

# INTRODUCCIÓN A LA MAGNETOHIDRODINÁMICA

Aplicación a plasmas astrofísicos



**ANDREA COSTA – MATÍAS SCHNEITER – MARIANA CÉCERE**

## INTRODUCCIÓN

A LA

# MAGNETOHIDRODINÁMICA

Aplicación a plasmas astrofísicos



## PREFACIO

La física del plasma es un tópico de estudio cada vez más necesario para abordar temas de la astrofísica contemporánea. Así lo muestran el creciente interés por la detección de campos magnéticos provenientes de objetos lejanos como galaxias, pulsares y vientos estelares. Gran parte de la materia observable en el universo está en el estado de plasma confinado por campos magnéticos. Eventualmente estas configuraciones de campo se vuelven inestables dando lugar a procesos muy dinámicos que liberan gran cantidad de energía ( $\sim 10^{25}$ J) en pocos segundos en forma de calor y energía cinética.

El libro pretende ser un material de formación inicial para estudiantes de grado y/o posgrado de las carreras de Astronomía, Física e Ingeniería. En el primer capítulo se presentan los parámetros fundamentales del plasma y se compara el estado del plasma respecto a la caracterización de un fluido. En el Capítulo 2 se describe el movimiento de partículas individuales afectadas por campos eléctricos y magnéticos. En el tercer capítulo se obtienen las ecuaciones que describen la dinámica de un plasma a partir de las ecuaciones cinéticas (o estadísticas) más fundamentales. La descripción de la magnetohidrodinámica propiamente dicha se encuentra en el Capítulo 4. Luego, se obtienen las relaciones de dispersión que dan cuenta del tipo de ondas que se excitan en un plasma en su aproximación magnetohidrodinámica en el quinto capítulo. En el sexto se describen las distintas ondas de choque magnetohidrodinámicas teniendo en cuenta la dirección del campo magnético respecto a la superficie de discontinuidad. En el séptimo capítulo se explicitan algunos casos de equilibrio magnetohidrostático. En el Capítulo 8 se describen algunos modelos sencillos de reconexión magnética: el mecanismo por el cual se libera energía magnética en forma de calor y energía cinética. El capítulo 9 contiene la descripción del proceso inverso a la reconexión magnética. Es decir el mecanismo por el cual el campo magnético crece o se genera, también llamado dínamo. En el último capítulo se describen los primeros modelos de viento solar.

El libro es resultado del trabajo de dictado de clases y de la discusión con alumnos y colegas acerca de temas introductorios de la teoría de plasma y su aproximación magnetohidrodinámica. Los cursos fueron impartidos en la Universidad Nacional de Córdoba y en el Instituto de Astronomía Teórica y Experimental (CONICET-UNC).

Andrea Costa – Matías Schneiter – Mariana Cécere  
Córdoba, Junio de 2015



---

## Índice general

---

<b>1. Consideraciones generales</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.1.1. Generalidades: concepto de plasma . . . . .	6
1.2. Plasmas en el universo . . . . .	8
1.2.1. Plasmas de laboratorios . . . . .	9
1.2.2. Plasmas astrofísicos . . . . .	10
1.3. Parámetros básicos de los plasmas . . . . .	11
1.3.1. Frecuencia de plasma y longitud de Debye . . . . .	11
1.3.2. La longitud de Debye como distancia de apantallamiento	13
1.3.3. Parámetro de plasma . . . . .	15
1.3.4. Colisionalidad . . . . .	16
1.3.5. Plasmas magnetizados . . . . .	18
1.3.6. Parámetro $\beta$ del plasma . . . . .	19
1.3.7. Validez de la hipótesis del continuo . . . . .	20
1.3.8. Resumen . . . . .	21
<b>2. Movimiento de partículas cargadas</b>	<b>27</b>
2.1. Introducción . . . . .	27
2.2. Movimiento en campos uniformes . . . . .	28
2.2.1. Movimiento de deriva . . . . .	31
2.3. Movimiento en campos no uniformes . . . . .	34
2.3.1. Deriva $\nabla B$ . . . . .	34
2.3.2. Deriva de curvatura . . . . .	36
2.4. Invariantes adiabáticos . . . . .	38
2.4.1. Movimiento en campos dependientes del tiempo . . . . .	38
2.4.2. Aplicaciones . . . . .	40

## Índice general

---

<b>3. Teoría cinética del plasma</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. La ecuación de Boltzmann . . . . .	47
3.2.1. Aproximación de dos fluidos . . . . .	53
3.2.2. Fluido simple y MHD . . . . .	54
3.2.3. Distribuciones maxwellianas . . . . .	57
3.2.4. Distribuciones anisótropas . . . . .	59
<b>4. Aproximación magnetohidrodinámica</b>	<b>65</b>
4.1. Introducción . . . . .	65
4.2. Postulación de ecuaciones básicas . . . . .	65
4.2.1. Aproximaciones de la MHD ideal . . . . .	67
4.2.2. Independencia de escala . . . . .	70
4.3. Flujo magnético . . . . .	71
4.3.1. Ecuación de inducción magnética . . . . .	72
4.4. Fuerza de Lorentz . . . . .	78
4.5. Resumen . . . . .	83
4.6. Tubos de flujo y hojas de corriente . . . . .	87
<b>5. Magnetohidrostática</b>	<b>91</b>
5.1. Introducción . . . . .	91
5.2. Balance de presiones . . . . .	92
5.3. Parámetro $\beta$ del plasma . . . . .	93
5.4. Campos force-free . . . . .	94
5.5. Equilibrios force-free . . . . .	94
5.5.1. Campo potencial . . . . .	94
5.5.2. Campo force-free general . . . . .	95
5.6. Prominencias quiescentes . . . . .	95
5.6.1. Modelo de Kippenhahn-Schluter . . . . .	96
5.7. Balance de presiones en una columna de plasma . . . . .	98
5.8. Estabilidad de una columna de plasma . . . . .	100
<b>6. Ondas MHD</b>	<b>103</b>
6.1. Introducción . . . . .	103
6.2. Ondas de sonido . . . . .	104
6.3. Ondas magnéticas . . . . .	105
6.3.1. Ondas de Alfvén (corte) . . . . .	109
6.3.2. Ondas de compresión de Alfvén . . . . .	110
6.4. Ondas magnetoacústicas . . . . .	111
6.5. Ondas de gravedad . . . . .	114

## Índice general

---

6.5.1. Introducción . . . . .	114
6.5.2. Ondas acústicas de gravedad . . . . .	116
6.5.3. Ondas magnetoacústicas de gravedad . . . . .	119
6.6. Límite de aplicabilidad . . . . .	120
<b>7. Ondas de choque</b>	<b>123</b>
7.1. Introducción . . . . .	123
7.2. Ondas de choque en ausencia de campo magnético . . . . .	124
7.3. Ondas de choque magnéticas . . . . .	129
7.3.1. Caso transversal . . . . .	129
7.3.2. Ondas de choque oblicuas . . . . .	131
7.3.3. Ondas intermedias . . . . .	135
7.3.4. Ondas de choque rápidas y lentas . . . . .	136
<b>8. Reconexión magnética</b>	<b>139</b>
8.1. Introducción . . . . .	139
8.2. Hoja de corriente . . . . .	141
8.2.1. Reconexión magnética . . . . .	143
8.2.2. Modelo bidimensional de reconexión magnética . . . . .	144
8.2.3. Tasa de reconexión . . . . .	145
8.2.4. Modelo de aniquilación de Parker . . . . .	146
8.2.5. Modelo de reconexión de Sweet-Parker . . . . .	147
8.2.6. Modelo de Petschek . . . . .	150
<b>9. Origen de los campos magnéticos: Efecto dínamo</b>	<b>151</b>
9.1. Introducción . . . . .	151
9.2. Campos fósiles y campos generados por efecto dínamo . . . . .	152
9.3. Campo magnético bipolar y flotabilidad . . . . .	153
9.4. Generación de campo magnético por efecto dínamo . . . . .	157
9.4.1. Teorema de Cowling . . . . .	159
9.4.2. Electrodinámica de campo medio . . . . .	163
9.5. Ondas de dínamo . . . . .	166
<b>10. Viento solar</b>	<b>169</b>
10.1. Introducción . . . . .	169
10.2. Modelos del viento solar . . . . .	170
10.2.1. Primera fase . . . . .	170
10.3. Segunda fase . . . . .	175
10.3.1. Isorrotación . . . . .	175
10.4. Tercera fase . . . . .	179

## Índice general

---

10.5. Modelo global de la corona solar . . . . .	180
<b>A. Apéndice A</b>	<b>183</b>
A.1. Identidades vectoriales . . . . .	183
<b>B. Apéndice B</b>	<b>185</b>
B.1. Tablas de cantidades físicas . . . . .	185
<b>C. Apéndice C</b>	<b>187</b>
C.1. Conversión de unidades SI $\leftrightarrow$ CGS . . . . .	187
<b>D. Apéndice D</b>	<b>189</b>
D.1. Definiciones químicas . . . . .	189
D.2. Gases ideales . . . . .	189
<b>Bibliografía</b>	<b>191</b>

## Capítulo 1

---

# CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA TEORÍA DEL PLASMA

---

### 1.1. Introducción

A diferencia de los sólidos y de los líquidos, los plasmas y los gases ideales son sistemas donde las partículas que los componen tienen energía cinética mayor que la energía de interacción entre las partículas. En un sólido, en cambio, ocurre lo contrario. En gases ideales, se puede considerar que las partículas no interactúan entre sí, sólo lo hacen con las paredes y se dice que son libres. En los líquidos la situación es intermedia: las partículas chocan entre sí y los choques frecuentes entre partículas neutras hacen que exista intercambio de momento y energía de modo que las propiedades termodinámicas son homogéneas en un volumen que es chico respecto del tamaño del sistema, pero es grande respecto del tamaño de las partículas atómicas. Es decir, en uno de estos elementos de volumen o unidad de análisis de un fluido, para el conjunto grande de partículas que lo componen, las propiedades son las mismas y basta con una descripción macroscópica. Se llama aproximación del continuo al tratamiento de un conjunto grande de partículas como si fueran un fluido. Es decir, las partículas individuales ya no son las entidades cuyo movimiento se describe sino que debido al comportamiento uniforme de este grupo grande de entidades el problema se simplifica y se obtienen las ecuaciones de fluidos.

En el caso de los plasmas ocurre algo diferente, aunque también se utiliza la aproximación del continuo, es decir la aproximación magnetohidrodinámica. En este caso las partículas son libres en tanto la energía cinética es mayor que la energía de interacción entre ellas, pero las fuerzas que las vinculan son de largo alcance: las fuerzas electromagnéticas. Como están cargadas, apartamientos de carga apreciable hacen que el plasma reaccione neutralizando el exceso de carga

mediante la creación de campos eléctricos. El hecho de que estos campos intrínsecos o autoconsistentes impidan que haya grandes apartamientos de cargas, se traduce, en general, en que los plasmas son globalmente neutros. Los campos son responsables de que se pueda hacer un tratamiento de tipo continuo dado que, en promedio, un grupo grande de partículas se comporta homogéneamente. Esto se verá en detalle y profundidad en el capítulo.

### ***1.1.1. Generalidades: concepto de plasma***

Un plasma es un sistema de partículas con un número apreciable de ellas cargadas; puede tener una densidad no nula de cargas como los electrones de conducción de un metal; o ser cuasineutro como los líquidos conductores o los gases parcial o totalmente ionizados. Trataremos sólo plasmas encuadrados en el último caso. Dado que el número de cargas libres es grande, hay alta conductividad eléctrica y se establecen corrientes que interactúan con los campos magnéticos externos y con los generados por estas mismas corrientes.

La fuerza electromagnética está asociada a la creación de estructuras que son el tema de estudio de importantes áreas de la física y la química, por ejemplo, átomos y moléculas estables, sólidos, etc. Las estructuras estables tienen energías de ligadura mayor que la energía térmica del ambiente. A temperaturas mayores o cercanas a la de la energía de ionización, la descomposición atómica permite que las cargas no ligadas sean afectadas fuertemente por los campos de las demás, siendo posibles comportamientos colectivos de gran complejidad, como es el caso del plasma.

Si bien la complejidad no es una característica exclusiva de los plasmas –los sistemas con energía de ligadura grande como los sólidos son también complejos– la complejidad de los plasmas es tanto de tipo temporal como espacial, y se caracteriza por la excitación de gran cantidad de modos dinámicos y colectivos.

Veremos que no todo conjunto de partículas cargadas es un plasma, aunque la mayoría de las estructuras que componen el universo están en estado de plasma: el medio estelar, interestelar e interplanetario, el viento solar y las atmósferas planetarias. El medio interestelar se ioniza por la acción de la radiación estelar. El viento solar, en cambio desde su nacimiento está ionizado y sigue ionizado debido a que la recombinación es muy baja. La alta atmósfera de la Tierra está ionizada y más lejos aún encontramos el llamado “cinturón de Van Allen” de electrones y protones atrapados por el campo magnético terrestre.

En muchos de estos plasmas la interacción con el campo magnético da lugar a fenómenos múltiples o de topología peculiar como los arcos magnéticos

## 1.1. Introducción

---

de la corona solar, la propagación de ondas magnetohidrodinámicas, el confinamiento por acción del campo magnético, algunos altamente energéticos como las fulguraciones o *flares* solares en los que la energía magnética acumulada se transforma en energía cinética y térmica; procesos en los que el movimiento del plasma da origen a campos magnéticos globales por medio del efecto dínamo –como en el Sol o en el núcleo de la Tierra u otros planetas formados por líquidos conductores. En medios relativamente densos y fríos en los que se desarrolla la vida, los plasmas son más raros y difíciles de mantener en el tiempo debido a la tendencia de las partículas libres a recombinarse. Es así que el estudio de plasmas en laboratorios requiere entregar gran cantidad de energía para generar las condiciones de densidad y temperatura requeridas para sostenerlos.

Para que un conjunto grande de partículas cargadas pueda considerarse un plasma, las cantidades que describen al sistema deben encontrarse dentro de ciertos límites. Para que además este pueda ser considerado un fluido, es decir para que valga la aproximación magnetohidrodinámica (en adelante MHD) deben satisfacerse aún más condiciones. Por ejemplo, se requiere que el sistema pueda ser descrito en términos de elementos de volumen ( $\delta V$ ) que aún siendo pequeños deben ser mucho más grandes que un volumen  $\sim \lambda_D^3$ , donde  $\lambda_D$  es la longitud mínima a partir de la cual un sistema de partículas cargadas puede considerarse un plasma. Entendemos por pequeña una dimensión mucho menor que la variación de la longitud característica del sistema, es decir,  $\Delta L$ . Lo dicho, puede sintetizarse con la condición:  $\lambda_D \ll (\delta V)^{-1/3} \ll \Delta L$ .

Consideremos el caso de un conjunto de partículas no cargadas. Para que este conjunto pueda pensarse como un fluido se debe cumplir la condición de que el camino libre medio entre colisiones resulte muy pequeño frente a las dimensiones características. Si el camino libre medio es del orden o mayor que la escala de longitudes, el gas se comporta como una colección de partículas individuales. La interacción entre partículas no cargadas es de corto alcance (interacciones electromagnéticas entre multipolos de orden superior a uno). En el caso de los plasmas la situación es diferente: dada la presencia de partículas cargadas las interacciones dominantes son de largo alcance. Se introduce entonces una magnitud más apropiada que el camino libre medio, que permite distinguir entre comportamiento colectivo e individual:  $\lambda_D$ , que es la longitud de Debye (o longitud característica asociada al comportamiento colectivo del plasma).

En un fluido se definen cantidades macroscópicas como densidad, temperatura, presión y velocidad, que son el promedio de cantidades microscópicas tales como impulso y energía cinética de las partículas. En la aproximación de fluido se obtiene un conjunto completo de ecuaciones diferenciales que vinculan

las propiedades macroscópicas del sistema directamente unas con otras; en el caso del plasma una peculiaridad es que en dichas ecuaciones deben incluirse los campos electromagnéticos medios. Si se entrega energía a un gas mediante una descarga eléctrica, este se ioniza produciendo a su vez cargas que son capaces de ionizar; los electrones libres emiten radiación electromagnética al ser acelerados y los iones, átomos y moléculas emiten y absorben radiación al excitarse y desexcitarse a diferentes niveles, radiación que a su vez produce ionización. Eventualmente se llega a un equilibrio entre los diferentes procesos dadas ciertas condiciones de interacción con las condiciones externas. En tal estado de plasma habrá una población de electrones, iones con distinto estado de carga y excitación, partículas neutras, también en distinto estado de excitación, y radiación electromagnética. La población relativa de cada una de estas especies dependerá del equilibrio que se alcance. Los procesos de ionización más importantes son los debidos al impacto electrónico ( $e + A \rightarrow A^+ + 2e$ ,  $e$  electrón,  $A^+$  el ión) y a la ionización radiativa ( $h\nu + A \rightarrow A^+ + e$ ,  $h\nu$  la energía del fotón con  $h$  la constante de Planck). Los procesos de recombinación inversos son: recombinación de tres cuerpos ( $A^+ + 2e \rightarrow e + A$ ) y recombinación radiativa ( $A^+ + e \rightarrow h\nu + A$ ). En equilibrio termodinámico local estos procesos se equilibrarán, es decir hay una única temperatura asociable a todos ellos (incluyendo la radiación): cada proceso y su inverso producen la misma cantidad de reacciones por unidad de tiempo, lo que requiere una población relativa de especies particular para cada temperatura.

Muy rara vez el plasma es lo suficiente extenso y denso como para retener la radiación y establecer un equilibrio con ella (es el caso de los interiores estelares); aún así, es posible tener equilibrio termodinámico local entre los procesos que no involucran radiación: la ecuación de Saha permite obtener la población relativa de especies. Sin embargo, en las condiciones de la corona solar (y también en las condiciones habituales del plasma de laboratorio) la recombinación de tres cuerpos es mucho menos probable que la recombinación radiativa, se establece entonces un equilibrio, en el que la ionización por impacto es balanceada por recombinación radiativa.

## 1.2. Plasmas en el universo

La mayor parte del universo visible está formado por plasma. El plasma se forma siempre que la temperatura o la radiación sean lo suficientemente altas como para ionizar átomos. Hay un amplio rango en órdenes de magnitud de los parámetros característicos que describen al plasma. La figura 1.1 muestra

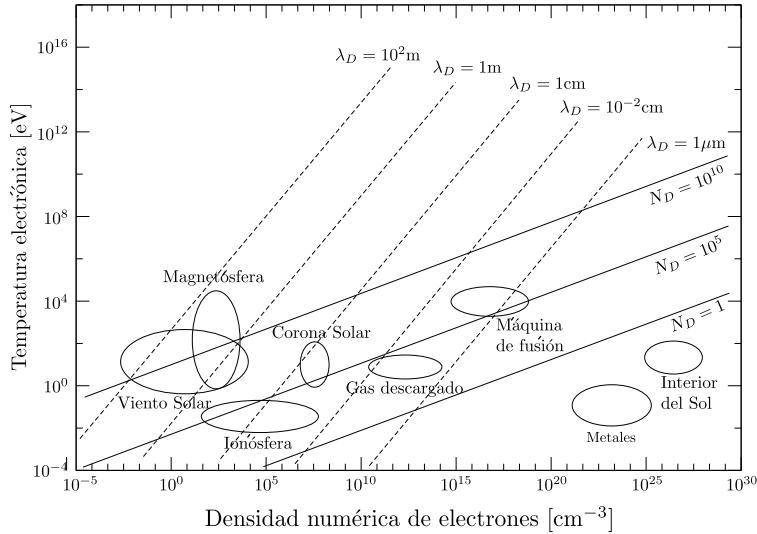


Figura 1.1: Distribución de plasmas en términos de parámetros característicos.  $\lambda_D$  longitud característica de apantallamiento de cargas en un plasma,  $N_D$  número de partículas en una esfera de Debye.

diferente tipos de plasmas ubicados según densidad electrónica y temperatura. Notar que la densidad escala en 30 órdenes de magnitud y la temperatura en 10.

### 1.2.1. *Plasmas de laboratorios*

Para lograr fusión y fisión nuclear es necesario confinar magnéticamente al plasma. Ya que las condiciones físicas requeridas para tal confinamiento son extremas (densidades de  $\sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$  y temperaturas de  $\sim 10^8 \text{ K}$ ) no hay ningún dispositivo material capaz de contener al plasma. Luego de la bomba nuclear, los intentos de fisión y fusión controlada comenzaron a demandar importantes esfuerzos científicos. Los primeros intentos para generar energía nuclear fueron los del  $z$ -pinch y  $\theta$ -pinch. Las letras  $z$  y  $\theta$  se refieren a las direcciones de la corriente del plasma generada en un dispositivo cilíndrico lleno de gas ionizado en el que se induce una corriente intensa por medio de la descarga de un banco de capacitores sobre una bobina externa. En el  $z$ -pinch la corriente tiene la dirección  $z$  (paralela al eje del cilindro) y esta genera un campo en la dirección  $\theta$  (ángulo que circunda el eje  $z$ ) de modo que la fuerza resultante es  $(\vec{j} \times \vec{B})_r = -j_z B_\theta$  la cual apunta radialmente hacia adentro, generándose una fuerza confinante (pinch) a las temperaturas requeridas ( $\sim 10^7 \text{ K}$ ). Sin embargo, la curvatura del campo hace que el plasma sea altamente inestable (se

volverá sobre este punto en el Capítulo 5). Con el  $\theta$ -pinch se evitan las inestabilidades y también se generan las condiciones requeridas. Aquí la corriente es inducida en la dirección angular y genera un decrecimiento radial del campo magnético externo aplicado  $B_z$  de modo que la fuerza de Lorentz  $-j_\theta \Delta B_z$  está nuevamente dirigida hacia adentro en dirección radial. El plasma es ahora macroscópicamente estable, sin embargo una perturbación tipo pinch genera fuerzas longitudinales no balanceadas y el plasma se va por los extremos de la configuración cilíndrica (ver figura 5.3). Nuevamente, en microsegundos se pierde la configuración del plasma. Luego de estos intentos se propusieron los “tokamak” desarrollados en la Unión Soviética en los 60. Esta configuración resuelve los problemas de los pinch respecto a las pérdidas por los límites y la inestabilidad. La configuración es la de un toro y el campo es helicoidal con una componente poloidal y una toroidal (a lo largo del eje del toro) más intensa para evitar las inestabilidades *kink* provenientes de la componente poloidal (ver Capítulo 5.8).

### 1.2.2. *Plasmas astrofísicos*

No sólo en el interior de las estrellas tenemos plasmas, sino que debido al transporte de radiación y a la convección, la energía producida por reacción termonuclear es llevada a la superficie de las estrellas y, junto con la rotación diferencial se crean las condiciones requeridas por el efecto dinamo. El dinamo produce campos magnéticos que no quedan dentro de las estrellas sino que son expelidos, junto con el plasma, para formar coronas extremadamente calientes y vientos estelares que son característicos de las estrellas con emisión en rayos X. Sin embargo, la conexión entre plasmas de laboratorio y astrofísicos no es la que proviene de la relación con las fuentes de reacción nuclear sino de los resultados indirectos provenientes de estas fuentes de energía, dado que los plasmas magnetizados están presentes en todas partes del universo. La ley de los campos magnéticos  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  implica que no hay fuentes ni sumideros de campo magnético, contrasta fuertemente con las estructuras asociadas a las demás fuerzas: esta ley es incompatible con la simetría esférica (al menos cuando el dominio es compacto), de modo que las geometrías más simples de plasmas magnetizados son completamente diferentes de aquellas de las escalas atómica y gravitacional.

### 1.3. Parámetros básicos de los plasmas

Consideremos un plasma ideal consistente de un número igual de electrones, con masa  $m_e$  y carga  $-e$ , y de iones, con masa  $m_i$  y carga  $e$  ( $m_i \gg m_e$ ). La temperatura caracteriza la agitación media de las partículas en el equilibrio. Aunque el sistema no haya alcanzado el equilibrio termodinámico se utiliza el símbolo

$$T_s \equiv \frac{1}{2}m_s \langle v^2 \rangle$$

para denotar la temperatura cinética medida en unidades de energía.<sup>1</sup> La temperatura cinética de la especie  $s$  es esencialmente el promedio de la energía cinética de las partículas de masa  $m_s$  de esta especie.

La cuasineutralidad implica que

$$n_i \simeq n_e \equiv n ,$$

donde  $n_i$  y  $n_e$  son la densidad de número de partículas de los iones y electrones, respectivamente. Suponiendo que tanto los iones como los electrones son caracterizados por la misma  $T$  (usual en casi todo plasma) podemos estimar las velocidades características a partir de la velocidad térmica de la especie  $s$ :

$$v_{ts} \equiv \sqrt{\frac{2T}{m_s}} .$$

Nótese que la velocidad térmica de los iones es usualmente mucho menor que la de los electrones

$$v_{ti} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{te}$$

donde tanto  $n$  como  $T$  son funciones de la posición en el plasma.

#### 1.3.1. Frecuencia de plasma y longitud de Debye

La frecuencia de plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}} , \quad (1.1)$$

es la escala temporal más fundamental de los plasmas ( $\epsilon_0$  la permeabilidad eléctrica). Obviamente, hay una frecuencia diferente para cada especie, sin embargo la frecuencia electrónica es la más importante y es usualmente denominada “frecuencia de plasma”, a secas.

---

<sup>1</sup>Un Joule es equivalente a  $6,24 \times 10^{18}$ eV;  $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{J} = 11600\text{K}/k_B$  donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Esto significa que a grosso modo  $1\text{eV}$  equivale  $\approx 10^4\text{K}$ .

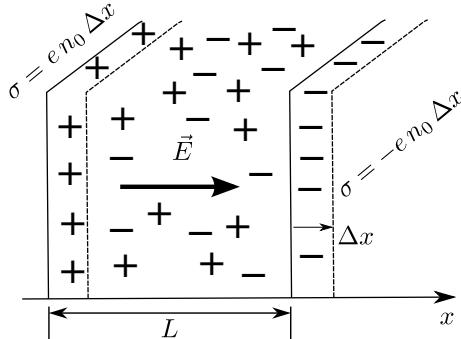


Figura 1.2: Esquema de oscilación del plasma.

Dado que el plasma es estadísticamente neutro, pequeños apartamientos de la cuasineutralidad generarán pequeños campos eléctricos debidos al desbalance de cargas. Es decir, es esperable que en la pequeña escala encontremos apartamientos locales de la neutralidad. A la vez, un apartamiento de la neutralidad generará inmediatamente una fuerza restitutiva. La fuerza restitutiva lleva a oscilaciones espontáneas del plasma que ocurren a la frecuencia de plasma. Dado que los electrones se mueven mucho más rápidamente que los iones, estos son los responsables fundamentales de la oscilación. En tal caso se puede considerar el modelo sencillo en que los iones están quietos y los electrones no tienen movimiento térmico. Es fácil ver que  $\omega_p$  corresponde a la oscilación electrostática típica en respuesta a una pequeña separación de cargas. Consideremos la situación en la que una lámina plana de electrones es apartada de la posición de cuasineutralidad en una cantidad infinitesimal  $\Delta x$  como se muestra en la figura 1.2. Si la densidad de carga es uniforme  $n_e = n_i = n_0$ , el desplazamiento produce dos láminas cargadas de signo opuesto separadas por una distancia  $L$ . La densidad de carga por unidad de superficie es  $\sigma = e n_0 \Delta x$ , equivalente a un capacitor de láminas paralelas con campo eléctrico de intensidad  $E = \sigma / \epsilon_0 = e n_0 \Delta x / \epsilon_0$  (ecuación de Poisson). La lámina de corriente por unidad de área tiene masa  $m_e n_0 \Delta x$ , carga por unidad de área  $-e n_0 \Delta x$  y está sujeto al campo eléctrico  $E$ . La ecuación de movimiento para la superficie desplazada  $\Delta x$  es:

$$m_e n_0 \Delta x \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = (-e n_0 \Delta x) E ,$$

o bien

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\omega_p^2 \Delta x$$

que resulta ser la ecuación del oscilador armónico simple con frecuencia  $\omega_p$ . La frecuencia de oscilación del plasma es uno de los parámetros más importantes

### 1.3. Parámetros básicos de los plasmas

para caracterizar un plasma y es una consecuencia directa del intento del plasma por mantener la neutralidad.

Nótese que las oscilaciones del plasma podrán observarse si los tiempos de interés  $\tau$  son mayores que el período del plasma  $\tau_p \equiv 1/\omega_p$ , y si las acciones externas cambian al sistema a frecuencias no mayores que la frecuencia de plasma  $\omega_p$ . En el caso opuesto, se estará estudiando algo diferente que no puede ser considerado un plasma (por ejemplo, reacciones nucleares). De la misma manera, observaciones en escalas de longitud  $L$  menores que la distancia  $v_t\tau_p$  atravesada por una partícula típica del plasma durante un período de oscilación del mismo, no corresponderán al comportamiento de un plasma. En este caso, las partículas abandonarán el plasma antes de que complete una oscilación. Tal distancia, que es el equivalente espacial de  $\tau_p$ , es conocida como la longitud de Debye y resulta

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{T}{m}}\omega_p^{-1} .$$

Téngase en cuenta que

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{ne^2}} \quad (1.2)$$

es independiente de la masa y por lo tanto resulta comparable para las diferentes especies. Es decir, nuestro sistema sólo podrá ser significativamente considerado un plasma si

$$\frac{\lambda_D}{L} \ll 1$$

y

$$\frac{\tau_p}{\tau} \ll 1$$

donde  $\tau$  y  $L$  representan las escalas temporales y espaciales típicas de los procesos investigados.

Otra forma de verlo: la longitud de Debye es la escala espacial en la que la neutralidad es violada por fluctuaciones espontáneas del plasma. Además, para que este escenario sea estable, el número de partículas  $N_D$  dentro de una esfera de Debye (esfera de radio  $\lambda_D$ ) debe ser grande ( $N_D \gg 1$ ).

#### 1.3.2. La longitud de Debye como distancia de apantallamiento

Por lo general un plasma no contiene campos eléctricos intensos en su estado de reposo. Cuando hay campos externos el plasma los apantalla internamente debido a su alta conductividad. Es decir, la corriente del plasma es suficientemente libre como para apantallar los campos eléctricos externos y como para

neutralizar rápidamente los desbalances de cargas internos que generan campos internos espontáneos. No es sorprendente que la longitud característica del apantallamiento sea la longitud de Debye.

Consideremos el caso más simple posible. Supongamos un plasma cuasineutro suficientemente cerca del equilibrio termodinámico de modo que la distribución en densidad sigue la ley de Maxwell-Boltzmann

$$n_s = n_0 \exp(-e_s \Phi/T)$$

donde  $\Phi(r)$  es el potencial electrostático y  $n_0$  y  $T$  son constantes. Dado que  $e_i = -e_e = e$  es claro que la cuasineutralidad implica que el potencial de equilibrio es constante. Supongamos que una pequeña perturbación localizada de carga  $\delta\rho_{c,ext}$  perturba el potencial en una cantidad  $\delta\Phi$ . La densidad de carga eléctrica total perturbada será

$$\delta\rho_c = \delta\rho_{c,ext} + e(\delta n_i - \delta n_e) = \delta\rho_{c,ext} - 2e^2 n_0 \frac{\delta\Phi}{T} .$$

De la ecuación de Poisson se obtiene

$$\nabla^2 \delta\Phi = -\frac{\delta\rho_c}{\epsilon_0} = -\frac{\delta\rho_{c,ext} - 2e^2 n_0 \delta\Phi/T}{\epsilon_0} ,$$

que es equivalente a

$$\left( \nabla^2 - \frac{2}{\lambda_D^2} \right) \delta\Phi = -\frac{\delta\rho_{c,ext}}{\epsilon_0} .$$

Si la carga que perturba al sistema es una carga puntual ubicada en el origen de coordenadas de modo que  $\delta\rho_{c,ext} = q\delta(\vec{r})$  entonces la solución de la ecuación anterior es:

$$\delta\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-\sqrt{2}r/\lambda_D) .$$

Se sigue que el potencial coulombiano de la carga perturbativa  $q$  es apantallado, para escalas de distancias mayores que la longitud de Debye, por una nube de partículas con carga de signo opuesto de radio aproximado  $\lambda_D$ .

En el vacío, el potencial de una carga cae como  $\Phi(r) = A/r$ ; en un plasma la acción colectiva de las fuerzas redistribuye las cargas y el potencial resultante es apantallado. Es decir, el efecto de la carga decae más rápidamente que en el vacío,  $\Phi(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D}$ .

El argumento anterior toma a la densidad  $n$  como una función continua, lo que supone implícitamente que hay muchas partículas en la nube de apantallamiento.

Aunque las interacciones electrostáticas entre dos partículas cargadas decaen como  $\sim 1/r^2$  el efecto combinado de todas las partículas puede no decaer

dado que el volumen de interacción aumenta como  $\sim r^3$ . Este es un efecto típicamente colectivo que resulta de la estadística de muchas partículas, cada una moviéndose en el campo electrostático medio de todas las otras.

### 1.3.3. Parámetro de plasma

Definimos la distancia media entre partículas como

$$r_d \equiv n^{-1/3} , \quad (1.3)$$

y la distancia de máximo acercamiento como

$$r_c \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 T} , \quad (1.4)$$

obtenida a partir de suponer que la energía de Coulomb

$$U(r, v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

de una partícula cargada en el campo electrostático de otra se anula. De modo que  $U(r_c, v_t) = 0$ .

Analicemos la relación  $r_d/r_c$ . Cuando esta razón es pequeña las partículas cargadas son dominadas por la influencia electrostática de las otras en forma más o menos continua y la energía cinética de las mismas es pequeña comparada con la energía potencial de interacción. Estos plasmas están fuertemente acoplados. En el otro extremo, cuando el cociente es grande las interacciones electrostáticas fuertes entre partículas individuales son eventos raros y una partícula típica es influenciada por todas las otras de su esfera de Debye. Tales interacciones raramente ocasionan cambios abruptos en el movimiento. Estos plasmas están débilmente acoplados. Un plasma fuertemente acoplado tiene más puntos en contacto con un líquido que un plasma convencional débilmente acoplado.

El parámetro de plasma se define como

$$\Lambda = 4\pi n \lambda_D^3 . \quad (1.5)$$

Este parámetro adimensional es –a menos de un factor 1/3– igual al número típico de partículas contenido en una esfera de Debye. También las ecuaciones (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) pueden ser combinadas para obtener esta expresión en términos de otros parámetros

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{r_d}{r_c} \right)^{3/2} = \frac{4\pi\epsilon_0^{3/2} T^{3/2}}{e^3 n^{1/2}} . \quad (1.6)$$

Se ve de esta expresión que si  $\Lambda \gg 1$ , la esfera contiene gran cantidad de partículas y ello corresponde a un plasma débilmente acoplado: la distancia media entre partículas es mucho mayor que la distancia de máximo acercamiento o bien la energía cinética de las partículas es mucho mayor que la energía electrostática. De la misma manera si  $\Lambda \ll 1$ , la esfera tiene pocas partículas, el acoplamiento es fuerte y la distancia media entre partículas es menor que la de máximo acercamiento. De modo que los plasmas fuertemente acoplados son densos y fríos, mientras que los débilmente acoplados son calientes y poco densos. Ejemplos de los primeros son los láseres de ablación (que son muy fríos, con temperaturas muy cercanas a la energía de ionización), los plasmas asociados a los arcos de descargas o los plasmas asociados a las atmósferas de objetos colapsados como enanas blancas o estrellas de neutrones. Ejemplos de plasmas débilmente acoplados, calientes y difusos, son los plasmas ionosféricos, espaciales, astrofísicos o los plasmas de fusión.

En síntesis, el comportamiento característicamente colectivo de los plasmas es solamente observado para escalas de tiempos mayores a los períodos del plasma, y en escalas de longitud mayores que la longitud de Debye. El carácter estadístico del comportamiento del plasma es controlado por el parámetro de plasma  $\Lambda$ . Los parámetros  $\omega_p$ ,  $\lambda_D$  y  $\Lambda$  son los parámetros básicos de un plasma. Mencionaremos otros de importancia a continuación.

#### 1.3.4. Colisionalidad

Las colisiones entre partículas cargadas en un plasma difieren fundamentalmente de las del caso de un gas neutral debido al largo alcance de la fuerza de Coulomb. Las partículas neutras tienen sección eficaz pequeña; el tamaño efectivo visto por otra partícula. El largo alcance de las fuerzas coulombianas, implica que las colisiones son en realidad una cantidad grande de deflexiones de pequeño ángulo antes que unas pocas de gran cambio angular. La frecuencia de colisión binaria se denota  $\nu_{ss'}$  que mide la frecuencia con que las partículas de la especie  $s$  son dispersadas por las de especie  $s'$ . Si se especifica sólo un subíndice, se indica la frecuencia total de colisiones para esa especie incluyendo los impactos con todas las otras como:

$$\nu_s \simeq \sum_{s'} \nu_{ss'} .$$

La pequeñez de la masa de los electrones en comparación con iones de carga unidad y temperaturas comparables de las distintas especies es tal que

$$\nu_e \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \nu_i .$$

### 1.3. Parámetros básicos de los plasmas

---

La frecuencia de colisiones  $\nu$  de un plasma (que no calcularemos sino que daremos las dependencias funcionales a partir de una expresión aproximada) mide la frecuencia con que la trayectoria de una dada partícula es deflectada un ángulo importante debido a la interacción con otras en un ángulo de  $90^\circ$ .

Se define el camino libre medio como

$$\lambda_{clm} \equiv \frac{v_t}{\nu}$$

y representa la distancia típica que la partícula viaja entre colisiones (es decir, eventos de *scattering* de  $90^\circ$ ). Un plasma dominado colisionalmente es uno en que

$$\lambda_{clm} \ll L ,$$

donde  $L$  es la longitud característica. El límite opuesto corresponde a un plasma no colisional. Las colisiones simplifican mucho la descripción del sistema al llevar al plasma a la situación de equilibrio estadístico caracterizado por la distribución de Maxwell-Boltzmann. Los caminos libres medios cortos permiten describir al plasma en términos de la naturaleza local de los parámetros.

Una cantidad típica asociada a la frecuencia de colisiones es el logaritmo de Coulomb

$$\nu \sim \frac{\ln(\Lambda)}{\Lambda} \omega_p .$$

Note que  $\nu \ll \omega_p$  para un plasma débilmente acoplado. Y por lo tanto las colisiones no interfieren seriamente con las oscilaciones del plasma. En cambio, cuando  $\nu \gg \omega_p$ , en los plasmas fuertemente acoplados, las colisiones previenen que ocurran oscilaciones, lo que está de acuerdo con la descripción de plasmas dominados por interacciones coulombianas que no exhiben una dinámica de plasma convencional. De las ecuaciones (1.1) y (1.6) se ve que

$$\nu \sim \frac{e^4 n \ln(\Lambda)}{4\pi \epsilon_0^2 m^{1/2} T^{3/2}} .$$

Por lo tanto, el plasma difuso y caliente tiende a ser no colisional, mientras que plasmas densos y fríos son fundamentalmente colisionales. En muchos plasmas el campo magnético intenso juega el papel que juegan las colisiones en los gases neutros. En tales plasmas las partículas cargadas son impedidas de moverse perpendicularmente al campo debido al pequeño valor del radio de Larmor. Dado que el confinamiento a lo largo de las líneas de campo es muy difícil de lograr, a menos que se trate de arcos o superficies cerradas, es usual hablar de plasmas no colisionales.

### 1.3.5. Plasmas magnetizados

Un plasma magnetizado es aquel en que la intensidad del campo magnético es suficientemente grande como para alterar la trayectoria de las partículas. Los plasmas magnetizados son anisótropos, responden en forma diferente a las fuerzas paralelas y perpendiculares del campo magnético.

Como es sabido, las partículas cargadas responden a la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} ,$$

moviéndose libremente en la dirección del campo magnético y ejecutando un movimiento circular en órbitas de Larmor en el plano perpendicular al campo. A medida que la intensidad del campo aumenta, las órbitas resultantes se vuelven más cercanas a las líneas de campo haciendo que las partículas se vuelvan más atadas a las líneas.

El radio de Larmor típico, o giro-radio, de una partícula cargada en un campo magnético es

$$r_L \equiv \frac{v_\perp}{\Omega} ,$$

donde

$$\Omega = eB/m ,$$

es la frecuencia de ciclotrón asociada al giro alrededor de la línea, y  $v_\perp$  es la componente de la velocidad, perpendicular a dicho campo. Hay un giro-radio diferente para cada especie. Cuando las temperaturas de las especies son comparables, la frecuencia de ciclotrón de los electrones es significativamente menor que la de los iones

$$\Omega_e = \frac{m_i}{m_e} \Omega_i \quad , \quad r_{L,e} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} r_{L,i} .$$

Un proceso o sistema de plasma se dice magnetizado si su longitud característica  $L$  ( $L \sim ((dB/dl)/B)^{-1}$ ) es grande comparada con el giro-radio. En el límite opuesto  $r_L \gg L$ , las partículas cargadas tienen trayectorias esencialmente lineales. Por lo tanto la habilidad del campo magnético para afectar significativamente las trayectorias de las partículas es medida por el parámetro de magnetización

$$\delta \equiv \frac{r_L}{L} .$$

Hay algunos casos de interés en los que los electrones están magnetizados pero los iones no. Convencionalmente referirse a un plasma magnetizado implica que las dos especies lo están, es decir cuando

$$\delta_i \equiv \frac{r_{L,i}}{L} \ll 1 .$$

### 1.3.6. Parámetro $\beta$ del plasma

El parámetro fundamental que da cuenta de un plasma magnetizado es el parámetro  $\delta$ . La medida del efecto inverso es el parámetro  $\beta$  y se define como la razón de la densidad de energía térmica  $nT$  con la densidad de energía magnética  $B^2/(2\mu_0)$  (también denominada presión magnética como se verá más adelante). Convencionalmente se identifica la densidad de energía del plasma con la presión

$$p \equiv nT ,$$

como en un gas ideal, con la temperatura en unidades de energía, y se define un valor de  $\beta_s$  para cada especie de plasma. Por lo tanto

$$\beta_s = \frac{2\mu_0 p_s}{B^2} .$$

El valor total de  $\beta$  resulta

$$\beta = \sum_s \beta_s .$$

Se verá en el Capítulo 4 que en los casos en que se puede despreciar la disipación (viscosa y Joule) el teorema de Alfvén nos asegura que el campo magnético y el fluido son solidarios. Es decir que las partículas cargadas sólo pueden moverse a lo largo de las líneas de campo; el movimiento transversal a las mismas es fuertemente inhibido. Esto es algo que ocurre a lo largo de toda la atmósfera solar y en la jerga de la disciplina solar se dice que el campo y el plasma están congelados. En la figura 1.3a se muestra la dependencia del parámetro  $\beta$  con la altura en la atmósfera. Desde los valores fotosféricos y cromosféricos pasando por la baja corona hasta la alta corona. Nótese que sólo en la baja corona el valor de  $\beta < 1$  y en todos los otros casos  $\beta > 1$ . Debido al congelamiento entre

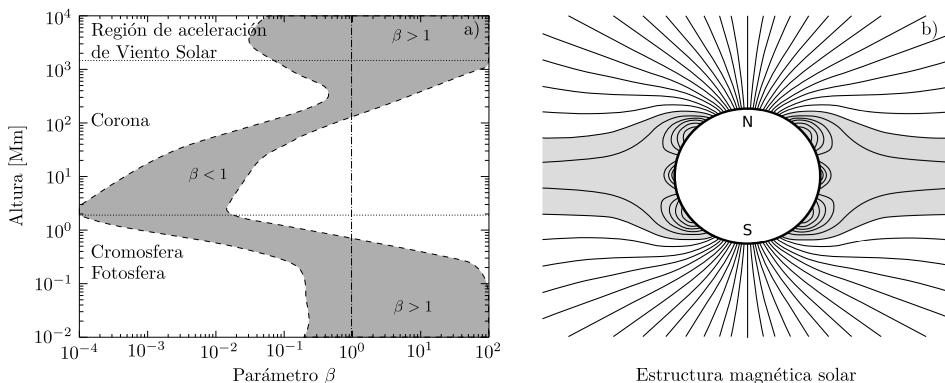


Figura 1.3: a) Diferentes valores del parámetro  $\beta$  en la atmósfera solar. b) Esquema de las líneas de campo magnético en la atmósfera solar.

el plasma y el campo, en el caso en que  $\beta < 1$  la presión magnética es mayor que la presión del gas y la dinámica es gobernada por el campo magnético. En cambio, cuando  $\beta > 1$  la dinámica es gobernada por el fluido debido a que la presión del gas es mayor. La figura 1.3b muestra esquemáticamente las líneas de campo en la corona solar. Como se ve, sólo en la baja corona las líneas son cerradas y esto es debido a que el campo domina la dinámica del plasma. Más allá de un radio solar las líneas de campo son abiertas debido a que el plasma gobierna la dinámica. La figura 1.4 que muestra las imágenes de la cromosfera (izquierda) y la baja corona solar (derecha), son una consecuencia directa del cambio en el comportamiento del parámetro  $\beta$ . En el primer caso, como en la cromosfera la dinámica es dominada por el movimiento del plasma la imagen resulta homogénea y sin estructura. Por el contrario, en el caso en que la dinámica es gobernada por el campo magnético se ve cómo tanto el plasma como la emisión del plasma son estructurados por el campo. Al parámetro  $\beta$  se lo conoce también como parámetro de estructuración del plasma.

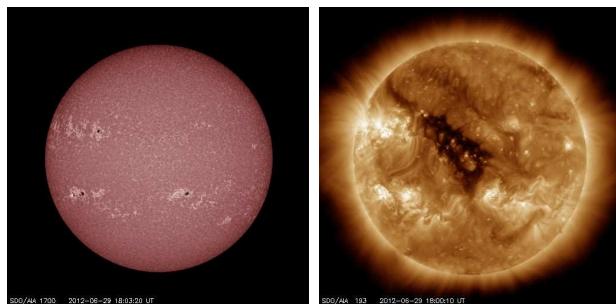


Figura 1.4: Imagen izquierda, la cromosfera; imagen derecha, la baja corona solar. Se pone de manifiesto el cambio determinado por la variación del parámetro  $\beta$ . (Cortesía SDO)

### 1.3.7. Validez de la hipótesis del continuo

Una cuestión que es importante discutir y que puede parecer paradójica es por qué en un plasma no colisional –como son la mayoría de los plasmas espaciales y entre ellos el de la corona solar– la hipótesis del continuo es válida. Parte de la complejidad para entender los procesos que ocurren en estos plasmas, proviene de la comparación con los fluidos neutros. En fluidos neutros las colisiones son frecuentes y se representan como colisiones directas, binarias o entre partículas individuales, sin que importe la presencia de otras partículas. En tal caso la frecuencia de colisiones es proporcional al número de partículas y a la sección eficaz, y se define el camino libre medio entre colisiones en función de esta ca-

### 1.3. Parámetros básicos de los plasmas

---

racterización del encuentro directo entre partículas. En casi todos los plasmas espaciales estas colisiones binarias están ausentes o son escasas debido a que no se puede prescindir del efecto de largo alcance entre partículas cargadas: una partícula es afectada por el efecto de muchas. Debido a ello las colisiones binarias son muy poco frecuentes. Por otro lado, si consideramos la colisión entre dos partículas sin la intervención de ninguna otra en un plasma espacial típico, resulta que el camino libre medio debido a estas colisiones es mucho mayor que la longitud característica del fenómeno a estudiar,

$$L \ll \lambda_{clm} .$$

Se diferencian estas colisiones directas (como las de partículas neutras) de las interacciones que ocurren entre muchas partículas, que se deben a que las fuerzas electromagnéticas son de largo alcance. A estos procesos también se los conoce como colisiones colectivas (denominación poco conveniente dado que puede dar lugar a confusión). En un plasma totalmente ionizado, como es el que nos ocupa, las partículas cargadas interactúan a través del campo eléctrico, responsable de garantizar la cuasineutralidad de estos plasmas compuestos por partículas libres. El campo eléctrico hace que las partículas estén vinculadas y contenidas unas con las otras sin que se produzcan apartamientos que lleven a variaciones importantes de la carga neta. Apartamientos de cargas conllevan campos eléctricos que instantáneamente se les oponen para restituir el equilibrio. Si bien como resultado de la acción de los campos las partículas son deflectadas a distancias interpartículas mucho mayores que las de los radios atómicos, (la sección eficaz es mucho mayor que en el caso de los neutros), las deflecciones, por acción de las interacciones colectivas, son de ángulo pequeño.

#### 1.3.8. Resumen

La cuasineutralidad está asociada a la longitud de Debye. Es la distancia mínima tal que para valores menores que esta longitud ya no hay neutralidad de cargas o apantallamiento de cargas. La longitud de Debye es también una medida del comportamiento colectivo de las partículas libres del plasma,

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{ne^2}} .$$

Para que esta neutralidad sea efectiva se requiere que en una esfera de Debye haya muchas partículas

$$\Lambda = 4\pi\lambda_D = \frac{4\pi\epsilon_0^{3/2}T^{3/2}}{e^3 n^{1/2}} .$$

El comportamiento temporal del plasma está asociado a la frecuencia de plasma. Esta frecuencia es una medida de la respuesta colectiva del plasma ante el intento de separación de las cargas,

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} .$$

Para que el comportamiento sea colectivo (para que el medio pueda ser considerado un plasma) y no un mero conjunto de partículas cargadas, se requieren dos condiciones: 1) que la longitud de Debye sea mucho menor que la longitud del fenómeno en estudio y 2) que la frecuencia de plasma sea mucho mayor que la frecuencia del fenómeno en estudio. Esto significa que los procesos que se estudian serán relativamente lentos y de longitudes largas,

$$\lambda_D \ll L \quad \omega \ll \omega_p .$$

Es así que a pesar de que las colisiones directas (como las colisiones en fluidos neutros) son despreciables, los campos eléctricos, encargados de garantizar la cuasineutralidad, y los campos magnéticos, que alteran las trayectorias individuales confinándolas a movimientos de giro alrededor de las líneas de campo, juegan el rol que tienen las colisiones en el caso de los fluidos neutros.<sup>2</sup>

A modo de comparación se puede mencionar que cuando un plasma es frío y muy denso, la longitud de Debye se hace muy pequeña y el número de partículas en una esfera de Debye  $\Lambda$ , disminuye  $\Lambda = 4\pi\epsilon_0^{3/2}T^{3/2}/(e^3n^{1/2})$ . Nótese que esta situación, en el límite, es parecida al caso de partículas neutras, hay pocas cargas de signo opuesto en una longitud pequeña, la longitud de Debye se aproxima a la del radio atómico y el plasma se parece a un fluido neutro.

