Atividade Prática 1

Maria Eduarda Pedroso

8 de abril de 2023

1 Resumo

O relatório tem como objetivo transformar sinais contínuos em sinais discretos e analisar se ocorre o fenômeno de aliasing. Para isso, serão gerados gráficos utilizando o software MATLAB. Inicialmente, serão apresentados os conceitos teóricos sobre a transformação de sinais contínuos em discretos e sobre o fenômeno de aliasing. Em seguida, serão descritas as técnicas utilizadas para realizar a discretização do sinal e para detectar a presença de aliasing. Para validar as técnicas utilizadas, serão gerados gráficos comparativos entre o sinal contínuo original e o sinal discretizado, bem como gráficos que mostram a presença ou ausência de aliasing. Serão utilizados parâmetros como frequência de amostragem e largura de banda para avaliar os resultados obtidos. Por fim, serão apresentadas as conclusões sobre a análise realizada e sugestões para possíveis melhorias ou ajustes nas técnicas utilizadas. Os gráficos gerados no MATLAB serão incluídos no relatório como evidências visuais dos resultados obtidos.

2 Requisitos do Projeto

Os requisitos foram passados em um arquivo pelo professor, contendo algumas perguntas que resumindo tinham os objetivos de analizar aliasing e transformas sinais continuos em discretos. As perguntas e instruções estão abaixo descritas de forma simplificada.

1. No primeiro item, é dada a função $x_c(t) = \sin(2\pi t)$ e é solicitado que sejam determinadas a função do sinal discreto e o sinal contínuo de um alias para cada período de amostragem, além de se esboçar essas funções no Matlab. São considerados cinco períodos de amostragem diferentes.

2. No segundo item, a função dada é $x_c(t) = 127\sqrt{3}\sin(2\pi \cdot 60 \cdot t)$ e é solicitado que sejam determinadas a frequência discreta dos sinais amostrados para cada frequência de amostragem, além de se determinar quais frequências de amostragem apresentam o efeito de aliasing. Também é solicitado que sejam esboçadas no Matlab 150ms da função contínua e da amostrada para cada frequência de amostragem. São consideradas seis frequências de amostragem diferentes.

3. No terceiro item, são consideradas duas funções senoidais com frequências $f_1 = \frac{1}{8}$ Hz e $f_2 = -\frac{7}{8}$ Hz, e é solicitado que seja demonstrado que as mesmas estão em aliasing considerando uma frequência de amostragem de 1 Hz.

3 Métodos e Técnicas

Sinais são uma parte fundamental da engenharia elétrica, eletrônica, da computação e de outras áreas relacionadas. Os sinais podem ser descritos como uma variação de grandeza física que carrega informação, podendo ser contínuos ou discretos. A compreensão dos sinais é essencial para muitas aplicações, como a transmissão de dados, comunicação, processamento de imagens, análise de dados, entre outras.

A teoria dos sinais e sistemas tem sido estudada há mais de um século, e continua a evoluir com novas descobertas e tecnologias. A análise de sinais pode ser realizada por meio de diversas técnicas, incluindo a transformação de Fourier, a transformação wavelet, a análise espectral, entre outras.

As aplicações de sinais são vastas e variadas, desde a telefonia até a medicina, passando por áreas como controle de processos industriais, análise de tráfego em redes de computadores e a detecção de ondas sísmicas. A importância dos sinais na atualidade é inquestionável, e sua compreensão é fundamental para o avanço da ciência e da tecnologia.

3.1 Senoides continuas e discretas

Os sinais senoidais são um dos tipos mais comuns de sinais encontrados na natureza e na engenharia. Eles podem ser modelados matematicamente por funções senoidais, que apresentam uma oscilação periódica em torno de um valor médio.

Sinais senoidais podem ser classificados em duas categorias: contínuos e discretos. Sinais senoidais contínuos são representados por funções senoidais contínuas no tempo, enquanto sinais senoidais discretos são representados por uma sequência de valores discretos no tempo.

Os sinais senoidais contínuos são definidos pela seguinte equação:

$$x(t) = A \sin(2\pi f t + \phi) \tag{1}$$

onde A é a amplitude, f é a frequência, t é o tempo e ϕ é a fase. Essa equação descreve uma onda senoidal que oscila em torno de um valor médio de zero, com amplitude A, frequência f, e fase ϕ. A frequência é dada em Hz (Hertz), e representa o número de ciclos por segundo.

