

Lorenzi võrrand

Kodune töö mitte-lineaarses dünaamikas

Maria Kesa, YAFMM093519

Sisukord

SISSEJUHATUS	3
LORENZI VÕRRANDITE FÜÜSIKALINE SISU	5
Rayleigh-Benard konvektsioon	5
PÜSIPUNKTIDE ANALÜÜS	7
LINEAARNE ANALÜÜS	8
Püsipunkt $x = y = z = 0$	8
Püsipunkt $x = y = \beta(\rho - 1)$ and $z = \rho - 1$	9
Püsipunkt $x = y = -\beta(\rho - 1)$ and $z = \rho - 1$	10
NUMBRILINE LAHENDAMINE, LAHENDI TUNDLIKKUS ALGTINGIMUSE SUHTES NING TUNDLIKKUS SÜSTEEMI PARAMEETRI VARIATSIiooni SUHTES	11
Madalad temperatuuri erinevused ($\rho = 0.1$)	13
Kriitilise temperatuuri ümbrus ($\rho = 1$)	15
Orkaanid Lorenzi võrrandi süsteemis	17
Keskmine temperatuur ($\rho = 10$)	18
Konvektsiooni teke ($\rho = 28$)	20
Kõrged temperatuurid ($\rho = 100$)	22
Tundlikkus algtingimuse suhtes	24
Tundlikkus süsteemi parameetri variatsiooni suhtes	27
LISA A	28

SISSEJUHATUS

Lorenzi võrrandid on mitte-lineaarsete võrrandite süsteem, mis lihtsustatult kirjeldavad konvektsiooni nähtust. Lorenz oli ilmateadlane ja matemaatik Massachusettsi Tehnoloogia Instituudist, kes rakendas 1960ndatel arvutit, et uurida numbriliselt lihtsustatud ilma mudelit. Tema eesmärgiks oli luua tehisk ilm. Selle jaoks ta lõi lihtsustatud võrrandi süsteemi, mis iseloomustas konvektsiooni nähtust atmosfääris. Mitte-lineaarsete süsteemide dünaamika teoorias on see süsteem klassikaliseks näiteks mitte-lineaarsete süsteemide tundlikkusest algtingimuste suhtes. Tuues selle tundlikkuse teadlaste tähelepanu alla purustas Lorenzi töö tolleaegsete ilmateadlaste unistuse täpse ilma ennustamise võimalikkusest. Nende võrrandite lahendamisel faasi-ruumi ilmuv liblika kujuline fraktaalne atraktor on muutunud mitte-lineaarse dünaamika üheks ikooniks.

Matemaatika ilu peitub tema üldisuses. Üks ja seesama võrrandi süsteem võib kirjeldada paljusid erinevaid nähtusi. Lorenzi võrrandid on seotud Rayleigh-Benard konvektsiooniga ning dissipatiivsete struktuuridega, mida uuris Ilya Prigogine (Nobeli preemia keemias, 1977). Prigogine tegeles mitte-tasakaaluliste protsesside termodünaamikaga, s.t. ta uuris termodünaamilisi süsteeme, milles toimub ringlus, aine ja energia vahetus, süsteeme mis ei ole paigal. Sellistes süsteemides tekivad ise-organiseeruvad dissipatiivsed struktuurid. Dissipatiivsetes struktuurid on ruumis an-isotroopsed (ebasümmeetrilised, erinevatel ruumisuundadel on erinev tähtsus) ning sellistes struktuurides esineb osakeste vahel kaugele ulatuvad korrelatsioonid, st. ruumiliselt eraldatud (üksteisest kaugel olevad) osakesed mõjutavad üksteist. Nendel struktuuridel on fundamentaalne ühendus elusas looduses esinevate struktuuridega, sest elusolendid tarbivad välisest ümbrusest energiat ning ehitavad selle energia abil ülesse keerukaid struktuure, mis on termodünaamiliselt eba-stabiilsed. Elusorganismides toimivad metaboolsed tsüklid, kus toimub aine ja energia ringlus. Antud töös ei ole otseselt kajastatud Lorenzi võrrandi ühendust selliste biokeemiliste struktuuridega ega interpreteeritud simulatsiooni tulemusi selles võtmes, kuid tulevikus oleks seda äärmiselt huvitav teha.

Käesoleva essee eesmärgiks on uurida Lorenzi võrrandeid kasutades numbrilisi meetodeid. Mis on lineaarsete ja mitte-lineaarsete süsteemide olemuslik erinevus? Lineaarsed süsteemid on süsteemid, kus ei toimu süsteemi osade vahel olulist koostoimet. Seetõttu on lineaarsed süsteemid võimalik lahutada koostisosadeks, uurida igat koostisosa eraldi ning siis neid uuesti kokku-pannes mõista süsteemi. See võimaldab uurimustööd lihtsustada, s.t. taandada keeruline probleem reale lihtsatele probleemidele. Mitte-lineaarsetes süsteemides esineb osade vahel koostoime, s.t. süsteemi ei ole võimalik mõista mõistes igat osa eraldi.

Mittelineaarsete süsteemide jaoks ei ole analüütilisi lahendeid. Ajalooliselt on hästi läbi-uuritud lineaarsed diferentsiaalvõrrandid ja nende süsteemid ning nende lahendamiseks on välja töötatud efektiivne ja laiaulatuslik matemaatiline aparatuur. See matemaatiline aparatuur annab aga vähe tulemusi mitte-lineaarsete probleemide korral ja annab vaid esimese lähenduse (püsipunktide ümbruse uurimine).

Antud kodune töö jaguneb järgmisteks osadeks. Esmalt seletatakse ära Lorenzi võrrandite füüsikaline sisu. Siis leitakse võrrandite püsipunktid, määratakse nende liik ning uuritakse nende ümbrust kasutades lineaarset teooriat. Järgnevalt rakendatakse numbrilisi meetodeid, et simuleerida Lorenzi võrrand ja joonistada välja selle trajektoori faasiruumis erinevate algtingimuste ja füüsikaliste parameetrite korral. Siis kasutatakse statistilist meetodit, et uurida Lorenzi võrrandite tundlikkust algtingimuste suhtes ning süsteemi parameetri variatsiooni suhtes.

LORENZI VÖRRANDITE FÜÜSIKALINE SISU

Rayleigh-Benard konvektsioon

Lorenzi võrrandid on iseloomustavad lihtsustatult Rayleigh-Benard konvektsiooni, seega algab nende võrrandite analüüs just selle nähtuse kirjeldamisest. Rayleigh-Benard konvektsioon on dissipatiivne nähtus termodünaamiliselt avatud süsteemis, s.t. süsteemis mis on aine/energia vahetuses oma keskkonnaga. Süsteem koosneb kahest plaadist, mille vahel on õhuke vedeliku kiht. Alumine plaat soojendatakse ühtlaselt ning ülemine plaat on jahe, seega süsteem saab energiat alumiselt plaadilt ning kaotab seda läbi ülemise plaadi. Kui tõlgendada seda nähtust ilmteaduse kontekstis, siis alumine plaat on justkui maapind, mis päikesekiirguselt soojust neelab ning soojendab alumisi atmosfääri kihte. Ülemised atmosfääri kihid kaotavad soojust kosmosesse.

Mis on olulised füüsikalised suurused antud süsteemis? Vedelikule on iseloomulikud:

- **viskoossus**, mis iseloomustab hõõrdejõudusid vedelikus,
- **tihedus**, mis iseloomustab osakeste arvu mingis vedeliku ruumalas,
- **soojusjuhtivus**, mis kirjeldab kui kiiresti vedelik jõuab soojusliku tasakaalu oma ümbrusega ehk tema kalduvust temperatuuri gradiendid ühtlustada.

Plaatidele on omased temperatuurid ning süsteemi käitumist määrab suuresti nende plaatide vaheline temperatuuri erinevus. Süsteemile mõjub ka gravitatsiooni jõud.

Olgu meil selline süsteem soojusliku tasakaalu juures, s.t. alumise ja ülemise plaadi vahel ei ole temperatuuri erinevusi. Suurendame samm sammult ülemise ja alumise temperatuuri erinevust. Mis hakkab toimuma süsteemiga füüsikaliselt?

Alumine plaat hakkab soojendama alumisi vedeliku kihte. Need kihid hakkavad selle tagajärjel paisuma ning nende tihedus langeb, nad muutuvad kergemaks. Seetõttu hakkab nendele mõjuma üleslükke jõud (*buoyancy force*). Ülemistel ja tihedatel vedeliku kihtidel tekib aga tendents langeda. Samas on vedelikul tendents soojust juhtida ning seega "kaotada" või ühtlustada temperatuuri gradient, mis tekitab paisumist ja seega tiheduse erinevust. Sellele lisaks veel vedeliku liikumist pidurdab viskoossusest tulenev hõõrdejõud. Kõik need süsteemi omadused on omavahel mitte-lineaarses vastastik-toimes.

Erinevate temperatuuride juures on nende jõudude vahekord erinev ning sellest tulenevalt süsteemi dünaamiline käitumine erinev. Väikeste temperatuuride erinevuste korral toimub soojusvahetus süsteemis ainult läbi konduktsiooni s.t. soojus difuseerub süsteemis, kuid vedeliku kihid ei liigu üksteise suhtes. Vedeliku kihtide liikumisele töötab vastu viskoossus. Süsteemile on omane kriitiline temperatuuri erinevus, mille korral algab süsteemis konvektiivne liikumine s.t. süsteemi hakkavad domineerima tiheduste erinevusest tulenevad jõud. Alumised vedeliku kihid, millel on tendents tõusta ning ülemised vedeliku kihid, mis tahavad langeda ei saa aga üksteist läbida ning seetõttu tekib süsteemis ringlus. Süsteemis tekivad rüljad ringlevad struktuurid, mida kutsutakse Benardi rakukesteks (*Benard cells*).

Lorenzi võrrandid iseloomustavad väga lihtsustatud kujul selliseid süsteeme. Need iseloomustavad süsteemile omaste kolme muutuja x , y , z muutumist ajas. x on süsteemi konvektiivne intensiivsus (*convective intensity*) ehk ringluse intensiivsus, mis põhimõtteliselt iseloomustab ringleva voolu kiirust. $x > 0$ ja $x < 0$ korral toimub ringlus erinevates suundades. y iseloomustab temperatuuri erinevusi langevate ja tõusvate voolude vahel. z iseloomustab süsteemi kaugust konvektiivsest tasakaalust (olekust, kus soojusvahetus toimub ainult läbi soojusjuhtivuse). Lorenzi võrranditel on järgmine kuju:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

σ on Prandtl arv, see iseloomustab vahetõrka vedeliku soojusjuhtivuse ja viskoossuse vahel. ρ on Rayleigh arv, see iseloomustab põhimõtteliselt temperatuuride erinevust kahe plaadi vahel. Rayleigh arv kontrollib faasiüleminekut süsteemis, s.t. millal süsteemis hakab toimuma konvektsioon, ringlus. β iseloomustab süsteemi geomeetriat.

