Logica en de Linguistic Turn 2013

Relaties en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

October 10, 2013

Plan voor vandaag

1. Relaties (als verzamelingen van lijsten)
2. Een logisch puzzel en andere opgaven
3. Tractatus: ontologie (1-2.063)

Huiswerk:

- Syllabus tot 2.4.5, opgaven 18-21. Extra opgave PL, deel 3 (stellingen 6-8)
- Tractatus: 2.1–3.05 (beeldtheorie)
- HWO1: deadline morgen, 23.59uur!

Verzamelingen vs. lijsten

- Verzamelingen: volgorde elementen niet relevant
  - $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$
- Lijsten: volgorde wel relevant
  - $\langle a, b, c\rangle \neq \langle b, c, a\rangle$

  In een lijst komt ieder element op een specifiek plaats in de lijst, als het eerste, tweede, . . . element van de lijst.
- Lijst a is identiek met lijst b, $a = b$ als
  - de lijsten hetzelfde aantal elementen hebben
  - de elementen die op dezelfde plaats in de lijst staan identiek zijn.
- Voorbeelden: $\langle a, b\rangle \neq \langle a, b, c\rangle$, $\langle a\rangle \neq \langle a, a\rangle$, $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$
- Terminologie:
  - Lijsten van 2 elementen $\mapsto$ paren
  - Lijsten van 3 elementen $\mapsto$ triples
  - Lijsten van n elementen $\mapsto$ n-tuples

Cartesisch Product: paren

- Gegeven twee verzamelingen A en B kunnen wij een paar vormen door als eerste element van de lijst een element uit A en als tweede element een element uit B te kiezen.
- De verzameling van alle paren die op deze manier gevormd kunnen worden wordt het Cartesisch Product, $A \times B$, van de verzamelingen A en B genoemd:

(1) $$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \textit{ en } y \in B\}$$

Voorbeeld: $\{p, q\} \times \{0, 1\} = \{\langle p, 0\rangle, \langle p, 1\rangle, \langle q, 0\rangle, \langle q, 1\rangle\}$

- Andere voorbeelden: Stel $K = \{a, b, c\}$ en $L = \{1, 2\}$

(2) $$\begin{aligned} K \times L &= \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\} \\ L \times K &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle\} \\ L \times L &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\} \end{aligned}$$

Cartesisch Product: n-tuples

- Het Cartesisch Product van n verzamelingen $A_1, A_2, ..., A_n$ kan gedefiniëerd worden als volgt:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \mid \quad x_1 \in A_1 \textit{ en } x_2 \in A_2 \textit{ en } ... \textit{ en } x_n \in A_n\}$$

- Notatie:

(3) Getallen

a. $2 \times 2 = 2^2$ [2 keer]
b. $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ [3 keer]
c. $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ [n keer]

(4) Verzamelingen

a. $A \times A = A^2$ [verzameling van paren uit A]
b. $A \times A \times A = A^3$ [verzameling van triples uit A]
c. $A \times A \times \cdots \times A = A^n$ [verzameling van n-tuples uit A]

Opgave

Zijn $X = \{z, y\}$ en $Y = \{0, 1\}$. Specificeer de volgende verzamelingen door hun elementen op te noemen:

(5) a. $X \times Y$
b. $Y \times X$
c. $Y \times Y \quad [= Y^2]$
d. $Y \times Y \times Y \quad [= Y^3]$
e. $Y \times X \times Y$

Relaties

- Voorbeelden van binaire relaties:
  - hoofdstad van: relatie tussen steden en landen
  - broer van: relatie tussen mensen
  - deelverzameling, $\subseteq$: relatie tussen verzamelingen
  - element van, $\in$: relatie tussen objecten en verzamelingen
- Binaire relaties formeel gedefinieerd als verzamelingen van paren
- R is een **binaire relatie** tussen de verzamelingen A en B als R een deelverzameling is van het Cartesisch product van A en B: $R \subseteq A \times B$.
- Voorbeeld: H: hoofdstad van; S: verzameling van steden; L: verzameling van landen
  - $H = \{\langle \text{Rome, Italïe} \rangle, \langle \text{Berlijn, Duitsland} \rangle, \ldots\} \subseteq S \times L$
- In het algemeen is R een **n-aire relatie** tussen verzamelingen $A_1, A_2, ..., A_n$, als R een deelverzameling is van het Cartesisch product van $A_1, A_2, ..., A_n$: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Opgave

