Podstawy kryptografii

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2023/2024

inf.ug.edu.pl/~amb/

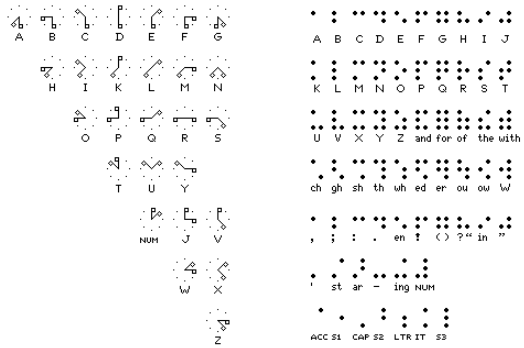
Organizacja

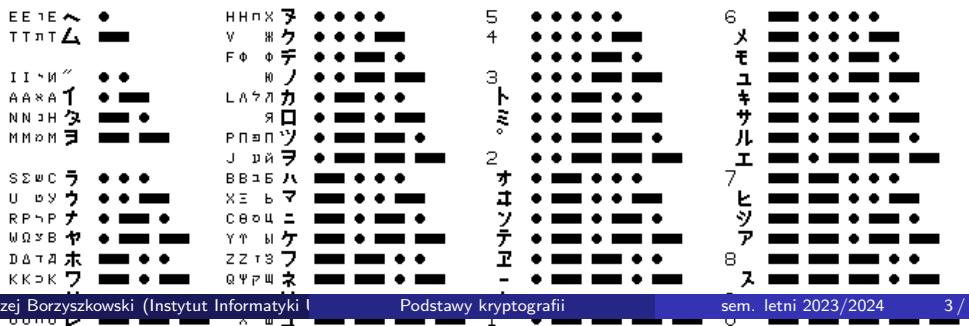
- literatura:
  - D. Stinson, M. Paterson, *Kryptografia w teorii i w praktyce*, PWN, 2021
  - J-P. Aumasson, *Nowoczesna kryptografia*, PWN, 2018
  - B. Schneier, *Kryptografia dla praktyków*, WNT, 2002
  - M. Kutyłowski, W-B. Strohmann, *Kryptografia*, Readme, 1999
- materiały są/będą dostępne `inf.ug.edu.pl/~amb`
- obecność na wykładzie (oczywiście) nieobowiązkowa
- znajomość wykładu (oczywiście) obowiązkowa
- już na ćwiczeniach
- plus podstawowa umiejętność programowania
- program nie przewiduje egzaminu końcowego, wykład zakończy się testem zaliczeniowym

Kodowanie vs. szyfrowanie

- kodowanie: zamiana alfabetu na inny
  - alfabet Braille'a
  - kod ASCII
  - alfabet Morse'a
- kodowanie to nie szyfrowanie

źródło: `is.gd/lxNX4A`





Działy

- kryptografia: nauka/sztuka szyfrowania (i odszyfrowywania)
- kryptoanaliza: nauka/sztuka łamania szyfrów
- kryptologia: suma powyższych plus całościowe spojrzenie (właściwa nazwa przedmiotu)
  jednak powszechne użycie: kryptografia

kodowanie też ma znaczenie
np. kody poprawiające błędy (*error correction codes*)
w dobrym szyfrze zmiana jednego bitu zaszyfrowanej wiadomości może uniemożliwić odszyfrowanie
kod też może być szyfrem jeśli zamiana alfabetów jest tajna

Cztery główne pojęcia

- informacja
  dane, możliwość kopiowania, kradzież??
  tekst jawny – wiadomość
  tekst zaszyfrowany – kryptogram/szyfrogram
- uczestnik (entity)
  człowiek, komputer, urządzenie,...
  Alicja, Bolek, Celina, Tadeusz, Pelagia, Wiktor,...
  (*Alice, Bob, Cindy, Trent, Peggy, Victor*)
- przeciwnik, Ewa, Mariola,... (*Eve, Mallory*)
- klucz
  znany nie wszystkim, łatwo zaszyfrować/odszyfrować z kluczem,
  trudno bez klucza
  uwaga: inne znaczenie niż np. w teorii baz danych

