

Przetwarzanie obrazów 6

- Handout

SZ 2024/2025

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki



Dr.-Ing. A. Rowińska-Schwarzweller
agnieszka.rowinska-schwarzweller@ug.edu.pl

9. Dezember 2024

Spis treści

12 Operatory morfologiczne	2
12.1 Podstawy	2
12.2 Podstawowe operacje morfologiczne dla obrazów binarnych	5
12.2.1 Erozja	5
12.2.2 Dylatacja	10
12.2.3 Przykład	11
12.2.4 Otwarcie (<i>Opening</i>)	15
12.2.5 Domknięcie (<i>Closing</i>)	16
12.3 Transformacja Hit-or-Miss ("trafi-nie trafi")	22
12.3.1 Znajdywanie punktów i obszarów charakterystycznych w obrazie	25
12.3.2 Szkieletowanie obiektów	27
12.3.3 Pocienianie obiektów (<i>Thinning</i>)	31
12.3.4 Pogrubianie obiektów (<i>Thickening</i>)	32
12.4 Inne transformacje obrazów	33
12.4.1 Top-Hat i Bottom-Hat	33
12.4.2 Transformacja odległościowa	33
12.4.3 Transformacja wododziałowa	35
12.4.4 Transformacja Woronoja	35
12.5 Gra w życie	37
12.5.1 Reguły morfologiczne	37

12

Operatory morfologiczne

Morfologia (nauka o kształcie lub formie, ang. Mathematical morphology, MM) jest w przetwarzaniu obrazu nieliniową techniką analizy struktur w obrazach i metodą wpływania na te struktury. Jest to koncepcja oparta na teorii mnogości, topologii i teorii asocjacji. Operatory morfologiczne mogą być zastosowane zarówno na obrazy binarne (ang. *binary digital image processing*), jak i obrazy w skali szarości (lub RGB). Dla obrazów w skali szarości operacje morfologiczne odpowiadają filtrom nieliniowym (minimalnemu, maksymalnemu i medianie) i posiadają przede wszystkim efekt artystyczny.

Podstawowe operacje w morfologii to dylatacja, erozja, otwarcie, domknięcie. Na podstawie tych operacji można skonstruować dalsze operacje morfologiczne.

Zastosowania:

- usuwanie szumu,
- rozszerzanie obiektów, wypełnianie dziur,
- separacja obiektów,
- „odchudzanie” obiektów poprzez szkieleutowanie
- ekstrakcja krawędzi
- ...

12.1 Podstawy

Operacje morfologiczne zmieniają kształty obiektów.

Obraz binarny

- Plany obrazu binarnego:
w obrazie binarnym $g_b(m, n) \in \{0, 1\}$ wyróżnia się (\longrightarrow grafika 12.1):
 - pierwszy plan U_1

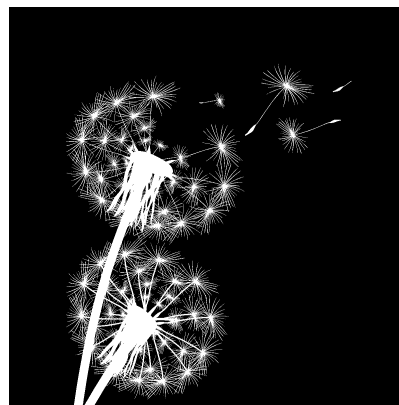
$$U_1 = \{(m, n) | g_b(m, n) = 1\}$$

– drugi plan U_2 (tło)

$$U_2 = \{(m, n) | g_b(m, n) = 0\}$$

0 → biały
1 → czarny

0 → czarny
1 → biały

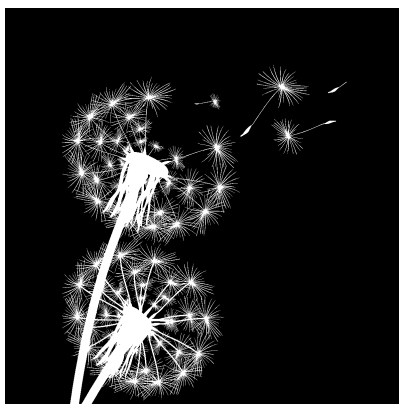


Grafika 12.1: Plany obrazu binarnego: pierwszy plan U_1 , tło U_2

- Negatyw obrazu (*complement*) $g_b^c = \neg g_b \longrightarrow$ grafika 12.2

g_b

g_b^c



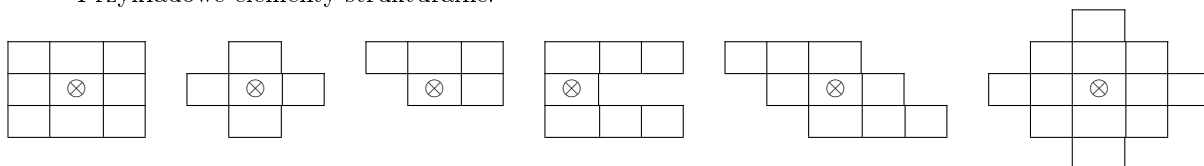
Grafika 12.2: Obraz binarny g_b i jego negatyw g_b^c

- Inne reprezentacje obrazu binarnego:
pary wartości: $(0, 255)$, $(-1, 1)$, $(\text{True}, \text{False})$

Środowisko

- Podobnie jak operacje filtrów, operacje morfologiczne uwzględniają otoczenie piksela w celu określenia jego nowej wartości.

- Środowisko piksela jest zdefiniowane przez **element strukturalny**
- Przykładowe elementy strukturalne:



Elementy strukturalne nie zawierają liczb, są układem kwadratów ze wskazanym punktem centralnym (\otimes). Punkt centralny oznacza piksel, który zostanie ustawiony na nowym obrazie.

- Notacja matrycowa dla elementu strukturalnego B :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \otimes & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \otimes & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \otimes & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Obrócenie symetryczne \tilde{B} elementu strukturalnego B względem punktu środkowego:

$$B \quad \longrightarrow \quad \tilde{B}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \otimes \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \otimes & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- W szczególnych zastosowaniach punkt centralny nie musi należeć do elementu strukturalnego:



- Wybór elementu strukturalnego zależy od problemu i powinien być oparty na istniejącej wiedzy.

Schemat działania algorytmów morfologicznych:

1. Element strukturalny B (lub jego obrócenie symetryczne \tilde{B}) jest przemieszczany po obrazie tak, by analizowany piksel był "pokryty" punktem centralnym elementu strukturalnego.
Zapis: $B_{(m,n)}$ lub $\tilde{B}_{(m,n)}$ oznacza przyłożenie elementu strukturalnego B lub odwróconego elementu strukturalnego \tilde{B} do punktu (m, n)

2. Wynik operacji morfologicznej na badanym punkcie zależy od wszystkich pikseli należących do środowiska piksela zgodnie z elementem strukturalnym B .

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	\otimes	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

12.2 Podstawowe operacje morfologiczne dla obrazów binarnych

12.2.1 Erozja

→ grafika 12.3

$$g_b(m, n) \quad g_b(m, n) \ominus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \otimes & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Grafika 12.3: Erozja

Definicja w zapisie matrycowym:

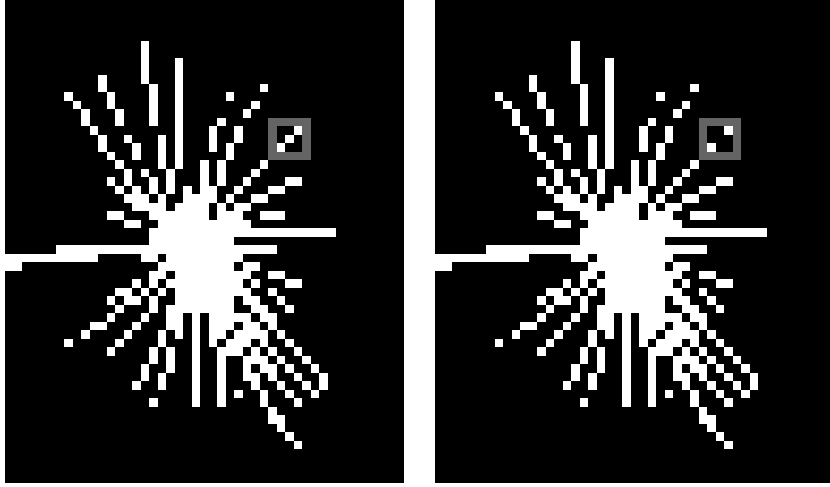
$$g_b \ominus B \equiv \{(m, n) \in U_1 \mid \tilde{B}_{(m,n)} \subseteq g_b(m, n)\}$$

Reguła dla obrazów binarnych:

- piksel (m, n) pierwszego planu staje się tłem ($= 0$), gdy odwrócony element strukturalny $\tilde{B}_{(m,n)}$ nie znajduje się całkowicie w obiekcie podlegającym erozji

(obszar o wartości piksela 1).
 \longrightarrow grafika 12.4

$$g_b(m, n) \quad g_b(m, n) \ominus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \otimes & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Grafika 12.4: Erozia pikseli pierwszego planu

Erozja $g_b(m, n) \ominus B$ obrazu $g_b(m, n)$ elementem strukturalnym B usuwa krawędzie obiektów. Jednym z rezultatów takiej operacji może być oddzielenie początkowo połączonych struktur obiektów.

Przykłady

\longrightarrow grafika 12.5

W przypadku nieokrągłego elementu strukturalnego erozja ma preferowany kierunek (\longrightarrow grafiki 12.6 i 12.7).

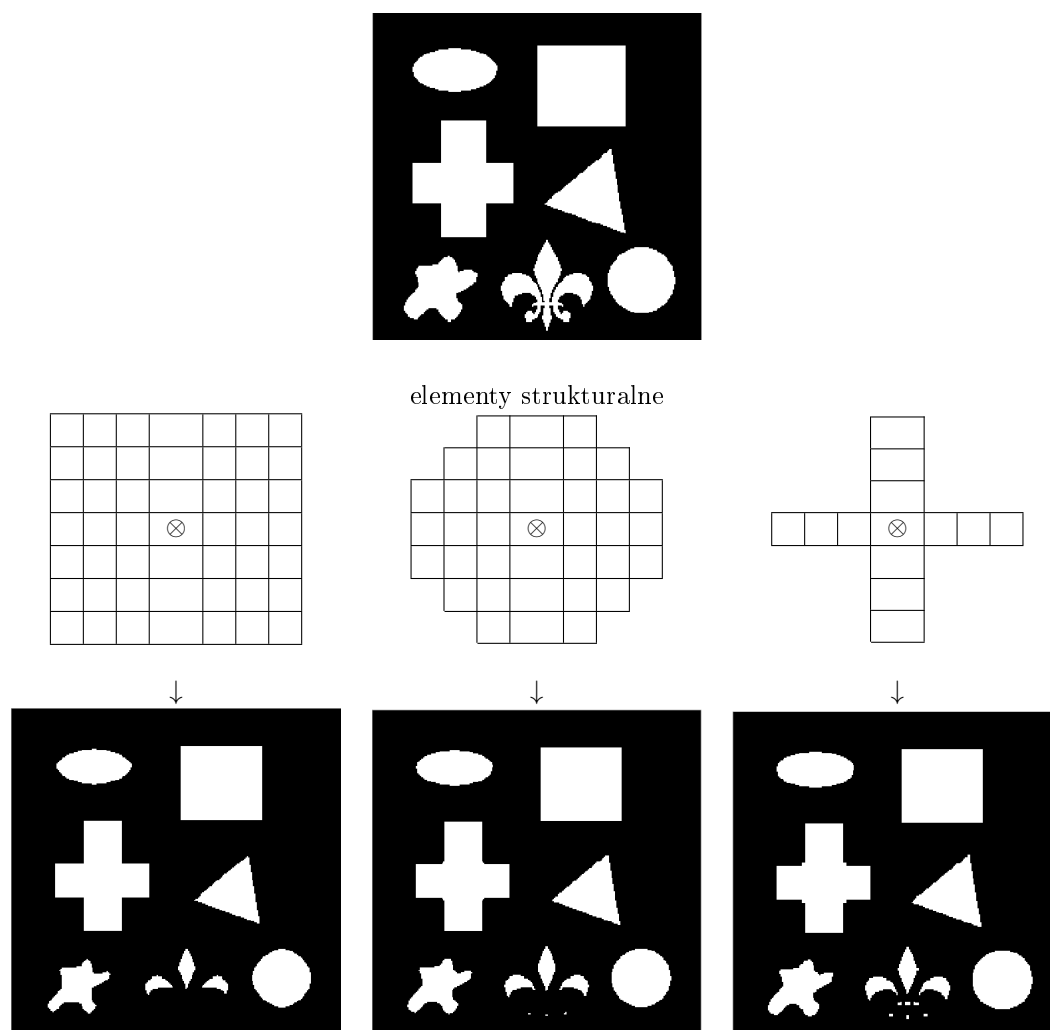
Właściwości erozji:

