Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Instytut Informatyki

Algorytmy Numeryczne: Zadanie 1

Maria Koren

Gdańsk

10 marca 2024

Spis treści

1 Wstęp

W tym projekcie zostało obliczono znaczenie liczby π za pomocą dwóch metod, oraz sprawdzowno pewne hipotezy odnośnie tych metod.

Pierwsza metoda polegała na obliczeniu obwodu n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1. Dla dużych n obwód wpisanego wielokąta jest bliski obwodowi okręgu, który wynosi 2Π

Druga metoda - Metoda Monte Carlo. Wylosowano n punktów na płaszczyźnie, obie współrzędne z przedziału $[0, 1]$. Dalej obliczono ile z wylosowanych punktów mają odległość od punktu $(0, 0)$ nie większą niż 1, liczbę takich punktów oznaczono jako a. Iloraz $4a/n$ stanowi przybliżenie liczby Π

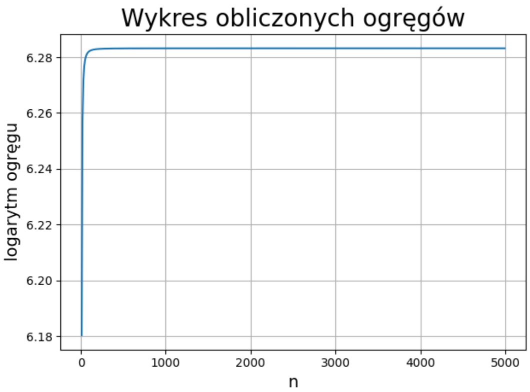
2 Hipoteza 1: Zwiększając n można uzyskać obwód dowolnie bliski liczbie 2Π

W celu sprawdzenia tej hipotezy obliczono obwody dla różnych n-kątów. Były wzięty wartości z przedziału $[10, 1000]$. Wyniki przedstawiono w tabeli 1

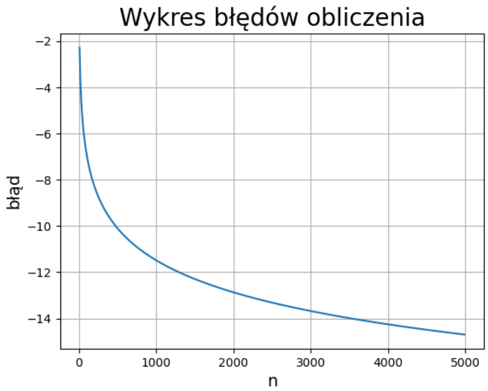
n	Obliczna wartość 2Π	Błąd
10	6.180339887498949	0.1028454196806372
30	6.271707796059216	0.011477511112037021
50	6.279051952931345	0.004133354248240906
70	6.2810762490720995	0.0021090581074867387
90	6.2819094064501515	0.0012759007294347313
110	6.282331174613162	0.0008541325664239707
130	6.282573761394418	0.0006115457851683104
150	6.28272596500712	0.0004593421724665703
170	6.282827686104158	0.00035762107542858246
190	6.282899011216227	0.0002862959633596063
200	6.28292692472829	0.0002583824512960575
400	6.283120710969107	$6.4596210479273 \times 10^{-5}$
600	6.283156597703467	$2.8709476119104238 \times 10^{-5}$
800	6.2831691580895725	$1.614909001368403 \times 10^{-5}$
1000	6.2831749717589584	$1.033542062778281 \times 10^{-5}$

Tabela 1: Tabela wyników

Również zrobiono dwa odpowiedni wykresy 1 oraz 2. Dla wykresu błędow zrobiono logarytmowanie, w celu pokazania zmienności błędów



Rysunek 1: Wartości obwodów n-kąta



Rysunek 2: Wykres logarytmów błędów

Z powyższych wykresów widać, że dla dużych wartości n obwód wychodzi bliski 2Π a błędy są małe, co oznacza potwierdzenie powyższej hipotezy

