Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

Wydział Informatyki
i Telekomunikacji

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

WYDZIAŁ INFORMATYKI I TELEKOMUNIKACJI

KIERUNEK: INFORMATYKA

SZEREGI CZASOWE, GIEŁDA I EKONOMIA

EKSPERYMENTY ZE STAŁĄ FEIGENBAUMA

SPRAWOZDANIE Z LABORATORIUM

Maria Guz

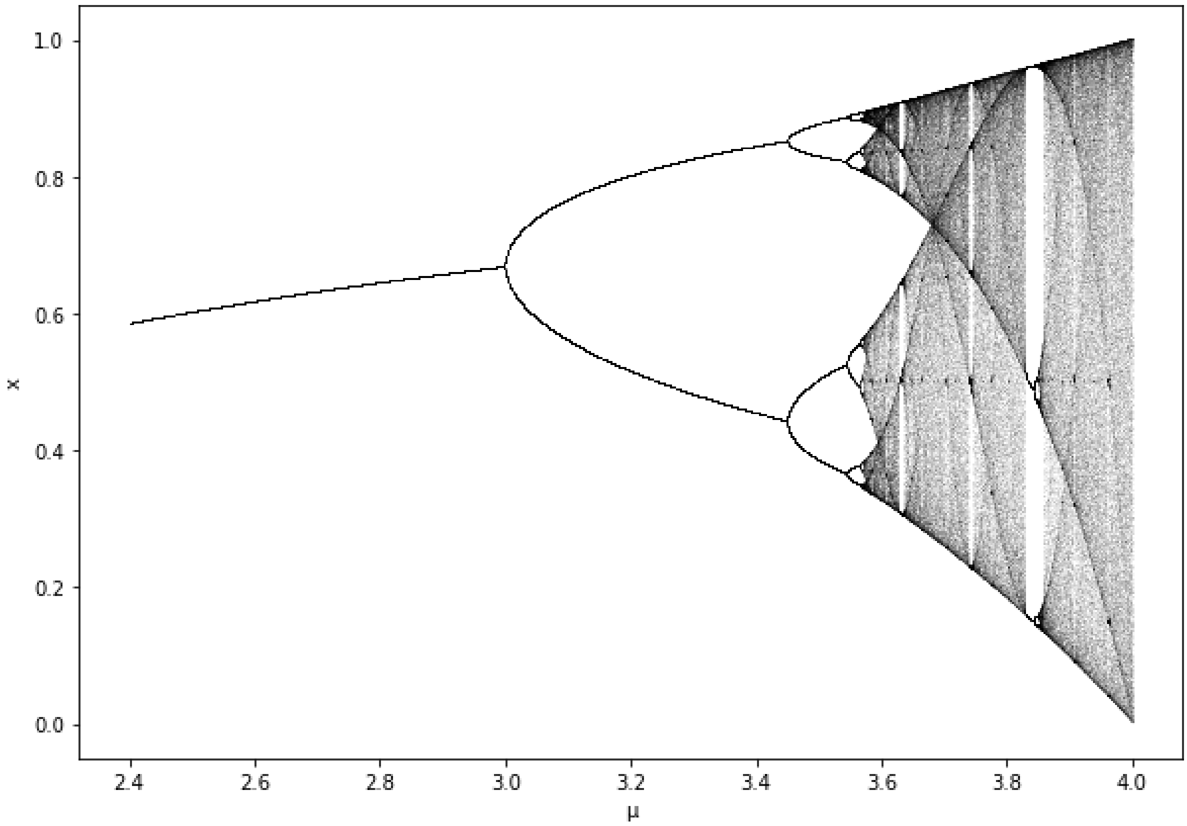
Paweł Midura

Zadania zostały zrealizowane za pomocą języka programowania Python oraz dzięki środowisku Jupyter. Wybór tych narzędzi podyktowany był ich prejrzystością, intuicyjnością i prostotą.

Stała Feigenbauma δ opisuje zbieżność bifurkacji ciągu $x_{n+1} = \mu f(x_n)$. “Dla niektórych wartości x_0 przy ustalonym μ ciąg ten posiada granicę. Okazuje się, że dla wielu funkcji f liczba takich skończonych granic rośnie skokowo wraz ze wzrostem μ (występują tzw. bifurkacje). Oznaczmy przez μ_n rosnący ciąg wartości μ, dla których zwiększyła się liczba granic ciągu x_n. Okazuje się, że istnieje wtedy granica ciągu.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}}$$

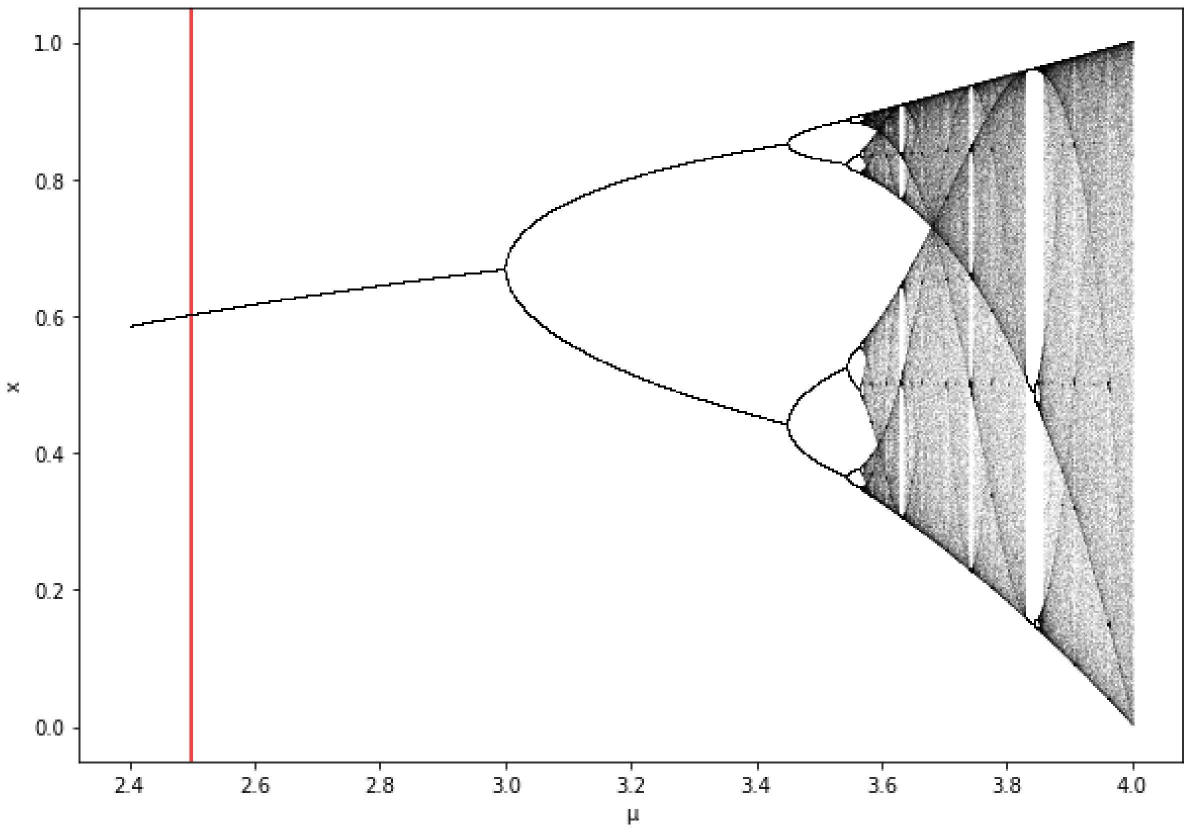
Na wykresie przedstawiono atraktory dla różnych wartości parametru. Istnieje nigdziegęsty podzbiór parametrów μ, dla których atraktor odwzorowania staje się chaotyczny. Podzbiór ten poprzecinany jest przedziałami parametru μ (np. μ ϵ (3.8284;3.8495)), dla których wraz ze wzrostem wartości dochodzi do kolejnych bifurkacji podwojeń okresu, aż do granicy w której znajduje się atraktor chaotyczny. Jest to tzw. przejście do chaosu poprzez kaskadę bifurkacji podwojeń okresu.”[1]



