h[n]. Em outras palavras, a convolução é uma operação de filtragem, em que o sinal h[n] atua como um filtro sobre o sinal de entrada x[n].

A convolução tem diversas propriedades interessantes, como a propriedade associativa, a propriedade distributiva e a propriedade comutativa. A propriedade associativa da convolução é dada por:

$$(x[n] * h[n]) * g[n] = x[n] * (h[n] * g[n])$$

A propriedade distributiva da convolução é dada por:

$$x[n] * (h[n] + g[n]) = x[n] * h[n] + x[n] * g[n]$$

E a propriedade comutativa da convolução é dada por:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

A convolução é uma operação muito importante no processamento digital de sinais e tem aplicações em diversas áreas. Segundo Oppenheim e Schafer (2010), a convolução é "a operação mais importante em análise de sinais e sistemas lineares", e é utilizada em "filtros digitais, modelagem de sistemas, processamento de sinais e comunicações digitais, entre outros".

4 Resultados e Considerações

4.1 Exercicio 1

Para o primeiro exercicio precisamos apenas entender como encontramos o periodo e como fazemos algumas manipulações de sinais.

Para determinar o período de uma função discreta, precisamos encontrar o menor valor inteiro de N que satisfaz a equação:

$$x[n] = x[n+N] \tag{1}$$

Podemos encontrar o período de uma função discreta utilizando a seguinte fórmula:

$$N = \frac{N_0}{mdc(N_0, k)} \tag{2}$$

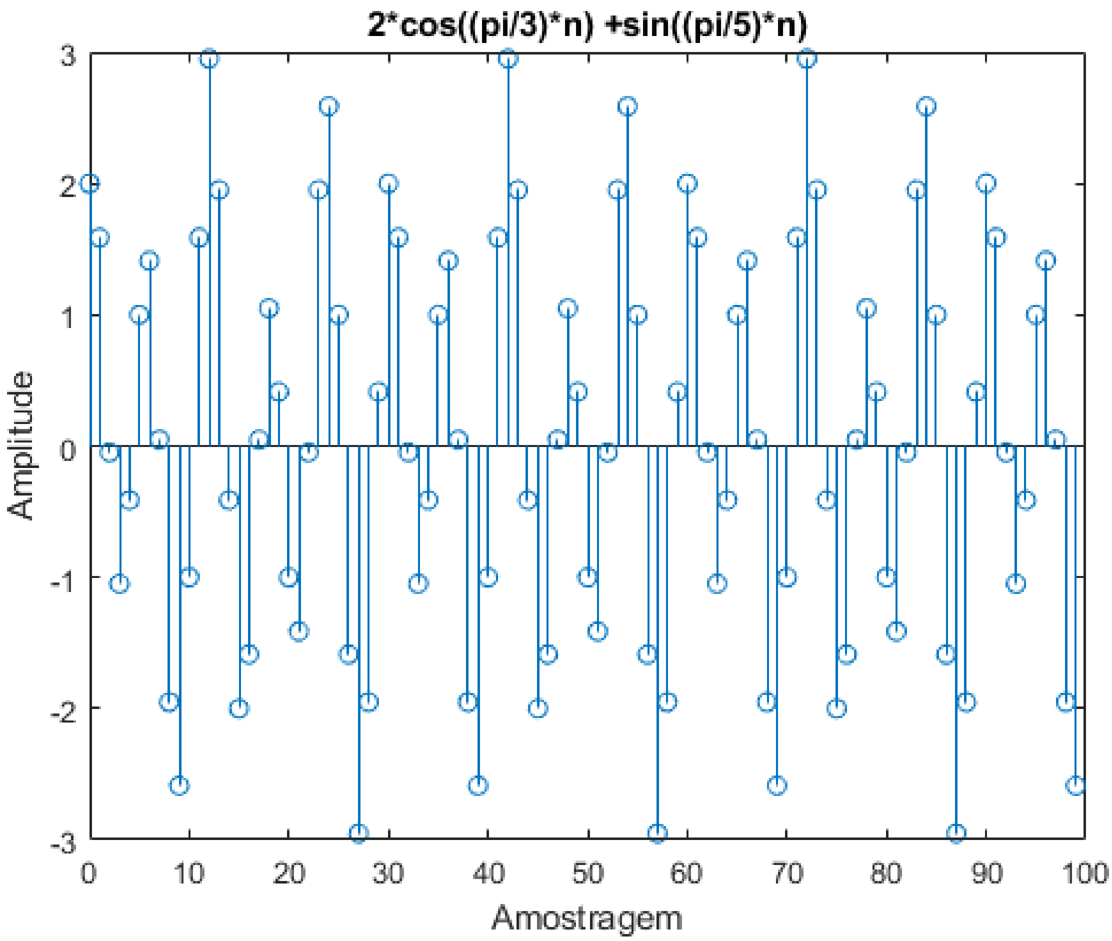
Onde N_0 é o menor número inteiro positivo tal que $x[n] = x[n + N_0]$ para todo n, e k é o menor número inteiro positivo para o qual $x[n] = x[n + k]$ para todo n.