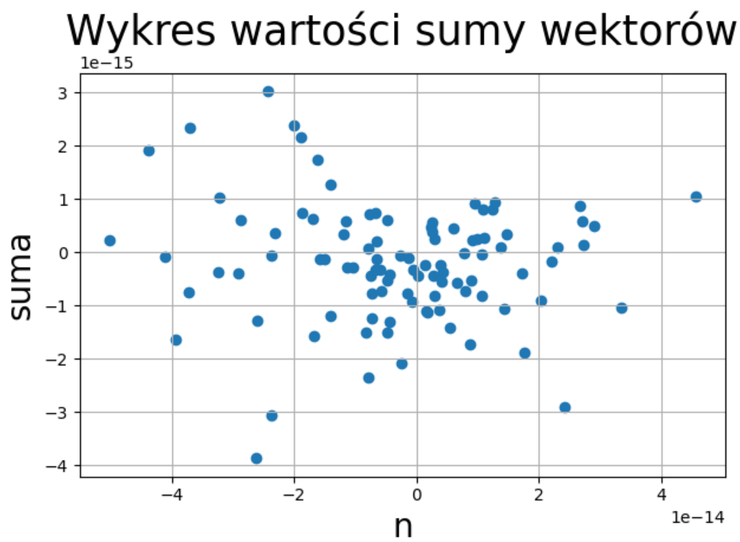
3 Hipoteza 2: Suma wszystkich wektorów w_i daje dokładnie wektor zerowy

W celu sprawdzenia tej hipotezy obliczono sumy szystkich wektorów w_i dla różnych wartości n z przedziału $[10, 1000]$

Otrzymane wyniki umieszczono w tabeli 2 oraz na rysunku 3

n	x	y
5	$0.00000000e+00$	$-1.11022302 \times 10^{-16}$
10	$3.05311332 \times 10^{-16}$	$-4.44089210 \times 10^{-16}$
30	$1.56819002 \times 10^{-15}$	$-1.11022302 \times 10^{-15}$
50	$2.55351296 \times 10^{-15}$	$5.55111512 \times 10^{-16}$
70	$2.96550978 \times 10^{-15}$	$2.49800181 \times 10^{-16}$
90	$-6.61450061 \times 10^{-15}$	$7.35522754 \times 10^{-16}$
110	$-4.72191730 \times 10^{-15}$	$-5.27355937 \times 10^{-16}$
130	$6.5683136 \times 10^{-15}$	$-5.6898930 \times 10^{-16}$
150	$3.73746173 \times 10^{-15}$	$-1.07552856 \times 10^{-15}$
170	$2.91943119 \times 10^{-15}$	$-8.18789481 \times 10^{-16}$
190	$5.96918348 \times 10^{-15}$	$4.37150316 \times 10^{-16}$
200	$7.71930263 \times 10^{-15}$	$-2.08166817 \times 10^{-17}$
400	$-2.70175050 \times 10^{-15}$	$-6.59194921 \times 10^{-17}$
600	$8.88657502 \times 10^{-15}$	$-5.36029554 \times 10^{-16}$
800	$-3.93870863 \times 10^{-14}$	$-1.64972203 \times 10^{-15}$
1000	$-1.79786097 \times 10^{-14}$	$-7.99707522 \times 10^{-16}$

Tabela 2: Sumy wektorów



Rysunek 3: Wykres sum wektorów

Mimo że wartości są bliskie zeru, nie jest to dokładnie wektor zerowy o którym mowa w tej hipotezie. Więć hipotezę 2 odrzucono

4 Hipoteza 3: Suma wektorów policzona innym sposobem

Sumy współrzędnych wektorów w_i policzono osobno: niech X_+ oznacza zbiór dodatnich współrzędnych x-owych wektorów w_i,a X_- zbiór współrzędnych ujemnych; obliczono S_{x+} sumując elementy zbioru X_+ w kolejności od najmniejszej do największej oraz S_{x-} sumując elementy zbioru X_- w kolejności od największej do najmniejszej; dodano do siebie S_{x+} i S_{x-}.Dla współrzędnych y zrobiono analogicznie