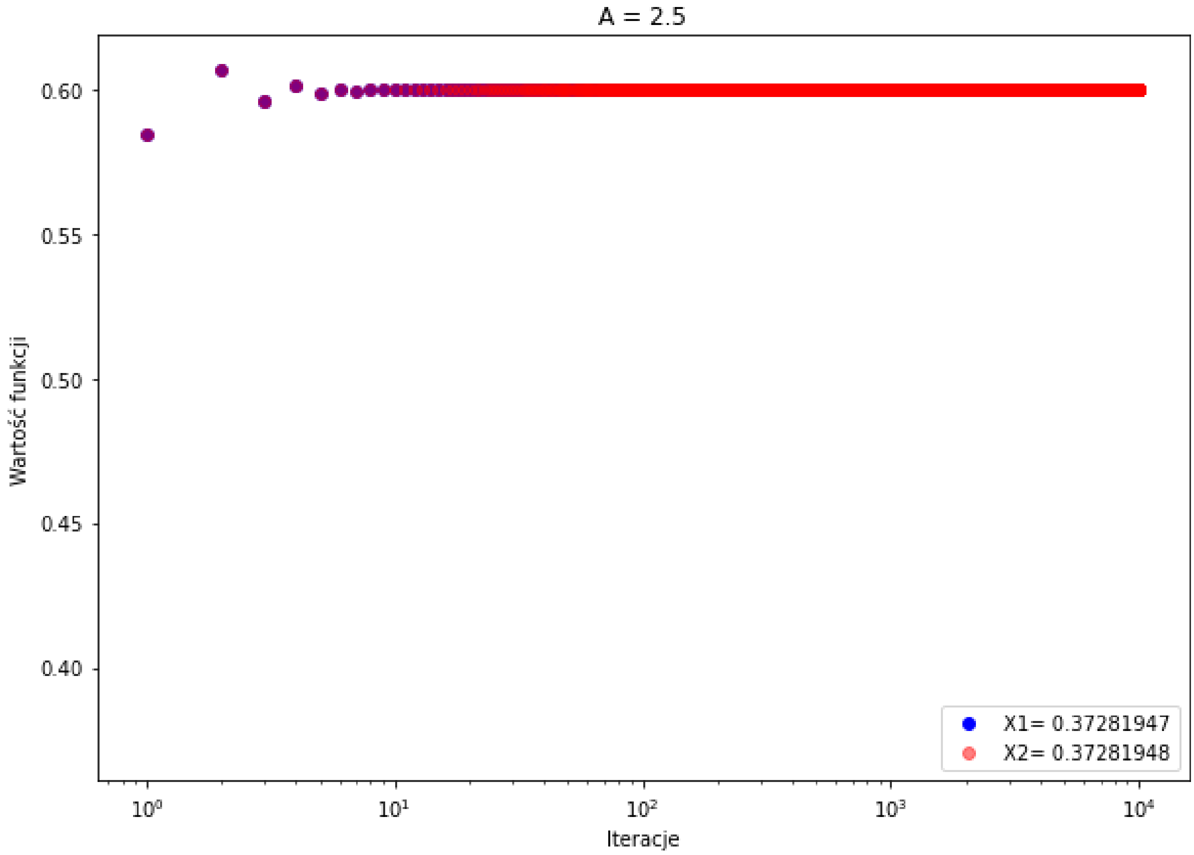
[1] https://pl.wikipedia.org/wiki/Sta%C5%82a_Feigenbauma