Os sinais senoidais discretos são definidos pela seguinte equação:

$$x[n] = A \sin\left(\frac{2\pi}{N} f n + \phi\right) \tag{2}$$

onde A é a amplitude, f é a frequência, n é um índice inteiro que representa a posição da amostra no tempo, N é o número total de amostras, e ϕ é a fase. Essa equação descreve uma sequência de valores discretos que representam uma onda senoidal com amplitude A, frequência f, e fase ϕ. A frequência é dada em ciclos por amostra.

A análise e processamento de sinais senoidais contínuos e discretos é fundamental para diversas aplicações em engenharia, como em telecomunicações, eletrônica, processamento de sinais de áudio e vídeo, entre outras. É importante compreender as características e propriedades desses sinais para a realização de tarefas como filtragem, modulação, demodulação, análise espectral, entre outras.

A discretização de um sinal senoidal contínuo é realizada através da amostragem do sinal em intervalos de tempo igualmente espaçados. Esse processo é realizado utilizando um conversor analógico-digital (ADC), que converte o sinal analógico em uma sequência de valores discretos representando o sinal amostrado. A taxa de amostragem, que é dada em amostras por segundo (amostras/s) ou Hertz (Hz), determina a frequência máxima do sinal que pode ser representada sem o efeito de aliasing.

O efeito de aliasing ocorre quando a frequência do sinal de entrada é maior que a metade da taxa de amostragem, conhecida como frequência de Nyquist. Nesse caso, o sinal de saída do ADC será uma frequência mais baixa, o que pode levar a uma interpretação incorreta do sinal original. Para evitar o efeito de aliasing, é necessário utilizar um filtro passa-baixas antes do ADC, que remove as frequências superiores à frequência de Nyquist.

A discretização de um sinal senoidal contínuo pode ser representada matematicamente através da fórmula:

$$x[n] = x(nT_s) = A\sin(2\pi f nT_s + \phi) \tag{3}$$

onde $x[n]$ é o sinal amostrado, n é o índice da amostra, T_s é o período de amostragem e f é a frequência do sinal senoidal contínuo. A frequência do sinal amostrado, f_s, é dada por $f_s = \frac{1}{T_s}$. O período de amostragem é dado por $T_s = \frac{1}{f_s}$.

A amostragem e discretização de sinais senoidais contínuos são fundamentais para diversas aplicações em engenharia, como em telecomunicações, processamento de áudio e vídeo, controle de sistemas, entre outras.

3.2 Alias e amostragem

A amostragem é um processo utilizado para converter sinais contínuos em sinais discretos, que podem ser processados digitalmente. Esse processo envolve a captura de amostras do sinal em intervalos regulares de tempo, com uma determinada frequência de amostragem, dada por:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \tag{4}$$

onde f_s é a frequência de amostragem em Hz, e T_s é o período de amostragem em segundos.

A frequência de Nyquist é definida como metade da frequência de amostragem, e representa a frequência máxima que pode ser reconstruída a partir das amostras, dada por:

$$f_n = \frac{f_s}{2} \tag{5}$$

O efeito de aliasing é causado pela sobreposição de frequências no espectro do sinal discreto, o que pode levar a distorções e perda de informação no sinal original. O efeito de aliasing ocorre quando um sinal contínuo é amostrado com uma frequência menor do que a sua frequência de Nyquist, ou seja, quando a frequência do sinal original é maior do que a metade da frequência de amostragem.

A frequência do sinal amostrado pode ser dada por:

$$f_m = k \cdot f_s \pm f \tag{6}$$

Onde k é um número inteiro, e f é a frequência do sinal original. Se a frequência do sinal original for maior do que a frequência de Nyquist, haverá sobreposição de frequências e o efeito de aliasing ocorrerá.

Para evitar o efeito de aliasing, é necessário utilizar uma frequência de amostragem adequada em relação à frequência do sinal original. A amostragem e o efeito de aliasing são temas estudados na área de processamento de sinais, e são fundamentais para a compreensão de muitas aplicações práticas.

4 Resultados e Considerações

Utilizando das informações obtidas em aula e em pesquisa podemos observar os seguintes resultados abaixo:

4.1 Parte 1

Dado o sinal $x_c(t) = \sin(2\pi t)$, podemos determinar sua amplitude $A = 1$ e sua frequência angular $\omega_c = 2\pi$ rad/s, utilizando a equação 2. Com a equação 3, podemos concluir que a frequência do sinal é $f_c = 1$ Hz.

