POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Flusso in mezzi porosi
Problema di Saturazione in un network di fratture

Relatore: Prof. Luca FORMAGGIA

Correlatore : Prof. Anna SCOTTI

Tesi di Laurea di:

Maria IEMOLI Matr. 800499

Anno Accademico 2013-2014

... Da me, da solo, solo con l'anima,
con la piccozza d'acciar ceruleo,
su lento, su anelo,
su sempre; sprezzandoti, o gelo!
E salgo ancora, da me facendomi
da me la scala, tacito, assiduo;
nel gelo che spezzo,
scavandomi il fine ed il mezzo.
Giovanni Pascoli

*A te nonna **Anita**,*
il tuo sorriso è il mio ricordo più caro.

*Alla mia **famiglia**,*
per l'immensa bellezza della sua semplicità.

Ringraziamenti

Stefania

*A te **Rosetta**,*
che lo spaccio sia con te.

Non posso che cominciare ringraziando Wikipedia e Google. Senza di loro oggi non sarei qui. Un grande ringraziamento va all'amico Tonno Rio Mare e al formaggino del Guido, che per anni hanno accompagnato i miei pasti. Fondamentale in questi anni è stata la presenza della vicina zozza, che mostrando la sua nudità spudoratamente ha alleviato le nostre pene.

Maria

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Sommario

I giacimenti petroliferi convenzionali sono delle riserve di petrolio in cui, grazie alle caratteristiche geologiche delle formazioni che contengono il greggio e alle proprietà fisiche dello stesso, il petrolio può fluire in maniera spontanea verso i pozzi di estrazione. Questo processo di estrazione, che sfrutta principalmente la pressione presente nel giacimento, permette di recuperare in media soltanto il 30-35% dell'olio presente in un giacimento. Esistono dei processi di estrazione avanzati che permettono di recuperare un'ulteriore 20% del petrolio presente nel deposito.
Si può suddividere suddividere il processo di estrazione in tre fasi principali: una prima fase di *recupero primario*, che sfrutta unicamente l'energia del giacimento; una fase detta *recupero secondario*, a volte affiancata alla prima fase, che fornisce ulteriore energia al deposito tramite l'immissione di un fluido (gas o acqua); un ultimo momento detto *recupero terziario*, in cui vengono impiegate tecniche specifiche per il tipo di giacimento.
Il presente lavoro si propone di studiare i processo di recupero secondario. In questo caso sono presenti due fluidi, acqua e olio, in un mezzo poroso. Questo fenomeno, detto flusso bifase, è governato dall'equazione di **Buckley-Leverett**, in cui l'incognita è la saturazione dell'acqua. Ovviamente la soluzione del problema si presta per innumerevoli altre applicazioni di flussi bifase non solo al processo di recupero secondario del petrolio. In particolare si è interessati a risolvere il problema in un network di fratture in un mezzo poroso, Tale equazione rientra nella categoria delle leggi di conservazione. Per la soluzione numerica del problema è stato utilizzato il *metodo di Godunov*, un metodo ai volumi finiti, implementato in un codice *C++*.
Una volta risolto il problema sulla singola frattura, è stato implementato il problema per fratture che presentano discontinuità nelle proprietà mezzo, ossia una discontinuità nella funzione flusso. Lo scopo principale di questa tesi è quello di ricavare le condizioni da imporre nel caso di intersezioni tra fratture, in particolare di tre fratture che si intersecano. Le condizioni d'interfaccia sono state ricavate prendendo spunto dai risultati presenti in

letteratura sullo studio della dinamica del traffico.

Parole chiave: flusso bifase, Buckley-Leverett, leggi di conservazione, metodo di Godunov, dinamica del traffico.

Abstract

Keywords: two phase flow, Buckley-Leverett, conservation laws, Godunov's method, traffic flow.

Introduzione

Lo studio del flusso e di fluidi bifase nel sottosuolo trova applicazioni di enorme importanza in vari campi.
Nel processo di estrazione del petrolio, ad esempio, viene spesso applicata una tecnica detta *secondary recovery* (recupero secondario), in cui viene integrata l'energia del giacimento in fase di esaurimento immettendo un fluido (gas o liquido). La pressione naturale presente nel deposito, infatti, permette al petrolio di raggiungere il pozzo di estrazione in maniera spontanea. Questa prima fase consente di estrarre solo il 30-35% dell'olio presente nel giacimento, mentre nella seconda fase di recupero, con il pompaggio di acqua, è possibile ottenerne un ulteriore 20%. Il processo è governato da una legge di conservazione, l'*equazione di Buckley-Leverett*, che risolve il problema per la saturazione dell'acqua, grandezza che indica la frazione del volume vuoto del mezzo poroso occupata dall'acqua.