Wyniki obliczeń sum wektorów tym sposobem zamieszczono w tabeli 3

n	x	y
5	0.0	0.0
10	0.0	$-4.440892098500626 \times 10^{-16}$
20	$-1.3322676295501878 \times 10^{-15}$	0.0
30	$1.3322676295501878 \times 10^{-15}$	$-6.661338147750939 \times 10^{-16}$
40	$2.6645352591003757 \times 10^{-15}$	0.0
50	$2.6645352591003757 \times 10^{-15}$	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$
60	$-4.6629367034256575 \times 10^{-15}$	$-4.440892098500626 \times 10^{-16}$
70	$3.552713678800501 \times 10^{-15}$	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
80	$-6.661338147750939 \times 10^{-16}$	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
90	$-6.217248937900877 \times 10^{-15}$	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$
100	$-6.661338147750939 \times 10^{-16}$	$-8.881784197001252 \times 10^{-16}$
110	$-4.6629367034256575 \times 10^{-15}$	$-4.440892098500626 \times 10^{-16}$
120	$-6.439293542825908 \times 10^{-15}$	$-4.440892098500626 \times 10^{-16}$
130	$5.773159728050814 \times 10^{-15}$	$-8.881784197001252 \times 10^{-16}$
140	$8.43769498715119 \times 10^{-15}$	$-8.881784197001252 \times 10^{-16}$
150	$3.552713678800501 \times 10^{-15}$	$-1.1102230246251565 \times 10^{-15}$
160	$-6.439293542825908 \times 10^{-15}$	0.0
170	$2.220446049250313 \times 10^{-15}$	$-2.220446049250313 \times 10^{-16}$
180	$3.1086244689504383 \times 10^{-15}$	$-8.881784197001252 \times 10^{-16}$
190	$7.105427357601002 \times 10^{-15}$	0.0
200	$7.105427357601002 \times 10^{-15}$	$-4.440892098500626 \times 10^{-16}$
400	$-3.774758283725532 \times 10^{-15}$	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
600	$1.021405182655144 \times 10^{-14}$	0.0
800	$-4.0190073491430667 \times 10^{-14}$	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
1000	$-1.7985612998927536 \times 10^{-14}$	$-2.4424906541753444 \times 10^{-15}$

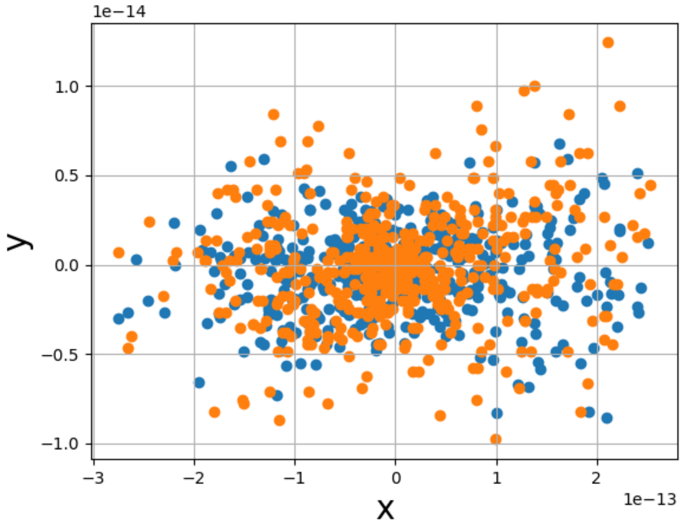
Tabela 3: Wyniki sumy wektorów

Widać, że dla pewnych n co najmniej jedna ze współrzędbych wynosi dokładnie 0.0. A dla punktu $n = 5$ suma wynosi dokładnie wektor zerowy