No caso da função $x[n] = 2\cos(\frac{\pi}{3}n)+\sin(\frac{\pi}{5}n)$, podemos observar que ela é uma combinação de duas funções senoidais com períodos $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ e $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$. O período da função $x[n]$ será dado pelo mínimo múltiplo comum entre T_1 e T_2:

$$N = mmc(6, 10) = 30. \tag{3}$$

Portanto, o período da função $x[n]$ é $N = 30$. Fazendo o grágico no matlab temos o seguinte resultado:

Figura 1: Sinal inicial plotado

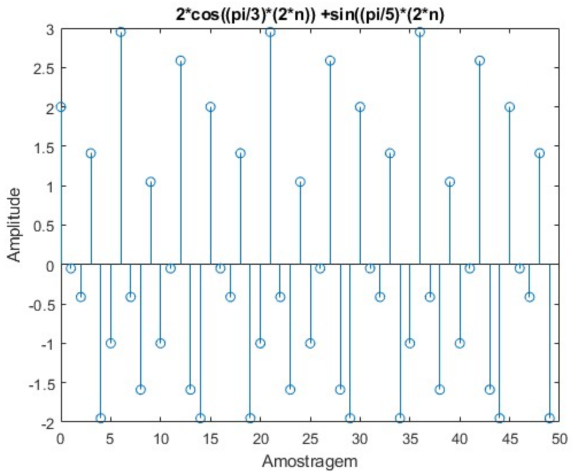


Fonte: Autoria própria.

Como podemos observar é o mesmo resultado encontrado de forma teórica.

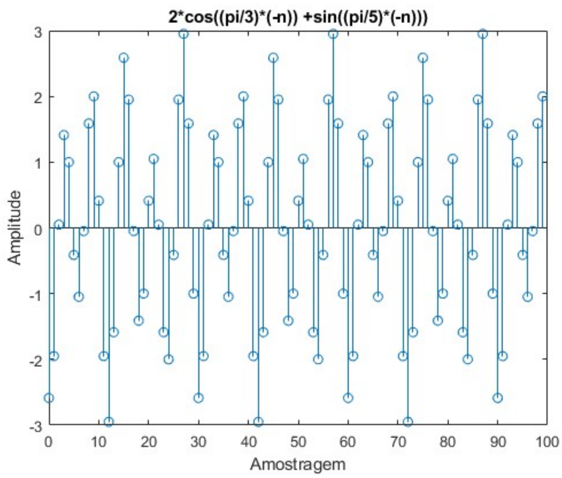
Os outros exercicios era sobre manipulação de sinal com ajuda de funções no matlab, temos os seguintes resultados:

Figura 2: Grafico 1 - a - i



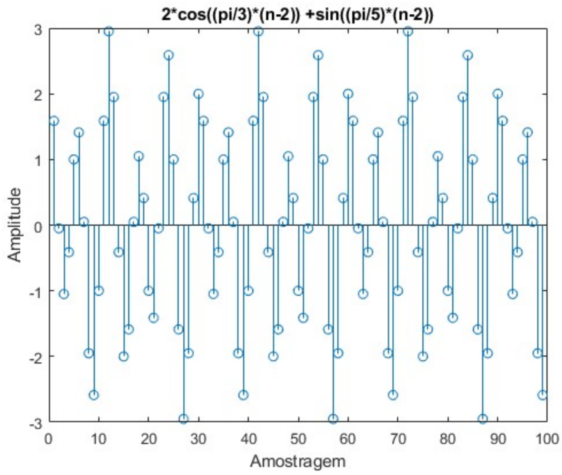
Fonte: Autoria própria.

Figura 3: Grafico 1 - a - ii



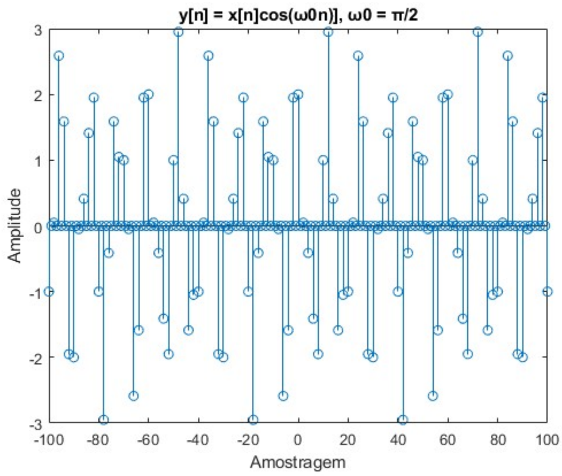
Fonte: Autoria própria.

Figura 4: Grafico 1 - a - iii



Fonte: Autoria própria.

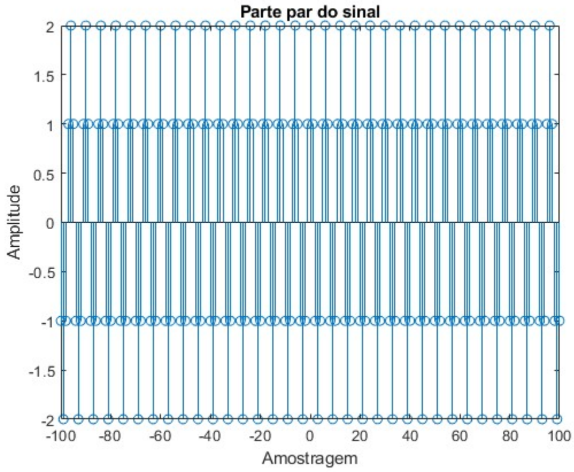
Figura 5: Grafico 1 - a - iiii



Fonte: Autoria própria.

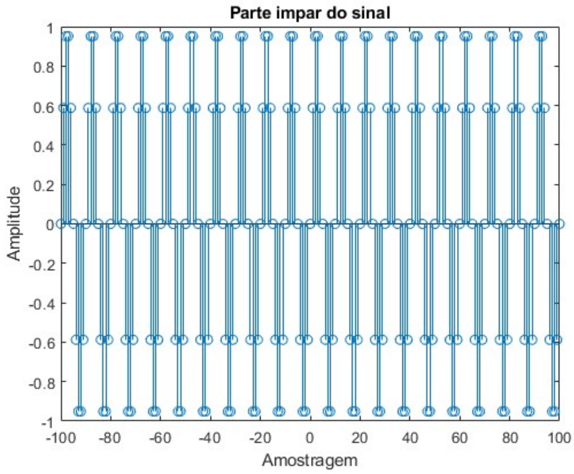
Agora temos a decomposição em parte par e impar que foi feita seguindo a formula conforme explicado mais a cima:

Figura 6: Grafico Parte Par



Fonte: Autoria própria.

Figura 7: Grafico Parte Impar



Fonte: Autoria própria.