Złożoność

- $MMMCDLXXVII * MDCCCXLIV$
  było trudne dla Rzymian
  ale nie dziś: $3477 * 1844 = 6411588$
- złożoność asymptotyczna, zależy od wielkości zadania, parametr $n \to \infty$
  - liniowa: n, żadna złożoność
  - wielomianowa, np.: n^2, n^3, n^{100}
  - wykładnicza, np.: $2^n, n!, n^n$
  - podwykładnicza, np.: $e^{\sqrt{n}}$, $e^{C \cdot \sqrt[3]{n \cdot \ln 2 \cdot \ln(n \cdot \ln 2)}}$
- stała też się liczy, np. $n = 1024$ bity i tylko ta wielkość nas interesuje

np. n^3 vs. $e^{2 \cdot \sqrt{n}}$

n	n**3	2*sqrt(n)	exp(2*sqrt(n))
2	8	3	17
4	64	4	55
8	512	6	286
16	4096	8	2981
32	32768	11	81937
64	262144	16	8886111
128	2097152	23	6713706353
256	16777216	32	78962960182681
512	134217728	45	4.507385299E+0019
1024	1073741824	64	6.235149081E+0027
2048	8589934592	91	2.031652223E+0039
4096	68719476736	128	3.887708406E+0055
8192	549755813888	181	4.127610756E+0078
16384	4398046511104	256	1.511427665E+0111

Założenia kryptografii

- przestrzeń tekstów jawnych M, kluczy K, kryptogramów C
  - algorytm generowania klucza $G : \to K$
  - algorytm szyfrowania $E : K \times M \to C$ (czy deterministyczny ?)
  - algorytm odszyfrowywania $D : K \times C \to M$
- zasada Kerckhoffsa (1883):
  przeciwnik zna szyfr (tzn. protokół/algorytmy)
  przeciwnik ma duże zasoby obliczeniowe i duże umiejętności
  przeciwnik NIE ZNA klucza
- dlaczego?
  łatwiej utrzymać w tajemnicy klucz niż algorytm
  nie da się opracować wielu (tajnych) algorytmów
- JEDYNY BEZPIECZNY szyfr: jednorazowy
  w zasadzie nie ma dowodów, że inne szyfry są bezpieczne

Scenariusze ataków

- przeciwnik ma tylko tekst zaszyfrowany
- przeciwnik ma przykłady tekstów jawnych plus ich zaszyfrowane wersje
- przeciwnik może żądać zaszyfrowania wiadomości lub odszyfrowania (testowego) kryptogramu
- ataki pasywne vs. aktywne
- ilość: duża liczba tekstów lub par tekstów vs. pojedynczy tekst zaszyfrowany
- atak brutalny: przeszukiwanie całej przestrzeni kluczy K
  - aby zadziałał musi być metoda rozpoznania znalezienia klucza
  - dla obrony przestrzeń kluczy musi być duża, np. $> 2^{80}$ elementów

Cele kryptografii

- poufność (tajność)
  – tylko uprawnieni uczestnicy mają dostęp do informacji, szyfrowanie
- integralność danych
  – dane są niezmienione (wykrycie zmiany, również/głównie celowej)
- uwierzytelnianie
  – w czasie rzeczywistym: identyfikacja uczestnika
  – odłożone w czasie: identyfikacja źródła dokumentu
- niezaprzeczalność
  – podpis: nie można się wyprzeć
  – niemożliwa w kryptografii klucza symetrycznego

Kryptografia klasyczna vs. współczesna

- tekst jawny $\longrightarrow$ tekst zaszyfrowany $\longrightarrow$ tekst jawny
  $M \longrightarrow E_K M \longrightarrow D_K E_K M$ (zawsze przekształcenie z kluczem)
- klasyczna kryptografia (do lat '70): ten sam klucz
  – obie strony muszą wymienić klucz wspólny klucz
  – jak to zrobić?
- współczesna kryptografia: para kluczy (kryptografia asymetryczna, PKC),
  – idea: Diffie, Hellman (1976)
  – implementacja: RSA (Rivest, Shamir, Adleman) (1977)
  – wada: słaba wydajność
  – zaleta: nie trzeba przedtem przekazywać klucza