PÜSIPUNKTIDE ANALÜÜS

Loomulik mitte-lineaarsete süsteemide uurimise alustamise punkt on uurida süsteemi püsipunkte. Süsteem on oma püsipunktis paigal s.t. tema kiirus on null. Püsipunktid võivad olla stabiilsed või mitte-stabiilsed. Stabiilsete ja mitte-stabiilsete püsipunktide olemuslikult erinevad. Kui süsteemile anda väike lüke ehk perturbatsioon püsipunktis, siis stabiilse püsipunkti korral langeb süsteem tagasi püsipunkti. Mitte-stabiilsetes püsipunktides on süsteem „tundlik“, s.t. väike perturbatsioon ehk häire võib süsteemi trajektoori tugevalt muuta. Mitte-stabiilsetes püsipunktides avaldub süsteemi mitte-lineaarne olemus. Väikesed muutused mitte-lineaarses süsteemis võivad viia suurte muutusteni—süsteemis ei ole proportsionaalsus mõjutuse amplituudi ja sellest tuleneva muutuse amplituudi vahel.

Järgnevalt leiame Lorenzi võrrandite püsipunktid, s.t. punktid kus $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Lihtne on leida esimene püsipunkt: $x = y = z = 0$. See püsipunkt iseloomustab süsteemi enne konvektiivse, ringleva voolu tekkimist. Süsteem on tasakaalus.

Teised püsipunktide leiame lahendades võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ x(\rho - z) - y = 0 \\ xy - \beta z = 0 \end{cases}$$

kasutades asendusmeetodit. Saame kaks tasakaalupunkti $x = y = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$ ja $z = \rho - 1$.

Kui $\rho < 1$ siis x ja y on imaginaarsed. x ja y imaginaarsed väärtused ei oma füüsikalist tähendust, seega võime öelda, et antud püsipunktid ei eksisteeri kui $\rho < 1$. Kui $\rho = 1$, siis $x = y = z = 0$. Sellest näeme, et Rayleigh arv on parameeter, mis määrab kas süsteemis toimub konvektiivne liikumine või mitte. $\rho = 1$ on **kriitiline punkt**, kus toimub süsteemi täielik kvalitatiivne muutus ehk **faasi üleminek**.

LINEAARNE ANALÜÜS

Eelnevalt oli mainitud, et lineaarsete süsteemide lahendamiseks on Newtoni ja Leibnizi analüüsi loomise aegadest saati sajandite vältel välja arendatud võimas matemaatiline aparatuur. Seistes vastamisi mitte-lineaarsete süsteemide keerukusega tekib kiusatus kasutada nende süsteemide analüüsiks olemasolevaid lineaarseid meetodeid. Kuidas seda teha? Kui süsteemi trajektoor on piisavalt korrapärane s.t tal ei ole fraktaalset struktuuri, siis võib eeldada, et kui trajektoori punkti nii öelda „sisse-zoomida” ehk seda hästi lähedalt vaadata, siis selle punkti vahetus ümbruses on trajektoorigil lineaarne iseloom. Siis võib süsteemi püsipunkti ümbruses lineariseerida ja lahendada saadud lineaarne diferentsiaal võrrandite süsteem kasutades omaväärtuste meetodit.

Kui seda meetodit rakendada püsipunktide ümbruses, võimaldab see määrata püsipunkti liigi s.t. määrata kas püsipunkt on stabiilne (atraktor), mitte-stabiilne (repeller) või semi-stabiilne (sadul). Püsipunktide liik sõltub omaväärtuste omadustest (kas nad on reaalsed või imaginaarsed, positiivsed või negatiivsed või võrdsed nulliga). Seega me saame teada, kuidas süsteem püsipunkti ümbruses käitub. Kui süsteemil on mitu püsipunkti ja me teame, kuidas süsteem nende ümbruses käitub s.t. lineariseeritud võrrandite süsteemide lahendeid nende punktide ümbruses, siis lähtudes eeldusest, et süsteemi integraaljooned ei tohi omavahel lõikuda (ühisuse nõue) võime me kasutades oma geomeetrilist intuitsiooni ja määrata enamvähem kuidas süsteem peaks käituma püsipunktide vahel. Sisuliselt on see aga pimesi kobamine, mis võimaldab saada ainult väga laia-koelist ettekujutust süsteemi käitumisest. Sellist lahendust kasutades ei ole meil tõsikindlat arusaama sellest, kuidas süsteem püsipunktide vahel käitub.

Järgnevalt on analüüsitud süsteemi püsipunkte kasutades omaväärtuste meetodit.

Püsipunkt $x = y = z = 0$

Püsipunkti $x = y = z = 0$ ümbruses saame kirjutada kasutades süsteemi Jakobiaani:

$$[\delta\dot{x} \ \delta\dot{y} \ \delta\dot{z}] = [-\sigma \ \sigma \ 0 \ \rho \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\beta] [\delta x \ \delta y \ \delta z]$$

Selle püsipunkti ümbruses saame võrranditele anda lineaarse kuju: $\dot{x} = \sigma(y - x)$

$$\dot{y} = \rho x - y$$

$$\dot{z} = -\beta z$$

Lahendame selle võrrandi süsteemi kasutades omaväärtuste meetodit.

$$|-\sigma - \lambda \ \sigma \ 0 \ \rho \ -1 - \lambda \ 0 \ 0 \ 0 \ -\beta - \lambda| = 0$$

Saame kuupvõrrandi λ suhtes (välja arvatud kasutades *Mathematica*-t):

$$-(\lambda + \beta) (\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho)) = 0$$

Omapäärtused on:

$$\lambda_1 = -\beta$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)}}{2} = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{\sigma^2 + 4\sigma(\rho-0.5) + 1}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{\sigma^2 + 4\sigma(\rho-0.5) + 1}}{2}$$

Esimene omapäärtus λ_1 viitab sellele, et püsipunkt on atraktor selle omavektori suunast. Ülejäänud püsipunktide iseloom sõltub ρ ja σ suhtest.

λ_2 ja λ_3 on kompleksed (s.t. püsipunkt on spiraalne atraktor) kui :

$$\sigma^2 + 4\sigma(\rho - 0.5) + 1 < 0$$

λ_2 ja λ_3 on reaalsed (püsipunkt on stabiilne atraktor), kui:

$$\sigma^2 + 4\sigma(\rho - 0.5) + 1 > 0$$

λ_2 ja λ_3 väärtused on samad, kui:

$$\sigma^2 + 4\sigma(\rho - 0.5) + 1 = 0.$$

Püsipunkt $x = y = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$ and $z = \rho - 1$

Püsipunkti $x = y = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$ ja $z = \rho - 1$ ümbruses on süsteemil kuju:

$$[\delta\dot{x} \ \delta\dot{y} \ \delta\dot{z}] = [-\sigma \ \sigma \ 0 \ 1 \ -1 \ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \ \sqrt{\beta(\rho-1)} \ \sqrt{\beta(\rho-1)} \ -\beta] [\delta x \ \delta y \ \delta z]$$

Seega selle püsipunkti ümbruses on süsteemi lineaarsed diferentsiaalvõrrandid:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x - y - z \cdot \sqrt{\beta(\rho - 1)}$$

$$\dot{z} = \sqrt{\beta(\rho - 1)}(x + y) - \beta z$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 & 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Saame järgmise kuupvõrrandi omapäärtuste λ leidmiseks (välja-arvutatud kasutades *Mathematica*-t):

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \beta + \sigma) + \lambda(2\sigma + \beta(\rho + \sigma)) + 2\beta\rho\sigma = 0$$

Antud võrrandi lahenditel on väga pikk kuju, seega me ei hakka seda siin väljatooma. Võrrandit on otstarbekas lahendada konkreetsete süsteemi parameetrite väärtuste korral.

Püsipunkt $x = y = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}$ and $z = \rho - 1$

Püsipunkti $x = y = -\sqrt{\beta\rho - \beta}$ ja $z = \rho - 1$ ümbruses on süsteemil kuju:

$$[\delta\dot{x} \ \delta\dot{y} \ \delta\dot{z}] = [-\sigma \ \sigma \ 0 \ 1 \ -1 \ \sqrt{\beta\rho - \beta} \ -\sqrt{\beta\rho - \beta} \ -\sqrt{\beta\rho - \beta} \ -\beta] [\delta x \ \delta y \ \delta z]$$

Seega selle püsipunkti ümbruses on süsteemi lineaarsed diferentsiaalvõrrandid:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x - y + z \cdot \sqrt{\beta\rho - \beta}$$

$$\dot{z} = -\sqrt{\beta\rho - \beta}(x + y) - \beta z$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 & 1 & -1 - \lambda \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Saame järgmise kuupvõrrandi omaväärtuste λ leidmiseks (välja-arvutatud kasutades *Mathematica-t*):

$$-\lambda^3 - \lambda^2(1 + \beta + \sigma) - \lambda\beta(\rho + \sigma) - 2\beta\sigma(-1 + \rho) = 0$$

Antud võrrandi lahenditel on väga pikk kuju, seega me ei hakka seda siin väljatooma. Võrrandit on otstarbekas lahendada konkreetsete süsteemi parameetrite väärtuste korral.

NUMBRILINE LAHENDAMINE, LAHENDI TUNDLIKKUS ALGTINGIMUSE SUHTES NING TUNDLIKKUS SÜSTEEMI PARAMEETRI VARIATSIOONI SUHTES

Kuna mitte-lineaarsetele süsteemidele ei leidu kaasaegse matemaatika kontekstis analüütilisi lahendeid, siis jääb üle neid numbriliselt lahendada. Numbriliste arvutusmeetodite piiranguks on reaalarvude ümardamisest tekivad vead ning arvutusmeetodile endale omased vead. Kaootilised süsteemid on „tundlikud”, seega nende käitumise objektiivseks iseloomustamiseks on vajalik statistiline lähenemine, kus üksiktrajektoori asemel arvutatakse lähestiku asetsevate algtingimusega trajektoori parv ning uuritakse nende parvede statistilist keskmist ja standardhälbet. Samuti uurime me süsteemi tundlikkust lähestiku asetsevate parameetri σ väärtuste suhtes. Siinkohal ei ole väljatoodud numbrilise meetodi vea analüüsi käesoleva töö mahukuse ja ajapuuduse tõttu.

Numbriliste meetodite kasutamise puuduseks ei ole ainult nende ebatäpsus (mis võib kujuneda otsustavaks tundlike mitte-lineaarsete süsteemide puhul) vaid ka asjaolu, et iga simulatsioon kindlate parameetri väärtuste ja algtingimuste korral on *ad hoc*. Ühest simuleeritud faasiruumist saab informatsiooni süsteemi käitumisest nende parameetri väärtuste ning algtingimuste korral, kuid see anna mingit alust üldistuseks—see meetod ei anna üldist aimu süsteemile omasest käitumisest. Uurides mitte-lineaarseid süsteeme numbrilisi simulatsioone kasutades tekib tunne nagu kompaks süsteemi pimedat tundmatust. See tundmatus oleks vaja kuidagi kaardistada, süstemaatiliselt iseloomustada mitte-lineaarse võrrandi käitumist erinevate parameetri väärtuste ning algtingimuste korral. Paraku autor ei oska veel seda teha ning seega siinkohal näitab palju piiratumat vaatepunkti Lorenzi võrrandi süsteemile.