Un'altra possibile applicazione è lo studio del flusso di sostanze tossiche e inquinanti nel sottosuolo. In molti paesi la popolazione dipende dall'uso di acque provenienti dal sottosuolo. La presenza di impianti industriali o discariche, la possibilità che si verifichino incidenti che provochino perdite da serbatoi o in generale di sostanze usate nelle industrie, possono causare problemi alla qualità dell'acqua nelle falde acquifere. Queste sostanze sono spesso immiscibili in acqua, e si studia quindi il fenomeno come il flusso di due fasi diverse in un mezzo poroso. Essere in grado di prevedere, almeno in parte, l'andamento delle sostanze inquinanti in prossimità dei pozzi permette di prendere misure atte a ridurre, per quanto possibile, la contaminazione dell'acqua.

Il presente lavoro di tesi si inserisce nel contesto generico dello studio del flusso in mezzi porosi. In particolare si propone di studiare il problema di un flusso bifase, problema di saturazione, in un network di fratture. L'obiettivo principale del lavoro è quello di ricavare le condizioni da imporre nel caso di tre fratture che si intersecano in un unico punto formando una biforcazione. Le fratture considerate hanno uno spessore molto piccolo rispetto alla loro lunghezza e alle dimensioni caratteristiche del dominio del mezzo, così da poterle modellizzare come dei segmenti del tipo $I_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$.

Di seguito è riportata una breve descrizione del contenuto di ciascun capitolo della tesi:

- Il *primo capitolo* presenta una breve storia degli approcci esistenti al problema, con una particolare attenzione ai risultati già esistenti in letteratura sullo studio del flusso automobilistico su strade con incroci.

- Il *secondo capitolo* introduce brevemente le principali proprietà delle leggi di conservazione, delle loro soluzioni e dei metodi numerici per la soluzione, illustrando in particolare il metodo di Godunov, metodo ai volumi finiti implementato per risolvere il problema di saturazione.

- Il *terzo capitolo* presenta la descrizione dei mezzi porosi, delle loro proprietà e dell'equazione di *Buckley-Leverett*. Illustrato il problema di saturazione per una singola frattura e la sua soluzione, viene introdotto il caso particolare in cui vi sia una discontinuità nelle proprietà del mezzo. A fine capitolo sono presentati i risultati della soluzione del flusso bifase in una frattura con due diverse funzioni flusso.

- Il *quarto capitolo* descrive la situazione della biforcazione, ossia tre fratture che si intersecano in un punto, e la derivazione delle condizioni da imporre nel punto di intersezione. In particolare viene fatto un confronto con il caso dello studio del flusso del traffico.

- Il *quinto capitolo* riporta le considerazioni finali sul lavoro svolto e illustra i possibili sviluppi futuri.

Capitolo 1

Stato dell'arte

Capitolo 2

Inquadramento matematico

Questo capitolo presenta una breve introduzione alle leggi di conservazione e ai principali risultati matematici ad esse collegati.
Viene prima data una descrizione delle equazioni differenziali iperboliche e dei tipi di soluzione che ne possono derivare.
Successivamente vengono introdotti i principali schemi numerici per la soluzione di questi problemi.

2.1 Leggi di conservazione

Consideriamo il seguente sistema iperbolico di leggi di conservazione

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t)) = 0 & in\ \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & in\ \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è un vettore m-dimensionale di quantità che si conservano, come ad esempio la massa, il momento e l'energia in problemi di fluidodinamica; $f(u(x,t)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è una funzione di u detta *funzione flusso* per il sistema di leggi di conservazione. Su ogni intervallo del tipo (α, β) di $\mathbb{R}$ la funzione flusso soddisfa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} u(x,t)\, dx = f(u(\alpha,t)) - f(u(\beta,t)) \tag{2.2}$$

in questo senso 2.1 esprime una legge di conservazione.
Assumiamo che il sistema 2.1 sia **strettamente iperbolico**, questo significa

che la matrice Jacobiana $m \times m$ $f'(u)$ della funzione flusso è tale per cui per ogni valore di u, i corrispondenti autovalori di $f'(u)$ sono reali e distinti, e la matrice è diagonalizzabile.
Spesso le funzioni flusso sono funzioni non lineari di u, e quindi si ha a che fare con sistemi non lineari di equazioni differenziali. Generalmente non è possibile ricavare analiticamente le soluzioni di queste equazioni, per cui si rende necessario studiare opportuni metodi numerici per ricavare una soluzione approssimata. Nella soluzione di questi sistemi si incontrano delle difficoltà legate alla natura stessa delle soluzioni (come ad esempio la formazione di shock), per questo è opportuno utilizzare metodi numerici in grado di risolvere queste difficoltà. Metodi basati sulle differenze finite possono funzionare bene per soluzioni regolari, ma possono avere comportamenti inaspettati in presenza di discontinuità.