Para finalizar foi feito uma função para potência. Para calcular a potência de um sinal discreto, você pode utilizar a seguinte fórmula:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \tag{4}$$

Onde:

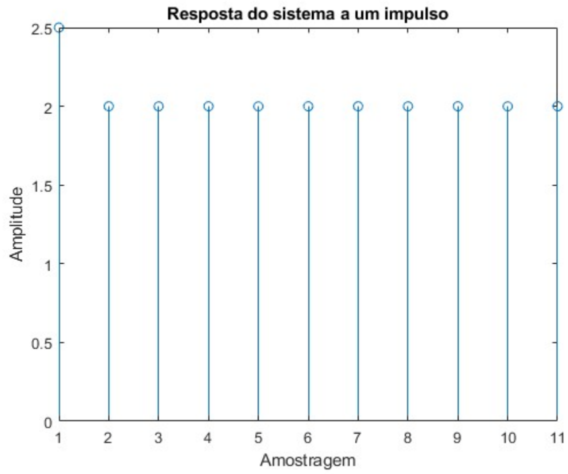
P é a potência do sinal;
N é o número de amostras do sinal;
$x[n]$ é a amostra do sinal na posição n;
$|x[n]|^2$ é o valor absoluto da amostra ao quadrado;
$\sum$ é o somatório de todas as amostras do sinal.

Assim, para calcular a potência de um sinal discreto, basta calcular o valor absoluto de cada amostra ao quadrado, somar esses valores e dividir pelo número total de amostras.

4.2 Exercicio 2

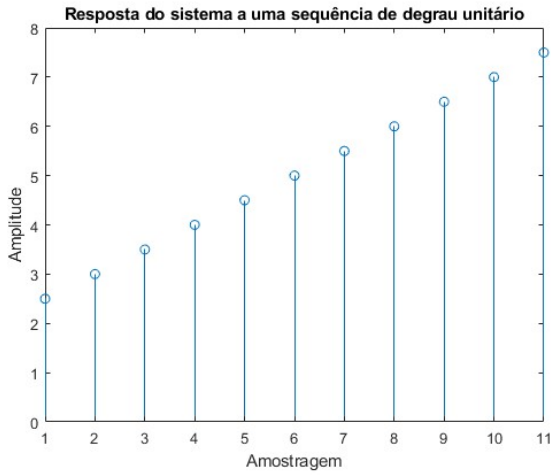
Para o exercicio 2 precisamos ver o comportamento diferenciando a entrada, abaixo temos 3 gráficos sendo o primeiro para uma entrada impulso, o segundo um degrau unitário e o terceiro um cosseno unitario.

Figura 8: Grafico Entrada: impulso



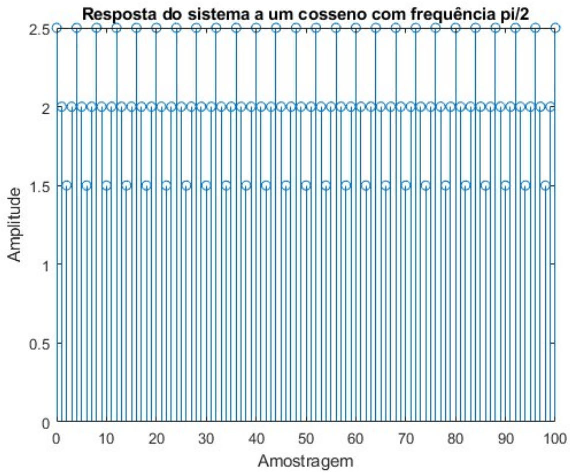
Fonte: Autoria própria.

Figura 9: Grafico Entrada: degrau unitário



Fonte: Autoria própria.

