

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS Y**  
**COMPUTACIÓN**



**PROYECTO A**  
**ISIS 3302 – MODELACIÓN, SIMULADO Y OPTIMIZACIÓN**

Laura Sofia Murcia Carreño 202123099  
María Alejandra Angulo Mejía 202121458  
Samuel Ramírez 202123423

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Formulación Matemática</b>	<b>2</b>
2.1. Conjuntos . . . . .	2
2.2. Índices . . . . .	2
2.3. Parámetros . . . . .	2
2.4. Variables de Decisión . . . . .	3
2.5. Función Objetivo . . . . .	3
2.6. Restricciones . . . . .	3
<b>3. Función Objetivo</b>	<b>5</b>
<b>4. Preprocesamiento de Datos</b>	<b>5</b>
4.1. Distancia $d_{ij}$ . . . . .	6
4.2. Tiempo entre nodos $t_{ij}$ . . . . .	6
4.3. Tiempo de entrega entre distribuidor y cliente $S_i$ . . . . .	8
4.4. Consumo de gasolina en litros por km $G_v$ . . . . .	8
4.5. Costo de operación $c_{ij}$ . . . . .	8
4.6. Ejemplo de cálculo de datos . . . . .	8
<b>5. Ejemplos</b>	<b>9</b>

## 1. Introducción

En esta ocasión se resuelve el problema de A, Optimización en la Planeación de Transporte Vehicular Urbana Para LogistiCo. Se diseccionará el problema para saber que pasos se deben seguir para optimizar las rutas de distribución.

En primer lugar, al hacer una buena investigación de este tipo de problemas, se concluye que es un problema de VRP (Vehicle Routing Problem) cuyo objetivo es “encontrar rutas óptimas para que varios vehículos visiten un conjunto de ubicaciones.” [1]. Este establece que se busca minimizar la longitud de la ruta única más larga entre todos los vehículos.

## 2. Formulación Matemática

### 2.1. Conjuntos

- $CD = \{CD1, CD2, CD3\}$  que corresponden a los Centro de distribución
- $C = \{C1, C2, C3\}$  que corresponde a los clientes (denominados por clientes por facilidad del ejemplo, en la cotidianidad es la zona entrega)
- $A = \{(i, j)\} \quad i, j \in CD \cup C$  que simbolizan los arcos del grafo de recorrido CD a C
- $V = \{V1, V2, V3\}$  que corresponde a los vehículos con los que cuenta la empresa.
- $N = CD \cup C$  Para facilidad de notación de los conjuntos posibles de (i,j)

### 2.2. Índices

- $i, j \in N$  que simbolizan las ubicaciones por las que se tienen que mover, donde  $i$  es el nodo de inicio y  $j$  es el nodo destino
- $v \in V$  que simboliza el vehículo disponible de la flota de distribución.
- $c \in C$  que representa cada cliente del problema
- $d \in CD$  que representa cada centro de distribución

### 2.3. Parámetros

- $d_{ij}$  Que determina la distancia entre nodos  $i, j$
- $t_{ij}$  Determina el tiempo de viaje entre los nodos  $i, j$
- $D_i$  Simboliza la demanda del cliente
- $K_d$  Simboliza la capacidad de cada centro de distribución
- $Q_v$  Simboliza la capacidad del vehículo
- $R_v$  Simboliza el Rango útil del vehículo
- $P_f$  Simboliza el precio de combustible por litro
- $G_v$  Simboliza el consumo de gasolina en litros por km
- $F_t$  Simboliza la tarifa del flete por km
- $C_m$  Simboliza el costo de mantenimiento por km
- $S_i$  Simboliza el tiempo de entrega (cuanto tiempo se demora el distribuidor con el cliente)
- $c_{ij}$  Costo de operación de punto  $i$  a punto  $j$  que se compondrá de los datos anteriores.  $c_{ij} = d_{ij} \cdot (G_v P_f + F_t + C_m)$