Stel $X = \{0, 1\}$. Hoeveel verschillende relaties zijn er over X? 16

Eigenschappen van relaties: Reflexiviteit

- Reflexiviteit is een eigenschap die een binair relatie over A heeft als de relatie ieder object a van A verbindt met a zelf.

(6) Voor alle $a \in A$ geldt $\langle a, a \rangle \in R$

- Voorbeelden: identiteit, *minstens zo groot als* over de verzameling mensen, logische equivalentie over de verzameling formules van PL
- R is **niet reflexief**, als er minstens één element van A is waarvoor niet geldt $\langle a, a \rangle \in R$
- Voorbeelden: *leuk vinden* over de verzameling mensen
- R is **irreflexief**, als voor alle $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$
- Voorbeelden: *groter zijn dan* over de verzameling mensen
- Opgave: geef een voorbeeld van een relatie over $\{a, b, c\}$ die reflexief is, een die irreflexief is, en een die geen van beide is.

Eigenschappen van relaties: Symmetrie

- Een relatie R heet **symmetrisch** als voor alle $a, b \in A$ geldt: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.
- Voorbeeld: 'broer van' over de verzameling mannen, maar niet over verzameling mensen (Vraag: waarom niet?)
- R is **asymmetrisch** als voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$.
- Voorbeeld: 'moeder van' over de verzameling mensen
- R is **antisymmetrische** als voor alle $a, b \in A$ geldt: als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, a \rangle \in R$, dan $a = b$.
- Voorbeeld: deelverzameling relatie, $\subseteq$, over verzameling verzamelingen
- Opgave: zijn de volgende relaties symmetrisch, asymmetrisch of antisymmetrisch? $\emptyset$, $\{\langle a, a \rangle\}$, $\{\langle a, b \rangle\}$, $\{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$, $\{\langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle\}$

Eigenschappen van relaties: Transitiviteit

- Een relatie heet transitief als geldt dat als er een pijl loopt van punt 1 naar punt 2 en er een pijl loopt van punt 2 naar punt 3, dan moet er ook een directe pijl zijn van punt 1 naar punt 3.

  (7) voor alle $a, b, c \in A$, als $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, c\rangle \in R$, dan geldt ook $\langle a, c\rangle \in R$.

  Informeel: Alles wat in 2 stappen bereikt kan worden, kan ook in 1 stap bereikt worden.
- Voorbeelden:
  - 'groter dan' over de verzameling mensen is transitief: als Maria groter is dan Paul en Paul is groter dan Kim, dan is Maria ook groter dan Kim.
  - 'opvolger van' over de verzameling natuurlijke getallen is **niet** transitief: 3 is de opvolger van 2, en 2 is de opvolger van 1, maar 3 is niet de opvolger van 1.

Eigenschappen van relaties: Equivalentierelatie

- Een equivalentierelatie is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is.
- Voorbeelden (wel of niet equivalentierelatie?)

(8)
a. 'even groot als' over de verzameling natuurlijke getallen — wel
b. 'tweelingbroer van' over verzameling van mensen — niet (niet reflexief)
c. logische equivalentie ('$\Leftrightarrow$') over de verzameling van formules in propositielogica — wel
d. 'dezelfde leeftijd hebben als' over de verzameling mensen — wel
e. 'vader van' over verzameling van mensen — niet (niet symmetrisch)
f. 'iets gemeenschappelijk hebben met' over verzameling van mensen — niet (niet transitief)

Eigenschappen van relaties: Samenhang

- R over de verzameling A is samenhangend als voor alle elementen a en b van A geldt: of de relatie verbindt a met b, of de relatie verbindt b met a of a en b zijn identiek.