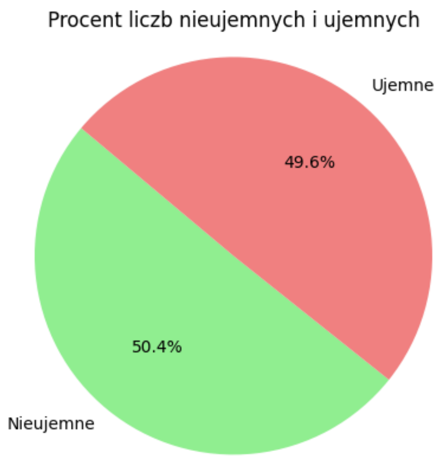
Na rysunku 4 zamieszczono wyniki sum obliczonych w hipotezie 2 oraz w hipotezie 3.

Ponieważ dużo punktów się pokrywa, zrobiono nowe badanie. Wyliczono odległości każdego z wektorów od punktu $(0, 0)$, oraz wykonano odejmowanie od wartości sumy zwykłych wartości sumy wyliczonej powyższą metodą. Więc wartości nieujemne oznaczają, że dla pewnego n-kąta wyliczenie sumy wektorów powyższą metodą prowadzi do bardziej dokładnego wyniku. Wyniki zamieszczone na rysunku 5

Ponieważ nieujemnych wartości jest więcej, hipotezę, że przy takim sumowaniu wynik będzie bliższy wektorowi zerowemu potwierdzono