## 2.4. Variables de Decisión

Este es un problema mixto, que cuenta con variables binarias y variables racionales

- $x_{ijv} \in \{0, 1\}$  Donde es 1 si el vehículo  $v$  viaja del punto  $i$  al punto  $j$ , y 0 de lo contrario
- $t_{iv} \in \mathbb{Q}$  Que indica el tiempo en el que el vehículo  $v$  atiende a atender al cliente  $i$
- $y_{iv} \in \{0, 1\}$  Es 1 si el cliente  $i$  es atendido por el vehículo  $v$ , 0 en caso de lo contrario.
- $z_{id} \in \{0, 1\}$  Es 1 si el cliente  $i$  es suplido por el centro de distribución  $d$ , y 0 en caso contrario.
- $u_{vi} \in \{1, N-1\} \in \mathbb{Z}^+$  Esta es la variable auxiliar que se utiliza para la restricción de los subtoures MTZ para cada vehículo  $v$ .
- $r_{vd} \in \{0, 1\}$  es 1 si el vehículo  $v$  sale del depósito  $d$ . De lo contrario es 0

## 2.5. Función Objetivo

La discusión se puede encontrar en la sección 3, sin embargo se define la función objetivo como

$$\min \sum_{v \in V} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijv} \quad (1)$$

Que busca calcular los costos mínimos con  $c_{ij}$  y evaluar si un vehículo específico hace la ruta  $(i, j)$  con  $x_{ijv}$ .

## 2.6. Restricciones

**Cada cliente es atendido una vez**

$$\sum_{v \in V} \sum_{j \in N} x_{ijv} = 1 \quad \forall i \in C \quad (2)$$

Evalúa que no haya más de un vehículo asignado para cada cliente, con el propósito de no desperdiciar recursos

**Flujo de vehículos**

$$\sum_{j \in C} x_{ijv} - \sum_{j \in C} x_{jiv} = 0 \quad \forall i \in C, v \in V \quad (3)$$

Evalúa que si un vehículo entrega a un cliente, debe de salir de ahí. No se incluyen los centros de distribución dentro de la restricción del flujo debido a que como estos nodos sirven como origen y destino, no se conserva el flujo.

**Restricción de capacidad**

$$\sum_{i \in C} D_i y_{iv} \leq Q_v \quad \forall v \in V \quad (4)$$

Garantiza que la suma de la demanda de los clientes atendidos por un vehículo específico  $v$ , no superen la capacidad máxima del vehículo

**Restricción de capacidad en Bodegas**

$$\sum_{i \in C} D_i z_{id} \leq K_d \quad \forall d \in CD \quad (5)$$

Garantiza que la suma de la demanda de los clientes suplidos por un centro de distribución  $d$ , no supere la capacidad máxima de almacenamiento del centro de distribución. Se usó la referencia como inspiración, ya que esta usa la suma de la demanda los clientes que están en la ruta iniciada en el depósito. [2]

**Ventanas de tiempo**

$$8 : 00 \leq t_{iv} \leq 17 : 00 \quad (6)$$

Sin embargo la planteamos en minutos para que sea más fácil de modelar

$$480 \leq t_{iv} \leq 1020 \quad (7)$$

Garantiza que el cliente es atendido en una ventana de tiempo de una jornada laboral (8:00am a 5:00pm)

**Tiempo de llegada**

$$t_{jv} \geq t_{iv} + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ijv}) \quad \forall (i, j) \in A, v \in V \quad (8)$$

Define que el tiempo en que el vehículo llega a un nodo  $j$  debe ser al menos el tiempo de llegada al nodo  $i$ , más el tiempo de servicio  $S_i$  en  $i$ , más el tiempo de viaje  $t_{ij}$ . Big M se utiliza para garantizar que el vehículo termine con el cliente anterior antes de seguir con el siguiente.