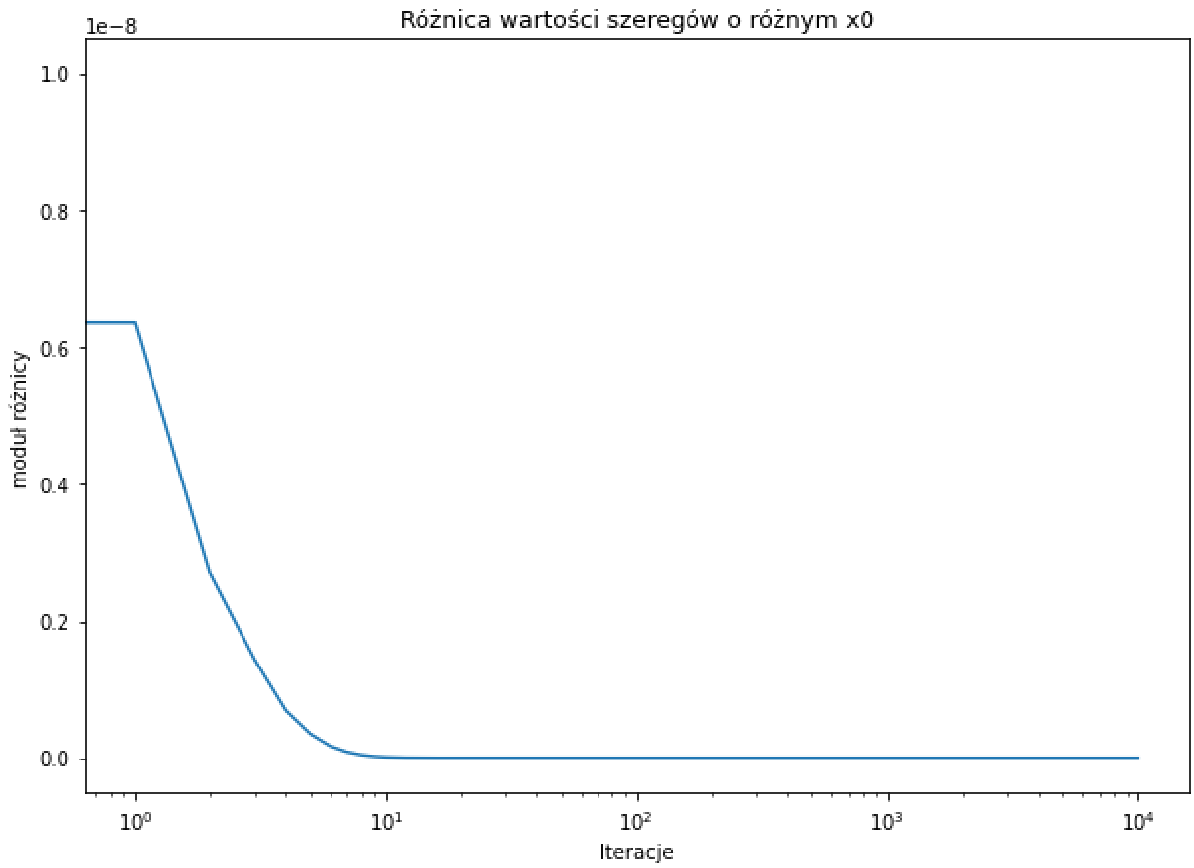
Poprzez zmianę parametru μ można było zaobserwować jak wartości ciągu $x_{n+1} = \mu f(x_n)$ dla różnych wartości początkowych X (X1 = 0.37281947, X2 = 0.37281948) zbiegają do konkretnych liczb lub nie. W zależności od tego jaki parametr μ został przyjęty, wartości mogły zbiegać do jednej, dwóch, czterech lub więcej wartości, jednak oczywiście sprawdzono także przypadki, kiedy wartości badanego ciągu nie zbiegają do żadnej wartości - znajdują się w reżimie chaosu.

μ = 2.5

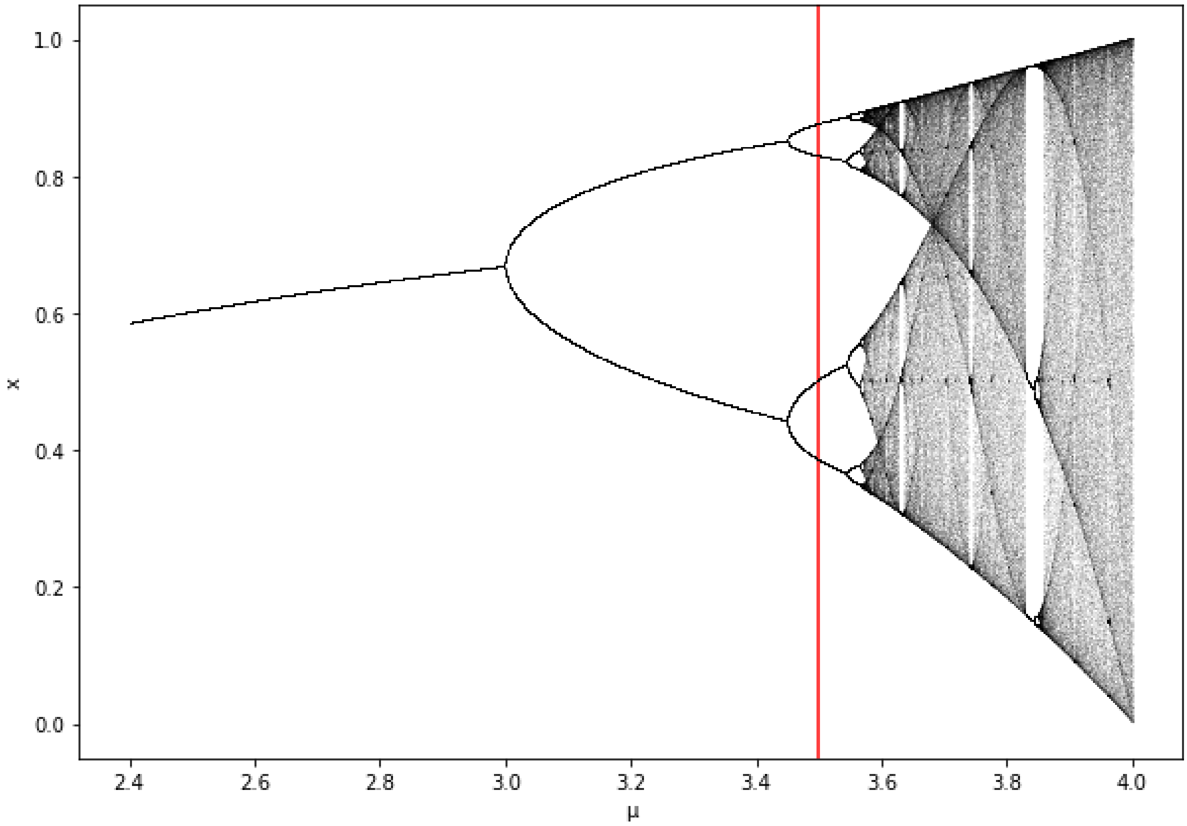


W tym przypadku wartości ciągu powinny zbiegać do wartości ok. 0.6, co można zauważyć na niżej przedstawionych wykresach. Wartości X rzeczywiście zbiegają do takiej wartości dla obu ciągów (z różnym x_0), a moduł różnicy spada do 0 mniej więcej koło 10 iteracji.