Levando em consideração as características do sinal analisado, foram buscadas soluções para atender aos objetivos propostos, iniciaremos com o processo de discretização encontrando assim cada um dos periodos e em uma segunda etapa o sinal amostrado, visto que a amplitude continua a mesma do sinal original.

$$\Omega_1 = \omega_c \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 0.1 = 0.2\pi \text{ rad/amostra}$$
$$\Omega_2 = \omega_c \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 0.2 = 0.4\pi \text{ rad/amostra}$$
$$\Omega_3 = \omega_c \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 0.3 = 0.6\pi \text{ rad/amostra}$$
$$\Omega_4 = \omega_c \cdot 400 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 0.4 = 0.8\pi \text{ rad/amostra}$$
$$\Omega_5 = \omega_c \cdot 500 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 0.5 = \pi \text{ rad/amostra}$$

Com esses dados conseguimos afirmar que os sinais discretos são:

$$x_{s1}[n] = \sin(0.2\pi \cdot n)$$
$$x_{s2}[n] = \sin(0.4\pi \cdot n)$$
$$x_{s3}[n] = \sin(0.6\pi \cdot n)$$
$$x_{s4}[n] = \sin(0.8\pi \cdot n)$$
$$x_{s5}[n] = \sin(\pi \cdot n)$$

Para encontrar um alias do sinal xc para os periodos de amostragem achamos as frequencias que acarretam alias.

$$f_{A1} = 1 + \frac{1}{100 \cdot 10^{-3}} = 11 \text{ Hz}$$
$$f_{A2} = 1 + \frac{1}{200 \cdot 10^{-3}} = 6 \text{ Hz}$$
$$f_{A3} = 1 + \frac{1}{300 \cdot 10^{-3}} \approx 4.33 \text{ Hz}$$
$$f_{A4} = 1 + \frac{1}{400 \cdot 10^{-3}} \approx 3.5 \text{ Hz}$$
$$f_{A5} = 1 + \frac{1}{500 \cdot 10^{-3}} = 3 \text{ Hz}$$

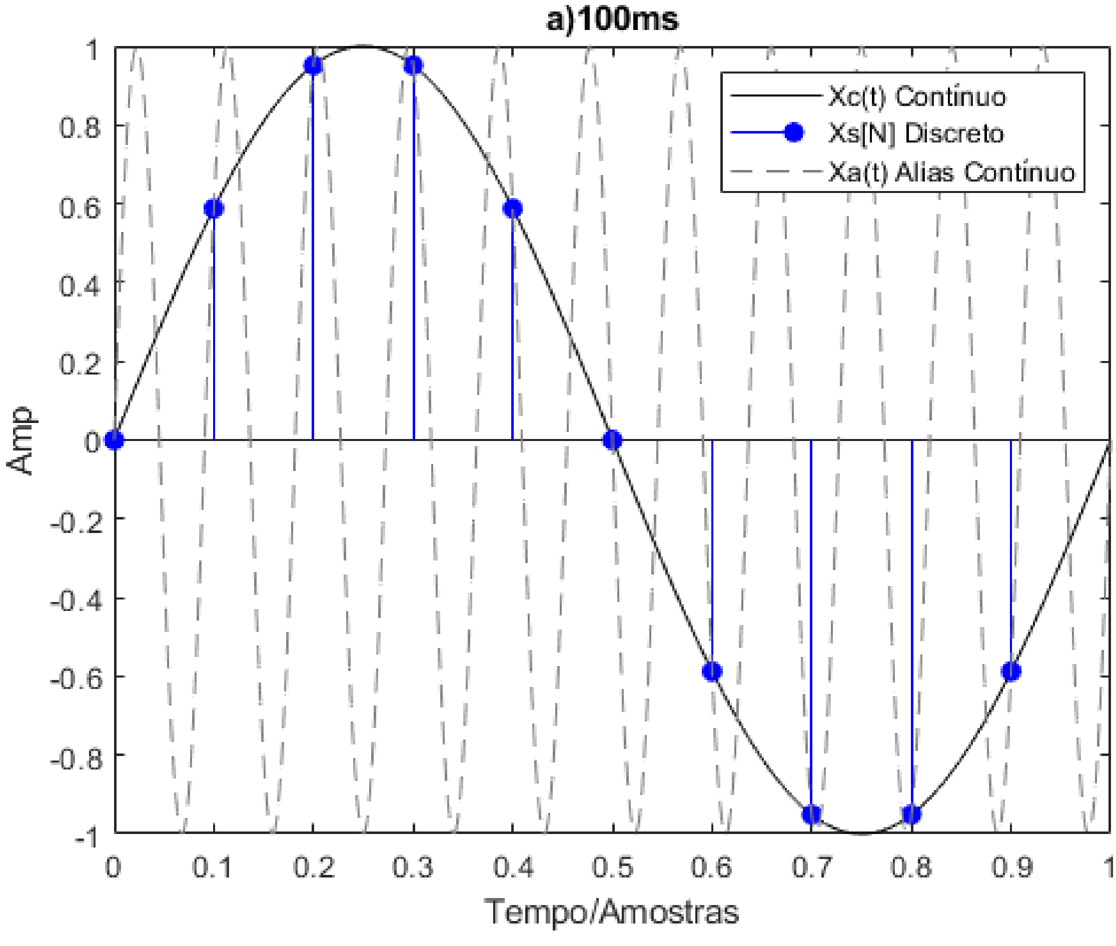
Desse modo conseguimos obter as funções:

$$xA1(t) = \sin(2\pi \cdot 11 \cdot t) \Rightarrow xA1(t) = \sin(22\pi \cdot t)$$
$$xA2(t) = \sin(2\pi \cdot 6 \cdot t) \Rightarrow xA2(t) = \sin(12\pi \cdot t)$$
$$xA3(t) = \sin(2\pi \cdot 4.33 \cdot t) \Rightarrow xA3(t) = \sin(8.66\pi \cdot t)$$
$$xA4(t) = \sin(2\pi \cdot 3.5 \cdot t) \Rightarrow xA4(t) = \sin(7\pi \cdot t)$$
$$xA5(t) = \sin(2\pi \cdot 3 \cdot t) \Rightarrow xA5(t) = \sin(6\pi \cdot t)$$

4.2 Gráficos

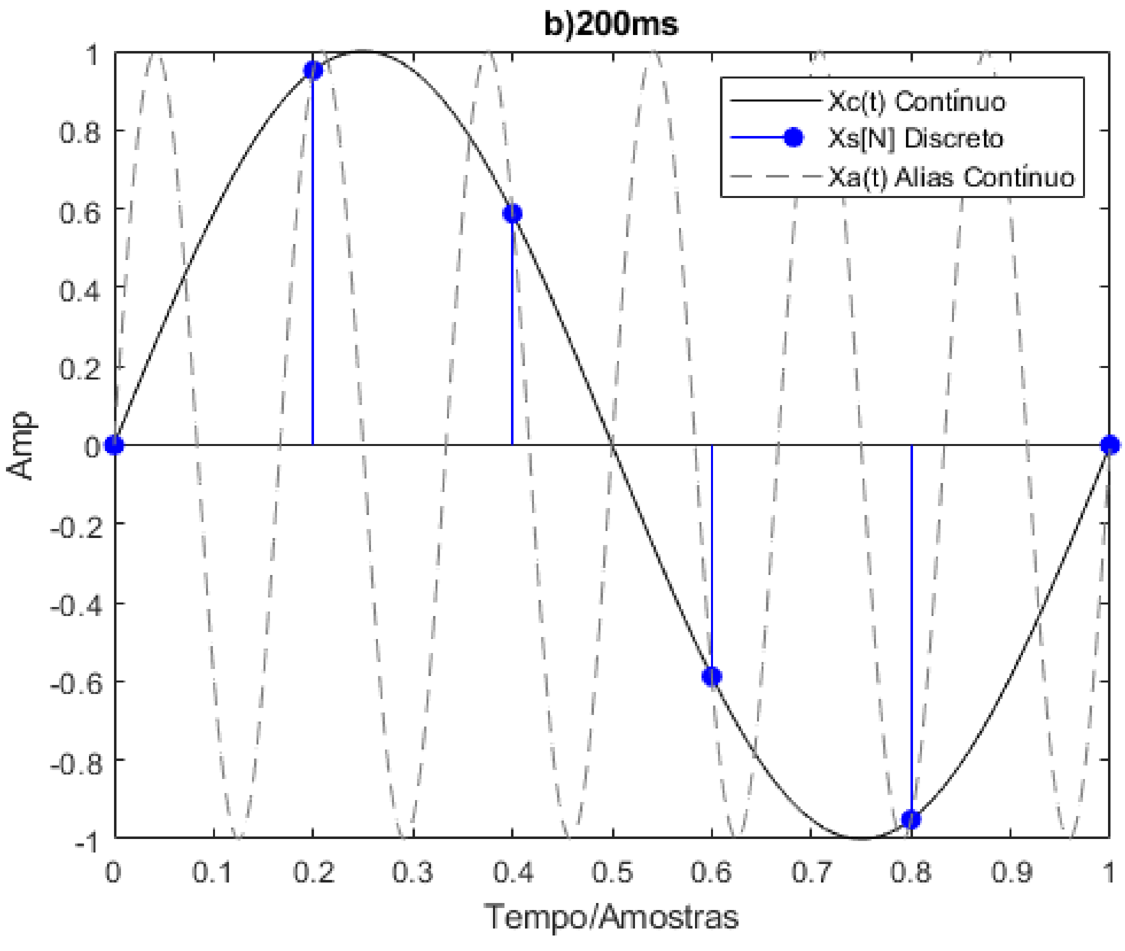
Com isso conseguimos gerar os gráficos abaixo.