Sistemi di equazioni del tipo 2.1 presentano applicazioni di grande interesse. Infatti, varie leggi fondamentali della fisica matematica si scrivono in forma di conservazione. Un esempio di sistema di leggi di conservazione è l'equazione di Eulero, un sistema che descrive la dinamica di un fluido con viscosità trascurabile. Tali equazioni rappresentano la conservazione della massa, dell'energia e della quantità di moto.
Un altro esempio importante è lo studio di flussi multifase in mezzi porosi. In questo caso un'applicazione è la fase di recupero secondario del petrolio dai giacimenti, in cui viene pompata dell'acqua del pozzo al fine di forzare ulteriormente la fuoriuscita del petrolio. Un semplice modello in questo caso è l'equazione di Buckley-Leverett, una legge di conservazione scalare per una singola variabile u che rappresenta la saturazione dell'acqua nella roccia.

2.2 Soluzione Analitica

Vediamo come risolvere analiticamente una legge di conservazione scalare e i problemi che derivano nel caso in cui la funzione flusso sia non lineare nell'incognita u.
Consideriamo il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{2.3}$$

L'idea alla base della soluzione del problema è quella di connettere il punto (x,t) con un punto $(x_0,0)$ portante il dato iniziale, mediante una curva lungo la quale *uo* sia costante, detta *curva caratteristica*, da cui si ottiene:

$$u(x(t),t) = g(x_0). \tag{2.4}$$

Con opportuni passaggi algebrici si ricava la seguente equazione per le curve caratteristiche:

$$x(t) = q'(g(\xi))t + \xi$$

cioè le caratteristiche sono delle rette con pendenza $q'(g(\xi))$.
È possibile ricavare ora una formula generale per u:

$$u(x,t) = g(x - q'(g(\xi))t). \tag{2.5}$$

che rappresenta un'onda progressiva che si muove con velocità q'(g(x0)) nella direzione positiva dell'asse delle x.
Osserviamo che la 2.5 presenta una validità limitata: anche se il dato iniziale è regolare, la soluzione può dare origine a singolarità che rendono inefficace il metodo delle caratteristiche. Un esempio tipico è quando due caratteristiche uscenti da due punti diversi si incontrano. Vi sono quindi delle condizioni sulle funzioni $g(x)$ e $q(u)$ da soddisfare affinchè tale equazione ammetta una forma esplicita per la soluzione.
Osserviamo che la 2.5 definisce la u in maniera implicita:

$$G(x,t,u) \equiv u - g(x - q'(u)t) = 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite, u è definita come funzione di (x,t) se:

$$G_u(x,t,u) = 1 + tq''(u)g'(x - q'(u)t) = 1 + tq''(g(\xi))g'(\xi) \neq 0$$

e questo è verificato se $q''(g(\xi))g'(\xi) \geq 0$. In questo caso infatti le caratteristiche hanno pendenza crescente con ξ e non si possono intersecare.
Se questa condizione non è verificata invece, esistono un istante t_s e un punto x_s da cui parte una linea d'urto.
Si possono quindi verificare due casi:

- le caratteristiche si intersecano: la soluzione presenta una discontinuità a seguito di una discontinuità nel dato iniziale. Tale situazione non è ammissibile per una soluzione classica dell'equazione differenziale a derivate parziali, ed è causa della perdita di unicità nel punto di intersezione delle caratteristiche. A partire da questo punto si sviluppa un'*onda d'urto* o di *shock*, cioè una curva lungo cui si propaga la discontinuità.

- si formano *onde di rarefazione*: la discontinuità nel dato iniziale fa si che le caratteristiche che non riempiano tutto il piano (x, t). In questi punti si genera un fascio di caratteristiche, con piede nel punto di discontinuità, dette appunto *onde di rarefazione*, lungo le quali la soluzione è costante e data da $u(x, t) = q'^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$.

2.3 Soluzione Numerica

Capitolo 3

Two Phase Flow

Capitolo 4

Discontinuità nel materale

Capitolo 5

Biforcazione

Capitolo 6

Conclusioni

Bibliografia

[1] Peter Bastian. Numerical Computation of Multiphase Flows in Porous Media. *http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/people/peter/pdf/Bastian_habilitationthesis.pdf*, 1999.

Lista degli acronimi

3G	Third Generation
ADT	Android Developer Tools
API	Application Programming Interface
APK	Android Package
CSS	Cascading Style Sheets
EMF	Eclipse Modeling Framework
EMP	Eclipse Modeling Project
GMF	Graphical Modeling Framework
GPS	Global Positioning System
GUI	Graphical User Interface
HTML	HyperText Markup Language
HTTP	Hypertext Transfer Protocol
HW	Hardware
IDE	Integrated Development Environment
JSON	JavaScript Object Notation
MVC	Model View Controller
MWE	Modeling Workflow Engine
NFC	Near Field Communication
oAW	openArchitectureWare
RIM	Research in Motion
SDK	Software Development Kit
SLOC	Source Lines of Code
SysML	Systems Modeling Language
UML	Unified Modeling Language
URI	Uniform Resource Identifier
URL	Uniform Resource Locator
WebML	Web Modeling Language
WP7	Windows Phone 7
XMI	XML Metadata Interchange
XML	eXtensible Markup Language