- erozja nie jest przemienne

$$\exists g_b, B : g_b \ominus B \neq B \ominus g_b$$

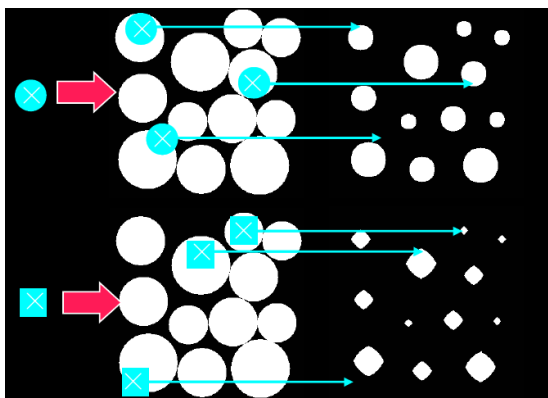
- erozja nie jest łączna

$$\exists g_b, B_1, B_2 : (g_b \ominus B_1) \ominus B_2 \neq (g_b \ominus B_2) \ominus B_1$$

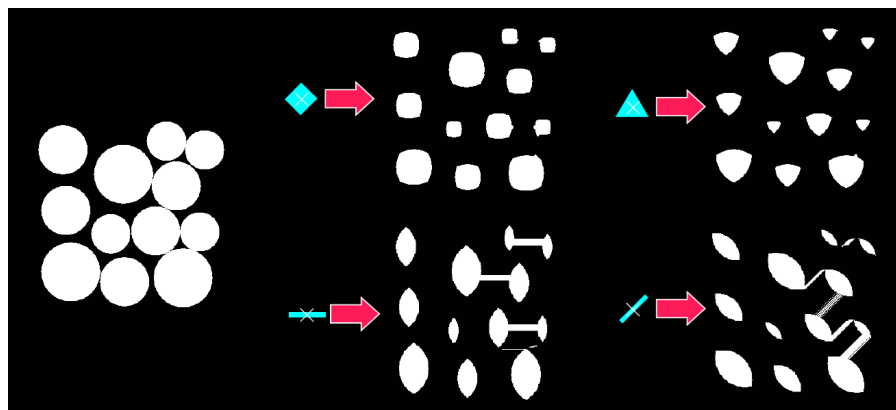


Grafika 12.5: Erozja elementami strukturalnymi o wymiarach 7×7 .

Źródło: <https://demonstrations.wolfram.com/MorphologicalOperationsInBinaryImages/>



Grafika 12.6: Erozja elementami strukturalnymi rotacyjno-symetrycznymi



Grafika 12.7: Erozja elementami strukturalnymi nierotacyjno-symetrycznymi

Zastosowanie: pocienianie obiektu (*thinning*)

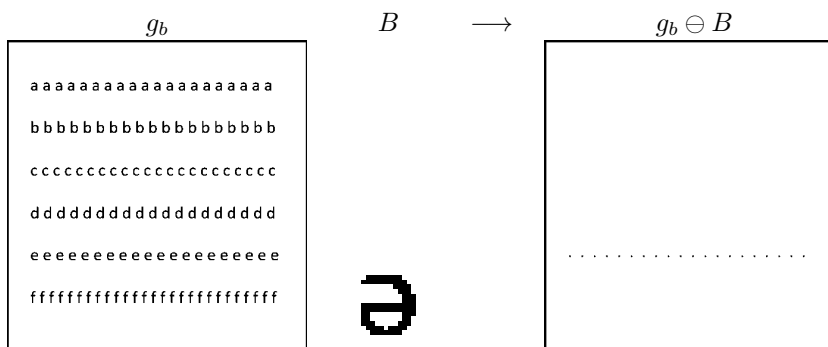
Wynikiem przeprowadzenia wielokrotnej operacji erozji obrazu jest pocienienie obiektów. \rightarrow grafika 12.8



Grafika 12.8: Pocienianie obiektu

Zastosowanie: wykrywanie obiektu

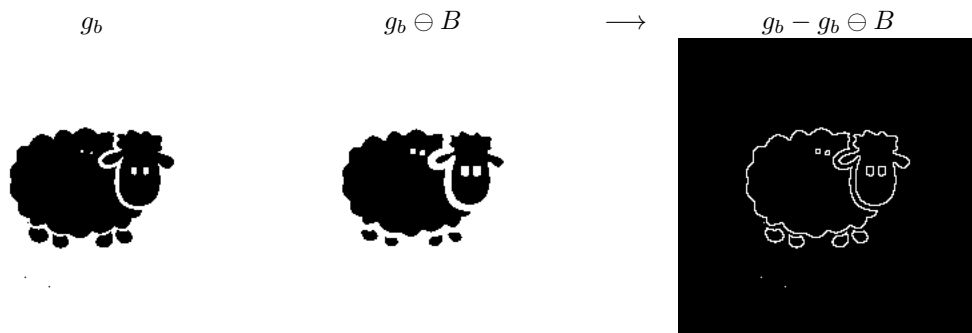
Erozja z elementem strukturalnym odpowiadającym szukanemu obiektowi wskazuje miejsca jego występowania. \rightarrow grafika 12.9



Grafika 12.9: Wykrywanie obiektu

Zastosowanie: znajdowanie konturu wewnętrznego

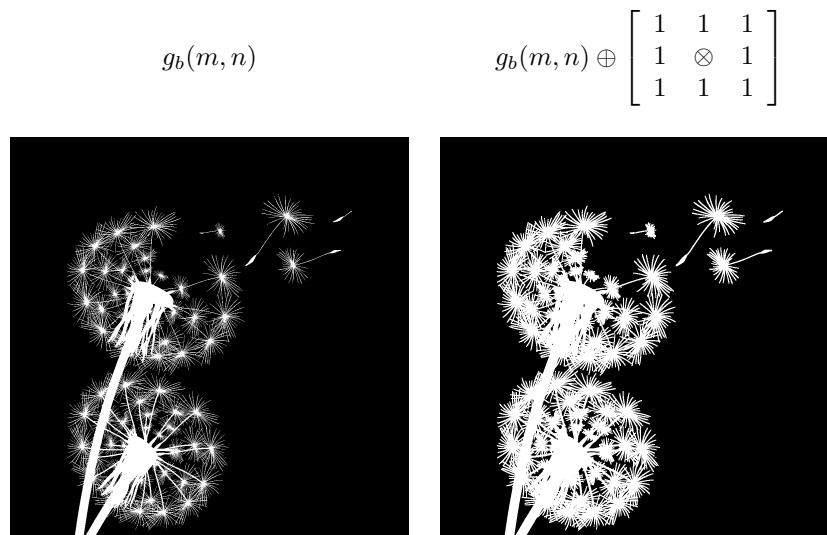
Wynikiem odejmowania erozji obrazu od oryginału jest granica wewnętrzna obiektu. \rightarrow grafika 12.10



Grafika 12.10: Znajdowanie konturu

12.2.2 Dylatacja

\longrightarrow grafika 12.11



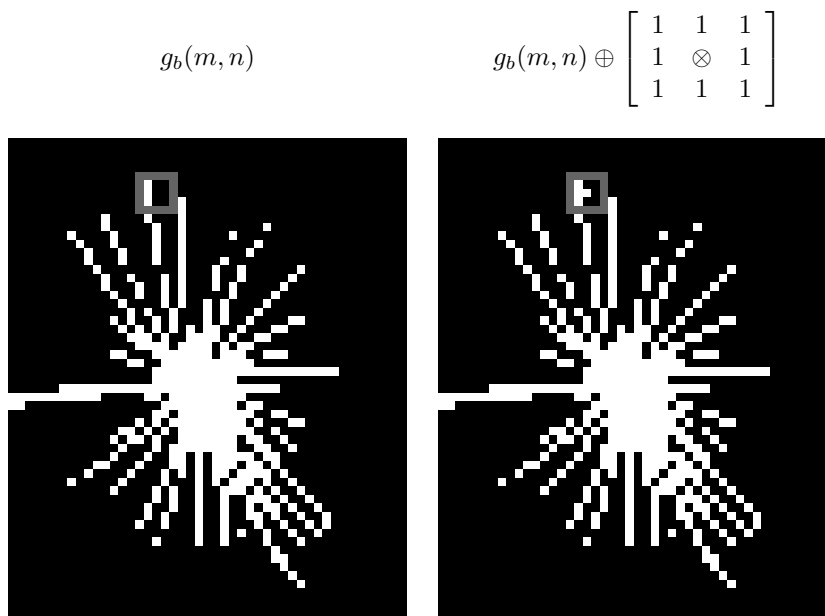
Grafika 12.11: Dylatacja

Definicja w zapisie matrycowym:

$$g_b \oplus B \equiv \{(m, n) \in U_1 \mid \tilde{B}_{(m,n)} \cap g_b(m, n) \neq \emptyset\}$$

Reguła dla obrazów binarnych:

- piksel (m, n) należy do pierwszego planu ($= 1$) w obrazie wynikowym, gdy odwrócony element strukturalny $\tilde{B}_{(m,n)}$ zawiera co najmniej jeden piksel obiektu, który ma zostać rozszerzony w obrazie wejściowym (obszar o wartości piksela 1).
 \longrightarrow grafika 12.12



Grafika 12.12: Dylatacja pikseli pierwszego planu

Dylatacja $g_b(m, n) \oplus B$ obrazu $g_b(m, n)$ elementem strukturalnym B rozszerza struktury obiektów na obrazie.

Przykłady

→ grafika 12.13

Dylatacja może prowadzić do połączenia wcześniej odrębnych obiektów. → grafika 12.14

Właściwości dylatacji:

- dylatacja jest przemienna

$$\forall g_b, B : g_b \oplus B = B \oplus g_b$$

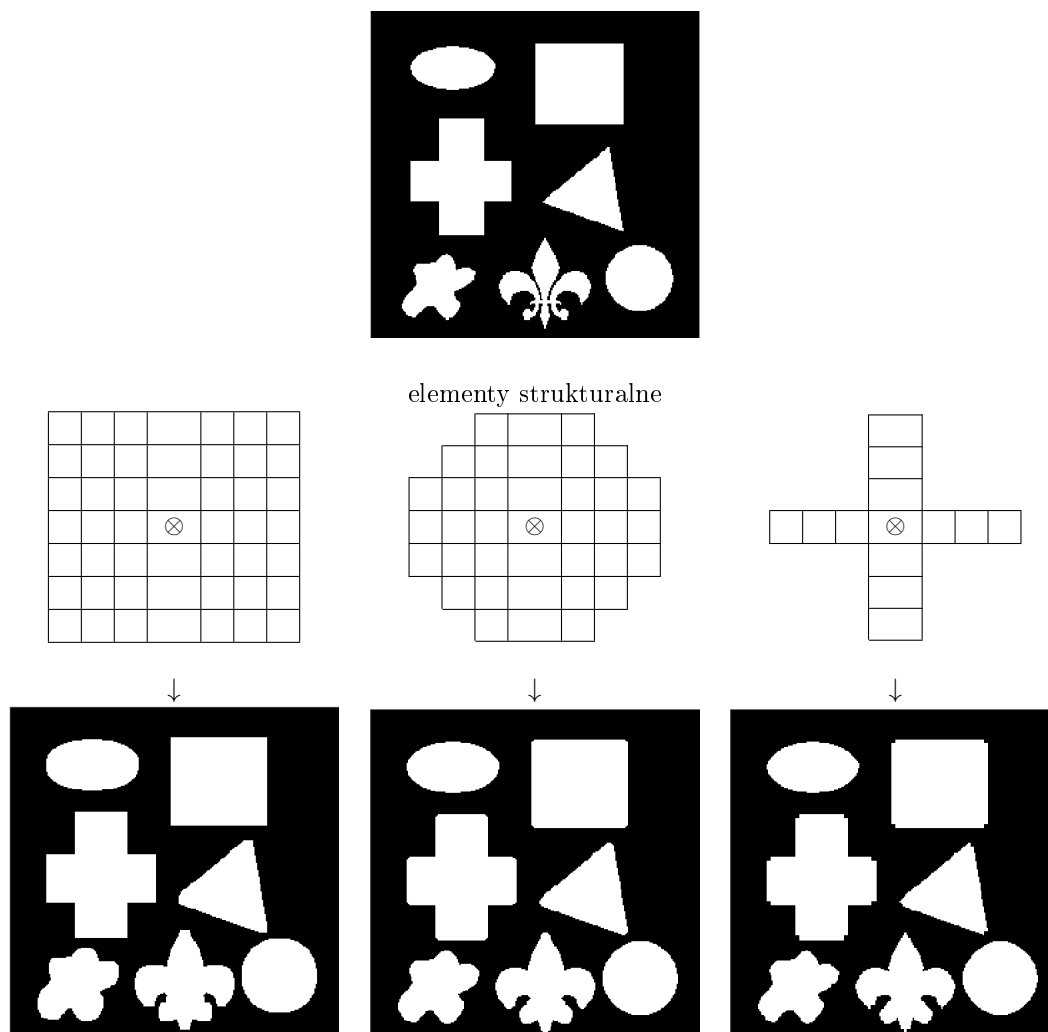
- dylatacja jest łączna

$$\forall g_b, B_1, B_2 : (g_b \oplus B_1) \oplus B_2 = (g_b \oplus B_2) \oplus B_1$$

12.2.3 Przykład

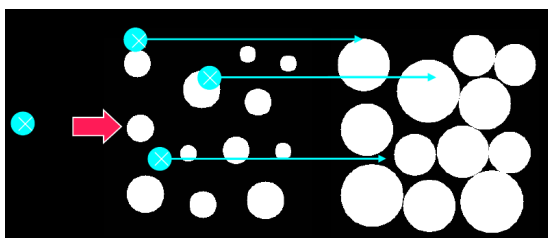
→ grafika ??