En síntesis, para que un modelo macro sea válido dada una particular configuración del campo magnético, el tamaño, la duración, la densidad y el campo deben ser suficientemente grandes como para poder tener un comportamiento de fluido y como para que al promediar sobre las cantidades micro, estas dejen de estar presentes: es decir, para que el promedio borre la oscilación de plasma y el movimiento de ciclotrón.

<sup>2</sup>Si se cumplen las condiciones que limitan el comportamiento espacial y temporal de los plasmas dados por  $\lambda_D$  y  $\omega_p$  respectivamente, la integración de las ecuaciones cinéticas de Vlasov o momentos de dicha ecuación (Capítulo 2) lleva en forma directa a las ecuaciones de fluidos conocidas como magnetohidrodinámica. Más aún, el aporte de los procesos colectivos entra en la ecuación de Vlasov (es decir en la ecuación de Maxwell-Boltzmann sin término de colisiones directas) a través de la fuerza de Lorentz. En síntesis, como estas condiciones se ajustan a muchos de los procesos que ocurren en plasmas espaciales y en particular a los de la corona solar, la hipótesis del continuo se utiliza para estudiar la mayoría de los fenómenos astrofísicos de la corona solar.

### 1.3. Parámetros básicos de los plasmas

---

Lo característico de un plasma macro (no cinético) es la interacción entre el movimiento del plasma y la geometría del campo magnético. En esta caracterización el plasma es visto como un todo sin tener en cuenta las especies separadamente. Por otro lado los campos son generados por el movimiento mismo del plasma, tenemos así una situación altamente no lineal. La herramienta teórica para dar cuenta de este interjuego global entre plasma y campos es la MHD. Veremos que las ecuaciones de la MHD pueden escribirse sin que aparezca explícitamente el campo eléctrico (Capítulo 4). Se puede dar una explicación provisoria acerca de porqué el campo eléctrico se vuelve una cantidad secundaria en MHD. Los campos electrostáticos importantes, debidos al desbalance de cargas, solamente son posibles para escalas de la longitud de Debye que son promediadas y por tanto excluidas de la descripción, por otro lado las ondas electromagnéticas están ausentes en la descripción MHD (no relativista) debido a que la corriente de desplazamiento es despreciable. El campo eléctrico es entonces determinado a partir del campo de velocidades  $\vec{v}$  y del campo magnético  $\vec{B}$  por medio de la ley de Ohm para un plasma perfectamente conductor  $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \simeq 0$  lo que implica que el campo eléctrico en un sistema de coordenadas que se mueve con el plasma se anula.

#### Ejercicios

1.1 Encuentre la longitud de Debye,  $\lambda_{D,e}$ ,  $\lambda_{D,i}$ , el parámetro de plasma  $\Lambda_{D,e}$ ,  $\Lambda_{D,i}$ , la frecuencia de plasma  $\omega_{D,e}$ ,  $\omega_{D,i}$ , y la velocidad térmica de iones y electrones en las siguientes condiciones y diga si son plasmas:

- Máquina de fusión:  $n_e = n_i = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e = T_p = 10^7 \text{ K}$ .
- Magnetósfera de la Tierra:  $n_e = n_i = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e = T_p = 10^3 \text{ K}$ .
- Centro del Sol:  $n_e = n_i = 10^{26} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e = T_p = 10^{7.2} \text{ K}$ .
- La corona solar:  $n_e = n_i = 10^8 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e = T_p = 10^6 \text{ K}$ .
- La atmósfera de una estrella de neutrones:  $n_e = n_i = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e = T_p = 10^7 \text{ K}$ .

1.2 Defina con palabras: frecuencia de plasma, longitud de Debye, parámetro de plasma. Caracterice cada uno de los parámetros en sus límites

$$\begin{array}{lll} \omega_p^{-1} \ll \tau & \text{y} & \omega_p^{-1} \gg \tau \\ \lambda_D \ll L & \text{y} & \lambda_D \gg L \\ \Lambda \ll 1 & \text{y} & \Lambda \gg 1 . \end{array}$$

¿Por qué que haya muchas partículas en una esfera de Debye es compatible con un plasma caliente y poco denso?

¿Por qué  $\Lambda \gg 1$  se identifica con plasma no colisional?

- 1.3 ¿Qué significa que un plasma es magnetizado?  
 Calcule  $r_L$  y  $\Omega$ , el radio de Larmor y la frecuencia de ciclotrón dado un campo magnético externo
- $$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z \quad \text{y} \quad \vec{E} = 0.$$
- ¿Qué implicancias tiene respecto a la magnetización, que la frecuencia de colisiones sea mucho mayor que la de ciclotrón;  $\nu \gg \Omega$ ?  
 Suponga que tiene una partícula con velocidad térmica a la temperatura ambiente. Calcule la frecuencia de ciclotrón y el radio de Larmor de electrones y protones para un campo magnético de 1T.
- 1.4 Muestre que en un plasma no relativista ( $kT \ll m_e c^2$ ) la fuerza electrostática entre dos partículas es mucho más importante que la fuerza de Lorentz ( $qv_x B$ ) entre las mismas. ¿Qué aproximación se justifica a partir de ello?
- 1.5 Considere un plasma no magnetizado formado por protones y electrones en régimen estacionario, donde todos los electrones se mueven con velocidad  $\vec{v}_e$  debido a la presencia de un campo eléctrico ( $\vec{E}_{ext}$ ). Suponga que el régimen estacionario para los electrones se alcanza balanceando la fuerza eléctrica con una fuerza colisional  $\vec{F} = -m_e \nu_c (\vec{v}_e - \vec{v}_p)$  donde  $\nu_c$  es la tasa de intercambio de momento entre ambas especies, debido a que los electrones con velocidad  $\vec{v}_e$  son dispersados por protones de velocidad  $\vec{v}_p$ . Obtener la expresión  $\sigma = n_e e^2 / m_e \nu_c$  para la conductividad eléctrica ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ) donde  $n_e$  es la densidad de electrones.
- 1.6 El estado estacionario del problema anterior se idealizó considerando un flujo de electrones constante que viene desde el exterior. Si esto no ocurre el plasma tenderá a apantallar los campos eléctricos externos (apantallamiento de Debye). Considere dos placas planas paralelas infinitas separadas por una distancia  $2d$ , el espacio entre ambas se encuentra lleno de un plasma con  $n_e = n_i$ . Ambas placas están al mismo potencial. Se aplica una diferencia de potencial entre las placas ( $\Delta\phi$ ) mediante un condensador. Por simplicidad y dado que la masa de iones es mucho mayor que la de los electrones suponga que el cociente de masas es infinito tal que los iones están fijos y distribuidos uniformemente. Usando la función de distribución de Boltzmann para los electrones  $f(v) = \exp[(-\frac{1}{2}m_e v^2 - e\phi)/k_B T_e]$ , integrada en el espacio de velocidades y la ley de Poisson encontrar cómo será el perfil espacial del potencial en el estado de equilibrio, en el caso en que la energía térmica es mucho mayor que la del potencial eléctrico. Este problema supone conocer el contenido del Capítulo 3.
- Mostrar que si  $d \ll \lambda_D$  no se produce apantallamiento y el perfil de  $\phi$  es lineal. Graficar.
  - Mostrar que si  $d \gg \lambda_D$  el apantallamiento es fuerte y la longitud típica de penetración del campo eléctrico es del orden de  $\lambda_D$ . Graficar.
- 1.7 Busque en la bibliografía y describa las configuraciones y los problemas de los  $z$ -pinch y los  $\theta$ -pinch.

### 1.3. Parámetros básicos de los plasmas

---

- 1.8 Graficar el potencial de apantallamiento de alguno de los casos del problema 1.1, para una carga unidad en el origen. Compare con el vacío.



## Capítulo 2

---

# MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS

---

### 2.1. Introducción

Los procesos de plasma son descritos por diferentes modelos teóricos. Cuál es el que será usado depende del tipo de fenómeno que se desea describir. En términos generales hay tres tipos de modelos para describir la dinámica de partículas clásicas (sin considerar la mecánica cuántica):

- la teoría que describe a los sistemas como un conjunto  $N$  de partículas individuales y estudia el movimiento para campos eléctricos y magnéticos definidos. Si el número  $N$  es grande, este tratamiento no es viable.
- Una forma de tratar un conjunto grande de partículas individuales es mediante teorías estadísticas. La teoría cinética describe el plasma (descripción microscópica) a partir de la evolución de la función de distribución de los tipos de partículas del plasma en el espacio de posiciones y velocidades de las mismas.
- Una aproximación menos rigurosa pero mucho más tratable es la descripción de fluido o MHD. En ella se describe al plasma como un medio continuo en términos de funciones macroscópicas que dependen de la posición y del tiempo. Estas ecuaciones se obtienen promediando las ecuaciones cinéticas o estadísticas en el espacio de velocidades. Este caso es análogo al del tratamiento de un fluido neutro. Sabemos que un gas en equilibrio termodinámico es descrito en términos de dos variables termodinámicas. Un gas en movimiento no está en equilibrio termodinámico si lo consideramos como un todo, pero podemos suponer que un pequeño elemento de

volumen del gas, en el sistema en el que está en reposo, está aproximadamente en equilibrio termodinámico. Cuando esto es posible el estado del sistema se describe en términos de la velocidad y de dos variables termodinámicas, por ejemplo, la densidad y la temperatura del elemento de volumen en consideración. La velocidad, la densidad y la temperatura para todos los puntos del fluido en un determinado instante nos dan el estado del fluido en ese tiempo y las ecuaciones hidrodinámicas nos dicen como varían las variables en el tiempo. En el caso de los plasmas además de estas variables debe agregarse la del campo magnético. Como se mencionó y se verá más adelante el campo eléctrico generalmente no aparece en las ecuaciones MHD de un plasma.

En este apartado se presenta la descripción del movimiento de partículas individuales para campos eléctricos y magnéticos definidos.

En situaciones en las que se puede considerar que las partículas cargadas no interactúan entre sí y no afectan significativamente los campos magnéticos externos, el movimiento de cada partícula individual puede tratarse en forma independiente. Este tratamiento de partículas individuales es válido para plasmas muy rarificados donde los efectos colectivos son poco importantes. Se requiere además que los campos magnéticos sean grandes, mucho mayores que los campos magnéticos autoinducidos, es decir los generados por las corrientes debidas al movimiento de partículas cargadas internas al plasma en consideración.

Analizaremos en este capítulo el movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos y/o eléctricos en diferentes situaciones.

## 2.2. Movimiento en campos uniformes

Consideremos primero el movimiento en campos espacial y temporalmente uniformes. La ecuación de movimiento de una partícula cargada individual es

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (2.1)$$

La componente de esta ecuación paralela al campo magnético es

$$\frac{d\vec{v}_{||}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E}_{||} , \quad (2.2)$$

lo que predice aceleración uniforme a lo largo de las líneas de campo.

Sabemos que los medios conductores anulan el campo electrostático en su interior,  $\vec{E} = 0$ . Dado que los plasmas son buenos conductores de la electricidad, en el sistema que el plasma está en reposo los campos electrostáticos

## 2.2. Movimiento en campos uniformes

---

son rápidamente anulados por las corrientes libres. Es por esto que el campo electrostático no aparece en las ecuaciones MHD, en donde los procesos que se describen son relativamente lentos comparados con los tiempos en los que estos campos son anulados. Esto también es sugerido por la ecuación anterior (2.2), el campo eléctrico debe ser despreciable dado que si no lo fuera la velocidad paralela crecería indefinidamente. Es por ello que estados cercanos al equilibrio termodinámico local, los estados descritos por la MHD, y sin campos externos, deben tener campos  $\vec{E}_{\parallel}$  muy pequeños o nulos, aleatorios e inducidos por el movimiento térmico.

Como es sabido, el campo magnético induce un movimiento de giro de las partículas cargadas alrededor del mismo. Consideremos el caso  $\vec{E} = 0$ . Una forma rápida de describir el movimiento de una partícula sometida a un campo magnético constante en la dirección  $z$ , al que se le asocia la giro-frecuencia  $\Omega$ , es igualando a cero la ecuación (2.2), de ella se obtiene  $v_{\parallel} = \text{cte}$ . Esta ecuación también resulta de haber proyectado la ecuación:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.3)$$

en la dirección  $\hat{e}_z$  del campo magnético. Si ahora se proyecta sobre la dirección de  $\vec{v}$  nos queda que el módulo de la velocidad es constante es decir

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \left( m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) &= 0 \\ \rightarrow \frac{1}{2} mv^2 &= \text{cte}, \end{aligned}$$

es decir, dado que  $v$  y  $v_{\parallel}$  son constantes, también resulta

$$v_{\perp} = \text{cte}.$$

La expresión de las componentes paralela y perpendicular sugiere el tipo de órbita que puede esperarse.

Si se resuelve ahora la ecuación (2.3) componente a componente

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \quad \text{y} \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

donde  $B = |\vec{B}|$ . De modo que  $v_z = \text{cte}$  y definiendo

$$u \equiv v_x + i v_y$$

al multiplicar por la unidad imaginaria a la segunda ecuación de (2.4) y sumarla a la primera queda

$$m \frac{du}{dt} = -iqBu,$$

cuya solución es

$$u = u_0 \exp(-itqB/m) .$$

Si elegimos el instante inicial para que la velocidad tenga sólo componente  $y$ ,  $u_0 = iv_{y0}$ , la solución queda:

$$x = x_0 - \frac{v_{y0}m}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right), \quad y = y_0 + \frac{v_{y0}m}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad \text{y} \quad z = z_0 + v_{z0}t .$$

La trayectoria es una hélice con eje en la dirección  $z$  (paralela al campo) centrada en  $(x_0, y_0)$ , de radio (radio de Larmor)

$$r_L = \frac{v_\perp m}{|q|B}$$

donde  $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . La frecuencia angular del movimiento (definida positiva)

$$\Omega \equiv \frac{|q|B}{m}$$

se la llama frecuencia angular de ciclotrón. Si uno observa el movimiento enfrentando el campo magnético (como se muestra en la figura 2.1) las partículas positivas describen movimientos horarios y las negativas antihorarios, ambas con la frecuencia de ciclotrón, a la vez que avanzan con velocidad  $v_{z0}$  a lo largo del campo magnético. La frecuencia de ciclotrón tiene un sentido convencional que indica el sentido de giro. Es tal que la fuerza  $q\vec{v} \times \vec{B}$  apunta al centro de giro. Notemos que el campo magnético generado por la partícula se opone al campo original y se dice que el movimiento es diamagnético.

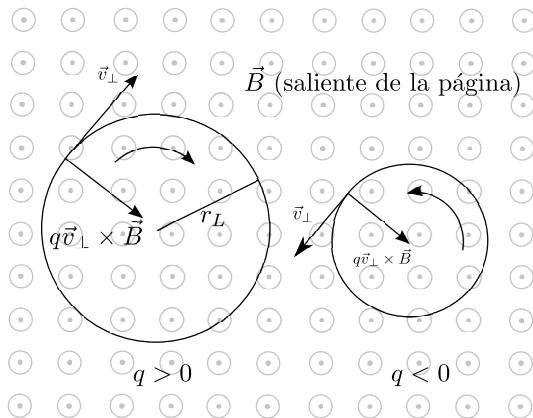


Figura 2.1: Movimiento de ciclotrón con campo magnético uniforme, para cargas positivas y negativas.

## 2.2. Movimiento en campos uniformes

---

Las giro-frecuencias de iones y electrones además de ser opuestas en sentido son diferentes en su magnitud debido a la pequeñez de  $m_e/m_i$

$$\Omega_e \equiv \frac{eB}{m_e} \gg \Omega_i \equiv \frac{eB}{m_i},$$

y suponiendo que  $T_e \sim T_i$

$$r_{L,e} \equiv \frac{v_{\perp,e}}{\Omega_e} \ll r_{L,i} \equiv \frac{v_{\perp,i}}{\Omega_i}.$$

Para valores típicos de un tokamak  $B = 3\text{T} = 30\text{kG}$  tenemos

$$\Omega_e = 5,3 \times 10^{11} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (84 GHz)} , \quad \Omega_i = 2,9 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (46 MHz)}$$

y estimando el giro-radio mediante la suposición de que la velocidad térmica es  $v_{térn} \equiv \sqrt{2kT/m}$  con electrones y protones a temperatura de  $T = 10\text{keV} = 1,6 \times 10^8 \text{K}$  resulta

$$v_{térn,e} = 5,9 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow r_{L,e} \simeq 0,1\text{mm} \quad \text{y} \quad v_{térn,i} = 1,4 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow r_{L,i} \simeq 5\text{mm}.$$

Estos valores sugieren que es posible promediar sobre el movimiento de giro en la descripción macroscópica de la dinámica del plasma; lo que se conoce como aproximación de centro guía (*guiding center approximation*).

Este movimiento helicoidal constituye por sí mismo una capacidad importante de confinamiento del plasma: las partículas cargadas están adosadas al campo magnético. El campo magnético  $\vec{B}$  determina la geometría de la dinámica de las partículas. También de la expresión del giro-radio  $r_L = v_{\perp}/\Omega = p_{\perp}/qB$  (este último es útil en el caso relativista) se obtiene la expresión  $p_{\perp}/q (= r_L B)$  que depende de las propiedades de la partícula únicamente y es una medida de cuánto puede una partícula ser deflectada por el campo magnético, se la denomina rigidez magnética de la partícula. Las energías de los rayos cósmicos son expresadas generalmente en términos de esta cantidad.

Otra característica importante de la giro-frecuencia es que depende del campo magnético exclusivamente (aparte de las constantes de la naturaleza). Del análisis de la emisión asociada a la frecuencia de ciclotrón, generalmente ondas de radio, es posible determinar tanto la intensidad como la dirección del campo magnético a grandes distancias de los mismos.

### 2.2.1. Movimiento de deriva

Volviendo a la ecuación (2.1), supongamos, sin pérdida de generalidad, que tenemos los campos externos uniformes

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z , \quad \vec{E} = E_0 \hat{e}_y$$

la fuerza de Lorentz se escribe

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(E_0 \hat{e}_y - v_x B_0 \hat{e}_y + v_y B_0 \hat{e}_x)$$

en componentes y reemplazando en la forma  $v_x \rightarrow \dot{x}$  se obtiene

$$\ddot{x} - \Omega \dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} - \Omega \left( \dot{x} - \frac{E_0}{B_0} \right) = 0$$

donde  $\Omega = qB/m$  es la frecuencia de Larmor. Si se realiza la transformación

$$\dot{x}' \longrightarrow \dot{x} - \frac{(\vec{E} \times \vec{B})_x}{B^2}$$

se obtienen las ecuaciones del movimiento sin campo electrostático. El movimiento consiste en un giro alrededor de la línea de campo magnético a la frecuencia  $\Omega$ , sobreimpuesto al movimiento de deriva con velocidad

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} . \quad (2.5)$$

Esta deriva es idéntica para todas las especies del plasma y puede ser eliminada enteramente al cambiar de sistema de coordenadas a uno en el que  $\vec{E}_\perp = 0$ . Tal sistema que se mueve con velocidad  $\vec{v}_E$  con respecto al sistema anterior puede ser pensado como el sistema en el que el plasma está en reposo (ver figura 2.2). En forma general el resultado anterior se escribe:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + r_L \Omega [\vec{e}_1 \sin(\Omega t + \gamma_0) + \vec{e}_2 \cos(\Omega t + \gamma_0)] ,$$

$r_L$  es el radio de Larmor,  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  son vectores tal que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{B})$  forman una base ortogonal y  $\gamma_0$  es la fase inicial de la partícula. Integrando separadamente

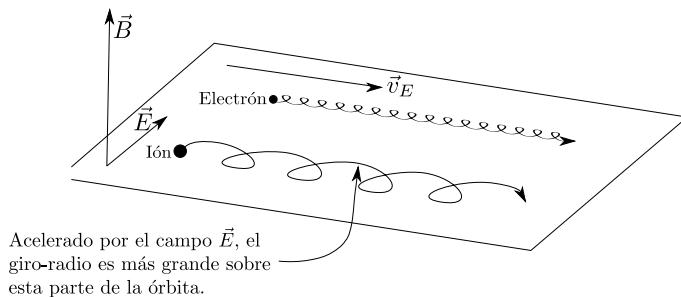


Figura 2.2: Movimiento de deriva considerando  $v_{0\parallel} = 0$  y  $E_{\parallel} = 0$ .

## 2.2. Movimiento en campos uniformes

---

los dos términos de la expresión anterior para describir el comportamiento de la partícula

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}(t) ,$$

donde

$$\vec{r}(t) = r_L[-\vec{e}_1 \cos(\Omega t + \gamma_0) + \vec{e}_2 \sin(\Omega t + \gamma_0)] ,$$

y

$$\vec{R}(t) = \left( v_{0\parallel} t + \frac{q}{m} E_{\parallel} \frac{t^2}{2} \right) \hat{b} + \vec{v}_E t .$$

Aquí  $\hat{b} \equiv \vec{B}/B$ . La trayectoria de la partícula es la de una espiral donde el centro de giro  $\vec{R}$  de la espiral, al que se denomina centro guía, deriva transversalmente al campo magnético con velocidad  $\vec{v}_E$  y también acelera a lo largo del campo eléctrico debido a la componente paralela de dicho campo.

El concepto de centro guía da indicios de cómo proceder en los casos no uniformes. Se desprecia la componente rápida y poco interesante de las oscilaciones periódicas y se focaliza en describir el movimiento lento del centro guía. La idea es tomar promedios sobre la componente del giro rápido para obtener el movimiento reducido al centro guía.

Volviendo a la expresión de la deriva ecuación (2.5) debe hacerse notar que ella no depende de la carga y que tanto electrones como iones derivan en la misma dirección. La razón de ello es el periódico aumento y decrecimiento de la velocidad perpendicular debido a la aceleración y desaceleración de la carga a medida que se mueve en el campo eléctrico. Los electrones son acelerados en una media fase, a la vez que los iones son desacelerados, pero dado que las órbitas tienen un sentido inverso de circulación el efecto neto es la deriva en la misma dirección.<sup>1</sup>

Si se reemplaza la fuerza eléctrica  $q\vec{E}$  por cualquier otra fuerza se encuentra una expresión similar para la deriva

$$\vec{V}_d = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}$$

---

<sup>1</sup>El hecho de que la deriva sea independiente de la carga lleva a otra reflexión. Si se considera un sistema inercial moviéndose con velocidad  $\vec{v}$  en la dirección de  $\vec{E} \times \vec{B}$ , dado que los tres vectores son mutuamente ortogonales los campos en el sistema en movimiento vienen dados por la transformación de Lorentz  $\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  y  $\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E})$  si elegimos  $\vec{v} = \vec{V}_d$  queda  $\vec{E}' = 0$ ; es decir las partículas se mueven de tal manera que en el sistema en movimiento el campo eléctrico se anula. Esto está en perfecto acuerdo con el movimiento de un plasma perfectamente conductor consistente en un número grande de partículas de cargas opuestas:  $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$  es una de las ecuaciones fundamentales para tal plasma.

vemos que aunque la fuerza es independiente de la carga, como por ejemplo la gravedad, la deriva se vuelve dependiente de la carga, es decir, los electrones y iones derivan en direcciones opuestas y se genera un flujo de corriente eléctrica. En el apartado siguiente utilizaremos esta expresión general para calcular otras derivas como las que producen campos magnéticos no uniformes.

### 2.3. Movimiento en campos no uniformes

Analizamos ahora el movimiento de partículas cargadas en campos de inducción magnética constante en el tiempo pero no uniformes y con campo eléctrico nulo. Haremos el cálculo en forma aproximada. Supondremos que la escala de longitudes en la que la variación del campo es apreciable es mucho mayor que el radio de giro de las partículas. Podemos suponer entonces que la aproximación de orden cero es tal que las partículas realizan un movimiento helicoidal alrededor de una línea de  $\vec{B}$  con la frecuencia de Larmor que corresponde al valor local de la inducción magnética. Una corrección de primer orden en la trayectoria consiste entonces en el desplazamiento del centro de giro.

Estudiaremos dos variaciones espaciales diferentes: cuando  $\vec{B}$  mantiene la dirección pero su módulo se modifica en dirección normal a  $\vec{B}$ , y cuando las líneas del campo tienen curvatura pero el módulo del campo se mantiene constante. El caso en el que el módulo varía con la dirección del campo se verá junto con el análisis de las variaciones temporales.

#### 2.3.1. Deriva $\nabla B$

El campo magnético  $\vec{B}$  tiene una dirección constante ( $\hat{e}_z$ ) y su módulo varía en el plano perpendicular a  $\hat{e}_z$

$$\vec{B} = B(x, y)\hat{e}_z .$$

La ecuación del movimiento perpendicular al campo se escribe

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} &= q\vec{v}_\perp \times \vec{B} \simeq q\vec{v}_\perp \times \left[ \vec{B}_0 + (x - x_0) \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right|_0 + (y - y_0) \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right|_0 \right] \\ &\simeq q\vec{v}_\perp \times \vec{B}_0 + q\vec{v}_{\perp 0} \times \left[ (x - x_0) \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right|_0 + (y - y_0) \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right|_0 \right], \end{aligned}$$

tomamos el eje de la hélice en  $(x_0, y_0)$  donde el campo vale  $\vec{B}_0$ . Suponemos que las variaciones de  $\vec{B}$  son muy suaves en el sentido de que las longitudes

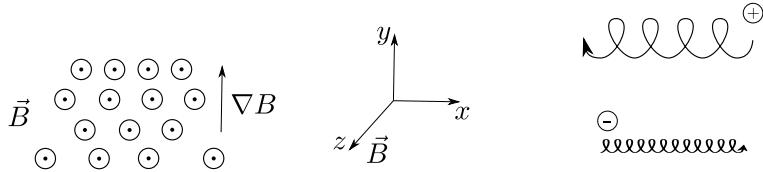


Figura 2.3: Deriva de partículas a través del gradiente de la magnitud del campo magnético.

características de su variación son muy grandes comparadas con el radio de Larmor. Debido a que nos quedamos con el orden lineal, la velocidad perpendicular  $\vec{v}_\perp$  fue reemplazada por el término  $\vec{v}_{\perp 0}$ , correspondiente al movimiento no perturbado por la variación local del campo. Reescribiendo la ecuación de movimiento no perturbada

$$\begin{aligned} v_{x0} &= \frac{q}{|q|} r_L \Omega \sin(\Omega t) \rightarrow x = x_0 - \frac{q}{|q|} r_L \cos(\Omega t), \\ v_{y0} &= r_L \Omega \cos(\Omega t) \rightarrow y = y_0 + r_L \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

vemos que a la fuerza  $q\vec{v}_\perp \times \vec{B}_0$  se adiciona otra, también perpendicular a  $\vec{B}_0$  que contiene términos oscilantes con la frecuencia de ciclotrón (de su primera armónica para ser precisos). Nos interesa, sin embargo, el efecto de esta fuerza a tiempos largos comparados con el período de ciclotrón  $T_c = 2\pi/\Omega$  de modo que tomamos el promedio temporal sobre un período

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{T_c} \int_t^{t+T_c} \dots dt .$$

Se puede mostrar, como se verá en uno de los ejercicios del capítulo, que el resultado es la ecuación (2.7) teniendo en cuenta  $\vec{B} = B(x, y)\hat{e}_z$  y la ecuación (2.6)

$$\vec{F}_\perp \equiv \left\langle q\vec{v}_{\perp 0} \times \left[ (x - x_0) \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \Bigg|_0 + (y - y_0) \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \Bigg|_0 \right] \right\rangle = -\frac{1}{2} |q| r_L^2 \Omega \nabla_\perp B . \quad (2.7)$$

De donde la deriva correspondiente resulta

$$\vec{V}_{d\nabla} = W_\perp \frac{\vec{B} \times \nabla_\perp B}{qB^3} , \quad (2.8)$$

se ha definido la energía cinética correspondiente al movimiento perpendicular

$$W_\perp \equiv \frac{1}{2} mr_L^2 \Omega^2 = \frac{1}{2} mv_\perp^2 .$$

La deriva del gradiente se puede entender cualitativamente viendo que el radio de giro es inversamente proporcional a  $B$ ; cuando la partícula va hacia una zona de mayor intensidad de campo, el radio disminuye en una mitad del período y ocurre lo inverso en la otra mitad (ver figura 2.3).

La deriva opuesta de iones y electrones lleva a una corriente transversal dada por

$$\vec{j}_{d\nabla} = n_e e (\vec{v}_{i\perp} - \vec{v}_{e\perp}) = \left( \frac{n_e(\mu_i + \mu_e)}{B^2} \right) \vec{B} \times \nabla B$$

donde se ha utilizado el momento magnético dado por

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B}$$

para describir la razón entre la energía perpendicular y el campo magnético.

### 2.3.2. Deriva de curvatura

Consideremos un campo de inducción de módulo uniforme tal que las líneas de campo tienen curvatura  $R$  (como se ve en la figura 2.4), tenemos entonces un campo de módulo constante con una curvatura ligera. Supongamos que la partícula cargada tiene en un punto una velocidad,  $v_{\parallel}$ , tangente a la línea y se cumple

$$r_L \ll R .$$

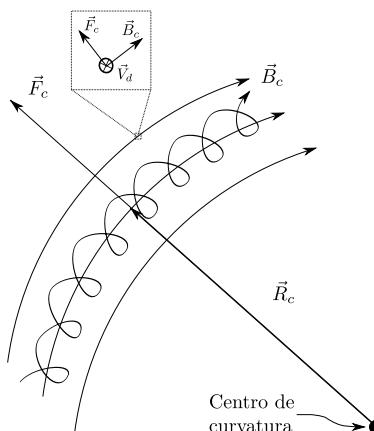


Figura 2.4: Movimiento de una partícula en un campo magnético curvado. La curvatura es medida por el radio de curvatura  $\vec{R}_c$  el cual apunta hacia afuera, desde el centro de curvatura. La partícula siente una fuerza centrífuga efectiva y deriva como si  $\vec{F}_c$  actuara sobre ella.

### 2.3. Movimiento en campos no uniformes

---

En el sistema que rota con velocidad angular  $v_{\parallel}/R$ , a la fuerza debida a  $\vec{B}$  se le agrega la fuerza centrífuga

$$\frac{m_0 v_{\parallel}^2}{R} .$$

Tomando como  $\vec{B}$  el del sistema inercial con igual velocidad en el punto donde está la partícula, que es igual a  $\vec{B}$  en el sistema original, se tendrá una situación similar a la de campos eléctrico y magnético uniformes con  $\vec{E} \perp \vec{B}$  dado que la fuerza centrífuga equivale a un campo eléctrico en la dirección  $\vec{R}$  de magnitud

$$\vec{E}_{efec} = \frac{m_0 v_{\parallel}^2}{R^2} \vec{R} \quad (2.9)$$

teniendo en cuenta que la curvatura de las líneas es pequeña aparece entonces una deriva del tipo  $\vec{E} \times \vec{B}$  dada por la ecuación (2.10). En el sistema en rotación tendremos un movimiento circular sumado a una traslación en dirección perpendicular a  $\vec{B}$  y a  $\vec{R}$ , llamada deriva de curvatura:

$$\vec{V}_{d_C} = \frac{m_0 v_{\parallel}^2}{q R^2 B^2} \vec{R} \times \vec{B} = \pm \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega R} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{RB} . \quad (2.10)$$

La deriva de curvatura es proporcional a la energía paralela,  $W_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ , y perpendicular al campo magnético y su curvatura. Crea una corriente transversal dado que los iones y electrones derivan con signos opuestos. La corriente de curvatura tiene la forma

$$\vec{j}_{d_C} = n_e e (\vec{v}_{ci} - \vec{v}_{ce}) = \frac{2n_e (W_{i\parallel} + W_{e\parallel})}{R^2 B^2} \vec{R} \times \vec{B} .$$

Como las derivas, la corriente es perpendicular a la curvatura del campo y al mismo campo.

Si el campo tiene simetría cilíndrica ocurre que  $\nabla B = (B/R^2)\vec{R}$ , de modo que podemos sumar la deriva de gradiente y la de curvatura para obtener la deriva total

$$\vec{v}_B = \vec{V}_{d_C} + \vec{V}_{d_{\nabla}} = \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{B} \times \nabla B}{\Omega B^2}$$

que resulta ser la corriente transversal asociada a la deriva del campo magnético total que crea las corrientes de anillo de la magnetósfera. Se volverá sobre este tema.

## 2.4. Invariantes adiabáticos

En la sección anterior hemos definido al momento magnético de una partícula,

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B} .$$

Esta cantidad es tratada como una constante característica de las partículas. Pertenece al tipo de constantes conocidas como *invariantes adiabáticos*. Un invariante adiabático es una propiedad del sistema que se mantiene invariante cuando los cambios que ocurren en él son lentos. No son constantes absolutas como las establecidas por las leyes de conservación dado que pueden variar espacial y temporalmente aunque varían lentamente comparadas con periodicidades típicas del movimiento de las partículas.

Para partículas en campos electromagnéticos estos invariantes se determinan en función de las periodicidades características del movimiento de las partículas en dichos campos. El momento magnético  $J_1 = \mu$  se asocia al movimiento de giro alrededor del campo magnético,  $J_2$ , con el movimiento longitudinal a lo largo del campo y el tercer invariante  $J_3$  con la deriva perpendicular.

Para dar cuenta de las conservaciones se utilizan las variables de acción:  $J \equiv \oint P dQ$  donde  $P$  es el momento generalizado conjugado de una coordenada periódica  $Q$ . Para partículas no relativistas en un campo electromagnético, el momento generalizado se define  $\vec{P} \equiv m\vec{v} + q\vec{A}$  donde  $\vec{A}$  es el potencial vector correspondiente al campo magnético  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

### 2.4.1. Movimiento en campos dependientes del tiempo

Para analizar el movimiento de partículas en campos de inducción lentamente variables con el tiempo se tendrá en cuenta que en la aproximación de orden cero el movimiento, en el plano perpendicular al campo, es periódico. Estos resultados sirven también para movimientos en campos estáticos cuyo módulo varía en la dirección del campo. Ello se debe a que cuando el centro de giro se traslada, desde el punto de vista de la partícula, es como si hubiera una variación temporal.

Más formalmente decimos que un invariante adiabático es una aproximación de un tipo de invariante fundamental llamado invariante de Poincaré que tiene la forma

$$J_i = \oint_{C(t)} \vec{p}_i \cdot d\vec{q}_i ,$$

donde todos los puntos en una curva cerrada  $C(t)$  en el espacio de las fases se mueven de acuerdo con la ecuación de movimiento. Es decir, sabemos que

## 2.4. Invariantes adiabáticos

cuando pueden definirse variables de acción como en la ecuación anterior en movimientos periódicos de las coordenadas generalizadas  $q_i$  con momento conjugado  $p_i$ , estas variables son constantes ante cambios lentos comparados con los períodos  $T_i$  del movimiento de las  $q_i$ . Más precisamente, se deduce que si los parámetros varían con un tiempo característico  $T_p$  (como el de un campo lentamente variable con el tiempo), la variación relativa de los  $J_i$  es del orden  $\exp[-T_p/T_i]$ .

El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético es un ejemplo clásico en el que los invariantes adiabáticos son

$$J_1 = \oint \vec{p}_\perp \cdot d\vec{l}$$

que corresponde a  $\mu$  (figura 2.5a);

$$J_2 = \oint \vec{p}_\parallel \cdot d\vec{l},$$

y

$$J_3 = \oint m\vec{V}_d \cdot d\vec{l}.$$

Para que esté definido  $J_2$  (figura 2.5b) el movimiento a lo largo de las líneas de campo debe ser periódico, mientras que para que esté  $J_3$  definido el movimiento debido a la deriva debe serlo. Este último es en sí muy lento por lo general de modo que para que sea útil los parámetros deben variar muy lentamente, lo que pocas veces sucede (ver figura 2.5c). Téngase en cuenta que una partícula cargada en un campo electromagnético tiene impulso canónico

$$\vec{p} = m_0\vec{v} + q\vec{A}.$$

Es entonces conveniente trabajar los sistemas periódicos de modo que para cada variable generalizada  $q_i$  y para el correspondiente impulso generalizado  $p_i$

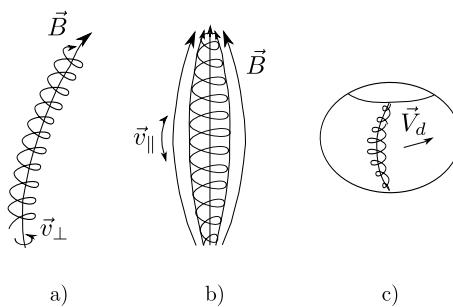


Figura 2.5: a) Movimiento de giro. b) Movimiento de rebote. c) Movimiento de deriva.

quede definida la integral de acción sobre un período

$$J_i = \oint p_i dq_i .$$

Por lo tanto un sistema periódico, o multiplemente periódico es tal que  $J_i$  es constante –o constante a primer orden en la variación temporal (adiabático)– sobre cada trayectoria.

### 2.4.2. Aplicaciones

#### Botellas y espejos magnéticos

Dado que las variables de acción son invariantes adiabáticas, utilizaremos este resultado para analizar el movimiento de una partícula cargada en un campo de inducción  $\vec{B}$  lentamente variable. Busquemos cuál es la variable de acción para el movimiento transversal a  $\vec{B}$  para un campo uniforme y constante. Eligiendo  $\vec{B} = B\hat{e}_z$ , el impulso corresponde al movimiento en el plano perpendicular, resultando que:

$$J = \mp \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi \quad (q > 0(-) \text{ o } q < 0(+)) .$$

Teniendo en cuenta la expresión para el impulso, a un dado ángulo de rotación le corresponde un impulso canónico (impulso angular) dado por

$$p_\varphi = m_0 r v_\varphi + qr A_\varphi = m_0 r^2 \dot{\varphi} + qr A_\varphi$$

y como para un campo con inducción uniforme en la dirección  $z$  se puede elegir

$$A_\varphi = \frac{Br}{2}$$

ya que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \hat{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 B/2)}{\partial r} \hat{e}_z = B\hat{e}_z .$$

Considerando el signo de la frecuencia de ciclotrón, si la carga es positiva, el ángulo va en el sentido de las agujas del reloj y el sentido es decreciente:

$$\dot{\varphi} = -\frac{qB}{m_0}$$

y de lo anterior

$$p_\varphi = -r^2 q B + qr^2 \frac{B}{2} = -\frac{r^2 q B}{2} \quad (2.11)$$

## 2.4. Invariantes adiabáticos

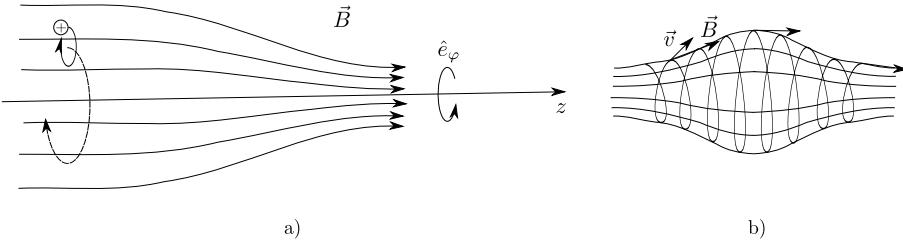


Figura 2.6: Configuración magnética en donde  $\nabla B \parallel \vec{B}$ . a) Espejo magnético. b) Botella magnética.

calculando la integral de acción resulta

$$J = \pi r^2 |q| B .$$

El invariante  $J$  es entonces proporcional al flujo magnético ( $\sim BA$ ) que atraviesa una espira y puede expresarse en función del momento magnético  $\mu = \pi r^2 I$  de la misma, teniendo en cuenta que su corriente es  $q\Omega/2\pi$  como:

$$J = \frac{2\pi m_0}{q} \mu .$$

También se puede poner como

$$J = \frac{\pi m_0^2 v_\perp^2}{|q|} \frac{B}{B} \quad (2.12)$$

reemplazando la expresión del radio de Larmor en (2.11).

Si  $B$  varía lentamente en el tiempo, la trayectoria se irá modificando de modo que  $J$  no cambie, o sea que el flujo de  $B$ , y por lo tanto el número de líneas que atraviesan una espira, se mantiene constante.

Lo mismo sucede si la variación de  $\vec{B}$  es espacial, al variar el módulo en la dirección de movimiento, de forma que al trasladarse la partícula en la dirección del campo es afectada por una variación lenta. En efecto, si se mueve hacia regiones donde el campo es más intenso disminuye el radio de giro y a la inversa (ver figura 2.6a). Esto trae además otra consecuencia; en movimientos con campos magnéticos estacionarios se conserva la energía, luego tenemos:

$$v_\parallel^2 + v_\perp^2 = v^2 = \text{cte}$$

$$v_\parallel^2 = v^2 - v_\perp^2 .$$

De la ecuación (2.12) vemos que si aumenta  $B$  debe aumentar  $v_\perp$  para mantener  $J$  invariante. Por lo tanto  $v_\parallel^2$  disminuye (dado que  $v^2 = \text{cte}$ ) y, si la variación

de  $B$  es suficiente, la velocidad paralela puede llegar a anularse. Cuando esto sucede la partícula no puede avanzar, dado que se violarían las conservaciones de  $v^2$  y  $J$ . Al llegar a ese punto, la velocidad cambia de signo con lo que la partícula retrocede. A este efecto se lo conoce como *espejo magnético* (ver figura 2.6a). Si la configuración del campo magnético es la de la figura 2.6b y tanto la energía de la partícula como su velocidad paralela son las adecuadas, la partícula queda atrapada. Esta configuración se conoce como *botella magnética*, cada vez que la partícula llega a uno de los extremos de la botella no puede avanzar. Estas configuraciones fueron pensadas como formas de confinamiento del plasma para la fusión nuclear controlada aunque luego fueron abandonadas debido a que dan lugar a inestabilidades importantes.

### Cinturón de Van Allen y corrientes de anillo

Los efectos botella y espejo magnéticos también los encontramos asociados al campo de inducción magnética de la Tierra. Las partículas cargadas con la energía adecuada quedan atrapadas por el campo magnético formando lo que se conoce como *cinturón de Van Allen*. Las partículas que entran a regiones de mayor intensidad de campo magnético son reflejadas hacia la región de menor intensidad donde el giro-radio es mayor y la velocidad perpendicular es menor.

El campo de la Tierra se asemeja al de un dipolo con momento magnético apuntando de norte a sur. Teniendo en cuenta el movimiento de una partícula en este campo dipolar encontramos tres movimientos periódicos a los que es posible asociarles los tres invariantes descritos anteriormente.

El primer invariante  $J_1$  es el que presentamos en el apartado anterior y corresponde al movimiento helicoidal de las partículas alrededor de las líneas de campo. Pero además, del mismo modo que en la botella magnética, para rangos adecuados de las velocidades, las partículas quedan atrapadas entre dos puntos de retorno o *puntos espejo*  $M$  y  $M_*$ , en los hemisferios norte y sur (figuras 2.7a-c). Veamos que el valor del campo de inducción magnético en  $M$  y  $M_*$ ,  $B_M$ , depende del valor del invariante  $J_1$  y de  $v^2$ .

$$J_1 = \frac{\pi m_0^2}{|q|} \frac{v_\perp^2}{B} = C \frac{v_\perp^2}{B} .$$

En los puntos  $M$  y  $M_*$ ,  $v_\parallel^2 = 0$ ,  $B = B_M$  y entonces  $v_\perp^2 = v^2$  quedando

$$J_1 = C \frac{v^2}{B_M} \quad \text{o sea} \quad B_M = \frac{C v^2}{J_1} .$$

De modo que el centro de giro realiza una oscilación latitudinal entre  $M$  y  $M_*$ .

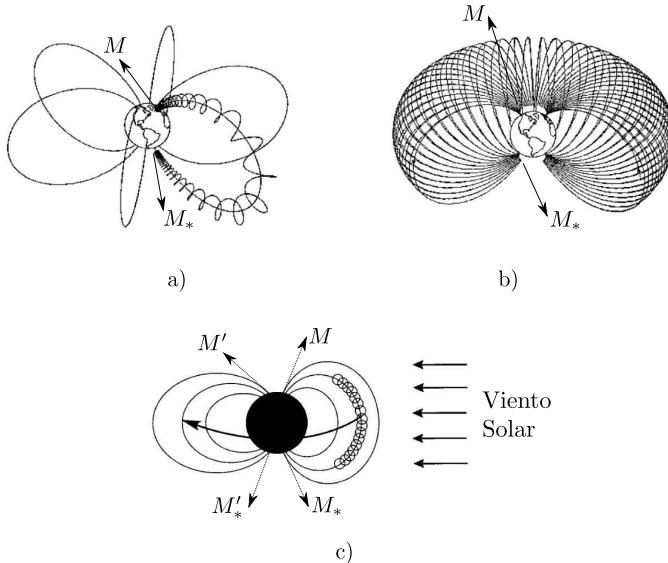


Figura 2.7: a) Trayectoria típica de una partícula cargada atrapada en el campo magnético de la Tierra. b) Trayectoria típica de una partícula cargada en la magnetósfera de la Tierra, excluyendo el movimiento de giro. c) La distorsión del campo magnético de la Tierra, por el viento solar.

Encontremos el invariante  $J_2$ .

$$J_2 = \oint \vec{p}_{\parallel}^{CG} \cdot d\vec{l} = \oint m_0 \vec{v}_{\parallel}^{CG} \cdot d\vec{l} \quad (2.13)$$

con  $CG$  queremos hacer notar que las componentes del impulso y velocidad son las del centro guía; eligiendo

$$v_{\parallel} = v \cos(\alpha) \quad \text{y} \quad v_{\perp} = v \sin(\alpha) ,$$

$\alpha$  se lo conoce como ángulo de pitch (el ángulo entre el campo magnético y el vector velocidad de la partícula), y por la invariancia de  $J_1$

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v^2}{B_M} \implies \sin^2(\alpha) = \frac{B}{B_M} \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{B}{B_M}} .$$

Reemplazando en la ecuación (2.13)

$$J_2 = 2vm_0 \int_{M_*}^M \sqrt{1 - \frac{B}{B_M}} dl .$$

De la misma forma se puede calcular el período de la oscilación latitudinal ( $dt_l = 2dl/v_{\parallel}$ )

$$T_l = \frac{2}{v} \int_{M_*}^M \frac{dl}{\sqrt{1 - \frac{B}{B_M}}} .$$

El tercer invariante se describe teniendo en cuenta que la oscilación latitudinal no se realiza siempre en el mismo meridiano sino que hay una deriva en  $\varphi$ . Esta deriva se debe a las derivas de  $\nabla B$  y de curvatura, dado que en el campo magnético dipolar varían tanto el módulo como la curvatura de sus líneas. Ambas derivas apuntan en el mismo sentido siendo hacia el oeste para cargas positivas y hacia el este para negativas (ecuaciones (2.8) y (2.9)) produciendo corrientes que se conocen como las corrientes de anillo.

Si el campo de inducción magnética es puramente dipolar, el centro de giro al derivar en azimut encontrará valores de  $B$  iguales y no modificará la altura  $r$  medida desde el centro de la Tierra –por la que pasa el Ecuador de su movimiento oscilatorio–, ni los puntos espejo  $M$  y  $M_*$  (figura 2.7b). Pero el campo de la Tierra no es exactamente dipolar, entre otras razones por la presencia del viento solar, que “aplasta” las líneas del lado del Sol y las separa del lado contrario (figura 2.7c). La variación de  $\vec{B}$  que encuentra la partícula al derivar en  $\varphi$  en una oscilación latitudinal es lo suficientemente pequeña como para considerarla una variación adiabática. Se conservan entonces,  $J_1$  y  $J_2$  y la partícula, al derivar en  $\varphi$  modificará levemente  $M$  y  $M_*$  (transformándose en  $M'$  y  $M'_*$ ) para que –aunque el campo sea diferente que en la oscilación anterior–  $J_1$  y  $J_2$  se conserven. Esto hará que el  $r$  que tiene al pasar por el Ecuador se modifique; pero al seguir derivando en  $\varphi$  dando un giro completo, volverá a ser el mismo.

Finalmente asociado al movimiento en un campo dipolar hay otro invariante,  $J_3$ . Al derivar en azimut, en su oscilación latitudinal, el promedio de la posición del centro de giro realiza una rotación alrededor de la Tierra, movimiento periódico,  $T_\varphi$ . El invariante  $J_3$  es el asociado al flujo de  $\vec{B}$  concatenado por esa trayectoria circular (figura 2.7c).

Si  $\vec{B}$  varía temporalmente en forma lenta (por ejemplo a lo largo de décadas), el radio de esa trayectoria deberá modificarse de modo de mantener el flujo constante. Los períodos de los movimientos de giro alrededor de  $\vec{B}(\tau)$ , la de oscilación latitudinal ( $T_l$ ) y la de rotación alrededor de la tierra ( $T_\varphi$ ) son de orden de magnitud diferente. Para tener idea de los rangos de variación se puede ver la Tabla 2.1.

### Ejercicios

#### 2.1 Demuestre que dados dos campos externos

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z \quad \text{y} \quad \vec{E} = E_0 \hat{e}_y$$

## 2.4. Invariantes adiabáticos

---

Protones	$10^5$ eV
$\tau$	$10^{-2} - 10^{-4}$ s
$T_l$	10 s
$T_\varphi$	$10^4$ s
Electrones	$10^4$ eV
$\tau$	$10^{-5} - 10^{-7}$ s
$T_l$	1 s
$T_\varphi$	$10^5$ s

Tabla 2.1: Períodos característicos de los invariantes adiabáticos.

la deriva resulta

$$\vec{V}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Dibuje cualitativamente la trayectoria de una carga positiva y una negativa.  
Usando la transformación de Lorentz

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

para un sistema que se mueve con  $\vec{V}_d$  muestre que  $\vec{E}' = 0$ . Interprete el resultado.

- 2.2 Calcule explícitamente la expresión de la ecuación (2.7) siguiendo las indicaciones dadas allí. Muestre que

$$\vec{V}_d = -W_\perp \frac{\nabla_\perp B \times \vec{B}}{qB^3}$$

donde  $W_\perp = \frac{1}{2}mv_\perp^2$ . Dibuje cualitativamente para protones y electrones.

- 2.3 Defina invariante adiabático. ¿Cuál es el movimiento periódico asociado a cada uno de los invariantes  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  de la Tierra? ¿Qué modificaciones del campo  $\vec{B}$  de la Tierra hacen que tales movimientos no sean estrictamente periódicos? Analice los órdenes de magnitud de la Tabla 2.1, estime las variaciones del  $\vec{B}$  terrestre y discuta la rigurosidad relativa de la invariancia de los  $J_i$ .