Rysunek 4: Wykres sum wektorów



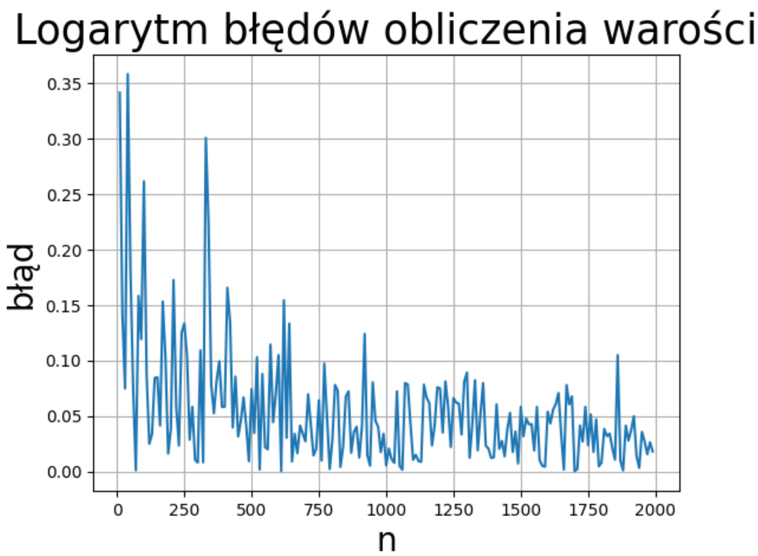
Rysunek 5: Diagram badania odległości

5 Hipoteza 4: Opisane zastosowanie metody Monte Carlo jest mniej efektywne niż metoda oparta o sumowanie wektorów

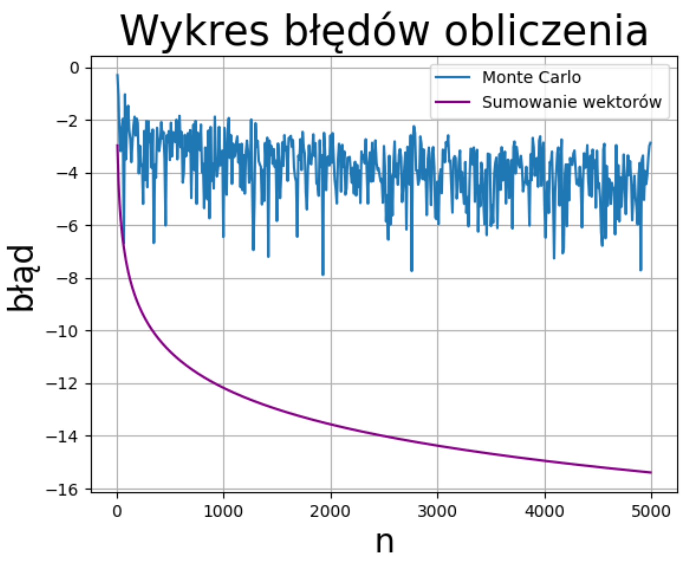
W tabeli 4 zamieszczono wyniki otrzymane w metodzie Monte Carlo. Jak widać z tych wyników obliczone wartości π mają duży błąd, wykres błędów w zależności od liczby n wylosowanych punktów można zobaczyć na rysunku 6

n	π	błąd
100	3.04	0.10159265358979308
300	3.36	0.21840734641020676
500	3.216	0.07440734641020708
700	3.08	0.061592653589793045
900	3.2311111111111113	0.08951845752131815
1100	3.1745454545454543	0.03295280095566122
1300	3.129230769230769	0.012361884359024078
1500	3.144	0.002407346410207012
1700	3.1388235294117646	0.002769124178028548
1900	3.1242105263157893	0.01738212727400379

Tabela 4: Wyniki otrzymane w metodzie Monte Carlo



Rysunek 6: Wykres błędu w metodzie Monte Carlo



Rysunek 7: Wykres błędu w metodzie Monte Carlo a przy sumowaniu wektorów

Dla porównania efektywności obu metod (metody Monte Carlo a metody sumowania wektorów) zrobiono rysunek 7. Na tym rysunku widać, że błędy w metodzie Monte Carlo są znacznie większe niż przy sumowaniu wektorów.

Obliczono błędy względne (średnie znaczenie):

1. Sumowanie wektorów: 0.0339%
2. Monte Carlo: 5.472%

Błąd względny metody Monte Carlo też jest znaczno większy niż błąd przy sumowaniu wektorów. Zatem hipotezę że zastosowanie metody Monte Carlo jest mniej efektywne niż metoda oparta o sumowanie wektorów potwierdzono

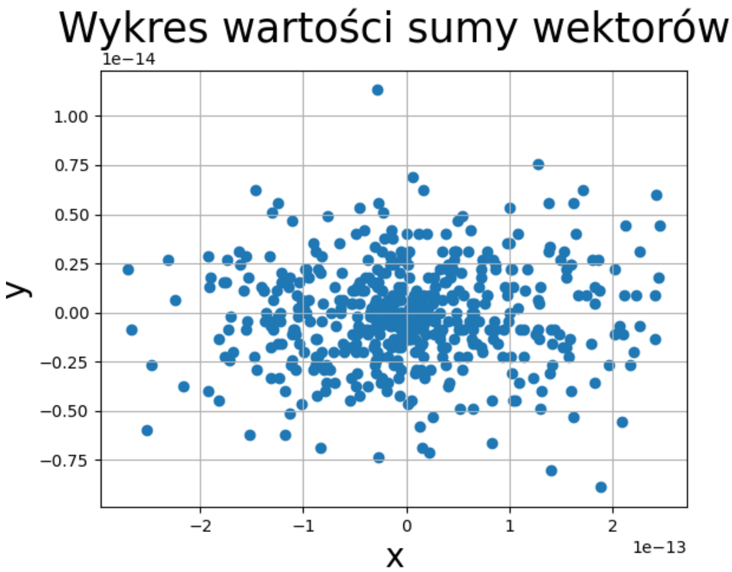
6 Hipoteza 5: Suma wektorów obliczona za pomocą kopca