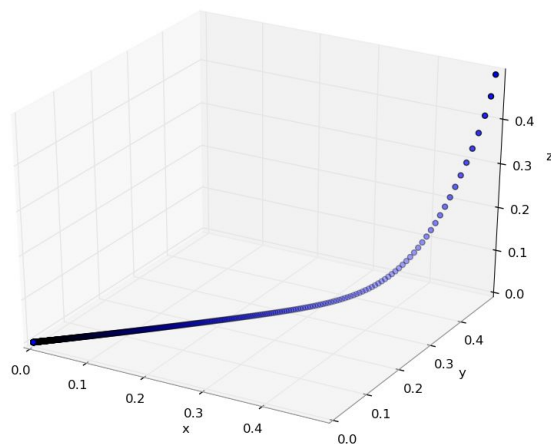
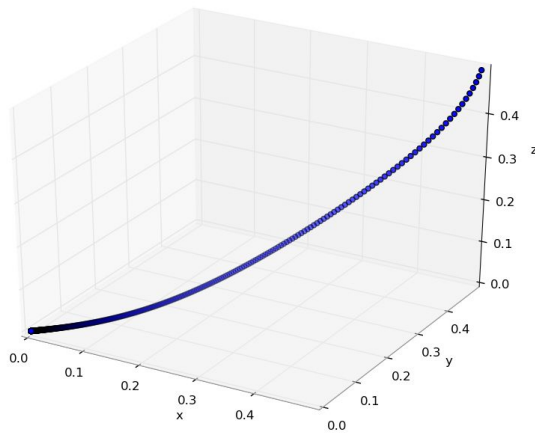
Siinkohal on numbriliselt lahendatud Lorenzi võrrandi süsteemi $\rho = 0.1; 1; 10; 28$ ja 100 korral. ρ on parameeter, mis kontrollib süsteemi faasiüleminekut (faasiüleminek toimub $\rho = 1$ korral), seega peame seda primaarseks. Iga ρ väärtuse korral on simuleeritud süsteemi veel parameetrite $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (need on Lorenzi poolt uuritud parameetrid, nende parameetrite juures ilmneb kuulus Lorenzi liblikas atraktor); $\beta = 10$, $\sigma = 100$; $\beta = 100$, $\sigma = 50$; $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ algtingimustel $x = y = z = 0.5$ ja $x = y = z = 100$. Võrrandid ja nende trajektoorid on väljaarvutatud sammuga 0.001 kasutades Python Scipy diferentsiaalvõrrandi lahendajat *odeint*. Selleks kirjutatud koodi võib leida lisast A.

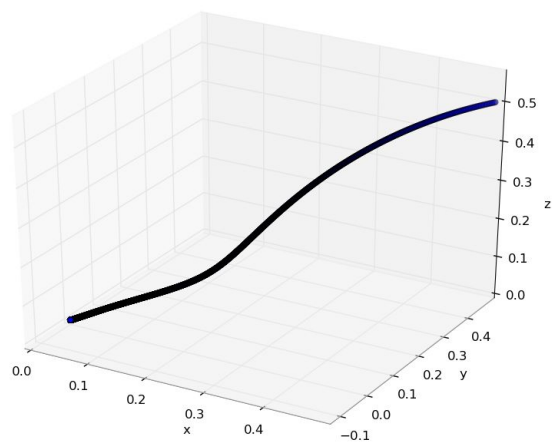
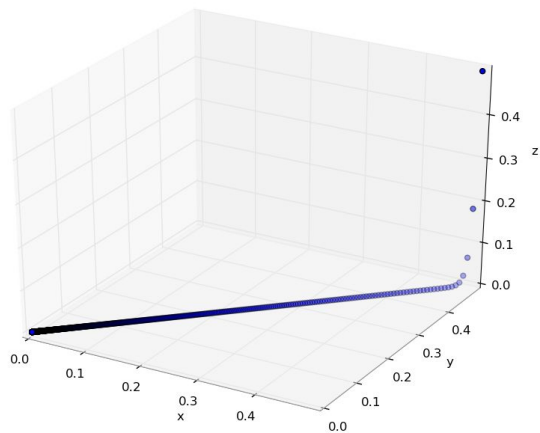
Siinkohal ei ole välja arvutatud Lorenzi võrrandi Lyapunovi eksponenti. Selle asemel on kasutatud sellega mõnevõrra seotud statistilist meetodit. Sõltuvust algtingimusest on uuritud andes võrrandile parameetritega $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ ühe algtingimuse asemel 100 Gaussi jaotusega algtingimuste parve, keskvärtusega 0.5 ja 100 ja dispersiooniga 0.01. Arvutatud on parvede keskmine ja hajumine ehk standard hälve igal ajasammul. Standard hälbe järsk kasv alates teatud ajasammust iseloomustab Lyapunovi eksponenti ning süsteemile omast tundlikkust algtingimuse suhtes. Selleks kirjutatud koodi võib leida lisast A.

Süsteemi tundlikkust parameetri ρ variatsiooni suhtes parameetritega $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ süsteemi korral on uuritud simuleerides 100 erineva Gaussi jaotusega (dispersiooniga 0.01) ρ väärtusega sama algtingimuse juures ning arvutades välja trajektooride standardhälbe igal ajasammul. Selleks kirjutatud koodi võib leida lisast A.

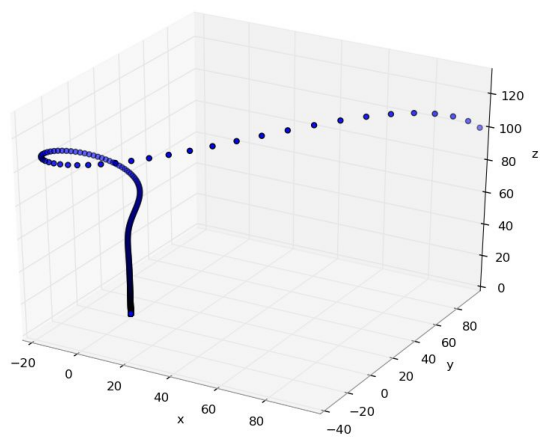
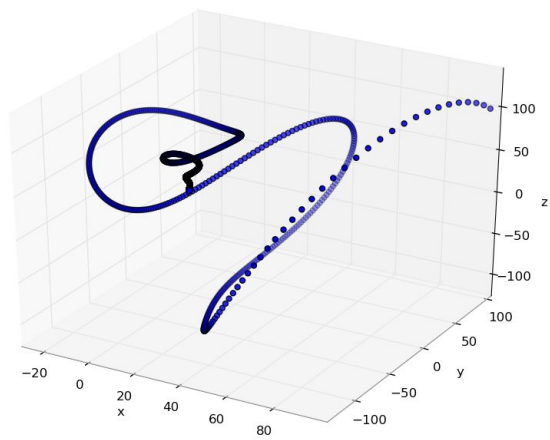
Madalad temperatuuri erinevused ($\rho = 0.1$)

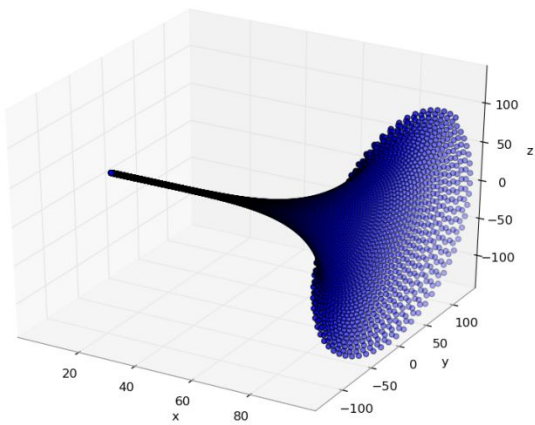
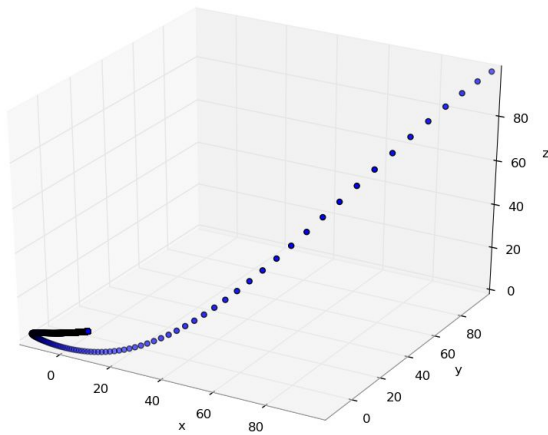
Need süsteemid on lähedal soojuslikule tasakaalule. Parameetri ρ väärtus on väike, seega temperatuuri erinevus kahe plaadi vahel on väike. Algingimuse $x = y = z = 0.5$ puhul, kuigi alghetkel toimub süsteemides pöörlev liikumine s.t. ringluse kiirus ehk konvektiivne intensiivsus ei ole null ning alumiste ning ülemiste kihtide vahel on temperatuuride vahe, langevad süsteemid püsipunkti $x = y = z = 0$, kus ei toimu konvektiivset ringlust. Algingimuse $x = y = z = 100$ juures on süsteemidel palju huvitavamad trajektoorid. Süsteemid langevad küll püsipunkti, kus konvektiivne ringlus peetub, kuid see kuidas nad seda teevad on täiesti erinev erinevate Prandtl arvude ja geomeetriliste konstantide jaoks. Kui $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ sarnaneb süsteemi trajektoor orkaanile. Süsteemile on omane konvektiivne ringlus, mille amplituud koguaeg kahaneb.





Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) **algtingimusel** $x = y = z = 0.5$.

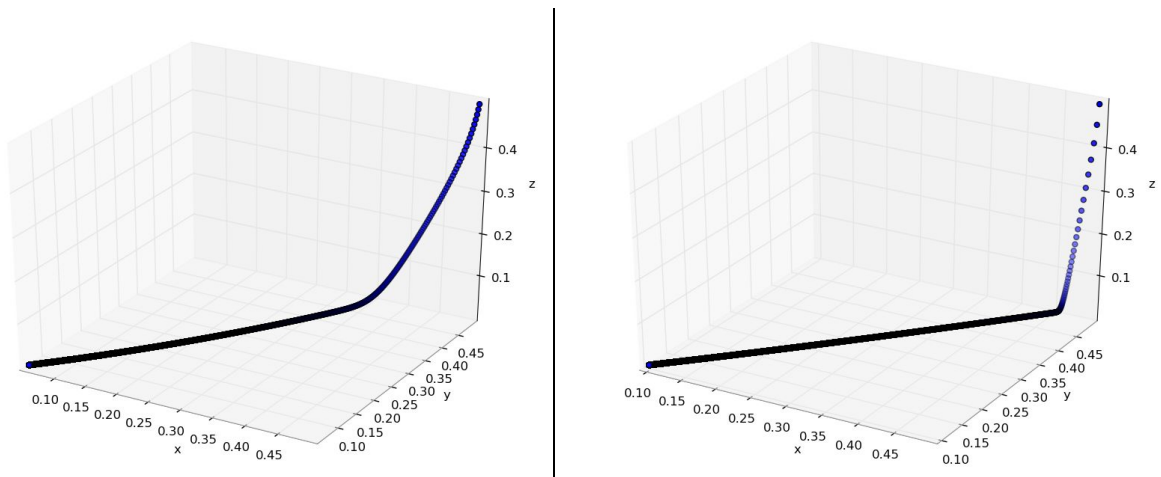


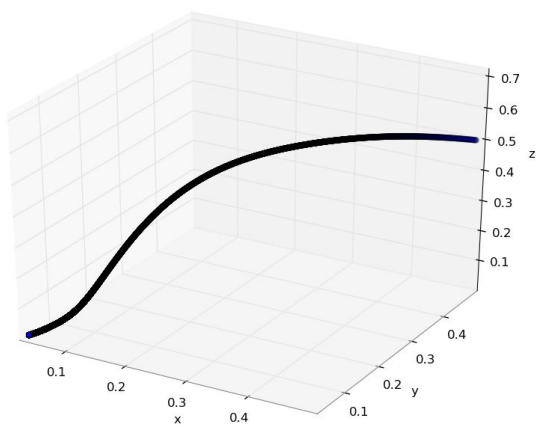
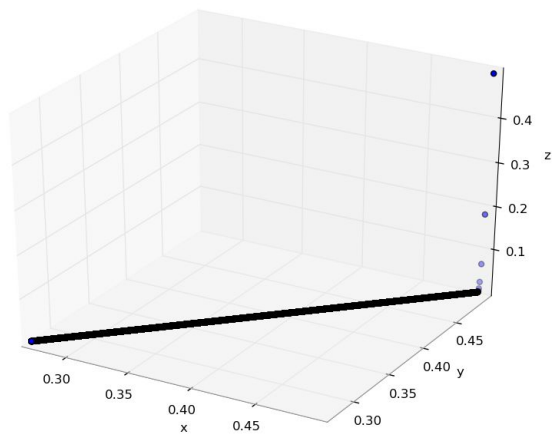


Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 100$

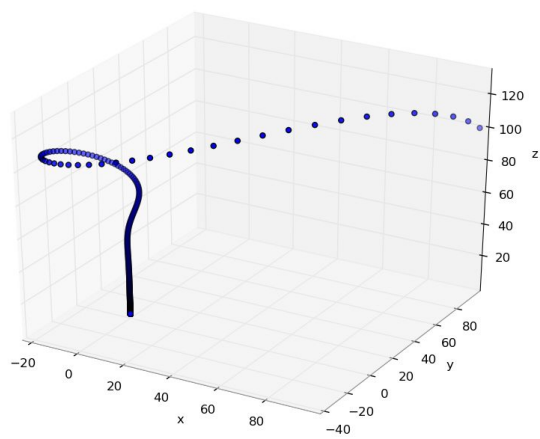
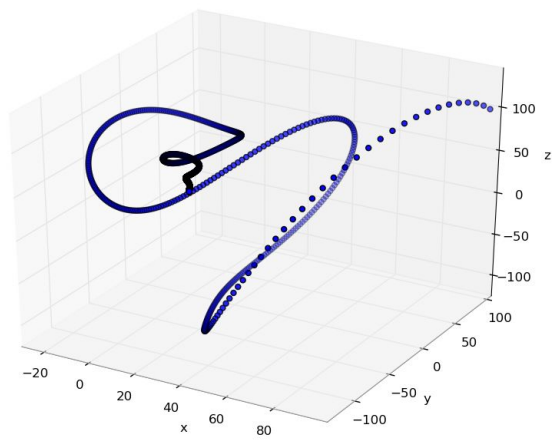
Kriitilise temperatuuri ümbrus ($\rho = 1$)

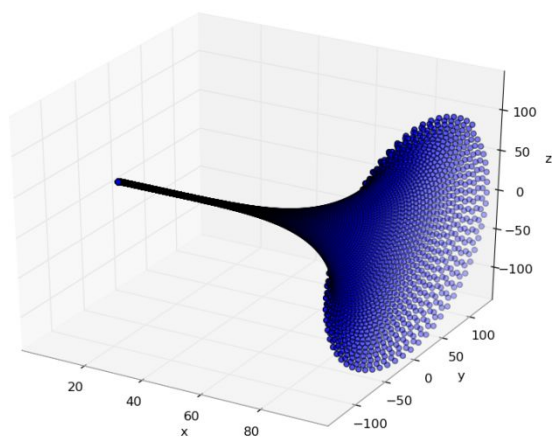
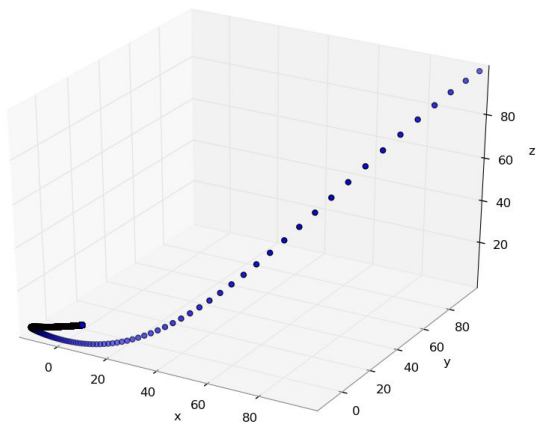
$\rho = 1$ on süsteemi kriitiline punkt, selle punkti juures toimub faasi üleminek. Faasi-üleminekutele on iseloomulik fraktaalsuse tekkimine, kuid numbrilisest simulatsioonist $x = y = z = 0.5$ ei ole näha midagi eriliselt huvitavat. Süsteemi dünaamika on sarnane $\rho = 0.1$ süsteemi dünaamikale. Samuti ei näita simulatsioon suurt tundlikkust parameetri ρ väärtuse suhtes (teatav tundlikkus ikkagi ilmneb).





Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 0.5$.

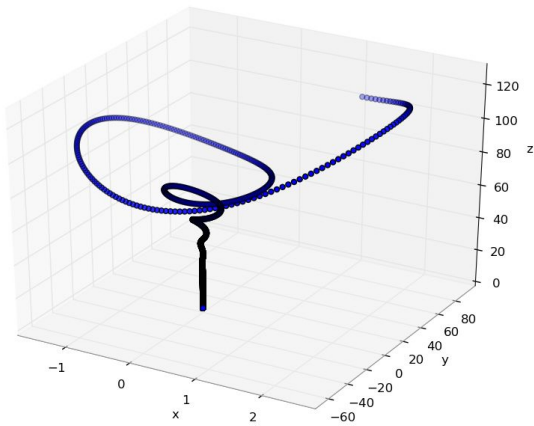
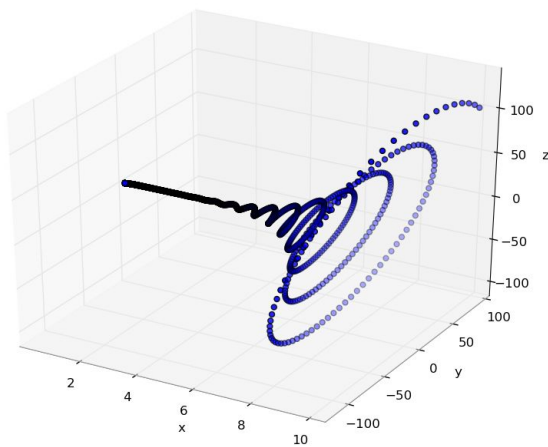


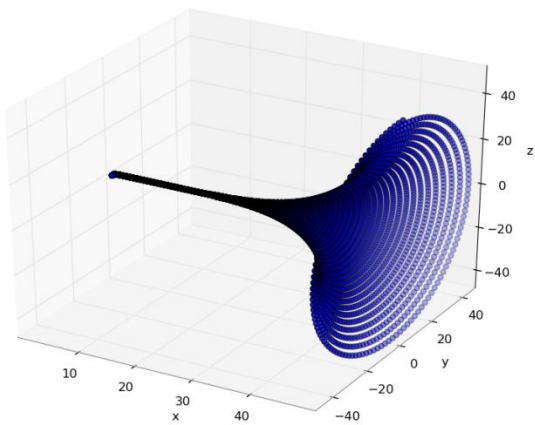
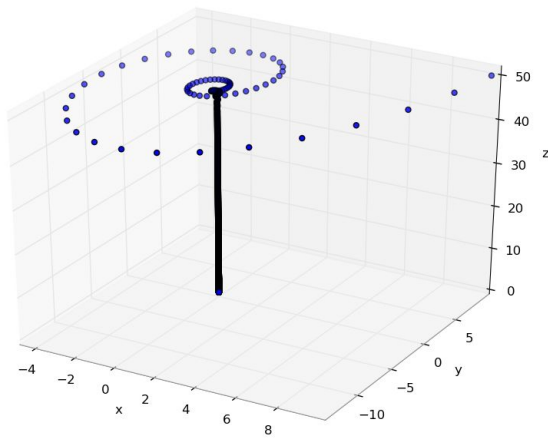


Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene),
 $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene),
 $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 100$

Orkaanid Lorenzi võrrandi süsteemis

Siinkohal toon ära huvitavamad mustrid, mis suutsin avastada simuleerides Lorenzi võrrandeid faasiüleminekule vastava Rayleigh arvuga erinevatel algtingimustel parameetrite $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ korral. Huvitav on täheldada, et ringjad ostsillatsiooni mustrid võivad toimuda erinevatel tasanditel. xy tasandil ilmnevad spiraalid tähendavad seda, et süsteemi konvektsiooni kiiruse ja voogude vaheliste temperatuuride vaheline erinevus muutub. xz tasandil toimuvad ostsillatsioonid tähendavad seda, et muutub süsteemi ringluse kiirus ja kaugus konduktiivsest tasakaalust.

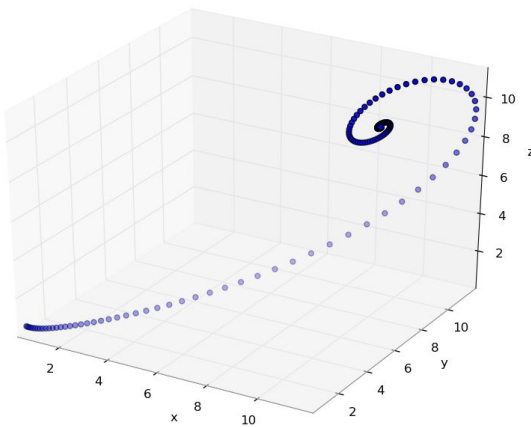
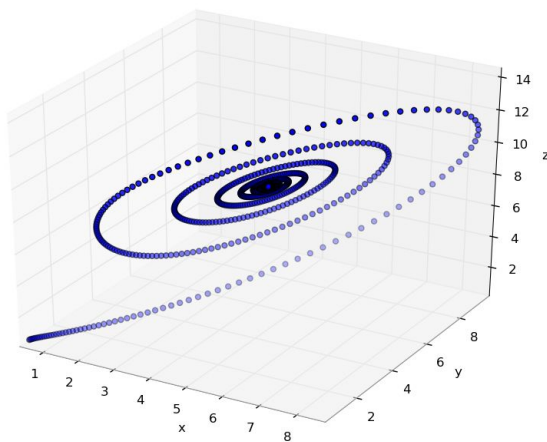


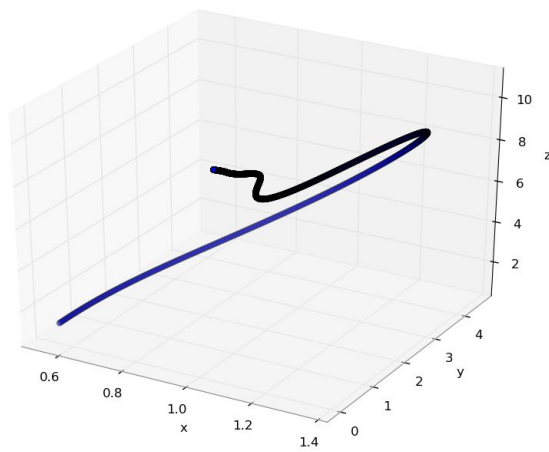
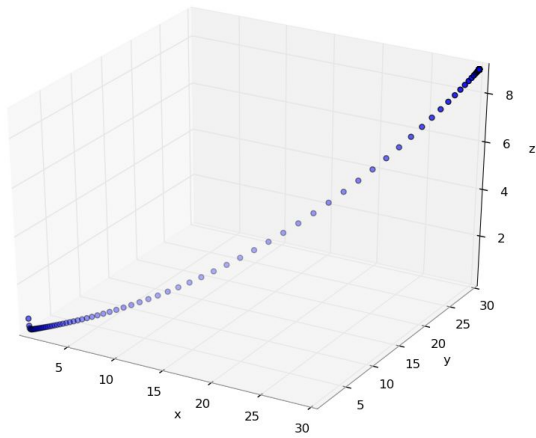


Joonis. Süsteemi dünaamika faasiülemineku juures parameetrite $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ korral, algtingimustel:
 $x = 10$, $y = z = 100$ (esimene rida; vasakult esimene); $x = 1$, $y = z = 100$ (teine rida; vasakult teine);
 $x = y = 10$, $z = 50$ (teine rida; vasakult esimene); $x = 50$, $y = 1$, $z = 50$ (teine rida; vasakult teine).