- 2.4 Calcule el radio de Larmor y la giro-frecuencia para las siguientes partículas.
- Un electrón de 10keV moviéndose con un ángulo de pitch de  $45^\circ$  con respecto al campo magnético de la Tierra de 30000nT (nano Teslas).
  - Un protón del viento solar a 400km/s perpendicular a un campo de 5nT.
  - Un ión de  $\text{He}^+$  en la atmósfera solar cerca de una mancha solar donde el campo es  $B = 5 \times 10^{-2}$ T ( $v_\parallel = 0$ ).

- 2.5 El campo magnético de la Tierra en el plano ecuatorial puede ser expresado como

$$B = B_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^3$$

donde  $B_0 = 0,3 \times 10^{-4}\text{T}$ ,  $R_T$  es el radio de la Tierra (6400km), y  $r$  es la distancia al centro de la Tierra. Derive una expresión del período de deriva de una partícula afectada por la influencia de la deriva de  $\nabla B$  (el tiempo para una órbita de la Tierra). Evalúe el período para un protón y un electrón de 1keV a una distancia de  $5R_T$ . Compare el resultado con a) la deriva inducida por la fuerza de gravedad en las mismas partículas y b) el período orbital de una partícula no cargada en la misma posición. Dato: masa de la Tierra:  $6 \times 10^{24}\text{kg}$ .

- 2.6 OPCIONAL Una partícula no relativista de masa  $m$  y carga  $q$  se mueve en el campo magnético estacionario y axialmente simétrico de una mancha solar que se supone uniforme debajo de la atmósfera solar y decae uniformemente con la altura  $h$  como:

$$B = B_0 \frac{H^3}{H^3 + h^3}$$

para  $h \geq 0$ ,  $H$  es una constante y  $B_0$  es el campo en  $y$  debajo de la superficie.

- a. Grafique esquemáticamente las líneas de campo.
- b. Si partículas con  $v$  son producidas en la superficie con una distribución isótropa (se mueven en todas las direcciones igualmente) y conservan el momento magnético  $\mu_m$ , muestre que a medida que se mueven en episodios sucesivos a mayores alturas  $h$  las partículas poseen un rango de ángulo de pitchs menores. Ayuda: Dibuje una esfera en el espacio  $(v_{\parallel}, v_{\perp})$  y considere las partículas con ángulo de pitch cerca de  $90^\circ$ .
- c. Explique cómo este proceso de “enfoque magnético” produce una distribución tipo haz.

## Capítulo 3

---

# TEORÍA CINÉTICA DEL PLASMA: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES MACROSCÓPICAS

---

### 3.1. Introducción

Hay dos formas de introducir las ecuaciones de la MHD: postularlas como la descripción de la dinámica del plasma o derivarlas promediando las ecuaciones cinéticas apropiadamente. Aquí seguiremos el segundo paso; deduciremos las ecuaciones de fluido a partir de la teoría cinética que describe microscópicamente al plasma utilizando la función de distribución de partículas para distintas especies  $f_{e,i}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Vimos que la teoría de plasma basada en el movimiento de partículas con órbitas individuales es válida sólo cuando la densidad de partículas es tan baja que la interacción entre ellas puede ser ignorada. Sin embargo, el plasma consiste de un gran número de partículas cargadas y debe usarse una aproximación estadística. La tarea de la teoría cinética es derivar ecuaciones que describen el comportamiento colectivo de las muchas partículas que constituyen el plasma. Como es obvio, la teoría de órbitas individuales ignora los efectos colectivos; la aproximación de fluidos (MHD) desprecia las fluctuaciones microscópicas que son consideradas por la teoría cinética. Esta teoría si bien es más precisa es también más difícil de tratar. El objetivo de este capítulo es mostrar cómo se deducen las ecuaciones de la MHD a partir de las ecuaciones cinéticas.

### 3.2. La ecuación de Boltzmann y la reducción mediante momentos

Consideremos un plasma formado por dos especies: iones de un mismo tipo y electrones. En la descripción estadística la información acerca de la individuali-

dad se pierde, pero la información relevante del plasma como un todo se retiene mediante la función de distribución  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v})$  para las diferentes especies  $\alpha$ . Esta función corresponde a la densidad de puntos representativos de la especie  $\alpha$  en el espacio seis-dimensional (espacio de las fases) formado por las tres coordenadas de posición ( $x, y, z$ ) y las tres de velocidad ( $v_x, v_y, v_z$ ). El número probable de partículas en un volumen seis-dimensional  $d\vec{r}^3 d\vec{v}^3$  centrado en  $(\vec{r}, \vec{v})$  está dado por la cantidad  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}) d\vec{r}^3 d\vec{v}^3$ , y el número total de partículas de la especie  $\alpha$  viene dado por

$$N_\alpha \equiv \int f_\alpha d\vec{r}^3 d\vec{v}^3$$

y se asume constante.

Para obtener la ecuación cinética se parte de la conservación del número de partículas suponiendo que no hay procesos de ionización o recombinación que cambien dicho número. Esto se puede expresar matemáticamente con la ecuación de Liouville que nos dice que la función de distribución no varía en el tiempo dado que no hay creación ni sumidero de partículas. Dicha función depende de las coordenadas independientes  $t, \vec{x}$  y  $\vec{v}$ . Por lo tanto, la ecuación de Liouville se obtiene derivando temporalmente la función de distribución e igualando a cero la expresión:

$$\frac{Df(\vec{x}, \vec{v}, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 .$$

Para escribir esta ecuación hemos utilizado  $\vec{r} = \vec{x}$ . La notación como producto interno indica que la suma sobre el producto de los tres vectores debe ser calculada, por ejemplo,  $\vec{v} \cdot \partial/\partial \vec{x} \equiv v_x \partial/\partial x + v_y \partial/\partial y + v_z \partial/\partial z$ .

La conservación de partículas implica que el número de partículas en un volumen  $\Delta V$  en el entorno de un punto espacial  $\vec{x}$ , con velocidades dentro de un volumen  $\Delta V_v$  en el entorno de  $\vec{v}$ , sólo puede cambiar porque nuevas partículas con velocidad  $\vec{v}$  en el entorno de  $\vec{x}$  ingresan a  $\Delta V$  mientras que otras que originalmente estaban se escapan, a la vez que partículas con una velocidad diferente a  $\vec{v}$  son aceleradas dentro de  $\Delta V_v$  mientras que otras con velocidad inicialmente en el entorno de  $\vec{v}$  son aceleradas para adquirir velocidades diferentes. Esto se expresa como:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \equiv - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} - \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} \quad (3.1)$$

en la última igualdad la aceleración de las partículas  $d\vec{v}/dt$  ha sido reemplazada por su expresión en términos de las fuerzas actuantes ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ). Las fuerzas que actúan sobre cada partícula pueden descomponerse en aquellas consideradas como a) colisiones (interacciones entre partículas dentro de la esfera de

### 3.2. La ecuación de Boltzmann

---

Debye o que producen grandes desviaciones), y b) las debidas a las partículas externas a la esfera de Debye cuyo efecto es colectivo ya que individualmente son fuertemente apantalladas (ver discusión sobre hipótesis del continuo en Capítulo 1). Las interacciones colectivas son aquellas mediadas por los campos electromagnéticos que entran en la ecuación (3.1) y que se acoplan con las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{Faraday}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \Sigma_\alpha q_\alpha \int \vec{v} f_\alpha d^3 v + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{Ampère}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d^3 v, \quad \text{Poisson}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Ausencia de monopolos magnéticos,}$$

donde  $q_\alpha$  es la carga de la especie  $\alpha$ ,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética,  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica y  $c$  la velocidad de la luz. Por la definición dada más arriba, se desprende que la densidad de partículas  $\alpha$  es

$$n_\alpha(\vec{r}, t) \equiv \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v$$

y la velocidad media de las partículas  $\alpha$

$$\vec{u}_\alpha \equiv \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v.$$

Definiendo en general para cualquier función

$$\langle g \rangle_\alpha(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int g(\vec{r}, \vec{v}, t) f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v \quad (3.2)$$

la densidad de carga y la densidad de corriente resultan de estas expresiones multiplicando por  $q_\alpha$  y sumando sobre las especies

$$\rho_c(\vec{r}, t) = \Sigma q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t),$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \Sigma q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) \vec{u}_\alpha(\vec{r}, t).$$

Nótese que las ecuaciones de Maxwell sólo requieren conocer los valores medios de la densidad de partículas y la velocidad media. Estas cantidades son, precisamente, las que se utilizan de una descripción de fluido.

La expresión de la fuerza no colisional se describe como

$$\vec{F}_{nc} = q_\alpha (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Las fuerzas colisionales las designamos como  $\vec{F}_c$  y escribimos su efecto sobre  $f_\alpha$  como

$$-\frac{\vec{F}_c}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} \equiv \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}.$$

No consideraremos por ahora el detalle de esta expresión y escribimos la ecuación de Boltzmann en la forma (notación  $\vec{r} = \vec{x}$ )

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}$$

donde ha quedado explícitamente separado el término de la fuerza colisional de la no colisional.

Para obtener las ecuaciones de fluido se toman momentos de la ecuación de Boltzmann. Es decir se integra la ecuación en el espacio de velocidades. El momento de orden  $n$  de la ecuación es entonces la expresión que se obtiene al multiplicar la ecuación de Boltzmann por  $v^n$  e integrarla. Un término de orden  $n$  en la ecuación es uno que tiene  $v^n$  como factor. Si integramos el orden cero de la ecuación de Boltzmann; es decir si integramos sobre el espacio de velocidades (habiéndolo multiplicado por  $v^0$ ), teniendo en cuenta que las colisiones no cambian el número de partículas del espacio de velocidades en su conjunto obtenemos:

$$\int \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col} d^3 v = 0.$$

Resulta entonces la ecuación de continuidad, suponiendo además que  $f_\alpha \rightarrow 0$  suficientemente rápido cuando  $|\vec{v}| \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0.$$

Observe que en esta ecuación aparece un término de un orden superior al orden de la ecuación, un término de orden uno, con  $\vec{u}_\alpha$ , en una ecuación de orden cero. Para obtener una ecuación para  $\vec{u}_\alpha$  hay que multiplicar por  $\vec{v}$  la ecuación de Boltzmann e integrar sobre todo el espacio de velocidades. Cuando hayamos hecho esto, obtendremos otra ecuación que también contiene un término que es de un orden superior al de la ecuación. Por ello el sistema de ecuaciones debe ser clausurado haciendo suposiciones de orden fenomenológico o heurístico para cortar el regreso al infinito que ello supone.

### 3.2. La ecuación de Boltzmann

---

Por otro lado, al hacer el cálculo para el orden uno de los momentos, multiplicando por  $\vec{v}$ , debemos tener en cuenta que el término de colisiones contiene interacciones de la especie  $\alpha$  con todas las otras incluyendo con las de ella misma. El término de colisiones depende de la función de distribución, es decir de la probabilidad de encontrar una partícula de la especie en consideración (la  $\alpha$ ) en un punto del espacio de las fases  $(\vec{x}, \vec{v})$ . Pero, por tratarse de colisiones binarias, este término también depende de la función de distribución de la segunda partícula; la probabilidad de encontrar la partícula 1 en  $(\vec{x}_1, \vec{v}_1)$  y la 2 en  $(\vec{x}_2, \vec{v}_2)$  con  $\vec{x}_1 \simeq \vec{x}_2$ . Esto significa que hay que considerar el sistema de ecuaciones de la partícula 1 acoplado con el de la 2, y así siguiendo. Es posible, sin embargo, sacar algunas conclusiones a partir de principios físicos generales sin haber especificado la forma precisa del operador de colisiones. Por conservación de la cantidad de movimiento las colisiones de las partículas con las de su misma especie no cambian la cantidad de movimiento total de dicha especie; es decir

$$\int \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}^\alpha m_\alpha \vec{v} d^3 v = 0$$

donde el supraíndice indica la especie con que se colisiona;  $(\partial f_\alpha / \partial t)_{col} = \partial f_\alpha / \partial t|_{col}^\alpha + \partial f_\alpha / \partial t|_{col}^\beta$ . En cambio, hay un intercambio de cantidad de movimiento en colisiones entre especies distintas, que denotamos de la siguiente manera

$$\int \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}^\beta m_\alpha \vec{v} d^3 v \equiv m_\alpha n_\alpha (\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta}$$

donde  $\nu_{\alpha\beta}$  indica las colisiones de la especie  $\alpha$  con la  $\beta$ . Notemos que la cantidad de movimiento cedida por la especie  $\alpha$  a la  $\beta$ , instante a instante, es igual y de sentido contrario al cedida por la especie  $\beta$  a la  $\alpha$

$$m_\alpha n_\alpha (\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta} = -m_\beta n_\beta (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\beta) \nu_{\beta\alpha}$$

o sea

$$m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta} = m_\beta n_\beta \nu_{\beta\alpha}.$$

El segundo término de la ecuación de Boltzmann al ser multiplicado por  $\vec{v}$  e integrado puede escribirse

$$\int \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} \right) \vec{v} d^3 v = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \int f_\alpha \vec{v} \vec{v} d^3 v$$

asumimos

$$\vec{v} = \vec{u}_\alpha + \delta \vec{v} \quad , \quad \langle \delta \vec{v} \rangle = 0$$

que es una forma usual de representar los apartamientos de la velocidad media debido a perturbaciones. Luego encontramos

$$\int \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} \right) \vec{v} d^3 v = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_\alpha \langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle_\alpha)$$

donde el promedio sobre velocidades se obtiene utilizando la ecuación (3.2)

$$n_\alpha \langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle_\alpha = \int f_\alpha \delta \vec{v} \delta \vec{v} d^3 v.$$

Obtenemos así

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \vec{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot [n_\alpha (\vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha + \langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle_\alpha)] - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) = \Sigma_{\beta \neq \alpha} n_\alpha (\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta}.$$

Para escribir esta ecuación en términos de la derivada material o convectiva (siguiendo un elemento de volumen en su movimiento) usamos la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} &= \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \left( \vec{u}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \vec{u}_\alpha \\ &= -\frac{1}{n_\alpha} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_\alpha \delta \vec{v} \delta \vec{v})_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) + \Sigma_{\beta \neq \alpha} (\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

La primera igualdad da cuenta de la expresión para la derivada siguiendo el movimiento de un elemento de volumen. Para clausurar la ecuación se necesita determinar  $\nu_{\alpha\beta}$  y  $\langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle_\alpha$  que es el término de segundo orden en la ecuación de primer orden. Para establecer la clausura se supone que hay equilibrio termodinámico local, lo que implica utilizar la expresión fenomenológica que asume que las fluctuaciones alrededor del valor medio de la velocidad son isótropas

$$\langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle_\alpha = \frac{1}{3} \langle |\delta \vec{v}|^2 \rangle_\alpha \mathbf{I} = \frac{T_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{I} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y se usó la equipartición de la energía para cada grado de libertad, suponiendo además una temperatura propia para cada especie  $\alpha$ .

En presencia de campos magnéticos muy intensos la distribución de velocidades puede ser anisótropa, con fluctuación de velocidad diferente en la dirección paralela y perpendicular al campo. Usando el versor  $\hat{b} = \vec{B}/B$  podemos expresar lo dicho como

$$\begin{aligned} \langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle_\alpha &= \frac{1}{2} \langle |\delta \vec{v}_\perp|^2 \rangle_\alpha \mathbf{I} + (\langle |\delta v_\parallel|^2 \rangle_\alpha \mathbf{I} - \frac{1}{2} \langle |\delta \vec{v}_\perp|^2 \rangle_\alpha) \hat{b} \hat{b} \\ &= \frac{T_{\perp\alpha}}{m_\alpha} \mathbf{I} + \frac{1}{m_\alpha} (T_{\parallel\alpha} - T_{\perp\alpha}) \hat{b}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.2. La ecuación de Boltzmann

---

Esta expresión es la más apropiada para utilizar cuando las colisiones no son tan efectivas como para isotropizar al plasma, sin embargo la suposición de distribución isótropa es muchas veces usada y es la que vamos a utilizar en adelante. Note que la ecuación (3.4) se reduce a la ecuación (3.3) si se supone que las temperaturas paralela y perpendicular son iguales.

Dado que la energía de interacción media entre partículas del plasma es mucho menor que la energía cinética, la ecuación de gas ideal es una excelente aproximación

$$p_{\parallel\alpha} = n_\alpha T_{\parallel\alpha} \quad , \quad p_{\perp\alpha} = n_\alpha T_{\perp\alpha}$$

la ecuación de movimiento para el caso más general anisótropo se escribe

$$\begin{aligned} m_\alpha \frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} &= -\frac{1}{n_\alpha} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot [p_{\perp\alpha} \mathbf{I} + (p_{\parallel\alpha} - p_{\perp\alpha}) \hat{b} \hat{b}] \\ &\quad + q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) + \sum_{\beta \neq \alpha} m_\alpha (\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Una vez supuesto un modelo para el término de las colisiones todavía se requiere una relación que determine la presión (o la temperatura) en términos de la densidad  $n_\alpha$ . Lo que muchas veces se hace es tomar un momento adicional de la ecuación de Boltzmann que da la evolución del término  $\langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle_\alpha$ , correspondiente a la ecuación de la energía, estableciendo recién para este orden la clausura para términos de orden superior. Se obtienen, sin embargo, dependiendo del problema, soluciones apropiadas suponiendo una relación barotrópica de la forma

$$p_{\parallel\alpha} n_\alpha^{-\gamma\parallel} = \text{cte} \quad , \quad p_{\perp\alpha} n_\alpha^{-\gamma\perp} = \text{cte}.$$

Si la evolución es adiabática sabemos que para un gas con  $N$  grados de libertad, el cociente entre calores específicos a presión constante respecto al de volumen constante es  $\gamma = (2 + N)/N$ . Como el movimiento paralelo al campo tiene  $N = 1$ ,  $\gamma\parallel = 3$  mientras que el movimiento perpendicular tiene  $N = 2$  resulta  $\gamma\perp = 2$ ; y para evoluciones isotérmicas resulta  $\gamma = 1$ . De ahora en más usaremos presiones isótropas. El sistema así cerrado (con  $\alpha$  distinto de uno) se llama de varios fluidos, con una ecuación de fluido para cada especie, acopladas entre sí.

#### 3.2.1. Aproximación de dos fluidos

Una aproximación adicional es considerar todas las posibles especies de iones en una única de carga  $Ze$  promedio y masa  $m_i$  (se entiende que son todos los iones del mismo elemento y sólo difieren en el grado de ionización). Restringiéndonos a plasmas de alta temperatura donde los neutros pueden despreciarse tenemos

el modelo de dos fluidos, que reescribiremos aquí por completitud

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_i \vec{u}_i) = 0$$

$$m_e n_e \frac{d\vec{u}_e}{dt} = -\nabla p_e - e n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) + \vec{R}_{ei} \quad (3.6)$$

$$m_i n_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\nabla p_i + Z e n_i (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) + \vec{R}_{ie}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{R}_{ei} &= -\vec{R}_{ie} \equiv m_e n_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \nu_{ei} , \\ \rho_c &= Z e n_i - e n_e , \\ \vec{j} &= Z e n_i \vec{u}_i - e n_e \vec{u}_e \end{aligned} \quad (3.7)$$

y además la ecuación barotrópica o de la energía

$$p_i n_i^{-\gamma} = \text{cte} \quad , \quad p_e n_e^{-\gamma} = \text{cte} .$$

### 3.2.2. Fluido simple y MHD

La complejidad de la descripción puede reducirse más aprovechando la gran diferencia de masa entre iones y electrones y también al suponer que todas las magnitudes varían con distancias características grandes comparadas con la longitud de Debye,  $\lambda_D \ll L$ . Esto último permite considerar que el elemento de fluido, la unidad de análisis del problema, es tal que vale la aproximación de cuasineutralidad

$$Z n_i \simeq n_e$$

lo que permite escribir

$$\vec{j} = e n_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e) . \quad (3.8)$$

Introducimos aquí la velocidad del centro de masa del fluido

$$\vec{u} \equiv \frac{m_i n_i \vec{u}_i + m_e n_e \vec{u}_e}{m_i n_i + m_e n_e} = \frac{m_i \vec{u}_i + Z m_e \vec{u}_e}{m_i + Z m_e} \quad (3.9)$$

### 3.2. La ecuación de Boltzmann

---

y la densidad del fluido

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e .$$

De la ecuación (3.8) y la ecuación (3.9) podemos despejar (despreciando los términos de orden  $m_e/m_i$  frente a la unidad)

$$\vec{u}_i = \vec{u} + \frac{Zm_e/m_i}{1 + Zm_e/m_i} \frac{\vec{j}}{en_e} \simeq \vec{u} + \frac{Zm_e}{m_i} \frac{\vec{j}}{en_e} \quad (3.10)$$

$$\vec{u}_e = \vec{u}_i - \frac{\vec{j}}{en_e} \simeq \vec{u} - \frac{\vec{j}}{en_e} . \quad (3.11)$$

Usando estas expresiones en la expresión suma de las dos especies obtenemos inmediatamente para la continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 .$$

Si sumamos las dos ecuaciones de movimiento usando la ecuación (3.10) y la ecuación (3.11) y que  $\vec{R}_{ei} + \vec{R}_{ie} = 0$ , despreciando términos de orden  $m_e/m_i$  frente a la unidad y habiendo usado la ecuación (3.5) para escribir la derivada convectiva en la forma

$$n_{e,i} \frac{d\vec{u}_{e,i}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (n_{e,i} \vec{u}_{e,i}) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_{e,i} \vec{u}_{e,i} \vec{u}_{e,i})$$

se obtiene

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p - \frac{m_e}{e^2} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left[ \frac{\vec{j} \vec{j}}{n_e} \right] + \rho_c \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (3.12)$$

donde

$$p = p_e + p_i .$$

Comparando el término proporcional a  $\nabla \cdot (\vec{j} \vec{j}/n_e)$  con el término convectivo  $\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u})$  podemos escribir

$$\frac{| m_e \vec{j} \vec{j} / (e^2 n_e) |}{| \rho \vec{u} \vec{u} |} \approx \frac{m_e}{m_i} \frac{|\vec{u}_i - \vec{u}_e|^2}{u^2} \ll 1$$

permitiéndonos despreciar dicho término. Otro término que se desprecia por comparación con el convectivo es el de la fuerza coulombiana

$$\frac{|\rho_c \vec{E}|}{|\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u})|} \approx \frac{\rho_c E}{\rho u^2 / L}$$

donde  $L$  es una distancia característica de variación de las magnitudes. Para estimar  $\rho_c$  usamos la ecuación de Poisson

$$\rho_c = \epsilon_0 |\nabla \cdot \vec{E}| \approx \frac{\epsilon_0 E}{L}$$

usando un valor moderado de la velocidad como el de la deriva

$$u \approx \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{B^2} \approx \frac{E}{B}$$

con lo que

$$\frac{|\rho_c \vec{E}|}{|\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u})|} \approx \frac{\epsilon_0 B^2}{\rho} = \frac{B^2}{\mu_0 \rho c^2}$$

que nos dice que este término es del orden del cociente entre la densidad de energía magnética y la densidad de energía de masa ( $mc^2$ ) del plasma. También se puede despreciar la corriente de desplazamiento en la ecuación de Ampère; aceptaremos por el momento este resultado que se verá en el siguiente capítulo. Notar que el despreciar este término es consistente con la escala temporal que nos interesa. Es decir, al despreciar la corriente de desplazamiento dejamos de lado procesos rápidos como las ondas electromagnéticas. Las ecuaciones de Maxwell asocian un campo eléctrico a la variación temporal de uno magnético (Faraday) y a la vez un campo magnético a la variación temporal de uno eléctrico (Ampère) de modo que de ellas se obtiene una ecuación de ondas que para un medio no dispersivo, homogéneo y sin fuentes da como solución las ondas electromagnéticas. Si se desprecia el término de corriente de desplazamiento este tipo de ondas no pueden ser solución del sistema. Como consecuencia, las ondas que se obtienen son un tipo diferente a las que resultan del electromagnetismo.

Calculemos el valor de  $\vec{j}$  a partir de la ecuación (3.6), ecuación de movimiento para los electrones. Consistentemente con lo dicho arriba suponemos procesos lentos que implican despreciar la inercia de los electrones. Tomando  $m_e \approx 0$  en esta ecuación suponemos que los electrones no oponen resistencia al movimiento y que se ajustan inmediatamente al movimiento de los iones. Resulta entonces

$$0 = -\nabla p_e - en_e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) + \vec{R}_{e,i} .$$

Usando en la ecuación anterior, la ecuación (3.11) y la primera de las ecuaciones (3.8) se obtiene la ecuación de Ohm generalizada

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{en_e}(\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p_e) \quad (3.13)$$

donde  $\eta$  es la resistividad del plasma

$$\eta = \frac{m_e \nu_{e,i}}{e^2 n_e} .$$

En MHD se utiliza la ley de Ohm simple porque el segundo término de la derecha de la ecuación (3.13) es despreciable. El término  $\vec{j} \times \vec{B}/en_e$  se conoce

### 3.2. La ecuación de Boltzmann

---

como término de Hall. Veamos que este término es despreciable frente al término  $\vec{u} \times \vec{B}$

$$\left| \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{en_e(\vec{u} \times \vec{B})} \right| \simeq \frac{j}{en_e u} \simeq \frac{en_e(u_i - u_e)}{en_e u} \simeq \frac{|u_i - u_e|}{u} \ll 1.$$

También el término de presiones es despreciable

$$\left| \frac{\nabla p}{en_e \vec{u} \times \vec{B}} \right| \simeq \frac{p}{Len_e v_{térm} B} \simeq \frac{Tr_L}{L m v_{térm}^2} \simeq \frac{r_L}{L} \ll 1.$$

La ecuación de Ohm queda entonces

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j}.$$

La MHD ideal supone despreciar los términos disipativos, el coeficiente  $\eta = m_e \nu_{e,i} / e^2 n_e$  es responsable de la resistividad del plasma. La expresión concreta del coeficiente  $\nu$  de colisiones no será calculada en el marco de este libro. Sin embargo, dado que los plasmas en los que estamos interesados son fundamentalmente ideales o de baja disipación, lo que equivale a suponer conductividad infinita o muy grande, donde  $\sigma$  la conductividad es  $\sigma \propto \eta^{-1}$ , postergamos para el próximo capítulo la consideración de este término.

#### 3.2.3. Distribuciones maxwellianas

No tenemos una representación que nos permita visualizar el espacio seis-dimensional de la función  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ . Sin embargo, la propiedad más interesante es generalmente la dependencia en  $\vec{v}$  para una posición fija del espacio. Muchas de las características importantes de los plasmas se pueden entender a partir de conocer la dependencia funcional en la velocidad.

La distribución general de equilibrio en velocidades para un plasma no colisional es maxwelliana. Una distribución *maxwelliana* es aquella que está en equilibrio termodinámico lo que significa que no hay energía libre disponible y por lo tanto no hay intercambio de energía global neta entre las partículas del plasma. Es decir, las velocidades estarán distribuidas al azar alrededor de la velocidad media. Este valor es cero para un plasma en reposo y la distribución de velocidades es una Gaussiana

$$f(v_x) = \frac{n}{(\pi \langle v_x \rangle^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{-v_x^2}{\langle v_x \rangle^2}\right).$$

Esta distribución se puede generalizar para tres dimensiones atendiendo a que  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Multiplicando las tres funciones uno dimensionales obtenemos

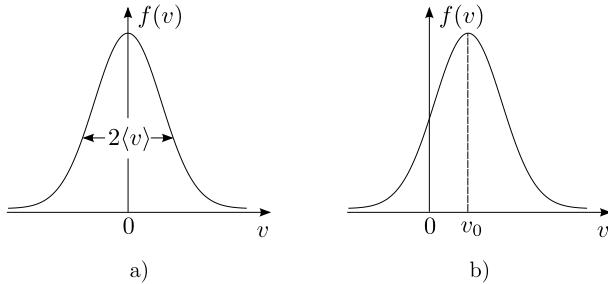


Figura 3.1: Función de distribución del plasma en términos del módulo de la velocidad.

la ecuación que describe la función de distribución maxwelliana para un plasma isótropo

$$f(v) = \frac{n}{(\pi \langle v \rangle^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2}{\langle v \rangle^2}\right) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right)$$

donde se ha reemplazado la velocidad media  $\langle v \rangle = (2k_B T/m)^{1/2}$  que se puede identificar como la velocidad térmica introducida en el Capítulo 1. Utilizando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

es fácil de calcular que la integral en el volumen de velocidades de tres dimensiones es  $n$  veces la densidad de partículas macroscópicas. Es decir, la distribución maxwelliana nos dice que en equilibrio, la densidad de partículas está distribuida en el espacio de velocidades para un punto fijo del espacio y del tiempo dependiendo exclusivamente de la temperatura media de las partículas. La figura 3.1a muestra dicha distribución, la función es simétrica en los tres casos de componentes de velocidad, sólo depende del módulo de la velocidad  $v$  y el ancho de la campana da la dispersión en  $v$  que, como se vio, sólo depende de la temperatura.

Una generalización inmediata de la distribución de equilibrio es el caso de un plasma que fluye con velocidad  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{e}_x$  en la dirección  $x$  de modo que la velocidad media en esta dirección no es cero. La distribución de velocidades se obtiene de la expresión anterior cambiando  $v_x$  por  $v_x - v_0$ , o en forma más general cambiando  $\vec{v}$  por  $\vec{v} - \vec{v}_0$  obteniendo

$$f(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-m(\vec{v} - \vec{v}_0)^2}{2k_B T}\right)$$

lo que puede verse en la figura 3.1b.

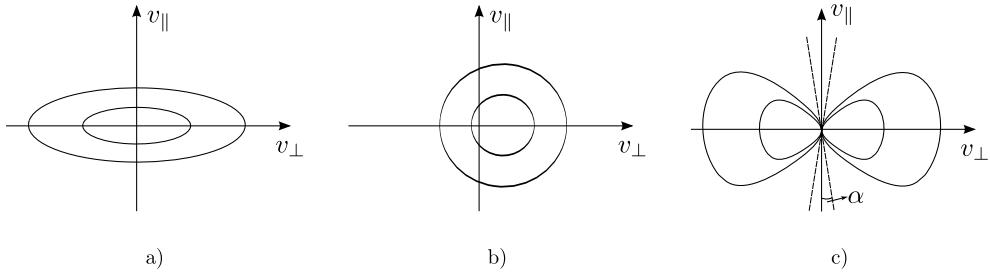


Figura 3.2: Contornos  $f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \text{cte}$ ,  $f$  la función de distribución del plasma en términos de las componentes paralela y perpendicular: a) distribución anisótropa, b) deriva maxwelliana, c) distribución cono de pérdida.

### 3.2.4. Distribuciones anisótropas

Generalmente la presencia del campo magnético induce una anisotropía en la función de distribución dado que las velocidades paralela y perpendicular pueden ser diferentes. Es usual que ocurra que la distribución de velocidades es independiente del ángulo de giro de las partículas alrededor del campo. En tal caso sólo dependen de  $v_{\parallel}$  y  $v_{\perp}$ . Dado que estas dos componentes de velocidad son independientes, la distribución de equilibrio puede ser modelada como el producto de dos maxwellianas en la forma

$$\begin{aligned} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) &= n \left( \frac{m}{\sqrt{\pi^3 (v_{\perp})^2 \langle v_{\parallel} \rangle}} \exp \left( -\frac{v_{\parallel}^2}{\langle v_{\parallel} \rangle^2} - \frac{v_{\perp}^2}{\langle v_{\perp} \rangle^2} \right) \right) \\ &= \frac{n}{T_{\perp} \sqrt{T_{\parallel}}} \left( \frac{m}{2\pi k_B} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv_{\parallel}^2}{2k_B T_{\parallel}} - \frac{mv_{\perp}^2}{2k_B T_{\perp}} \right) \end{aligned}$$

que es conocida como bimaxwelliana (distribuciones como esta se encuentran en la física espacial). Si graficamos  $f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \text{cte}$  como mapas de contorno que dan cuenta de los distintos niveles en el espacio de velocidades obtenemos gráficos como los que se muestran en la figura 3.2. La figura 3.2a muestra el caso de la bimaxwelliana con  $T_{\perp} > T_{\parallel}$ , de donde se ve que la energía media de las partículas que se mueven perpendicularmente al campo, es mayor que la de las que se mueven en la dirección del campo. La figura 3.2b corresponde al caso mostrado en la figura 3.1b, en este caso todas las partículas derivan con la misma velocidad en la dirección perpendicular al campo. Este sería el caso de un plasma en equilibrio pero que tiene una deriva debido a un campo eléctrico no paralelo al campo magnético. La distribución que corresponde a este caso es tal que

$$f(\vec{v}) = \frac{n}{T_{\perp} T_{\parallel}^{1/2}} \left( \frac{m}{2\pi k_B} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv_{\parallel}^2}{2k_B T_{\parallel}} - \frac{m(\vec{v}_{\perp} - \vec{v}_{0\perp})^2}{2k_B T_{\perp}} \right)$$

donde  $\vec{v}_{0\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$  (ver Capítulo 2).

En caso de tener plasmas con distribuciones de campo magnético formando un *espejo* y en los que hay partículas con altos valores de velocidad paralela, parte de ellas pueden escapar del *espejo* (ver Capítulo 2). En tal caso, como ocurre en algunas circunstancias en la ionósfera, la distribución es tal que salen del sistema las partículas dentro de un cono de ángulo  $\alpha$ . Tal es el caso que se grafica en la figura 3.2c.

Resumimos las ecuaciones de la MHD ideal para el fluido simple y señalamos las modificaciones que corresponden cuando se tienen en cuenta efectos disipativos.

### Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

### Momento: sin disipación viscosa

También llamada ecuación de Navier-Stokes que sin viscosidad lleva el nombre de ecuación de Euler.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0.$$

### Energía

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = \begin{cases} 0 & \text{caso ideal,} \\ (1 - \gamma) \eta j^2 & \text{caso resistivo.} \end{cases}$$

### Faraday

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0.$$

Veremos luego que las variables  $\vec{j}$  y  $\vec{E}$  así como la ecuación de Poisson pueden ser eliminadas en el sistema cerrado de ecuaciones utilizando la ecuación de Ampère en la forma

## Ampère

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}.$$

## Ohm

Caso ideal

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0.$$

Caso resistivo

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j}.$$

## Ausencia de monopolos magnéticos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

## Ejercicios

- 3.1 Deduzca la ecuación de continuidad y la de momento para una especie. Tenga en cuenta que al integrar por partes  $f_\alpha \rightarrow 0$  suficientemente rápido cuando  $|\vec{v}| \rightarrow \infty$  lo mismo para  $f_\alpha g \rightarrow 0$  donde  $g$  es una función cualquiera de  $(\vec{r}, t)$ .
- 3.2 ¿Por qué es necesaria la clausura? ¿Cuáles son las relaciones que ejecutan la clausura?
- 3.3 Considere un plasma de dos especies ( $i$  y  $e$ ) en una situación simplificada:
  - \*  $\vec{B} = 0$ , pero tenga en cuenta  $\vec{E}$ ;
  - \* plasma frío, es decir se pueden despreciar todos los efectos térmicos.
  - a. Constate que con estas simplificaciones la ecuación de la energía queda desacoplada. Es decir, no se tiene en cuenta la ecuación de la energía y el sistema es cerrado. Resulta: una ecuación de continuidad para cada una de las especies, una de momento (para cada una de las especies) y una ecuación de Maxwell. El campo eléctrico se puede obtener autoconsistentemente de la ecuación de Poisson con  $\rho_c = e(Zn_i - n_e)$ .
  - b. Constate a partir de la ecuación de Poisson que para longitudes características muy grandes se debe cumplir la cuasineutralidad. A continuación estime el significado de “muy grande”.

- c. Considere tiempos y longitudes chicos frente a los característicos del problema, el desbalance de cargas ocurre en la forma de oscilaciones de plasma. Suponga que los iones son pesados ( $m_i \gg m_e$ ) de modo que pueden ser pensados como un fondo fijo neutralizante ( $\vec{u}_i = 0$ ) entre los que sólo los electrones pueden moverse. Al perturbar una pequeña región del plasma desplazando los electrones la neutralidad de carga se modificará correspondientemente. Linealice las ecuaciones proponiendo

$$\vec{E} \simeq \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad n_e \simeq n_0 + n_1(\vec{r}, t) \quad |n_1(\vec{r}, t)| \ll n_0$$

$$\vec{u}_e \simeq \vec{u}_1 \quad n_i \simeq n_0/Z \quad \vec{u}_i \simeq 0.$$

- d. Obtenga la frecuencia de plasma para oscilaciones del plasma del tipo  $n_1(\vec{r}, t) = \tilde{n}_1(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$ .

- 3.4 Calcule las frecuencias de ciclotrón de protones y electrones de los siguientes casos y compárelos con las frecuencias de plasma del problema equivalente en los ejercicios del capítulo anterior. Calcule el giro-radio o radio de Larmor de las partículas moviéndose con sus velocidades térmicas (a continuación se dan los valores del campo magnético).

- a. Una máquina de fusión  $B = 10^4 \text{ T}$ .
- b. La magnetósfera de la Tierra  $B = 10^{-2} \text{ G}$ .
- c. El centro del Sol  $B = 10^6 \text{ G}$ .
- d. La corona solar  $B = 1 \text{ G}$ .
- e. El viento solar  $B = 10^{-5} \text{ G}$ .
- f. La atmósfera de una estrella de neutrones  $B = 10^{12} \text{ G}$ .

- 3.5 Verifique la expresión de la ecuación (3.4) del libro contrayendo apropiadamente con  $\hat{b}$ .

- 3.6 Obtenga las ondas electromagnéticas de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes. ¿Por qué este tipo de ondas no se obtienen en la aproximación MHD?

- 3.7 Obtenga la ecuación de continuidad a partir de las ecuaciones de continuidad de dos fluidos.

- 3.8 Muestre que

$$n_{e,i} \frac{d\vec{u}_{e,i}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(n_{e,i} \vec{u}_{e,i}) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_{e,i} \vec{u}_{e,i} \vec{u}_{e,i}).$$

- 3.9 Deduzca la ecuación (3.12).

- 3.10 Obtenga la ecuación de Ohm generalizada y, haciendo aproximaciones pertinentes derive la forma simple de esta ecuación que generalmente se utiliza en la MHD.

### 3.2. La ecuación de Boltzmann

---

- 3.11 Obtenga la ecuación de la doble adiabática. En un plasma no colisional con  $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$  y con una configuración magnética cilíndrica tal que la longitud  $L$  es grande comparada con la raíz del área de la sección ( $\sqrt{A}$ ), suponga la ecuación de estado para la dirección longitudinal y transversal  $p \approx \rho T$ , utilice las relaciones barotrópicas dadas en la sección (3.2) teniendo en cuenta que  $\gamma = (N + 2)/N$ . Obtenga que  $T_{\perp} \sim B$  y  $T_{\parallel} \sim (\rho/B)^2$  lo que significa que si el campo aumenta hay un calentamiento perpendicular y un enfriamiento paralelo. Ayuda: utilice la constancia del flujo magnético y las expresiones de las respectivas densidades en función de  $L$  y  $A$ .



## Capítulo 4

---

# APROXIMACIÓN MAGNETOHIDRODINÁMICA

---

### 4.1. Introducción

Como se mencionó, se podría empezar un curso de MHD postulando las ecuaciones de fluidos o macroscópicas o bien derivándolas a partir de las ecuaciones cinéticas tal como se hizo en el capítulo anterior. En este capítulo partiremos del primer procedimiento para analizar los conceptos físicos involucrados en las ecuaciones, los órdenes de magnitud y aproximaciones que se pueden realizar. Las ecuaciones que describen a los plasmas son altamente no lineales debido a que los campos influyen sobre las partículas y corrientes a través de la fuerza de Lorentz las que, a su vez, por ser ellas –las cargas y corrientes– fuentes de las ecuaciones de Maxwell, modifican los campos.

La magnetohidrodinámica estudia el estado del plasma bajo ciertas aproximaciones que permiten simplificar el problema. Estas simplificaciones resultan en el tratamiento del plasma como un fluido simple. La MHD ideal describe el movimiento de un fluido perfectamente conductor interactuando con campos magnéticos. Para ello se resuelven las ecuaciones de Maxwell que resultan acopladas con las ecuaciones de la dinámica de gases.

### 4.2. Postulación de ecuaciones básicas

Las ecuaciones de Maxwell describen la evolución de los campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en respuesta a la distribución de densidad de corriente y carga  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  y  $q(\vec{r}, t)$ . Una de estas ecuaciones es la **ecuación de Poisson** que nos dice que el campo eléctrico tiene como fuente la distribución de cargas  $\rho_c$ :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}.$$

El campo eléctrico entra también en la **ecuación de Faraday**

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

y en la **ecuación de Ampère**

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{con} \quad \epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$$

donde  $\vec{j}$  es la corriente eléctrica en el plasma y  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad y susceptibilidad del vacío, respectivamente.

Estas ecuaciones nos muestran que los campos eléctrico y magnético no son independientes, sino que están acoplados a partir de la variación temporal y espacial de los mismos. De la ecuación de Ampère vemos que la fuente del campo magnético es la corriente eléctrica aunque también es fuente de las fluctuaciones rápidas del campo eléctrico. El término  $(\partial \vec{E} / \partial t) / c^2$ , conocido como corriente de desplazamiento, es despreciable para procesos relativamente lentos como los que se consideran en la MHD. Más aún, despreciar este término es equivalente a no considerar las ondas electromagnéticas como solución del sistema de ecuaciones. Dado que las ondas electromagnéticas son las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío (sin fuentes) al despreciar éste término se eliminan dichas soluciones.

A estas ecuaciones se agrega la **ley de la ausencia de monopolos magnéticos**

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

En general en los libros de electromagnetismo se distingue entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  y  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ . Esta distinción no es útil para los plasmas dado que no se distingue entre objetos cargados o conductores y el medio. Estas ecuaciones deben ser acopladas con las ecuaciones de fluido. La **ecuación de continuidad**

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

La expresión que da la **evolución de la densidad y presión**, también llamada ecuación de balance de la energía cuando hay términos difusivos y fuentes y, de conservación de la energía cuando no los hay se escriben:

$$\frac{Dp}{Dt} + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Nótese que en esta expresión de la ecuación de la energía interna no tiene contribución del campo magnético para el caso ideal; en el no ideal aparece una

## 4.2. Postulación de ecuaciones básicas

---

contribución  $j^2/\sigma$  debido al calentamiento Joule o calentamiento debido a la transformación de energía magnética en calor, que se agrega a los otros términos disipativos. También en vez de esta ecuación se podría utilizar la ecuación de la energía total (para  $E = 1/2\rho v^2 + B^2/2\mu_0 + \rho e$  con  $e$  la energía interna) que es generalmente utilizada numéricamente, sin embargo debe observarse que las ecuaciones anteriores son un sistema cerrado de ecuaciones y por ende son suficientes. Este último conjunto de ecuaciones en principio parece desacoplado de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo lo están a partir de la ecuación de Newton y de la expresión de las cargas y corrientes en términos de la densidad y la velocidad que aparecen en las ecuaciones de Maxwell.

**La ecuación de Newton o de momento** es

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_c \vec{E} + \rho \vec{g}.$$

Cierra el sistema de ecuaciones la ley de Ohm para el caso ideal, es decir para un plasma perfectamente conductor.

**La ecuación de Ohm**

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0. \text{ Veremos luego que en el caso resistivo } \vec{E}' = \eta \vec{j}$$

donde  $\vec{E}'$  es el campo eléctrico en el sistema en el que el plasma está en movimiento y la ecuación, para el caso ideal, expresa que el campo eléctrico en un sistema en co-movimiento con el plasma se anula; la última expresión corresponde al caso disipativo.

### 4.2.1. Aproximaciones de la MHD ideal

El sistema está ahora completo pero todavía no tiene la forma que se utiliza para resolver la mayoría de los problemas de los plasmas de laboratorio y de la naturaleza. Para ello se requiere hacer algunas suposiciones:

$$\lambda_D \ll L, n\lambda_D^3 \gg 1$$

donde  $L$  es la longitud característica de variación de las cantidades de interés,  $\lambda_D$  es la longitud de Debye (de apantallamiento) y  $n$  es la densidad numérica de partículas.

El plasma es cuasineutro. En cada elemento de volumen el número de partículas cargada positivamente es aproximadamente igual al de las cargas negativas.

$$|n^+ - n^-| \ll n$$

lo que es equivalente a suponer que la densidad de carga neta es muy pequeña. Si se supone que hay equilibrio termodinámico local es posible considerar una única temperatura  $T$ . La permitividad  $\epsilon_0$  y la susceptibilidad  $\mu_0$  son uniformes. Las velocidades del plasma son no relativistas

$$v \ll c.$$

En tal caso se pueden hacer otras aproximaciones. Estimando los términos de la ecuación de Ampère, usando la ecuación de Ohm se obtiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim \frac{v^2}{c^2} \frac{B}{l_0} \ll |\nabla \times \vec{B}| \sim \frac{B}{l_0}$$

donde la escala de longitud asociada al gradiente es  $l_0$  y la escala temporal es  $t_0$  de modo que  $v \sim l_0/t_0$ . Este resultado nos indica que la corriente de desplazamiento es pequeña. Esto implica que los procesos que se estudian son lentos y quedan fuera, por ejemplo, las ondas electromagnéticas (que requieren de este término para poder ser obtenidas). De la ecuación de Ampère, sin término de desplazamiento, se obtiene la densidad de corriente directamente en términos del campo  $\vec{B}$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$$

de donde se sigue inmediatamente que las líneas de corriente son cerradas. También, es posible despreciar la fuerza electrostática,  $\rho_c \vec{E}$ , en la ecuación de Newton ya que

$$\rho_c |\vec{E}| \sim \frac{v^2}{c^2} \frac{B^2}{\mu_0 l_0} \ll |\vec{j} \times \vec{B}| \sim \frac{B^2}{\mu_0 l_0}$$

de modo que los efectos espaciales asociados al desbalance de cargas pueden ser despreciados. De esta manera el campo  $\vec{E}$  se vuelve una cantidad secundaria determinado a partir de la ecuación de Ohm

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

resultando ser proporcional a  $\sim |vB|$ , un orden  $v/c$  menor que el caso de las ondas electromagnéticas  $\sim |cB|$ .

Eliminando  $\vec{E}$  y  $\vec{j}$  y utilizando las aproximaciones anteriores, las ecuaciones básicas de la MHD quedan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\vec{v} \cdot \nabla] \vec{v} \right) + \nabla p - \rho \vec{g} - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (4.3)$$

donde el término  $(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} / \mu_0 = \vec{j} \times \vec{B}$  se conoce como fuerza de Lorentz por ser la contribución resultante de dicha fuerza. También se ha despreciado la corriente de desplazamiento lo que permite no incluir la ecuación de Poisson en el sistema. Una vez que se conoce  $\vec{E}$ , de la ecuación de Ohm, la ecuación de Poisson puede utilizarse para obtener el valor residual de la densidad de cargas ( $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_c / \epsilon_0$ ). Es decir, aunque la ecuación de Poisson quede desacoplada y ello significa que en la gran escala despreciamos los efectos espaciales de las cargas, en la pequeña, el campo eléctrico cumple un rol importante que no puede ser despreciado, es el responsable de sostener la cuasineutralidad.

Las ecuaciones (4.1-4.3), que describen la MHD son ocho ecuaciones no lineales en derivadas parciales para las ocho variables  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $p$  y  $\vec{B}$ . La ecuación  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  se utiliza en general como condición inicial dado que se cumple idénticamente para todo tiempo posterior. En el caso de equilibrios estáticos, en cambio, es una de las ecuaciones que da cuenta plenamente de la solución (probarlo como ejercicio).

Como se dijo, una consecuencia inmediata de la ecuación reducida de Ampère-Maxwell, una vez despreciada la corriente de desplazamiento, es que las líneas de corriente son cerradas

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 .$$

Una forma equivalente de la ley de Ohm simple en MHD es

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$$

donde  $\vec{E}'$  es el campo eléctrico en el sistema de referencia en que el plasma está en movimiento. Si el elemento de plasma se mueve con velocidad  $\vec{v}$ , con  $v \ll c$ , y dado que la densidad de carga neta es muy pequeña

$$\vec{j}' = \vec{j} + \rho_c \vec{v} \simeq \vec{j}$$

y como

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

resulta

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (4.4)$$

La ecuación de gas ideal se agrega a las anteriores como ecuación de estado que relaciona las variables termodinámicas  $\rho$ ,  $p$  y  $T$ :

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T = \frac{k_B}{m} \rho T = n k_B T$$

donde  $R$  es la constante de los gases ideales,  $\mu$  la masa molar media,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $m$  la masa media y  $n$  el número de partículas por unidad de volumen. Si el problema es isotérmico no es necesario utilizar la ecuación de conservación de la energía ecuación (4.2).

Si la energía no se conserva se deben tener en cuenta los términos del balance de energía.

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = -L$$

donde  $S$  es la entropía por unidad de masa y  $L$  es la función de pérdida de energía que incluye las pérdidas por disipación óhmica  $j^2/\sigma$ , flujo de calor por conducción, radiación, etc. (energía/vol tiempo). Para un gas ideal esta ecuación toma la forma

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -L$$

donde  $\gamma$  es el cociente entre los calores específicos del gas a presión constante y a volumen constante  $\gamma = c_p/c_v$ .

#### 4.2.2. Independencia de escala

Las ecuaciones de la MHD se pueden hacer adimensionales eligiendo transformaciones a partir de unidades características de longitud, masa y tiempo. A partir de valores  $l_0$ ,  $\rho_0$  y  $B_0$  característicos del problema se obtiene una velocidad característica (velocidad de Alfvén)

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$$

de donde  $t_0 = l_0/v_A$ . Es decir a partir de una densidad y un campo de inducción típicos se obtiene la velocidad de Alfvén característica del problema. La velocidad de Alfvén es una medida de la elasticidad del medio y la velocidad del sonido de su compresibilidad

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

Se generan luego variables independientes adimensionales

$$\tilde{l} = l/l_0, \quad \tilde{t} = t/t_0, \quad \tilde{\nabla} = l_0 \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = t_0 \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_0, \quad \tilde{v} = v/v_A,$$

### 4.3. Flujo magnético

---

$$\tilde{p} = p/(\rho_0 v_A^2), \quad \tilde{B} = B/B_0, \quad \tilde{g} = (l_0/v_A^2)g.$$

Con esta transformación, las ecuaciones MHD quedan sin modificar salvo porque aparecen tildadas y porque  $\mu_0$  desaparece del problema. De esto se puede ver que las soluciones no dependerán del tamaño del plasma ( $l_0$ ), de la magnitud del campo ( $B_0$ ) y de la densidad ( $\rho_0$ ). Es decir, para el tiempo  $t_0$ , las ecuaciones ideales de la MHD son independientes de la escala. De este modo las escalas típicas de laboratorio son equivalentes a las astrofísicas en la medida en que las mismas ecuaciones puedan aplicarse.