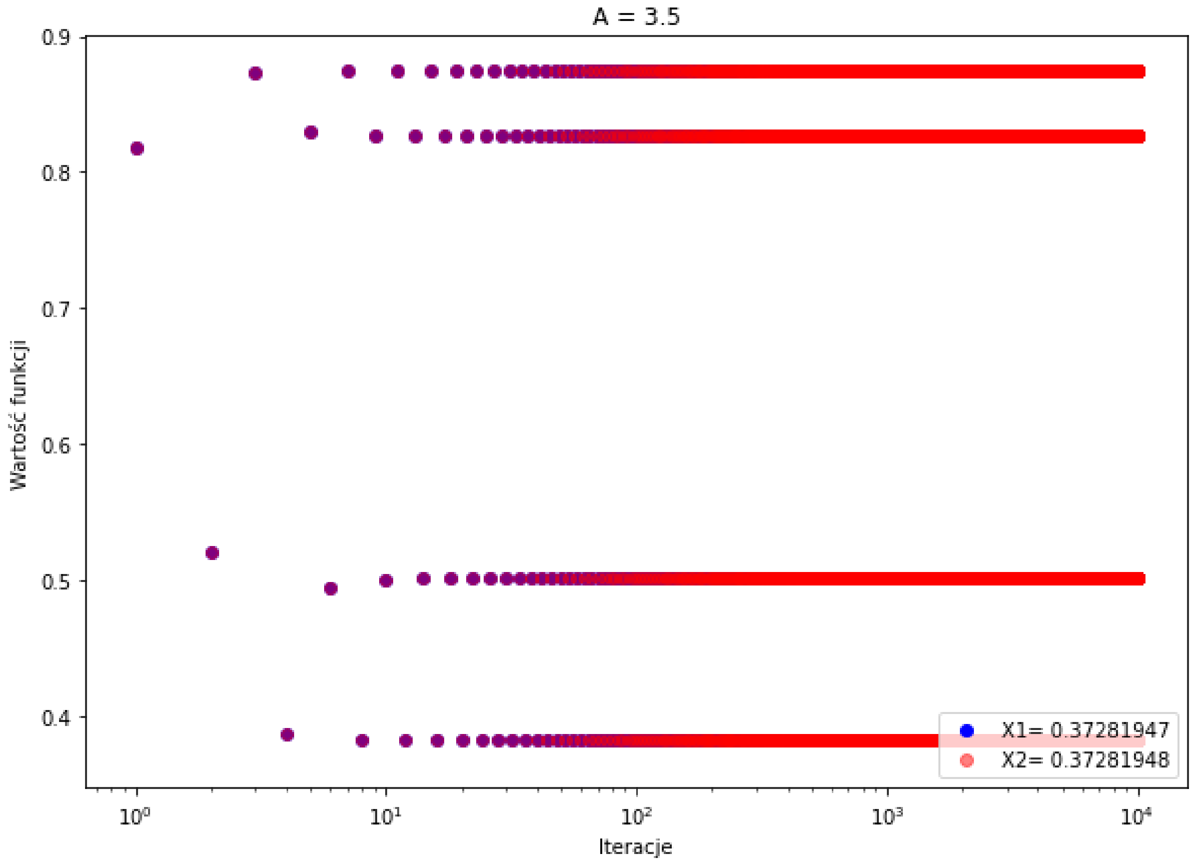

A = 2.5
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
Wartość funkcji
X1= 0.37281947
X2= 0.37281948
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Iteracje

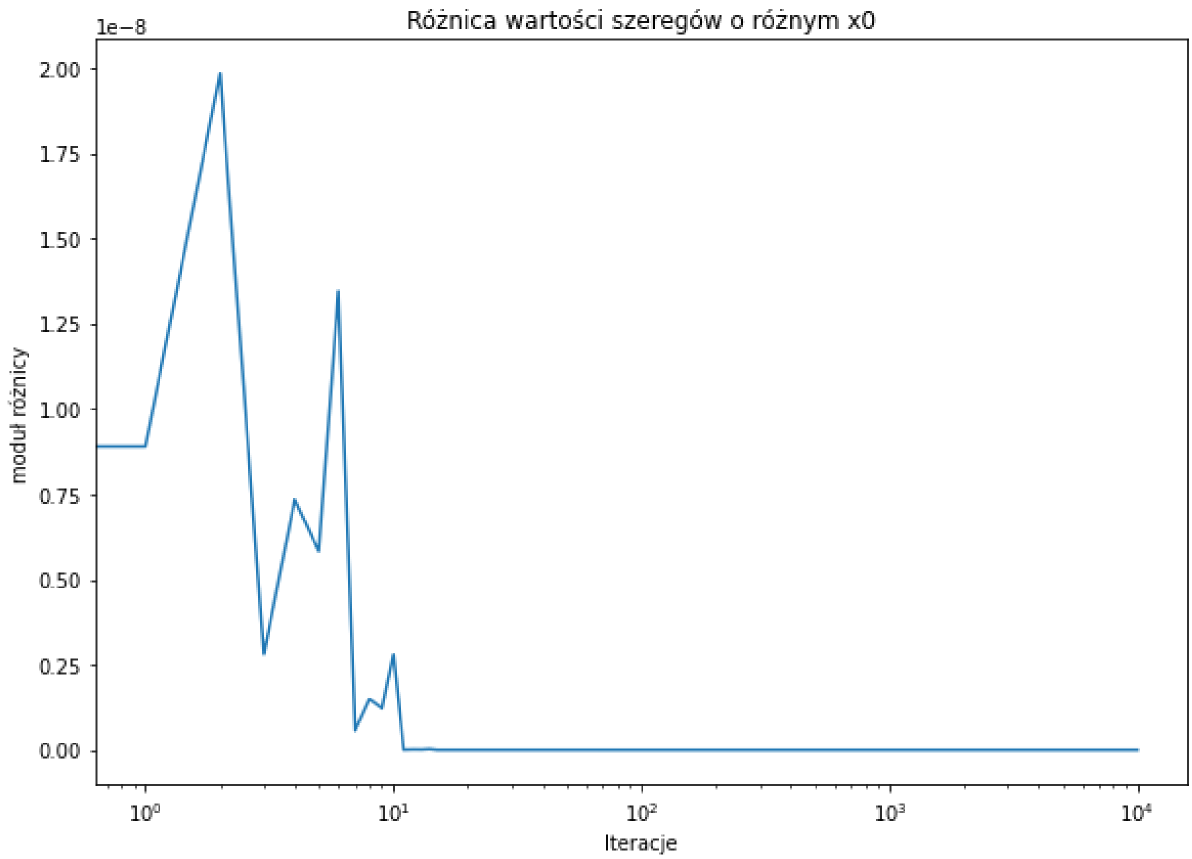

Różnica wartości szeregów o różnym x0
1e−8
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
moduł różnicy
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Iteracje