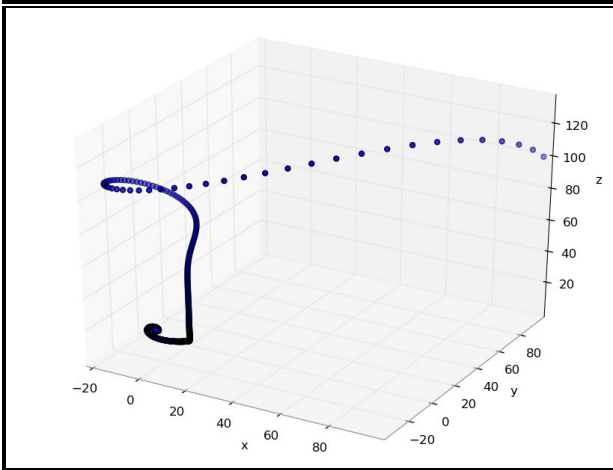
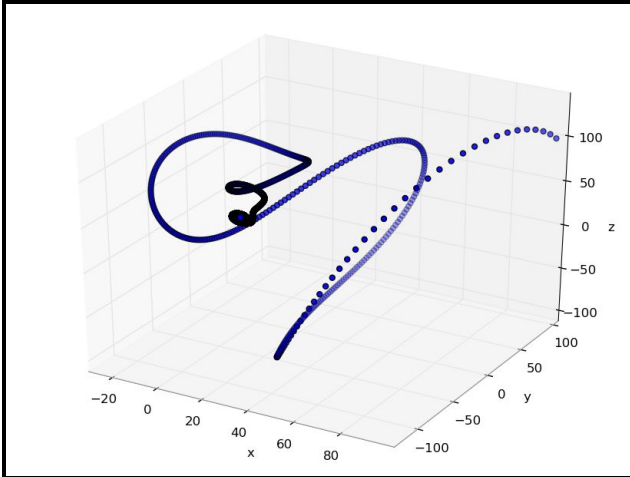
Keskmine temperatuur ($\rho = 10$)

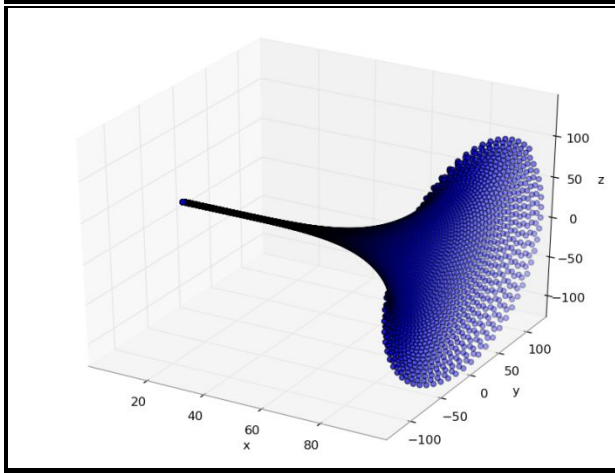
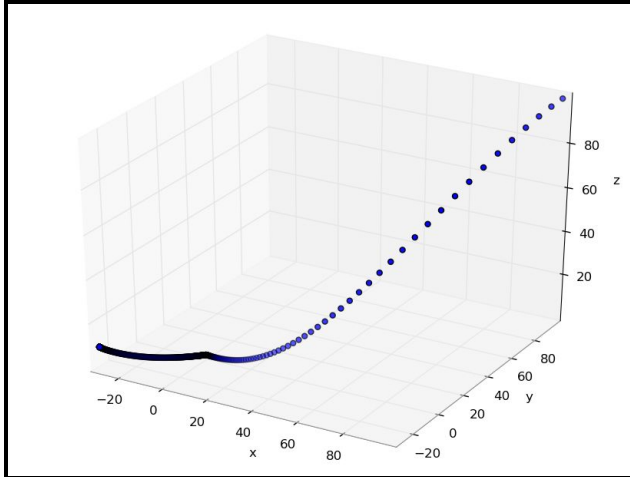
Antud ρ juures on faasiüleminek ära toimunud, s.t. süsteemidel on nüüd põhimõtteliselt olemas kaks võimalikku püsipunkti. Antud temperatuuride vahe juures süsteemid „kasutavad” ära ainult ühe püsipunkti. Süsteemid kas ostsilleerivad erinevate olekute vahel (kaks ülemist graafikut esimesel joonisel) või siis lähenevad uuele püsipunktile kõverat trajektoori pidi ning siis jäävad nendes püsipunktides püsima. Need püsipunktid tähistavad mingit konstantset ringleva voolu kiirust, temperatuuride vahet ja kaugust konduktiivsest tasakaalust.





Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 0.5$.

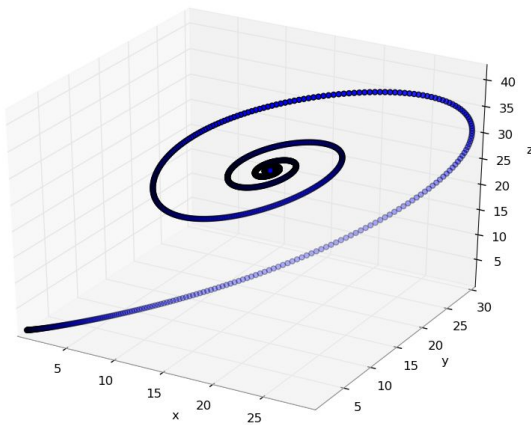
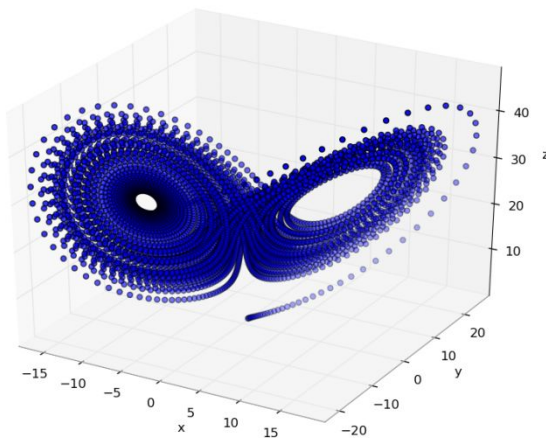


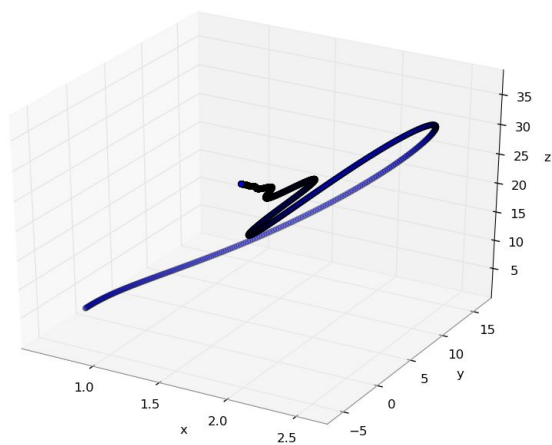
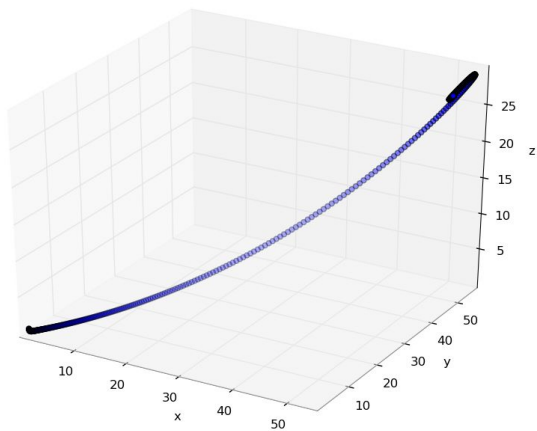


Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 0.5$.

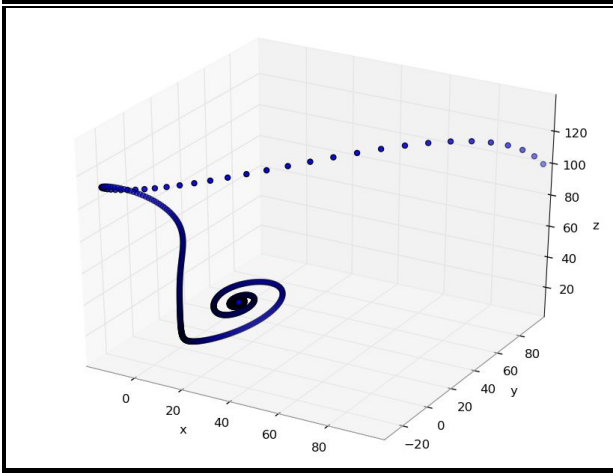
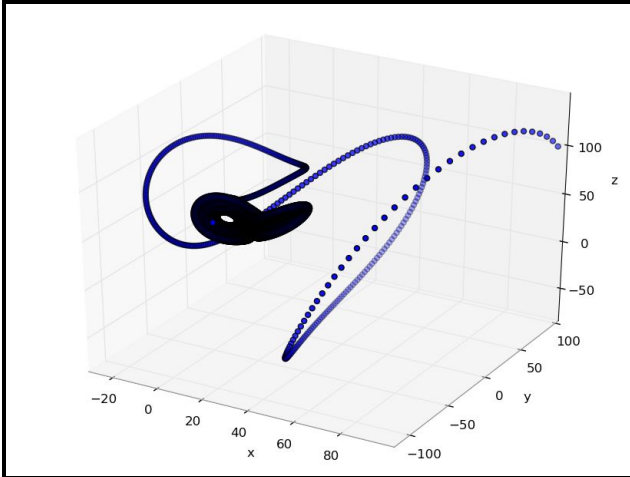
Konvektsiooni teke ($\rho = 28$)

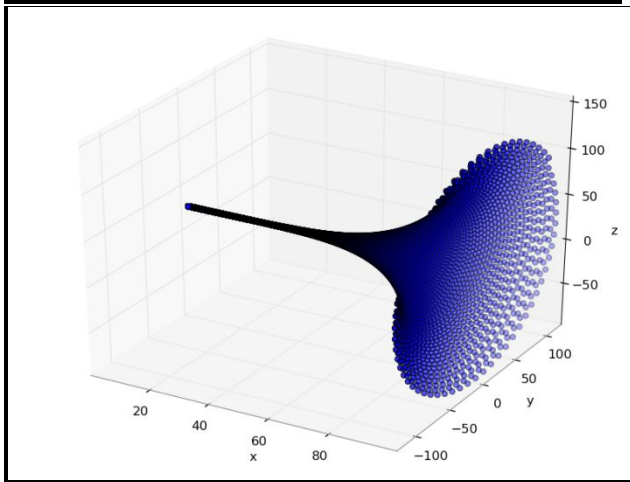
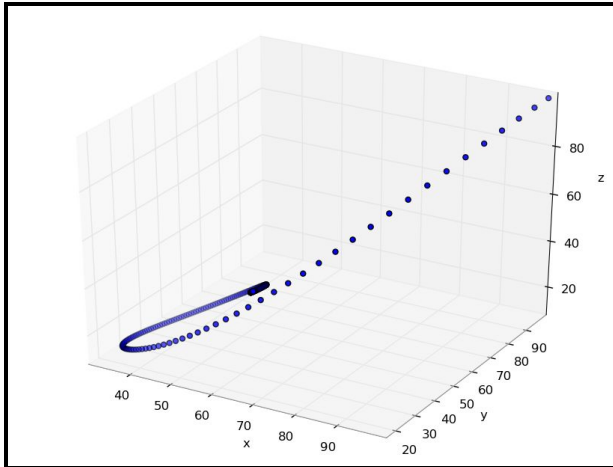
Selle parameetri väärtuse juures ilmneb, miks Lorenz simuleeris ja kirjutas just süsteemist parameetritega $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$. Selliste parameetrite juures hakab süsteem „kasutama“ ära mõlemat püsipunkti. See ongi kuulus Lorenzi liblikas. Süsteem ei jää kunagi pidama ühte püsipunkti nagu teiste parameetritega süsteemid. Lorenzi liblikas toimub mitte-perioodiline liikumine (s.t. liikumine, voolu iseloom ei kordu kunagi). Kaks „liblika tiiba“ vastavad otsekui sellele, et süsteemi ringlus võib suunda muuta „juhuslikul“, ettearvamatul hetkel.