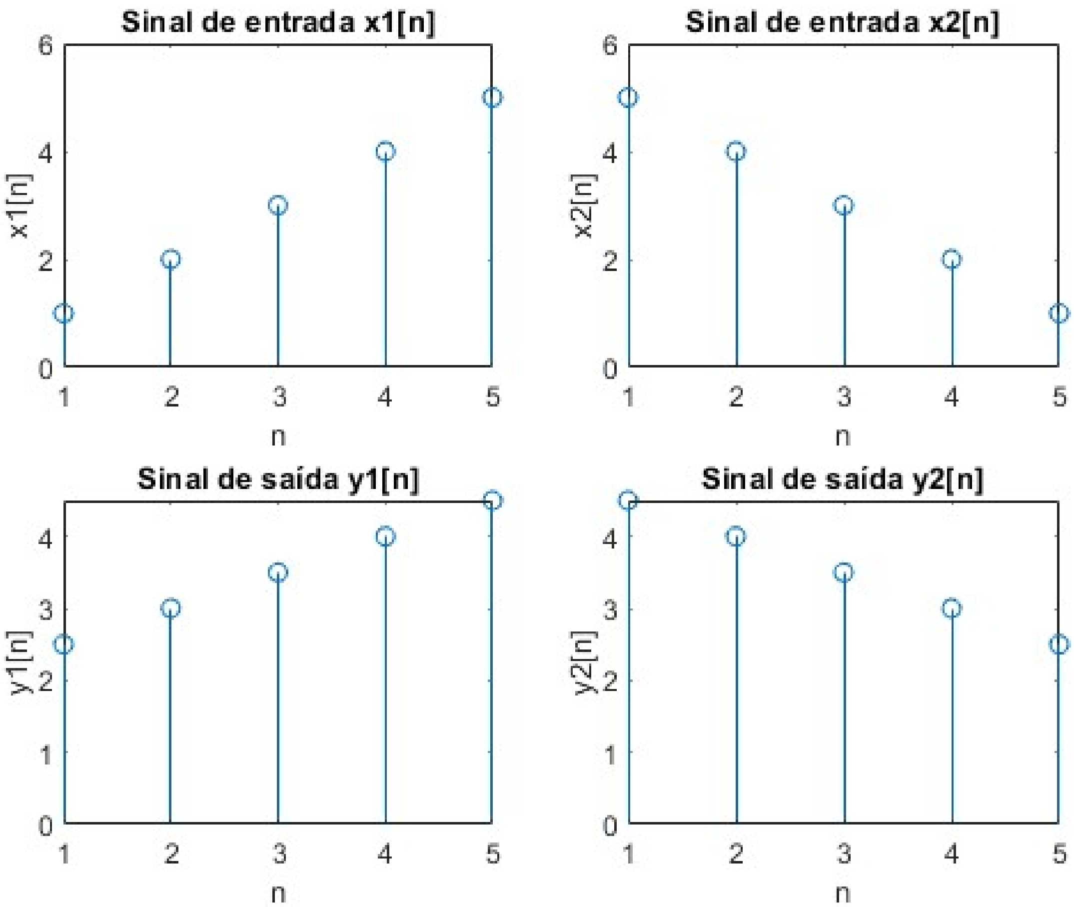
Figura 10: Grafico Entrada: cosseno unitário



Fonte: Autoria própria.

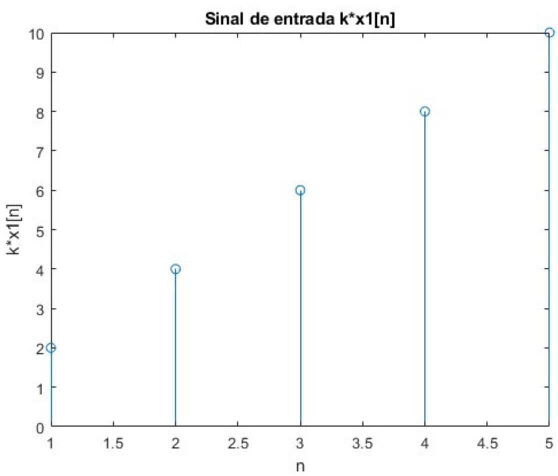
Agora através da fundamentação teorica e o que aprendemos em aula testamos a linearidade atraves da homogeneidade e aditividade do nosso sistema e conseguimos afirmar pelos gráficos que o sistema não é linear