μ = 3.5

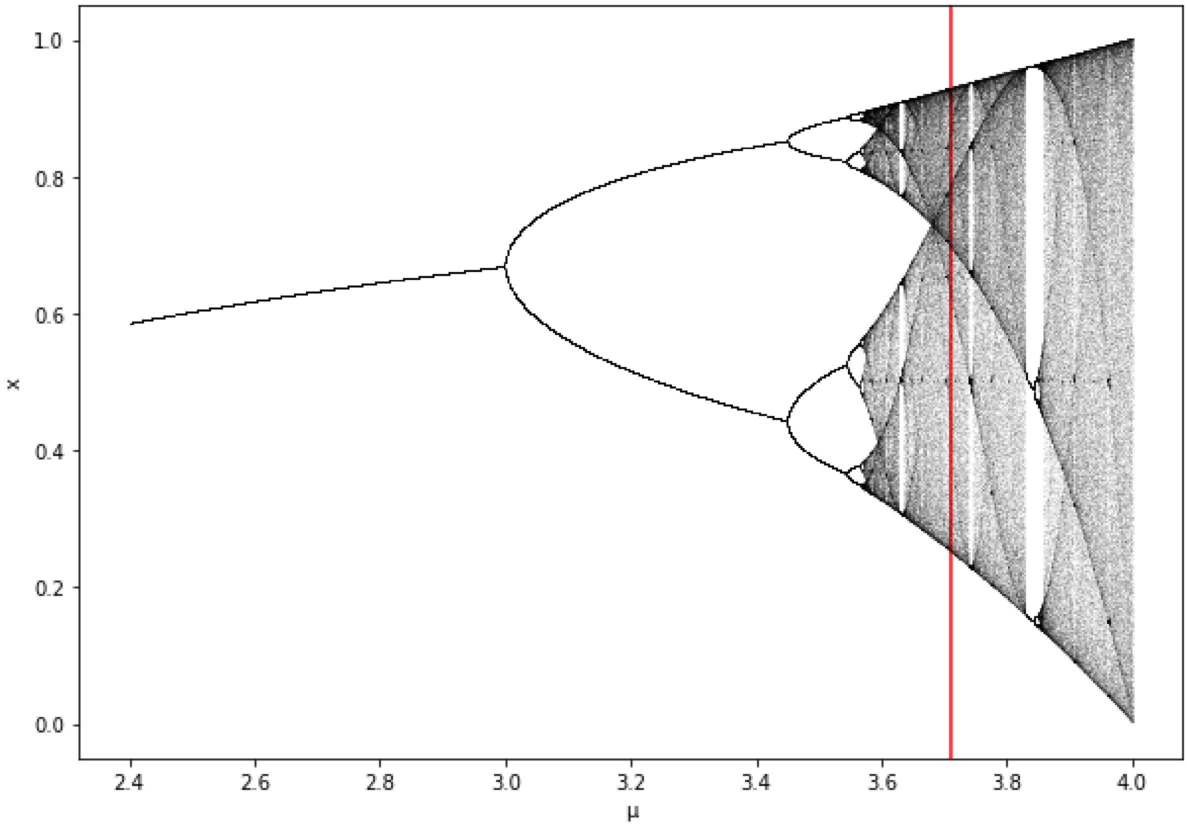


W tym przypadku wartości ciągu powinny zbiegać do czterech wartości, co można zauważyć na niżej przedstawionych wykresach. Wartości X rzeczywiście zachowują się tak jak przewidywano dla obu ciągów (z różnym x_0), a moduł różnicy spada do 0 mniej więcej koło 10 iteracji.