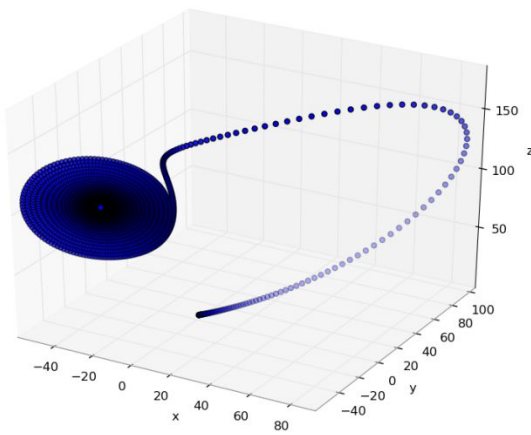
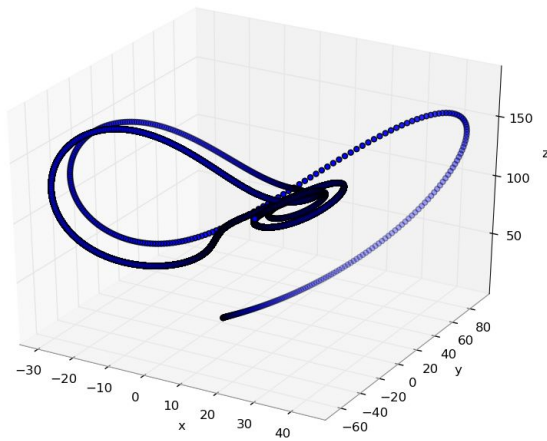
Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 0.5$.

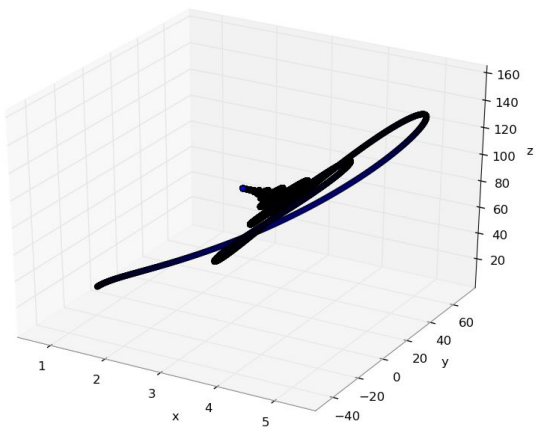
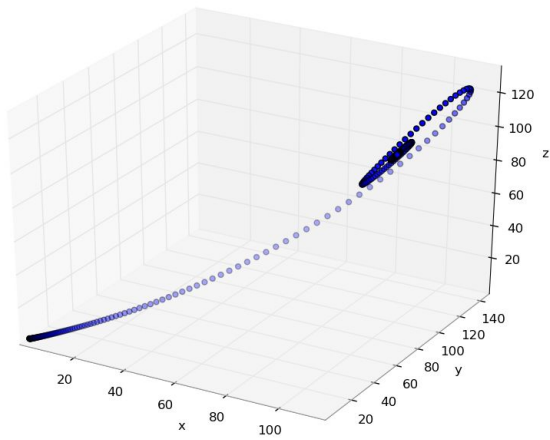




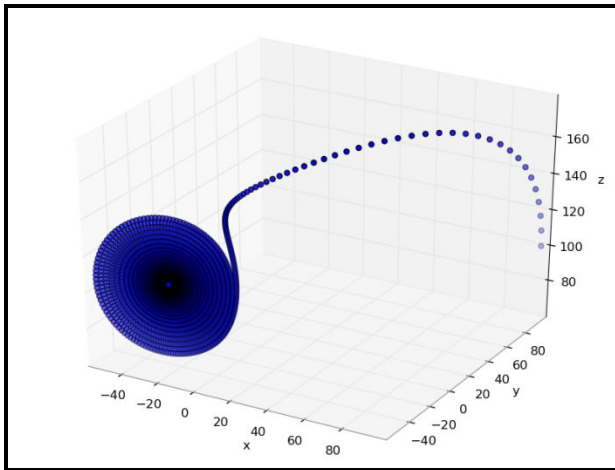
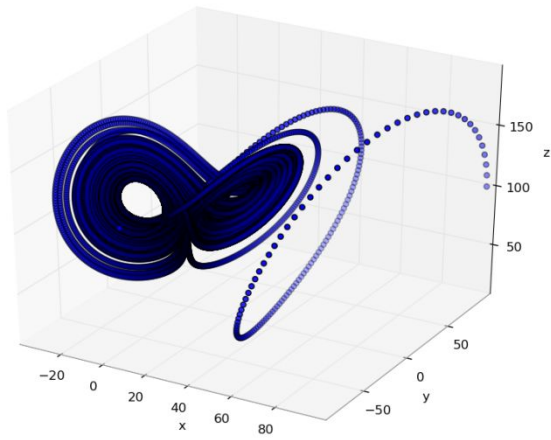
Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 100$.

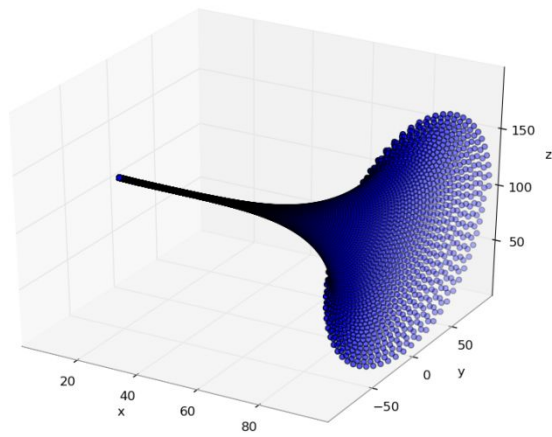
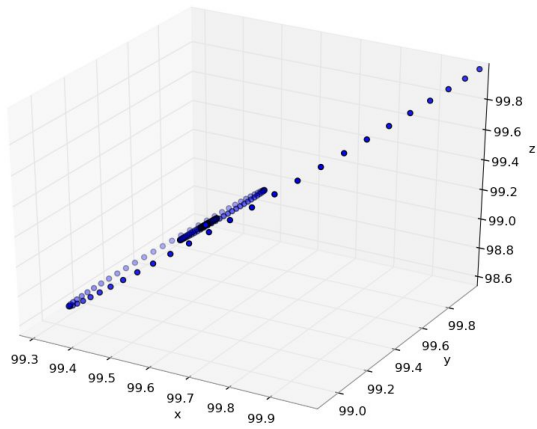
Kõrged temperatuurid ($\rho = 100$)





Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 0.5$.



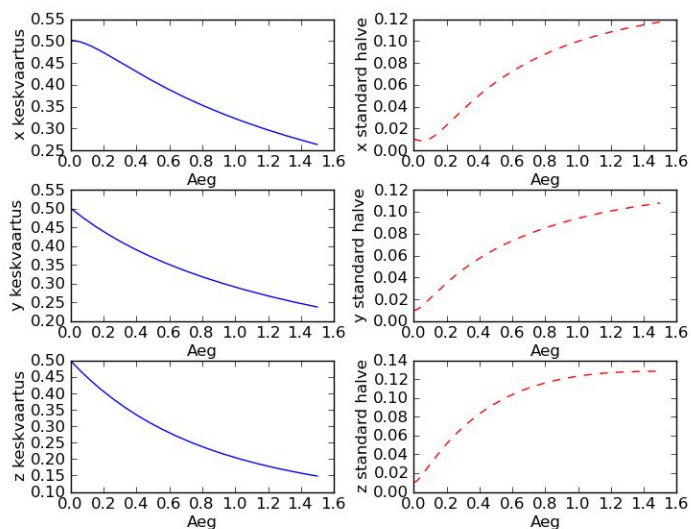


Joonis. Süsteemi faasi ruumid parameetri väärtuste $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ (esimene rida; vasakult esimene), $\beta = 10$, $\sigma = 100$ (esimene rida; vasakult teine), $\beta = 100$, $\sigma = 50$ (teine rida; vasakult esimene), $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.1$ (teine rida; vasakult teine) algtingimusel $x = y = z = 100$.

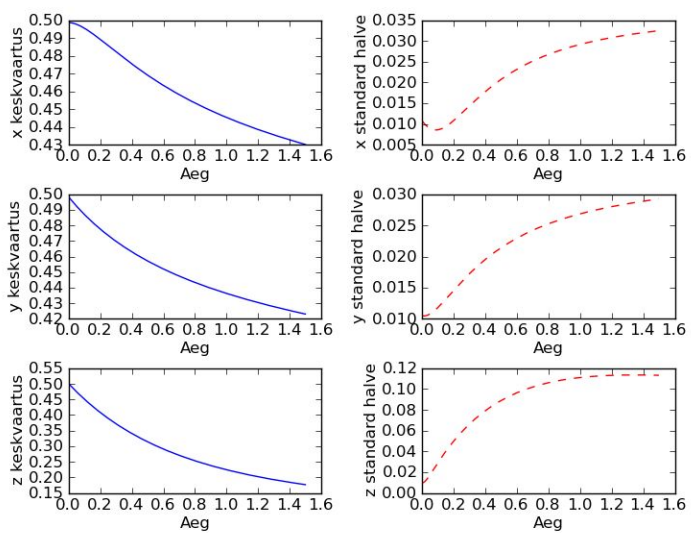
Tundlikkus algtingimuse suhtes

Sõltuvust algtingimusest on uuritud andes võrrandile parameetritega $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ ühe algtingimuse asemel 100 Gaussi jaotusega algtingimuste parve, keskvaartusega 0.5 ja 100 ja dispersiooniga 0.01. Arvutatud on parvede keskmine ja hajumine ehk standard hälve igal ajasammul. Standard hälbe järsk kasv alates teatud ajasammust iseloomustab Lyapunovi eksponenti ning süsteemile omast tundlikkust algtingimuse suhtes.