Kryptografia klucza asymetrycznego

- przykład zastosowania
  1. Alicja prosi Bolka o przekazanie klucza publicznego, albo odczytuje z ogłoszenia, albo otrzymuje od wspólnego znajomego
  2. szyfruje wiadomość kluczem publicznym Bolka
  3. przekazuje wiadomość $E_B M$
  4. Bolek odszyfrowuje wiadomość swoim kluczem prywatnym $D_B E_B M = M$
- NIKT nie przesyła tajnego klucza
- problem: czy to naprawdę Bolek przekazał klucz publiczny?!

Kryptografia klasyczna

Kryptografia klasyczna

- szyfr Cezara
  – przesunięcie liter np. o 3 t.j. $y = x + 3 \mod 26$, $x = 0, 1, \ldots, 25$
  – kryptoanaliza: wypróbowanie 25 przesunięć
  – jedna litera pary tekst jawny+zaszyfrowany wystarczy!
  $k = y - x \mod 26$
- szyfr afiniczny: $y = a \cdot x + b \mod 26$
  – odszyfrowywanie: $x = (y - b)/a \mod 26$
  – musi być określone dzielenie $1/a = a'$ t.ż. $a \cdot a' = 1 \mod 26$
  istnieje w.t.w. gdy $NWD(a, 26) = 1$
  – dla klucza $(13, 4)$ „input" i „alter" szyfrują się do „ERRER"
  – kryptoanaliza: przestrzeń kluczy ma 312 elementów
  – dwie litery tekstu jawnego+zaszyfrowanego często wystarczą, kilka par prawie na pewno

Szyfr podstawieniowy, książka kodowa

- dwie książki z parami tekst jawny – tekst zaszyfrowany

Februar	13605
fest	13722
finanzielle	13850
folgender	13918
Frieden	17142

  – w jednej kolejność tekstu jawnego, w drugiej zaszyfrowanego
  – kluczem jest para książek! niesłychanie trudno o wymianę
- wersja: dodatkowym kluczem jest przesunięcie
  – $E(M) = \text{Książka}(M) + \text{przesunięcie} \mod 100.000$
  – $C(C) = \text{Książka}^{-1}(M - \text{przesunięcie} \mod 100.000)$

Szyfr monoalfabetyczny

- szyfr monoalfabetyczny (kod), np.

```
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
q w e r t y u i o p a s d f g h j k l z x c v b n m
```

  – kryptoanaliza: analiza częstotliwości wystąpień liter
  – ale można mieć kilka odpowiedników dla każdej litery (homofonia)
  – np. $E : \{A..Z\} \to \{00..99\}$, $|E(e)| = 12$, $|E(z)| = 1$
  – można/trzeba też rozważać częstotliwości par liter, niektóre nie występują praktycznie wcale, inne b. często

Szyfr podstawieniowy, książka kodowa

- dwie książki z parami tekst jawny – tekst zaszyfrowany

Februar	13605
fest	13722
finanzielle	13850
folgender	13918
Frieden	17142

  – w jednej kolejność tekstu jawnego, w drugiej zaszyfrowanego
  – kluczem jest para książek! niesłychanie trudno o wymianę
- wersja: dodatkowym kluczem jest przesunięcie
  – $E(M) = \text{Książka}(M) + \text{przesunięcie} \mod 100.000$
  – $C(C) = \text{Książka}^{-1}(M - \text{przesunięcie} \mod 100.000)$

Szyfr Vigenere'a

klucz: wektor liczb np. $(k_1, k_2, \ldots, k_9)$

- szyfrowanie: seria szyfrów Cezara: $y_1 = x_1 + k_1$, $y_2 = x_2 + k_2$, ..., $y_9 = x_9 + k_9$, odszyfrowywanie analogicznie
- kryptoanaliza: przeszukiwanie wyczerpujące jest nierealne, liczba kluczy równa 26^n, np. dla $n = 9$ jest ich $5 \cdot 10^{12}$
- para tekst jawny+zaszyfrowany długości klucza definiuje klucz
- gdy znany jest tylko szyfrogram oraz długość klucza, to można/należy przeprowadzić analizę częstotliwości dla fragmentów szyfrogramu, dla zestawów $\{y_1, y_{10}, y_{19}, \ldots\}$ itd.
- analiza częstotliwości oznacza przybliżenie wektora częstotliwości wystąpień liter w szyfrogramie z częstotliwościami języka naturalnego