**Restricción de autonomía de los vehículos**

$$\sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ijv} \leq R_v \quad \forall v \in V \quad (9)$$

Garantiza que la distancia total recorrida por un vehículo  $v$  no supere su rango máximo de operación  $R_v$ .

**Restricción de subtoures**

$$u_{v,i} - u_{v,k} + (n) * x_{i,j,v} \leq n - 1, \quad \forall i, j \in N, \forall v \in V | i \neq j \quad \& \quad i, j \neq 1 \quad (10)$$

Esta restricción evita que se generen subtoures dentro del recorrido. Esto ayuda a garantizar el correcto funcionamiento del modelo. Para este caso, se implementa con la formulación MTZ.

**Restricción condiciones de inicio**

$$\sum_{d \in CD} \sum_{c \in C} x_{dcv} = 1 \quad \forall v \in V \quad (11)$$

Permite que los vehículos salgan únicamente de centros de distribución.

**Restricción condiciones de final**

$$\sum_{c \in C} \sum_{d \in CD} x_{cdv} = 1 \quad \forall v \in V \quad (12)$$

Permite que los vehículos terminen su recorrido en algún centro de distribución.

**Activación de variables**

$$\sum_{j \in N} x_{djv} = r_{vd} \quad \forall v \in V \quad \forall d \in D \quad (13)$$

Esta primera restricción me indica que si un vehículo sale una única vez de un centro de distribución, la variable  $r$  se activa con un valor igual a uno. Ya que como solo sale una vez, solo un término de esa sumatoria se activa. Esto para todos los vehículos y todos los centros de distribución.

$$\sum_{j \in N} x_{cjd} = y_{cv} \quad \forall c \in C \quad \forall v \in V \quad (14)$$

Esta segunda restricción me indica que si un único arco de salida del nodo cliente  $c$  se activa con un vehículo  $v$  la variable  $y$  se activa con valor a uno. y es igual a la sumatoria de los arcos de salida. Ya que solo puede haber uno.

$$y_{cv} \geq r_{vd} \leq z_{cd} \quad \forall c \in C \quad \forall v \in V \quad \forall d \in D \quad (15)$$

Esta última restricción de salida me indica que si la variable  $r$  se activa. Todos los clientes  $c$  que hayan sido atendidos por el vehículo  $v$  que proviene del centro de distribución  $d$ , han sido abastecidos por el centro de distribución  $d$ .

### 3. Función Objetivo

Como fue planteada anteriormente, se plantea la función objetivo como la ecuación 1. Esta es un resultado de la consulta de diferentes fuentes. Como se estableció en la introducción, este es un problema VRP. Frente a esta información se empieza una indagación de diferentes problemas VRP.

La primera búsqueda, llevó al artículo *VEHICLE ROUTING PROBLEM: MODELS AND SOLUTIONS*. Un artículo en la revista *Journal of Quality Measurement and Analysis*, que describe distintos tipos de problemas que puede tener VRP, con el planteamiento matemático que proponen Yeun, Ismail, Omar y Zirour. En este artículo se conoce el tipo de problema que deseamos resolver, que es el VRPTW, que es el mismo VRP ya descrito, en una ventana de tiempo [3]. Sin embargo, lo que proponen es que la función objetivo sea:

$$\min \sum_{r \in K} \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ijr} \quad (16)$$

Esta función objetivo propone una primera función objetivo, sin embargo, este ejercicio busca optimizar distancia sobre una ruta, diferente al caso de estudio de esta ocasión, que busca optimizar los costos de distribución. Este artículo permite evaluar ciertas restricciones para entender cómo restringir el problema a tiempo. Asimismo, el mismo artículo de Yeun, discute el CVRP, que es otra variación del VRP pero considerando capacidad. Con este nuevo detalle, proseguimos a buscar documentación tanto de VRPTW como de CVRP que ayuden a construir mejor la función objetivo.