Figura 1: Gráficos dos sinais discretos



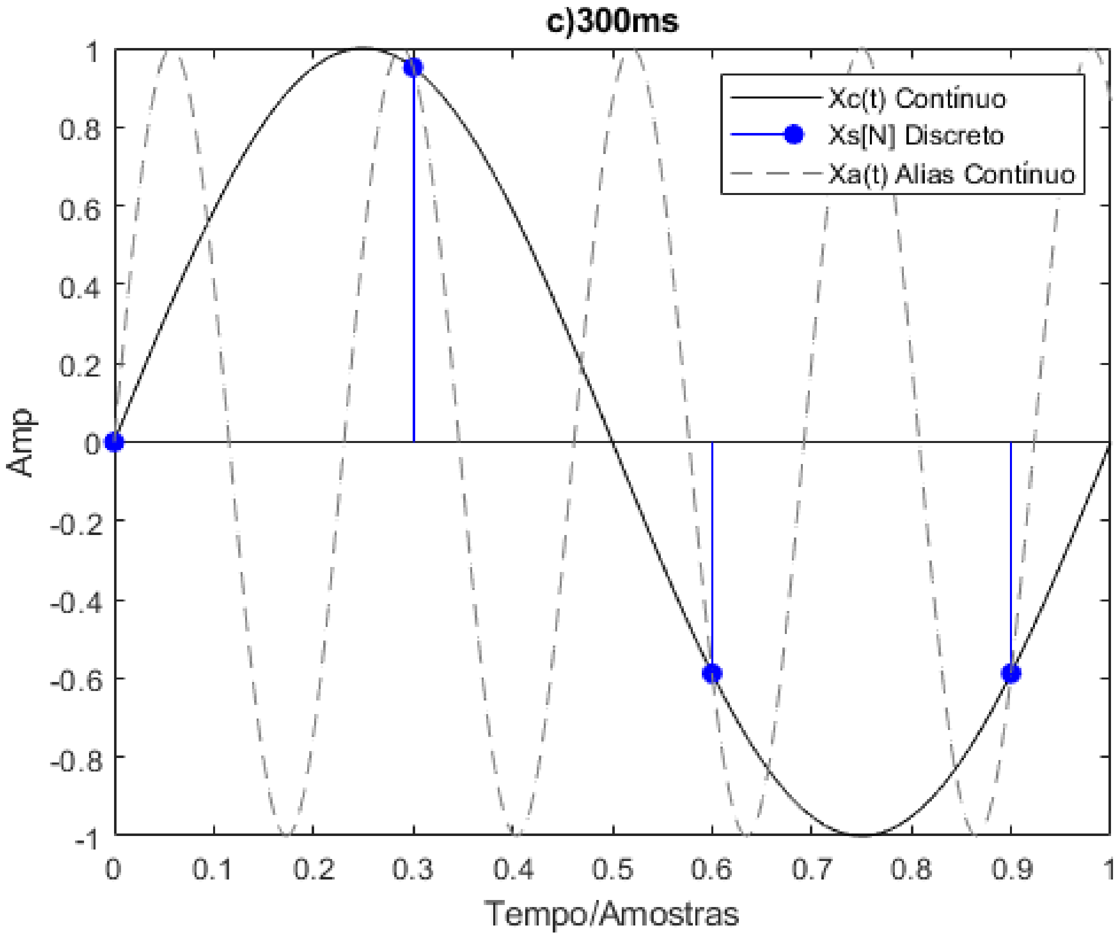
Fonte: Autoria própria.