Każdy piksel znajdujący się na obrazie wejściowym jest "stemplowany" elementem strukturalnym.

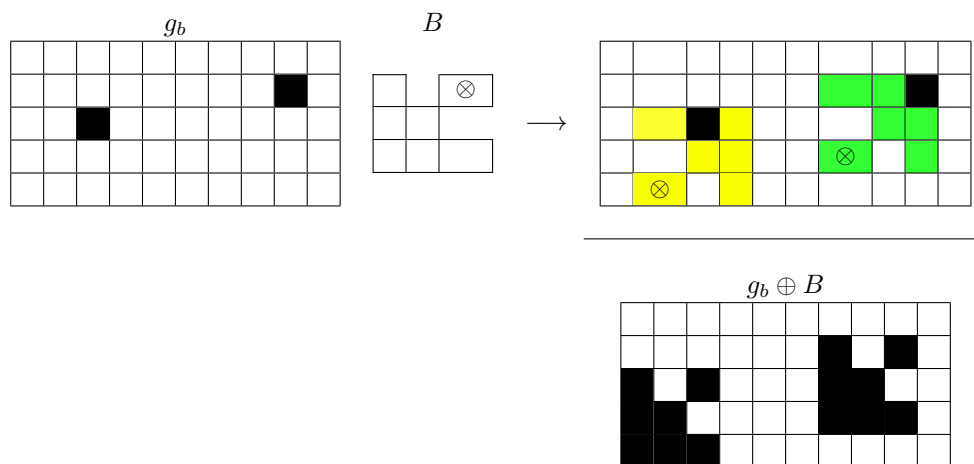


Grafika 12.13: Dylatacja elementami strukturalnymi o wymiarach 7×7 .

Źródło: <https://demonstrations.wolfram.com/MorphologicalOperationsInBinaryImages/>



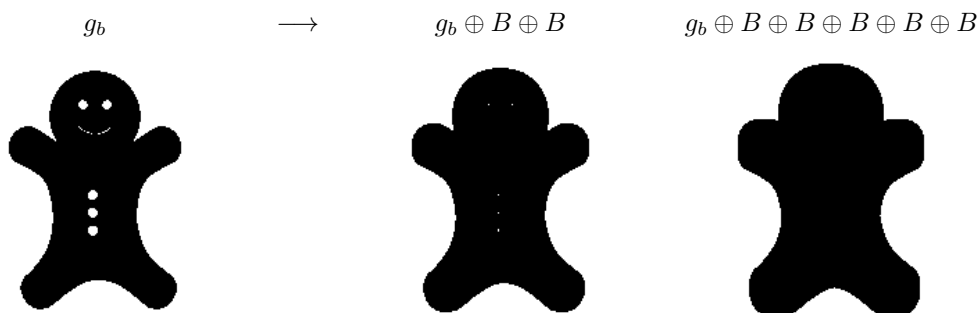
Grafika 12.14: Dylatacja elementem strukturalnym rotacyjno-symetrycznym



Grafika 12.15: "Stemplowanie" elementem strukturalnym (kontynuacja obrazu wartością 0)

Zastosowanie: pogrubienie obiektu (*thickening*)

Wynikiem przeprowadzenia wielokrotnej operacji dylatacji obrazu jest pogrubienie obiektów. \rightarrow grafika 12.16



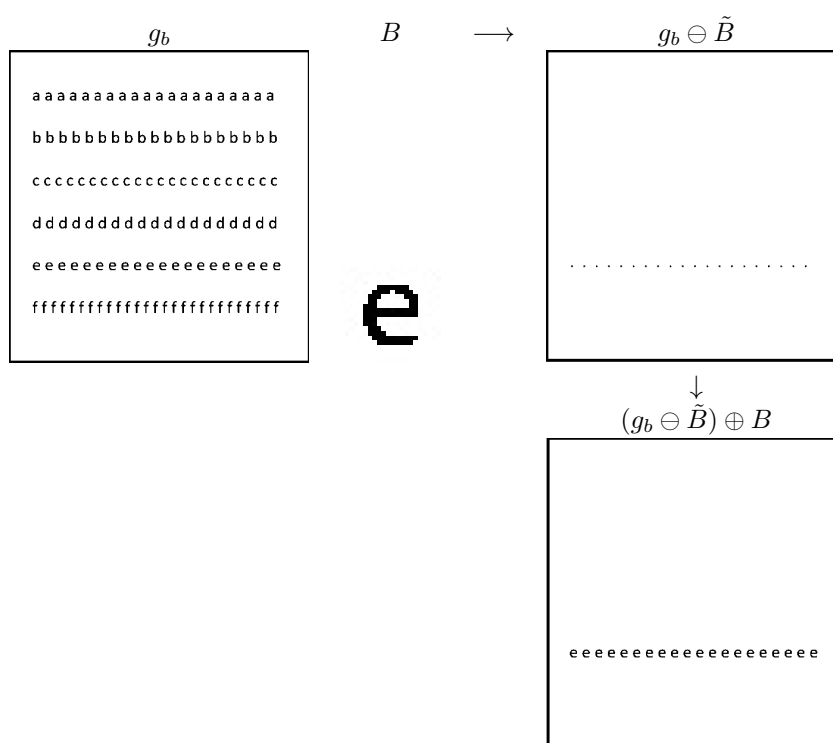
Grafika 12.16: Pogrubienie obiektu

Zastosowanie: segmentacja obiektu

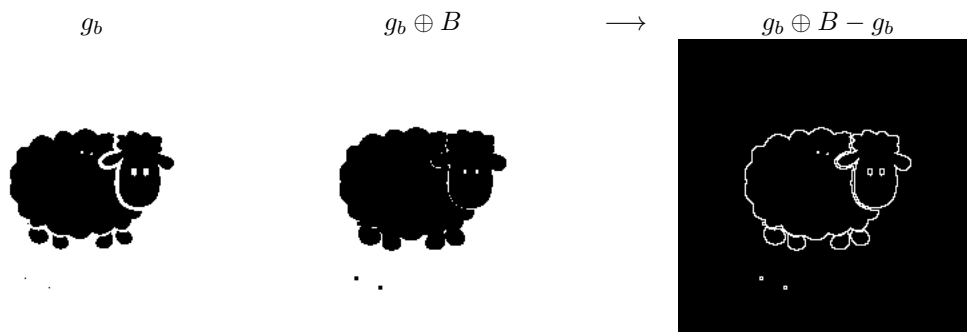
Wykrywanie obiektów za pomocą erozji, po której następuje dylatacja, pozwala uzyskać wybrane obiekty \rightarrow grafika 12.17

Zastosowanie: znajdowanie konturu zewnętrznego

Wynikiem operacji odejmowania obrazu pierwotnego od wyniku jego dylatacji jest granica zewnętrzna obiektów. \rightarrow grafika 12.18



Grafika 12.17: Segmentacja obiektu

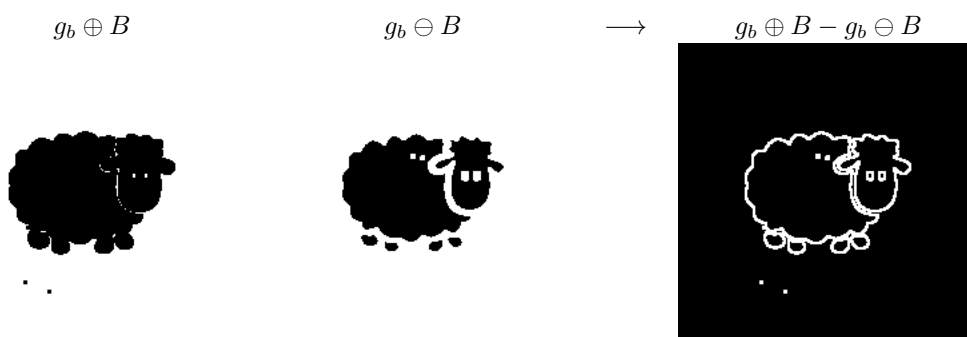


Grafika 12.18: Znajdowanie konturu

Zastosowanie: znajdowanie konturu - gradient morfologiczny

$$\text{Grad}(g_b) = (g_b \oplus B) - (g_b \ominus B)$$

→ grafika 12.19



Grafika 12.19: Znajdowanie konturu gradientem morfologicznym

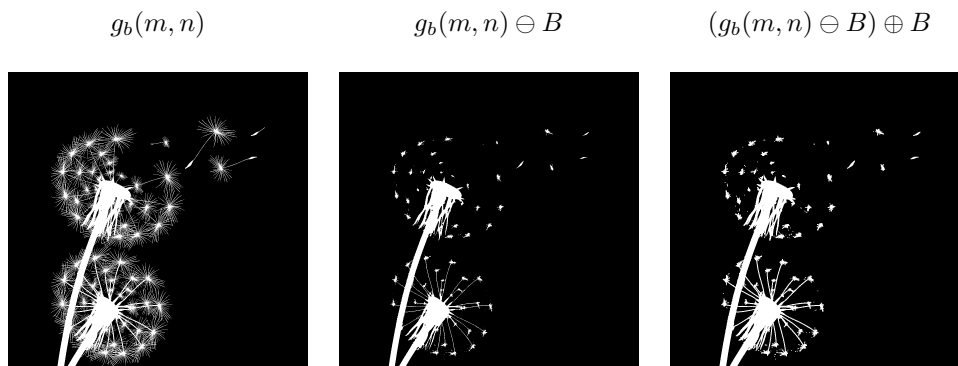
12.2.4 Otwarcie (*Opening*)

→ grafika 12.20

Definicja:

$$g_b \circ B = (g_b \ominus B) \oplus B$$

Otwarcie to wykonanie operacji dyatacji na wynik erozji obrazu wejściowego.