(9) voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R$ of $\langle b, a \rangle \in R$ of $a = b$

- Voorbeelden: 'kleiner dan' over de verzameling natuurlijke getallen, maar niet over de verzameling mensen

Opgave

Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $A = \{a, b, c, d\}$.

(10) $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, a\rangle\}$

Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitief en/of samenhangend is.

Operaties op relaties

- Compositie: Als R en S relaties zijn over een verzameling A, dan is $R \circ S$, de compositie van R en S, de (kleinste) relatie T over A zodanig dat als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, c \rangle \in S$, dan $\langle a, c \rangle \in T$.

$$R \circ S = \{\langle a, c \rangle \mid er\ is\ een\ b\ met\ \langle a, b \rangle \in R\ en\ \langle b, c \rangle \in S\}$$

- Voorbeeld: de compositie van de relatie *kind van* met de relatie *kind van* geeft de relatie *kleinkind van*
- Inverse: Als R een relatie is over A, dan is R^i, de inverse van R, de verzameling van alle paren $\langle b, a \rangle$ zodanig dat $\langle a, b \rangle \in R$.

$$R^i = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$$

- Voorbeeld: De inverse van de *kind-van* relatie is de *ouder-van* relatie

Opgave

Teken je familie boom, en beschrijf via opsomming de volgende verzamelingen:

(11) a. kind-van relatie K over de verzameling mensen in je familie
b. de inverse van kind-van relatie, K^i
c. de compositie van de relatie kind-van met de relatie kind-van, $K \circ K$

Een logisch puzzel

Een gevangene kan kiezen uit twee deuren, waarachter of een prins zit, of een tijger (maar niet beide). Het is in principe mogelijk dat er achter beide deuren een prins zit, of achter beide deuren een tijger. Op beide deuren zitten bordjes met gegevens die waar of onwaar kunnen zijn. Dit is wat op de deuren staat:

- Deur 1: In deze kamer zit een prins en in de andere kamer een tijger.
- Deur 2: In een van de kamers zit een tijger en in de andere een prins.

De gevangene wordt nog vertelt dat één van de stellingen waar is en de andere onwaar. Verder wordt er niets verteld over de waarheid of onwaarheid van de gegevens. (i) Vind met (gewoon) redeneren een deur waarachter een prins zit. (ii) Vind een oplossing onder gebruik van waarheidstafels.

Structuur van de Tractatus

- Voorwoord
- **Ontologie (1–2.063)**
- De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- Theorie van taal (3.1–4.2)
- Logica (4.2–6.13)
- Wiskunde (6.2–6.3)
- Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- Besluit (7)

Participatieopdracht

- Maak een tekening van de ontologie van de Tractatus, waarin de relatie tussen wereld, logische ruimte, feiten, standen van zaken en objecten geïllustreerd wordt.
- Belangrijke begrippen met vertaling:
  - Welt = wereld
  - Logischer Raum = logische ruimte
  - Tatsache = feit
  - Sachverhalt = stand van zaken
  - Gegenstand = object

1 Die Welt ist alles, was der Fall ist. **TLP 1-1.21**

1 The world is everything that is the case.

1.1 Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen, nicht der Dinge.
1.1 The world is the totality of facts, not of things.

1.11 Die Welt ist durch die Tatsachen bestimmt und dadurch, dass es alle Tatsachen sind.
1.11 The world is determined by the facts, and by these being all the facts.

1.12 Denn, die Gesamtheit der Tatsachen bestimmt, was der Fall ist und auch, was alles nicht der Fall ist.
1.12 For the totality of facts determines both what is the case, and also all that is not the case.