Figura 2: Gráfico para 100ms



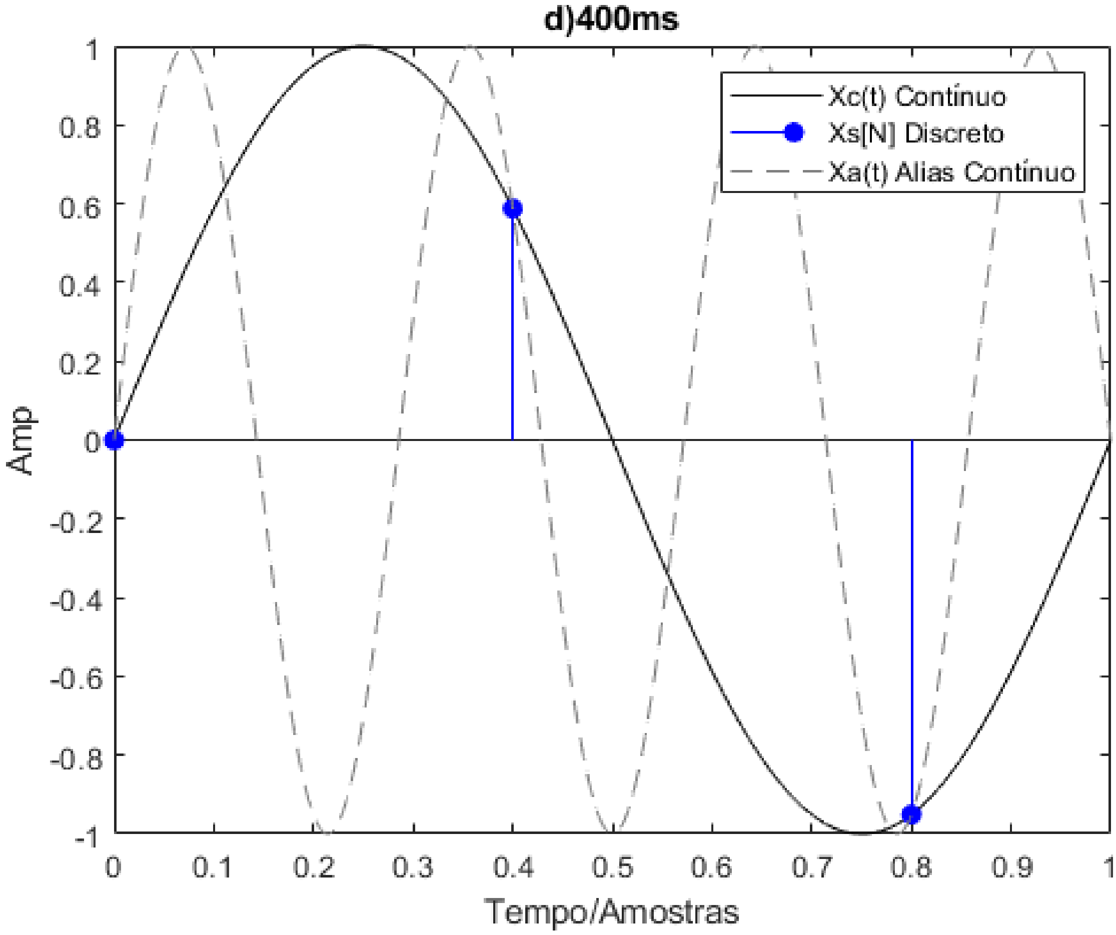
Fonte: Autoria própria.

Figura 3: Gráfico para 200ms



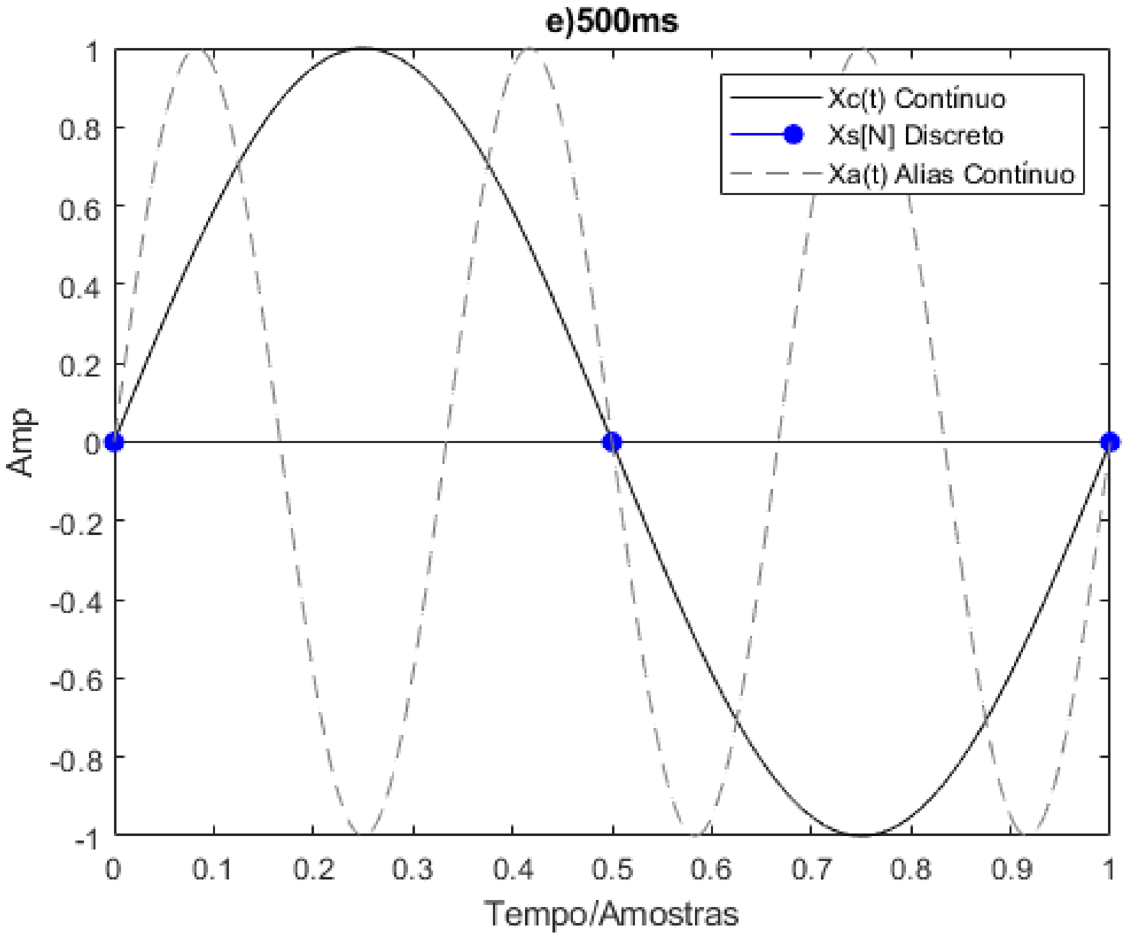
Fonte: Autoria própria.