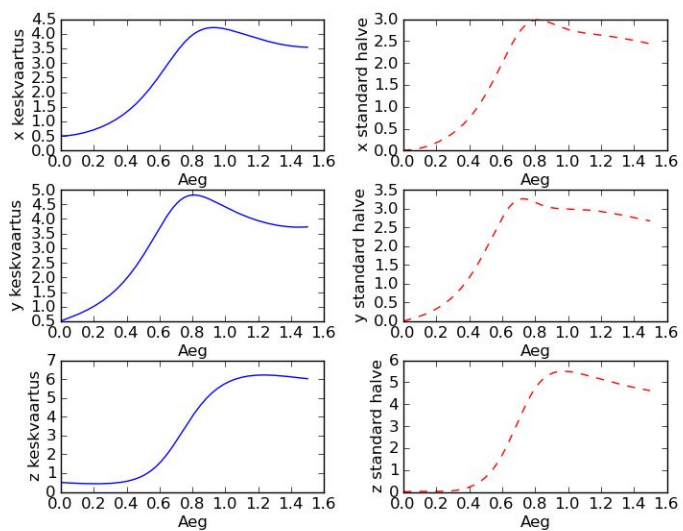
Tulemustest on näha, et erinevate ρ väärtuste korral on süsteem erineval määral tundlik. Ilmneb, et mida suurem on ρ , seda suurem on süsteemi tundlikkus. Põhimõtteliselt tähendab see seda, et mida suurem on plaatide vaheline temperatuuride vaheline erinevus seda kaootilisem on süsteem.



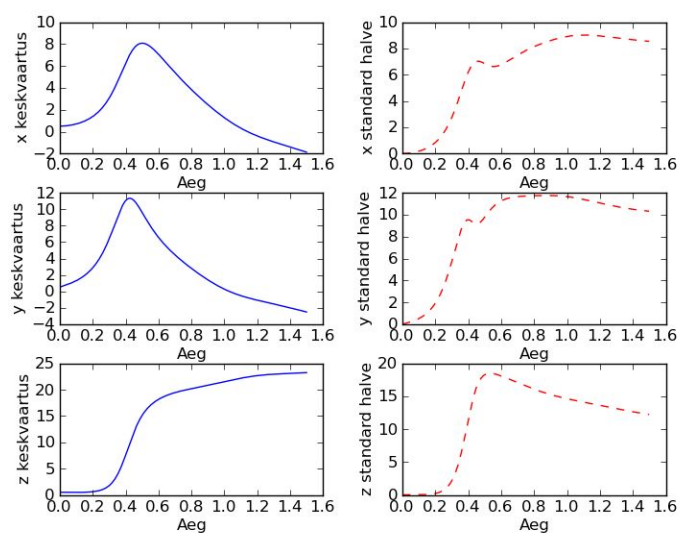
Joonis. Süsteemi tundlikkus algtingimuste suhtes $\rho = 0.1$ juures.



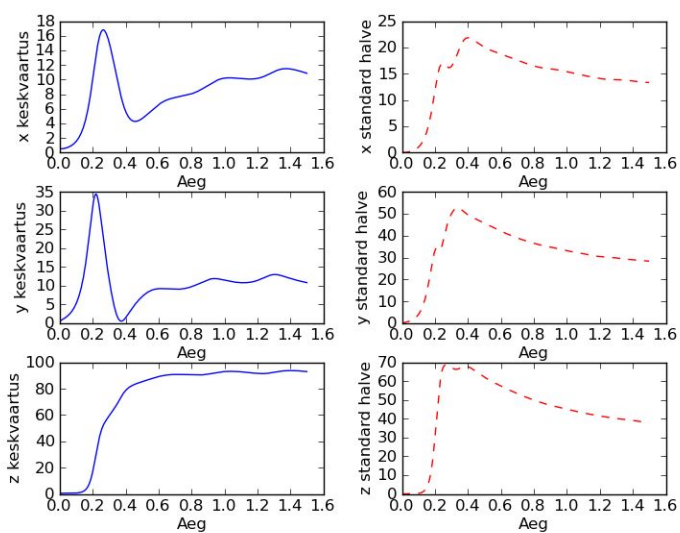
Joonis. Süsteemi tundlikkus algtingimuste suhtes $\rho = 1$ juures.



Joonis. Süsteemi tundlikkus algtingimuste suhtes $\rho = 10$ juures.



Joonis. Süsteemi tundlikkus algingimuste suhtes $\rho = 28$ juures.

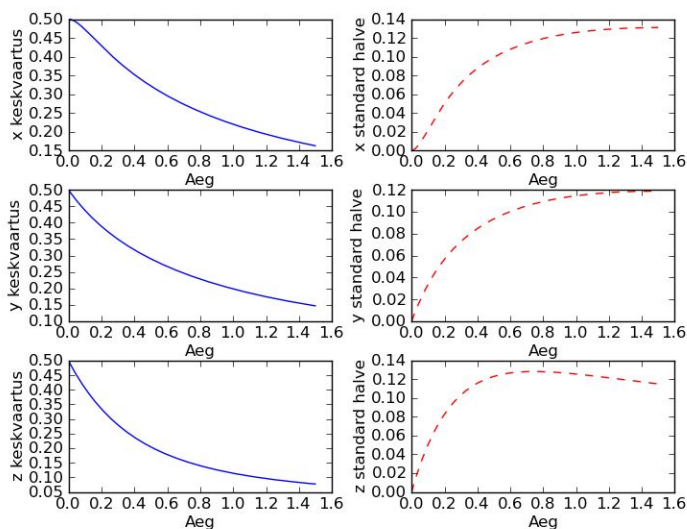


Joonis. Süsteemi tundlikkus algingimuste suhtes $\rho = 100$ juures.

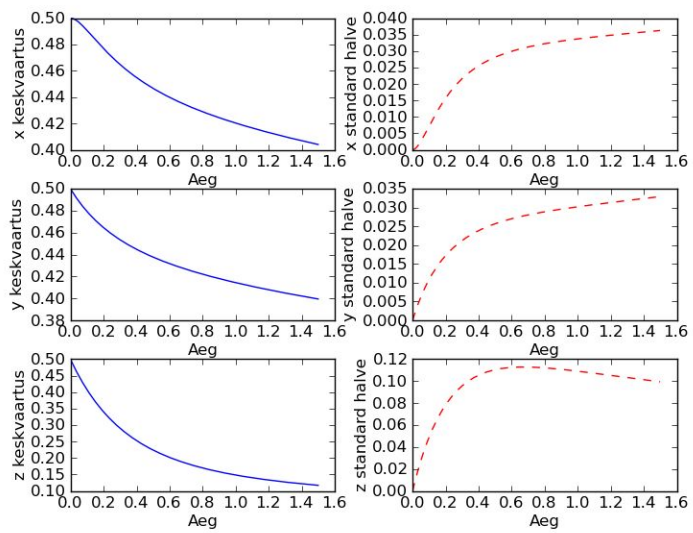
Tundlikkus süsteemi parameetri variatsiooni suhtes

Süsteemi tundlikkust parameetri ρ variatsiooni suhtes parameetritega $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ süsteemi korral on uuritud simuleerides 100 erineva Gaussi jaotusega (dispersiooniga 0.01) ρ väärtusega sama algtingimuse juures ning arvutades välja trajektooride standardhälbe igal ajasammul. Seda tüüpi tundlikkust on huvitav uurida, sest kui me üritame mingi süsteemi (näiteks ilma) dünaamikat ette-ennustada, ei pruugi meil olla määramatus mitte ainult algtingimuste suhtes vaid ka süsteemi iseloomustavate füüsikaliste suuruste suhtes. Näiteks ei pruugi me täpselt teada süsteemi Prandtl'i arvu. Antud juhul me küll uurisime tundlikkust parameetri ρ suhtes aga samalaadne analüüs on lihtsasti teostatav ka teiste parameetrite jaoks (siinkohal jääb see tegemata, sest antud töö on niigi liiga pikk).

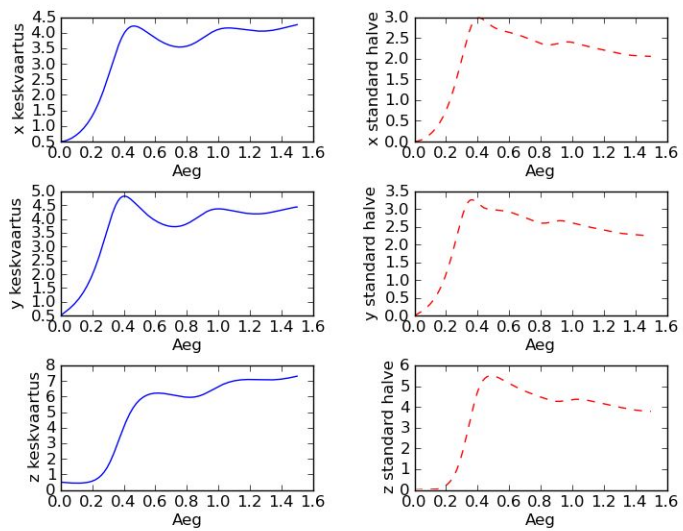
Graafikutest ilmneb, et süsteemid on seda tundlikumad ρ variatsiooni suhtes, mida suurem on ρ . Sellest võib järeldada, et suurte temperatuuride gradientidega süsteemide dünaamikat on raske etteennustada.



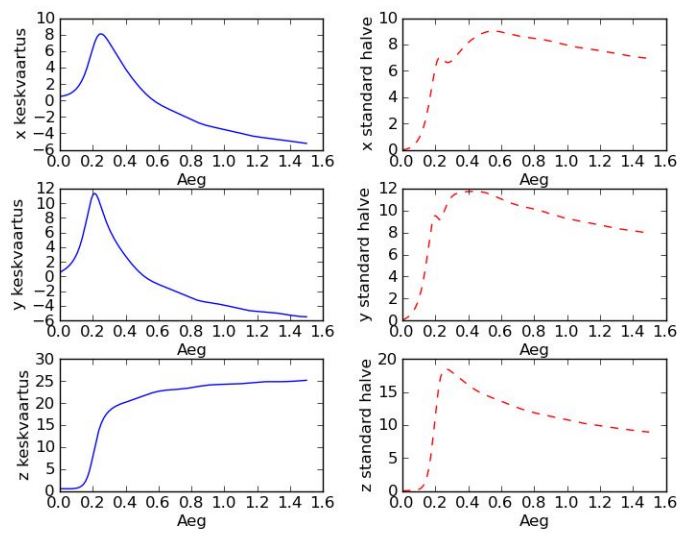
Joonis. Süsteemi tundlikkus ρ variatsiooni suhtes $\rho = 0.1$ juures.



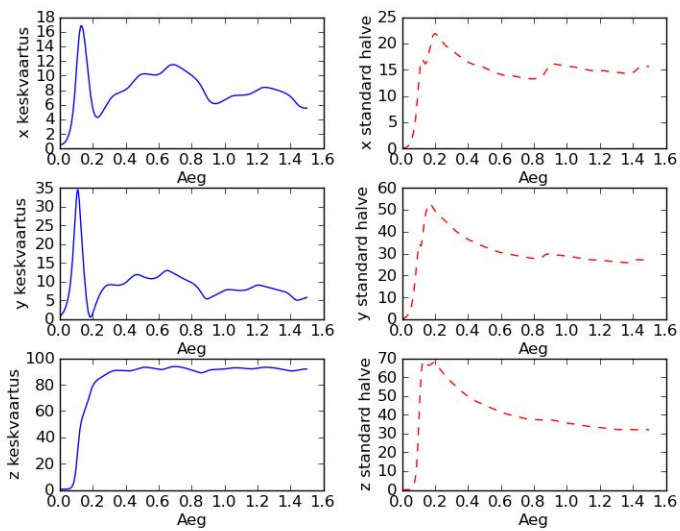
Joonis. Süsteemi tundlikkus ρ variatsiooni suhtes $\rho = 1$ juures.