Grafika 12.20: Otwarcie

Przykłady

→ grafika 12.21

- Otwarcie zachowuje rozmiary obiektów obrazu przy ich jednoczesnym wygładzeniu. Otwarcie można wykorzystać do wygładzenia narożników zewnętrznych, usunięcia cienkich wstęp lub „kolców” oraz do usunięcia małych obiektów zewnętrznych. → grafika 12.22
- Otwarcie może wyodrębnić określone skierowane elementy obrazu → grafika 12.23
- Otwarcie może wyodrębnić wybrane struktury w obrazie → grafika 12.24
- Otwarcie posiada własność idempotencji

$$\begin{aligned}
 g_b \circ B &= (g_b \circ B) \circ B \\
 &= ((g_b \circ B) \circ B) \circ B \\
 &= (((g_b \circ B) \circ B) \circ B) \circ B \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Zastosowanie: granulometria

Metoda obliczania rozkładu wielkości cząstek na obrazach binarnych przy użyciu serii morfologicznych operacji otwierania elementami strukturalnymi różnych wielkości. → grafika 12.25

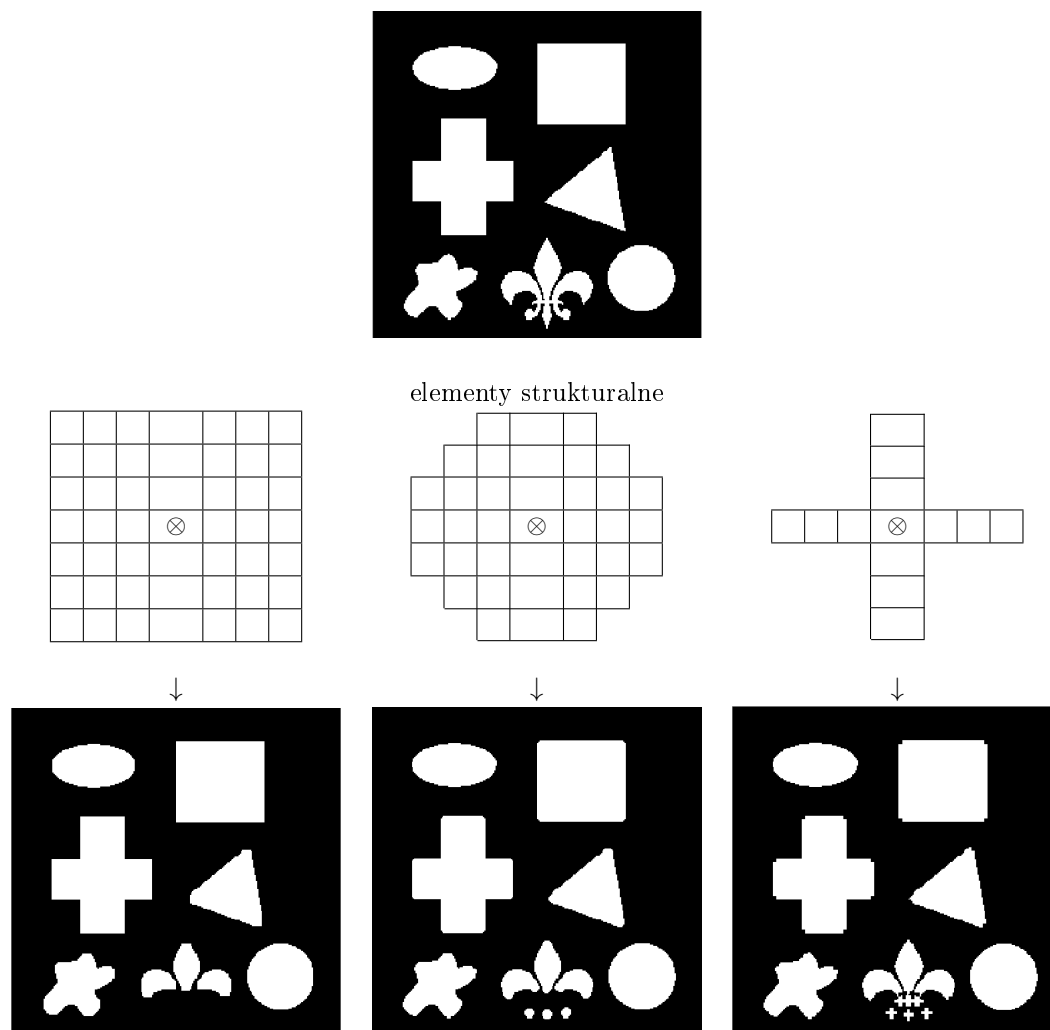
12.2.5 Domknięcie (*Closing*)

→ grafika 12.26

Definicja:

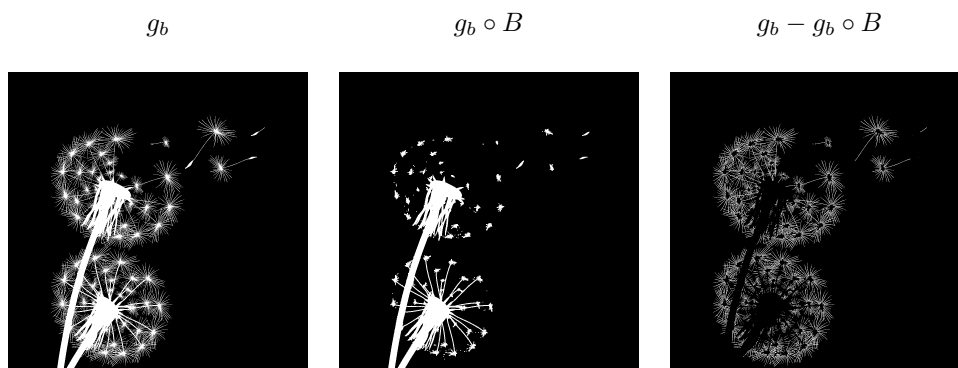
$$g_b \bullet B = (g_b \oplus B) \ominus B$$

Domknięcie to wykonanie operacji erozji na wynik dyatacji obrazu wejściowego.

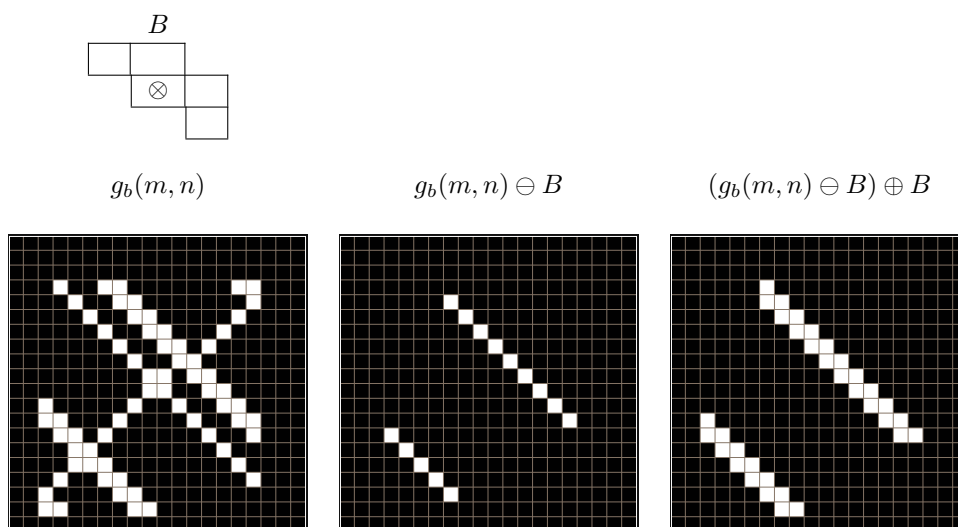


Grafika 12.21: Otwarcie elementami strukturalnymi o wymiarach 7×7 .

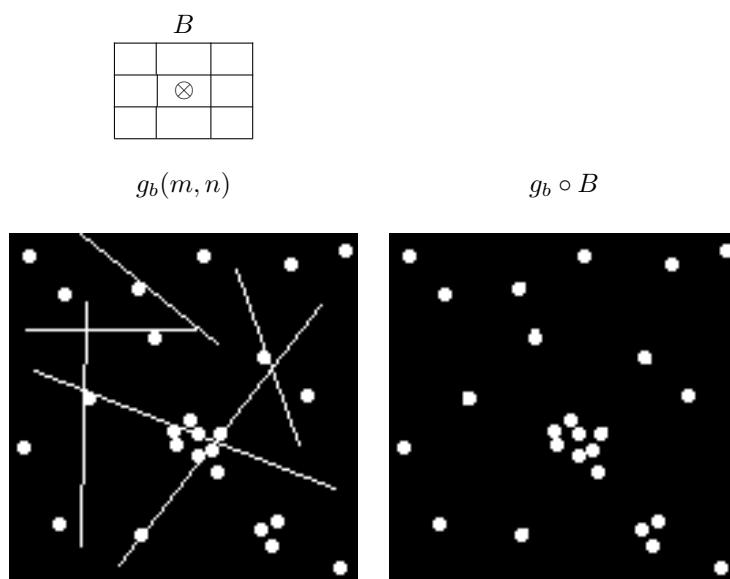
Źródło: <https://demonstrations.wolfram.com/MorphologicalOperationsInBinaryImages/>



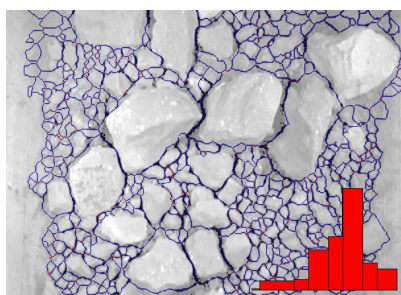
Grafika 12.22: Różnica obrazów g_b i $g_b \circ B$



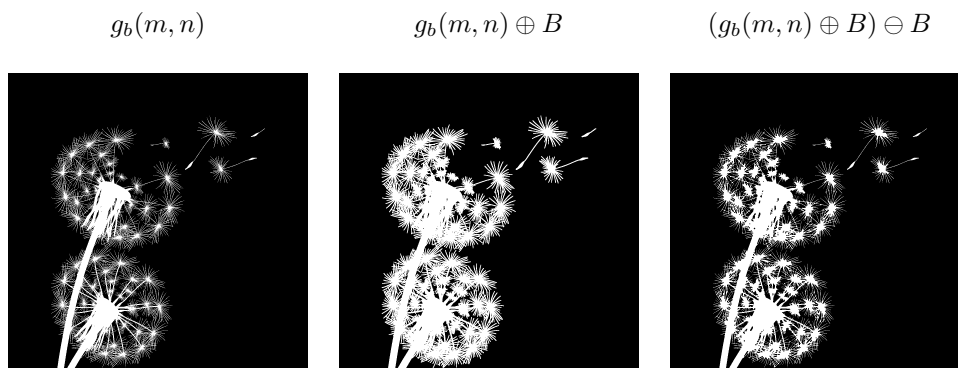
Grafika 12.23: Wyodrębnienie skierowanych elementów w obrazie



Grafika 12.24: Wyodrębnienie wybranych struktur w obrazie



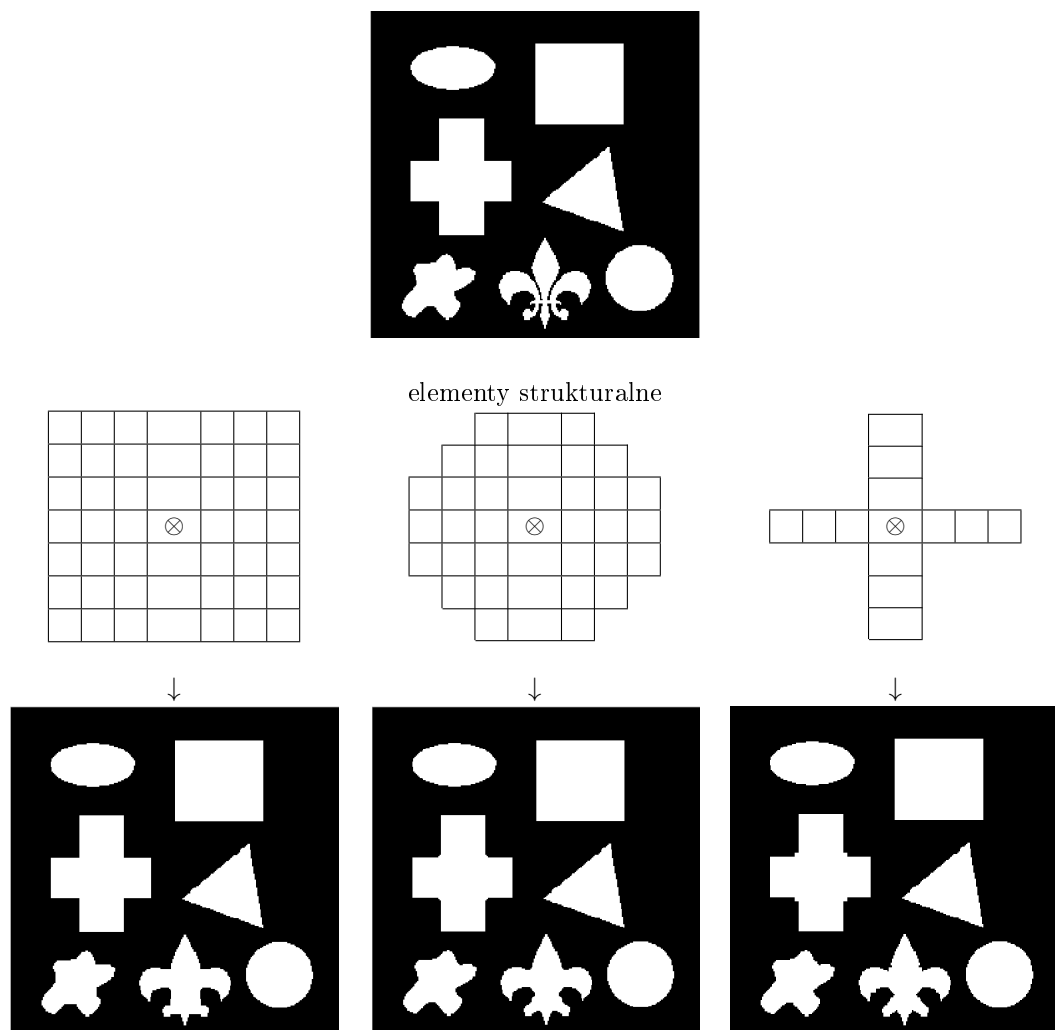
Grafika 12.25: Pomiar wielkości cząstek. Źródło: Wikimedia Commons