Figura 4: Gráfico para 300ms



Fonte: Autoria própria.

Figura 5: Gráfico para 400ms



Fonte: Autoria própria.

4.3 Parte 2

A função xc(t) representa uma onda senoidal contínua com amplitude de 127*3V, frequência angular de 260 rad/s e período T = 1/f = 1/60s, podemos então concliur que a frequencia do sinal é 60Hz.

A fim de discretizar o sinal, encontrando o sinal amostrado através das equaçoes

$$\omega = 2\pi \cdot f \tag{7}$$

$$\Omega_s = 2\pi \cdot f \cdot T_s = 2\pi \cdot \frac{f}{f_s} \tag{8}$$

Aplicando essas equações com os valores mencionados no roteiro temos:

$$\Omega_1 = \frac{\omega_c}{f_{s1}} = \frac{120\pi}{20} = 6\pi \text{ rad/amostra} \tag{9}$$
$$\Omega_2 = \frac{\omega_c}{f_{s2}} = \frac{120\pi}{200} = 0.6\pi \text{ rad/amostra} \tag{10}$$
$$\Omega_3 = \frac{\omega_c}{f_{s3}} = \frac{120\pi}{50} = 2.4\pi \text{ rad/amostra} \tag{11}$$
$$\Omega_4 = \frac{\omega_c}{f_{s4}} = \frac{120\pi}{500} = 0.24\pi \text{ rad/amostra} \tag{12}$$
$$\Omega_5 = \frac{\omega_c}{f_{s5}} = \frac{120\pi}{100} = 1.2\pi \text{ rad/amostra} \tag{13}$$
$$\Omega_6 = \frac{\omega_c}{f_{s6}} = \frac{120\pi}{1000} = 0.12\pi \text{ rad/amostra} \tag{14}$$

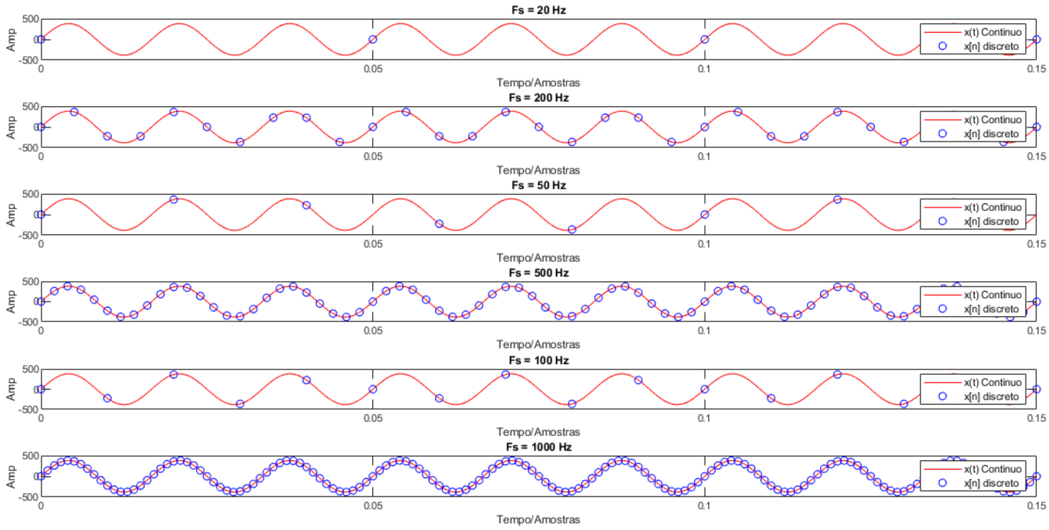
Com esses dados das equações 4 até 9 conseguimos encontrar os sinais discretos, visto que temos a mesma amplitude.