Figura 11: Grafico Aditividade



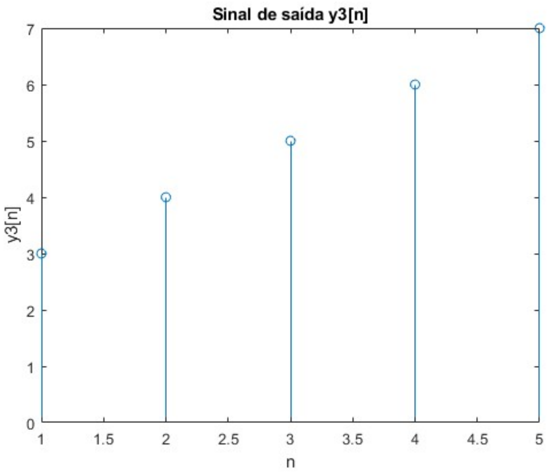
Fonte: Autoria própria.

Figura 12: Grafico Homogeneidade 1



Fonte: Autoria própria.

Figura 13: Grafico Homogeneidade 2



Fonte: Autoria própria.

4.3 Exercicio 3

Para o exercicio 3 precisamos separar a parte real e imaginária. Para separar a parte real e imaginária de um sistema discreto, você pode utilizar a seguinte técnica:

Suponha que você tenha um sinal discreto complexo $x[n]$, onde n representa a posição da amostra no tempo discreto. Você pode separar a parte real e imaginária do sinal complexo da seguinte forma:

$$x[n] = a[n] + jb[n] \tag{5}$$

Onde n é a posição da amostra no tempo discreto, $a[n]$ é a parte real do sinal e $b[n]$ é a parte imaginária do sinal. A letra j é a unidade imaginária, que representa a raiz quadrada de -1.

Para encontrar a parte real $a[n]$, você pode utilizar a seguinte fórmula:

$$x[n] = \mathrm{Re}\, x[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^{[}n]) \tag{6}$$

onde $\mathrm{Re}\,\cdot$ representa a parte real de um número complexo e $x^*[n]$ representa o complexo conjugado de $x[n]$.

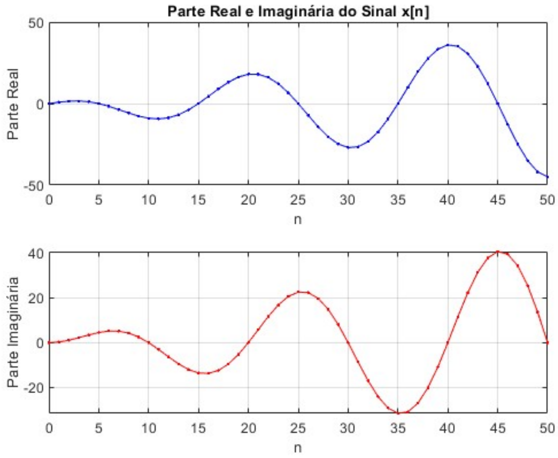
Da mesma forma, para encontrar a parte imaginária $b[n]$, você pode utilizar a seguinte fórmula:

$$x[n] == b[n] = \mathrm{Im}\, x[n] = \frac{1}{2j}(x[n] - x^{[}n]) \tag{7}$$

onde $\mathrm{Im}\,\cdot$ representa a parte imaginária de um número complexo e j é a unidade imaginária.