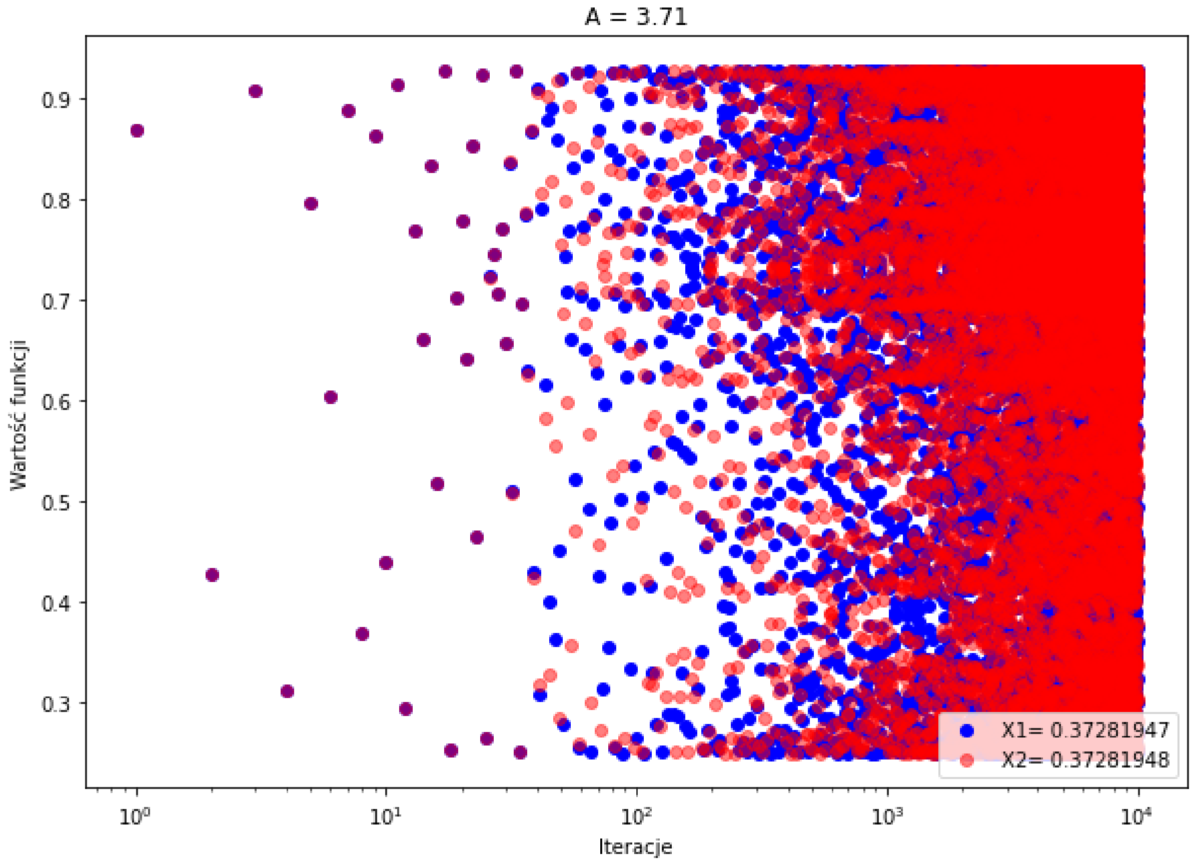

A = 3.5
Wartość funkcji
Iteracje
X1= 0.37281947
X2= 0.37281948

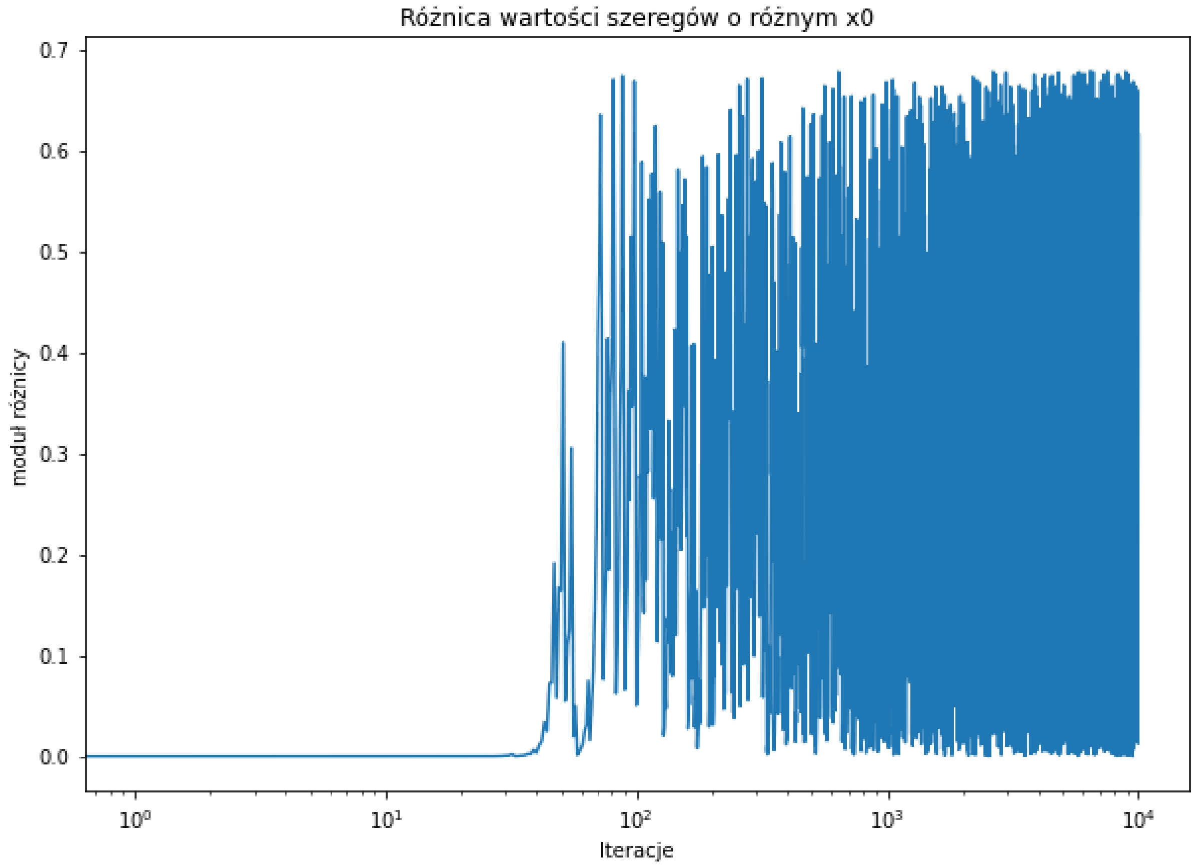

Różnica wartości szeregów o różnym x0
1e−8
moduł różnicy
Iteracje

μ = 3.71

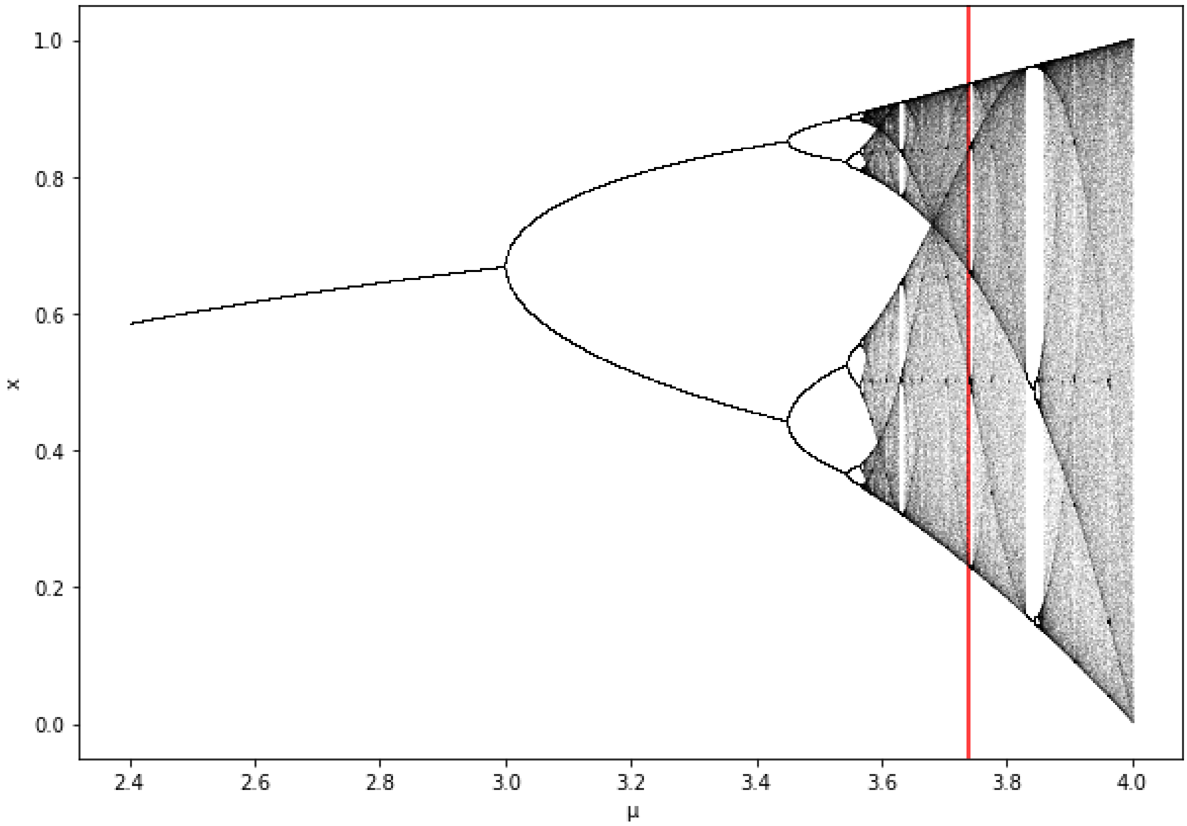


W tym przypadku trudno przewidzieć jakie będą wartości ciągu, ponieważ wartość μ = 3.71 oznacza, że wyliczone wartości znajdują się w reżimie chaosu. Zjawisko to zostało zobrazowane na wykresach poniżej. Na pierwszym z nich można zauważyć, że kolejne elementy ciągów rzeczywiście przyjmują wartości niemożliwe do przewidzenia i nie zbiegają do żadnej konkretnej liczby. Ponadto można zauważyć, że tym razem wartości ciągu pierwszego różnią się od wartości ciągu drugiego i tutaj również trudno znaleźć jakąkolwiek regułę. Zostało to odwzorowane na wykresie przedstawiającym moduł różnic między ciągami z różnymi początkowymi wartościami = X1 = 0.37281947 i X2 = 0.37281948. Widać, że tym razem różnica nie spada do 0, a rośnie wraz z liczbą iteracji i przyjmuje wysokie wartości. Początkowo oba ciągi się pokrywają, jednak w okolicy 40 iteracji zaczynają się różnić.