Al consultar de CVRP, se trabajó sobre el artículo *A generalized formulation for vehicle routing problems* [4], donde la función objetivo propuesta es:

$$\min \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \quad (17)$$

Esta es una función objetivo que busca optimizar costos. Asimismo, el mismo artículo habla de restricciones de capacidad, lo que ayudó a que se entendieran mejor las restricciones relacionadas con espacio. Asimismo, permite ver la manera de manejar este caso con relación a costos y variables de decisión binarias.

Finalmente, al revisar literatura más clásica, se encontró el libro *Column Generation*, cuyo capítulo 3 es *VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS* [5]. En este libro, Kallehauge et al. modelan la función objetivo como:

$$\min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ijk} \quad (18)$$

Esta ya era una función objetivo que era coherente con los parámetros y variables que se habían planteado con anterioridad. Los cambios que se realizaron fueron reducir una sumatoria, ya que se ponía en términos de los diferentes conjuntos de (i,j) que se tienen, según los clientes y los centros de distribución. Asimismo, se modificó el índice de  $k$  por  $V$ , ya que ese es el que se estableció para decidir sobre el vehículo de la flota.

Es toda esta investigación de la literatura la que llevó a la definición de la función objetivo 1 del modelo matemático.

### 4. Preprocesamiento de Datos

Ya que se ha abordado como se va a modelar el problema, se entra a describir la forma en la que manejan los datos y su preprocesamiento. Esto debido a que se deben ajustar los valores que se tienen para que sean coherentes con las restricciones y la función objetivo planteada. Para esto, es necesario detallar los parámetros que se tienen dentro del problema. A continuación se listan los datos disponibles.

- Latitud de centros de distribución y clientes
- Longitud de centros de distribución y clientes
- Capacidad de centros de distribución en kilogramos (valor no siempre incluido)

- Demanda del cliente en kilogramos
- Capacidad útil del vehículo en kilogramos
- Rango útil del vehículo en kilómetros
- Precio del combustible por litro
- Tarifa de flete por kilómetro
- Costo de mantenimiento del vehículo por kilómetro

Ya que se tiene clara la información con la que se cuenta, se puede notar que no se tiene de forma directa los valores de la distancia  $d_{ij}$ , el tiempo de viaje entre nodos  $t_{ij}$ , el tiempo de entrega ente distribuidor y cliente  $S_i$ , el consumo de gasolina por km  $G_v$ , y el costo de operación  $c_{ij}$ .

El proceso para determinar el valor de cada parámetros a partir de los datos brindados como base se detalla a continuación.

#### 4.1. Distancia $d_{ij}$

En primer lugar, se empieza por hacer el cálculo de la distancia entre nodos. La distancia entre nodos se deriva del uso de la longitud y latitud. Para lograr el cálculo de distancia se utiliza la API Routes de Google. Esta API esta diseñada para encontrar rutas entre 2 puntos. Su uso permite obtener un tiempo estimado de llegada (ETA) y calcula la distancia de una ruta a partir de su punto de origen y destino [6].

En particular, la selección de esta API es clave ya que permite ingresar datos de longitud y latitud, lo que permite aplicarlo en el problema actual. Además, se puede configurar para obtener la distancia de ruta para un vehículo, lo que es necesario para el contexto del proyecto.

#### 4.2. Tiempo entre nodos $t_{ij}$

Para el tiempo entre nodos, el proceso de preprocesamiento que se va a utilizar nuevamente hace uso de la API Routes de Google. Esto debido a que dentro de esta se puede obtener el tiempo que toma una ruta. Además, es posible generar rutas basadas en tráfico, lo que permite generar datos adecuados para el proyecto.

Debido a que se usa la API de Google tanto para la distancia como para el tiempo, dentro de las figuras 1 y 2 se puede ver la forma de los datos de entrada y la respuesta de esta API. Esta respuesta fue generada haciendo uso del demo proporcionado dentro de la documentación de Google. Como se puede ver, esta API permite el uso de coordenadas y genera una ruta adecuada que incluye datos de distancia y duración.