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
82	15	28	43	127	22	20	61	70	2	8	40	24	67	75	19	1	60	63	91	28	1	24	2	20	1

w oparciu o: `https://en.wikipedia.org/wiki/Letter_frequency`

Szyfr Vigenere'a, c.d.

znalezienie długości klucza:

- niech $A_0 = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{25})$ oznacza prawdopodobieństwa występowania liter w tekście
- niech $A_i = (p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{25}, p_0, \ldots, p_{i-1})$ oznacza ten sam wektor z przesuniętymi wielkościami
- testujemy prawdopodobieństwo powtórzenie się litery w szyfrogramie oraz szyfrogramie przesuniętym o n miejsc
- jeśli $n =$ długość klucza, to litery były szyfrowane tym samym przesunięciem, prawd $= p_0 \cdot p_0 + p_1 \cdot p_1 + \ldots + p_{25} \cdot p_{25} = A_0 * A_0$
- jeśli $n <>$ długość klucza, to koincydencje przypadają na różne przesunięcia, prawdopodobieństwo koincydencji jest uśrednione po różnych iloczynach $A_0 * A_1$, $A_0 * A_2$, itd
- iloczyn $A_0 * A_0$ jest znacząco większy od innych (w jęz. ang. $A_0 * A_0 \approx 0.066$, inne iloczyny są w granicach 0.032 do 0.045

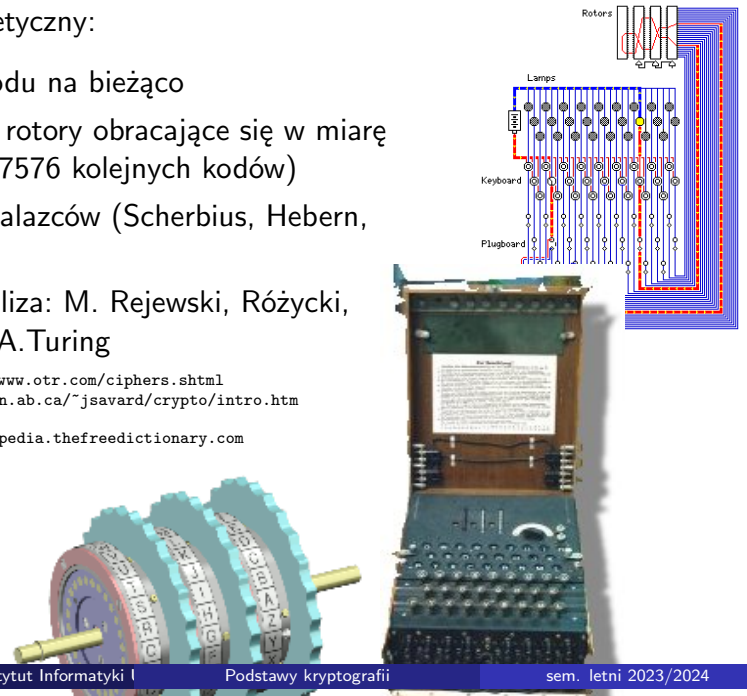
Enigma

szyfr polialfabetyczny:

- zmiana kodu na bieżąco
- Enigma – rotory obracające się w miarę pisania (17576 kolejnych kodów)
- wielu wynalazców (Scherbius, Hebern, Koch)
- kryptoanaliza: M. Rejewski, Różycki, Zygalski, A.Turing

grafika: `http://www.otr.com/ciphers.shtml`
`http://home.ecn.ab.ca/~jsavard/crypto/intro.htm`