Grafika 12.26: Domknięcie

Przykłady

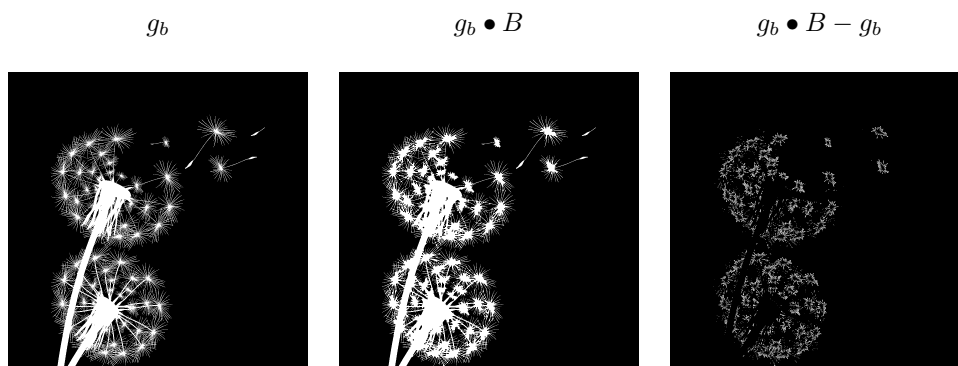
→ grafika 12.27



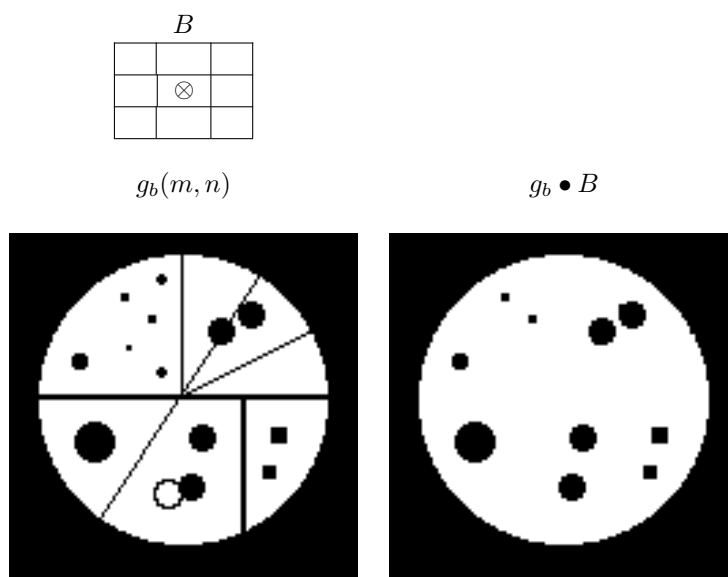
Grafika 12.27: Domknięcie elementami strukturalnymi o wymiarach 7×7 .

Źródło: <https://demonstrations.wolfram.com/MorphologicalOperationsInBinaryImages/>

- Domknięcie wygładza wewnętrzne narożniki, niweluje małe odległości między obiektami. → grafika 12.28
- Domknięcie zamyka otwory wewnętrzne i scala części obiektu, które zostały przypadkowo rozdzielone. → grafika 12.29



Grafika 12.28: Różnica obrazów $g_b \bullet B$ i g_b



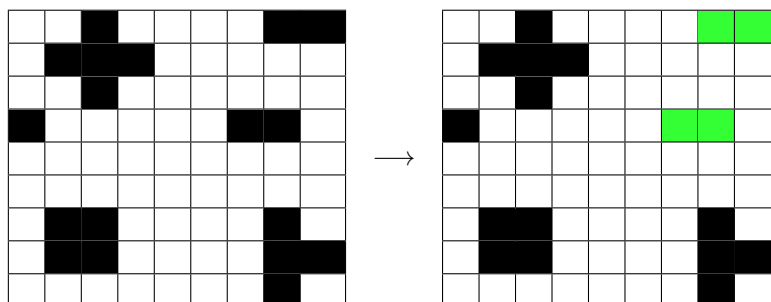
Grafika 12.29: Scalanie rozdzielonych części obiektu i zamknięcie otworów wewnętrznych poprzez domknięcie

- Domknięcie posiada własność idempotencji

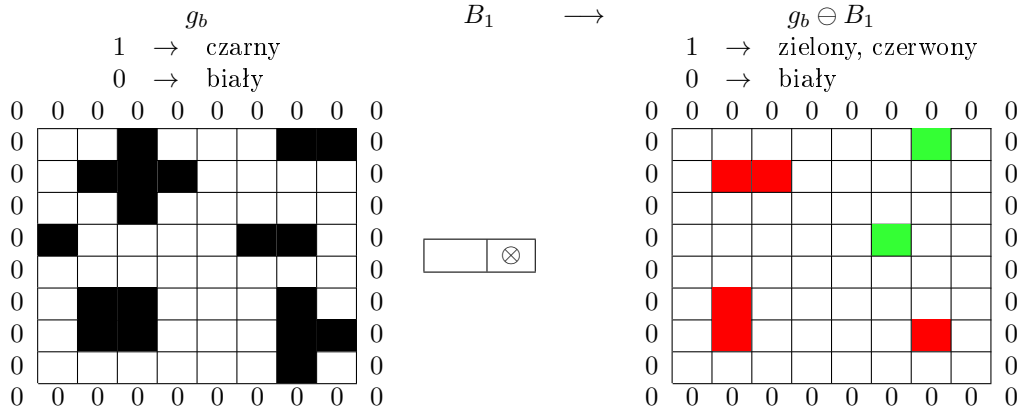
$$\begin{aligned}
 g_b \bullet B &= (g_b \bullet B) \bullet B \\
 &= ((g_b \bullet B) \bullet B) \bullet B \\
 &= (((g_b \bullet B) \bullet B) \bullet B) \bullet B \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

12.3 Transformacja Hit-or-Miss ("trafi-nie trafi")

- Cel:
Identyfikacja (z tolerancją) wzorów pikseli występujących na obrazie,
np. linii o długości od ... do ...

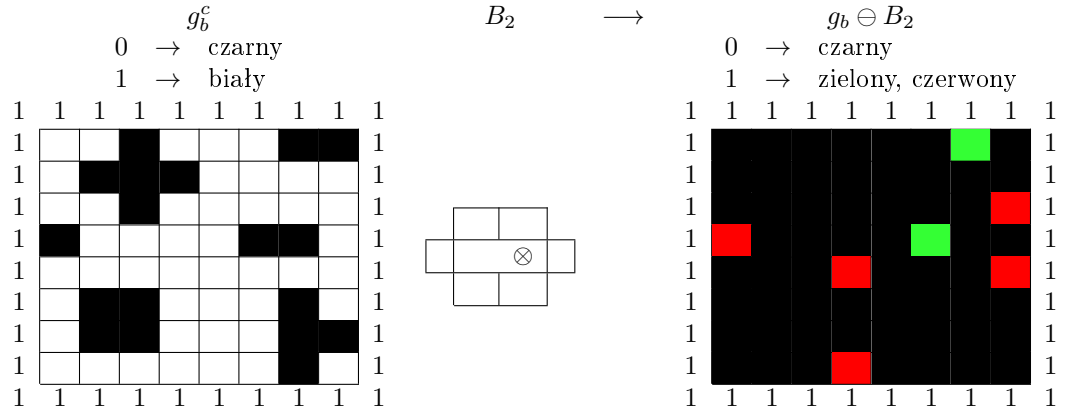


- Pomysł:
część wspólna zbiorów
 1. erozji obrazu g_b za pomocą elementu strukturalnego (pozytywnej maski) B_1 w celu wyeliminowania wszystkich zbyt małych obszarów pierwszego planu (transformacja **Hit**)

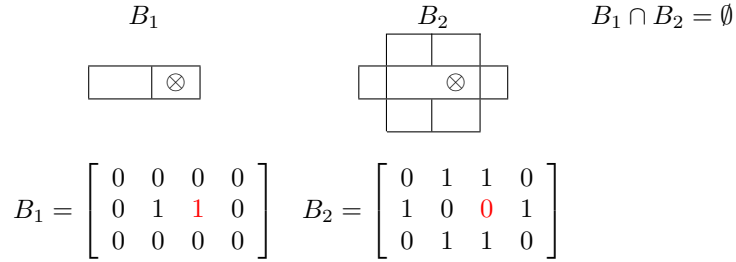


2. erozji negatywu obrazu g_b^c za pomocą elementu strukturalnego (negatywnej maski, konturu) B_2 w celu wyeliminowania zbyt dużych obszarów pierwszego

planu (transformacja **Miss**)



3. elementy strukturalne B_1, B_2 spełniają warunek $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.



Para $B = (B_1, B_2)$ jest nazywana **złożonym elementem strukturalnym** (*composite structuring element*).

Przykład 1:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 2:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definicja:

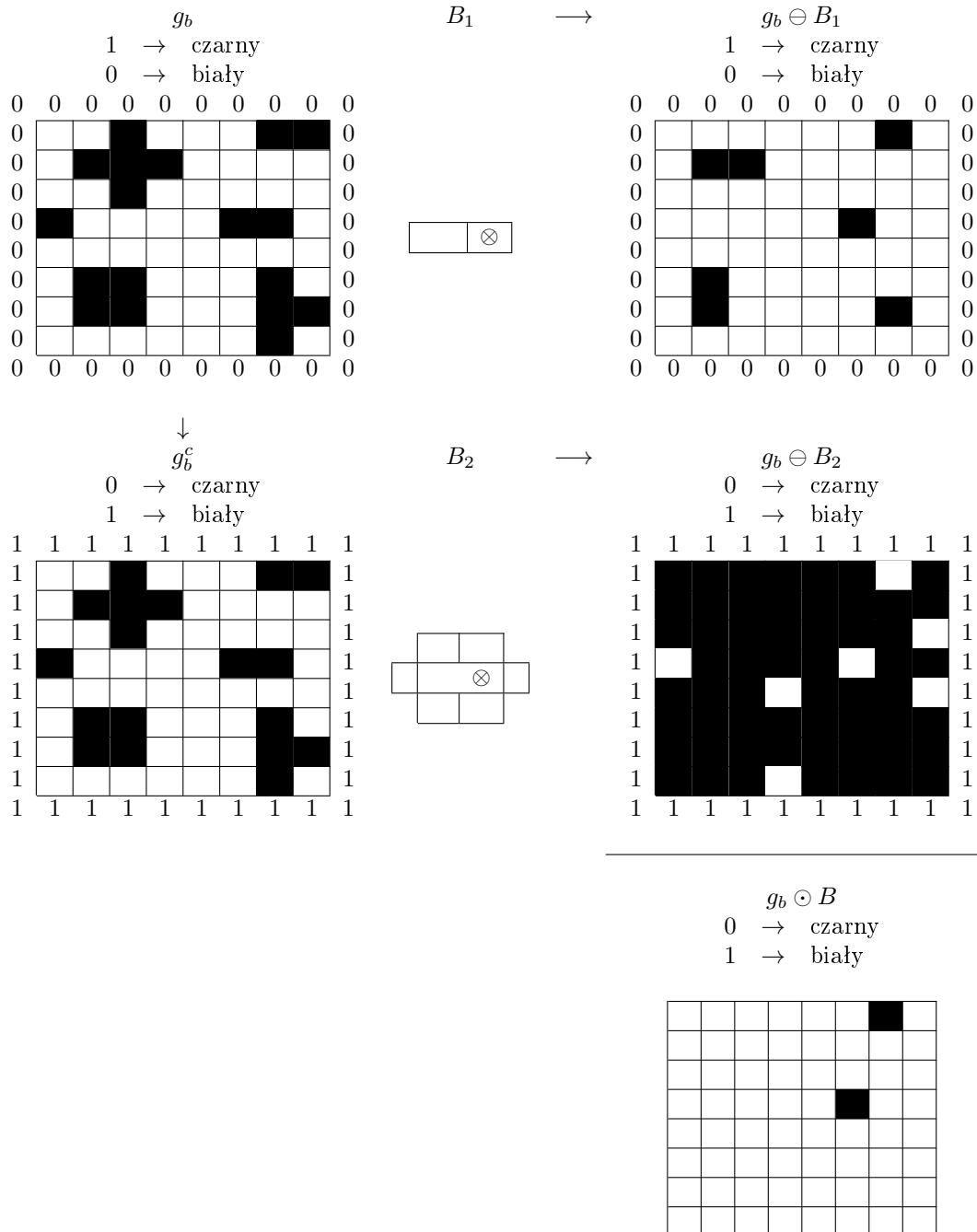
$$g_b \odot B = (g_b \ominus B_1) \cap (g_b^c \ominus B_2)$$

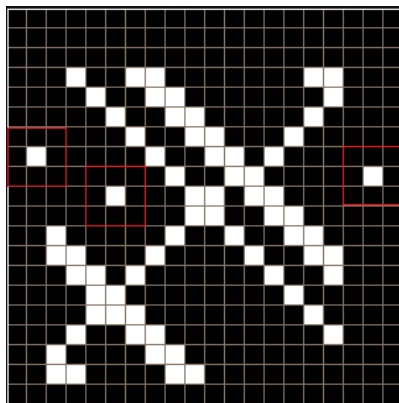
gdzie $B = (B_1, B_2)$.