The image shows a web form titled "Input locations" for the Google Routes API. It contains two main sections for "Origin" and "Destination". Each section has a text input field for coordinates, a "Heading" input field, and two checkboxes labeled "Stopover" and "Side of Road".

Input locations	
Origin*	Heading
4.7110, -74.0721	
<input type="checkbox"/> Stopover <input type="checkbox"/> Side of Road	
<hr/>	
Destination*	Heading
4.6050, -74.0835	
<input type="checkbox"/> Stopover <input type="checkbox"/> Side of Road	

Figura 1: Datos principales de entrada Routes API

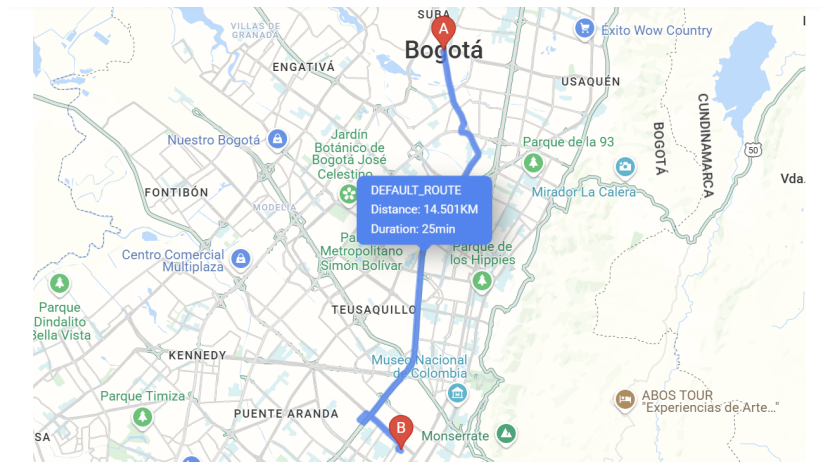


Figura 2: Resultados con Route API

Al momento de implementar la API, esto se realiza con la generación de una API Key con la cual se pueden generar solicitudes de POST de forma rápida y detallada para cada búsqueda. Dentro de 1 se puede ver el formato general de la petición POST que se debe generar a la API. En esta se especifica el origen y el destino a partir de su latitud y longitud y se pueden configurar parámetros como el modo de viaje, si se desea analizar el tráfico, y demás [6].

```

1 curl -X POST -d '{
2   "origin":{
3     "location":{
4       "latLng":{
5         "latitude": 37.419734,
6         "longitude": -122.0827784
7       }
8     }
9   },
10  "destination":{
11    "location":{
12      "latLng":{
13        "latitude": 37.417670,
14        "longitude": -122.079595
15      }
16    }
17  },
18  "travelMode": "DRIVE",
19  "routingPreference": "TRAFFIC_AWARE",
20  "computeAlternativeRoutes": false,
21  "routeModifiers": {
22    "avoidTolls": false,
23    "avoidHighways": false,
24    "avoidFerries": false
25  },
26  "languageCode": "en-US",
27  "units": "IMPERIAL"
28 }' \
29 -H 'Content-Type: application/json' -H 'X-Goog-API-Key: YOUR_API_KEY' \
30 -H 'X-Goog-FieldMask: routes.duration,routes.distanceMeters,routes.polyline.
    encodedPolyline' \
31 'https://routes.googleapis.com/directions/v2:computeRoutes'
```

Listing 1: Petición POST a Routes API



### 4.3. Tiempo de entrega entre distribuidor y cliente $S_i$

Este tiempo se refiere al tiempo que el distribuidor toma en poder descargar y entregar todo el pedido. Como este dato no es proporcionado, se debe determinar de forma coherente con el modelo. Este dato se va a manejar como un parámetro que depende exclusivamente del tamaño del pedido. La abstracción que se hace parte de que si se tiene un pedido de una única unidad su entrega es mucho más corta que un pedido de 20 unidades. Por lo que el incluir este dato como parámetro permite un modelo más completo que puede ser más realista.