Una vez habiendo hecho el escalamiento con las variables adimensionales, el valor de la presión  $\tilde{p}$  se vuelve una cantidad de gran importancia dado que está directamente relacionada con la razón entre la presión del gas y la presión magnética:  $\beta$

$$\beta \equiv \frac{p_0}{B_0^2/(2\mu_0)} = 2\tilde{p}.$$

Cuando  $\beta \ll 1$  significa que la dinámica del plasma es gobernada por el campo magnético. Dado que  $\beta \ll 1$  para muchos plasmas de interés los términos asociados a  $\beta$  pueden ser despreciados, por otro lado,  $\beta \gg 1$  indica que la dinámica del plasma es gobernada por el fluido.  $\beta$  también resulta proporcional al cociente del cuadrado de las velocidades anteriores de la forma:

$$\beta \propto \frac{c_s^2}{v_A^2}.$$

### 4.3. Flujo magnético

En plasmas magnetizados, los campos con los que se confina el plasma son básicamente estructuras tubulares. Esto es resultado de la ecuación  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  (ausencia de monopolos magnéticos). De modo que los tubos de flujo magnético son los constituyentes esenciales de una configuración de confinamiento magnético. Tomemos una superficie  $S_1$  cualquiera (ver figura 4.1) y determinemos un tubo compuesto por todas las líneas que la atraviesan, resulta entonces que el flujo magnético que interseca cualquier otra sección del tubo ( $S_2$ ) es el

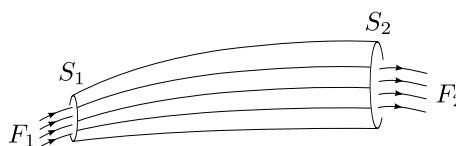


Figura 4.1: Segmento de un tubo de flujo magnético

mismo que el que atraviesa la superficie  $S_1$  ya que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Se llama intensidad del tubo al flujo de  $\vec{B}$  que lo atraviesa. Más formalmente, si tomamos una superficie  $S_1$  compuesta por todas las líneas que la atraviesan resulta que el flujo magnético que interseca las mismas líneas es el mismo:

$$\int \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint \vec{B} \cdot \hat{n} d\sigma = - \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 d\sigma_1 + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 d\sigma_2 = 0$$

es decir, el flujo magnético

$$\psi \equiv \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} d\sigma = \text{cte}$$

a través de una superficie arbitraria del tubo  $\psi$  es una cantidad bien definida, no depende de cómo se toma la superficie. Sin embargo, una pregunta importante que resta responder es cómo se mueve el tubo cuando el plasma se mueve. Veremos que si el campo está “congelado” al plasma la intensidad del tubo permanecerá invariante al moverse el tubo junto con el plasma, aunque pueda cambiar de forma. Para ello hay que retomar la ecuación de inducción magnética.

#### 4.3.1. Ecuación de inducción magnética

La ecuación (4.3) es la ecuación de inducción magnética, para el caso ideal, que se obtiene reemplazando la ley de Ohm ecuación (4.4) en la ecuación de Faraday. En el caso no ideal se hace lo mismo teniendo en cuenta la contribución de la corriente:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left[ \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B} \right] .$$

Dado que  $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu_0$  y que

$$\nabla \times [\nabla \times \vec{B}] = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

se obtiene la ecuación de inducción

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} .$$

El coeficiente  $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$  es el coeficiente de difusión magnética. Vemos que la variación temporal del campo magnético depende de dos términos, el primero es conocido como término de convección y el segundo como término de difusión.

### 4.3. Flujo magnético

---

El comportamiento del sistema es muy diferente dependiendo de cuál de ellos predomine.

La ecuación de inducción magnética es una ecuación fundamental de la MHD y da la evolución del campo magnético. Admite dos regímenes posibles: comparando los términos de la derecha de

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (4.5)$$

se obtiene

$$\left| \frac{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})}{\eta \nabla^2 \vec{B}} \right| \sim \frac{v_0 l_0}{\eta}.$$

El término  $(v_0 l_0)/\eta$  es conocido como el número de Reynolds magnético,  $R_M$ , dada su semejanza con el número de Reynolds (a secas) de la teoría de fluidos  $R_e$  (obtenido a partir de la ecuación de Navier-Stokes  $|\rho(\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}| / |\nu \nabla^2 \vec{u}| \simeq (v_0 l_0)/\nu$  donde  $\nu = \mu/\rho$  es el coeficiente de viscosidad). Valores mucho mayores que uno de  $R_M$  y  $R_e$ , característicos de plasmas astrofísicos y geofísicos, corresponden a configuraciones turbulentas en las que la difusión es poco importante.

#### Límite difusivo

Si predomina el segundo término, es decir si  $R_M \ll 1$ , y analizamos la ecuación (4.5) despreciando el primer término de la derecha, la ecuación resultante es

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

El hecho de que  $\partial \vec{B}/\partial t$  sea proporcional a  $\nabla^2 \vec{B}$  nos dice que variaciones espaciales del campo en una escala  $L$  serán destruidas en un tiempo del orden del tiempo de difusión  $\tau$ . Podemos estimar este tiempo con las magnitudes características  $B/\tau \sim \eta B/L^2$  o bien

$$\tau_d = \frac{L^2}{\eta}, \quad v_d = \frac{L}{\tau_d}$$

siendo  $v_d$  la velocidad de difusión correspondiente. La tabla 4.1 muestra distintos tiempos de difusión característicos para diferentes configuraciones. Para un valor de  $\eta \approx 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  el tiempo de difusión de una mancha solar sería de  $\tau_d = 10^{12} \text{ s} \approx 30000 \text{ años}$  ( $L \approx 10^6 \text{ m}$ ). Dado que las manchas duran tiempos del orden de las semanas sobre la superficie solar, la difusión, por sí sola, no puede

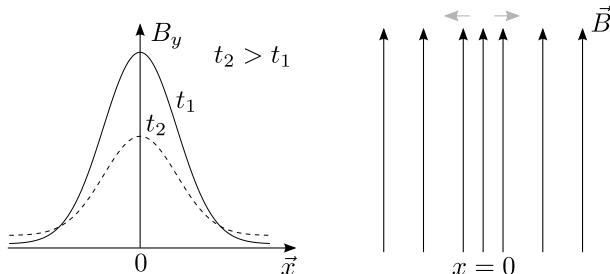
Objetos	Tiempo de difusión
Esfera de cobre 1cm de radio	1s
Núcleo de la Tierra	$10^4$ años
Campo magnético solar (escala global)	$10^{10}$ años

Tabla 4.1: Tiempos de difusión característicos.

explicar la desaparición de las manchas solares. Antes bien, el largo tiempo de difusión ( $\tau_d \rightarrow \infty$ ), respecto al corto tiempo característico asociado al cambio en las manchas, indica que la explicación del fenómeno debe buscarse a partir del otro límite de la ecuación de inducción. Volveremos sobre esta cuestión en el Capítulo 9, que trata la teoría de dinamo.

Para ilustrar el efecto difusivo (ver figura 4.2) consideremos un campo de inducción magnética en la dirección  $y$  que varía sólo en la dirección  $x$ .

En este caso  $\nabla^2 B_y = \partial^2 B_y / \partial x^2$ . En los puntos en los que el campo es positivo la derivada segunda resulta negativa, y por lo tanto también es negativa la derivada temporal:  $\partial \vec{B} / \partial t$ , de modo que el campo tiende a disminuir. Crecerá sólo en los puntos en los que  $\partial^2 B_y / \partial x^2$  sea positivo pero sólo lo hará hasta que esta cantidad se haga negativa, momento en el que comenzará a disminuir. Vemos que la ecuación de difusión opera amortiguando las perturbaciones que modifican la uniformidad del plasma, las líneas de campo son difundidas a través del plasma.


 Figura 4.2: Difusión de un campo variable con la coordenada  $x$  en la dirección  $y$ .

**Otra forma de verlo:** Consideremos un campo magnético que satisface la ecuación de difusión y que inicialmente vale

$$\vec{B}(x, t = 0) = B_0 \hat{e}_z \quad x > 0$$

$$\vec{B}(-x, t = 0) = -B_0 \hat{e}_z \quad x < 0$$

### 4.3. Flujo magnético

---

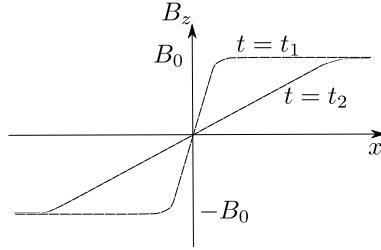


Figura 4.3: Variación del campo magnético con el tiempo. En el estado inicial el campo es una función escalón simétrica respecto del origen, con el tiempo se difunde hasta que en el infinito  $B(x, t \rightarrow \infty) = 0$ .

de modo que la ecuación a resolver tiene la forma

$$\partial_t B_z(x, t) = \eta \frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x^2}$$

que formalmente es como la ecuación de conducción de calor –que expresa que el calor fluye de las zonas más calientes a las más frías hasta que la difusión del calor borra los gradientes de temperatura–. Es decir, una distribución inhomogénea de  $\vec{B}$  tiende a volverse espacialmente uniforme con tiempo de difusión  $\tau_0 = l_0^2/\eta$ .<sup>1</sup> La solución de la ecuación de difusión es proporcional a la función error

$$B_z(x, t) = B_0 \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4\eta t}} \right) = \frac{2B_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\eta t}}} e^{-u^2} du$$

Esta solución tiene la forma que se muestra en la figura 4.3 para distintos tiempos y se puede mostrar que cumple con la ecuación de difusión. Notar que  $B(x, t \rightarrow \infty) = 0$ . Se cumple también que el flujo magnético se mantiene constante

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_z(x, t) dx = B_0 \quad \forall t$$

pero la energía decrece en el tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2(x, t)}{2\mu_0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(x, t)}{\mu_0} \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} dx$$

sustituyendo e integrando por partes resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(x, t)\eta}{\mu_0} \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} dx = \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} \left\{ \left[ B \frac{\partial B}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 dx \right\} .$$

---

<sup>1</sup>Esto es lo mismo que ocurre con el calor: hay flujos de calor debido a que hay gradientes de temperatura  $\vec{F} = k\nabla T$ . Pero el flujo de calor hace evolucionar el gradiente de temperatura en forma proporcional  $\partial T/\partial t = \nabla \cdot \vec{F}$  de modo que se obtiene una ecuación de difusión para la temperatura  $\partial T/\partial t = k\nabla^2 T$ .

Como  $\partial B / \partial x \rightarrow 0$  en el infinito el primer término se anula y como la corriente es  $j = (\partial B / \partial x) / \mu_0$  resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} dx = - \int \frac{j^2}{\sigma} dx$$

lo que significa que la densidad de energía magnética (por unidad de volumen) se ha transformado totalmente en calor.

En astrofísica las longitudes características son muy grandes lo que lleva a que los tiempos de difusión  $\tau_0 = l_0^2 / \eta$  sean lentos y por lo tanto la resistividad es poco eficiente. Para apreciar el efecto de la resistividad a pequeña escala y el impacto global en la gran escala considere las configuraciones magnéticas de las figuras. La tercera es una configuración de menor energía. Esta configuración es el resultado de que hubo *reconexión magnética*. En este caso hay pérdida de identidad de las líneas, y no se conserva el flujo magnético. La escala de tiempo en que se rompe la condición de conservación de flujo viene dada por  $\tau_0 = l_0^2 / \eta$ , en astrofísica estos tiempos son extremadamente largos. Este tiempo puede disminuir si por ejemplo, hay un forzamiento externo que acerque las líneas de campo, como se puede ver en la figura 4.4a, haciendo que la longitud característica  $l_0$  disminuya apreciablemente como se ve en la figura 4.4b. Cuando esto ocurre en una región localizada se hace importante el término de difusión y puede darse la configuración que se ve en la figura 4.4c, donde las líneas de campo se han “reconectado”. Vemos que la aproximación MHD ideal para la astrofísica es en general una muy buena aproximación. Volveremos sobre la temática de reconexión magnética en el Capítulo 8.

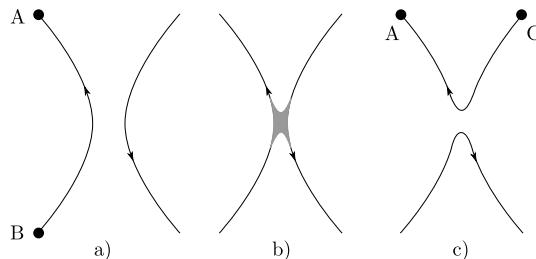


Figura 4.4: Esquema de reconexión magnética.

### Límite de conductividad perfecta

Si predomina el término convectivo respecto al difusivo –si suponemos conductividad infinita– nos queda sólo el primer término de la ecuación (4.5). Y

### 4.3. Flujo magnético

aunque la conductividad no sea tan grande, si las escalas espaciales lo son suficientemente el término difusivo es despreciable frente al convectivo:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) . \quad (4.6)$$

En este caso vale el teorema de Alfvén del flujo congelado que dice que: *En un plasma perfectamente conductor, o donde la escala de longitudes es suficientemente grande como para despreciar el término difusivo, el flujo magnético a través de una superficie rodeada por una curva cerrada que se mueve en el plasma permanece constante en el tiempo.* De dónde resulta que el campo magnético se comporta como si las líneas de campo se movieran solidariamente con el plasma. Consideremos una curva cerrada  $l$  que se mueve con el plasma (ver figura 4.5); después de un intervalo  $\Delta t$  ocupará una posición  $l'$ . El flujo magnético concatenado por  $l' = l(t + \Delta t)$  diferirá respecto al de  $l$  debido a dos razones. Por la variación de  $\vec{B}$  con el tiempo en el intervalo  $\Delta t$  y debido a la variación del flujo que atraviesa la superficie  $S_1$  que rodea a  $l$  respecto al que atraviesa la superficie  $S_2$  que rodea a  $l'$ ; esto último debido a que las líneas atraviesan la superficie lateral  $S_3$  “barrida” por  $l$  al moverse.

Para calcular la contribución lateral observemos que el elemento de  $\Delta S$  correspondiente a un elemento  $d\vec{l}$  de  $l$  es

$$\Delta S = d\vec{l} \times \vec{v} dt$$

y por lo tanto el flujo saliente por  $\Delta S$  es

$$\oint_l \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) dt.$$

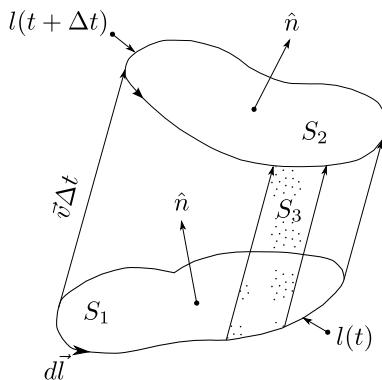


Figura 4.5: Variación del flujo magnético que atraviesa una curva cerrada que se mueve con el plasma.

La variación del flujo por unidad de tiempo debido a las dos causas será

$$\frac{DF}{Dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_l \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

Aplicando Stokes

$$\frac{DF}{Dt} = \int \int_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S}$$

y en virtud de la ecuación de inducción en el límite de conductividad perfecta ecuación (4.6)

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad (4.7)$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema de Alfvén.

La ecuación (4.7) es un resultado general matemático que da la variación del flujo de una magnitud de divergencia nula a través de una superficie rodeada por una curva en movimiento. Llamaremos superficie magnética en un sentido general a toda superficie en la que  $\vec{B}$  es tangente en cualquier punto. Como cualquier curva cerrada sobre la superficie magnética encierra un flujo nulo, al moverse con el plasma, según el teorema de Alfvén, el flujo concatenado seguirá siendo nulo. Si consideramos ahora que una línea de campo es la intersección de superficies magnéticas, dado que estas se mueven con el plasma, la línea de campo también lo hace. Se dice que las líneas de  $\vec{B}$  están congeladas en el plasma y debido a esta propiedad podemos identificar cada línea de campo por los elementos de plasma sobre ella. El plasma puede “moverse” en la dirección sobre las líneas pero un movimiento transversal acarrea un movimiento de las líneas (o una variación de  $\vec{B}$  que puede identificarse como un corrimiento de líneas). En el caso general se tendrán los dos términos de la ecuación de inducción de modo que las líneas de campo serán parcialmente arrastradas y parcialmente difundidas.

#### 4.4. Fuerza de Lorentz

Al analizar la ecuación de inducción estudiamos la forma en que el flujo de plasma influye sobre  $\vec{B}$ . Analizaremos ahora cómo influye una configuración dada de campo magnético sobre el movimiento del plasma. La ecuación de movimiento, suponiendo que no hay otras fuerzas es

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} .$$

Reemplazando  $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu_0$  y usando la relación vectorial

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$$

la ecuación de Lorentz puede escribirse

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right). \quad (4.8)$$

El segundo término es semejante a la densidad de fuerza producida por una presión:  $\nabla p_M$ , la presión magnética se define entonces

$$p_M = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

En geometrías simples por ejemplo cuando  $\vec{B}$  tiene una sola componente, el término  $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$  se anula debido a la ausencia de monopolos y la ecuación de movimiento queda

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} = -\nabla(p_M + p)$$

y para que haya equilibrio debe satisfacerse

$$p_M + p = \text{cte};$$

cualquier cambio en la presión del gas debe ser compensado por un cambio en la presión magnética. Si el plasma está confinado magnéticamente en una región del espacio, la presión del gas decae rápidamente en los bordes y por lo tanto la presión magnética debe aumentar para compensarla.

El primer término de ecuación (4.8):  $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$ , es no nulo si  $\vec{B}$  no varía en la dirección de  $\vec{B}$ . Es la resultante de tensiones de tracción que actúan a lo largo de las líneas. En mecánica de fluidos y en electromagnetismo se define el tensor de los esfuerzos o de las tensiones  $t_{ij}$ , a partir del cual se obtienen las fuerzas por unidad de superficie que un elemento de volumen ejerce sobre los adyacentes a través de la superficie de separación, y también la densidad de fuerza que actúa sobre cada elemento.

Como se ve en el esquema de la figura 4.6, la parte 2 ejerce sobre la 1 una fuerza por unidad de superficie  $\vec{T}$ , de componentes

$$T_i \equiv \sum_j t_{ij} n_j \quad (4.9)$$

mientras que la densidad de fuerzas viene dada por

$$F_i \equiv \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}.$$

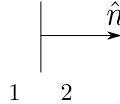


Figura 4.6: Esquema para analizar el efecto de los esfuerzos que actúan sobre la región 1 debido a la acción de la región 2.

En electromagnetismo el tensor de tensiones es el tensor de Maxwell y es la parte espacial-espacial del tensor de energía impulso. En el caso que nos interesa, la ecuación (4.8), es tal que la componente  $i$ -ésima de la densidad de fuerzas en coordenadas cartesianas es

$$(\vec{j} \times \vec{B})_i = \frac{1}{\mu_0} \sum_j B_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x_i};$$

teniendo en cuenta que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \sum_j \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

resulta

$$(\vec{j} \times \vec{B})_i = \frac{1}{\mu_0} \sum_j \frac{\partial(B_j B_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x_i} \delta_{ij} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \delta_{ij} \right] = \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}.$$

El tensor de tensiones es entonces

$$t_{ij} = \frac{B_i B_j}{\mu_0} - \frac{B^2}{2\mu_0} \delta_{ij}. \quad (4.10)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (4.9), la fuerza por unidad de superficie a través de una superficie de normal  $n$  queda

$$\vec{T} = \vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}$$

donde el segundo término se escribe

$$\vec{T}_i^{(2)} = -\sum_j \frac{B^2}{2\mu_0} \delta_{ij} n_j = -\frac{B^2}{2\mu_0} n_i$$

donde  $\vec{T}^{(2)}$  es una fuerza por unidad de superficie de compresión igual en todas direcciones y de magnitud  $B^2/2\mu_0 = p_M$ . Por otro lado, del primer término de la ecuación (4.10) tenemos

$$\vec{T}_i^{(1)} = \sum_j \frac{B_i B_j}{\mu_0} n_j = \frac{B \cdot \hat{n}}{\mu_0} \vec{B}|_i$$

que es una tensión de tracción en la dirección de  $\vec{B}$  de magnitud

$$T_M = \frac{B^2}{\mu_0} \text{ cuando } \hat{n} \parallel \vec{B}, \quad T_M = 0 \text{ cuando } \hat{n} \perp \vec{B}.$$

Por ejemplo, si se tiene un campo  $\vec{B}$  uniforme sobre un elemento de plasma actuarán tensiones de tracción iguales a lo largo de la línea de  $\vec{B}$  y presiones iguales en todos los sentidos (ver figura 4.7). En este caso la fuerza volumétrica debido tanto al término de tensión como al de compresión es nula; esto está de acuerdo con el hecho de que  $\vec{j} = 0$  y por lo tanto  $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ .

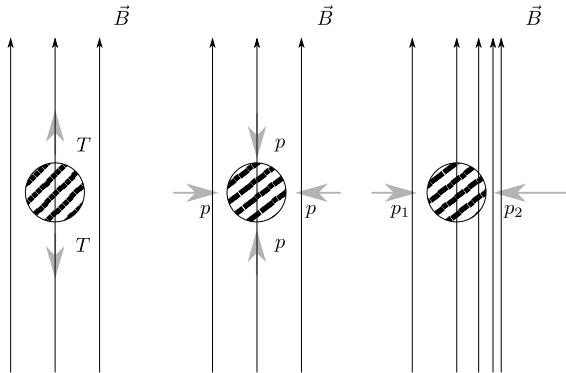


Figura 4.7: Esquema de presiones y tensiones actuando sobre un elemento de volumen.

Pensemos ahora en un campo  $\vec{B}$  que no varía en dirección pero sí en magnitud a lo largo de la dirección transversal al campo (ver último esquema de la figura 4.7). En la dirección de  $\vec{B}$ , ni la presión ni la tensión de tracción dan resultado neto, aunque hay presión neta en la dirección normal a las líneas, siendo  $p_2 > p_1$ , en este caso hay  $\vec{j} \times \vec{B} \neq 0$ .

Para analizar con más detalle la fuerza neta debido a la tensión en el caso general

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

ponemos  $\vec{B} = B \hat{s}$  donde  $\hat{s}$  es un versor en la dirección de  $\vec{B}$

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial}{\partial s} (B \hat{s}) = \frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial s} \hat{s} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\partial \hat{s}}{\partial s}.$$

Como

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial s} = \frac{1}{R_c} \hat{n}$$

donde  $\hat{n}$  es la normal principal de la línea de campo y  $R_c$  es el radio de curvatura, podemos poner

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{s} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\hat{n}}{R_c}.$$

Vemos que en la dirección normal a las líneas de  $\vec{B}$ ,  $\hat{n}$ , hay una resultante neta de la tensión si las líneas tienen curvatura, que en general no se compensa con la fuerza debida a la presión; esto debe ser así ya que la fuerza de Lorentz es perpendicular a  $\vec{B}$ .

Si analizamos el problema con las fuerzas superficiales tenemos una presión  $p = B^2/2\mu_0$  en todas direcciones (esquema del medio de la figura 4.7) y una tensión  $T = B^2/\mu_0$  en dirección de  $\vec{B}$  (primer esquema de la figura 4.7); podemos decir también que hay una compresión  $p' = B^2/2\mu_0$  en cualquier dirección normal a las líneas y una tensión  $T' = B^2/\mu_0 - B^2/2\mu_0 = B^2/2\mu_0$  en la dirección de las líneas; la primera da resultante neta si  $B$  varía en dirección perpendicular a  $\vec{B}$  y la segunda si las líneas de  $\vec{B}$  tienen curvatura.

### Ejemplos:

Considere los ejemplos mostrados en la figura 4.8. En el panel a) de la figura, se muestran líneas de  $\vec{B}$  curvas y equidistantes y un elemento de plasma en la zona de mayor curvatura. La resultante de  $p'$  es cero, ya que  $B$  no varía. En el panel b) se muestra la distribución de campo  $\vec{B} = y\hat{e}_x + x\hat{e}_y$ ,  $\vec{j} = 0$ , las líneas de campo son hipérbolas. Es lo que se llama “punto X”, ( $\vec{R}_p$ ,  $\vec{R}_T$ , son las resultantes de la presión y la tensión respectivamente). En este caso la tensión y la presión neta se anulan mutuamente. Si en cambio las asíntotas se acercan  $\vec{j} \neq 0$  (panel c)). En el eje  $x$ :  $R_p > R_T$ . En el eje  $y$ :  $R_p < R_T$ . Esto muestra que

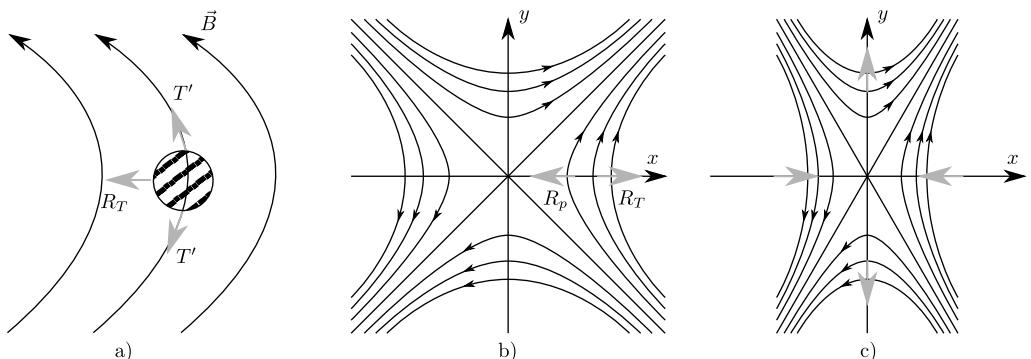


Figura 4.8: Esquema: diferentes configuraciones de campo magnético, análisis del balance entre presiones y tensiones.

los puntos X son inestables.

## 4.5. Resumen

Las ecuaciones que gobiernan la MHD ideal son:

### Ausencia de monopolos magnéticos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 .$$

### Inducción magnética

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} .$$

### Ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 .$$

### Ecuación de movimiento

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F} .$$

### Ecuación de estado

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T .$$

### Ecuación de energía

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -L .$$

Estas ecuaciones permiten determinar  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . La densidad de corriente se obtiene de

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

y el campo eléctrico a partir de

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} .$$

Finalmente si interesa la densidad de carga se puede hallar

$$\nabla \cdot \vec{E} = \langle \rho_c \rangle / \epsilon_0 .$$

El llamado límite de conductividad infinita (o de escalas de longitudes grandes) se conoce como MHD ideal. En este límite la ecuación de inducción toma la forma

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

y la ley de Ohm

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

y se desprecia en la ecuación de movimiento las fuerzas viscosas y la fuerza electrostática.

## Aproximaciones

Un parámetro que da idea de cuál de los dos términos domina en la ecuación de inducción es el número de Reynolds magnético. Si analizamos los dos órdenes de magnitud de la ecuación de inducción sin tener en cuenta las características particulares debidas a la relación relativa de las direcciones de  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  y a sus variaciones, llamando  $v_0$  y  $B_0$  a valores típicos de estas cantidades respectivamente, tendremos: el término convectivo

$$\frac{v_0 B_0}{L},$$

y el término difusivo

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{B_0}{L}$$

de modo que el cociente de estos dos términos resulta

$$R_M = \mu_0 \sigma v_0 L$$

llamado número de Reynolds magnético que se puede también escribir en términos del tiempo de difusión  $\tau = \mu_0 \sigma L^2$  como

$$R_M = \mu_0 \sigma v_0 L = \frac{v_0 \tau}{L}.$$

Si  $R_M \ll 1$  domina el término difusivo y si  $R_M \gg 1$  domina el término convectivo y las líneas son transportadas por el plasma (o el campo de inducción  $\vec{B}$  obstaculiza el movimiento transversal del plasma). Vemos que  $R_M$  depende de  $\sigma$  pero también de la escala de longitudes  $L$  del problema. En general en el laboratorio,  $R_M < 1$  y el acoplamiento entre el flujo de plasma y el campo es débil; en problemas geofísicos o astrofísicos ocurre lo contrario. Así mientras que en el laboratorio las líneas de campo se deslizan en el plasma rápidamente en el otro caso por lo general las líneas pueden ser consideradas congeladas al plasma.

En el caso particular de un problema estático,  $v = 0$ , el término convectivo se anula y habrá variación temporal de  $\vec{B}$  debido al término de difusión, pero si el tiempo de difusión es muy grande podemos considerar  $\vec{B}$  constante para tiempos menores que el de difusión. En forma similar si hay flujo de plasma imponiendo la condición

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

podemos considerar que  $\vec{B}$  es estacionario para tiempos menores que el de difusión. En este caso aunque  $R_M$  es mucho mayor que uno, el término convectivo es nulo y por lo tanto menor que el difusivo. Podemos seguir diciendo que las líneas están congeladas al campo pero el esquema de líneas no varía pues  $\partial \vec{B} / \partial t \sim 0$ .

Haciendo un análisis similar con la ley de Ohm

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

obtenemos

$$R_M \ll 1 \rightarrow |\vec{v} \times \vec{B}| \ll \left| \frac{\vec{j}}{\sigma} \right|$$

$$R_M \gg 1 \rightarrow |\vec{v} \times \vec{B}| \gg \left| \frac{\vec{j}}{\sigma} \right|$$

y por lo tanto en cada límite

$$R_M \ll 1 \rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$R_M \gg 1 \rightarrow \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 . \quad (4.11)$$

En el límite de conductividad infinita (o de escala grande) se obtiene una relación directa entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y los campos de velocidad e inducción magnética. Como  $v \ll c$  vemos nuevamente que se cumple  $|\vec{E}| \ll c|\vec{B}|$ . Los

campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí y en función de ellos podemos obtener el valor de la velocidad del plasma perpendicular a  $\vec{B}$ , que además coincide con la velocidad de las líneas, usando ecuación (4.11)

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \left( \vec{v} \cdot \frac{\vec{B}}{B} \right) \frac{\vec{B}}{B} = \frac{1}{B^2} [\vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B})] = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

que coincide con la deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  de una partícula en campos perpendiculares. Debe tenerse presente que aun cuando la ley de Ohm se reduzca a la ecuación (4.11) ello no implica que  $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu_0$  se anule. A diferencia de lo que sucede en el laboratorio donde generalmente el campo inducido exteriormente  $\vec{E}$  y el valor de  $\sigma$  determinan  $\vec{j}$ , y de allí  $\vec{B}$ , en problemas astrofísicos el orden se invierte y el campo  $\vec{B}$  se considera primario.

### Parámetros adimensionales

Estos parámetros dan la importancia relativa de fenómenos que compiten entre sí. Algunos son propios de la hidrodinámica y algunos específicos de la MHD.

#### *Número de Reynolds*

$$R_e = \frac{Lv_0}{\nu}$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Este término da la importancia relativa del término  $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$  respecto a las fuerzas viscosas en la ecuación de movimiento. Si  $R_e \gg 1$  se puede despreciar el término viscoso fuera de las inmediaciones de un rígido (fenómenos de capa límite).

#### *Número de Reynolds magnético*

$$R_M = \mu_0 \sigma v_0 L$$

da la importancia relativa entre el término convectivo y el difusivo en la ecuación de inducción magnética, y es una medida del acoplamiento entre  $\vec{B}$  y el plasma. Si  $R_M \gg 1$  se considera que las líneas de  $\vec{B}$  están congeladas al plasma. Si  $R_M \ll 1$  el acoplamiento es débil y domina la difusión.

#### *Parámetro $\beta$ del plasma*

$$\beta = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2} .$$

## 4.6. Tubos de flujo y hojas de corriente

---

Es el cociente entre la presión del gas y la presión magnética. Si  $\beta \ll 1$  la fuerza de Lorentz influye más que el gradiente de presiones en el movimiento del plasma, salvo para configuraciones especiales del campo ( $\vec{j} \parallel \vec{B}$ ).

### *Número de Mach*

$$M = \frac{v_0}{c_s} .$$

Es el cociente entre la velocidad del plasma y la velocidad del sonido  $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ . Es una medida de la influencia de la compresibilidad del fluido en su movimiento. Si  $M \ll 1$  el fluido es poco compresible.

### *Número de Mach-Alfvén*

$$M_A = \frac{v_0}{v_A} .$$

En plasmas magnetizados en la aproximación MHD se pueden propagar ondas magnéticas con una velocidad de propagación

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} .$$

El número de Mach-Alfvén da la importancia relativa entre el término convectivo  $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$  y la fuerza de Lorentz en la ecuación de movimiento.

## 4.6. Tubos de flujo y hojas de corriente

Hay dos estructuras que esquematizan situaciones que se suelen presentar en los plasmas magnetizados: tubos de flujo y hojas de corriente.

### Tubo de flujo magnético y hoja de corriente

Dada la estructura (figura 4.9a) de campo de inducción  $\vec{B}$  consideramos una curva cerrada. El volumen encerrado por dichas líneas es el tubo de flujo. El flujo de  $\vec{B}$  es igual a través de cualquier sección del tubo ya que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Se llama intensidad del tubo al flujo de  $\vec{B}$  que lo atraviesa. Si el campo está congelado la intensidad del tubo permanecerá invariante al moverse el tubo junto con el plasma, aunque puede cambiar de forma. Si  $\vec{B}$  varía rápidamente en dirección perpendicular a sí mismo, el rotor de  $\vec{B}$ , y con él  $\vec{j}$ , pueden hacerse muy grandes. En particular si se ponen en contacto dos regiones de campo de inducción diferentes, en la superficie entre las dos habrá una discontinuidad

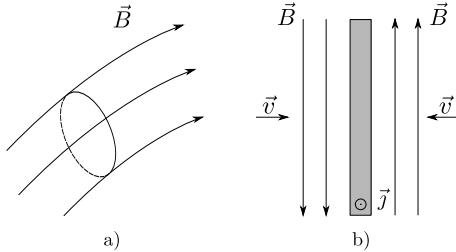


Figura 4.9: a) Tubo de flujo, b) hoja de corriente

tangencial de  $\vec{B}$  y por lo tanto entre ellas habrá una zona de densidad de corriente muy grande (figura 4.9b). Cuando no hay flujo de plasma a través de una discontinuidad tangencial se dice que se tiene una hoja de corriente. El ancho de la misma no es infinitesimal pero es pequeño y por lo tanto  $j$  es grande y la difusión es alta.

### Ejercicios

4.1 Muestre que

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right).$$

Obtenga el tensor de los esfuerzos a partir de la expresión de la fuerza de Lorentz. Identifique y explique el rol de cada uno de los términos. Es decir, muestre que la densidad de fuerza de Lorentz puede escribirse como la suma de una presión magnética isótropa más una fuerza que sólo es no nula cuando existen variaciones de  $\vec{B}$  a lo largo de la dirección de  $\vec{B}$ . Muestre que el primer término de la expresión puede a su vez descomponerse como una tensión que actúa en la dirección de  $\vec{B}$  (cancelando la presión paralela a  $\vec{B}$ ) más una tensión perpendicular ( $T_{\perp} = B^2/R_c$ ) que actúa oponiéndose a la curvatura (tensión restitutiva).

- 4.2 Considere una configuración de campo magnético  $\vec{B}_0 = y\hat{e}_x + x\hat{e}_y$  con un punto magnético neutro tipo X en el origen. Muestre que esta configuración sólo es consistente con densidad de corriente nula. Calcule la expresión de las líneas de campo y grafiéelas. Muestre que es una configuración de equilibrio e interpréte analizando la tensión y la presión magnética resultantes. A pesar de que existe un gradiente de presión no nulo la tensión magnética perpendicular se encarga cancelarla. Muestrelo para los elementos de fluido posicionados en  $y = 0$  y  $x = x_0 > 0$ . Interprete el resultado.
- 4.3 Considere una configuración de campo magnético  $\vec{B}_0 = y\hat{e}_x + \alpha^2 x\hat{e}_y$ ,  $\alpha^2 > 0$ , también con un punto magnético neutro tipo X en el origen.
- a. Encuentre la expresión para las líneas de campo magnético y grafiéelas.

#### 4.6. Tubos de flujo y hojas de corriente

---

- b. Halle la expresión para la corriente que genera este campo magnético y para la fuerza de Lorentz.
- c. Explique la fuerza desde la perspectiva del balance de tensiones y presiones.
- d. El caso  $\alpha - 1 \ll 1$  resulta una perturbación del caso del ejercicio 4.2. Suponiendo congelamiento de campo y fluido, ¿es esta configuración estable o inestable? Justifique cualitativamente la respuesta.



## Capítulo 5

---

# MAGNETOHIDROSTÁTICA

---

### 5.1. Introducción

Muchos fenómenos de plasmas suelen permanecer en un estado estacionario o en equilibrio, más precisamente en cuasiequilibrios, por tiempos largos respecto a los tiempos de interés. Tal es el caso de las protuberancias quiescentes en la corona solar o estructuras magnéticas compuestas por material mucho más denso que el del medio circundante. Son sostenidas por el campo magnético contra la gravedad solar por tiempos del orden de los meses. Otros ejemplos solares son los arcos magnéticos, las manchas y las arcadas o conjunto compacto de arcos generalmente ubicados en regiones activas. No todas las soluciones de equilibrio de las ecuaciones MHD son estables por eso además de conocer los equilibrios es necesario conocer la estabilidad de los mismos.

Las soluciones estáticas son aquellas en las que no hay flujos,  $\vec{v} \equiv 0$ , ni variaciones temporales,  $\partial/\partial t \equiv 0$ , de las cantidades físicas. La ecuación de movimiento resulta entonces

$$-\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} = 0 \quad (5.1)$$

que debe ser resuelta junto con las ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}, \quad p = \frac{\rho R T}{\mu}. \quad (5.2)$$

Si  $T$  es conocida no es necesario resolver la ecuación de la energía. Las soluciones más sencillas son las que corresponde al caso *isotérmico* y al *adiabático*. El caso *isotérmico* resulta de procesos lentos en los que el plasma tiene tiempo suficiente para redistribuir la energía de modo de mantener equilibrio térmico con el medio circundante. En el otro extremo, los procesos son tan rápidos que

el sistema no tienen tiempo de intercambiar energía con el medio circundante y la evolución se dice que es *adiabática*. En este caso el cambio en la temperatura se relaciona en forma simple con el cambio en la densidad, cuestión que resulta intuitiva dado que un gas se enfriá durante una expansión y se calienta durante la contracción.

**Aclaración:** En el caso general, dependiente del tiempo se deben resolver ocho ecuaciones para ocho variables. Téngase en cuenta que la ecuación de ausencia de monopolos magnéticos es utilizada como condición inicial del problema. Las ocho ecuaciones son: la de continuidad (1), el momento (3), la energía (1) y la inducción magnética (3) para encontrar ocho variables: la densidad (1), la velocidad (3), la presión (1) y el campo magnético (3). Si se conoce una ley para la temperatura o se asume una relación politrópica:  $p \sim \rho^\gamma$  ( $\gamma = 1$  caso isotérmico) se puede prescindir de la ecuación de la energía interna. Si  $\gamma = c_p/c_v$ , (el cociente de calores específicos), la relación  $p \sim \rho^\gamma$  es la condición isoentrópica. Esto significa que la dinámica es a la vez reversible y adiabática. Si se utiliza esta relación en vez de la ecuación de la energía estaremos excluyendo explícitamente procesos irreversibles como por ejemplo la generación de ondas de choque. En tal caso se agrega la ecuación de estado de los gases perfectos y la ley correspondiente. Es decir en total quedan nueve ecuaciones y se agrega una nueva variable, la temperatura. En el caso del equilibrio ideal,  $\vec{v} = 0$ , y la ecuación de continuidad se satisface idénticamente. Se deben resolver las ecuaciones de momento (3), la de ausencia de monopolos (1), se agrega la ecuación de estado (1) y una ley que vincula las variables termodinámicas (1), por ejemplo adiabaticidad. Son seis ecuaciones para las seis variables de campo (3), y las (3) variables termodinámicas, densidad presión y temperatura. En el caso no ideal se debe cumplir que las fuentes y sumideros de energía interna se cancelan mutuamente.

## 5.2. Balance de presiones

Consideremos un campo uniforme en la dirección vertical

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z, \quad \vec{g} = -g \hat{e}_z$$

con  $\vec{j} = 0$ , por lo tanto la fuerza de Lorentz es también cero. Las expresiones  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  y  $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu_0$  se satisfacen inmediatamente. Proponiendo  $p = p(z)$  se obtiene de la ecuación (5.1) y de la ecuación de los gases ideales, ecuación (5.2):

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g = \frac{g\mu}{RT(z)}p(z) = -\frac{p(z)}{H(z)} \quad (5.3)$$

### 5.3. Parámetro $\beta$ del plasma

---

donde

$$H(z) = \frac{RT(z)}{g\mu}$$

es la escala de alturas. Integrando la ecuación (5.3)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{H(z)} dz$$

da como resultado

$$\log(p) = n(z) + \log(p(0)) \rightarrow n(z) = \int_0^z \frac{1}{H(u)} du$$

y por lo tanto

$$p(z) = p(0) \exp(-n(z))$$

falta una expresión para la energía, en el caso particular en que se suponga una atmósfera isotérmica,  $T = \text{cte}$  resultando  $H = \text{cte}$  y

$$p(z) = p(0) \exp(-z/H) \rightarrow \rho(z) = \rho(0) \exp(-z/H)$$

de modo que la presión y la densidad decrecen exponencialmente en una escala  $H$ . El problema 1 de este capítulo muestra que la escala de altura de la corona es del orden de los 100Mm, que es una altura típica de los arcos coronales. Por esta razón, cuando se trabaja con arcos magnéticos se suele despreciar el efecto de la gravedad.

### 5.3. Parámetro $\beta$ del plasma

Se incluye ahora el campo magnético, pero se desprecia la gravedad. Se puede anticipar la importancia de la fuerza de Lorentz en comparación con el efecto del gradiente de presión. El equilibrio queda

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}, \quad \text{en orden de magnitud: } \frac{p_0}{l_0} = \frac{B_0^2}{\mu_0 l_0}.$$

Utilizando la definición de

$$\beta \equiv \frac{p_{gas}}{p_{mag}} = \frac{p_0}{B_0^2/2\mu_0}$$

se observa que si  $\beta \ll 1$  se desprecia la presión del gas y se anula la fuerza de Lorentz. Cuando esto sucede se dice que los campos son *force-free* (libre de fuerzas).

## 5.4. Campos force-free

Consideremos la magnitud de los términos de la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho\vec{g}.$$

Se puede despreciar la gravedad en favor de la presión si

$$\frac{p_0}{l_0} \gg \rho_0 g = \frac{p_0}{H},$$

es decir si, las longitudes de interés son chicas respecto a la escala de altura

$$l_0 \ll H.$$

Por otro lado, se puede despreciar la presión frente a la fuerza de Lorentz

$$\frac{p_0}{l_0} \ll \frac{B_0^2}{2\mu_0 l_0},$$

es decir si,

$$\beta \ll 1.$$

Tendremos campos force-free si además podemos despreciar la variación de la velocidad en favor de la fuerza de Lorentz

$$\rho_0 \frac{v_0}{t_0} + \rho_0 \frac{v_0^2}{l_0} \simeq 2\rho_0 \frac{v_0}{t_0} \ll \frac{B_0^2}{2\mu_0 l_0},$$

lo que significa que

$$v_0^2 \ll v_A^2$$

donde  $v_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$  es la velocidad de Alfvén, valor característico de la elasticidad del plasma. Esto reduce la ecuación de movimiento a la de equilibrios force-free

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0 \tag{5.4}$$

y se dice que el campo magnético es force-free.

## 5.5. Equilibrios force-free

### 5.5.1. Campo potencial

Asumimos campos force-free de modo que

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0.$$

## 5.6. Prominencias quiescentes

---

Una solución inmediata es aquella en la que  $\vec{j} = 0$  y el campo magnético se llama *potencial*. La ley de Ampère resulta

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

y por tanto la solución más general es aquella que

$$\vec{B} = \nabla f, \quad (5.5)$$

donde  $f(x, y, z)$  es el potencial magnético. Sustituyendo la ecuación (5.5) en la ecuación de Maxwell se obtiene

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \nabla^2 f = 0. \quad (5.6)$$

De modo que el campo magnético potencial satisface la ecuación de Laplace.

### 5.5.2. Campo force-free general

La solución más general de la ecuación (5.4) es aquella en que  $\vec{j} \parallel \vec{B}$ , con  $\vec{j} \neq 0$ , este es el caso no potencial. Es decir,

$$\mu_0 \vec{j} = \alpha \vec{B} \rightarrow \nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}, \quad (5.7)$$

para algún escalar  $\alpha$  que puede ser función de la posición.

El escalar  $\alpha(r)$  no es completamente arbitrario dado que tomando la divergencia de la segunda igualdad de la ecuación (5.7) se obtiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\alpha \vec{B}).$$

Es decir,

$$\vec{B} \cdot \nabla \alpha = 0,$$

$\alpha$  debe ser constante a lo largo de cada línea de corriente aunque puede variar de línea a línea. Si  $\alpha = 0$  el campo es potencial. Si  $\alpha$  no es constante se dice que el problema force-free en estudio es no lineal.

## 5.6. Prominencias quiescentes

Una prominencia quiescente en el Sol es una estructura de material frío y denso de plasma (de unos dos órdenes de magnitud mayor en densidad y menor en temperatura que el medio que la circunda) en la Corona que puede durar por varios días o meses (hasta unos 200 días). Se las ve sobre el disco solar como un

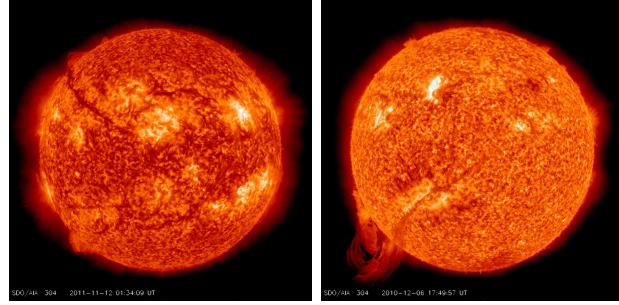


Figura 5.1: Prominencias quiescentes. (*Cortesía SDO*)

filamento oscuro sobre una región que contiene una línea de inversión de polaridad magnética (ver figura 5.1). Veremos cómo es posible que estos equilibrios perduren por tiempos relativamente largos. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} &= 0 \\ \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ p &= \frac{\rho R T}{\mu} \end{aligned}$$

donde la temperatura es obtenida de la ecuación de la energía.

### 5.6.1. *Modelo de Kippenhahn-Schluter*

Este modelo fue propuesto en 1957. Se asume que la temperatura es constante

$$T = T_0.$$

Dado que el ancho de la prominencia es mucho menor que la altura y esta es mucho mayor que el largo, siendo valores característicos:  $L \simeq 200\text{Mm}$ ,  $h \simeq 50\text{Mm}$  y  $w \simeq 6\text{Mm}$ , es posible asumir que dentro de la prominencia las variaciones en las coordenadas son despreciables. Es decir,  $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$  y sólo consideraremos variaciones en la dirección horizontal a lo largo de la prominencia.

$$\vec{B} = (B_{x0}, B_{y0}, B_z(x)), \quad p = p(x), \quad \rho = \rho(x).$$

Suponemos entonces que las condiciones de contorno son tales que la presión y la densidad tienden a cero al alejarse de la prominencia y que  $B_z = B_{z0}$  tiende a un valor constante al alejarse.

$$\rho, p \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty$$

## 5.6. Prominencias quiescentes

---

$$B_z \rightarrow B_{z0} \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Con estas condiciones se comprueba fácilmente que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left( 0, -\frac{dB_z}{dx}, 0 \right).$$

Consideremos las componentes  $x$  y  $z$  de la ecuación de movimiento

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{B_z}{\mu_0} \frac{dB_z}{dx}, \quad (5.8)$$

$$0 = \frac{B_{x0}}{\mu_0} \frac{dB_z}{dx} - \rho g. \quad (5.9)$$

Resolviendo la ecuación (5.8) se obtiene

$$p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \text{cte}$$

utilizando las condiciones de contorno se obtiene la constante

$$\text{cte} = \frac{B_{z0}^2}{2\mu_0}$$

y por lo tanto

$$p = \frac{1}{2\mu_0} (B_{z0}^2 - B_z^2). \quad (5.10)$$

Resolviendo la ecuación (5.9) y dado que la temperatura es constante utilizamos la ecuación de los gases ideales para obtener

$$\frac{B_{x0}}{\mu_0} \frac{dB_z}{dx} = \frac{\mu p g}{RT_0} = \frac{p}{H}. \quad (5.11)$$

Sustituyendo la ecuación (5.10) en la ecuación (5.11) se obtiene

$$\frac{B_{x0}}{\mu_0} \frac{dB_z}{dx} = \frac{1}{2\mu_0 H} (B_{z0}^2 - B_z^2)$$

integrando queda

$$\begin{aligned} \int \frac{dB_z}{B_{z0}^2 - B_z^2} &= \frac{x}{2B_{x0}H} + C \\ \frac{1}{B_{z0}} \tanh^{-1} \left( \frac{B_z}{B_{z0}} \right) &= \frac{x}{2B_{x0}H} + C \\ B_z &= B_{z0} \tanh \left( \frac{B_{z0}}{2B_{x0}H} \frac{x}{H} + C' \right). \end{aligned}$$

Por simetría en  $x = 0$ ,  $B_z(0) = 0$  lo que nos da  $C' = 0$ . Lo que nos lleva a los resultados finales:

$$B_z = B_{z0} \tanh\left(\frac{B_{z0}}{2B_{x0}} \frac{x}{H}\right)$$

$$p = \frac{B_{z0}^2}{2\mu_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{B_{z0}}{2B_{x0}} \frac{x}{H}\right)$$

y teniendo en cuenta que la temperatura es constante

$$\rho = \frac{\mu}{RT_0} \frac{B_{z0}^2}{2\mu_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{B_{z0}}{2B_{x0}} \frac{x}{H}\right).$$

### 5.7. Balance de presiones en una columna de plasma

Consideremos el caso en que la presión del gas balancea a la fuerza de Lorentz de modo que

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (5.12)$$

si asumimos geometría cilíndrica (no hay variación de las variables con  $\varphi$  y  $z$ ), el campo magnético se escribe

$$\vec{B} = B_\varphi(r) \hat{e}_\varphi + B_z(r) \hat{e}_z$$

la ecuación (5.12) se escribe también

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_\varphi^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\varphi^2}{\mu_0 r} = 0. \quad (5.13)$$

Considerando que  $p = p(r)$  esta ecuación describe la ecuación de equilibrio hidrostático general para el caso de geometría cilíndrica.