Punkt (m, n) w g_b należy do wyniku transformacji Hit-or-Miss, jeśli B_1 w punkcie (m, n) pasuje do g_b , a B_2 w punkcie (m, n) nie pasuje do g_b (pasuje do tła g_b^c).

Przykład:

Szukanie wzorca $[1, 1]$ w obrazie g_b
(z kontynuacją krawędzi w g_b do 0 i g_b^c do 1).





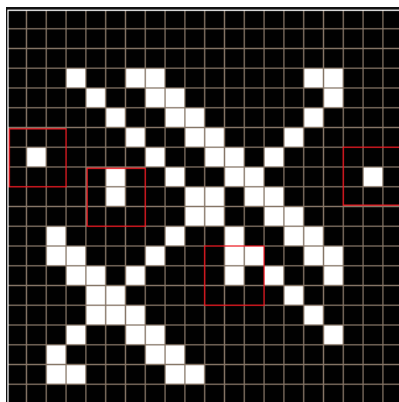
Grafika 12.30: Punkty izolowane

Punkty końcowe

Element strukturalny znajdujący dolne punkty końcowe (**endpixels**) :

$$B_{HoM} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \textcolor{red}{1} & 0 \\ \hline \star & \star & 0 \\ \hline \end{array}$$

→ grafika 12.31



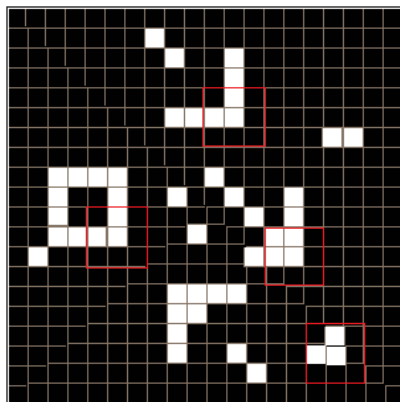
Grafika 12.31: Znajdywanie dolnych punktów końcowych

Rogi obiektów

Element strukturalny znajdujący prawy dolny róg obiektu:

$$B_{HoM} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \textcolor{red}{1} & 1 \\ \hline 0 & 1 & \star \\ \hline \end{array}$$

→ grafika 12.32



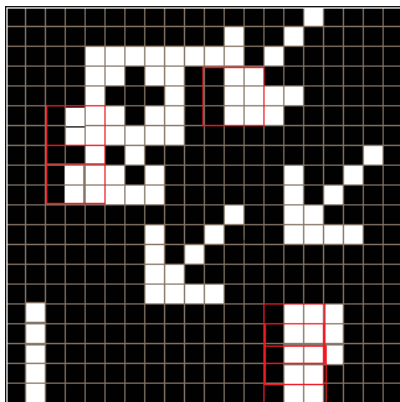
Grafika 12.32: Znajdywanie prawego dolnego rogu obiektu

Krawędzie obiektów

Element strukturalny znajdujący lewą krawędź obiektu i zachowujący połączenie krawędzi:

$$B_{HoM} = \begin{bmatrix} 1 & \star & 0 \\ 1 & \textcolor{red}{1} & 0 \\ 1 & \star & 0 \end{bmatrix}$$

→ grafika 12.33



Grafika 12.33: Znajdywanie lewej krawędzi obiektu

12.3.2 Szkieletowanie obiektów

→ grafika 12.34

- Redukcja obszarów pierwszego planu do linii przy zachowaniu ważnych cech topologicznych (np. połączenia, dziury)
- Szkielet biegnie po środku obiektu
- Zastosowanie do opisywania regionów, dla których istotna jest obecność „linii”, ale nie ich szerokość, np. rozpoznawanie dróg, gestów, znaków (optyczne rozpoznawanie znaków, *optical character recognition*, OCR)
- Realizacja poprzez kombinację prostych operacji morfologicznych i operacji arytmetycznych na obrazie



Grafika 12.34: Szkieletowanie obiektu

Szkieletowanie poprzez kontrolowany proces erozji

→ erozja obrazu do momentu, gdy obiekty pierwszego planu będą miały szerokość 1 piksela. Erozji ulegają wyłącznie te piksele obiektu, które mają więcej niż 2 sąsiadów. Przykład: algorytm Zhang i Suen "A Fast Parallel Algorithm for Thinning Digital Patterns" (zaimplementowany w ImageJ).

Szkieletyzacja – kroki:

- wielokrotne usunięcie pikseli pierwszego planu, aż wyłącznie szkielet będzie pierwszym planem
- usunięcie jedynie punktów nienależących do szkieletu
- identyfikacja typowych wzorów pikseli dla linii szkieletowych (końce, rozgałęzienia linii o szerokości 1 piksela)
- identyfikacja typowych wzorów pikseli (końcówki, rozgałęzienia) dla linii o większej szerokości
- transformacja Hit-or-Miss z odpowiednimi elementami strukturalnymi (wzorami pikseli) w celu zidentyfikowania "zbyt szerokich" obszarów

- usunięcie znalezionych pozycji z obrazu

A Fast Parallel Algorithm for Thinning Digital Patterns (T.Y.Zhang, C.Y.Suen)

Szkic:

Iteracja sekwencji dwóch subiteracji, dopóki nie będzie można usunąć więcej pikseli pierwszego planu:

1. Subiteracja:

- piksel pierwszego planu P_1 zostaje usunięty, jeżeli spełnione są warunki

element strukturalny

P_9	P_2	P_3
P_8	P_1	P_4
P_7	P_6	P_5

$$a) \quad 2 \leq B(P_1) \leq 6$$

$$b) \quad A(P_1) = 1$$

$$c) \quad P_2 \cdot P_4 \cdot P_6 = 0$$

$$d) \quad P_4 \cdot P_6 \cdot P_8 = 0$$

gdzie

$$B(P_1) = \sum_{i=2}^9 P_i$$

$A(P_1)$: liczba sekwencji 01 w ciągu

P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Interpretacja warunków a) – d) usunięcia piksela P_1 :

$$a) \quad 2 \leq B(P_1) \leq 6$$

→ zachowanie punktów końcowych szkieletu

$$b) \quad A(P_1) = 1$$

0	0	1
1	P_1	0
1	0	0

$$A(P_1) = 2$$

0	1	0	0	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

→ zapobiega usunięciu punktów znajdujących się pomiędzy punktami końcowymi szkieletu

c), d)

		\mathcal{N}	
\mathcal{W}	P_8	P_1	P_4
		P_6	
		\mathcal{S}	

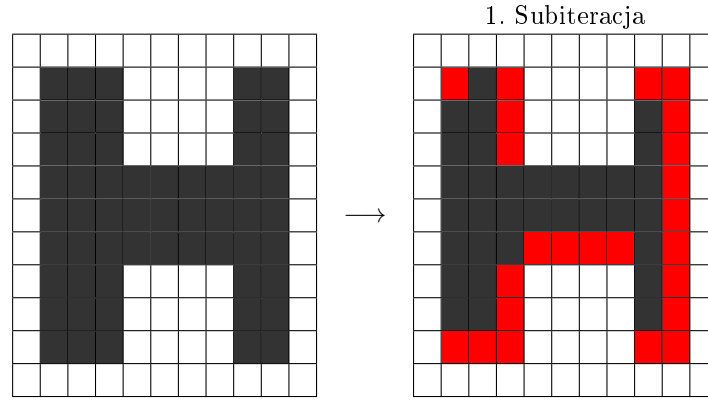
$$c) \quad P_2 \cdot P_4 \cdot P_6 = 0$$

$$d) \quad P_4 \cdot P_6 \cdot P_8 = 0$$

$$\rightarrow P_4 = 0 \vee P_6 = 0 \vee (P_2 = 0 \wedge P_8 = 0)$$

→ punkt P_1 , który ma być usunięty, może być punktem granicznym w kierunku \mathcal{E} lub \mathcal{S} albo punktem narożnym \mathcal{N} - \mathcal{W}

Przykład:



2. Subiteracja:

- piksel pierwszego planu P_1 zostaje usunięty, jeżeli spełnione są warunki

element strukturalny

P_9	P_2	P_3
P_8	P_1	P_4
P_7	P_6	P_5

$$a) \quad 2 \leq B(P_1) \leq 6$$

$$b) \quad A(P_1) = 1$$

$$c') \quad P_2 \cdot P_4 \cdot P_8 = 0$$

$$d') \quad P_2 \cdot P_6 \cdot P_8 = 0$$

gdzie

$$B(P_1) = \sum_{i=2}^9 P_i$$

$A(P_1)$: liczba sekwencji 01 w ciągu

P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Interpretacja warunków $c')$ – $d')$ usunięcia piksela P_1 :

$c'), d')$

\mathcal{N}				
		P_2		
\mathcal{W}	P_8	P_1	P_4	\mathcal{E}
		P_6		
		\mathcal{S}		

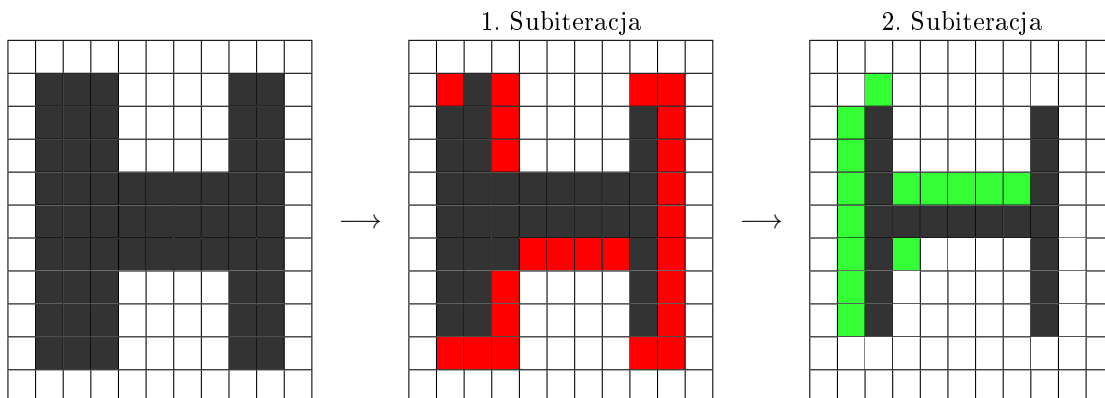
$$c') \quad P_2 \cdot P_4 \cdot P_8 = 0$$

$$d') \quad P_2 \cdot P_6 \cdot P_8 = 0$$

$$\longrightarrow P_2 = 0 \vee P_8 = 0 \vee (P_4 = 0 \wedge P_6 = 0)$$

\longrightarrow punkt P_1 , który ma być usunięty, może być punktem granicznym w kierunku \mathcal{N} lub \mathcal{W} albo punktem narożnym \mathcal{S} - \mathcal{E}

Przykład:



→ pocienianie obiektów (rozdział 12.3.3)

12.3.3 Pocienianie obiektów (*Thinning*)

Elementy strukturalne służące do identyfikacji "zbyt szerokich" obszarów:

$$\begin{array}{cccc}
 M_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & M_p = \begin{bmatrix} 1 & \star & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \star & 0 \end{bmatrix} & M_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & M_l = \begin{bmatrix} 0 & \star & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \star & 1 \end{bmatrix} \\
 M_{gp} = \begin{bmatrix} \star & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} & M_{dp} = \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & 0 \end{bmatrix} & M_{dl} = \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \star \end{bmatrix} & M_{gl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Thinning:

powtarzanie sekwencji 8 transformacji typu Hit-or-Miss jedna po drugiej (4 równoległe do osi i 4 ukośne), aby usunąć pozycje krawędzi bez naruszania połączeń (zachowanie topologii)

Thinning: procedura

→ w każdym kroku:

dla każdej z 8 masek Hit-or-Miss M_i (kolejno):

1. transformacja Hit-or-Miss: $g_b \odot M_i$
2. usunięcie pasujących obszarów z g_b : $g_b - g_b \odot M_i$

→ procedura kończy się, jeżeli w jednym kroku (po zastosowaniu wszystkich 8 transformacji Hit-or-Miss) żaden piksel nie został zmieniony

Thinning: zastosowania

- szkieletyzacja
- po wykryciu obszarów brzegowych (np. filtrem Sobela): ścięcenie brzegów



Grafika 12.35: Przetwarzanie wstępne OCR (optical character recognition): (a) obraz oryginalny, (b) konwersja do odcieni szarości, (c) binaryzacja, (d) pocienianie i szkielerowanie, (e) redukcja szumu

Źródło: Choudhary, Rishi, Savita *A New Character Segmentation Approach for Off-Line Cursive Handwritten Words. PCS*

- rozpoznawanie znaków (*optical character recognition*, OCR, grafika 12.35)

Problemy:

- wrażliwy na drobne zakłócenia, np. szum, niedokładności binaryzacji
- szkielek zawiera krótkie przedłużenia na końcach

12.3.4 Pogrubianie obiektów (*Thickening*)

Wypełnianie wklęsłych obszarów krawędzi poprzez wielokrotne zastosowanie sekwencji 8 transformacji typu Hit-or-Miss, np.