$$x_{s1}[n] = 127\sqrt{3} \cdot \sin(6\pi n) \tag{15}$$
$$x_{s2}[n] = 127\sqrt{3} \cdot \sin(0.6\pi n) \tag{16}$$
$$x_{s3}[n] = 127\sqrt{3} \cdot \sin(2.4\pi n) \tag{17}$$
$$x_{s4}[n] = 127\sqrt{3} \cdot \sin(0.24\pi n) \tag{18}$$
$$x_{s5}[n] = 127\sqrt{3} \cdot \sin(1.2\pi n) \tag{19}$$
$$x_{s6}[n] = 127\sqrt{3} \cdot \sin(0.12\pi n) \tag{20}$$

A fim de determinar para quais frequências de amostragem ocorrerá o efeito de aliasing, utilizou-se o Teorema da Amostragem mencionado na equação 16 onde f_a é a frequência de aliasing, f_s é a frequência de amostragem e f_m é a frequência máxima do sinal analógico, conseguindo assim os resultados subsequentes.

$$\Omega_s \geq 2\Omega_{sinal} \tag{21}$$

Figura 6: Gráficos dos sinais discretos



Fonte: Autoria própria.

$$f_{s1} > 2f_c \Rightarrow 20 > 120 \tag{22}$$
$$f_{s2} > 2f_c \Rightarrow 200 > 120 \tag{23}$$
$$f_{s3} > 2f_c \Rightarrow 50 > 120 \tag{24}$$
$$f_{s4} > 2f_c \Rightarrow 500 > 120 \tag{25}$$
$$f_{s5} > 2f_c \Rightarrow 100 > 120 \tag{26}$$
$$f_{s6} > 2f_c \Rightarrow 1000 > 120 \tag{27}$$
$$\tag{28}$$

Com esses resultados apresentados à cima podemos concluir que nas frequencias f$_{s1}$, f_{s3}, f_{s5} ocorrerá al
A baixo temos os gráficos desses sinais.

4.4 Parte 3

Para verificar se há aliasing, precisamos comparar as frequências das duas senoidais com a frequência de amostragem. Se a frequência de amostragem não for alta o suficiente para capturar todas as frequências presentes nas senoidais, ocorrerá aliasing.

No caso abordado temos duas senoidais, sendo elas:

$$x_1(t) = \sin\left(2\pi\frac{1}{8}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \tag{29}$$

$$x_2(t) = \sin\left(2\pi\frac{-7}{8}t\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{4}t\right) \tag{30}$$

A frequência de amostragem é de 1 Hz, o que significa que estamos amostrando a cada 1 segundo. Podemos calcular a frequência angular de amostragem como:

$$\Omega_s = 2\pi f = 2\pi(1) = 2\pi \tag{31}$$

Podemos agora calcular as frequências angulares das senoidais x1(t) e x2(t) como:

$$\Omega_1 = 2\pi\frac{\frac{1}{8}}{1} = 2\pi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} \tag{32}$$

$$\Omega_2 = 2\pi\frac{\frac{-7}{8}}{1} = 2\pi\frac{1}{8} = \frac{-7\pi}{4} \tag{33}$$

Aplicando a equação abaixo com os valores já conforme o enunciado e considerando Ω_2 como aliasing temos

$$\Omega_2 = \Omega_1 + k \cdot 1 \Rightarrow k = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{1} = \Omega_2 - \Omega_1 = -\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = -1 \tag{34}$$

Sabendo que k resultou em -1 podemos concluir que os sinais são alias para a frequência de 1Hz.

5 Referências

1. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., Nawab, S. H. (2010). *Signals and Systems*. Pearson.
2. Proakis, J. G., Manolakis, D. G. (2006). *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Pearson.
3. Haykin, S. (2014). *Sinais e Sistemas*. Bookman.
4. Lathi, B. P. (2005). *Sinais e Sistemas Lineares*. Bookman.
5. Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill.
6. Kuo, F. F., Golnaraghi, F. (2010). *Processamento de Sinais e Análise de Fourier*. LTC.