Dado que no se tienen datos para lograr calcular de forma fiable este tiempo, se parte de asumir que el vehículo llega exactamente al punto de descarga y entrega y que no hay demoras ajenas presentes. Ya que es difícil estimar este dato, se va a asumir que el tiempo de entrega de un paquete de 1 kg es de 30 segundos. Con esto, se presenta la siguiente fórmula:

$$S_i = 0,5D_i$$

En donde,  $S_i$  se presenta en unidades de minutos y  $D_i$  hace referencia a la demanda en kilogramos del cliente.

### 4.4. Consumo de gasolina en litros por km $G_v$

El consumo de combustible depende de datos que se desconocen como tipo de vehículo, estado, eficiencia, condición de la vía, carga, y demás. Sin embargo, para que los datos correspondan se va a hacer una estimación de cuantos km se pueden recorrer por litro de combustible. Para esto, se va a definir la clasificación del vehículo a partir de su carga máxima, asumiendo que se dispone únicamente de camiones de 2 ejes. Dentro de la tabla 1 se encuentra el nombre de la clasificación que se va a manejar, la capacidad máxima que soporta y el consumo de combustible para recorridos urbanos. Estos datos se simulaban usando la herramienta para cálculos de SICE-TAC (Sistema de Información de Costos Eficientes para el Transporte Automotor de Carga) del Ministerio de Transporte [7]. Los datos que se entregan en esta página tienen unidades de Km/gln, como se requiere que estos datos estén en litros/Km, se realizó la conversión correspondiente.

Clasificación	Capacidad máxima (Kg)	Consumo (Km/gln)	Consumo (L/Km)
Tipo 1	7500-8000	9.2	0.411458
Tipo 2	8001-9000	8.7	0.435105
Tipo 3	9001-10500	8	0.473176
Tipo 4	+10500	7.81	0.484688

Clasificación de Camiones

### 4.5. Costo de operación $c_{ij}$

Finalmente, el costo de operación se estima de la formula  $c_{ij} = d_{ij} \cdot (G_v P_f + F_t + C_m)$ . En el cálculo del costo se incluyen los resultados de la distancia multiplicado por el precio por km de cada uno de los costos asociados.

### 4.6. Ejemplo de cálculo de datos

Para concluir el preprocesamiento de los datos, se presenta un breve ejemplo de como se generarían los datos del proyecto. Para esto, se va a modelar el camino entre el origen de la Bodega Norte (CD1) al Cliente C1 con el vehículo V1 con capacidad útil de 100 unidades y rango útil de 120 Km. Para esto, se presentan los datos dentro de las tabla 2 se encuentran los datos de origen y destino.

ID	Latitud	Longitud	Capacidad (Kg)	Demanda (Kg)
CD1 Bodega	4.711	-74.0721	20000	-
C1 Catalina	4.6486	-74.0608	-	50

Datos de origen y destino

En primer lugar, se calcula la distancia y el tiempo con la API, la respuesta de la petición se puede ver dentro de la figura 3.