Consideremos el caso en que el campo magnético en la columna de plasma es generado por una corriente  $\vec{j} = j(r) \hat{e}_z$  a lo largo del eje de la columna de plasma. Es inmediato constatar que esta corriente no generará un campo en la dirección  $z$  y la única componente resulta

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) = \mu_0 j \quad (5.14)$$

que se obtiene fácilmente de la ecuación que describe la corriente. Para estudiar el equilibrio de una columna de plasma debido a la corriente en el eje, primero es necesario calcular  $B_\varphi$  y luego buscar que se satisfaga la ecuación (5.13) con  $B_z = 0$ . Consideremos en primer lugar el caso en que la corriente es constante,

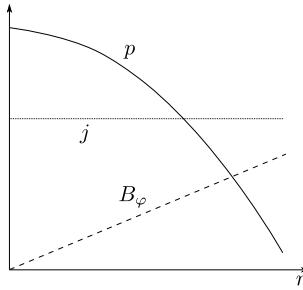


Figura 5.2: Dependencia radial de la presión, campo magnético y corriente.

$j$ . Se obtiene de la ecuación (5.14)

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{2} jr$$

que sustituyendo en la ecuación (5.13) da la ecuación para la presión

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\mu_0^2 j^2 r}{2}$$

cuya solución resulta

$$p = p_0 - \frac{\mu_0 (jr)^2}{4} \quad (5.15)$$

donde  $p_0$  es la presión en el centro de la columna. La figura (5.2) muestra la dependencia del campo, la presión y la corriente con  $r$ . Como se ve la presión decae con el radio debido al efecto de pinzamiento del campo magnético. Se ve también de la ecuación (5.15) que la presión alcanzará el valor cero para un radio dado más allá del cual no tendrá efecto; la presión negativa no tiene sentido físico. Si  $a$  es el valor para el cual la presión se vuelve nula resulta

$$a^2 = \frac{2p_0}{\mu_0 j^2} .$$

Esto significa que el campo es capaz de confinar una columna de plasma haciendo cero la presión para un radio finito  $a$ .

Discutamos ahora el caso general para  $j(r)$ . Si la columna es confinada dentro de un radio  $r = a$  donde la presión se hace cero, la corriente total dentro de la columna se puede hallar integrando la ecuación (5.14) obteniéndose

$$I = \int_0^a j(r) 2\pi r dr = \frac{a B_\varphi(a)}{\mu_0}$$

de donde resulta

$$B_\varphi(a) = \frac{I \mu_0}{a} \quad (5.16)$$

poniendo  $B_z = 0$  en la ecuación (5.13) se obtiene

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 B_\varphi^2}{2\mu_0} \right).$$

El valor medio de la presión dentro de la columna de plasma resulta

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p(r) 2\pi r dr.$$

Integrando por partes esta ecuación:

$$\bar{p} = \frac{2}{a^2} \left( \frac{1}{2} r^2 p \right) \Big|_0^a - \int_0^a \frac{1}{2} r^2 \frac{dp}{dr} dr.$$

El primer término de la derecha se anula y sustituyendo la ecuación (5.11) en la anterior resulta

$$\bar{p} = \frac{B_\varphi^2(a)}{2\mu_0}$$

y utilizando la ecuación (5.16) obtenemos finalmente

$$\bar{p} = \frac{I^2 \mu_0}{2a}.$$

Esta ecuación relaciona el valor medio de la presión  $\bar{p}$  y el radio  $a$  de una columna de plasma con la corriente  $I$  necesaria para confinar la columna.

### 5.8. Estabilidad de una columna de plasma

Discutiremos aquí en forma cualitativa la estabilidad de una columna de plasma. Es obvio que si un equilibrio es inestable no es posible que exista en la naturaleza. Sin embargo, la estabilidad o la inestabilidad están asociadas a tiempos característicos. Una prominencia, por ejemplo, se inestabiliza para tiempos largos respecto de los tiempos de observación. Observe las configuraciones inestables de la figura 5.3 con campo magnético azimutal y consideremos las perturbaciones  $P$  y  $Q$  de cada uno de ellos respectivamente. En el primer caso la densidad de líneas en  $P$  (inestabilidad *kink*) es mayor que en la cara opuesta a la indicada con  $P$  lo que aumenta todavía más la presión desplazando al plasma de manera que aumenta la inestabilidad. Dado que no hay una contrapresión que se oponga vemos que este equilibrio es inestable. Una vez que se inicia sigue creciendo. Lo mismo sucede con la perturbación en el punto  $Q$ , la presión de las líneas es mayor que el valor que  $B_\varphi$  asigna a la presión fuera del cilindro, en equilibrio

## 5.8. Estabilidad de una columna de plasma

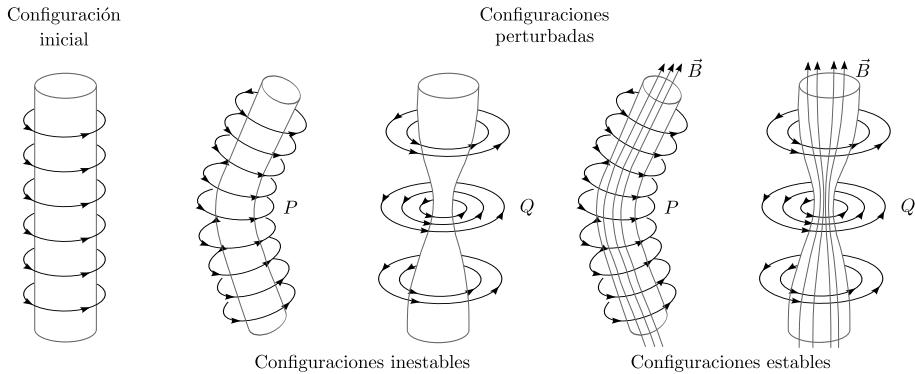


Figura 5.3: Perturbaciones al campo magnético.

de presiones. El aumento de esta presión hace que se desarrolle la inestabilidad de *sausage*, aquí nuevamente una vez que la inestabilidad comienza no cesa.

Si se agrega un campo magnético a lo largo de la columna dicho campo tendrá a suprimir la inestabilidad (configuraciones estables de la figura 5.3). Una inestabilidad *kink* curva las líneas de campo axial y la tensión de estas líneas se opone a dicha inestabilidad. En el caso de la inestabilidad *sausage* el campo axial es comprimido y la presión magnética del campo axial aumentada por el *sausage* se opone a la inestabilidad. Los experimentos que intentan generar energía debido a fusión utilizaron estos tipos de configuraciones. Debido a que las temperaturas que se requieren para la fusión son muy grandes, del orden de  $10^7\text{K}$  ningún material es capaz de confinar el plasma. Es por eso que se han intentado confinamientos magnéticos como los de la figura 5.3 que corresponde al caso del  $\theta$ -pinch mencionado en capítulos anteriores. Sin embargo, esta configuración es inestable. También se dijo que las configuraciones *z*-pinch –corriente en la dirección *z*– son estables pero que tienen el inconveniente que el plasma se escapa por los extremos del dispositivo. Es por todo esto que la configuración más estable, que se utiliza para los experimentos de confinamiento, es la del toro.

### Ejercicios

5.1 Calcule valores típicos de la escala de altura de la atmósfera solar. Datos: gravedad  $g_{\odot} = 274 \text{ m s}^{-2}$ , constante  $R = 8,3 \text{ J/mol/K}$ .

- en la fotosfera  $T = 6000\text{K}$  y  $\mu = 1,3$ .
- en la corona  $T = 2 \times 10^6\text{K}$  y  $\mu = 0,5$ .
- en la Tierra  $T = 300\text{K}$  y  $\mu = 29$  para el aire con  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

5.2 Calcule el  $\beta$  aproximado para las regiones atmosféricas solares:

- a. Región activa donde el campo magnético es cerrado. Datos:  $B_0 = 100\text{G}$ ,  $\rho_0 = 2 \times 10^{-11} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $v_0 = 30\text{km s}^{-1}$ .
- b. Agujeros coronales que tienen campos magnéticos y densidades más débiles. Datos:  $B_0 = 10\text{G}$ ,  $\rho_0 = 2,10^{-13}\text{kg m}^{-3}$ ,  $v_0 = 10\text{km s}^{-1}$ .

Responda: ¿puede considerarse al campo magnético como un campo force-free?

5.3 Arcadas de campo potencial. En la fotosfera los magnetogramas muestran que hay regiones de polaridad opuesta separados por una línea que separa las regiones de polaridad inversa. Cuando los campos entre dichas regiones se acercan se forman *arcadas coronales*. Estas arcadas se ven muy claramente en imágenes satelitales de rayos X.

- a. Para obtener un modelo de dichas arcadas asumamos que la longitud de la arcada es mucho mayor que su ancho de modo que las variables sólo dependerán de do variables  $(x, z)$  y despreciamos las variaciones a lo largo de la longitud de la arcada,  $\partial/\partial y = 0$ . Dadas las condiciones iniciales  $B_z \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ ,  $B_x(\pm l/2, z) = 0$  y  $B_z(x, 0) = G(x)$  asuma la condición de campo potencial ecuación (5.6) proponiendo separación de variables para la función  $f$  y obtenga las soluciones generales para  $B_x(x, z)$  y  $B_y(x, z)$ .
- b. Supongamos en el caso general la condición particular  $B_z(x, 0) = G(x) = -B_0 \operatorname{sen}(\pi x/l)$  y encuentre y dibuje las líneas de campo:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dz}{B_z}.$$

5.4 Dibuje los perfiles de  $B_z$  y  $p$  de la ecuación de Kippenhanh-Schluter y obtenga las líneas de campo.

5.5 Resuelva el equilibrio de la sección 5.3, proponiendo el caso adiabático.

## Capítulo 6

---

# ONDAS MAGNETOHIDRODINÁMICAS

---

### 6.1. Introducción

Las ondas MHD son muy diferentes a las electromagnéticas obtenidas como soluciones de vacío de las ecuaciones de Maxwell, es decir sin considerar fuentes ( $q; \vec{j}$ ). Estas últimas ondas son transversales en las que un campo  $\vec{E}$  variable en el tiempo produce un campo magnético y viceversa. Dado que en la MHD se desprecia la corriente de desplazamiento es claro que las ondas electromagnéticas no tendrán lugar. Las ondas MHD son perturbaciones del campo de velocidades del plasma que a su vez perturban el campo magnético, la densidad y la presión. Son producidas por distintas fuerzas restitutivas: gradiente de presión, fuerza de Lorentz, gravedad (otra Coriolis). Para analizar separadamente cada una de las situaciones supondremos en primera instancia que una fuerza predomina sobre las otras de modo que las otras pueden despreciarse. Se analizarán los siguientes casos con diferente grado de profundidad:

1. Ondas de sonido cuya única fuerza restitutiva es el gradiente de presiones.
2.
  - a) Ondas magnéticas (de Alfvén) con fuerza de Lorentz como fuerza restitutiva, a las que se agregará luego,
    - b) el gradiente de presión dando lugar a las magnetoacústicas rápidas y lentas.
3. Ondas de gravedad u ondas cuya fuerza restitutiva es la gravedad.
4. Se analizarán los límites de aplicabilidad de la MHD.

## 6.2. Ondas de sonido

Si despreciamos la viscosidad, el campo magnético y la gravedad las ecuaciones MHD resultan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p . \quad (6.2)$$

Suponemos además procesos adiabáticos, procesos rápidos en los cuales no hay intercambio de calor

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 . \quad (6.3)$$

Consideremos que en equilibrio  $\rho_0$  y  $p_0$  son uniformes y el problema es estático ( $v_0 = 0$ ). Perturbemos al sistema tal que

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t),$$

$$p = p_0 + p_1(\vec{r}, t)$$

y

$$\vec{v} = \vec{v}_1(\vec{r}, t)$$

y linealizando las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.3) resultan

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 , \quad (6.4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 \quad y \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ p_0 - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 + p_1 \right] = 0 \rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial t} - c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \quad (6.6)$$

donde

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

es la velocidad del sonido. Para obtener una ecuación diferencial en  $p_1$  reemplazamos la ecuación (6.4) en la (6.6) obteniendo:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + c_s^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 .$$

Derivando esta ecuación y usando (6.5) obtenemos una ecuación de onda para la perturbación en la presión:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 p_1 = 0 . \quad (6.7)$$

### 6.3. Ondas magnéticas

---

Ecuaciones equivalentes se obtienen para  $\rho_1$  y  $\vec{v}_1$ .

Proponemos como solución de la ecuación (6.7) la superposición de ondas planas  $p_1 = \sum_j A_j \exp[i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t)]$ . Dado que la ecuación es lineal y que las funciones exponenciales forman una base, la ecuación que resulta debe cumplirse término a término, es decir para cada valor del índice  $j$ . Resulta entonces la relación de dispersión

$$\omega_j^2 = c_s^2 k_j^2 \quad \forall j .$$

De la misma manera obtenemos  $\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$  que reemplazando en la ecuación (6.5) queda:

$$\rho_0 \omega \vec{v}_1 = p_1 \vec{k}$$

es decir  $\vec{v}_1$  es paralela a  $\vec{k}$  y se obtiene el conocido resultado de que las ondas sonoras son longitudinales. La fuerza restauradora es el gradiente de presiones; una perturbación que lleva a una compresión o una rarefacción del gas crea un gradiente de presión que tiende a restablecer el equilibrio.

### 6.3. Ondas magnéticas

Consideramos la acción del campo magnético y despreciamos las otras fuerzas. Como hemos visto en el Capítulo 4, la fuerza de Lorentz,  $\vec{j} \times \vec{B}$  (por unidad de superficie) se puede descomponer en dos términos, un término de presión magnética y uno de tensión magnética. Cuando la fuerza de Lorentz es analizada como fuerza por unidad de área transmitida desde un elemento de plasma a otro adyacente, un término es el de la tensión a lo largo de las líneas de inducción y el otro es la presión normal a la superficie de separación entre los elementos. Estas fuerzas actúan como fuerzas restauradoras de las ondas magnéticas que son de dos tipos: ondas de Alfvén de corte y ondas compresionales de Alfvén. El término de compresión de un dado elemento de volumen es igual en magnitud y en todas las direcciones

$$p_M = \frac{B^2}{2\mu_0} .$$

El término de tensión

$$T_M = \frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{\mu_0}$$

actúa a lo largo de las líneas de campo. En la dirección normal a las líneas de campo la resultante de las tensiones tiene valor neto si las líneas tienen curvatura. En síntesis, la fuerza sobre un elemento de volumen ejercida por los

adyacentes tendrá una contribución no nula de la presión cuando haya variación neta de la intensidad de  $B$  –actúa desde regiones de alta a baja presión magnética– y una componente no nula de tensión cuando haya curvatura de las líneas. La tensión y la presión magnética actuán como fuerzas restauradoras para las ondas magnéticas que son de dos tipos: las ondas de Alfvén de corte (o simplemente de Alfvén) y ondas de compresión de Alfvén.

Para analizarlas en una primera instancia despreciamos todas las fuerzas salvo la de Lorentz y supondremos un plasma con conductividad infinita. Veamos gráficamente dos casos simples. Supongamos un campo  $\vec{B}_0$  uniforme en la dirección  $z$  y una perturbación  $\vec{B}_1$  del campo tal que:

caso a)  $\vec{B}_1$  es perpendicular a  $\vec{B}_0$ , variando en la dirección de  $\vec{B}_0$  (lo que da la dirección de  $z$  que indica cómo se propaga la perturbación) (ver figura 6.1a),

caso b)  $\vec{B}_1$  en la dirección de  $\vec{B}_0$  y variando perpendicularmente a  $\vec{B}_0$  (ver figura 6.1b).

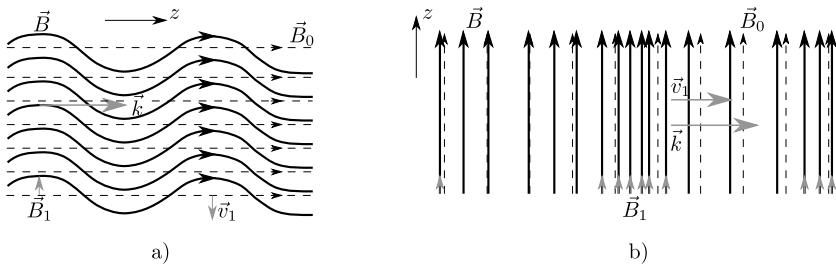


Figura 6.1: Perturbaciones a) transversales y b) paralelas en campo magnético al campo uniforme  $\vec{B}_0$ .

Suponiendo pequeñas perturbaciones en el caso a) el valor del campo no varía ( $B_1 \ll B_0$ ) y puede despreciarse la presión magnética. Pero las líneas están curvadas y hay una resultante neta de la tensión que está dirigida hacia el centro de curvatura de las líneas. Por lo tanto aparece una velocidad  $\vec{v}_1$  perpendicular a  $\vec{B}_0$ : el plasma oscila arrastrando las líneas debido al congelamiento. Se tiene entonces  $\vec{k} \parallel \vec{B}_0 \perp \vec{v}_1 \parallel \vec{B}_1$ .

En el caso b) como la presión es mayor donde el campo de inducción es mayor aparece una fuerza sobre el plasma desde la zona de mayor densidad de líneas a la de menor densidad y una velocidad del plasma perpendicular a  $\vec{B}_0$ , el plasma oscila arrastrando las líneas. Se tiene entonces  $\vec{k} \parallel \vec{v}_1 \perp \vec{B}_0 \parallel \vec{B}_1$ .

Estos son dos casos límites, uno correspondiente a las ondas de corte de Alfvén y el otro, a las ondas compresionales de Alfvén. Analíticamente, las

### 6.3. Ondas magnéticas

---

ecuaciones que dan cuenta de estas ondas se obtienen perturbando y linealizando las ecuaciones de continuidad, movimiento e inducción:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}).\end{aligned}$$

En este caso no es necesario considerar la ecuación de la energía debido a que no aparece la presión explícitamente en la ecuación de momento. Consideraremos las condiciones iniciales de equilibrio estático con densidad e inducción magnética uniformes y velocidad nula:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t) \\ \vec{v} &= \vec{v}_1(\vec{r}, t).\end{aligned}$$

Linealizando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \\ \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0).\end{aligned}\tag{6.8}$$

Derivando la segunda respecto al tiempo:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \right) \times \vec{B}_0$$

y reemplazando la tercera, se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0.\tag{6.9}$$

Proponemos una solución de onda plana monocromática

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

y dado que estamos considerando perturbaciones lineales esto implica el mismo tipo de dependencia para las otras cantidades. Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\omega \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}$$

se obtiene la siguiente ecuación de la ecuación (6.9)

$$\omega^2 \rho_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \times [\vec{k} \times (\vec{k} \times \{\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\})] = 0.$$

Utilizando dos veces la relación del triple producto vectorial  $(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  obtenemos

$$\begin{aligned} \omega^2 \vec{v}_1 + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} & \left[ (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)(\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1)B_0^2 \right] \vec{k} + \\ \frac{1}{\mu_0 \rho_0} & (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)\vec{B}_0 - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \vec{v}_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Una propiedad de las ondas planas cuando hay perturbación del campo magnético es que la inducción magnética perturbada es perpendicular a la dirección de propagación de la onda lo que resulta de la ecuación de la divergencia nula del campo:  $\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$  y por lo tanto

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0. \quad (6.11)$$

Nótese que este resultado proviene de que  $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$  dado que elegimos  $\vec{B}_0$  uniforme. Si multiplicamos la ecuación (6.10) escalarmente por  $\vec{B}_0$  se simplifican cuatro de los términos quedando  $\omega^2(\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0) = 0$  o bien

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0 = 0. \quad (6.12)$$

Lo que indica que en la aproximación lineal las ondas magnéticas son tales que la velocidad de la perturbación del plasma es perpendicular a la inducción magnética ambiente  $\vec{B}_0$ .

Si multiplicamos la ecuación (6.10) escalarmente por  $\vec{k}$ , teniendo en cuenta (6.14) y (6.12) obtenemos

$$(\omega^2 - k^2 v_A^2)(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = 0. \quad (6.13)$$

Donde hemos llamado velocidad de Alfvén a la cantidad

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}}. \quad (6.14)$$

Para que esta ecuación se cumpla hay dos posibilidades:  $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$  o bien  $(\omega^2 - k^2 v_A^2) = 0$  dando lugar a los dos tipos de modos mencionados (cuyos casos extremos fueron discutidos en los casos a) y b) de las ondas magnéticas).

### 6.3.1. Ondas de Alfvén (corte)

Corresponden al caso

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (6.15)$$

lo que implica que estas ondas son incompresibles ( $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ ). Usando la primera de las ecuaciones (6.8) resulta  $\partial \rho_1 / \partial t = 0$ . Para una onda plana esto implica que  $\rho_1 = 0$  y si además se supone adiabaticidad resulta  $p_1 = 0$ . Por lo tanto la onda de Alfvén es una perturbación incompresible; sin variación de la densidad y la presión en la que sólo la velocidad y la inducción magnética se modifican siendo ambas perturbaciones perpendiculares a la dirección de propagación de la onda (dada por  $\vec{k}$ ).

Para obtener la relación entre  $\omega$  y  $k$  volvemos a la ecuación (6.10) y hacemos uso de (6.12) y (6.15) quedando como solución, dado que  $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ ,

$$\omega^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_A)^2 = 0$$

o bien

$$\omega = \pm k v_A \cos(\theta) \quad (6.16)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de propagación y  $\vec{B}_0$  (ver figura 6.2). La relación entre  $\vec{v}_1$  y  $\vec{B}_1$  se obtiene de la tercera de las ecuaciones (6.8) teniendo en cuenta la (6.15) y resultando

$$\vec{B}_1 = -\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega} \vec{v}_1 \quad (6.17)$$

y utilizando la ecuación de dispersión (6.16)

$$\vec{v}_1 = \pm \frac{\vec{B}_1}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}}.$$

Los signos + y - corresponden a que la velocidad de fase tenga proyección positiva o negativa en la dirección de  $\vec{B}_0$ . Es decir, tomando en cuenta este signo,

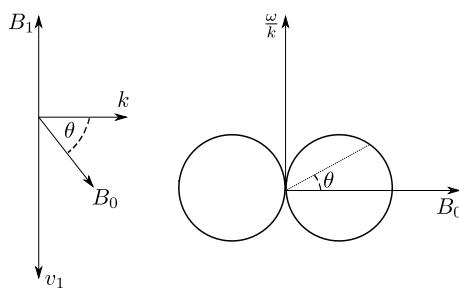


Figura 6.2: Relación de dispersión.

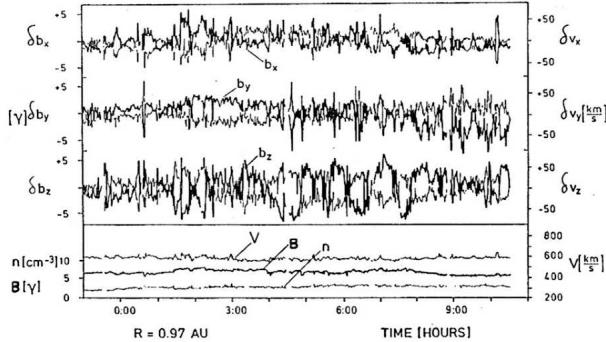


Figura 6.3: Ondas de Alfvén en el viento solar.

que corresponde al de  $(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)$  en (6.17) se ve que  $\vec{v}_1$  y  $\vec{B}_1$  están en contrafase. Este resultado es observationalmente importante, dado que permite distinguir las ondas de Alfvén de otro tipo de ondas. La figura 6.3 muestra que cada una de las componentes de la perturbación del campo  $\vec{B}_1$  están en contrafase con las de la perturbación de la velocidad  $\vec{v}_1$ . Si elegimos, sin pérdida de generalidad, el eje  $z$  en la dirección de  $\vec{B}_0$  la ecuación (6.16) queda  $\omega = \pm v_A k_z$  y la velocidad de grupo  $\vec{v}_g = \nabla_k \omega = (\partial \omega / \partial k_x, \partial \omega / \partial k_y, \partial \omega / \partial k_z) = \pm v_A \hat{e}_z$  resultando que

$$\vec{v}_g = \pm \vec{v}_A.$$

De modo que la energía de la onda de Alfvén se propaga en la dirección de la inducción magnética cualquiera sea la dirección de  $\vec{k}$ .

Notar que el gradiente de la presión magnética es nula,

$$\nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 .$$

Las ondas de Alfvén siguen existiendo sin modificarse cuando se considera la presencia del gradiente de presiones mientras que todas las otras se acoplan y modifican. Otra característica es que estas ondas se propagan sin distorsionarse aún cuando las amplitudes son grandes.

### 6.3.2. Ondas de compresión de Alfvén

La otra solución de la ecuación (6.13) es  $\omega^2 - k^2 v_A^2 = 0$  o bien

$$\omega = \pm k v_A.$$

En este caso no hay incompresibilidad ( $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 \neq 0$ ) y por lo tanto  $\rho_1$  y  $p_1$  son distintos de cero denotando compresión. De la ecuación (6.10) como el factor

## 6.4. Ondas magnetoacústicas

---

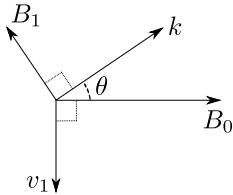


Figura 6.4: Vectores coplanares de ondas de compresión de Alfvén.

que multiplica a  $\vec{v}_1$  es distinto de cero, a diferencia con lo que sucedía con las ondas de corte, resultan  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{k}$  y  $\vec{B}_0$  coplanares. Además de la tercera de las ecuaciones (6.8) resulta

$$\vec{B}_1 = \frac{-(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\vec{v}_1 + (\vec{k} \cdot \vec{v}_1)\vec{B}_0}{\omega}$$

de donde se ve que también  $\vec{B}_1$  está en el plano. Recordando que para toda onda magnética plana monocromática  $\vec{B}_1 \perp \vec{k}$  y  $\vec{v}_1 \perp \vec{B}_0$  (ecuaciones (6.11) y (6.12)) resulta la figura 6.4. El ejemplo cualitativo del caso b) corresponde al caso particular  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$  ( $\theta = \pi/2$ ) en cuyo caso  $\vec{B}_1 \parallel \vec{B}_0$  y  $\vec{v}_1 \parallel \vec{k}$ . En este caso actúa sólo la presión magnética pero cuando  $\theta \neq \pi/2$  resulta  $\vec{B}_1$  con componente en dirección perpendicular a  $\vec{B}_0$  y las líneas de inducción son curvas dando lugar a la acción de la tensión magnética.

Notar que la velocidad de fase y grupo coinciden:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_g = \pm v_A \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

## 6.4. Ondas magnetoacústicas

Estas ondas son importantes en medios en los que no puede despreciarse ni la fuerza de Lorentz ni el gradiente de presiones de modo que la ecuación de movimiento resulta

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}.$$

Además debe considerarse la ecuación de conservación de la masa, la ecuación de inducción, la de la adiabaticidad y la correspondiente a la ausencia de monopositos magnéticos  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Estas ondas son en principio diferentes a los casos anteriores: sonido ( $\vec{B} = 0$ ) y a las ondas magnéticas ( $p$  despreciable). Pero las ondas de Alfvén de corte no perturban la densidad ni la presión por

lo tanto no se alteran si en la ecuación de movimiento se agrega el gradiente de presiones. En cambio las ondas de compresión de Alfvén y las de sonido se modifican dando lugar a ondas magnetoacústicas de dos tipos.

Linealizando las ecuaciones alrededor del estado de equilibrio:  $\vec{B} = \vec{B}_0$ ,  $p = p_0$ ,  $\rho = \rho_0$  y  $\vec{v}_0 = 0$ , se puede reemplazar una ecuación en la otra obteniendo una ecuación diferencial para la variable  $\vec{v}_1$  que al proponer una onda plana como solución nos da la ecuación:

$$(\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2(\theta)) \vec{v}_1 + (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) k v_A^2 \cos(\theta) \hat{e}_{B_0} \\ - \left[ (v_A^2 + c_s^2)(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - k v_A^2 \cos(\theta) (\hat{e}_{B_0} \cdot \vec{v}_1) \right] \vec{k} = 0 . \quad (6.18)$$

El término adicional que aparece respecto al caso magnético puro es

$$c_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{k}$$

y proviene de haber considerado el gradiente de presión del gas en la ecuación de movimiento. Recordar que  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{B}_0$  y  $\vec{k}$ , y  $\hat{e}_{B_0}$  es un vensor en la dirección del campo no perturbado. Ahora ya no se puede concluir como en el caso puramente magnético que  $\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0 = 0$ .

Para obtener la relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$  de la ecuación (6.18) es conveniente, igual que para las ondas magnéticas, multiplicar escalarmente por  $\vec{k}$  y por  $\vec{B}_0$  con lo que se obtienen las ecuaciones:

$$[\omega^2 - k^2(v_A^2 + c_s^2)] (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + k^3 v_A^2 \cos(\theta) (\hat{e}_{B_0} \cdot \vec{v}_1) = 0 \\ -k \cos(\theta) c_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + \omega^2 (\hat{e}_{B_0} \cdot \vec{v}_1) = 0$$

quedando un sistema homogéneo de ecuaciones en  $(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)$  y  $(\hat{e}_{B_0} \cdot \vec{v}_1)$  cuya solución trivial da la solución de las ondas de Alfvén de corte. Para que existan soluciones no triviales el determinante debe ser nulo:

$$[\omega^2 - k^2(v_A^2 + c_s^2)] \omega^2 + k^4 v_A^2 c_s^2 \cos^2(\theta) = 0$$

cuyas soluciones son

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2(\theta)} \quad (6.19)$$

o bien

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{v_A^4 + c_s^4 - 2v_A^2 c_s^2 \cos(2\theta)} .$$

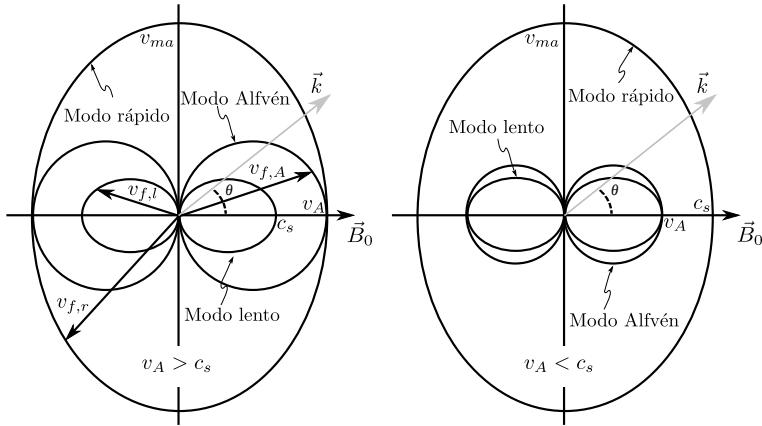


Figura 6.5: Velocidad de fase de las ondas magnetoacústicas.

Vemos de la ecuación (6.19), que el radicando es positivo para todo  $\theta$  y para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2}(0) &= \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_A^2 - c_s^2)^2} = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2}(v_A^2 - c_s^2) \\ &= \begin{cases} \text{si } v_A^2 > c_s^2 & \rightarrow v_A^2 \rightarrow +, c_s^2 \rightarrow - \\ \text{si } v_A^2 < c_s^2 & \rightarrow c_s^2 \rightarrow +, v_A^2 \rightarrow - \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2} = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2}(v_A^2 + c_s^2) = \begin{cases} v_A^2 + c_s^2 \\ 0 \end{cases} .$$

Si graficamos la velocidad de fase  $v_f = \omega/k$  obtenemos la figura 6.5. La velocidad de fase de las ondas de Alfvén tiene valores entre la velocidad magnetoacústica lenta y la rápida. Si  $v_A \ll c_s$  o  $\beta \gg 1$  (ejemplo de la cromosfera y fotosfera) que corresponde a la situación en que la fuerza de Lorentz es menos importante que el gradiente de presiones, la onda acústica se transforma un poco dando lugar a la magnetoacústica rápida y la magnetoacústica lenta da lugar a la magnética de compresión. Si  $v_A \gg c_s$  o  $\beta \ll 1$  (ejemplo de la baja corona) que corresponde a que la fuerza de Lorentz es más importante que el gradiente de presiones, la onda magnética de compresión se transforma dando lugar a la magnetoacústica rápida y aparece en lugar de la onda de sonido la magnetoacústica lenta. Si  $v_A \sim c_s$  no es posible distinguir si las ondas rápidas y lentas provienen de la del sonido modificada o de la de Alfvén de compresión modificada.

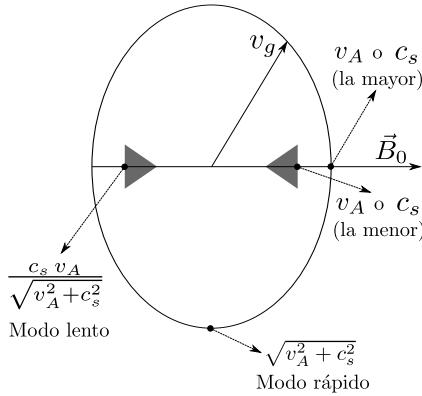


Figura 6.6: Velocidad de grupo de las ondas magnetoacústicas.

Si calculamos la velocidad de grupo reemplazando en la ecuación (6.19),  $k^2 \rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  y  $k^2 \cos^2(\theta) \rightarrow k_z^2$  y, derivando luego por  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  resulta que, salvo para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pm\pi/2$ ,  $v_g$  no tiene dirección paralela a  $\vec{k}$  —como en las ondas sonoras y en las ondas de Alfvén de compresión respectivamente— ni en la dirección de  $\vec{B}_0$  —como en las de Alfvén de corte— sino en una dirección intermedia. Si graficamos la velocidad de fase  $v_f = \omega/k$  obtenemos la figura 6.6.

De la figura se ve que los modos lentos se propagan en un cono alrededor de  $\vec{B}_0$  y los rápidos se pueden propagar en cualquier dirección.

## 6.5. Ondas de gravedad

### 6.5.1. Introducción

Estas ondas aparecen en gases en presencia de un campo gravitatorio aunque no haya campos magnéticos. Veremos primero cualitativamente cuál es el origen de las ondas de gravedad; luego analizaremos las ecuaciones linealizadas cuando actúa la gravedad y el gradiente de presiones dando lugar a las ondas acústicas de gravedad con sus límites: baja frecuencia (ondas de gravedad) y alta frecuencia (ondas sonoras). Finalmente veremos esquemáticamente qué sucede cuando además está presente el campo magnético.

Cualitativamente el fenómeno puede verse así: consideremos una burbuja de gas que es sacada de su posición de equilibrio y desplazada un  $\delta z$  (ver figura 6.7) por ejemplo en sentido contrario a  $\vec{g}$ ; supongamos además que la burbuja mantiene un equilibrio de presiones con el gas que la rodea y que los cambios son adiabáticos (o que el movimiento es suficientemente lento como para que haya

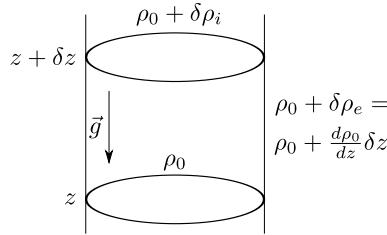


Figura 6.7: Esquema de ondas de gravedad.

un equilibrio de presiones pero que es significativamente rápido como para que no haya intercambio de calor). Entonces la burbuja cambiará su densidad en un  $\delta\rho_i$  para equilibrar adiabáticamente la presión con el exterior. Al ocurrir esto, ahora la rodea un medio de densidad diferente al que la rodeaba inicialmente pues cambió la posición: habrá un  $\delta\rho_e$ . Si la densidad final de la burbuja es menor que la del medio la burbuja seguirá subiendo, mientras que en el caso contrario aparece una fuerza que tiende a restituirla a su posición original y el gas oscilará. En la situación de equilibrio  $d\rho_0/dz = -\rho g$  por lo que

$$\delta p_e = -\rho g \delta z$$

y como hemos supuesto equilibrio de presiones

$$\delta p_i = \delta p_e = -\rho g \delta z.$$

De la condición de adiabaticidad para la burbuja debe ser:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$$

o sea

$$\delta p_i = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \delta \rho_i = c_s^2 \delta \rho_i.$$

La fuerza de flotación (*buoyancy*) que resulta de la diferencia de densidades es

$$g(\delta \rho_e - \delta \rho_i) = g \left( \frac{d \rho_0}{dz} + \frac{\rho_0 g}{c_s^2} \right) \delta z.$$

Cuando esta fuerza es negativa para  $\delta z$  positivo la burbuja oscila con frecuencia  $\omega = N$  (pensar en el ejemplo del oscilador armónico de masa  $\rho$ ), con

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \left( \frac{d \rho_0}{dz} + \frac{\rho_0 g}{c_s^2} \right) \quad (6.20)$$

y donde  $N$  es llamada la frecuencia de Brunt-Vaisala.

Usando la ecuación de estado obtenemos

$$\frac{dp_0}{dz} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{p_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz}$$

por lo tanto

$$\frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\rho_0}{p_0} \frac{dp_0}{dz} - \frac{\rho_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz} = \frac{-\rho_0^2 g}{p_0} - \frac{\rho_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz} = -\frac{\gamma}{c_s^2} \rho_0 g - \frac{\rho_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz}.$$

Reemplazando en la ecuación (6.20) la frecuencia de  $N$  expresada en función de la temperatura queda:

$$N^2 = \frac{g}{T_0} \left[ \frac{dT_0}{dz} + \frac{(\gamma - 1)T_0 g}{c_s^2} \right].$$

Es interesante observar que  $-(\gamma - 1)T_0 g / c_s^2$  es la variación de la temperatura de la burbuja con la altura cuando se mueve adiabáticamente. Luego  $N^2 > 0$  si la temperatura ambiente  $T_0$  aumenta con la altura o si disminuye más lentamente que la variación adiabática. Justamente esto da la condición de estabilidad convectiva, pues si  $N^2 < 0$  la burbuja tiende a seguir subiendo. En el caso particular en que  $T_0$  no es función de la altura

$$N^2 = \frac{(\gamma - 1)g^2}{c_s^2}.$$

Notar que este análisis cualitativo vale sólo para frecuencias bajas.

### 6.5.2. Ondas acústicas de gravedad

Consideremos ahora un plasma en el que se tiene en cuenta el gradiente de presiones y la gravedad, en la situación de equilibrio, como  $\nabla p_0 = -\rho g \hat{e}_z$ ,  $p_0$  no es uniforme sino que varía con la altura; suponiendo  $T_0$  uniforme

$$p_0 \sim \exp \left[ -\frac{z}{\Lambda} \right]$$

con  $\Lambda = p_0 / (\rho_0 g) = c_s^2 / (\gamma g)$ . Para  $T_0$  uniforme resulta además

$$\rho_0 \sim \exp \left[ -\frac{z}{\Lambda} \right].$$

Si linealizamos en este caso la ecuación de continuidad o de conservación de masa tenemos:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1] = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$$

o sea

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\gamma g}{c_s^2} \rho_0 v_{1z} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 . \quad (6.21)$$

En forma similar las ecuaciones de movimiento y adiabaticidad quedan:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 g \hat{e}_z \quad \text{y} \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = v_{1z} \rho_0 g - c_s^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (6.23)$$

donde se ha usado la ecuación (6.21). Derivando la ecuación (6.22) respecto al tiempo y reemplazando las ecuaciones (6.22) y (6.23) se obtiene una ecuación diferencial para  $\vec{v}_1$ . Proponiendo una solución de la forma

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$\omega^2 \vec{u}_1 = c_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{u}_1) \vec{k} + i(\gamma - 1)g(\vec{k} \cdot \vec{u}_1) \hat{e}_z + ig u_{1z} \vec{k} .$$

Tomando el producto escalar de estas ecuaciones con  $\hat{e}_z$  y  $\vec{k}$  queda un sistema de ecuaciones homogéneo en  $(\vec{k} \cdot \vec{u}_1)$  y  $u_{1z}$ ; anulando el determinante se obtiene la relación:

$$\omega^4 - \omega^2(c_s^2 k^2 + i\gamma g k_z) + g^2(\gamma - 1)(k^2 - k_z^2) = 0 . \quad (6.24)$$

Dado que aparece el número imaginario  $i$  concluimos que para  $\omega^2$  real será  $k^2$  complejo. Definimos  $k'$  tal que

$$\vec{k} = \vec{k}' - i \frac{\gamma g}{2c_s^2} \hat{e}_z \quad (6.25)$$

de modo que la ecuación (6.24) puede ponerse

$$\omega^4 - \omega^2 \left( c_s^2 k'^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^2} \right) + g^2(\gamma - 1)(k'^2 - k_z'^2) = 0 .$$

Finalmente la relación de dispersión resulta

$$\omega^2(\omega^2 - N_s^2) = (\omega^2 - N^2 \sin^2(\theta_g))k'^2 c_s^2 \quad (6.26)$$

donde

$$N_s = \frac{\gamma g}{2c_s}$$

$$N = \frac{\sqrt{\gamma - 1}g}{c_s}$$

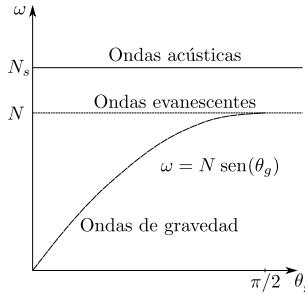


Figura 6.8: Esquema de ondas de gravedad.

$$\operatorname{sen}^2(\theta_g) = 1 - \frac{k'^2 z}{k'^2} .$$

Para gases ideales resulta

$$N_s \geq N .$$

Al tener  $\vec{k}$  una componente imaginaria (ver ecuación (6.25))

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{u}_1 \exp \left[ \frac{\gamma g}{2c_s^2} z \right] \exp[i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

la amplitud de las ondas aumenta con la altura siendo el factor de aumento igual a  $e$  para una distancia vertical que sea el doble de la escala de altura de la presión  $\Lambda$ .

Analizando la relación de dispersión (6.26) vemos que hay dos rangos de  $\omega^2$  que permite propagación con  $k'$  real:

$$\omega^2 < N^2 \operatorname{sen}^2(\theta_g) \text{ y}$$

$$\omega^2 > N_s^2 .$$

En el primer caso ambos miembros de (6.26) son negativos y en el segundo ambos son positivos. Para  $\omega > N_s$  las ondas son esencialmente acústicas, y si  $\omega \gg N_s$  la relación de dispersión se reduce a

$$\omega = k' c_s$$

dando  $c_s$  como velocidad de fase. Para  $\omega < N \operatorname{sen}(\theta_g)$  las ondas son esencialmente ondas internas de gravedad, y si además  $\omega \ll k' c_s$ , o sea  $v_f = \omega/k' \ll c_s$  se tiene

$$\omega \simeq N \operatorname{sen}(\theta_g) . \quad (6.27)$$

Para la región  $N \operatorname{sen}(\theta_g) < \omega < N_s$ ,  $k'^2$  es negativo y la onda es evanescente.

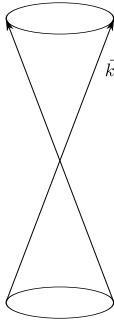


Figura 6.9: Esquema de la dirección de propagación de ondas de gravedad.

De la figura 6.8 se ve que las ondas de gravedad no se propagan en dirección vertical. Además (ver ecuación (6.27)), para un dado  $\omega$  independientemente de  $k'$  siempre que  $k'c_s \gg \omega$ , las ondas de gravedad sólo se pueden propagar en alguna dirección en un cono  $\sin(\theta_g) = \pm\omega/N$  (ver figura 6.9). Si calculamos la velocidad de grupo en este límite, teniendo en cuenta que  $\omega$  depende sólo de  $\theta_g$  y no de  $k'$ ,

$$\vec{v}_g = \nabla_{k'} \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k'} \frac{\vec{k}'}{k'} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta_g} \vec{\theta}_g$$

$$\vec{v}_g = N \cos(\theta_g) \vec{\theta}_g .$$

La velocidad de grupo  $\vec{v}_g$  es perpendicular a  $\vec{k}'$  (ver figura 6.10).

Es decir, ondas cuya fase se propaga con una componente hacia arriba, tienen energía propagándose hacia abajo y viceversa.

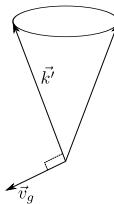


Figura 6.10: Esquema de la velocidad de grupo de ondas de gravedad.

### 6.5.3. Ondas magnetoacústicas de gravedad

Al introducir un campo magnético el problema se complejiza pues aparece la fuerza de Lorentz como fuerza restauradora además del  $\nabla p$  y de la gravedad; se agrega otra dirección preferencial además de la vertical.

Si consideramos ondas tales que  $k\Lambda \gg 1$  (es decir, que la escala de altura en que varía  $\rho_0$  y  $p_0$  es mucho mayor que la longitud de onda) resulta

$$N_s \ll kc_s ;$$

las ondas de Alfvén no se modifican por la presencia de la gravedad y aparecen las magnetoacústicas de gravedad (o magnetoatmosféricas). La relación de dispersión queda

$$\omega^4 - \omega^2 k^2(c_s^2 + v_A^2) + k^2 c_s^2 N^2 \sin^2(\theta_g) + k^4 c_s^2 v_A^2 \cos^2(\theta_B) = 0 . \quad (6.28)$$

Cuando  $c_s \leq v_A$ , debido a la restricción  $kc_s \gg N_s$ , no hay acoplamiento con la gravedad; mientras que para  $c_s \gg v_A$  resulta para los dos modos magnetoacústicos de gravedad

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k^2 c_s^2 \\ \omega^2 &= N^2 \sin^2(\theta_g) + k^2 v_A^2 \cos^2(\theta_B). \end{aligned}$$

## 6.6. Límite de aplicabilidad

Los valores de las frecuencias en las que es válida la aproximación MHD, con la forma simple de la ley de Ohm dependerá de los valores de las variables:  $B$ ,  $\rho$ ,  $T$ , etc. Por una parte se debe satisfacer que las variaciones temporales son mucho menores que las espaciales multiplicadas por  $c$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ll c \frac{\partial}{\partial x}$$

lo que para una onda plana monocromática significa

$$\omega \ll kc .$$

En el caso de las ondas de Alfvén esto implica

$$kv_A \ll kc; \quad v_A \ll c \quad \text{o} \quad \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \ll c$$

lo que se cumple para valores típicos de  $v_A$  en el Sol.

Para las magnetoacústicas rápidas hay que agregar la condición  $c_s \ll c$  que generalmente se cumple.

Por otro lado se debe cumplir

$$\omega \ll \nu, \quad \frac{2\pi}{k} \gg \lambda_D$$

y

$$\nu \gg \Omega = \frac{eB}{mc},$$

donde  $\nu$  es la frecuencia de colisiones. La primera condición se debe a que si las frecuencias son muy grandes aparecen otro tipo de ondas como las oscilaciones de plasma en las que hay separación de cargas y no es más válida la aproximación MHD que es en general válida para frecuencias bajas. Otra condición que debe cumplirse es que la longitud de onda es mucho mayor que la longitud de Debye para considerar ondas planas. La segunda condición es necesaria para poder aplicar una ley de Ohm simple; para ciertos valores de  $\vec{B}$  y de dilución del gas puede haber frecuencias para las que

$$\omega \ll \nu \ll \Omega$$

en cuyo caso se podrá usar la aproximación MHD pero con el término de Hall en la ley de Ohm.

### Ejercicios

- 6.1 Linealice las ecuaciones de fluido (sin campo magnético) alrededor del equilibrio estático ( $v_0 = 0, \rho_0 = \text{cte}$ ) en un medio gaseoso en el que puede despreciar la gravedad. Obtenga los modos que pueden propagarse, es decir calcule la relación de dispersión, la velocidad de fase y de grupo, y la dirección de propagación de las ondas que obtuvo.
- 6.2 Linealice las ecuaciones de fluido alrededor del equilibrio estático ( $v_0 = 0, \rho_0 = \text{cte}, \vec{B}_0 = \text{cte}$ ), desprecie el gradiente de presiones. Obtenga la ecuación (6.10) del libro. Obtenga las condiciones que deben cumplir las ondas de Alfvén. Obtenga la relación de dispersión y describa las ondas de corte y las de compresión: dirección de propagación, velocidad de fase y de grupo, si son dispersivas o no. Grafique diagramas polares para los modos de propagación que muestren la dependencia de la velocidad de fase en unidades de la velocidad de Alfvén ( $w/(kv_A)$ ) con la dirección de propagación de la onda.
- 6.3 Muestre que para las ondas de Alfvén de corte la presión magnética es cero. Muestre que para las ondas de compresión de Alfvén la tensión magnética es cero.
- 6.4
  - a. Linealice las ecuaciones de fluido alrededor del equilibrio estático ( $v_0 = 0, \rho_0 = \text{cte}, \vec{B}_0 = \text{cte}$ ), no desprecie en este caso el gradiente de presiones. Obtenga la ecuación (6.18) del libro, muestre que es igual a la ecuación (6.10) agregando el término  $c_s^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)\vec{k}$ . Muestre que aparecen 3 modos de propagación conocidos como modos de Alfvén, magnetoacústicos rápidos y lentos. Calcule la expresión de la velocidad de fase de

cada uno de estos modos en función de: la velocidad de Alfvén, la del sonido y el ángulo que forma el vector de onda  $\vec{k}$  y el campo magnético  $\vec{B}_0$ .

- b. Grafique diagramas polares para los tres modos de propagación que muestren la dependencia de la velocidad de fase en unidades de la velocidad de Alfvén ( $w/(kv_A)$ ) con la dirección de propagación de la onda. Haga los diagramas para distintos valores del parámetro  $\beta$ .
- 6.5 Discuta en el problema anterior los casos  $\beta \rightarrow 0$  y  $\beta \rightarrow \infty$  indicando en qué casos los modos son puramente transversales y puramente longitudinales. Calcule la velocidad de grupo para  $\beta \ll 1$  y  $\theta = [0, \pi/2, \pi/4]$ .
- 6.6 Considere ondas de Alfvén propagándose en un plasma uniforme, inmersas en un campo magnético también uniforme  $\vec{B}_0$  donde la propagación de las ondas es paralela al campo ( $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ ).
  - a. Encuentre la relación de dispersión cuando se incluye el efecto de la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell.
  - b. Obtengan expresiones que muestren cómo está repartida la energía de la onda entre la perturbación del campo magnético  $\vec{B}_1$ , del campo eléctrico  $\vec{E}_1$  y la energía cinética del plasma  $\vec{u}_1$ .
  - c. ¿Cómo está repartida la energía de la onda en el límite  $v_A \ll c$  y  $v_A \rightarrow c$ ?
- 6.7 Obtenga la relación de dispersión de las ondas acústicas de gravedad. Encuentre la velocidad de grupo.