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{bmatrix} \star & \star & 0 \\ 1 & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & M_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ \star & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & M_3 &= \begin{bmatrix} 1 & \star & 0 \\ 1 & 0 & \star \\ 1 & 1 & \star \end{bmatrix} & M_4 &= \begin{bmatrix} 0 & \star & 1 \\ \star & 0 & 1 \\ \star & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 M_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \star \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix} & M_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & 1 \\ 0 & \star & \star \end{bmatrix} & M_7 &= \begin{bmatrix} \star & 1 & 1 \\ \star & 0 & 1 \\ 0 & \star & 1 \end{bmatrix} & M_8 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \star \\ 1 & 0 & \star \\ 1 & \star & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

12.4 Inne transformacje obrazów

12.4.1 Top-Hat i Bottom-Hat

Transformacja oparta na otwarciu lub domknięciu:

- **white Top-Hat** jest oparta na operacji otwarcia:

$$T_w(g_b) = g_b - g_b \circ B$$

→ grafika 12.22

Transformacja white Top-Hat zwraca obraz zawierający „obiekty” lub „elementy” obrazu wejściowego, które:

- są „mniejsze” od elementu strukturalnego oraz
- są jaśniejsze od otoczenia.

- **black Top-Hat** (lub **Bottom-Hat**) jest oparta na operacji domknięcia:

$$T_b(g_b) = g_b \bullet B - g_b$$

→ grafika 12.28

Transformacja black Top-Hat zwraca obraz zawierający „obiekty” lub „elementy” obrazu wejściowego, które:

- są „mniejsze” niż element strukturalny oraz
- są ciemniejsze niż ich otoczenie.

Rozmiar lub szerokość elementów wyodrębnianych w wyniku transformacji typu Top-Hat można kontrolować, wybierając odpowiedni element strukturalny.

12.4.2 Transformacja odległościowa

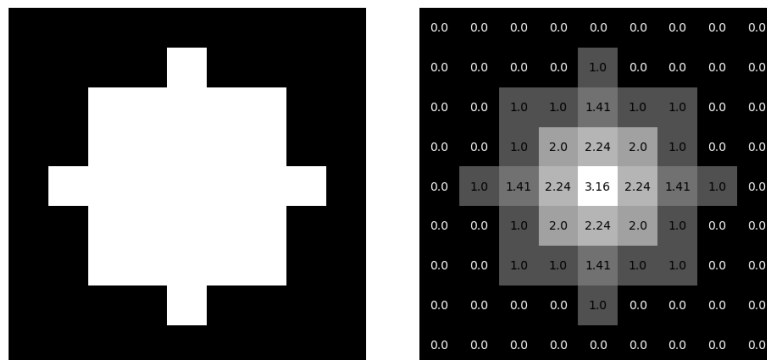
Transformacja odległościowa (*distance transform*, *Euclidian distance map*, *EDM*) zastępuje każdy piksel obrazu binarnego odległością do najbliższego piksela tła. Jeśli piksel należy do tła, nowa wartość wynosi zero. Rezultatem transformacji jest obraz zwany mapą odległości. → grafika 12.36

Zastosowanie: erozja obrazu

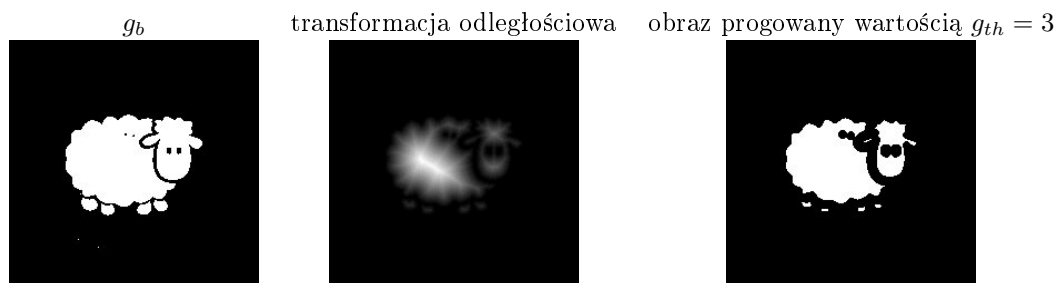
→ grafika 12.37

Zastosowanie: dylatacja obrazu

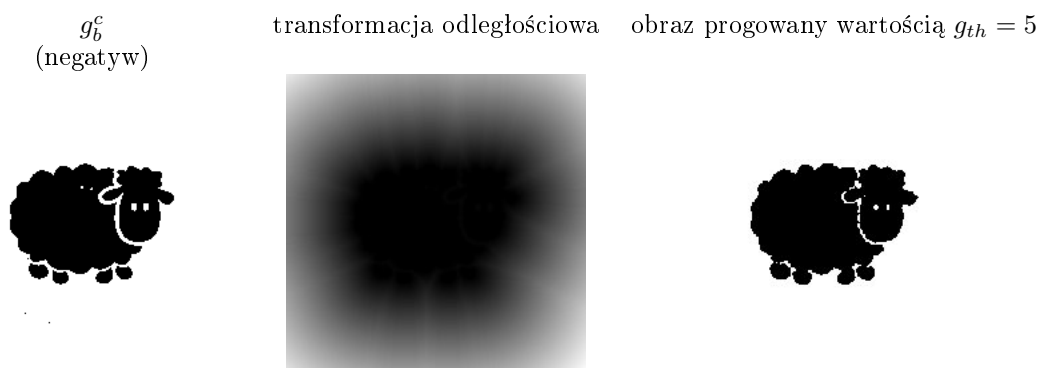
→ grafika 12.38



Grafika 12.36: Obraz binarny i odpowiadająca mu mapa odległości z naniesionymi wartościami pikseli (odległością do najbliższego piksela tła)



Grafika 12.37: Implementacja erozji obrazu binarnego poprzez progowanie mapy odległości



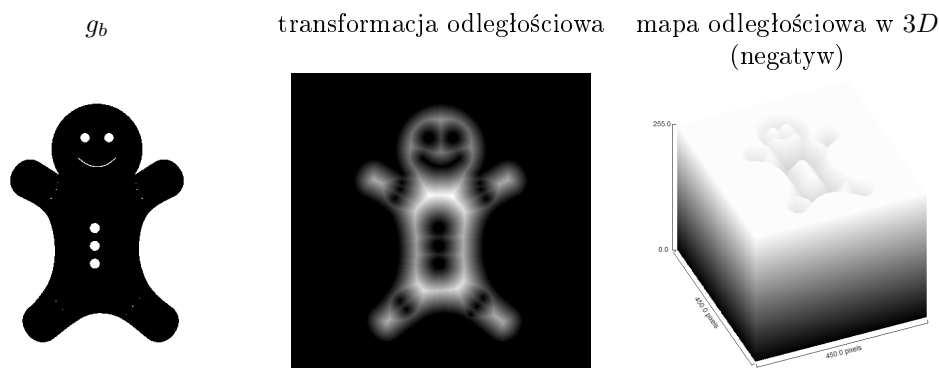
Grafika 12.38: Implementacja dylatacji obrazu binarnego poprzez progowanie mapy odległości

12.4.3 Transformacja wododziałowa

Transformacja wododziałowa (*watershed transform*, *WST*) to metoda automatycznej segmentacji w przetwarzaniu obrazu.

Pomysł:

Wartość szarości na mapie odległości jest interpretowana jako informacja o wysokości (górze). W miarę sukcesywnego zalewania gór pomiędzy sąsiednimi zbiornikami tworzą się działy wodne. → grafika 12.39.



Grafika 12.39: Wizualizacja mapy odległości obrazu binarnego

Algorytm transformacji:

1. obliczenie mapy odległości (EDM)
2. wyznaczenie wartości maksymalnych $M_i, i \in \{1, \dots, n\}$ (szczyty lub lokalne maksima) w mapie odległości
3. wielokrotna dyatacja każdego wyznaczonego punktu M_i - do momentu osiągnięcia krawędzi obiektu, albo do momentu, gdy krawędź dotknie obszaru innego (rosnącego) M_j

→ grafika 12.40

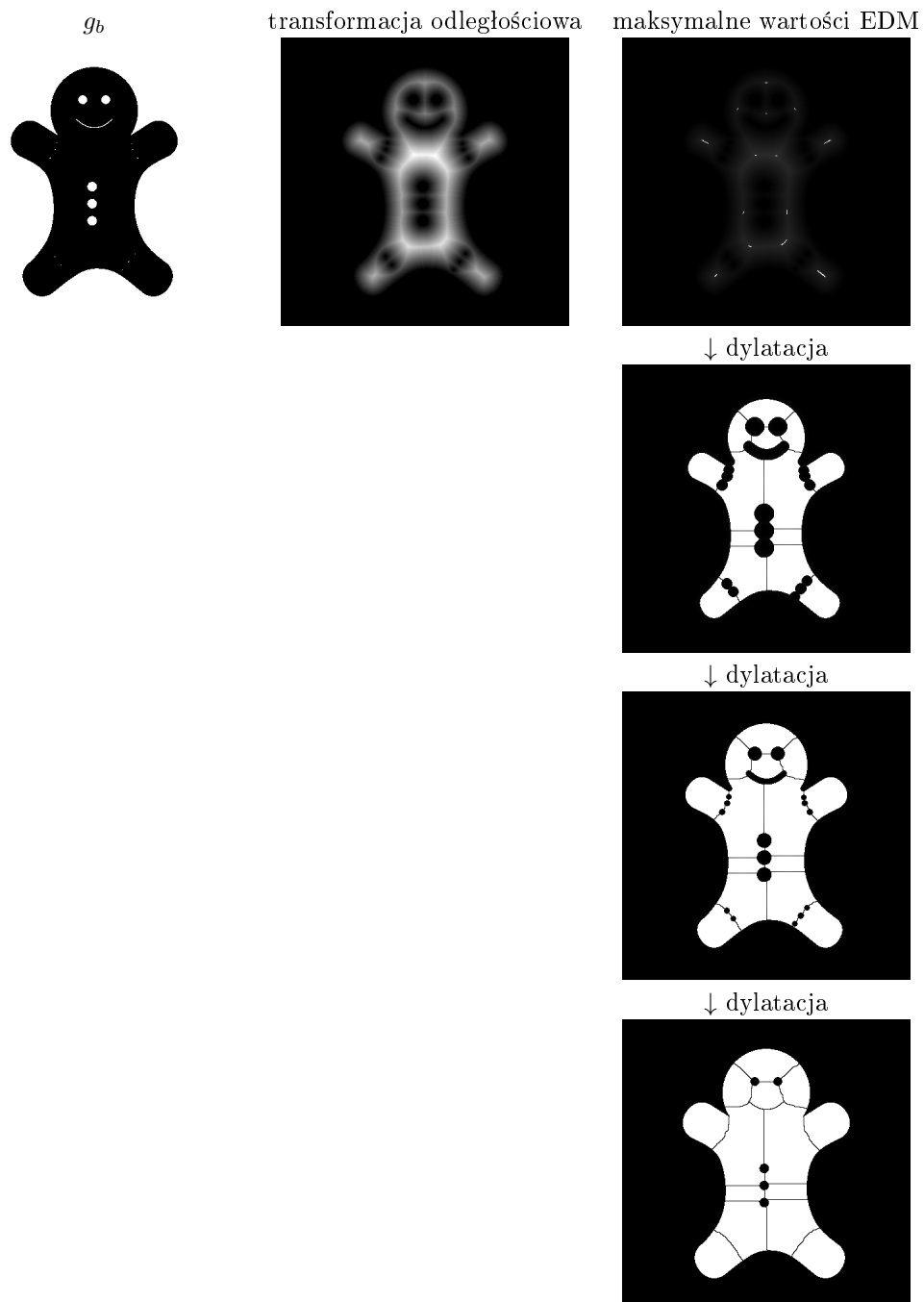
12.4.4 Transformacja Woronoja

Voronoi transform

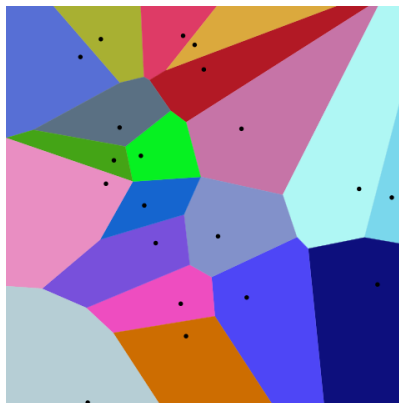
Segmentacja obiektów na obrazie zgodnie z podziałem na diagramie Woronoja:

dla danego zbioru n punktów obiekt jest dzielony na n obszarów, w taki sposób, że każdy punkt w dowolnym obszarze znajduje się bliżej określonego punktu ze zbioru n punktów, niż od pozostałych $n - 1$ punktów. → grafika 12.41.