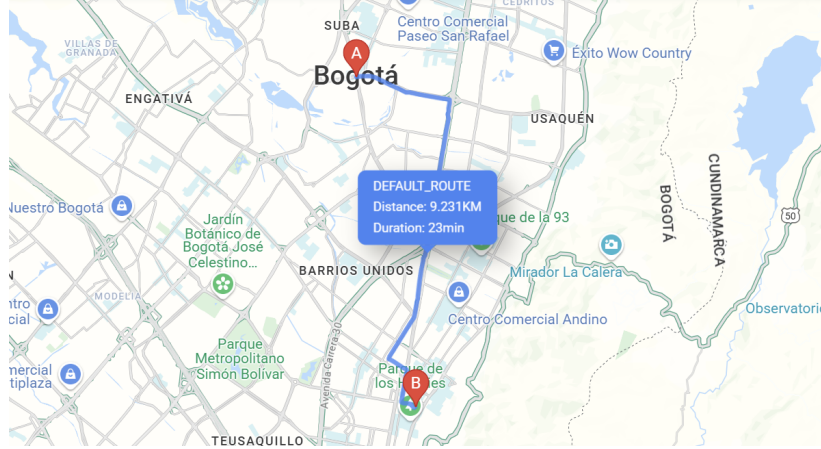


Figura 3: Resultados de ejemplo de costo

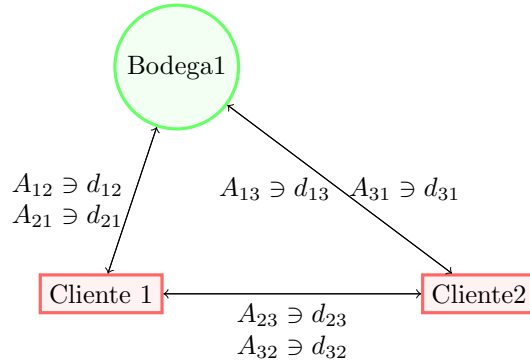
Acto seguido, se aplica la fórmula determinada para calcular el valor de  $S_i$ . Para el valor de  $G_v$  se parte de definir que según la capacidad del vehículo V1, este es de tipo 1 con lo que se tiene automáticamente el valor que se debe usar. Al tener toda la información lista, se puede calcular el costo. Todos los valores se detallan dentro de la tabla 3.

Distancia (Km)	Tiempo (min)	$S_i$ (min)	$G_v$ (L/Km)	$P_f$ (COP/L)	$F_t$ (COP/Km)	$C_m$ (COP/Km)	Costo (COP)
9.231	23	25	0.411458	\$ 15,000	\$ 5,000	\$ 700	\$ 109,589.23

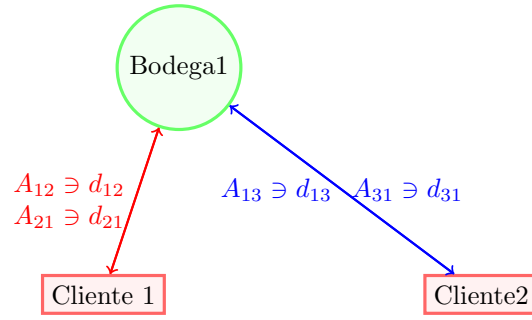
Ejemplo de cálculo de parámetros

## 5. Ejemplos

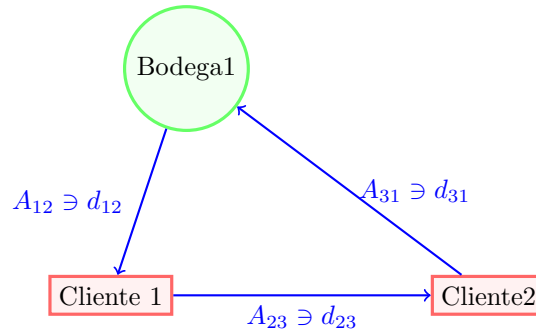
Una manera de ilustrar nuestro problema en un ejemplo muy básico con 3 nodos (una bodega y dos clientes) es el siguiente.



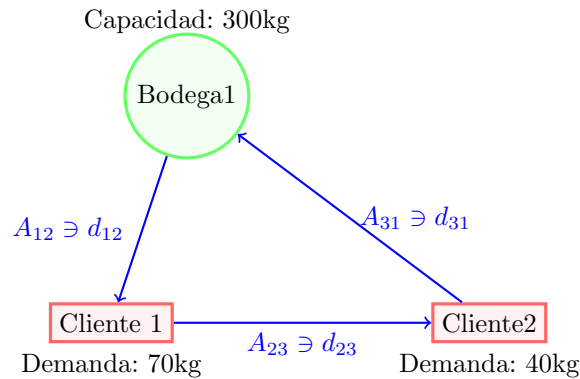
Vemos que este es un grafo dirigido. Ya que en el método de cálculo de nuestras distancias el arco  $A_{ij}$  no es el mismo arco ni tiene la misma distancia que el arco  $A_{ji}$ . Por ende, no van a tener el mismo costo si se recorren con el mismo camión. Ahora, este no es un problema de minimizar distancia. Ya que como los camiones consumen diferente cantidad de gasolina, puede darse la situación en la que se recorra una mayor cantidad de distancia total. Pero la distribución de camiones resulte en un menor costo. Volviendo al ejemplo. Supongamos que la mínima distancia para el problema es sacar dos camiones con consumos a y b. Cada uno realiza el viaje hacia un cliente y vuelve a la bodega.