## Capítulo 7

---

# ONDAS DE CHOQUE

---

### 7.1. Introducción

Cuando la amplitud de una onda es pequeña, ya sea una onda sonora en un fluido sin campo magnético, o una onda magnetoacústica en un fluido conductor magnetizado se utilizan las ecuaciones linealizadas. Un paquete de ondas plano (con igual dirección de  $\vec{k}$ ) viaja sin modificar su forma. El perfil de la onda no cambia debido a que cada componente de la onda viaja con la misma velocidad. Cuando las perturbaciones se vuelven importantes también son importantes los términos no lineales de las ecuaciones. Como resultado de ello puede ocurrir que perturbaciones de mayor amplitud viajen más rápidamente que las de menor amplitud, modificándose el perfil de la onda a medida que se propaga. La cresta de la onda se mueve más rápidamente que sus flancos ascendentes y descendentes y se empina cada vez más a medida que la onda avanza (figura 7.1a). Este es el caso de las ondas de compresión, por ejemplo una onda generada en un tubo por un pistón que se muestra en la figura 7.1b habiendo un comportamiento similar para la velocidad, la densidad y la temperatura. Los gradientes de estas cantidades se vuelven tan grandes que ya no se pueden despreciar los efectos disipativos tales como la viscosidad o el término difusivo de la ecuación de inducción. Hay un estado estacionario en el que se balancea el efecto no lineal y el disipativo; en ese caso la pendiente del perfil deja de crecer. La capa de transición en la que tiene lugar este balance es muy delgada (del orden de algunos pocos caminos libres medios) y para muchos de los cálculos de interés se aproxima por una superficie de discontinuidad. Esta “superficie” se conoce como onda de choque y las cantidades, como por ejemplo, densidad, presión, son diferentes a ambos lados de la superficie. La velocidad con que se mueve el frente a través del fluido es mayor que la de las ondas linealizadas

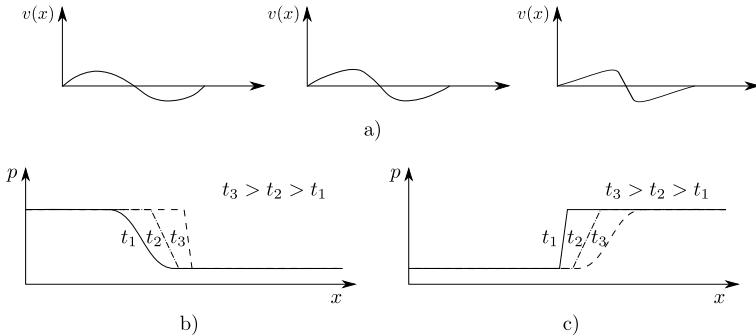


Figura 7.1: a) Velocidad de una onda no lineal, b) variación de la presión de una onda no lineal de compresión, c) variación de la presión de una onda no lineal de expansión.

correspondientes. También el gran valor en el gradiente de temperatura implica que no se puede despreciar la conducción térmica. La disipación dentro del frente de onda produce una conversión gradual de la energía llevada por la onda en calor; el efecto del pasaje de la onda de choque es el de comprimir y calentar el gas, también el de modificar el campo magnético en el caso de ondas magnetoacústicas. Para hacer los cálculos se supone que el modelo ideal se rompe sólo en una capa pequeña de ancho  $\delta$  que al tender al límite se transforma en una discontinuidad en movimiento estacionario (frente de choque) separando dos regiones diferentes, con diferentes parámetros característicos. Es decir, en el límite  $\delta \rightarrow 0$  las variables saltan a través de la capa  $\delta$ , y la magnitud del salto se determina por las leyes de conservación de masa, momento y energía. Si el ejemplo del tubo el pistón descomprime el fluido se genera una onda de expansión (figura 7.1c).

## 7.2. Ondas de choque en ausencia de campo magnético

Consideremos una geometría plana y modelemos la onda de choque como una discontinuidad plana entre dos estados uniformes. Suponemos estado estacionario y ausencia de campos.

Llaremos 1 al gas sin perturbar (por delante de la onda de choque) y 2 al medio perturbado o chocado (por detrás de la onda de choque), ambos medios se suponen uniformes (ver figura 7.2). En un sistema de referencia con el medio 1, el frente de la onda tiene velocidad  $\vec{U}$  y el gas perturbado  $\vec{U}_2$ . Es conveniente utilizar el sistema de referencia que se mueve solidariamente con la onda de choque. En ese sistema el fluido entra en el frente con velocidad  $v_1 = U$  (se saca el signo de vector dado que no es necesario) y sale con velocidad  $v_2 =$

## 7.2. Ondas de choque en ausencia de campo magnético

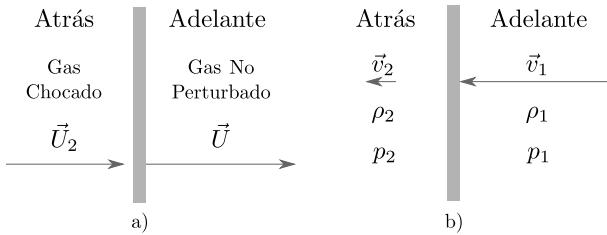


Figura 7.2: Esquema del choque hidrodinámico

$$U - U_2 \leq v_1.$$

Las cantidades  $v_2$ ,  $p_2$  y  $\rho_2$ , después del pasaje de la onda pueden ser determinadas en función de las cantidades  $v_1$ ,  $p_1$  y  $\rho_1$ , mediante las ecuaciones de conservación de la masa, el momento y el balance de la energía. Eligiendo las coordenadas de modo que el eje  $x$  es normal al frente de la onda de choque en  $x = 0$ . Como hemos supuesto simetría plana y estacionariedad todas las cantidades dependerán solamente de  $x$ .

La idea es integrar las ecuaciones de conservación sólo a través del choque dado que allí los gradientes son infinitamente grandes en el límite:  $\partial f / \partial l \rightarrow \infty$ , donde  $f$  es cualquier cantidad física. Definiendo el salto  $[f] \equiv f_2 - f_1$  al integrar a través de la capa queda

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^2 \nabla f dl = \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{n} \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial l} dl = \hat{n}[f]$$

donde  $\hat{n}$  es la normal al choque y  $l$  es una coordenada transversal al choque.

De la ecuación de conservación de la masa se cumple

$$\frac{d(\rho v)}{dx} = 0 . \quad (7.1)$$

Integrando esta ecuación entre  $x = -\delta/2$  y  $x = \delta/2$  se obtiene

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (7.2)$$

donde  $\rho v$  es el flujo de masa que pasa a través de la onda de choque.

De la ecuación de movimiento tendremos la conservación del impulso

$$\rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left( \nu \frac{dv}{dx} \right).$$

El último término se debe a la viscosidad ( $\nu$  es el coeficiente de viscosidad) y actuará sólo en la zona de transición. Tanto en 1 como en 2 al ser medios

uniformes  $dv/dx = 0$ . Usando la ecuación (7.1) e integrando a través de la onda de choque

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \quad (7.3)$$

donde  $(\rho v)v$  es la cantidad de impulso transportada por unidad de área transversal al movimiento y por unidad de tiempo, mientras que  $p$  es la fuerza por unidad de área que actúa sobre la misma.

La ecuación de balance de energía se puede poner en términos de la variación de entropía por unidad de masa, multiplicada por  $\rho T$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = -L$$

donde  $L$  da las pérdidas por unidad de volumen debido a procesos disipativos, radiativos o de conducción térmica, que en términos de la energía interna se escribe

$$\rho T v \frac{dS}{dx} = \rho v \left( \frac{de}{dx} - \frac{p}{\rho^2} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \chi \frac{dT}{dx} \right) + \frac{4}{3} \nu \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$$

donde se han considerado pérdidas por conducción y disipación por viscosidad ( $e$ : energía interna por unidad de masa,  $\chi$ : coeficiente de conductividad térmica). Usando las ecuaciones de continuidad y movimiento esta ecuación se lleva a

$$\frac{d}{dx} \left( \rho v \left( e + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \chi \frac{dT}{dx} - \frac{4}{3} \nu v \frac{dv}{dx} \right) = 0 .$$

Teniendo en cuenta que fuera de la zona de transición  $dT/dx = 0$  y  $dv/dx = 0$ , integrando desde  $x = -\delta/2$  a  $x = \delta/2$ , resulta

$$\rho_1 v_1 \left( \frac{1}{2} v_1^2 + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \rho_2 v_2 \left( \frac{1}{2} v_2^2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \quad (7.4)$$

o bien

$$v_1 \left( \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 e_1 + p_1 \right) = v_2 \left( \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \rho_2 e_2 + p_2 \right)$$

donde  $v \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + p \right)$  es la suma de energía interna y cinética transportada por unidad de área y unidad de tiempo,  $\rho v$  es el trabajo por unidad de tiempo y área realizado por la presión del gas. Teniendo en cuenta que  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ , la ecuación (7.4) se puede poner

$$\frac{1}{2} v_1^2 + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} . \quad (7.5)$$

Para un gas ideal

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

que reemplazándolo en ecuación (7.5) nos queda

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{\gamma p_1}{\rho_1(\gamma - 1)} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{\gamma p_2}{\rho_2(\gamma - 1)} . \quad (7.6)$$

Las ecuaciones (7.2), (7.3) y (7.6) se denominan relaciones de Rankine-Hugoniot y permiten obtener el estado del gas en uno de los frentes de choque en términos del estado en el otro lado:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 \\ \rho_1 v_1^2 + p_1 &= \rho_2 v_2^2 + p_2 \\ \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{\gamma p_1}{\rho_1(\gamma - 1)} &= \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{\gamma p_2}{\rho_2(\gamma - 1)} . \end{aligned}$$

De la primera resulta

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (7.7)$$

de las dos últimas obtenemos dos ecuaciones para  $\rho_1/\rho_2$  y  $p_1/p_2$ . Dividiendo la segunda por  $\rho_1 v_1^2$  y la tercera por  $v_1^2$  y usando ecuación (7.7) se tiene

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 + \frac{p_1}{\rho_1 v_1^2} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) = 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) \quad (7.8)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma - 1)M_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 + \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1}{M_1^2} \quad (7.9)$$

donde  $M_1$  es el número de Mach en el medio 1:

$$M_1 = \frac{v_1}{c_{s1}} = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}} .$$

Despejando  $p_2/p_1$  de ecuación (7.8) y reempalzando en ecuación (7.9) se obtiene una ecuación cuadrática para  $\rho_1/\rho_2$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 (\gamma + 1)M_1^2 - 2\frac{\rho_1}{\rho_2}(M_1^2\gamma + 1) + (\gamma - 1)M_1^2 + 2 = 0 . \quad (7.10)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones. Una de ellas es  $\rho_1/\rho_2 = 1$  de donde resulta  $v_2/v_1 = 1$  y  $p_2/p_1 = 1$  y por lo tanto no hay ondas de choque. De la otra se tiene

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \quad (7.11)$$

y

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}. \quad (7.12)$$

Además de acuerdo al segundo principio de la termodinámica la entropía debe aumentar

$$s_2 > s_1. \quad (7.13)$$

Teniendo en cuenta que de la misma elección del sistema de coordenadas  $v_2 < v_1$ , de las ecuaciones (7.11)-(7.13) se concluye:

- $v_2 < v_1$ ,
- $\rho_2 > \rho_1$ : la onda de choque comprime el gas
- $(\gamma + 1)M_1^2 > (\gamma - 1)M_1^2 + 2$ , por lo que  $M_1 > 1$ ; el fluido entra en la onda de choque con velocidad supersónica. Volviendo al sistema de referencia en el que el fluido del medio 1 está en reposo, la velocidad de la onda de choque es supersónica.
- En forma similar se muestra que  $M_2 < 1$ , o sea que el fluido sale de la onda de choque con velocidad subsónica en el sistema de referencia en el que el frente está en reposo.
- Al ser  $M_1 > 1$  resulta  $2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1) > \gamma + 1$  y de ecuación (7.12),  $p_2 > p_1$ ; la presión del gas aumenta al pasar la onda.
- Para un gas ideal

$$s = c_v \log \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \text{cte}$$

por lo que de la ecuación (7.13)

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} > \frac{p_1}{\rho_1^\gamma}.$$

Reemplazando la ecuación de estado se obtiene

$$\frac{T_2}{\rho_2^{\gamma-1}} > \frac{T_1}{\rho_1^{\gamma-1}}$$

o bien

$$\frac{T_2}{T_1} > \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} > 1$$

es decir, la temperatura también aumenta al pasar la onda de choque.

### 7.3. Ondas de choque magnéticas

---

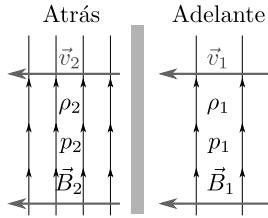


Figura 7.3: Esquema del choque magnético transversal.

- A medida que  $M_1$  crece de uno a infinito,  $p_2/p_1$  crece sin límite pero  $\rho_2/\rho_1$  está acotado

$$1 < \frac{\rho_2}{\rho_1} < \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} .$$

### 7.3. Ondas de choque magnéticas

#### 7.3.1. Caso transversal

Se llaman transversales cuando el campo de inducción magnético, en ambos medios, es paralelo al frente de onda de choque. En un sistema de referencia en el que el frente está en reposo,  $v_1 \perp \vec{B}_1$  y  $v_2 \perp \vec{B}_2$  (ver figura 7.3). Podemos relacionar  $\rho_2$ ,  $p_2$ ,  $v_2$  y  $\vec{B}_2$  con  $\rho_1$ ,  $p_1$ ,  $v_1$  y  $\vec{B}_1$  y las ecuaciones de conservación de masa, movimiento y energía como se hizo antes a las que hay que agregar la ecuación de inducción. Introducimos la notación

$$[f] = f_2 - f_1 .$$

De las tres primeras ecuaciones mencionadas, en forma similar a lo que sucede con ondas de choque sonoras, tendremos

$$[\rho v] = 0 \tag{7.14}$$

$$\left[ \rho v^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = 0 \tag{7.15}$$

$$\left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) v + \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) v \right] = 0 \tag{7.16}$$

donde se han agregado la presión magnética y la densidad de energía magnética. La ecuación de inducción para estados estacionarios es:

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}) = 0 .$$

Para la simetría actual

$$\frac{d}{dx} \left( \eta \frac{dB}{dx} - vB \right) = 0 .$$

Integrando entre  $x = -\delta/2$  y  $x = \delta/2$  resulta

$$[vB] = 0 \quad (7.17)$$

ya que tanto en el medio 1 como en el 2 el campo es uniforme. Para resolver el sistema de ecuaciones (7.14)-(7.17) llamemos

$$\xi = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

y usemos las constantes

$$M_1 = \frac{v_1}{c_{s1}} , \quad \beta_1 = \frac{2\mu_0 p_1}{B_1^2} = \frac{2c_{s1}^2}{\gamma v_{A1}^2} .$$

De la ecuación (7.14) y la ecuación (7.17) se tiene

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\xi}$$

y

$$\frac{B_2}{B_1} = \xi .$$

Como  $v_2 < v_1$ , resulta  $\xi > 1$  y  $B_2 > B_1$ . Dividiendo la ecuación (7.15) por  $p_1$  y usando  $M_1$  y  $\beta_1$  obtenemos el cociente  $p_2/p_1$  en función de  $\xi$ :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{1}{\beta_1} (1 - \xi^2) + \gamma M_1^2 \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) . \quad (7.18)$$

Otra relación de  $p_2/p_1$  con  $\xi$  se puede obtener de ecuación (7.16) dividiendo por  $p_1 v_1$  y usando que  $e = p/(\rho(\gamma - 1))$  :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p_2}{p_1} \frac{1}{\xi} - 1 \right) = \frac{2(1 - \xi)}{\beta_1} + \frac{\gamma M_1^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) . \quad (7.19)$$

Reemplazando ecuación (7.18) en ecuación (7.19) obtenemos la ecuación que debe satisfacer  $\xi$ .

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) + \frac{1}{\beta_1} \frac{(1 - \xi^2)}{\xi} \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\gamma^2 M_1^2}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \frac{1}{\xi} = \\ \frac{2(1 - \xi)}{\beta_1} + \frac{\gamma M_1^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) . \end{aligned}$$

### 7.3. Ondas de choque magnéticas

---

Una de las soluciones de esta ecuación cúbica es  $\xi = 1$  en cuyo caso no hay onda de choque; las otras dos deben satisfacer la ecuación

$$2(2 - \gamma)\xi^2 + [2\beta_1 + 2 + \beta_1 M_1^2(\gamma - 1)]\gamma\xi - \beta_1\gamma(\gamma + 1)M_1^2 = 0 . \quad (7.20)$$

El discriminante de esta ecuación es positivo:

$$[2\beta_1 + 2 + \beta_1 M_1^2(\gamma - 1)]^2\gamma^2 + 8(2 - \gamma)\beta_1\gamma(\gamma + 1)M_1^2 > 0$$

pues  $\gamma$  toma valores entre 1 y 2; por lo tanto las soluciones son reales. Una de ella se descarta dado que es negativa y no tiene sentido físico.

Para  $\beta_1 \gg 1$  cuando la presión magnética es mucho menor que la del plasma, la ecuación (7.20) se reduce a

$$[2 + M_1^2(\gamma - 1)]\xi = (\gamma + 1)M_1^2$$

con lo que la solución tiende a la hidrodinámica que llamaremos  $\xi_0$

$$\xi_0 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \Big|_{HD} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} .$$

Reemplazando esta expresión, la ecuación (7.20) se puede escribir

$$[2 + M_1^2(\gamma - 1)]\gamma(\xi - \xi_0) = -\frac{2}{\beta_1}\xi[(2 - \gamma)\xi + \gamma]$$

que nos permite analizar el efecto del campo magnético. Si  $\beta_1 \rightarrow \infty$  tenemos la solución hidrodinámica. Para  $B \neq 0$  de modo que  $\beta_1$  es finito el segundo miembro resulta negativo, ya que  $\gamma < 2$ . La acción del campo magnético es reducir el valor de  $\xi = \rho_2/\rho_1$  respecto del valor hidrodinámicico para un mismo valor de  $M_1^2$ .

#### 7.3.2. Ondas de choque oblicuas

Cuando el campo de inducción magnética en el medio sin perturbar tiene componentes tanto en la dirección paralela como normal al frente, aparece una nueva situación (ver figura 7.4). El plasma adquiere velocidad no sólo en la dirección de la onda de choque sino también en la dirección tangente al frente, en el plano de  $\vec{B}$ . Esto se debe a que la fuerza  $\vec{j} \times \vec{B}$  tiene componente en esa dirección. Por ello ya no es posible elegir un sistema de referencia en que tanto el medio 1 como el 2 se muevan perpendiculares al frente. Es conveniente entonces considerar un sistema  $\Sigma$  en el que el frente esté en reposo y en el que  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  y  $\vec{B}$  estén contenidos en el mismo plano.

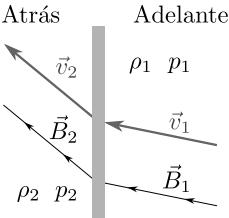


Figura 7.4: Esquema del choque magnético oblicuo.

Además de las ecuaciones de conservación anteriores, en este caso debemos considerar también  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  que para el caso de ondas de choque transversales se satisface automáticamente

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{dB_x}{dx} = 0$$

o bien

$$[B_x] = 0 . \quad (7.21)$$

De la conservación de la masa

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{d}{dx}(\rho v_x) = 0$$

resulta

$$[\rho v_x] = 0 . \quad (7.22)$$

De la ecuación de movimiento

$$\rho v_x \frac{d\vec{v}}{dx} = -\frac{dp}{dx} \hat{e}_x - \frac{d}{dx} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{e}_x + \frac{B_x}{\mu_0} \frac{d\vec{B}}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left( \nu \frac{d\vec{v}}{dx} \right)$$

resultan dos ecuaciones una para la componente  $x$  y otra para la  $y$  (usando que  $d(\rho v_x)/dx = 0$  y  $dB_x/dx = 0$ )

$$\left[ \rho v_x^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{B_x^2}{\mu_0} \right] = 0 \quad (7.23)$$

$$\left[ \rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{\mu_0} \right] = 0 . \quad (7.24)$$

En la primera la diferencia con la onda de choque transversal está dada por el término  $B_x^2/\mu_0$  que se agrega debido a la tensión magnética en la dirección  $x$ . La segunda era anteriormente nula y la única parte de la fuerza de Lorentz que actúa es debida a la tensión magnética.

### 7.3. Ondas de choque magnéticas

---

De la ecuación de conservación de la energía, utilizando las anteriores, resulta:

$$\left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) v_x + \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) v_x - (\vec{B} \cdot \vec{v}) \frac{B_x}{\mu_0} \right] = 0 . \quad (7.25)$$

Donde el término nuevo  $(\vec{B} \cdot \vec{v})B_x/\mu_0$  es el trabajo realizado por unidad de tiempo por la tensión magnética.

De la ecuación de inducción resulta

$$[v_x B_y - v_y B_x] = 0 . \quad (7.26)$$

Como hemos trabajado en un sistema de referencia en el que tanto  $\vec{v}_1$  y  $\vec{B}_1$  como  $\vec{v}_2$  y  $\vec{B}_2$  tienen componentes  $x$  e  $y$  podemos ahora elegir un sistema especial en el que las ecuaciones se simplifican; el sistema se mueve con ejes paralelos al choque pero con una velocidad tal que  $v_{1y}$  satisface

$$v_{1x} B_{1y} - v_{1y} B_{1x} = 0 . \quad (7.27)$$

En este sistema, en el medio 1 la velocidad y el campo de inducción son paralelos. Reemplazando en ecuación (7.26) resulta

$$v_{2x} B_{2y} - v_{2y} B_{2x} = 0 \quad (7.28)$$

por lo que también en el medio 2,  $\vec{v}$  es paralelo a  $\vec{B}$ .

En este sistema, en el que  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ , como se supone conductividad perfecta

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = 0$$

y por lo tanto es cero el vector de Poynting

$$0 = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = (\vec{v} \times \vec{B}) \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

y desaparecen de la ecuación de conservación de la energía (7.25) los términos que contienen  $\vec{B}_1$  quedando la ecuación hidrodinámica

$$\left[ \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right] = 0 . \quad (7.29)$$

Esta transformación no es posible para ondas de choque transversales en las que  $\vec{v}_1 \perp \vec{B}_1$  tampoco si  $B_{1x}/B_{1y}$  es muy pequeño, es necesario que  $(B_{1x}/B_{1y})v_{1x} \ll c$ .

Operando en forma similar que los casos anteriores, llamando

$$\xi = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

de la ecuación (7.22) y ecuación (7.21) obtenemos

$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}} = \frac{1}{\xi} \quad (7.30)$$

$$\frac{B_{2x}}{B_{1x}} = 1 \quad (7.31)$$

y de ecuación (7.27) y ecuación (7.28)

$$\frac{v_{1x}}{v_{1y}} = \frac{B_{1x}}{B_{1y}} \quad (7.32)$$

$$\frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{B_{2x}}{B_{2y}}. \quad (7.33)$$

Usando estas dos ecuaciones y ecuación (7.30) y ecuación (7.31) se obtiene

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \xi \frac{v_{2y}}{v_{1y}}. \quad (7.34)$$

Analicemos ahora la ecuación (7.24). Reemplazando ecuación (7.32) y ecuación (7.33) y usando ecuación (7.31) resulta:

$$B_{1y} \left( \rho_1 v_{1x}^2 - \frac{B_{1x}^2}{\mu_0} \right) = B_{2y} \left( \rho_2 v_{2x}^2 - \frac{B_{2x}^2}{\mu_0} \right)$$

dividiendo por  $\rho_1$  y usando ecuación (7.22) y ecuación (7.30)

$$B_{1y} (v_{1x}^2 - v_{A1x}^2) = B_{2y} \left( \frac{v_{1x}^2}{\xi} - v_{A1x}^2 \right). \quad (7.35)$$

Si no se cumple que  $v_{1x} = v_{A1x}$  y  $\xi = 1$ , la ecuación anterior da la relación entre  $B_{2y}$  y  $B_{1y}$

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{(v_{1x}^2 - v_{A1x}^2)\xi}{v_{1x}^2 - \xi v_{A1x}^2} = \frac{(v_1^2 - v_{A1}^2)\xi}{v_1^2 - \xi v_{A1}^2} \quad (7.36)$$

donde se usó  $v_{1x} = v_1 \cos(\theta_1)$  y  $v_{A1x} = v_{A1} \cos(\theta_1)$ . Si  $v_{1x} = v_{A1x}$  con  $\xi = 1$ , ambos miembros de ecuación (7.35) se anulan y no se obtiene de allí la relación buscada.

De la ecuación (7.29) de conservación de la energía multiplicando por  $(\gamma - 1)\rho_2/\gamma p_1$  se obtiene

$$\frac{p_2}{p_1} = \xi \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)v_1^2}{2c_{s1}^2} \left( 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) \right]. \quad (7.37)$$

### 7.3. Ondas de choque magnéticas

---

Finalmente, de la ecuación (7.23), usando los resultados anteriores y luego de cierta álgebra se llega a una ecuación cuarta para el cociente de densidades  $\xi = \rho_2/\rho_1$  en el que intervienen  $v_{1x}$ ,  $v_{1y}$ ,  $v_{A1}$ ,  $c_{s1}$

$$\left\{ (v_1^2 - \xi v_{A1}^2)^2 \left[ c_{s1}^2 \xi + \frac{v_{1x}^2}{2} [\xi(\gamma - 1) - (\gamma + 1)] \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \xi v_{A1}^2 v_{1y}^2 [v_1^2 [\gamma + \xi(2 - \gamma)] - \xi v_{A1}^2 [(\gamma + 1) - \xi(\gamma - 1)]] \right\} (1 - \xi) = 0 . \quad (7.38)$$

El factor  $(1 - \xi)$  corresponde a la solución  $\xi = 1$  que es el caso en el que no hay discontinuidad. Eliminándolo queda una ecuación cúbica. Cuando  $v_{1x} = \pm v_{A1x}$  (o sea  $v_1^2 = v_{A1}^2$ ),  $\xi = 1$  vuelve a ser solución. Corresponde a una onda de Alfvén, u onda intermedia.

Hay otras dos soluciones que corresponden a las ondas rápidas y lentas. En el límite para perturbaciones pequeñas, ( $\xi \rightarrow 1$ ) se puede mostrar que la ecuación (7.38) da las siguientes soluciones

$$v_1^2 = v_{A1}^2$$

y

$$v_{1x}^2 = \frac{1}{2} \left[ (c_{s1}^2 + v_{A1}^2) \pm \sqrt{c_{s1}^4 + v_{A1}^4 - 2c_{s1}^2 v_{A1}^2 \cos(2\theta_1)} \right] .$$

La primera corresponde a la onda intermedia, las dos últimas al límite para bajas amplitudes de las ondas rápidas y lentas. En el sistema de referencia en que el plasma en el medio 1 está en reposo, el frente viaja con la velocidad de Alfvén (en la dirección de  $\vec{B}$ ) o con la velocidad de las ondas linealizadas magnetoacústicas rápidas o lentas.

#### 7.3.3. Ondas intermedias

Estas ondas son ondas de Alfvén (ver figura 7.5b). Vimos que estas ondas no se distorsionan aunque tengan amplitudes grandes. En este caso  $\xi = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $v_{2x} = v_{1x}$ ,  $B_{2x} = B_{1x}$ ,  $v_{1x} = v_{A1x}$ . De la ecuación (7.35) no resulta condición alguna para  $B_{2y}$  porque se anulan ambos miembros. De la ecuación (7.34)

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{v_{2y}}{v_{1y}}$$

y usando las ecuaciones (7.23) y (7.29) se ve que

$$p_2 = p_1 , \quad B_{2y}^2 = B_{1y}^2 .$$

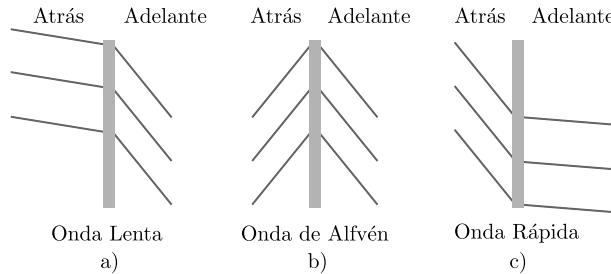


Figura 7.5: Esquema de ondas oblicuas.

El caso  $B_{2y} = B_{1y}$  es trivial, no hay discontinuidad. Para la onda intermedia

$$B_{2y} = -B_{1y} \quad , \quad v_{2y} = -v_{1y} .$$

Como  $B_{2x} = B_{1x}$  la acción de la onda es la de rotar el campo de inducción como habíamos visto que era el efecto de las ondas de Alfvén.

Al no haber cambios ni de presión ni de densidad no tenemos una onda de choque. Es decir, al ser la velocidad independiente de la amplitud no hay “empinamiento” de la onda y por lo tanto no hay competencia entre el empinamiento y la disipación, la zona de transición se va ensanchando aunque en el frente hay disipación por la variación brusca de  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ .

#### 7.3.4. Ondas de choque rápidas y lentas

Son ondas compresivas pues tienen  $\xi > 1$  y por lo tanto  $\rho_2 > \rho_1$  y de ecuación (7.37) se ve que  $p_2 > p_1$ . Para estas ondas se utiliza una “condición evolutiva” que establece que el signo de  $B_{2y}$  es el mismo que  $B_{1y}$ . Esta condición se puede entender usando ecuación (7.36) y viendo qué sucede cuando la perturbación es suficientemente pequeña: para  $v_{1x} > v_{A1x}$  tanto el numerador y el denominador en ecuación (7.36) son ambos positivos resultando  $B_{2y}/B_{1y} > 0$ . Para  $v_{1x} < v_{A1x}$  tanto numerador como denominador son negativos de modo que  $B_{2y}/B_{1y} > 0$ . Al aumentar la amplitud de la perturbación cambiarán  $v_{1x}$  y  $\xi$  pero se mantiene el cociente de los campos positivo.

Usando nuevamente la ecuación (7.36) se obtienen los siguientes rangos

$$v_1^2 < v_{A1}^2 \text{ entonces } v_1^2 < \xi v_{A1}^2$$

y

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{v_{A1}^2 \xi - v_1^2 \xi}{v_{A1}^2 \xi - v_1^2} = 1 - \frac{(\xi - 1)v_1^2}{v_{A1}^2 \xi - v_1^2} < 1$$

### 7.3. Ondas de choque magnéticas

---

como  $B_{2x} = B_{1x}$  entonces

$$|\vec{B}_2| < |\vec{B}_1| .$$

Esta es la onda de choque lenta (ver figura 7.5a), su velocidad supera siempre la de la magnetoacústica lenta y es menor que la de Alfvén (en el sistema en el que el medio 1 está en reposo).

$$v_1^2 > \xi v_{A1}^2 \text{ entonces } v_1^2 > v_{A1}^2$$

$$B_{2y} > B_{1y}$$

y

$$|\vec{B}_2| > |\vec{B}_1|$$

esta es la onda de choque rápida (ver figura 7.5c) cuya velocidad en el sistema en que 1 está en reposo supera la de la magnetoacústica rápida.

Casos límites de las rápidas y lentas son los *switch-off* y *switch-on* (ver figuras 7.6a y b respectivamente) en la que en alguno de los dos medios  $B_y = 0$ .

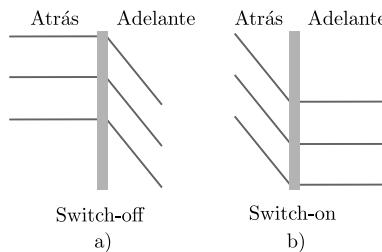


Figura 7.6

### Ejercicios

- 7.1 Discuta por qué el problema es menos restrictivo de lo que parece. Es decir, por qué a pesar de hacer las hipótesis de estacionariedad, uniformidad e idealidad de los dos medios para obtener las condiciones de Rankine-Hugoniot estas valen en general.
- 7.2 Obtenga la ecuación (7.10).
- 7.3 Dé los límites de compresibilidad para un plasma de hidrógeno totalmente ionizado y para el aire.
- 7.4 Compare la forma de las ecuaciones del choque MHD transversal con las del HD. Muestre que las ecuaciones son las mismas a menos de un término adicional en la energía si en el caso MHD se redefine la presión como la suma de la presión del gas más la presión magnética.

## Capítulo 7. Ondas de choque

---

- 7.5 Describa cualitativamente, en términos de cómo cambia el ángulo que forman las líneas de campo magnético, las diferencias entre los choques rápido, lento y de Alfvén.

## Capítulo 8

---

# RECONEXIÓN MAGNÉTICA

---

### 8.1. Introducción

En el Sol y en muchas otras estrellas se producen fenómenos como fulguraciones (*flares*) en los que se libera una gran cantidad de energía en tiempos muy breves. La magnitud de la energía involucrada indica que ella sólo puede ser almacenada en el campo magnético coronal. Un tema de investigación actual es comprender los diferentes mecanismos que hacen posible la liberación de energía magnética que es transmitida al plasma coronal en forma de calor y energía cinética. Considerando un *flare* de longitud característica de  $L = 10^4$  km, y la difusividad de la corona como  $\eta = 1/\sigma\mu_0 \sim 10^4$  cm<sup>2</sup>/s se obtiene un tiempo de difusión  $\tau_d = \mu_0\sigma L^2 \sim 10^{14}$  s.

Sin embargo una fulguración dura muchísimo menos, del orden de 10<sup>2</sup> s. Por lo tanto hay que considerar un mecanismo alternativo a la difusión de un plasma estático en los que los tiempos de difusión son tan grandes. En regiones donde el campo magnético varía mucho en la coordenada espacial, la densidad de corriente eléctrica es muy alta. Estas regiones pueden ser hojas de corrientes, filamentos magnéticos, etc. Se pueden formar por inestabilidad de un plasma en equilibrio estático o por movimientos del plasma que ponga en contacto regiones topológicamente diferentes. Un ejemplo del primer caso es un punto neutro X (figura 8.1a), que está en un equilibrio inestable dado que evoluciona apartándose del equilibrio como se muestra la figura 8.1b. La evolución puede converger a una configuración como la que se muestra en la figura 8.1c. La zona sombreada es una región de alta densidad de corriente dado que en una distancia corta hay una gran variación de la componente tangencial del  $\vec{B}$ .

Los movimientos que se producen en la fotosfera pueden inducir el acercamiento de estructuras coronales formándose una hoja de corriente en la región

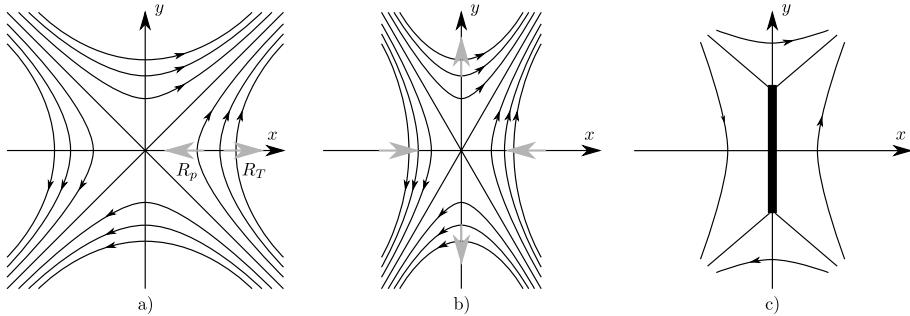


Figura 8.1: Inestabilidad de un punto neutro.

de contacto. Por ejemplo, cuando se tienen dos estructuras magnéticas topológicamente distintas en las que las líneas de campo surgen de la fotosfera (las patas fotosféricas –*footpoints*– están ancladas o atados –*line-tied*– a la fotosfera). Recordar que el parámetro  $\beta$  cambia de mayor que uno (el plasma domina la dinámica) a menor que uno (el campo domina la dinámica) al pasar de la fotosfera a la corona.

En una hoja de corriente, al ser la densidad de corriente muy grande, no se puede despreciar el término de difusión en la ecuación de inducción y por lo tanto no se tendrá congelamiento de las líneas de plasma; el plasma se puede mover perpendicularmente a las líneas sin arrastrarlas y estas pueden reconectarse, ver figura 8.2.

Parte de la energía magnética se transforma en energía cinética y térmica y puede también haber aceleración de partículas cargadas a velocidades no térmicas. Al ser la longitud característica de la zona de difusión en la hoja de corriente mucho menor que la escala de longitud global de la estructura, el tiempo de difusión es mucho menor ( $\tau_d \sim 1\text{s}$ ). De todas formas, la dinámica general está limitada por la velocidad con que el campo magnético es transportado por el plasma en su movimiento hacia la hoja.

Hacia 1960 aparecieron los primeros modelos de aniquilación del campo magnético (Parker) y de reconexión magnética bidimensional (Sweet-Parker). Este último da un tiempo característico de reconexión del orden de  $10^7\text{s}$  que sigue siendo mucho mayor que el observado. Posteriormente se propusieron otros modelos bidimensionales y luego los tridimensionales. Aquí estudiaremos sólo la reconexión bidimensional estacionaria, dentro de la aproximación MHD (reconexión resistiva). También puede haber reconexión (llamada no colisional) si los términos de Hall e inercial en la ley de Ohm son más importantes que el resistivo. Además de los fenómenos eruptivos altamente energéticos, en la

## 8.2. Hoja de corriente

---

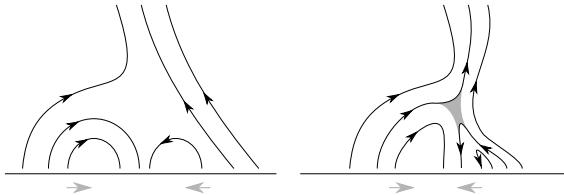


Figura 8.2: Reconexión inducida por el movimiento forzado desde las bases.

atmósfera del Sol y de muchas estrellas parecidas al Sol, la temperatura resulta creciente a medida que nos alejamos de la superficie dentro de la atmósfera solar. Esto es en principio paradójico dado que para ello es necesario transportar energía de regiones más frías a más calientes. En la actualidad se considera que los mecanismos de radiación térmica no son responsables de este calentamiento “anómalo” aunque para argumentar en este sentido se supone equilibrio termodinámico local, condición que podría no cumplirse. En general se supone que el calentamiento es de origen magnético. Hay diferentes explicaciones. En un caso, se considera que el campo magnético se origina en capas internas y es transportado hacia afuera por el plasma, luego su energía es transformada en energía térmica y cinética por medio de fenómenos de reconexión, que se pueden originar por diferentes motivos siendo un ejemplo de ello la turbulencia. En otro caso, se supone que las ondas de Alfvén generadas internamente viajan hacia afuera llevando energía que al entrar en regiones de campo no uniforme darán lugar a fenómenos de resonancia en las que las densidades de corriente eléctrica serían muy altas y habría difusión de las ondas. Otro mecanismo considerado es la interacción no lineal de ondas de Alfvén con otras ondas como las magnetoacústicas. Por medio de estas interacciones las ondas de Alfvén entregarían su energía a las magnetoacústicas, que a diferencias de las de Alfvén, se pueden transformar en ondas de choque y disipar energía.

### 8.2. Hoja de corriente

Analizaremos un modelo muy simple de hoja de corriente. Consideraremos una estructura como la de la figura 8.3. Si  $\vec{B}$  varía rápidamente en dirección perpendicular a sí mismo, el rotor de  $\vec{B}$ , y con él  $\vec{j}$ , pueden hacerse muy grandes. En particular si se ponen en contacto dos regiones de campo de inducción diferentes, en la superficie entre las dos habrá una discontinuidad tangencial de  $\vec{B}$  y por lo tanto entre ellas habrá una zona de densidad de corriente muy grande. Cuando no hay flujo de plasma a través de una discontinuidad tangencial se

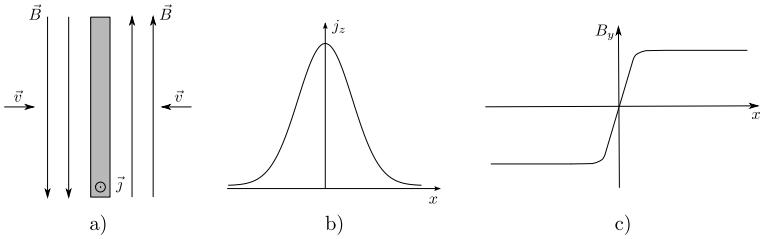


Figura 8.3: a) Esquema de hoja de corriente, b) y c) modelo simple de aniquilamiento magnético.

dice que se tiene una hoja de corriente. El ancho de la misma no es infinitesimal pero es pequeño y por lo tanto  $\vec{j}$  es grande y la difusión es alta (figura 8.3a).

Consideremos que la densidad de corriente tiene sólo componente  $z$  y que esta depende de la coordenada  $x$  en la forma

$$\vec{j} = \frac{K}{\sqrt{\pi}a} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \hat{e}_z$$

donde  $a$  es una medida del ancho de la región en la que la corriente es significativa (figura 8.3b). Para obtener el campo de inducción  $\vec{B}$  en todo el espacio, vemos que por simetría de traslación tanto en la dirección  $y$  como en  $z$ ,  $\vec{B}$  sólo puede depender de  $x$ .

Aplicando la ley de Biot y Savart concluimos que  $\vec{B}$  sólo tiene componente  $y$ , y que además satisface

$$B_y(-x) = -B_y(x) .$$

De la ley de Ampère resulta

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{K}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{|x|}{a}\right) \operatorname{sgn}(x) \hat{e}_y$$

(ver figura 8.3c) donde la función error es

$$\operatorname{erf}(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varsigma \exp(-u^2) du .$$

Si la longitud de la región donde la corriente es significativa, es mucho menor que las demás longitudes características del problema se puede aproximar por valores límites para  $a \rightarrow 0$  y se obtiene una hoja de corriente

$$\lim_{a \rightarrow 0} \vec{j} = K \delta(x) \hat{e}_z$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2} \operatorname{sgn}(x) \hat{e}_y .$$

### 8.2.1. Reconexión magnética

La reconexión ocurre cuando dos elementos de plasma, o elementos de volumen del fluido, que originalmente están en una misma línea de campo de inducción resultan finalmente separados y pertenecientes a líneas de campo diferente. A su vez, elementos de plasma en líneas diferentes pueden aparecer formando parte de una misma línea. Para que esto suceda una parte del plasma sobre las líneas originales debe pasar por una zona de alta difusión en la que deja de valer el teorema de Alfvén, es decir, en donde el plasma y el campo no están congelados. Supongamos una situación bidimensional estacionaria como la que se indica en la figura 8.4a. Fuera de la región central hay congelamiento y el plasma se acerca a la región de difusión arrastrando las líneas de campo. En el caso de reconexión bidimensional, la estructura más simple es tal que en la zona de difusión hay un punto en el que la proyección de  $\vec{B}$  en el plano es nula, se lo llama punto neutro tipo X. En la zona de difusión el plasma se difunde a través de las líneas y al salir vuelve a estar congelado pero parte del plasma que formaba una misma línea está ahora desconectado.

Una posible consecuencia de la reconexión es el desprendimiento de plasmoides o “burbujas” de plasma con líneas cerradas a su alrededor. Si se tiene una estructura magnética como la mostrada en la figura 8.4b donde el gradiente de campo magnético es grande, una perturbación puede dar lugar a la situación que se muestra en la figura 8.4c en la que la difusión ha permitido que las líneas se reconecten dando lugar, por ejemplo, a lo que se conoce como eyeciones de masa coronal.

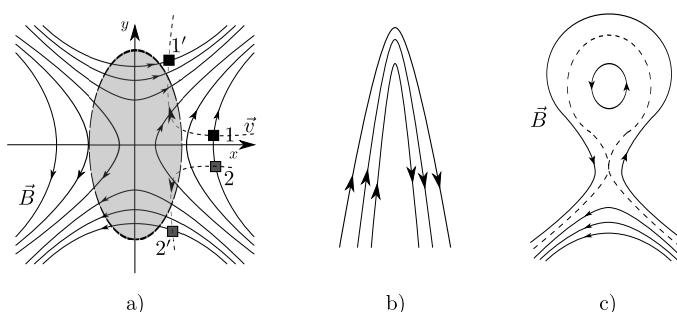


Figura 8.4: a) Los elementos 1 y 2 están originalmente sobre la misma línea, luego de la reconexión 1' y 2' se encuentran en diferentes líneas, b) paso previo a la reconexión, c) reconexión y eyección de masa.

### 8.2.2. Modelo bidimensional de reconexión magnética

Hay algunos elementos comunes a todos los modelos de reconexión magnética. Supongamos que la dirección invariante es la dirección  $z$ , y que la velocidad  $\vec{v}$ , y el campo de inducción  $\vec{B}$ , tienen solamente componentes  $x$  e  $y$ . Las ecuaciones de la MHD para el caso estacionario quedan:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (8.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (8.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (8.3)$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (8.4)$$

De la ecuación (8.3), teniendo en cuenta que  $\vec{B}$  sólo tiene componentes  $x$  e  $y$ , y que no depende de  $z$  queda

$$\vec{j} = j_z \hat{e}_z .$$

Usando este resultado y que  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  sólo tienen componentes  $x$  e  $y$ , resulta de la ecuación (8.4) que  $\vec{E}$  sólo tiene componente  $z$ . De la ecuación (8.2) se obtiene que el campo es constante

$$\vec{E} = E_z^0 \hat{e}_z .$$

Fuera de la zona de difusión  $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ , mientras que en la zona de difusión  $\vec{j}/\sigma$  es importante y  $|\vec{v} \times \vec{B}|$  disminuye de tal manera que  $E_z$  tiene siempre el mismo valor.

En muchos modelos se suponen condiciones de simetría adicionales, (figura 8.5)

$$\begin{aligned} v_x(-x, y) &= -v_x(x, y) & v_x(x, -y) &= v_x(x, y) \\ v_y(-x, y) &= v_y(x, y) & v_y(x, -y) &= -v_y(x, y) \\ B_x(-x, y) &= -B_x(x, y) & B_x(x, -y) &= B_x(x, y) \\ B_y(-x, y) &= -B_y(x, y) & B_y(x, -y) &= B_y(x, y) \\ j_z(-x, y) &= j_z(x, y) & j_z(x, -y) &= j_z(x, y) \\ \rho(-x, y) &= \rho(x, y) & \rho(x, -y) &= \rho(x, y) \\ p(-x, y) &= p(x, y) & p(x, -y) &= p(x, y) . \end{aligned}$$

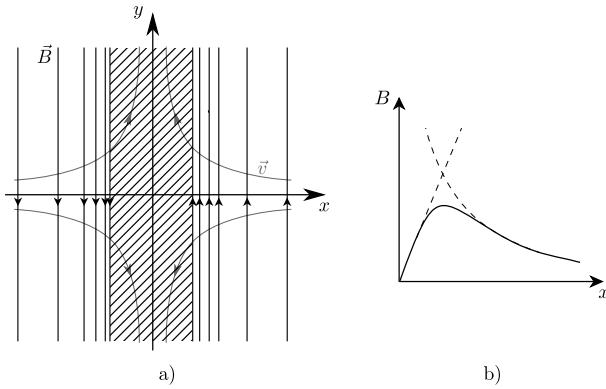


Figura 8.5: a) Esquema de simetría de la configuración, b) perfil del campo magnético desde el origen.

### 8.2.3. Tasa de reconexión

La tasa de reconexión es una medida de la magnitud del flujo magnético que se reconecta por unidad de tiempo. El tiempo de duración del fenómeno es inversamente proporcional a dicha tasa. Consideremos el caso bidimensional y supongamos que el plasma que se acerca a la región de difusión lo hace desde  $x = \pm\infty$  (ver figura 8.5a). Cuando aún está lejos <sup>(e)</sup>, tiene su velocidad en la dirección  $x$  y el campo magnético en la dirección  $y$ .

$$\vec{B}^{(e)}(x, y) = B_y^{(e)} \hat{e}_y = B^{(e)} \hat{e}_y$$

$$\vec{v}^{(e)}(x, y) = v_x^{(e)} \hat{e}_x = -v^{(e)} \hat{e}_x .$$

(Las líneas que pasan por esta zona terminan reconectándose y es más fácil el cálculo con esta disposición). El flujo magnético que se reconecta por unidad de tiempo y por unidad de longitud transversal (en la dirección invariante  $z$ ) es

$$v^{(e)} B^{(e)} = |v_x^{(e)}| |B_y^{(e)}| = |\vec{v}^{(e)} \times \vec{B}^{(e)}| = E_z^0 .$$

Si se adimensionalizan las velocidades con la velocidad de Alfvén externa,  $v_A^{(e)}$ , y los campos magnéticos con  $B^{(e)}$  se obtiene una magnitud que es una medida adimensionalizada de la tasa de reconexión, igual al número de Mach-Alfvén externo:

$$\frac{|v_x^{(e)}|}{v_A^{(e)}} \frac{|B_y^{(e)}|}{B^{(e)}} = \frac{|v_x^{(e)}|}{v_A^{(e)}} = \frac{v^{(e)}}{v_A^{(e)}} = M_A .$$

La tasa de reconexión adimensionalizada resulta igual al número de Mach-Alfvén del plasma entrante.

### 8.2.4. Modelo de aniquilación de Parker

En este modelo se considera la formación de una hoja de corriente extensa, al ponerse en contacto dos plasmas con campos opuestos, figura 8.6a. Supongamos que la hoja de corriente se forma en los alrededores del plano  $yz$ , que los plasmas son incompresibles y que la densidad es constante ( $\rho_0$ ). El sistema está limitado entre dos planos paralelos a distancias grandes de la hoja de corriente en las posiciones  $\pm x_e$ . Se impone una ley de velocidades

$$\vec{v}(x, y) = (-a_0 x, a_0 y) \quad (8.5)$$

donde  $a_0$  es una constante. Se satisface la ley de continuidad

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0 .$$

El plasma se puede considerar sin disipación en la región externa a los planos paralelos al  $yz$  en las posiciones  $\pm x_i$ . En la región interna habrá una densidad de corriente grande y fuerte disipación.

Supondremos que en los límites exteriores ( $x = \pm x_e$ ) el campo magnético tiene sólo componente  $y$ . Debido a que el campo de velocidades es tal que su componente  $x$  sólo depende de  $x$ , el congelamiento del campo en la región externa lleva a que en toda ella,  $\vec{B}$  tiene sólo componente  $y$ , dependiendo sólo de  $x$ , siendo entonces líneas de campo rectas. Las líneas de inducción se acercan a la hoja de corriente con rapidez  $|v_x|$  cada vez menor por lo que la distancia entre líneas disminuye al acercarse a la hoja (el campo es más intenso). Recordar que la condición de congelamiento del plasma al campo magnético vale para la componente transversal al campo  $y$  no para la componente paralela.