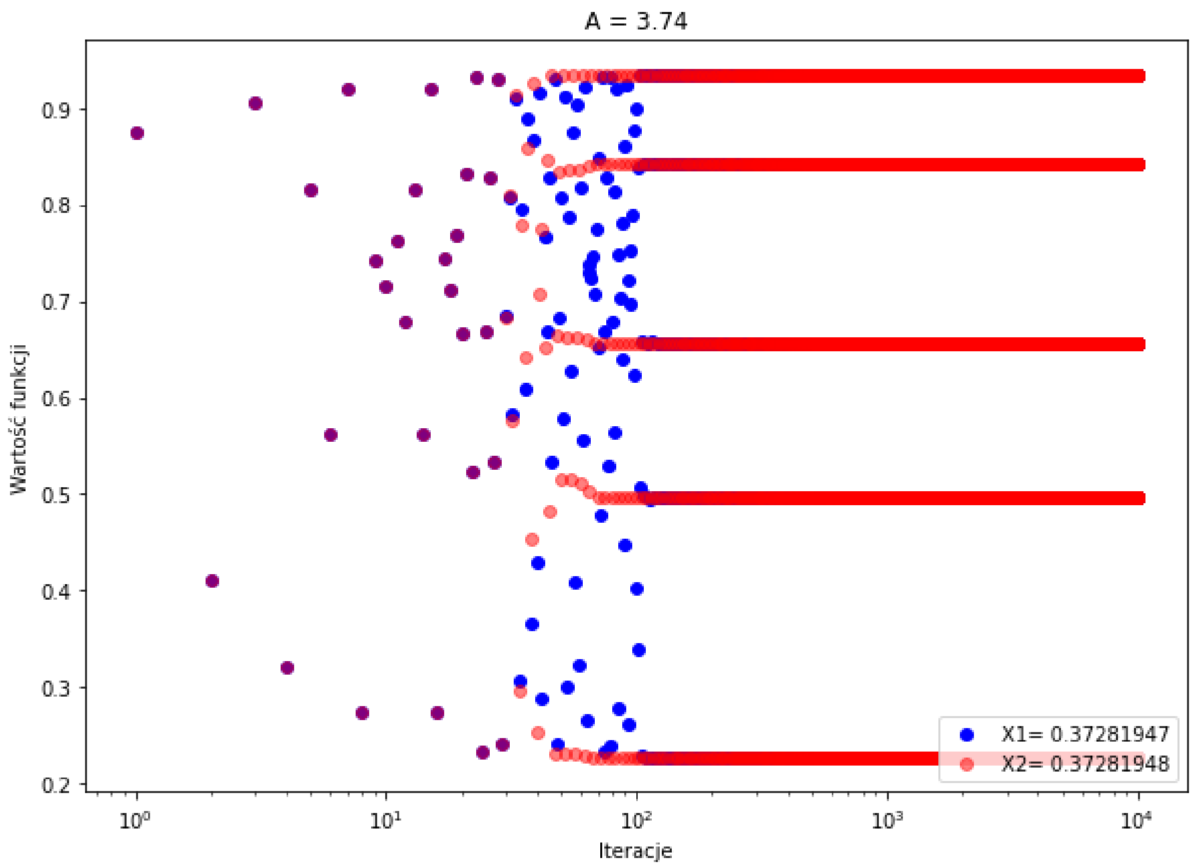

A = 3.71
Wartość funkcji
Iteracje
X1= 0.37281947
X2= 0.37281948

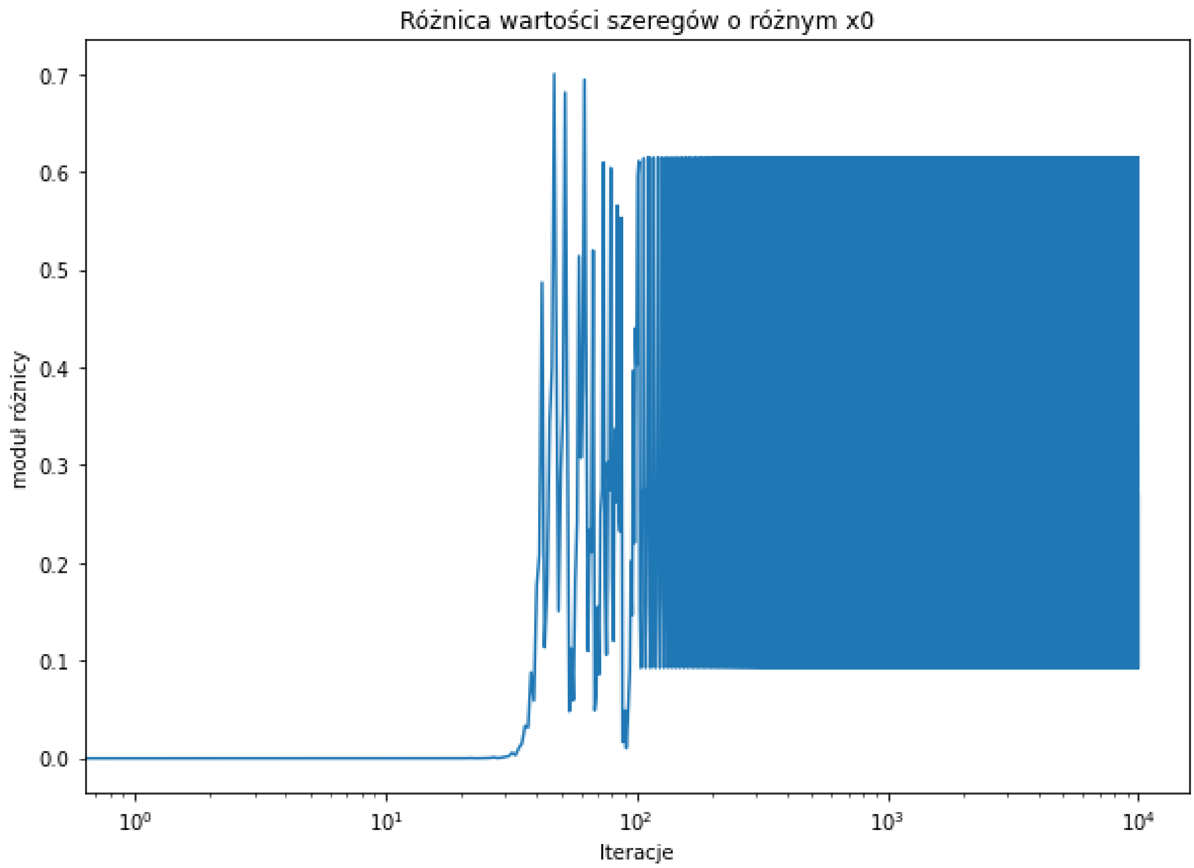

Różnica wartości szeregów o różnym x0
moduł różnicy
Iteracje

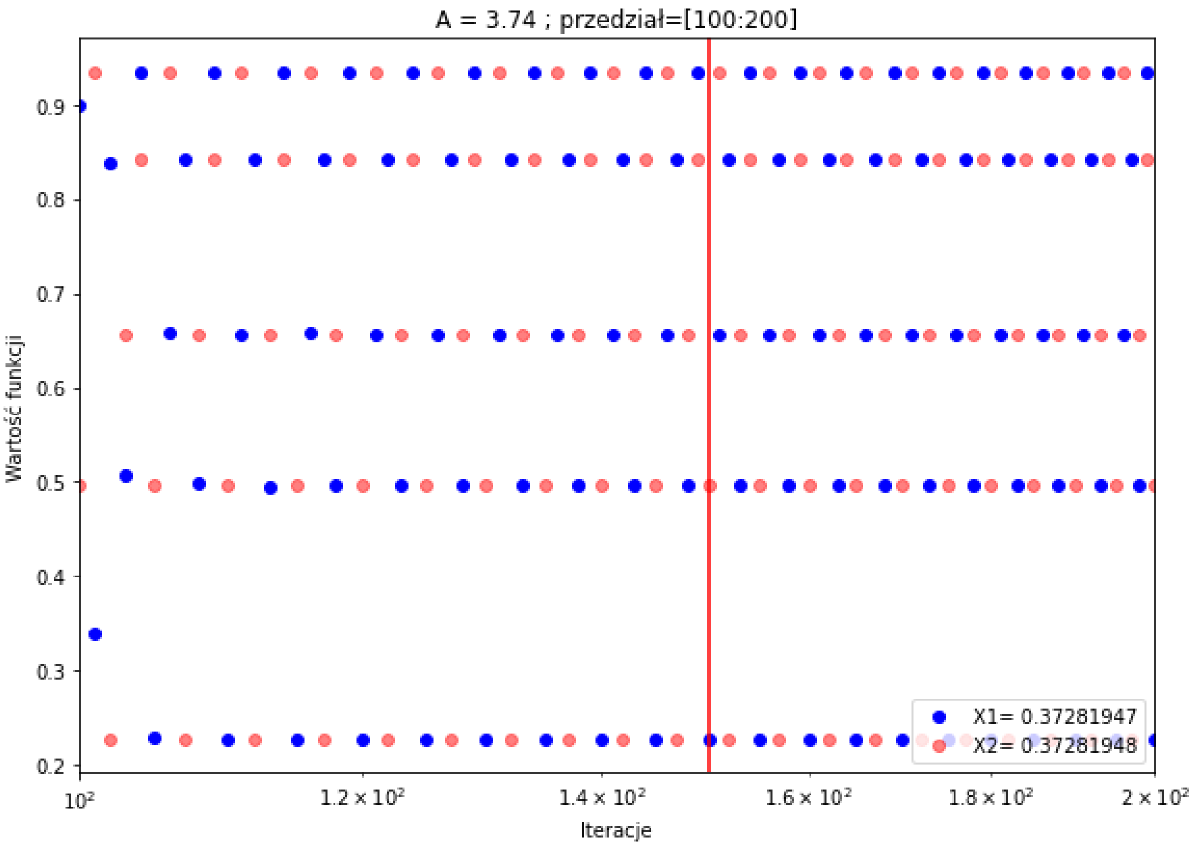
$\mu = 3.74$



Wartość $\mu = 3.74$ jest wartością padającą między dwoma reżimami chaotycznymi - wartości badanego ciągu powinny zbiegać do 5 liczb. Zostało to potwierdzone na poniższym wykresie jednak można także zauważyć, że moduł różnicy, mimo tego, że wartości zbiegają do tych samych wartości, nie spada do 0. Przyczyną tego jest fakt, że elementy ciągów chociaż przyjmują te same wartości, to nie przyjmują ich na tych samych indeksach (ostatni wykres) - to powoduje duże wartości modułu różnicy tych dwóch ciągów.


A = 3.74
Wartość funkcji
Iteracje
X1= 0.37281947
X2= 0.37281948


Różnica wartości szeregów o różnym x0
moduł różnicy
Iteracje


A = 3.74 ; przedział=[100:200]
Wartość funkcji
Iteracje
X1= 0.37281947
X2= 0.37281948
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
10^2
1.2×10^2
1.4×10^2
1.6×10^2
1.8×10^2
2×10^2