`http://encyclopedia.thefreedictionary.com`



Enigma, kryptoanaliza

- Protokół: wybrać klucz sesyjny (3 litery), powtórzyć go dwukrotnie i zaszyfrować kluczem dziennym
  – dane: setki szyfrogramów o powyższym początku
  – klucz dzienny wyznacza permutacje $P_1, P_2, \ldots, P_6$ (i pozostałych 17570), złożenia $P_4 \circ P_1^{-1}$ i pozostałe dwa są podane implicite w danych
  – np. $ABCABC \to ENIGMA$, więc $P_4 \circ P_1^{-1}(E) = G$ itd.
  – dodatkowe podstawienie λ unieważnia dokładną znajomość permutacji $\lambda \circ P_4 \circ P_1^{-1} \circ \lambda^{-1}$
  – ale „kształt" (rozkład na cykle) permutacji jest ustalony
  – opracowano enumeratywną listę rozkładów dla 100.000 kluczy

Kryptografia nowoczesna

Zasady nowoczesnej kryptografii

- Precyzyjne definicje
- Jawne założenia systemu
- Dowody poprawności
- (Kontr)przykład: definicja wymagań dla bezpiecznego systemu kryptograficznego
  – nie da się odtworzyć klucza kryptograficznego .....
  – nie da się odtworzyć tekstu jawnego .....
  – nie da się odtworzyć żadnego fragmentu tekstu jawnego
  – nie da się uzyskać żadnej sensownej informacji .....
  – nie da się obliczyć żadnej funkcji zależącej od tekstu jawnego
- dopiero ostatnia definicja w miarę precyzyjnie opisuje wymogi dla systemu kryptograficznego

Założenia/dowody?

- Model matematyczny a świat fizyczny
  – przykład: złamanie szyfru implementowanego na karcie kryptograficznej w oparciu o analizę zużycia energii
- Jawne założenia + analiza spełnienia założeń
- Różnica pomiędzy oprogramowaniem ogólnego użytku a kryptografią
  – kto zauważa błędy systemu/implementacji?
  – kto celowo szuka błędów w systemie/implementacji?

Atak z wybranym tekstem jawnym

- Bezpieczeństwo przeciwko atakowi z kryptogramem
  – Ewa nie jest w stanie zgadnąć, która wiadomość jest zaszyfrowana na podstawie znajomości kryptogramu
- Bezpieczeństwo szyfrowania wielokrotnego
  – Ewa nie potrafi odgadnąć, który zestaw wiadomości jest szyfrowany
  – tw.: szyfrowanie musi być niedeterministyczne
- Bezpieczeństwo przeciwko atakowi z wybranym tekstem jawnym – CPA
  – założenie: Ewa ma dostęp do maszyny szyfrującej (wyrocznia – daje kryptogram dowolnej wiadomości)
  – Ewa nie potrafi odgadnąć, która wiadomość jest zaszyfrowana

Własności ataku z wybranym testem jawnym

- Twierdzenie: szyfr bezpieczny przeciwko atakowi z wybranym tekstem jawnym musi być niedeterministyczny
  – dw.: Ewa żąda od wyroczni zaszyfrowania obu wiadomości i sprawdza, która została podana jej jako wyzwanie
- Twierdzenie: atak z wybranym tekstem jawnym jest łatwiejszy niż z zestawem tekstów jawnych wybranych z góry
- Tryb asynchroniczny vs. synchronizacja
  – szyfr może odwoływać się do stanu
  – zależność od stanu może zastąpić niedeterminizm, każde szyfrowanie tej samej wiadomości da inny wynik, bo jest inny stan
  – w zasadzie rozpatrujemy szyfry nie odwołujące się do pojęcia stanu

Własności ataku z wybranym tekstem jawnym c.d.

- Klasyczne szyfry są prawie zawsze nieodporne na atak z tekstem jawnym
  – szyfr Cezara, Vigenere'a, Hilla
  – wielokrotne przykłady łamania szyfrów w praktyce (atak na Midway, „żądanie" zaszyfrowania słowa 'Midway')
- Odporność na atak z wybranym tekstem jawnym jest ważna
  – serwery odpowiadają na żądania użytkowników
  – być może są to ataki
- Tw.: odporność na atak z wybranym tekstem jawnym = odporność CPA przy wielokrotnym szyfrowaniu