En las regiones externas (caso bidimensional) el campo eléctrico es constante y se tiene

$$\vec{v} \times \vec{B}(x) = -\vec{E} = \vec{v}(x_e, 0) \times \vec{B}(x_e, 0)$$

de donde, teniendo en cuenta ecuación (8.5) resulta

$$B_y(x) = \frac{x_e}{x} B_y(x_e) \quad (8.6)$$

para  $|x| > x_i$ .

De la ecuación (8.1) de movimiento para el caso estacionario

$$\rho_0(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p - \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \right) \vec{B}$$

usando que

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}),$$

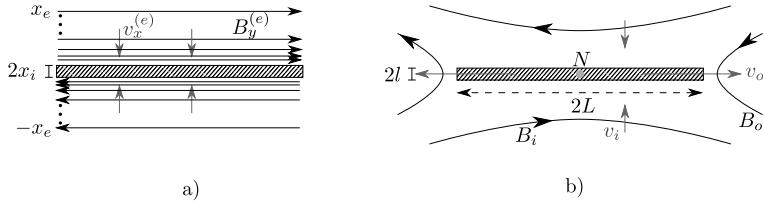


Figura 8.6: a) Modelo de aniquilación de Parker, b) Modelo de Sweet-Parker.

y que de la ecuación (8.5),  $\nabla \times \vec{v} = 0$ , considerando que  $\vec{B} = B_y(x)\hat{e}_y$  resulta

$$\nabla \left( \frac{\rho_0 v^2}{2} \right) = -\nabla p - \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

o bien

$$\nabla \left( p + \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 .$$

Integrando y reemplazando las expresiones de  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  (ecuaciones (8.5) y (8.6))

$$p = p_0 - \frac{\rho_0}{2} a_0^2 (x^2 + y^2) - \frac{1}{2\mu_0} \frac{(x_e B_y(x_e))^2}{x^2} \quad (8.7)$$

que es válida fuera de la zona de difusión ( $|x| > x_i$ ). Queda claro que se debe limitar la hoja en la dirección  $y$ , pues sino, para  $y$  suficientemente grande la presión resultaría negativa.

### 8.2.5. Modelo de reconexión de Sweet-Parker

En este modelo la zona de difusión se limita tanto en  $x$  como en  $y$ :

$$-l < x < l \quad -L < y < L \quad L \gg l .$$

El plasma ingresa (ver figura 8.6b) a la región por sus lados mayores y sale por los menores. Llamando  $v_i$  y  $v_o$  a las velocidades características de entrada (*in*) y salida (*out*), suponiendo incompresibilidad se igualan los caudales de entrada y salida

$$Q_i = 4\rho L A v_i = Q_o = 4\rho l A v_o$$

donde  $A$  es una longitud arbitraria en la dirección  $z$  y se obtiene

$$\frac{v_i}{v_o} = \frac{l}{L} \implies v_i \ll v_o . \quad (8.8)$$

Teniendo en cuenta que fuera de la zona de difusión  $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$  y que  $\vec{E}$  es constante por ser un modelo bidimensional

$$\vec{E} = -v_i B_i \hat{e}_z = -v_o B_o \hat{e}_z$$

se obtiene

$$\frac{B_o}{B_i} = \frac{v_i}{v_o}$$

y de ecuación (8.8)

$$B_o \ll B_i . \quad (8.9)$$

De las ecuaciones (8.8) y (8.9) vemos que disminuye la energía magnética y aumenta la cinética.

Podemos estimar el valor de la velocidad saliente  $v_o$  integrando la ecuación de movimiento primero sobre  $x$  entre un punto exterior a la zona de difusión y el centro (punto  $N$ ) y después sobre el eje  $y$ , desde  $N$  hasta fuera de la zona de difusión. Teniendo en cuenta que sobre el eje  $x$ ,  $v_y = 0$ ,  $B_x = 0$  y al ser  $L \gg l$  podemos considerar  $\partial B_x / \partial y \simeq 0$ , la componente  $x$  de la ecuación de movimiento queda

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} - \rho(\vec{v} \times \vec{\omega})_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} + \frac{1}{\mu_0} B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{1}{\mu_0} B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} - \rho(\vec{v} \times \vec{\omega})_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v^2 \rho}{\partial x} - \rho v_y \omega_z &\simeq -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} \end{aligned}$$

donde se uso la suposición de incompresibilidad. Es decir que  $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \nabla \times \vec{w}$ . Además, se utilizó la identidad  $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{v} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla(v^2/2)$ . Integrando

$$p_N = p_i + \frac{B_i^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \quad (8.10)$$

ya que en  $N$ ,  $\vec{v} = 0$  y  $\vec{B} = 0$ .

Consideramos que sobre el eje  $y$ , en el centro de la zona de difusión,  $v_x = 0$ ,  $B_y = 0$ , el campo magnético es muy pequeño y por lo tanto también lo es la fuerza de Lorentz (suposición arriesgada pues los campos allí tienen mucha curvatura). Integrando la componente  $y$  de la ecuación de movimiento

$$p_o + \frac{1}{2} \rho v_o^2 = p_N \quad (8.11)$$

suponiendo además que  $p_i \simeq p_o$  de las ecuaciones (8.10) y (8.11) se obtiene

$$\frac{1}{2}\rho v_o^2 \simeq \frac{B_i^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\rho v_i^2$$

como  $v_i \ll v_o$

$$v_o^2 \simeq \frac{B_i^2}{\rho\mu_0} = v_{A_i}^2 . \quad (8.12)$$

De la ley de Ohm en el punto  $N$  y afuera, teniendo en cuenta que  $\vec{E} = \text{cte}$

$$\frac{j}{\sigma} = v_i B_i . \quad (8.13)$$

De la ley de Ampère, suponiendo que  $j$  es constante en la zona de difusión  $4LB_i \simeq \mu_0 j 4lL$ , es decir

$$B_i \simeq \mu_0 j l$$

que reemplazando en la ecuación (8.13)

$$\frac{j}{\sigma} = v_i \mu_0 j l$$

o bien

$$v_i = \frac{1}{\mu_0 \sigma l} .$$

El tiempo en que se difunde el campo es del orden del tiempo en que el plasma que viene reemplaza al que se va  $l^2 \mu_0 \sigma \sim l/v_i$ .

Si tomamos como tasa de reconexión adimensional

$$M_A = \frac{v_i}{v_{A_i}}$$

se tiene (usando las ecuaciones (8.7) y (8.12))

$$M_A^2 = \frac{v_i^2}{v_{A_i}^2} = \frac{v_i^2}{v_{A_i} v_o} = \frac{v_i v_i}{v_{A_i} v_o} = \frac{1}{\mu_0 \sigma l v_{A_i}} \frac{l}{L} = \frac{1}{\mu_0 \sigma v_{A_i}} = \frac{1}{S}$$

donde  $S$  se conoce como el número de Linquist.

El modelo de Sweet-Parker es muy simplificado, se considera  $v_i$  y  $B_i$  son iguales a sus valores en el infinito, en general el número de Linquist en astrofísica es muy grande con lo que la tasa de reconexión resultante (si  $L$  es igual a la escala de longitud global) es muy chica. El modelo sólo funciona en casos en los que en una región extensa hay muchas microestructuras magnéticas.

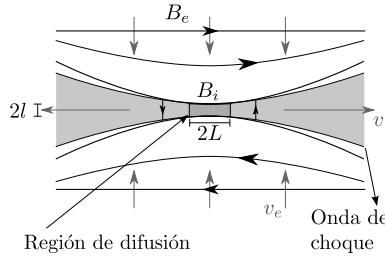


Figura 8.7: Modelo de Petschek.

### 8.2.6. *Modelo de Petschek*

En este modelo la longitud  $L$  de la región de difusión es mucho menor que la escala de longitudes global. Como en el modelo aparecen ondas de choque lentas estacionarias, la difusión ocurre no sólo en la zona de difusión propiamente dicha, sino también en el frente de ondas de choque (ver figura 8.7)

Del mismo modo la reconexión ocurre parcialmente en la zona de difusión y parcialmente en la zona de ondas de choque. Una onda de choque cambia la dirección del campo magnético. Con este modelo, haciendo suposiciones que simplifican el problema (por ejemplo, campo potencial fuera de la zona de difusión y frentes) se obtuvo una tasa de reconexión adicional proporcional a  $\ln(S)^{-1}$ , que resulta mucho mayor que la de Sweet-Parker.

## Capítulo 9

---

# ORIGEN DE LOS CAMPOS MAGNÉTICOS: EFECTO DÍNAMO

---

### 9.1. Introducción

Muchas estrellas, planetas y galaxias tienen campos magnéticos cuyo origen no es fácil de explicar. Aun los planetas sólidos no podrían ser suficientemente ferromagnéticos para dar cuenta de su magnetismo dado que la temperatura de sus interiores está por encima de la temperatura de Curie asociada a la desaparición del magnetismo permanente. Con más razón, este es el caso de las estrellas y galaxias. Por otro lado los campos no pueden ser pensados como fenómenos transitorios y actuales. El estudio de los campos fosilizados en rocas en los tiempos de su formación conocido como paleomagnetismo, muestra que el campo magnético de la Tierra ha tenido la misma intensidad desde al menos  $3 \times 10^9$  años. En ausencia de una fuente de corriente interna los campos magnéticos contenidos en un cuerpo conductor decaen ohmicamente en una escala de difusión temporal de

$$\tau_{ohm} = \mu_0 \sigma L^2$$

correspondiendo un valor de  $\tau_{ohm} = 2 \times 10^5$  años para el caso de la Tierra; mucho menor que el tiempo requerido para explicar el valor actual del campo. Es necesario, por lo tanto, encontrar procesos internos capaces de mantener los campos magnéticos persistentes y activos. Tales procesos son llamados convencionalmente dínamos. La premisa básica de la teoría de dínamo es que todo cuerpo astrofísico que contenga un campo magnético de larga duración respecto a lo esperado contiene también un fluido altamente conductor en su interior. Es la corriente eléctrica asociada al movimiento de tal fluido la responsable de sostener el campo magnético. En un comienzo este argumento dado por Larmor

en 1919 resultó poco convincente. Sin embargo, no hay conflictos con las leyes de conservación de la energía. La energía magnética que es inevitablemente perdida vía el calentamiento ohmico es perdida a razón de  $\vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$ : el trabajo realizado contra la fuerza de Lorentz (por unidad de volumen). El campo de flujo  $\vec{v}$  es transportado por convección térmica. Si el flujo es suficientemente intenso, es plausible que la energía depositada en el campo magnético pueda sobreponerse a las pérdidas debidas al calentamiento ohmico permitiendo que el campo persista por tiempos mayores que los característicos del decaimiento ohmico. La teoría de dinamo implica trabajar con los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  acoplados mediante la fuerza de Lorentz. Los trabajos paleomagnéticos muestran que el campo terrestre invierte su polaridad unas pocas veces cada millón de años y que el Sol lo hace una vez cada once años siendo ambos comportamientos caóticos con una variabilidad muy apreciable sobreimpuesta a oscilaciones cuasiperiódicas más regulares.

## **9.2. Campos fósiles y campos generados por efecto dinamo. Intensificación del campo magnético por colapso gravitatorio**

Para interpretar la presencia de campos magnéticos en astrofísica y geofísica se han propuesto, en líneas generales, dos orígenes diferentes: campos fósiles y los producidos por efecto dinamo.

El campo fósil es una reliquia de un campo primitivo que aún no ha sido disipado. El generado por efecto dinamo resulta de la amplificación de un campo por conversión de energía cinética en magnética. Para poder dar cuenta de un campo como vestigio de otro antiguo es necesario que el tiempo de disipación  $\tau = L^2/\eta = \mu_0\sigma L^2$  sea más grande que el tiempo de vida del objeto en cuestión. Sin embargo, el tiempo de disipación es difícil de estimar debido a que generalmente no se tiene información acerca de:

- a) la conductividad del fluido,
- b) el porcentaje del flujo magnético conservado a través de las diferentes fases de la vida del objeto,
- c) la influencia del movimiento del fluido que puede distorsionar fuertemente las líneas magnéticas y provocar disipación magnética importante por procesos de reconexión disminuyendo drásticamente el tiempo de disipación,
- d) las edades y tamaños característicos de los objetos son poco conocidos.

### 9.3. Campo magnético bipolar y flotabilidad

---

Parte de los modelos disponibles de estrellas magnéticas, enanas blancas magnéticas, pulsares, medio interestelar e intergaláctico sugieren el origen fósil del campo. Una forma de intensificación del campo proviene del colapso gravitacional; si se considera el campo congelado durante la contracción, la intensidad del mismo aumenta de modo que el flujo magnético a través de una sección se mantiene constante.

En el caso de un cuerpo esférico de radio  $R$  que colapsa uniformemente se tendrá

$$B_{final} \simeq B_{inicial} \left( \frac{R_{inicial}}{R_{final}} \right)^2.$$

Esta descripción es extremadamente idealizada, los colapsos pueden ser eventos violentos y se pueden agregar fenómenos como eyección de masa o formación de ondas de choque. También puede aparecer turbulencia o difusión ambipolar. La difusión ambipolar se produce cuando el gas de iones adquiere una velocidad diferente al del gas neutro en una nube formada principalmente por gas neutro; el campo está congelado a las partículas cargadas y entonces se difunde a través del gas neutro. Cada uno de estos fenómenos implica diferentes procesos que pueden involucrar transformaciones de energía magnética en otras formas de energía que habría que poder cuantificar.

Se ha propuesto que los valores enormes de campo en estrellas magnéticas, particularmente en enanas blancas y pulsares se han alcanzado por contracción de estrellas progenitoras mayores. Por otro lado para dar cuenta del campo interestelar  $\sim (2 - 3)10^{-6}$ G es suficiente admitir que el gas difuso del que se formó la galaxia estaba penetrado por un campo magnético de  $\sim 10^{-9}$ G. De la misma forma se puede explicar la intensificación del campo en nubes galácticas o intergalácticas más densas que sus alrededores. Argumentos inversos se usan para explicar la disminución de la intensidad del campo por expansión.

En una estrella pueden coexistir un campo fósil y uno proveniente del efecto dínamo: en el núcleo radiativo el campo puede ser fósil, proveniente de la amplificación del campo de la nube progenitora y cerca de la superficie puede haber una zona turbulenta que genere campo por efecto dínamo.

### 9.3. Regiones con campo magnético bipolar y flotabilidad del campo magnético

Antes de comenzar a tratar específicamente la teoría de dínamo conviene describir cualitativamente la fenomenología y la dinámica de las manchas solares. Hale (1908) fue quien primero propuso que las manchas solares se debían a una gran concentración de campo magnético. Al analizar, a partir del efecto

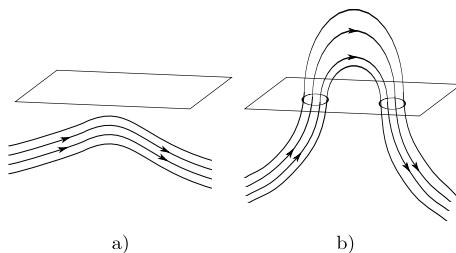


Figura 9.1: Flotabilidad magnética de un tubo de flujo. a) Un tubo de flujo horizontal cercano y por debajo de la superficie solar. b) El tubo de flujo después de que su parte superior se ha levantado a través de la superficie solar.

Zeeman, espectros de manchas solares encontró que el campo en dichas regiones podía alcanzar hasta unos 300G. En 1919, Hale et al. propusieron que las manchas, que generalmente aparecen de a pares en la superficie del Sol, tienen polaridad opuesta. La explicación más sencilla para dar cuenta de este hecho es suponer que un conjunto alineado de líneas de campo o tubo de flujo (figura 9.1a) emerge de la superficie solar como se muestra en la figura 9.1b. Si las manchas están localizadas en la intersección del tubo de flujo con la superficie es evidente que la polaridad de las mismas es inversa; en un caso las líneas salen y en el otro ingresan. Esta configuración formada por dos grandes manchas de polaridad inversa es generalmente denominada *región de campo magnético bipolar*. Queda por responder cómo es posible que esta configuración se produzca. Describamos primero cualitativamente la relación del campo magnético con el establecimiento de inestabilidades convectivas en un fluido. La región cromosférica solar es una zona de inestabilidad convectiva. En forma muy descriptiva se puede explicar esto diciendo que cuando un fluido es calentado desde abajo se vuelve inestable ante movimientos convectivos siempre que el gradiente de temperatura sea suficientemente grande (debe alcanzar un valor crítico). Esto se debe a que el fluido más caliente que queda debajo se vuelve menos denso por la acción dilatadora del calor. Esto hace que el material menos denso debajo tienda a subir. Se produce un movimiento macroscópico del fluido de abajo hacia arriba, dado que también el fluido menos denso al llegar arriba se enfriá, se contrae y tiende a bajar. A este fenómeno se lo conoce como *convección de Rayleigh-Bénard*. Cuando hay campo magnético presente como es el caso en la cromosfera, el campo se opone al establecimiento de la convección. Esto es intuitivamente comprensible debido a que la convección tiende a doblar y torcer las líneas de campo (téngase en cuenta que hay congelamiento entre las líneas y el plasma) generando tensión magnética que se resiste a la curvatura del campo. Por lo tanto, para generar convección en una región con campo magnético

### 9.3. Campo magnético bipolar y flotabilidad

---

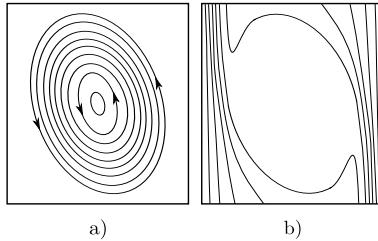


Figura 9.2: Esquema de la distribución del campo magnético en una celda convectiva. a) Convección más intensa en los bordes, las flechas indican las líneas de velocidad del plasma; b) distribución de líneas de campo magnético hacia los bordes de la celda.

se requerirá un gradiente de temperatura más intenso para producir la misma convección que si no hubiera campo.

La teoría lineal determina cuáles son las condiciones para que la inestabilidad ante la convección se establezca, sin embargo, para entender el fenómeno completamente se requiere un cálculo detallado y cuantitativo que sólo es posible mediante simulación numérica de las ecuaciones no lineales de la MHD. Weiss en 1981 encontró, mediante simulaciones que tenían en cuenta las características de la cromosfera solar, que en ella se podrían establecer celdas convectivas estables. Las líneas de corriente del fluido de las celdas (asociadas a campo magnético casi despreciable) son como se muestra en la figura 9.2a. La configuración de líneas de campo es, en cambio, como se ve en la figura 9.2b. Es decir, se observa que las líneas campo son barridas hacia los bordes de la celda donde hay poco movimiento del fluido: el campo es excluido de la parte central donde la convección es mayor, y es acumulado en los bordes de las celdas impidiendo la convección.

La teoría de la convección magnética permite explicar la fenomenología general de las manchas solares. La figura 9.3 muestra una mancha solar oscura debido a que la temperatura es menor que la del medio que la circunda. El medio está plagado de celdas convectivas. Esta imagen sugiere que la menor temperatura de las manchas es debida a la inhibición de la convección debido al campo magnético intenso. Asimismo la estructura de micro celdas, con bordes oscuros se debe a que el campo es relegado a los bordes y es más intenso y frío allí debido a que el material caliente no sube hacia la superficie.

Volvamos ahora a la descripción de las regiones magnéticas bipolares. Como en 1955 Parker propuso un modelo para explicar la emergencia de manchas solares. La figura 9.1a es un esquema de líneas de campo en la región cromosférica. Consideremos el caso en que el campo se concetrara formando un tubo de flujo magnético con menor densidad de campo fuera de él. Parker mostró que una

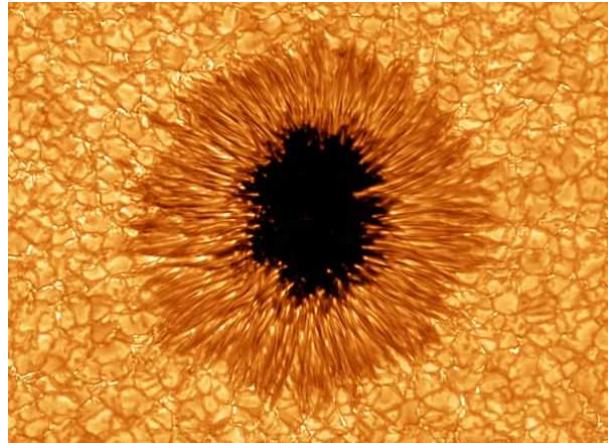


Figura 9.3: Mancha Solar. (Cortesía: New Jersey Institute of Technology's New Solar Telescope)

configuración como esta sería afectada por fuerzas de empuje. El argumento es sencillo, dado un tubo de flujo magnético la presión magnética asociada al mismo es

$$\frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Sin pérdida de generalidad se puede despreciar el campo fuera del tubo de flujo. Considerando que hay equilibrio de presiones en los bordes del tubo de flujo se requiere

$$p_e = p_i + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

donde  $p_{e,i}$  remite a la presión externa e interna del gas respectivamente. Se sigue que

$$p_i < p_e.$$

En caso de que la temperatura externa e interna sea la misma ocurre

$$R\rho_e T = R\rho_i T + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

de donde se obtiene

$$\frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_e} = \frac{B^2}{2\mu_0 p_e}.$$

Dado que el fluido interno al tubo es menos denso, y que asumimos congelamiento del tubo magnético al plasma el sistema recibe un empuje hacia arriba. A este fenómeno se lo llama *flotabilidad magnética* y nos explica cómo es posible que regiones bipolares emergan a la superficie.

## 9.4. Generación de campo magnético por efecto dínamo

Si en las ecuaciones MHD reemplazamos  $\vec{B} = 0$  el sistema de ecuaciones se reduce a otro perfectamente bien conocido y bien comportado que es el de la hidrodinámica. Surge la pregunta acerca de por qué en el universo real que conocemos encontramos campos magnéticos, por qué no se han disipado por efecto de la difusión magnética. Una posible respuesta es que, dadas ciertas circunstancias, la solución con  $\vec{B} = 0$  es inestable. En tal caso, campos magnéticos muy débiles (que siempre están presentes en cualquier plasma debido a fluctuaciones estadísticas) pueden crecer hasta volverse detectables observationalmente. El proceso por el cual una pequeña semilla crece a una escala macroscópica es lo que estudia la teoría de dínamo. En un dínamo, a partir de un campo dado, se produce otro campo de mayor intensidad al transformarse energía cinética en magnética.

Algunas de las peculiaridades de la teoría pueden ser ilustradas por el ejemplo prototípico de acción de un dínamo autoexcitado conocido como disco de dínamo homopolar. En el dínamo de disco, el disco conductor gira con una frecuencia  $\vec{\omega}$  en presencia de un campo  $\vec{B}$  inicial; si  $\vec{\omega}$  tiene el sentido de  $\vec{B}$  se produce un movimiento de los electrones hacia el centro del disco debido a la fuerza de Lorentz, o sea una corriente eléctrica hacia el borde, que es recogida por un cepillo unido al resto del circuito formando una espira antes de ponerse nuevamente en contacto con el eje; la corriente a través de la espira genera un campo magnético (ver figura 9.4). En los procesos de reconexión MHD la energía magnética se transforma en cinética y térmica. El proceso inverso ocurre en el efecto dínamo cuando un campo es mantenido, a pesar de la difusión, por movimiento del fluido en un medio continuo.

La teoría de dínamo se divide en dos tipos de problemas: los dínamos cinemáticos en los que el campo de velocidad se considera dado y es posible resolver la ecuación de inducción en forma desacoplada de la de movimiento y, los dína-

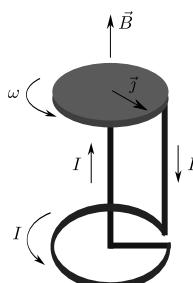


Figura 9.4: Disco de dínamo homopolar.

mos MHD en los que el campo de velocidades es determinado por las ecuaciones de movimiento que incluyen fuerzas de origen magnético. El tratamiento cinemático es adecuado para tratar los primeros momentos del crecimiento lineal del campo en los que la fuerza de Lorentz resulta despreciable debido a que es un término no lineal con el campo. Pero si el dínamo es eficiente el campo crece y la fuerza de Lorentz ( $\sim (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$ ) no es despreciable en la ecuación de movimiento. Esta ecuación debe ser resuelta en forma acoplada con la de inducción magnética. La mayoría de los estudios actuales sobre teoría de dínamo requieren resoluciones numéricas de las ecuaciones, sin embargo se puede dar una explicación analítica y sencilla del dínamo utilizando la teoría aproximada de dínamo cinemático para calcular el crecimiento del campo magnético a partir de una semilla dada. Es este el abordaje que se utilizará suponiendo un campo de velocidades  $\vec{v}$  prescripto. Para que esta suposición sea consistente se debe asumir que el campo magnético es suficientemente chico como para no afectar el campo de velocidades en la ecuación de movimiento.

El dínamo cinemático puede pensarse como un problema de autovalores. En un plasma el campo  $\vec{B}$  de inducción satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (9.1)$$

suponemos que  $\eta$  es constante, en general la variación de esta cantidad no es importante en la generación de campo. Si el campo de velocidades  $\vec{v}$  es prescripto y no es afectado por la presencia del campo magnético entonces la ecuación (9.1) es una ecuación lineal de autovalores para el campo magnético. Lo que se desea saber es para qué tipo de campos de velocidad la ecuación tiene soluciones que crecen exponencialmente. Para un dado campo de velocidades se buscan soluciones de la ecuación (9.1) de la forma  $B \propto \exp(qt)$  con apropiadas condiciones de contorno, y se hallan los autovalores  $q$ , que en general son complejos. Un autovalor  $q = 0$  corresponde a un dínamo estacionario (DC), un autovalor imaginario  $q = ip$  a un campo periódico ondulatorio (AC); en ambos casos se tiene un dínamo neutro pues la amplitud de  $\vec{B}$  no cambia. Para valores pequeños de  $\vec{v}$  todos los autovalores  $q$  tienen una parte real negativa que corresponde a un campo que decrece; notar que con  $\vec{v} = 0$  la ecuación (9.1) es una ecuación de difusión. Se aumenta  $\vec{v}$  en parte o en todos los puntos, para ver si se puede obtener un dínamo neutro; si se lo logra esa distribución de velocidades da un mantenimiento del campo por efecto dínamo. Si se aumenta más el valor de  $\vec{v}$  se pueden obtener soluciones que indican el crecimiento exponencial del campo de inducción. En la práctica el campo no crece sin límite debido a la reacción del mismo en el movimiento, este es el dominio de los dinámicos MHD.

Precisando matemáticamente, partimos de las ecuaciones de inducción y movimiento:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 B$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

como mencionamos,  $\vec{B} = 0$  da la solución hidrodinámica. Se puede pensar en un universo sin campos magnéticos, más aún  $\vec{B}(\vec{x}, t = 0) = 0$  implica que para todo tiempo ( $\vec{B}(\vec{x}, t) = 0$ ) el campo es nulo. Debemos encontrar algún mecanismo, contenido en las ecuaciones anteriores, para generar campo.

Proponemos una semilla de campo magnético

$$\vec{B}(\vec{x}, t = 0) = \delta \vec{B}$$

y queremos ver si existe  $\Re[q] > 0$  tal que

$$\vec{B}(\vec{x}, t) \sim \delta \vec{B} \exp(qt) .$$

Esto es equivalente a resolver la ecuación de autovalores

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \bar{\bar{L}} \vec{B}$$

con

$$\bar{\bar{L}} = \nabla \times (\vec{v} \times \star) + \eta \nabla^2 \star .$$

De modo que al hacer el análisis espectral de  $\bar{\bar{L}}$  se podrá saber si hay autovalores con signo positivo. Trataremos sólo el caso cinemático, con campo de velocidades prescripto. En este caso, en la ecuación de movimiento, la fuerza de Lorentz, por ser no lineal en  $\delta \vec{B}$  se puede despreciar.

#### 9.4.1. Teorema de Cowling

Antes de analizar los dínamos cinemáticos veamos el teorema de Cowling (o antidínamo) que muestra que no es posible tener un campo magnético axisimétrico estacionario en un plasma con conductividad finita generado por un campo de velocidades que es también simétrico alrededor del eje de simetría,  $\vec{v} = v_\varphi \hat{e}_\varphi = v_0 \hat{e}_\varphi$ .

La demostración de este teorema retrasó por largo tiempo la investigación de teorías de dínamo. Ello se debe a que los supuestos de rotación rígida y estacionariedad fueron asumidos como requerimientos razonables y estrictos por

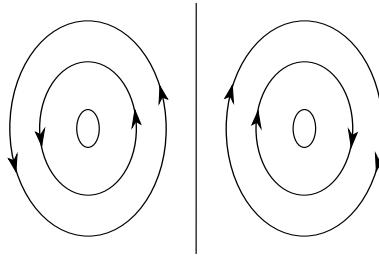


Figura 9.5: Líneas de campo poloidal en un plano meridional considerando el caso estacionario y axisimétrico estricto.

largo tiempo. Sólo cuando Parker hizo notar que estas condiciones pueden ser relajadas y utilizarse en términos estadísticos la teoría de dinamo cinemático pudo ser aceptada. En términos estadísticos el campo magnético solar es axisimétrico respecto al eje de rotación y antisimétrico respecto al plano ecuatorial (a diferencia de lo que ocurre en galaxias donde el campo es simétrico respecto a dicho plano).

El campo de larga escala puede ser expresado como la suma de una componente toroidal (azimutal) y una poloidal (contiene los planos meridionales). Este último se escribe muchas veces en términos del vector potencial ( $A(r, t)$ ) para simplificar la argumentación. Haremos una demostración por el absurdo del teorema de Cowling. Supondremos que estas simetrías son estrictas y el campo magnético es estacionario y axisimétrico generado por un campo de velocidades axisimétrico:  $\partial/\partial\varphi = 0$ ,  $\partial/\partial t = 0$ .

Dividamos el campo de inducción  $\vec{B}$  y la velocidad  $\vec{v}$  en sus partes polidales  $\vec{B}_p$ ,  $\vec{v}_p$  y toroidal o azimutal  $B_\varphi \hat{e}_\varphi$  y  $v_\varphi \hat{e}_\varphi$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_p + B_\varphi \hat{e}_\varphi \quad \vec{v} = \vec{v}_p + v_\varphi \hat{e}_\varphi .$$

Las líneas de campo poloidal pueden ser representadas como curvas en un plano meridional, un plano que contiene al eje de simetría. De  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , como  $\vec{B}$  no depende de  $\varphi$  resulta  $\nabla \cdot \vec{B}_p = 0$  y por lo tanto las líneas de  $\vec{B}_p$  serán cerradas. Teniendo en cuenta la simetría azimutal, en un plano meridiano las líneas de  $\vec{B}_p$  serán del tipo mostrado en la figura 9.5. En el plano meridional tenemos líneas cerradas y cada punto del plano meridional describe un giro en la dirección azimutal. Aun para la configuración del campo dipolar más sencilla posible debe haber un punto en cada uno de los lados del eje de simetría que está rodeado por líneas magnéticas contenidas en el campo meridional. Llamamos a este punto  $N$ , con  $\vec{B}_p = 0$ , punto neutro. Para configuraciones de campo más complejas puede haber más de un punto neutro. En  $\mathbf{R}^3$  es una circunferencia neutra; y también es una línea  $\vec{B} = B_\varphi \hat{e}_\varphi$ . Nótese que el punto neutro no

#### 9.4. Generación de campo magnético por efecto dínamo

---

puede estar en el infinito dado que, por la ecuación de Ampére  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , ello supondría tener una corriente no nula  $\vec{j}$  en infinito ( $(\partial(rB_\varphi)/\partial r) = r\mu_0 j_\varphi$ ). Integremos la ley de Ohm sobre la línea neutra  $\vec{B}(N) \parallel dl\hat{e}_\varphi$

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\frac{1}{\sigma} \oint_N \vec{j} \cdot d\vec{l} = \oint_N \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_N (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} .$$

El último término es nulo dado que proponemos una rotación rígida (que es lo que impide el teorema de Cowling)  $\vec{v} = v_\varphi \hat{e}_\varphi$  y por lo tanto el producto vectorial con el campo magnético, que en el punto  $N$  está en dirección  $\hat{e}_\varphi$  resulta nulo. Aplicando Stokes al segundo término de la derecha:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = 0$$

El último término es nulo debido a la suposición de estacionariedad pero

$$\frac{1}{\sigma} \oint \vec{j} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\sigma} j_\varphi 2\pi R \neq 0$$

y se llega a un absurdo dado que  $j_\varphi$ , por la configuración del campo y la ecuación de Ampére, no puede ser nulo. El absurdo provino de suponer rotación rígida y estacionariedad. Con esto queda demostrado el teorema de Cowling que implicó, por 25 años, que se pensara que no eran posibles los dínamos cinemáticos.

Relajemos la condición de estacionariedad y escribamos en esféricas las ecuaciones de inducción, para la componente polar y toroidal.

$$\partial_t \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

equivalente a

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

se escribe

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = \partial_t B_\varphi + R \operatorname{sen}(\theta) (\vec{v}_p \cdot \nabla) \frac{B_\varphi}{R \operatorname{sen}(\theta)} = R \operatorname{sen}(\theta) (\vec{B}_p \cdot \nabla) \frac{v_\varphi}{R \operatorname{sen}(\theta)} + \eta \nabla^2 B_\varphi$$

$$\frac{dA_p}{dt} = \partial_t A_p + \frac{\vec{v}_p}{R \operatorname{sen}(\theta)} \cdot \nabla (R \operatorname{sen}(\theta) A_p) = \eta \nabla^2 A_p .$$

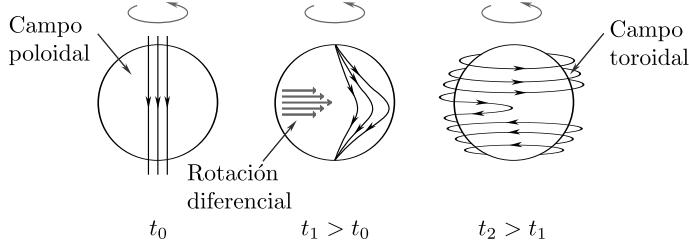


Figura 9.6: Esquema del efecto de la rotación diferencial en el plasma solar.

Debido a que los términos difusivos no incrementan el campo magnético sino que amortiguan las perturbaciones de campo, la esperanza de poder generar campo magnético a partir de una semilla debe buscarse en el término

$$R \operatorname{sen}(\theta) (\vec{B}_p \cdot \nabla) \frac{v_\varphi}{R \operatorname{sen}(\theta)} = R \operatorname{sen}(\theta) (\vec{B}_p \cdot \nabla) \omega$$

donde  $\omega = v_\varphi / (R \operatorname{sen}(\theta))$  representa la velocidad diferencial (si la rotación fuese rígida  $\omega = \operatorname{cte}$  y el término resulta nulo); por lo tanto  $v_\varphi$  debe ser de la forma  $v_\varphi = \omega(r, \theta) R \operatorname{sen}(\theta)$ .

Supongamos que en  $t = 0$  tenemos un campo puramente poloidal que se quiere hacer crecer ( $B_\varphi = 0$ ). De las ecuaciones, vemos que basta que  $\omega \neq \operatorname{cte}$  (que la rotación no sea rígida) para que se pueda generar campo toroidal a partir del poloidal si además suponemos el término difusivo despreciable ocurre lo que se muestra en la figura 9.6. A esto se le llama efecto  $\omega$ , debido al congelamiento se genera campo toroidal a partir del poloidal. Observar que el dibujo es asimétrico respecto al plano ecuatorial, al revés que en el caso galáctico. Sin embargo, esto no resuelve el problema dado que el campo terminará difundiéndose de todas maneras. Se requiere, para evitar la difusión completa del campo, del mecanismo inverso. Es decir el de generar campo poloidal a partir del toroidal. Y ello, en las condiciones propuestas no es posible como se ve a partir de la ecuación para el potencial vector en la componente poloidal: del lado de la derecha sólo queda un término difusivo. Los cálculos indican que el campo poloidal  $B_p$  ( $= \nabla \times A_p \hat{e}_\varphi$ ) sólo se difunde y lo hace en un tiempo  $\tau_d \sim 10^5$  años  $\ll 5 \times 10^9$  años (el último corresponde a la edad del universo).

Parker en 1955 propuso un mecanismo para excitar campo poloidal relacionado con el hecho de que la estacionariedad del movimiento y el campo en los casos astrofísicos se cumple en términos estadísticos pero no de manera estricta. A partir de allí supuso que era posible que el movimiento convectivo de pequeña escala contribuyera con un término adicional en la ecuación de evolución del campo poloidal debido al acoplamiento entre la escala grande del

## 9.4. Generación de campo magnético por efecto dínamo

campo ( $R_{\odot} \sim 7 \times 10^5$  km) con la escala pequeña (tamaño de las celdas  $10^3$  km). Veamos como es esto posible.

### 9.4.2. Electrodinámica de campo medio

Los movimientos en objetos astronómicos no son estacionarios. Generalmente el problema del dínamo en astrofísica es el del mantenimiento de un campo magnético por movimientos que son estacionarios a lo sumo en sentido estadístico, en cuerpos en rotación. El campo tiene simetría general de rotación alrededor de un eje pero hay considerables apartamientos de esa simetría. Puede ser estadísticamente estacionario sobre largos períodos (Tierra), o mostrar variaciones cíclicas (Sol). La teoría de la electrodinámica de campo medio (*Mean Field Electrodynamics*, MFE en adelante) se basa en una idea de Parker. El proceso, en términos cualitativos puede ser descrito de la manera siguiente: la región convectiva es tal que los elementos de fluido se mueven en sentido radial superponiéndose al movimiento de rotación diferencial con el que se acopla. Dado que el fluido y el campo están congelados se genera campo toroidal a partir del poloidal debido a la rotación diferencial (ver figura 9.6). El campo también emerge a la superficie sobresaliendo en la dirección radial (figura 9.7). Además hay un movimiento de giro provisto por la fuerza de Coriolis que hace que el campo que ha emergido de la superficie se deforme orientándose en dirección poloidal con la misma polaridad en el hemisferio norte y en el sur.

El efecto final es que parte del campo toroidal se reduce y aumenta el poloidal debido a que la difusión no puede despreciarse totalmente. Debido a la difusión, la componente microscópica del campo poloidal de los vórtices termina transformándose en campo poloidal macroscópico (ver figura 9.7), produciéndose así la realimentación buscada. Veamos cómo se formaliza.

La MFE expresa la velocidad  $\vec{v}$  y el campo  $\vec{B}$ , como suma de sus partes medias, lentamente variables y de longitud característica grande  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  y sus

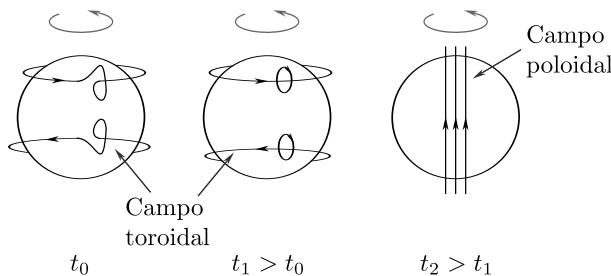


Figura 9.7: Esquema del efecto de la convección y de Coriolis.

partes fluctuantes en tiempos cortos y de longitud característica chica  $\delta\vec{v}$  y  $\delta\vec{B}$ . Reemplazamos

$$\vec{B} \longrightarrow \vec{B} + \delta\vec{B} \quad \vec{v} \longrightarrow \vec{v} + \delta\vec{v}$$

en la ecuación de inducción magnética, suponiendo que  $\delta\vec{B}$  y  $\delta\vec{v}$  son variables estocásticas tal que,

$$\langle \delta\vec{B} \rangle = 0 \quad \langle \vec{B} \rangle = \vec{B} \quad y \quad |\delta\vec{B}| \ll |\vec{B}|$$

y lo mismo ocurre para  $\vec{v}$ . Se obtiene entonces

$$\frac{\partial(\vec{B} + \delta\vec{B})}{\partial t} = \nabla \times [(\vec{v} + \delta\vec{v}) \times (\vec{B} + \delta\vec{B})] + \eta \nabla^2 (\vec{B} + \delta\vec{B}) .$$

Si promediamos teniendo en cuenta las prescripciones anteriores, se obtiene

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla \times \langle \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} \rangle + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

donde  $\langle \nabla \times (\delta\vec{v} \times \vec{B}) \rangle = \nabla \times (\langle \delta\vec{v} \rangle \times \vec{B}) = 0$  y lo mismo ocurre para el término con  $\delta\vec{B}$ . Notar que en la ecuación anterior queda sólo un término con cantidades fluctuantes que representa el efecto de la microescala en la macroescala. Tenemos que estimar este término. Restando la ecuación promediada de la no promediada y para  $\delta\vec{B}$  pequeño, (campo magnético semilla, lo que permite despreciar la fluctuación del campo en el término de difusión y considerar  $\delta\vec{v} \gg \delta\vec{B}$ ) queda

$$\frac{\partial\delta\vec{B}}{\partial t} = \nabla \times [(\delta\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{v} \times \delta\vec{B} + \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} - \langle \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} \rangle] + \eta \nabla^2 \delta\vec{B} .$$

Y haciendo uso de las aproximaciones mencionadas queda

$$\frac{\partial\delta\vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\delta\vec{v} \times \vec{B})$$

donde  $\delta\vec{v}$  representa el movimiento convectivo. Veamos si esta aproximación drástica es suficiente para generar  $\vec{B}_p$ . Supongamos turbulencia fuerte, es decir que la vida media de un vórtice o de la estructura de la convección es de un período  $\tau$ , y en tal tiempo el campo magnético es constante para esa estructura. Por lo tanto en primera aproximación

$$\delta\vec{B} \simeq \tau \nabla \times (\delta\vec{v} \times \vec{B}) .$$

Como además es una variable estocástica cada período es independiente del anterior.

$$\tau \approx 10^3 \text{ s} \ll \tau_d \approx 11 \text{ años}$$

lo que hace parecer razonable la aproximación realizada

$$\delta\vec{B} \simeq \tau\nabla \times (\delta\vec{v} \times \vec{B}) = \tau(\vec{B} \cdot \nabla)\delta\vec{v} - \tau(\delta\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B}.$$

Hemos conseguido estimar  $\delta\vec{B} = \delta\vec{B}(\vec{B}, \delta\vec{v})$  lo que permitirá a su vez, estimar la contribución de la microescala en la macro que entra en la ecuación de inducción  $\langle \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} \rangle$ :

$$\langle \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} \rangle_i = \langle \delta\vec{v} \times (\tau[\vec{B} \cdot \nabla]\delta\vec{v} - \tau[\delta\vec{v} \cdot \nabla]\vec{B}) \rangle_i = \tau\langle \delta\vec{v} \times (\vec{B} \cdot \nabla \delta\vec{v}) \rangle_i - \tau\langle \delta\vec{v} \times (\delta\vec{v} \cdot \nabla \vec{B}) \rangle_i$$

$$\langle \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} \rangle_i = \tau\varepsilon_{ijk} \left\langle \delta v_j B_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right\rangle - \tau\varepsilon_{ijk} \langle \delta v_j \delta v_l \rangle \frac{\partial B_k}{\partial x_l} = \alpha_{il} B_l + \beta_{ilk} \frac{\partial B_k}{\partial x_l}$$

teniendo en cuenta que  $\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$  y  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$ . La componente micro se escribe entonces como un factor que multiplica al campo más un factor que multiplica al gradiente del campo:

$$\langle \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} \rangle_i = \alpha_{il} B_l + \beta_{ilk} \frac{\partial B_k}{\partial x_l}$$

donde

$$\alpha_{il} = \tau\varepsilon_{ijk} \left\langle \delta v_j \frac{\partial \delta v_k}{\partial x_l} \right\rangle \quad \beta_{ilk} = -\tau\varepsilon_{ijk} \langle \delta v_j \delta v_l \rangle.$$

El campo magnético sale del promedio porque  $\langle \vec{B} \rangle = \vec{B}$ . Supongamos que la turbulencia es isótropa, es decir que la orientación de los vórtices  $\delta\vec{v}$  es equiprobable en sentido estadístico y por lo tanto  $\alpha_{il}$  es un tensor de rango 2 tal que  $\alpha_{il} = \alpha \delta_{il}$ , tomando la traza:  $\alpha_{ii} = 3\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha_{ii} = \frac{1}{3}\tau\varepsilon_{ijk} \left\langle \delta v_j \frac{\partial \delta v_k}{\partial x_i} \right\rangle = -\frac{\tau}{3} \langle \delta\vec{v} \cdot (\nabla \times \delta\vec{v}) \rangle$$

ya que  $\varepsilon_{ijk} \partial \delta v_k / \partial x_i = -\varepsilon_{jik} \partial \delta v_k / \partial x_i = -(\nabla \times \delta\vec{v})_j$ .  $\beta_{ilk}$  es un tensor de rango 3  $\beta_{ilk} = -\beta \varepsilon_{ilk}$

$$\beta_{ilk} = -\beta \varepsilon_{ilk} = -\tau\varepsilon_{ijk} \langle \delta v_j \delta v_l \rangle = -\frac{\tau}{3} \langle |\delta v|^2 \rangle \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} = -\frac{\tau}{3} \langle |\delta v|^2 \rangle \varepsilon_{ilk}$$

donde definimos  $\beta = \tau/3 \langle |\delta v|^2 \rangle$  como la energía cinética de la turbulencia, teniendo en cuenta que  $\langle \delta v_j \delta v_l \rangle = \langle |\delta v|^2 \rangle / 3 \delta_{jl}$ . Reemplazando

$$\alpha_{il} = -\frac{\tau}{3} \langle \delta\vec{v} \cdot (\nabla \times \delta\vec{v}) \rangle \delta_{il} \quad \beta_{ilk} = -\frac{\tau}{3} \langle |\delta v|^2 \rangle \varepsilon_{ilk}$$

obtenemos

$$\nabla \times \langle \delta\vec{v} \times \delta\vec{B} \rangle = \nabla \times (\alpha \vec{B} - \beta \nabla \times \vec{B}) = \nabla \times (\alpha \vec{B}) - \beta \nabla \times (\nabla \times \vec{B})$$

reescribiendo el último término y usando que la divergencia del campo es nula se obtiene

$$\nabla \times \langle \delta \vec{v} \times \delta \vec{B} \rangle = \nabla \times (\alpha \vec{B}) + \beta \nabla^2 \vec{B}$$

el primer término resulta ser el término fuente que permitirá que el campo poloidal aumente y el último término aporta a la disipación. Dado que el término fuente tiene asociado el factor  $\alpha$ , se denomina efecto  $\alpha$  al crecimiento del campo poloidal a costa del toroidal, de la misma manera que se llama efecto  $\omega$  al crecimiento del campo toroidal. Si reescribimos la ecuación de inducción resulta

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla \times (\alpha \vec{B}) + (\eta + \beta) \nabla^2 \vec{B}.$$

## 9.5. Ondas de dinamo

Para estudiar las ondas de dinamo elegimos un sistema de coordenadas local en cartesianas (figura 9.8), identificamos  $z \rightarrow \theta$ ,  $y \rightarrow \varphi$  y  $x \rightarrow r$ .

$$\vec{B} = \vec{B}_p + B_y \hat{e}_y \quad \vec{B}_p = \nabla \times (A \hat{e}_y)$$

$$\vec{v} = v_y(x) \hat{e}_y \quad \omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \text{cte.}$$

Separando en componentes la ecuación de inducción y teniendo en cuenta que  $\vec{B}_p = \nabla \times (A \hat{e}_y)$  donde en principio  $A = A(x, z)$

$$\frac{\partial(\vec{B}_p + B_y \hat{e}_y)}{\partial t} = \nabla \times (v_y(x) \hat{e}_y \times (\vec{B}_p + B_y \hat{e}_y)) + \alpha \nabla \times (\vec{B}_p + B_y \hat{e}_y) + \eta' \nabla^2 (\vec{B}_p + B_y \hat{e}_y)$$

que se reducen a

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \omega \frac{\partial A}{\partial z} - \alpha \nabla^2 A + \eta' \nabla^2 B_y$$

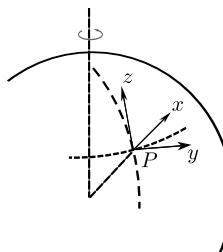


Figura 9.8: Sistema de coordenadas local cartesiano.

y

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B_y + \eta' \nabla^2 A .$$

De la última ecuación se ve que hay un término fuente  $\alpha B_y$  que aporta el campo toroidal por medio del cual se puede generar campo poloidal;  $\eta' = \eta + \beta$ , y se han usado las siguientes relaciones

$$\vec{B}_p = \nabla \times (A \hat{e}_y) = -\frac{\partial A}{\partial x} \hat{e}_z + \frac{\partial A}{\partial z} \hat{e}_x$$

$$\nabla \times \vec{B}_p = -(\nabla^2 A) \hat{e}_y$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_p) = \omega \frac{\partial A}{\partial z} \hat{e}_y .$$

Para simplificar, y analizar los modos supongamos

$$A, \quad B_y \sim \exp[-i\Omega t + i(k_z z + k_x x)]$$

reemplazando en las ecuaciones de inducción se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \alpha k^2 + i\omega k_z & i\Omega - \eta' k^2 \\ i\Omega - \eta' k^2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B_y \end{pmatrix} . \quad (9.2)$$

El determinante de esta matriz debe anularse para encontrar las soluciones de  $\Omega$ . Teniendo en cuenta que  $\Re[\Omega]$  está asociada a las oscilaciones y  $\Im[\Omega]$  da cuenta del crecimiento o amortiguamiento exponencial vemos que de este valor depende la eficiencia del dínamo. El determinante da como resultado:

$$\Omega_{\pm} = -i\eta' k^2 \mp i\sqrt{\alpha^2 k^2 - i\omega \alpha k_z} .$$

Veamos distintos límites de esta solución.

- 1) Rotación diferencial despreciable: dínamo  $\alpha^2$

$$\alpha^2 k^2 \gg \omega \alpha k_z \quad \rightarrow \quad \Omega_{\pm} = -i(\eta' k^2 \pm \alpha k)$$

de modo que

$$B \sim \exp[-i\Omega t] = \exp[-(\eta' k^2 \pm \alpha k)t] \simeq \exp[\alpha k t]$$

donde se usó el resultado con signo negativo debido a que se busca que el campo aumente. Luego, habrá crecimiento exponencial cuando  $\alpha \gg \omega k_z / k^2$  y  $\alpha \gg \eta' k$ . Este campo se supone que explica el ciclo terrestre aunque no el solar.