Assim, utilizando essas fórmulas, você pode separar a parte real e imaginária de um sinal discreto complexo. Conseguimos ver o resultado pelos gráficos abaixo:

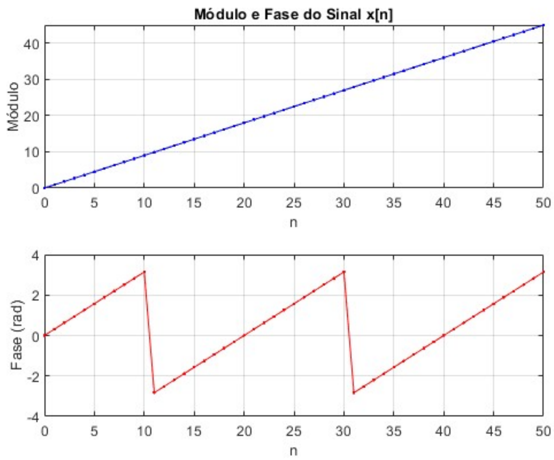
Figura 14: Grafico parte real e imaginária 2



Fonte: Autoria própria.

Também temos o módulo e a fase no qual foi feito e podemos visualizar nos graficos abaixo.

Figura 15: Grafico fase e módulo

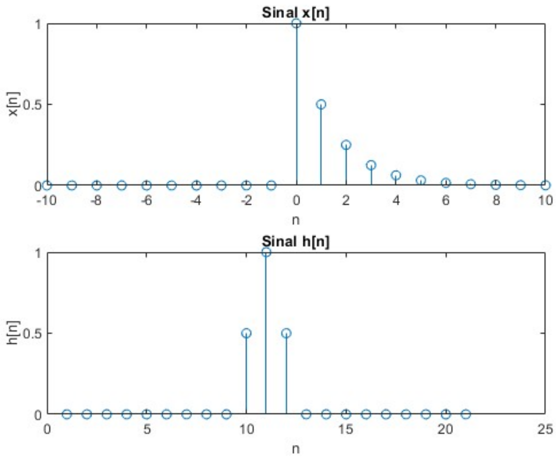


Fonte: Autoria própria.

4.4 Exercicio 4

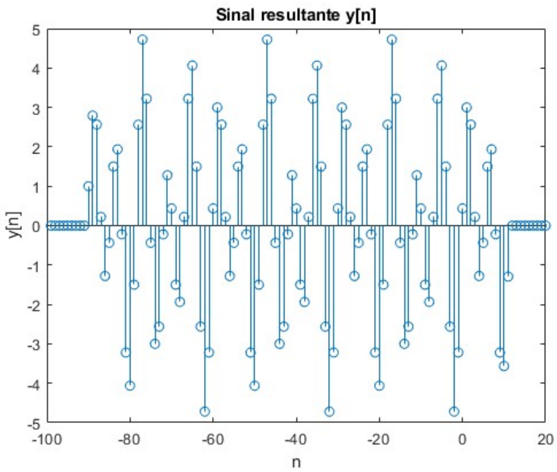
Para esse ultimo exercicío precisamos interpretar os dois sinais x[n] e h[n] no qual podemos visualizar abaixo, e após isso, fazer a convolução conforme a teoria apresentada nas aulas resultando nos seguintes dados.

Figura 16: Grafico representação dos sinais



Fonte: Autoria própria.

Figura 17: Grafico resultante da convolução



Fonte: Autoria própria.

5 Referências

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Processamento de Imagens Digitais*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

HAYKIN, S.; VAN VEEN, B. *Sinais e Sistemas*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

INGLE, V. K.; PROAKIS, J. G. *Digital Signal Processing Using MATLAB*. 3rd ed. Boston: Cengage Learning, 2016.

LYONS, R. G. *Understanding Digital Signal Processing*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2011.

MANOLAKIS, D.; INGLE, V. K.; PROAKIS, J. G. *Processamento Digital de Sinais: Princípios, Algoritmos e Aplicações*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2017.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. *Sinais e Sistemas*. 2. ed. São Paulo: Prentice Hall, 1997.

PAIVA, M. S.; ARANTES, D. B.; CARVALHO, M. G. de. *Processamento Digital de Sinais: Teoria e Prática*. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. K. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2006.

QUIRINO, M. A. D. *Processamento Digital de Sinais: Conceitos, Algoritmos e Aplicações*. São Paulo: Érica, 2017.

SMITH, S. W. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. 2nd ed. San Diego, CA: California Technical Publishing, 1999.