Resulta que el camión rojo consume muchísima más gasolina que el camión azul. Por ende, en términos de costo de gasolina, es mucho más óptimo que el camión azul realice todo el recorrido cíclico (asumiendo que todas las restricciones se cumplen para que el caso sea factible). Y esta diferencia de costo de gasolina es mayor que la diferencia de costo en mantenimiento y costo de flete al aumentar la distancia.



Ahora vamos con el mismo grafo a ejemplificar una solución no válida para nuestro modelo. Del grafo anterior vamos a establecer como parámetro que el camión azul tiene una capacidad de 100kg, el camión rojo una capacidad de 150kg y la demanda de los clientes es 70kg respectivamente y 40kg. La capacidad de la bodega es de 300kg.



En este caso este recorrido no es posible ya que la restricción de capacidad dada por la ecuación 3 no permite esta solución, ya que la demanda excede la capacidad del camión azul en el ejemplo planteado. Por ende se debe buscar otra solución.<sup>4</sup>

## Referencias

- [1] Google Developers, “Vehicle Routing Problem (VRP) - Google OR-Tools,” 2024, accessed: Mar. 24, 2025, Última actualización: 2024-08-08 (UTC). [Online]. Available: <https://developers.google.com/optimization/routing/vrp?hl=es-419>

- [2] Camilo José García Vasequez, “Algoritmo hibrido para solucionar el problema de ubicación de bodegas y despacho de materiales de construcción,” Master’s thesis, Facultad de ingenieria Universidad de los Andes , 2025, Accessed Mar. 27, 2025. [Online]. Available: <https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/3dd628c2-d8a4-4222-adfa-088c42819661/content>
- [3] L. C. Yeun, W. R. Ismail, K. Omar, and M. Zirour, “Vehicle routing problem: Models and solutions,” *Journal of Quality Measurement and Analysis*, vol. 4, no. 1, pp. 205–218, 2008, accessed: Mar. 24, 2025. [Online]. Available: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=7a706062c19983e41ddce8bcd6102da0cce40a1e>
- [4] P. Munari, T. Dollevoet, and R. Spliet, “A generalized formulation for vehicle routing problems,” *Working paper*, September 2017, Available at Federal University of São Carlos and Erasmus University Rotterdam. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/1606.01935>
- [5] B. Kallehauge, J. Larsen, O. B. Madsen, and M. M. Solomon, “Column Generation,” in *Vehicle Routing Problem with Time Windows*. Springer, 2005, Accessed: Mar. 25, 2025. [Online]. Available: <http://alvarestech.com/temp/vrptw/Vehicle%20Routing%20Problem%20with%20Time%20Windows.pdf>
- [6] Google Developers, “Routes API,” 2025, Accessed: Mar. 27, 2025, Última actualización: 2025-02-06 (UTC). [Online]. Available: <https://developers.google.com/maps/documentation/routes?hl=es-419#atributos>
- [7] Ministerio de Transporte, “SICE-TAC 2.0 - Cálculo interactivo,” 2025, Accessed: Mar. 27, 2025, Última actualización: 2025-03-27. [Online]. Available: <https://plc.mintransporte.gov.co/Runtime/empresa/ctl/SiceTAC/mid/417>