Joonis. Süsteemi tundlikkus ρ variatsiooni suhtes $\rho = 10$ juures.



Joonis. Süsteemi tundlikkus ρ variatsiooni suhtes $\rho = 28$ juures.



Joonis. Süsteemi tundlikkus ρ variatsiooni suhtes $\rho = 100$ juures.

KOKKUVÕTE

Antud töös on uuritud Lorenzi võrrandi süsteemi. Esitatud on nii lineaarne analüüs püsipunktide ümbruses, kui rohkelt faasiruumide simulatsioone erinevate võrrandi parameetri väärtuste ja algtingimuste korral.

Lorenzi võrrandi faasiruumides ilmnevad ilma meenutavad formatsioonid. Osad faasiruumid sarnanevad orkaanidega, teised on otsekui kaootilised aperioodilised tormid, kolmandad on nagu tormine ilm, mis ajaga rahuneb jne. Selle võrrandi faasiruumid on mitmekesised. Üks huvitavamaid ilminguid on Lorenzi liblikas—kaootiline atraktor, mille ümber süsteem aperioodiliselt võngub. Selline süsteem ei leia kunagi tasakaalu, ta ei peatu kunagi üheski püsipunktis s.t. sellise süsteemi voolu kiirused, hoovuste vahelised temperatuuri erinevused ning kaugus konduktiivsest tasakaalust vahelduvad kordumata kunagi. See on kuulus dissipatiivne süsteem.

Antud töös on uuritud ka võrrandi tundlikkust algtingimuste suhtes ning parameetri ρ variatsiooni suhtes erinevate ρ väärtuste suhtes. Simulatsioonide analüüs näitab, et mida kõrgem on ρ seda tundlikum on süsteem mõlema faktori suhtes. See tähendab seda, et mida suurem on temperatuuri gradient kahe plaadi vahel või mis iganes selle vaste on kuskil teises süsteemis, seda kaootilisem on süsteem, seda raskem on tema dünaamikat ette ennustada.

LISA A

Faasiruumide simuleerimise kood:

Kood oli kirjutatud minu poolt, kommentaarid on inglise keeles, sest ma olen inglise keelega harjunud[®] Vabandust, et see ei ole korralikult läbi kommenteeritud. Ma olen hästi väsinud ja praegu on öösel hilja.

```
from __future__ import division #selleks et 8/3 oleks float

import numpy

from scipy import integrate


#Definition of parameters.

b=0.1

s=0.1

r=0.1


# Defines a function that takes as input the coordinates of a point
# (an array consisting of the coordinates x,y and z) and returns
# f=dx/dt, g=dy/dt, h=dz/dt.

def F(y,t0):

    x,y,z=y

    f=s*(y-x)

    g=r*x-x*x*z-y

    h=x*y-b*z


    return numpy.array([f,g,h])
```

```

#linspace function creates a vector of evenly spaced numbers

#esimene arv sulgudes on algus, 100 on lõpp punkt, num= on arv, millega
#vahemikke jagatakse. stepsize=teine arv/num=arv

t=numpy.linspace(0, 100, num=100000)


#Initial conditions

y0=numpy.array([100,100,100])


#Numerical solution of the equation

soln=integrate.odeint(F, y0, t)


import pylab as p

import mpl_toolkits.mplot3d.axes3d as p3

fig=p.figure()

ax = p3.Axes3D(fig)

ax.scatter3D(soln[:,0],soln[:,1],soln[:,2])

ax.set_xlabel('x')

ax.set_ylabel('y')

ax.set_zlabel('z')

p.show()

```

Tundlikkus algtingimuste suhtes:

Kood oli kirjutatud minu poolt, kommentaarid on inglise keeles, sest ma olen inglise keelega harjunud ☺ Vabandust, et see ei ole korralikult läbi kommenteeritud. Ma olen hästi väsinud ja praegu on öösel hilja.

```
from __future__ import division #selleks et 8/3 oleks float
```

```
import scipy
```

```
import numpy
```

```
import math
```

```
from numpy.random import *
```

```
from scipy import integrate
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
#Setting a cloud of random initial conditions
```

```
initialcond=normal(0.5,10e-3,(100,3))
```

```
#Setting the number of iterations
```

```
t=0
```

```
N=1500
```

```
itersLeft=N
```

```
dt=0.001
```

```
#Setting the timestep to be used by the integrator
```

```
tstep=numpy.linspace(0, 0.001, num=2)
```

```
#Defining the parameters for the Lorenz function
```

```
s=10
```

```
b=8/3
```

```
r=100
```

```
xvalues=[] #This list stores the values starting from the initial condition.
```

```
yvalues=[]
```

```
zvalues=[]
```

```
meanvalx=[]
```

```
meanvaly=[]
```

```
meanvalz=[]
```

```
stdvalx=[]
```

```
stdvaly=[]
```

```
stdvalz=[]
```

```
tvalues=[]
```

```
corrx=[]
```

```
#Defining the Lorenz function
```

```
def F(y,t0):
```

```
    x,y,z=y
```

```
    f=s*(y-x)
```

```
    g=r*x-x*z-y
```

```
    h=x*y-b*z
```

```
    return numpy.array([f,g,h])
```

```

while(itersLeft>0):
    tvalues.append(t)
    t=t+dt
    for i in range (0,100):
        y0=initialcond[i]

        soln=integrate.odeint(F, y0, tstep)

        #soln is an array composed of two rows and 3 columns.
        #The first row stores the initial condition of the integrator.
        #The second row stores the calculated coordinates.

        x=soln[1,0]
        y=soln[1,1]
        z=soln[1,2]

        xvalues.append(x)  #The first time the cycle runs this stores the init
                           #condition.
        yvalues.append(y)
        zvalues.append(z)
        initialcond[i]=soln[1,:]

    meanvalx.append(numpy.average(xvalues))
    meanvaly.append(numpy.average(yvalues))

```

```
meanvalz.append(numpy.average(zvalues))

stdvalx.append(numpy.std(xvalues))

stdvaly.append(numpy.std(yvalues))

stdvalz.append(numpy.std(zvalues))

itersLeft=itersLeft-1
```

#Plots the values in the list

```
plt.figure(1)

plt.subplot(321)

plt.xlabel("Aeg")

plt.ylabel("x keskvaartus")

plt.plot(tvalues, meanvalx)
```

```
plt.subplot(322)

plt.xlabel("Aeg")

plt.ylabel("x standard halve")

plt.plot(tvalues, stdvalx, 'r--')
```

```
plt.subplot(323)

plt.xlabel("Aeg")

plt.ylabel("y keskvaartus")

plt.plot(tvalues, meanvaly)
```

```
plt.subplot(324)

plt.xlabel("Aeg")
```

```
plt.ylabel("y standard halve")  
plt.plot(tvalues, stdvaly, 'r--')
```

```
plt.subplot(325)  
plt.xlabel("Aeg")  
plt.ylabel("z keskvaartus")  
plt.plot(tvalues, meanvalz)
```

```
plt.subplot(326)  
plt.xlabel("Aeg")  
plt.ylabel("z standard halve")  
plt.plot(tvalues, stdvalz, 'r--')
```

```
plt.show()
```


Tundlikkus parameetri variatsiooni suhtes:

Kood oli kirjutatud minu poolt, kommentaarid on inglise keeles, sest ma olen inglise keelega harjunud☺ Vabandust, et see ei ole korralikult läbi kommenteeritud. Ma olen hästi väsinud ja praegu on öösel hilja.

```
from __future__ import division #selleks et 8/3 oleks float
```

```
import numpy
```

```
import scipy
```

```
import math
```

```
from numpy.random import *
```

```
from scipy import integrate
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
#Setting a cloud of random initial conditions
```

```
init=numpy.array([0.5,0.5,0.5])
```

```
initialcond=init.repeat([300,0,0],axis=0)
```

```
initialcond=initialcond.reshape(100,3)
```

```
#Setting the number of iterations
```

```
t=0
```

```
dt=0.001
```

```
N=1500
```

```
itersLeft=N
```

```
#Setting the timestep to be used by the integrator
```

```
tstep=numpy.linspace(0, 0.002, num=2)
```

```
#Defining the parameters for the Lorenz function
```

```
s=10
```

```
b=8/3
```

```
r=0
```

```
param=normal(100,10e-3,(100,3))
```

```
xvalues=[] #This list stores the values starting from the initial condition.
```

```
yvalues=[]
```

```
zvalues=[]
```

```
meanvalx=[]
```

```
meanvaly=[]
```

```
meanvalz=[]
```

```
stdvalx=[]
```

```
stdvaly=[]
```

```
stdvalz=[]
```

```
tvalues=[]
```

```
#Defining the Lorenz function
```

```
def F(y,t0,r,s,b):
```

```
    x,y,z=y
```

```
    f=s*(y-x)
```

```
    g=r*x-x*x*z-y
```

```
    h=x*y-b*z
```

```
return numpy.array([f,g,h])
```

```
while(iteLeft>0):
```

```
    tvalues.append(t)
```

```
    t=t+dt
```

```
    for i in range (0,100):
```

```
        y0=initialcond[i,:]
```

```
        r=param[i,0]
```

```
        soln=integrate.odeint(F, y0, tstep, (r,s,b))
```

```
        #soln is an array composed of two rows and 3 columns.
```

```
        #The first row stores the initial condition of the integrator.
```

```
        #The second row stores the calculated coordinates.
```

```
        x=soln[1,0]
```

```
        y=soln[1,1]
```

```
        z=soln[1,2]
```

```
        xvalues.append(x)  #The first time the cycle runs this stores the init
```

```
                           #condition.
```

```
        yvalues.append(y)
```

```
        zvalues.append(z)
```

```

initialcond[i,:]=soln[1,:]

meanvalx.append(numpy.average(xvalues))
meanvaly.append(numpy.average(yvalues))
meanvalz.append(numpy.average(zvalues))

stdvalx.append(numpy.std(xvalues))
stdvaly.append(numpy.std(yvalues))
stdvalz.append(numpy.std(zvalues))

itersLeft=itersLeft-1

```

#Plots the values in the list

```

plt.figure(1)
plt.subplot(321)
plt.xlabel("Aeg")
plt.ylabel("x keskvaartus")
plt.plot(tvalues, meanvalx)

plt.subplot(322)
plt.xlabel("Aeg")
plt.ylabel("x standard halve")
plt.plot(tvalues, stdvalx, 'r--')

```

```

plt.subplot(323)
plt.xlabel("Aeg")

```

```
plt.ylabel("y keskvaartus")
```

```
plt.plot(tvalues, meanvaly)
```

```
plt.subplot(324)
```

```
plt.xlabel("Aeg")
```

```
plt.ylabel("y standard halve")
```

```
plt.plot(tvalues, stdvaly, 'r--')
```

```
plt.subplot(325)
```

```
plt.xlabel("Aeg")
```

```
plt.ylabel("z keskvaartus")
```

```
plt.plot(tvalues, meanvalz)
```

```
plt.subplot(326)
```

```
plt.xlabel("Aeg")
```

```
plt.ylabel("z standard halve")
```

```
plt.plot(tvalues, stdvalz, 'r--')
```

```
plt.show()
```