Została obliczona suma wektorów z użyciem kopca. Wyniki są przedstawione w tabeli 5 oraz na rysunku 8

n	x	y
5	0.0	0.0
10	0.0	-2.220446049250313e-16
20	-1.3322676295501878e-15	2.220446049250313e-16
30	1.3322676295501878e-15	-4.440892098500626e-16
40	2.6645352591003757e-15	0.0
50	2.220446049250313e-15	2.220446049250313e-16
60	-4.218847493575595e-15	-6.661338147750939e-16
70	3.9968028886505635e-15	2.220446049250313e-16
80	-1.1102230246251565e-15	-2.220446049250313e-16
90	-5.995204332975845e-15	2.220446049250313e-16
100	-6.661338147750939e-16	-4.440892098500626e-16
110	-4.218847493575595e-15	-8.881784197001252e-16
120	-5.995204332975845e-15	4.440892098500626e-16
130	5.773159728050814e-15	-4.440892098500626e-16
140	7.993605777301127e-15	0.0
150	4.440892098500626e-15	-1.5543122344752192e-15
160	-6.217248937900877e-15	-2.220446049250313e-16
170	2.6645352591003757e-15	0.0
180	3.552713678800501e-15	-1.3322676295501878e-15
190	7.105427357601002e-15	4.440892098500626e-16
200	7.105427357601002e-15	-8.881784197001252e-16
400	-4.440892098500626e-15	-8.881784197001252e-16
600	7.993605777301127e-15	-2.6645352591003757e-15
800	-3.8413716652030416e-14	-1.3322676295501878e-15
1000	-1.7319479184152442e-14	-4.440892098500626e-16

Tabela 5: Wartości sumy wektorów przy sumowaniu za pomocą kopca

Ponieważ wykres wektorów sum dla trzech metod sumowania nie będzie reprezentatywny, wykonano to samo badanie co w punkcie 3



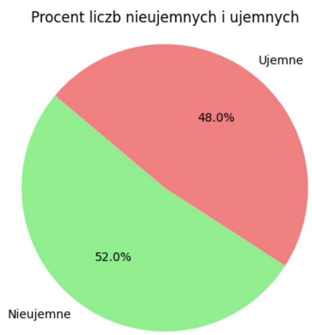
Rysunek 8: Wykres wartości sum wektorów obliczonych za pomocą kopca

1. Sumowanie kopcem a zwykłe sumowanie, rysunek 9

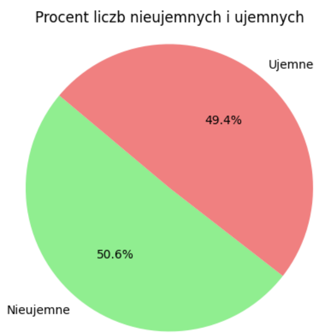
   Przeważają wartości nieujemne co oznacza, że sumowanie kopcem daje wynik bliższy zeru

2. Sumowanie kopcem a sumowanie osobno wartości dodatnich i ujemnych, rysunek 10

   Przeważają wartości nieujemne, co oznacza, że sumowanie kopcem daje lepszy wynik



Rysunek 9: Sumowanie kopcem a sumowanie zwykłe



Rysunek 10: Sumowanie kopcem a supowanie osobno

Podsumuwując sumowanie wektorów za pomocą kopca daje wynik bliższy wektorowi zerowemu, zatem hipotezę 5 potwierdzono

7 Podsumowanie

Zostało wykonano obliczenie liczby Π za pomocą dwóch metod. Sprawdzono, że zwiększając liczbę kątów wpisanego foremnego n-kąta można uzyskać obwód dowolnie bliski liczbie 2Π. Badając efektywność wywnioskowano, że oblicznie za pomocą metody Monte Carlo jest mniej efektywne niż sumowanie długości wektorów. Również sprawdzając pewne hipotezy wywnioskowano, że sposób obliczania sumy wektorów na różne sposoby może prowadzić do uzyskania różnych wyników, najdokładniejszy wynik otrzymano przy wyliczaniu sumy za pomocą kopca