Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes por pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Entonces existe un único polinomio P de grado $\leq n - 1$ tal que $P(x_j) = y_j$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$.

Demostración.

Denotemos por $c_0, \ldots, c_{n-1}$ a los coeficientes del polinomio p:

$$P(x) = c0 + c1x + c2x\ 2\ 0 + \ldots + cn - 1x\ n - 1\ .$$

Sustituyendo $x = x_1$, luego $x = x_2$, etc., hasta $x = x_n$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas $c_0, \ldots, c_{n-1}$:

$$c0 + x1c1 + x\ 2\ 1\ c2 + \ldots + x\ n - 1\ 1\ cn - 1 = y1;$$

$$c0 + xnc1 + x\ 2\ n\ c2 + \ldots + x\ n{-}1\ n\ cn{-}1 = yn.$$

La matriz de este sistema es la matriz de Vandermonde asociada a los puntos $x_1, \ldots, x_n$, y el sistema se escribe brevemente en la forma

$$V(x_1, \ldots, x_n)c = y,$$

donde c = ck−1 n k=1 es el vector de los coeficientes incognitos.

El determinante de este sistema es el determinante de Vandermonde y se calcula como el producto de todas las diferencias $x_j - x_i$ con $i < j$:

$$\det V(x1, \ldots, xn) = \prod_{j,k \in \{1,\ldots,n\}} (xk - xj)$$

Fuente:
http://esfm.egormaximenko.com/numerical_methods/polynomial_interpolation_theorem_with_Vandermonde_es.pdf