→ Obliczanie transformacji odległości odwróconego obrazu binarnego (tzn. obiekt staje się tłem obrazu) daje mapę odległości, w której każdy piksel podaje odległość do najbliższego piksela tła



Grafika 12.40: Transformacja wododziałowa



Grafika 12.41: Diagram Woronoja

→ Zastosowanie na taki obraz transformacji wododziałowej dzieli obraz na regiony zgodnie z najbliższym punktem o wartości maksymalnej na obrazie binarnym.

→ grafika 12.42

Przykład: implementacja transformacji w ImageJ

→ grafika 12.43

12.5 Gra w życie

Conway's Game of Life

<https://playgameoflife.com/> → grafika 12.44

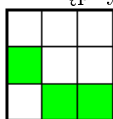
<https://www.mimuw.edu.pl/~ajank/zycie/>

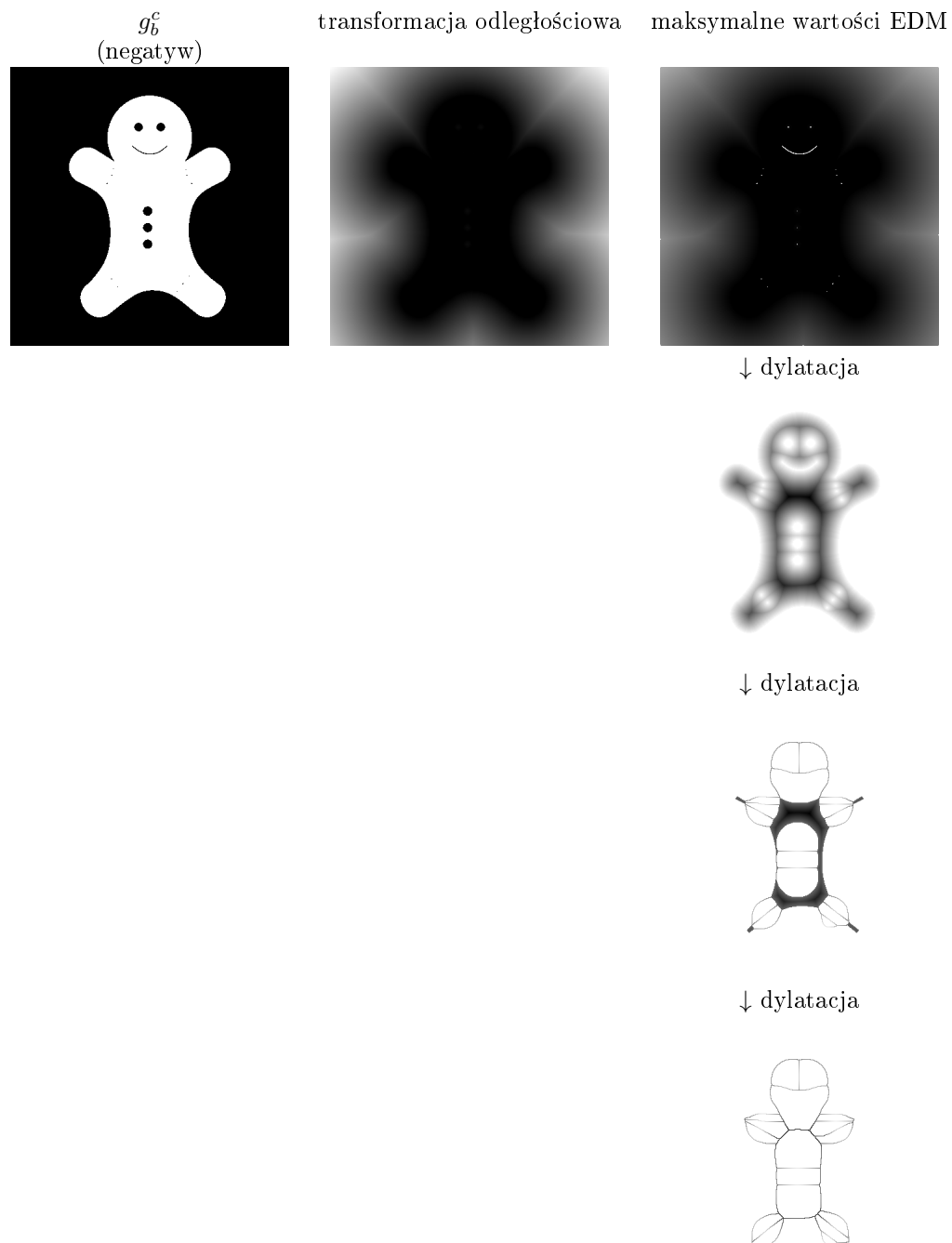
Przykład operacji morfologicznych: gra oparta na dwuwymiarowym automacie komórkowym. Jest to prosta i popularna implementacja teorii automatu Stanisława Marcina Ulama. "Gra" jest tu rozumiana jako ciąg wydarzeń, które odbywają się według ustalonych, prostych zasad.

12.5.1 Reguły morfologiczne

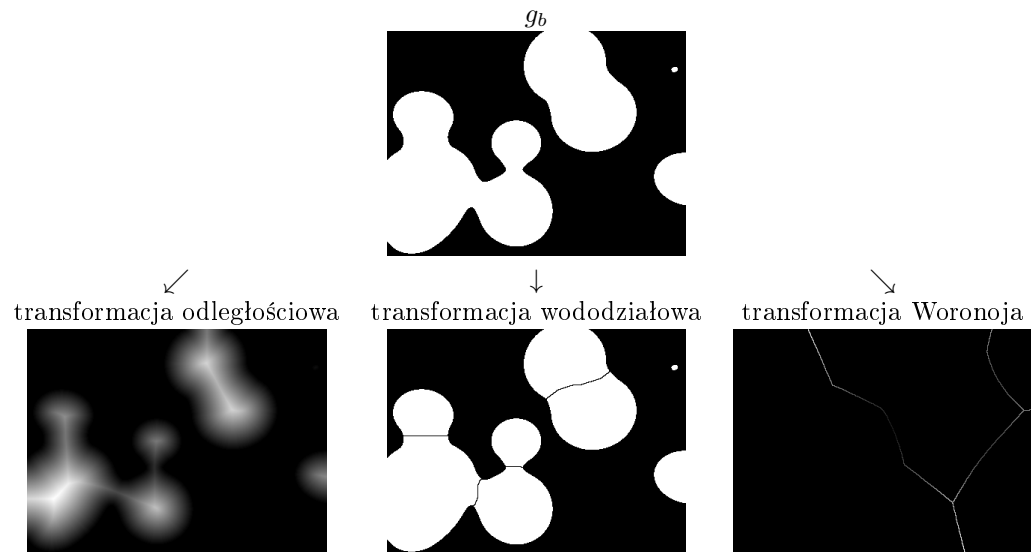
Reguły dotyczące komórki centralnej elementu strukturalnego:

1. Martwa komórka mająca dokładnie trzech żywych sąsiadów "rodzi się" (ożywa) w następnym pokoleniu.





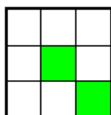
Grafika 12.42: Transformacja Woronoja



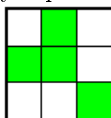
Grafika 12.43: Transformacja Woronoja

Grafika 12.44: Game of Life <https://playgameoflife.com/>

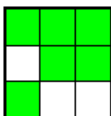
2. Żywa komórka mająca mniej niż dwóch żyjących sąsiadów umiera w następnym pokoleniu (z samotności).



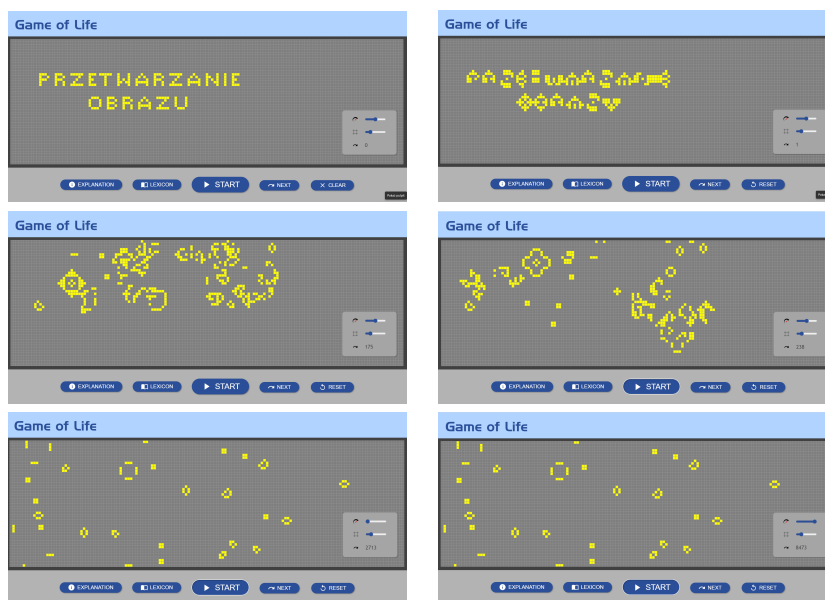
3. Żywa komórka z dwoma lub trzema żywymi sąsiadami pozostaje żywa w następnym pokoleniu.



4. Żywa komórka mająca więcej niż trzech żywych sąsiadów umiera w następnym pokoleniu (z powodu przeludnienia).



Przykład \rightarrow grafika 12.45



Grafika 12.45: Przykład: Game of Life w generacjach 0, 1, 175, 238, 2713, 8743

Struktury powstające w Game of Life są interesujące z różnych perspektyw:

- zachowanie jako całość
 \hookrightarrow jakiego rodzaju zachowanie wykazują określone światy reguł, na przykład, czy eksplodują, czy implodują, czy powoli się kurczą, czy też powoli "twardnieją".

- aspekt ekonomiczny
 \hookrightarrow model handlu giełdowego na rynkach finansowych
- aspekt fizyczny
 \hookrightarrow problem sił i wartości początkowej
- Game of Life jako automat
 \hookrightarrow konstrukcje działające jak maszyna lub fabryka
- Game of Life jako model komputerowy
 \hookrightarrow możliwe jest modelowanie Uniwersalnej Maszyny Turinga i jej danych wejściowych przy użyciu złożonych wzorców startowych (kompletność Turinga). Teoretycznie każdy problem algorytmiczny, który można rozwiązać za pomocą komputera, można również obliczyć za pomocą Game of Life.
- Game of Life w informatyce teoretycznej jako problem decyzyjny
 \hookrightarrow można wykazać, że nie ma algorytmu, który na wejściu otrzymuje dowolne dwie konfiguracje Game of Life i może we wszystkich przypadkach decydować, czy jedna konfiguracja może wynikać z drugiej, czy nie. To pytanie jest zatem nierozstrzygalne.
- ...