- 2) Dínamo  $\alpha \omega$ , rotación diferencial importante:

En este caso  $\alpha^2 k^2 \ll \omega \alpha k_z$ :

$$\Omega \pm = -i \left( \eta k^2 \pm \sqrt{\frac{\alpha \omega k_z}{2}} \right) \mp \sqrt{\frac{\omega \alpha k_z}{2}}$$

donde se usó que  $i\sqrt{i} = (-1 + i)/\sqrt{2}$  quedando

$$B \sim \exp[-i\Omega t] = \exp \left[ - \left( \eta' k^2 \pm \sqrt{\frac{\alpha \omega k_z}{2}} \right) t \right] \exp \left[ \pm i \sqrt{\frac{\alpha \omega k_z}{2}} t \right]$$

si además  $\sqrt{\alpha \omega k_z / 2} \gg \eta' k^2$  y usamos la solución  $\Omega$

$$B \sim \exp \left[ \sqrt{\frac{\alpha \omega k_z}{2}} t \right] \exp \left[ i \sqrt{\frac{\alpha \omega k_z}{2}} t \right]$$

y se obtienen soluciones crecientes. Estas soluciones son adecuadas para plasmas con número de Reynolds alto como el del Sol, faltaría ver entonces que  $\tau = 2\pi/\Im[\Omega] = \sqrt{8\pi^2/(\alpha \omega k_z)}$  da del orden de los once años, lo que depende de los modelos de rotación y convección que se proponen.

### Ejercicios

- 2.1 Explique por qué la desaparición de manchas solares no puede ser explicada por medio de la difusión magnética.
- 2.2 Siguiendo a Parker explique cómo es posible la emergencia de tubos de flujo magnético sobre la superficie del Sol.
- 2.3 Explique cómo es posible que la polaridad de manchas en el hemisferio sur sea inversa a la polaridad de manchas en el hemisferio norte.
- 2.4 ¿Por qué no alcanza la rotación diferencial para explicar el dinamo?.
- 2.5 Haga un esquema cualitativo de los procesos que dan lugar al ciclo campo 1) poloidal, 2) toroidal, 3) poloidal. ¿Cómo incide la acción de la microescala en la macroescala?.
- 2.6 ¿Qué es una onda de dinamo?

## Capítulo 10

---

# VIENTO SOLAR

---

### 10.1. Introducción

El viento solar está compuesto por un flujo continuo de plasma y remanentes del campo magnético solar extendiéndose en el medio interplanetario hasta unas 160UA a una velocidad promedio de 500km/s. Es el resultado de la gran diferencia de presión que existe entre la corona solar y el medio interplanetario que genera flujo de plasma contra los efectos de la gravedad solar. La existencia del viento solar fue conjeturada en los 50 al establecerse fuertes correlaciones entre la actividad geomagnética terrestre y fenómenos solares. El viento solar transfiere los efectos de la actividad magnética solar a la Tierra. La observación del viento solar por medio de sondas espaciales fue realizada recién a mediados de los 60. Desde entonces el estudio del viento, su relación con el campo magnético solar y la trasmisión de sus efectos a planetas, cometas, partículas de polvo y rayos cósmicos inmersos en el viento se ha vuelto uno de los tópicos más importantes de la física solar.

La atmósfera solar donde el viento se origina es un medio de velocidad promedio y temperatura fotosférica bajas. Es así que el viento debe ser acelerado hasta alcanzar su valor interplanetario en la corona solar. La corona es una región caliente con temperaturas promedio de más de un millón de grados y densidades de  $10^9$  partículas por  $\text{cm}^{-3}$ , la intensidad del campo magnético no es bien conocido pero se cree que en la base fotosférica alcanza valores medios de 100G y decae nuevamente con la distancia. La dinámica del viento es determinada fundamentalmente por el campo magnético, cuando las bases de las líneas de campo se cierran en la cromosfera la atmósfera queda atrapada, en cambio en regiones como los agujeros coronales, donde las líneas son abiertas, el plasma atmosférico fluye hacia el medio interplanetario.

Una vez que el viento se ha formado, el plasma se expande radialmente en el medio interplanetario al mismo tiempo que se diluye y enfriá. Las mediciones han mostrado que la densidad fuera de la corona hasta una distancia de unas pocas UA decrece como  $\rho(r) \propto r^{-2}$ . Cerca de la Tierra, el viento solar es un plasma totalmente ionizado con una densidad de  $\rho = 5$  partículas por  $\text{cm}^{-3}$ , consistente en electrones, protones y partículas  $\alpha$  (3% del total). El decrecimiento de la temperatura es menos drástico. La temperatura coronal es de unos pocos millones de grados Kelvin y alcanza valores promedios de  $T \sim 1,5 \times 10^5 \text{ K}$  a una distancia de una UA.

Como se ha visto en la discusión del Capítulo 1 (ver figuras 1.3-1.4 de ese capítulo) el parámetro de estructuración  $\beta$  es mayor que uno más allá de un radio solar. En particular cerca de la Tierra a una UA  $\beta \approx 1 - 30$ . Dado que este parámetro indica el grado de magnetización del plasma los valores altos de  $\beta$  muestran que, a estas distancias, el fluido domina totalmente el comportamiento del campo.

## 10.2. Modelos del viento solar

Se presentará en esta sección las tres fases de lo que puede denominarse el modelo clásico de viento solar. La primera corresponde a la teoría de formación del viento, bajo la hipótesis del continuo. Da cuenta de la existencia de un flujo de plasma supersónico que emerge de la corona hacia el medio interplanetario. La segunda fase describe la configuración que adquiere el campo magnético congelado al plasma y debido al viento en expansión. La tercera describe la fase final del viento solar.

### 10.2.1. Primera fase

En una primera instancia de descripción del modelo suponemos que la corona es un plasma caliente en equilibrio estacionario en el campo gravitatorio del Sol. Se plantean las leyes de conservación: continuidad y momento para el caso estático con simetría esférica y en un sistema de coordenadas con origen en el centro del Sol.

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \longrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d(\rho v r^2)}{dr} = 0 \quad (10.1)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{F}_g \longrightarrow \rho v \frac{dv}{dr} = \frac{dp}{dr} - \rho \frac{GM_{\odot}}{r^2} \quad (10.2)$$

donde se ha despreciado el efecto del campo magnético y se ha utilizado  $\vec{v} = v(r)\hat{e}_r$ ,  $\vec{F}_g = (GM_{\odot}/r^2)\hat{e}_r$  y  $\nabla p = (dp/dr)\hat{e}_r$ ,  $G$  es la constante gravitatoria,

$M_\odot$  es la masa solar,  $p$  es la presión del gas en la corona.

Este sistema de ecuaciones tiene una solución sencilla, siendo considerada la descripción correcta hasta finales de los 50. Supone que la corona está en equilibrio estático  $v(r) = 0, \forall r$ . La ecuación (10.1) se satisface automáticamente y la ecuación (10.2) se transforma en

$$-\frac{dp}{dr} - \rho \frac{GM_\odot}{r^2} = 0 \quad (10.3)$$

que nos indica que el equilibrio es un resultado del balance entre la fuerza de gravedad y el gradiente de presión del gas. Utilizando la ley de los gases ideales  $p = nk_B T$ , con  $\rho = n(m_e + m_i) \simeq nm_i$  ( $m_e$  y  $m_i$  la masa del electrón y protón respectivamente,  $k_B$  la constante de Boltzmann) y remplazando en la ecuación (10.3) considerando  $T$  constante se obtiene

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dr} = -\frac{GM_\odot m}{k_B T r^2} = 0$$

que da la ecuación de la presión para una atmósfera estática e isotérmica. La solución de esta ecuación es simplemente

$$\ln p = \frac{GM_\odot m}{k_B T} \frac{1}{r} + K. \quad (10.4)$$

Asumiendo  $p(r) = p_0$  en la base de la corona,  $r = R_\odot$  se obtiene el valor de la constante  $K$

$$K = \ln p_0 - \frac{GM_\odot m}{k_B T} \frac{1}{R_\odot}$$

que permite escribir la ecuación (10.4) de la forma

$$p(r) = p_0 \exp \left[ \frac{GM_\odot m}{k_B T} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_\odot} \right) \right]. \quad (10.5)$$

Para  $r \geq R_\odot$ ,  $p \leq p_0$  y la solución ecuación (10.5) muestra que  $p(r)$  decrece a medida que  $r$  aumenta.

Un resultado sorprendente es que la presión no tiende a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . No es posible obtener una solución para la cual tanto  $p$  como  $T$  tiendan a cero cuando  $r$  tiende a infinito y por tanto el valor asintótico de  $p$  en el infinito es mucho mayor que el valor de la presión en el medio interestelar. En 1958 Parker predijo la existencia del viento solar argumentando que la corona sólo podría estar en equilibrio si se aplicara una presión en el infinito que compensara el valor asintótico obtenido. Como no hay nada en el medio interestelar que evite la expansión de la corona dedujo que dicha expansión era el viento solar.

Consideremos soluciones no estáticas, el caso más simple es el de un viento esférico estacionario. La ecuación (10.1) se satisface si

$$\rho v r^2 = \text{cte} . \quad (10.6)$$

Esta expresión nos dice que la conservación de masa implica que el flujo total a través de cualquier esfera centrada en el Sol debe ser el mismo. Esta ecuación puede derivarse respecto a  $r$  y dividirse por ella misma para reescribir la ecuación (10.1) de forma más conveniente

$$\frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = 0$$

que junto con la ecuación de momento (10.2)

$$\rho v \frac{dv}{dr} = - \frac{dp}{dr} - \frac{GM_{\odot}}{r^2} \rho$$

son las dos ecuaciones a tratar suponiendo caso isotérmico,  $T = \text{cte}$  en  $p = R\rho T$  lo que evita tener que resolver la ecuación de la energía. Reescribamos la ecuación de momento considerando  $p = v_c^2 \rho$  donde  $v_c^2 = RT$ . Si se elimina la densidad de las últimas dos ecuaciones resulta

$$\left( v - \frac{v_c^2}{v} \right) \frac{dv}{dr} = \frac{2v_c^2}{r} - \frac{GM_{\odot}}{r^2} . \quad (10.7)$$

Digresión: nótese que las expresiones anteriores (la derivada de la ecuación (10.6) y la ecuación (10.7) así como la ecuación de momento para el caso radial, ecuación (10.2)) permanecen invariantes si se realiza la transformación  $v \rightarrow -v$ . Esto significa que las soluciones de vientos estacionarios y las de acreción en el caso esférico son matemáticamente el mismo problema. Una vez que uno encuentra la solución para el viento esférico se puede obtener la solución de acreción cambiando el signo de la velocidad. Téngase en cuenta que esto sólo es válido para el caso estacionario.

Volviendo a la ecuación (10.7), Parker notó que en la base de la corona, y para cualquier valor realista de la temperatura coronal, el segundo término de la parte derecha de la ecuación debía ser mayor que el primero. Esta afirmación nos dice sencillamente que a pesar del alto valor de la temperatura la corona está vinculada gravitacionalmente al Sol. Por lo tanto, cerca de la base de la corona el término de la derecha es negativo. Sin embargo, dado que  $GM_{\odot}/r^2$  decrece más rápidamente con la altura ( $r$ ) que  $2v_c^2/r$  en conjunto la suma crece con la altura, pasa por cero en el radio

$$r_c = \frac{GM_{\odot}}{2v_c^2}$$

y se vuelve positiva para valores mayores que  $r_c$ . Para que se satisfaga la ecuación (10.7), el término de la izquierda debe anularse también en  $r_c$ , lo que puede ocurrir de dos maneras según cuál de los dos factores se anule. Supongamos primero que se anula la derivada. Es decir,

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r_c} = 0$$

y por tanto la solución tiene un máximo o mínimo en  $r_c$ . Consideramos que el término

$$v^2 - v_c^2 = v^2 - \frac{k_B T}{m} < 0$$

cerca de la base de la corona  $r = R_\odot$  ( $m$  es la masa del protón). La velocidad  $v(r)$  tiene valores pequeños como se espera del corrimiento Doppler detectado en las líneas espectrales originadas en esa región. Como el término de la derecha es también negativo, cerca de la base de la corona  $dv/dr$  debe ser positivo. Por lo tanto, para estas soluciones,  $v(r)$  aumenta con  $r$  hasta alcanzar su máximo valor en  $r = r_c$  y luego decrece con  $v^2 - v_c^2$  que es todavía negativo para  $r > r_c$  dado que ahora el término de la derecha es positivo y  $dv/dr < 0$ . Para estas soluciones  $v^2 < v_c^2$  para todos los valores de  $r$ .

Sin embargo, hay una solución única –con valores pequeños de  $v(r)$  en la base de la corona– que corresponde al caso en que el término de la izquierda se anula en  $r = r_c$  porque  $v^2 - v_c^2 = 0$ . En la base de la corona  $v^2 - k_B T/m < 0$  y  $dv/dr > 0$  para  $R_\odot < r < r_c$  pero pasa por  $r_c$  anulando el factor de la diferencia y manteniendo  $(dv/dr)_{r_c} > 0$ . Como en este caso  $v^2 - v_c^2 = v^2 - k_B T/m$  se hace positivo para valores de  $r$  mayores que  $r_c$ , el cambio de signo del lado derecho requiere que  $dv/dr$  siga siendo positivo; es decir  $v(r)$  sigue creciendo para todo valor de  $r$ . Nótese que  $v_c$  es la velocidad del sonido para el caso isotérmico. En efecto, en el caso isotérmico  $\gamma = 1$ ,

$$c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma \frac{k_B T}{m} = \frac{k_B T}{m} = RT = v_c^2 .$$

Esto significa que todas las otras soluciones (que parten de valores pequeños de  $v(r)$  en la base de la corona) y tienen un máximo en  $r_c$  ( $dv/dr = 0$ ) alcanzan un valor máximo que es menor que la velocidad del sonido en  $r = r_c$ . Todas estas soluciones tienen valores pequeños de  $v(r)$  para valores grandes de  $r$  y comparten el problema de las soluciones estáticas mencionado anteriormente: tienen un valor finito de la presión en  $r \rightarrow \infty$ .

La solución única, en la que  $(v^2 - v_c^2)_{r=r_c} = 0$  representa un flujo cuya velocidad se incrementa por arriba del valor de la velocidad del sonido; esta

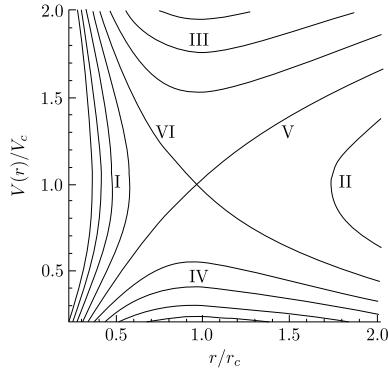


Figura 10.1: Soluciones de la ecuación de viento estacionario. Los casos I y II no dan resultados físicamente aceptables. Los casos IV corresponden a brisas (subsónicas). Los casos III corresponden a material que que no llega a ser acretado. El caso V corresponde a la solución de viento, en  $r = r_c$  el flujo se hace supersónico. El caso VI corresponde a la solución de acreción con flujo supersónico para  $r \leq r_c$  y subsónico para  $r \geq r_c$ .

velocidad se vuelve supersónica tal como se observa en el viento solar. De la ecuación (10.1)

$$\rho(r) = \frac{C}{r^2 v(r)}$$

$\rho(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$  y la presión  $p = \rho RT$  debe también tender a cero mientras  $v(r)$  no tiende a cero más rápidamente. Por lo tanto, este resultado es candidato a representar un estado de equilibrio que conecte el alto valor de la presión en la base de la corona con el bajo valor que alcanza en el medio interestelar. Es sin embargo, una solución estacionaria –no estática– de las ecuaciones de fluido que describe la expansión del plasma coronal en forma de viento que se aleja del Sol y que no se anula. Esto también puede verse, integrando la ecuación (10.7). Es fácil ver que se obtiene

$$\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 - \log\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 = 4 \log\left(\frac{r}{r_c}\right) + \frac{2GM_\odot}{rv_c^2} + C'$$

donde  $C'$  es una constante de integración. Las soluciones para diferentes valores de  $C'$  se muestran en la figura 10.1. De la figura se desprende que las soluciones del tipo I y II no son físicas dado que hay dos valores posibles para un mismo valor de  $r$ . Las soluciones de tipo III son supersónicas  $\forall r$  y las tipo IV son subsónicas  $\forall r$ . Sólo las soluciones V y VI pasan por el valor crítico  $r = r_c$   $v = v_c$  y son subsónicas y supersónicas en diferentes partes de su curva. Se puede ver fácilmente que  $C' = -3$  para estas soluciones. El requerimiento de que la velocidad  $v(r)$  debe ser chica en la base de la corona llevó a Parker a suponer en 1958 que la solución V es la adecuada para describir el viento

solar. Bondi en 1952 propuso que la solución tipo VI corresponde al caso de la acreción esférica.

### 10.3. Segunda fase

Si bien podría discutirse la validez del modelo presentado en la sección anterior debido a las simplificaciones efectuadas las investigaciones realizadas en los años subsiguientes al planteo del modelo de Parker han confirmado que en lo esencial la solución de flujo estacionario es correcta. En particular, si se relaja el supuesto de atmósfera isotérmica a una en donde  $T = T(r)$  decrece con  $r$  menos lentamente que  $1/r$  se obtiene una solución de viento.

En esta sección se considera la influencia del campo magnético sobre el viento solar. Como se ha mencionado en capítulos anteriores, en el viento solar el parámetro  $\beta$  adquiere valores mayores a uno a partir que deja la baja corona solar. Debido a que el número de Reynolds es muy grande el plasma y el campo están congelados y dado el valor alto de  $\beta$  la dinámica es gobernada por el plasma. Si aplicamos estas ideas a un modelo con simetría esférica, un viento en expansión, resulta que el flujo magnético  $B_0 A_0$  que pasa por un área  $A_0$  sobre una esfera de radio solar  $R_\odot$  (en la base de la corona) será el mismo que atravesie el área  $A(r) = (r/R_\odot)^2 A_0$  a una distancia  $r$  del centro de la estrella. De modo que por conservación del flujo magnético

$$B(r) \left( \frac{r}{R_\odot} \right)^2 A_0 = B_0 A_0 \longrightarrow \text{o bien } B(r) = B_0 \left( \frac{R_\odot}{r} \right)^2.$$

Es decir, la intensidad de un campo puramente radial decrecerá como  $1/r^2$ .

Hay, sin embargo, una complicación fundamental que hace que este modelo no represente el viento solar. La atmósfera solar gira sobre un eje perpendicular al plano eclíptico, el plano que contiene a la órbita terrestre. Antes de ello consideraremos la efectividad del campo magnético para transportar momento angular.

#### 10.3.1. Isorrotación

Cuando el campo magnético emerge de cuerpos rotantes es posible que el campo se lleve momento angular. Consideremos la ley de isorrotación de Ferraro (1937). Un cuerpo rotante debe ser axisimétrico respecto de un eje de rotación lo que implica que la velocidad de rotación en coordenadas cilíndricas

$$\vec{v} = r\Omega(r, z)\hat{e}_\varphi \quad (10.8)$$

es independiente de la componente toroidal  $\varphi$ . Supongamos que el objeto tiene un campo magnético poloidal axisimétrico que suponemos completamente congelado al plasma. Veamos que, de acuerdo con el teorema de Ferraro, un estado estacionario isorrotante es posible sólo si la velocidad angular  $\Omega$  es constante a lo largo de las líneas magnéticas.

Sin pérdida de generalidad un campo magnético poloidal (independiente de  $\varphi$ ) se puede escribir

$$\vec{B} = \nabla \times \left( \frac{1}{r} \Psi(r, z) \hat{e}_\varphi \right) \quad (10.9)$$

de donde

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (10.10)$$

De la ecuación (10.9) es inmediato que se satisface  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ .

Veremos que la función  $\Psi$  resulta constante sobre una línea de corriente. Una línea de corriente es tal que  $\vec{B}$  es tangente a ella, es decir

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{dz}{B_z} \longrightarrow B_z dr - B_r dz = 0$$

que reemplazando las componentes de la ecuación (10.10) da

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = 0 \longrightarrow \nabla \Psi \cdot d\vec{s} = 0$$

lo que significa que  $\Psi$  es constante sobre una línea de corriente.

Consideremos ahora la ecuación de inducción magnética para el caso de congelamiento total entre el campo y el plasma y para el caso estacionario, es decir

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0.$$

Sustituyendo las expresiones de  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  se obtiene una única componente no cero en la dirección  $\varphi$ . Desarrollando la expresión anterior se obtiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (10.11)$$

lo que implica que  $\Omega = f(\Psi)$ , es decir la velocidad angular debe ser constante sobre una línea de corriente. Se ve que al asumir la condición de congelamiento entre el plasma y el campo se obtiene que las líneas giran como un objeto rígido para que el estado estacionario sea posible.

### Viento magnetizado

Teniendo en cuenta la discusión anterior es interesante preguntarse si la ley de Ferraro se cumple para el caso del campo magnético solar. Nótese que uno de los requerimientos para que valga la ley de Ferraro es que el flujo de velocidad tenga la forma dada en la ecuación (10.8) expresión que no se cumple para un viento saliente. Sin embargo, en la baja corona la densidad de energía magnética es mucho mayor que la densidad de energía cinética asociada al flujo saliente del viento ( $B^2/2\mu_0 \gg \rho v^2/2$ ). De modo que en la baja corona solar es esperable que los esfuerzos magnéticos establezcan una rotación casi rígida de acuerdo con lo que establece la ley de Ferraro. Pero, lejos de la baja corona la velocidad angular del viento es mucho menor que la velocidad angular del Sol y las líneas magnéticas se curvan como se observa en la figura 10.2. La forma de estas líneas es conocida como la espiral de Parker. El plasma rota aproximadamente como un cuerpo rígido hasta una distancia llamada radio de Alfvén tal que  $r_A \simeq 10R_\odot$ . Esto implica que debido al viento solar la pérdida de momento angular por parte del Sol es mucho más efectiva que en el caso en que no hay campo magnético.

La velocidad de rotación varía con la latitud de modo que en el ecuador el período es de 25,4 días. Si nos concentramos en el plano de la eclíptica la frecuencia de rotación es

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{25,4 \text{ d}} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

Como se mencionó el efecto de la rotación en el plano de la eclíptica es el mostrado en la figura 10.2. A medida que el plasma se mueve radialmente dejando una posición fija en la base de la corona dicha posición se mueve quedando adelantada debido a la rotación. El campo congelado al plasma adquiere la forma espiral que se muestra en la figura con un extremo fijo a la base coronal.

Para obtener la forma de las líneas de campo hacemos un cambio de coordenadas para movernos junto con el sistema que rota con el Sol, de manera que la fuente de la que emerge el viento de plasma y las líneas se mantienen en una posición fija. El flujo de plasma se mueve en este sistema en la dirección radial  $U_r = v(r)$ , como en el caso estacionario. Queda todavía un movimiento aparente en la dirección de la longitud  $\varphi$  enteramente debida a la transformación de coordenadas,  $U_\varphi = -\omega r$ . Debido al congelamiento entre el plasma y el campo

$$\frac{B_\varphi}{B_r} = \frac{U_\varphi}{U_r} = -\frac{\omega r}{v(r)}.$$

De aquí se obtiene una ecuación diferencial para las líneas de campo en el

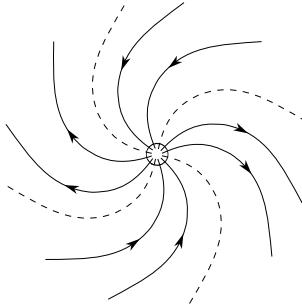


Figura 10.2: Espiral de Parker. Esquema de líneas de campo magnético.

ecuador solar

$$\frac{rd\varphi}{dr} = -\frac{\omega r}{v(r)} .$$

Si la velocidad radial de expansión es constante como en el lejano viento solar interplanetario la ecuación se transforma en

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{v}{\omega} \rightarrow r = -\frac{v}{\omega}\varphi + K$$

o bien

$$r - R_{\odot} = -\frac{v}{\omega}(\varphi - \varphi_0)$$

que nos da la expresión matemática de una de las líneas de la figura 10.2. La intensidad del campo en esta geometría puede calcularse suponiendo un tubo de flujo que tenga como eje a una línea de campo magnético. En este caso también se conserva el flujo, en la base fija del tubo el flujo es, como en el caso estático,  $B_0 dA_0$ . Si dibujamos una sección esférica siguiendo las líneas de campo sobre el tubo la componente radial del campo a la altura  $r$  será como antes:  $B_r(r) = B_0(R_{\odot}/r)^2$ . De esta expresión se calcula la componente azimutal del campo como

$$B_{\varphi}(r) = \frac{-\omega r}{v} B_r = -B_0 \frac{\omega R_{\odot}^2}{v} \frac{1}{r} . \quad (10.12)$$

El cambio de coordenadas al sistema inercial no implica cambios en el campo magnético (caso de velocidades no relativistas) pero sí agrega un campo eléctrico. De la figura 10.2 vemos que fuera de un determinado radio tenemos tanto velocidad radial como azimutal. A la altura de la órbita terrestre  $\omega r \simeq 400 \text{ km s}^{-1}$  y en promedio, a esta distancia, la velocidad radial y la azimutal tienen el mismo valor. El ángulo entre la dirección que une la Tierra con el Sol y la línea de campo es cercana a  $45^\circ$ .

#### 10.4. Tercera fase

---

Esto se puede ver de la siguiente manera: tomando a  $\psi$  como el ángulo entre la línea de campo y la dirección Sol-Tierra

$$\tan(\psi) = -\frac{B_\varphi}{B_r} = \frac{\omega r}{v} \sim 1$$

de modo que cerca de la órbita terrestre  $\psi = 45^\circ$  y se vuelve mayor para mayores distancias. Transformando nuevamente al sistema inercial calculamos

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = v B_\varphi \hat{e}_\theta$$

donde se asumió que el flujo ( $u$ ) es radial. Esto es debido a que lejos del Sol el campo es cada vez más azimutal (ver ecuación (10.12);  $B_r \propto 1/r^2$  y  $B_\varphi \propto 1/r$ ) y por tanto  $B_\varphi$  es la componente del campo que sobrevive. Cerca de la corona los campos magnéticos intensos fuerzan al flujo a corrotar con el Sol pero por encima del radio de Alfvén, cuando la presión magnética se vuelve menor que la del gas, el campo va donde el plasma lo lleva. La corrotación del viento hasta la altura del radio de Alfvén implica que el momento angular perdido debido al viento es mucho más importante de lo que puede esperarse debido a la rotación del flujo en la superficie. Las partículas que rotan rígidamente se llevan una cantidad de momento angular que es  $(r_A/R_\odot)^2$  veces el del caso superficial.

#### 10.4. Tercera fase

En modelos de viento solar o de corona en expansión, a diferencia del caso estático, tanto en el caso isotérmico como cuando la temperatura decrece con  $r$ , la presión del gas tiende a cero a medida que  $r \rightarrow \infty$ . El campo magnético se vuelve cada vez más azimutal (ver ecuación (10.12)) y la presión magnética

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \approx \frac{B_\varphi^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left( \frac{\omega R_\odot^2}{vr} \right)^2$$

también tiende a cero a medida que  $r \rightarrow \infty$ . También ocurre que el flujo de momento o presión dinámica  $\rho v^2$  tiende a cero a medida que  $r \rightarrow \infty$  dado que, de la ecuación de continuidad se sabe que, la densidad cae aproximadamente como  $1/r^2$ .

De estos cálculos se infiere que a distancias heliocéntricas suficientemente grandes la presión dinámica va a decaer por debajo de la presión interestelar  $\sim 10^{-13}$  Pa. Cabe esperar que la velocidad del viento solar decaiga al interactuar con este medio. Sin embargo tanto el modelo isotérmico como los modelos que admiten variaciones de la temperatura con la distancia muestran que o

la velocidad aumenta suavemente en el primer caso o alcanza un valor finito en los otros. En estos últimos, como la temperatura decae con la distancia la razón entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido va a aumentar nuevamente (la velocidad del sonido  $\approx \sqrt{T(r)}$ ). Por lo tanto ni la presión magnética ni la presión del plasma logran frenar el flujo. Además el efecto de este flujo supersónico o super-Alfvénico no es captado aguas arriba dado que no hay ondas que puedan propagarse en esa dirección.

Lo que sucede es que se forma una onda de choque que es la única causa que puede frenar en forma abrupta al flujo supersónico del viento solar. El choque se va a formar en una región en la que la presión interestelar es aproximadamente igual a la presión dinámica o densidad de flujo de momento en la dirección radial

$$\rho v^2 = p_{inters}.$$

Conociendo que la presión interestelar es  $\sim 10^{-12} \text{ dyn cm}^{-2}$ , que la presión dinámica a 1UA es de  $\sim 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^{-2}$ , que la densidad decae como  $1/r^2$  podemos estimar la distancia en la que se ubica el choque. Es decir, de la ecuación de continuidad  $\rho v r^2 = \text{cte}$ ,  $\rho \sim 1/r^2$  para un flujo supersónico aproximadamente constante ( $v = \text{cte}$ ), conociendo las presiones en la Tierra y en el medio interestelar se obtiene

$$\frac{(\rho v^2)_T}{(\rho v^2)_{cho}} = \frac{p_T}{p_{inters}} \rightarrow r_{cho} = 160 \text{ UA} .$$

Tener en cuenta como dato adicional la expresión del flujo de pérdida de masa del Sol,  $\dot{M}_\odot = 4\pi \rho r^2 v$ . Este resultado es impactante dado que nos dice que el viento solar es supersónico lejos de cualquier planeta conocido y que el choque que termina con el viento solar –en la heliopause– debe ser un choque fuerte. Otros modelos, sin embargo, dan valores mucho menores que este valor.

## 10.5. Modelo global de la corona solar y su extensión al medio interplanetario

El modelo MHD más sencillo y realista que se puede considerar para describir globalmente la corona solar y su extensión al medio interplanetario es el de un dipolo impuesto como condición de contorno en la base de la corona junto con un viento isotérmico en expansión.

Debido al congelamiento, si la intensidad del campo es muy fuerte, se espera que la configuración magnética sea como la de un dipolo en vacío. Contrariamente, si la intensidad es pequeña, se espera que el viento arrastre al campo

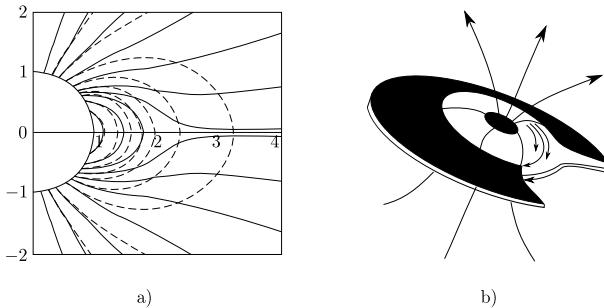


Figura 10.3: a) Esquema de líneas de campo. Superposición de un dipolo con líneas radiales. b) Esquema 3D de líneas de campo. Comportamiento diferenciado de las líneas en el Ecuador, hoja de corriente interplanetaria.

configurando un viento casi radial. Dado que en la baja corona la presión magnética es algunas veces mayor que la presión del gas se espera una mezcla entre los dos comportamientos. Muchas de las líneas de campo que emergen de la base de la corona permanecen cerradas capturando el plasma como si fuera una solución en equilibrio estático. Una parte menor está compuesta por líneas abiertas que parten de la base de la corona y no vuelven a ella y darán lugar al viento solar. La figura 10.3a muestra un esquema del modelo para un plano de longitud constante. Las líneas cortadas muestran la solución de un dipolo y las continuas la del modelo, ambas comenzando de los mismos puntos sobre la corona. Vemos líneas cerradas que cruzan el Ecuador del dipolo aunque son distorsionadas hacia afuera respecto de la solución exacta del dipolo. Contienen plasma en equilibrio estático como respuesta al gradiente de presiones y a la gravedad. Las líneas que se extienden a altas latitudes son abiertas con plasma extendiéndose como viento solar. Estas líneas se dispersan en latitud hasta cubrir todo el espacio más allá de aproximadamente dos radios solares. Por debajo de esta altura tenemos estructuras cerradas de campo y por encima las líneas son abiertas. Estas características fueron ya introducidas en el Capítulo 1 a propósito del parámetro  $\beta$  (ver figura 1.3b). Las líneas de campo con  $\theta \simeq 45^\circ$  que vienen de hemisferios opuestos tienen una importancia particular, envuelven la región de líneas cerradas y luego se aproximan llegando a las bajas latitudes (ver figura 10.3b). Dado que provienen de hemisferios opuestos son líneas con polaridad magnética opuesta. Debido a que el signo de polaridad cambia abruptamente en el ecuador tendremos una región de reconexión magnética con densidad de corriente intensa  $\vec{j} = 1/\mu_0 \nabla \times \vec{B}$  en la dirección normal al plano de la figura. Esta corriente circula alrededor del dipolo en el plano ecuatorial formando una *hoja de corriente interplanetaria* que separa los flujos de campo y plasma originados en hemisferios distintos.

### Ejercicios

- 10.1 Obtenga a partir de la ecuación (10.5) una expresión que muestre que, en una atmósfera estática e isotérmica en la que se puede despreciar la variación de la gravedad con  $r$  (*shallow approximation*), la presión decae exponencialmente. Determine la expresión de la escala de altura.
- 10.2 Reemplace la expresión  $\Omega = f(\Psi)$  en la ecuación (10.11) y compruebe que esta suposición lleva a que la velocidad angular es constante sobre una línea de corriente. ¿Cuáles son los supuestos que llevan a este resultado?
- 10.3 Demuestre que la pérdida de momento angular del Sol debido al campo magnético es del orden de 100 veces mayor que si el Sol no tuviera campo magnético. Asuma conocida la velocidad angular del Sol, el radio de Alfvén y el radio solar.

# Apéndice A

---

## A.1. Identidades vectoriales

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) , \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} , \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 , \quad (\text{A.3})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) , \quad (\text{A.4})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}]\vec{c} - [(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}]\vec{d} , \quad (\text{A.5})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} , \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 , \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0 , \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} , \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla(\Phi\Psi) = \nabla(\Psi\Phi) = \Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi , \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot (\Phi\vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla\Phi + \Phi\nabla \cdot \vec{a} , \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times (\Phi\vec{a}) = \nabla\Phi \times \vec{a} + \Phi\nabla \times \vec{a} , \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) = (\nabla \vec{b}) \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \vec{b} , \quad (\text{A.13})$$

$$(\vec{a} \times \nabla) \times \vec{b} = (\nabla \vec{b}) \cdot \vec{a} - \vec{a} \nabla \cdot \vec{b} , \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\nabla \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ &= (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot (\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \nabla \vec{b} + \vec{b} \nabla \cdot \vec{a} , \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) , \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} , \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi , \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) . \quad (\text{A.20})$$



## Apéndice B

---

### B.1. Tablas de cantidades físicas

---



---

#### CONSTANTES FÍSICAS

---

<i>Cantidad física</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
carga del electrón	$e$	$1,602 \times 10^{-19}$	C
masa del electrón	$m_e$	$9,109 \times 10^{-31}$	kg
masa del protón	$m_p$	$1,673 \times 10^{-27}$	kg
permitividad del vacío	$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12}$	F m <sup>-1</sup>
permeabilidad del vacío	$\mu_0$	$1,257 \times 10^{-6}$ $(= 4\pi \times 10^{-7})$	H m <sup>-1</sup>
velocidad de la luz	$c$	$2,998 \times 10^8$ $(= (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2})$	m s <sup>-1</sup>
constante de Planck	$h$	$6,626 \times 10^{-34}$	J s
constante de Boltzmann	$k_B$	$1,381 \times 10^{-23}$	J K <sup>-1</sup>
constante de Rydberg	$R_\infty = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3}$	$1,097 \times 10^7$	m <sup>-1</sup>
constante gravitacional	$G$	$6,671 \times 10^{-11}$	m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>
aceleración gravitacional	$g$	9,807	m s <sup>-2</sup>
número de Avogadro	$N_A$	$6,022 \times 10^{23}$	mol <sup>-1</sup>
constante de los gases	$R = N_A k_B$	8,3145	J K <sup>-1</sup> mol <sup>-1</sup>
temperatura asociada a 1 eV	$e/k_B$	$1,1604 \times 10^4$	K
radio de Bohr	$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$	$5,29 \times 10^{-11}$	m
1 unidad astronómica	UA	$1,5 \times 10^{11}$	m
radio solar	$R_\odot$	$6,96 \times 10^8$	m
masa solar	$M_\odot$	$1,99 \times 10^{30}$	kg
cte. grav. solar	$g_\odot = \frac{GM_\odot}{R_\odot^2}$	$2,74 \times 10^2$	m s <sup>-2</sup>
edad solar	$t_\odot$	$4,6 \times 10^9$	años

---

Tabla B.1

## B.1. Tablas de cantidades físicas

---



---

### PARÁMETROS DE PLASMA

---

<i>Cantidad física</i>	<i>Definición</i>	<i>Expresión*</i>	<i>Unid.</i>
frecuencia del plasma	$\omega_{p,e} \equiv \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$	$= 56,6\sqrt{n}$	$\text{rad s}^{-1}$
longitud de Debye	$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{ne^2}}$	$= 69,0\sqrt{\frac{T}{n}}$	m
frec. ciclotrón del electrón	$\Omega_e \equiv \frac{eB}{m_e}$	$= 1,76 \times 10^{11} B$	$\text{rad s}^{-1}$
radio ciclotrón del electrón	$R_e \equiv \frac{v_{\perp,e}}{\Omega_e}$	$= 2,21 \times 10^{-8} \frac{\sqrt{T}}{B}$	m
frec. ciclotrón del ión	$\Omega_i \equiv \frac{ZeB}{m_i}$	$= 9,58 \times 10^7 \frac{Z}{A} B$	$\text{rad s}^{-1}$
radio ciclotrón del ión	$R_i \equiv \frac{v_{\perp,i}}{\Omega_i}$	$= 9,47 \times 10^{-7} \frac{\sqrt{A}}{Z} \frac{\sqrt{T}}{B}$	m
vel. térmica del electrón	$v_{t\acute{e}rm,e} \equiv \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}}$	$= 5,5 \times 10^3 \sqrt{T}$	$\text{m s}^{-1}$
velocidad térmica del ión	$v_{t\acute{e}rm,i} \equiv \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}}$	$= 1,3 \times 10^2 \sqrt{\frac{T}{A}}$	$\text{m s}^{-1}$
velocidad del sonido	$c_s \equiv \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$	$= 1,17 \times 10^2 \sqrt{\frac{1+Z}{A}} \sqrt{T}$	$\text{m s}^{-1}$
velocidad del sonido	$v_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$	$= 2,18 \times 10^{16} \sqrt{\frac{Z}{A}} \frac{B}{\sqrt{n}}$	$\text{m s}^{-1}$

---

Tabla B.2

\*  $n$  ( $\equiv n_e \approx Zn_i$ ),  $T$  ( $\equiv T_e \approx T_i$ ),  $B$ , con dimensiones  $[n] = \text{m}^{-3}$ ,  $[T] = \text{K}$ ,  $[B] = \text{T}$ ;  $A$  es el número másico del ión (múltiplos de  $m_p$ ),  $Z$  es el número atómico (múltiplos de  $e$ ).

# Apéndice C

---

## C.1. Conversión de unidades SI ↔ CGS

Cantidad física	Símb.	Dimensiones		Unidades SI	Factor de conversión	Unidades CGS
		SI	CGS			
Capacitancia	$C$	$\frac{t^2 q^2}{ml^2}$	$l$	farad	$9 \times 10^{11}$	cm
Carga	$q$	$q$	$\frac{m^{1/2} l^{3/2}}{t}$	coulomb	$3 \times 10^9$	statcoulomb
Cond. térmica	$\kappa$	$\frac{ml}{t^3}$	$\frac{ml}{t^3}$	watt/m/K	$10^5$	erg/cm/K
Campo eléctrico	$\vec{E}$	$\frac{ml}{t^2 q}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2} t}$	volt/m	$1/3 \times 10^{-4}$	statvolt/cm
Corriente	$I, i$	$\frac{q}{t}$	$\frac{m^{1/2} l^{3/2}}{t^2}$	ampere	$3 \times 10^9$	statampere
Densidad	$\rho$	$m/l^3$	$m/l^3$	kg/m <sup>3</sup>	$10^{-3}$	g/cm <sup>3</sup>
Energía	$U$	$\frac{ml^2}{t^2}$	$\frac{ml^2}{t^2}$	joule	$10^7$	erg
Flujo magnético	$\Phi$	$\frac{ml^2}{tq}$	$\frac{m^{1/2} l^{3/2}}{t}$	weber	$10^8$	maxwell
Frecuencia	$\nu$	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$	hertz	1	hertz
Fuerza	$\vec{F}$	$\frac{ml}{t^2}$	$\frac{ml}{t^2}$	newton	$10^5$	dyna
Impedancia	$Z$	$\frac{ml^2}{tq^2}$	$\frac{t}{l}$	ohm	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	s/cm
Inductancia	$L$	$\frac{ml^2}{q^2}$	$\frac{t^2}{l}$	henry	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	s <sup>2</sup> /cm
Ind. magnética	$\vec{B}$	$\frac{m}{tq}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2} t}$	tesla	$10^4$	gauss
Longitud	$l$	$l$	$l$	m	$10^2$	cm
Masa	$m$	$m$	$m$	kg	$10^3$	g
Permeabilidad	$\mu$	$\frac{ml}{q^2}$	1	henry/m	$\frac{1}{4\pi} \times 10^7$	—
Permitividad	$\epsilon$	$\frac{t^2 q^2}{ml^3}$	1	farad/m	$36\pi \times 10^9$	—
Potencia	$P$	$\frac{ml^2}{t^3}$	$\frac{ml^2}{t^3}$	watt	$10^7$	erg/s
Presión	$p$	$\frac{m}{lt^2}$	$\frac{m}{lt^2}$	pascal	10	dyna/cm <sup>2</sup>
Resistividad	$\eta$	$\frac{ml^3}{tq^2}$	$t$	ohm m	$\frac{1}{9} \times 10^{-9}$	s
Tiempo	$t$	$t$	$t$	s	1	s
Trabajo	$W$	$\frac{ml^2}{t^2}$	$\frac{ml^2}{t^2}$	joule	$10^7$	erg
Velocidad	$\vec{v}$	$\frac{l}{t}$	$\frac{l}{t}$	m/s	$10^2$	cm/s
Viscosidad	$\eta, \mu$	$\frac{m}{lt}$	$\frac{m}{lt}$	kg/m/s	10	poise
Volumen	$V$	$l^3$	$l^3$	m <sup>3</sup>	$10^6$	cm <sup>3</sup>

Tabla C.1



# Apéndice D

---

## D.1. Definiciones químicas

**Número atómico  $Z$ :** número de protones. Ejemplos:  $Z(\text{H}) = 1$ ,  $Z(\text{He}) = 2$ ,  $Z(\text{C}) = 6$ ,  $Z(^{12}\text{C}) = 6$ .

**Número mísico  $A$ :** suma de protones y neutrones. Ejemplos:  $A(^1\text{H}) = 1+0 = 1$ ,  $A(^2\text{H}) = 1+1 = 2$ ,  $A(^3\text{He}) = 2+1 = 3$ ,  $A(^4\text{He}) = 2+2 = 4$ ,  $A(^{12}\text{C}) = 6+6 = 12$ ,  $A(\text{C}) = \text{no existe}$ .

**Masa atómica o peso atómico:** masa promedio de la mezcla natural de isótopos del elemento relativo a 1/12 del peso de un átomo de  $^{12}\text{C}$ . Unidades: u. Ejemplos:  $\text{H} \rightarrow 1,0079\text{u}$ ,  $^2\text{H} \rightarrow 2,0141\text{u}$ ,  $\text{He} \rightarrow 4,0026\text{u}$ ,  $^{12}\text{C} \rightarrow 12\text{u}$ ,  $\text{C} \rightarrow 12,0107\text{u}$ .

**Masa molar  $M$ :** (masa de 1 mol) masa de una sustancia por unidad de cantidad de sustancia [g mol $^{-1}$ ]. Está dado por el peso atómico  $\times$  1g mol $^{-1}$ . Ejemplos:  $M(\text{H}) = 1,0079 \times 1\text{g mol}^{-1}$ ,  $M(\text{H}_2) = 2 \times 1,0079 \times 1\text{g mol}^{-1}$ ,  $M(\text{H}_2\text{O}) = (2,0158 + 15,999) \times 1\text{g mol}^{-1}$ ,  $M(\text{NaCl}) = (22,989 + 35,453) \times 1\text{g mol}^{-1}$ .

**Masa molecular:** (masa de una molécula) coincide con la masa molar pero expresado en u. Ejemplo:  $\text{H}_2\text{O}: (2,0158)\text{H}_2 + (15,999)\text{O} = 2,0158\text{u} + 15,999\text{u}$ .

**Número de Avogadro  $N_A$ :**  $= 6,0221 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Número de partículas en un mol. Ejemplos: 1g de  $^1\text{H}$  tiene  $N_A$  partículas: 1 mol de  $^1\text{H}$  pesa 1g. 12g de  $^{12}\text{C}$  tiene  $N_A$  partículas: 1 mol de  $^{12}\text{C}$  pesa 12g.

## D.2. Gases ideales

**Ley de los gases ideales:**  $pV = nRT = Nk_B T$ .

$n$ : cantidad de moles del gas [mol].

$N$ : número de partículas del gas ( $N = nN_A$ ).

$V$ : volumen que ocupa el gas [cm $^3$ ].

**Presión:**  $p = \frac{\rho RT}{\mu} = \bar{n}k_B T$ .

$m$ : masa del gas [g].

$\rho$ :  $m/V$  densidad de masa del gas [g cm $^{-3}$ ].

$\bar{n}$ : densidad de partículas del gas [cm $^{-3}$ ].

**Masa molar  $\mu$ :** masa del gas/nº de moles =  $m/n$ .

**Volumen específico  $v$ :**  $1/\rho = V/m$ .

**Constante de los gases específica  $R_{esp}$ :**  $R/\mu$  ( $p = \rho R_{esp}T$ ;  $pv = R_{esp}T$ ).

**Volumen molar  $V_\mu$ :**  $\mu/\rho = V/n$  volumen que ocupa 1 mol ( $pV_\mu = RT$ ).

**Capacidad calorífica  $C$ :** cantidad de calor que hay que entregar a toda la masa del gas para elevar su temperatura en una unidad.  $C_p, C_v$ : capacidades caloríficas a presión y volumen constante, respectivamente. ( $C_p - C_v = nR$ ).

**Calor específico  $c = C/m$ :** cantidad de calor que hay que entregar a la unidad de masa de una sustancia para elevar su temperatura en una unidad. Unidades másicas: J/kg/K, unidades molares: J/mol/K.  $c_p, c_v$ : calores específicos a presión y volumen constante, respectivamente. ( $c_p - c_v = R/\mu$ ).  $c_p = \gamma R/(\gamma - 1)/\mu$ ,  $c_v = R/(\gamma - 1)/\mu$ .

## D.2. Gases ideales

---

**Calor específico adimensional  $\hat{c}$ :**  $\hat{c}_v = 3/2$  para un gas monoatómico.  $\hat{c}_v = 5/2$  para un gas diatómico.

**Coeficiente adiabático  $\gamma$ :**  $= C_p/C_v = c_p/c_v = \hat{c}_p/\hat{c}_v$ .

**Ejemplos de cálculo de masa molar:**  $\mu = \bar{\mu} m_p N_A$ ,  $\bar{\mu}$  = masa del núcleo/nº de partículas/ $m_p$ .

- Hidrógeno neutro: masa del núcleo = 1 protón =  $1m_p$ . nº de partículas: átomo de H = 1 →  $\bar{\mu} = 1$ .
- Hidrógeno totalmente ionizado: masa del núcleo = 1 protón =  $1m_p$ . nº de partículas: 1 núcleo + electrón = 2 →  $\bar{\mu} = 1/2$ .
- Helio totalmente ionizado: masa del núcleo = 2 protones + 2 neutrones =  $4m_p$ . nº de partículas: 1 núcleo + 2 electrones = 3 →  $\bar{\mu} = 4/3$ .
- Plasma coronal (90 % H + 10 % He = 9H + 1He): masa del núcleo = (9 protones)<sub>H</sub> + (2 protones + 2 neutrones)<sub>He</sub> =  $13m_p$ . nº de partículas: (9 núcleos + 9 electrones)<sub>H</sub> + (1 núcleo + 2 electrones)<sub>He</sub> = 21 →  $\bar{\mu} = 0,619$ .

---

## Bibliografía

---

- [1] Aschwanden, M., *Physics of solar corona: An introduction*, Praxis Publishing Chichester, UK, 2004.
- [2] Baumjohann, W. and Treumann, R., *Basic space plasma physics*, Imperial College Press, London, 2004.
- [3] Bellan, P., *Fundamental of plasma physics*, Cambridge University Press, 2006.
- [4] Biskamp, D., *Nonlinear magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, 1993.
- [5] Biskamp, D., *Magnetic reconnection in plasmas*, Cambridge University Press, 2000.
- [6] Chen, F.F., *Introduction to plasma physics*, Plenum Press (NY), 1974.
- [7] Choudhuri, A., *The physics of fluids and plasmas: An introduction for astrophysicists*, Cambridge University Press, 2004.
- [8] Dendy, R., *Plasma physics: An introductory course*, Cambridge University Press, 1999.
- [9] Freidberg, J.P., *Ideal magnetohydrodynamics*, Plenum Press (NY), 1987.
- [10] Golub, L. and Pasachoff, J.M., *The solar corona*, Cambridge University Press, 1997.
- [11] Goedbloed, J.P and Poedts, S., *Principles of magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2004.

## Bibliografía

---

- [12] Goedbloed, J.P., Keppens R. and Poedts, S., *Advanced magnetohydrodynamics with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. Cambridge University Press, 2010.
- [13] Kivelson, M. and Russel C., *Introduction to space physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [14] Kulsrud, R., *Plasma physics for astrophysics*. Princeton University Press, 2005.
- [15] Nakariakov V., Verwichte E., *Coronal Waves and Oscillations*, Living Review in Solar Physics, (url: <http://www.livingreviews.org/lrsp-2005-3>), 2005.
- [16] Priest, E.R., *Solar magnetohydrodynamics*, D. Reidel Publ. Co., 1982.
- [17] Priest, E.R. and Forbes, T. *Magnetic reconnection: MHD theory and applications*, Cambridge University Press, 1999.
- [18] Schwartz, S., Owen, C., Burgess, D., *Astrophysical Plasmas*, London University of London, 2004.