1.13 Die Tatsachen im logischen Raum sind die Welt.
1.13 The facts in logical space are the world.

1.2 Die Welt zerfällt in Tatsachen.
1.2 The world divides into facts.

1.21 Eines kann der Fall sein oder nicht der Fall sein und alles übrige gleich bleiben
1.21 Any one can either be the case or not be the case, and everything else remain the same.

2 Was der Fall ist, die Tatsache, ist das Bestehen von Sachverhalten. [**2-2.06**]
What is the case, the fact, is the existence of atomic facts (state of affairs).

2.01 Der Sachverhalt ist eine Verbindung von Gegenständen. (Sachen, Dingen.)
An atomic fact is a combination of objects (entities, things) [vorm]

2.02 Der Gegenstand ist einfach. / The object is simple. [substantie]

2.03 Im Sachverhalt hängen die Gegenstände ineinander, wie die Glieder einer Kette.
In the atomic fact objects hang one in another, like the links of a chain.

2.04 Die Gesamtheit der bestehenden Sachverhalte ist die Welt.
The totality of existent atomic facts is the world.

2.05 Die Gesamtheit der bestehenden Sachverhalte bestimmt auch, welche Sachverhalte nicht bestehen.
The totality of existent atomic facts also determines which atomic facts do not exist.

2.06 Das Bestehen und Nichtbestehen von Sachverhalten ist die Wirklichkeit.
(Das Bestehen von Sachverhalten nennen wir auch eine positive, das Nichtbestehen eine negative Tatsache.)

Wereld en feiten [1-1.21]

- De wereld
  - verzameling van feiten, niet van dingen (1.1) [log. atomisme] (voorbeeld klaslokaal)
  - in het logische ruimte (1.13)
- Feiten
  - kernelementen (atomen) van wereld (1.1)
  - onafhankelijk van elkaar (1.21) [zoals p, q in PL]
  - bestaande standen van zaken (Sachverhalten) (2)

Feiten en standen van zaken (2)

- Feiten (*Tatsachen*) zijn bestaande standen van zaken (*Sachverhalten*) (2).
  - Feit = bestaande stand van zaken $\mapsto$ reel
  - Niet bestaande stand van zaken $\mapsto$ mogelijk, maar niet reel
- Voorbeelden

(12) Sokrates was ouder dan Plato — *Sachverhalt* en *Tatsache*

(13) Aristoteles was ouder dan Plato — alleen *Sachverhalt*

- In termen van de propositielogica:
  - Stand van zaken: alle atomaire proposities: $p, q, r, \ldots$
  - Feiten: alleen de ware atomaire proposities

De wereld en de logische ruimte

- Bestaande en niet-bestaande standen van zaken vormen samen de logische ruimte, het geheel van alle mogelijkheiden. (1.13)
- De wereld is dat deel van de logische ruimte die gerealiseerd is (1.13, 2.04)
- Interactie tussen
  - Structuur van noodzakelijk connecties (logische ruimte)
  - Contingente verzameling van feiten (wereld)

  Contingent $\mapsto$ had anders kunnen zijn;
  Noodzakelijk $\mapsto$ had niet anders kunnen zijn.

Standen van zaken en objecten

- Standen van zaken (*Sachverhalten*) bestaan uit een (direct) verbinding van objecten (*Gegenstände*) (2.01)
- De objecten zijn de kleinste bouwstenen, maar geen atomen, want niet zelfstandig (2.011, 2.0121, 2.0122, 2.013)

  [...] Diesen Raum [logische ruimte] kann ich mir leer denken, nicht aber das Ding ohne den Raum.

- De objecten (*Gegenstände*)
  - bepalen de *vorm* van de wereld [2.01] en
  - zijn de *substantie* van de wereld [2.02]

Vorm (Form) [2.01]

- Kenmerken voor een object zijn de mogelijke standen van zaken waarin het voor kan komen (2.0123, 2.013)
- De vorm van een object is de mogelijkheid in die en die (maar niet die en die) standen van zaken voor te komen (2.0141)
- Vorm $\mapsto$ aanduiding van een geheel van mogelijkheden, noodzakelijk, intrinsiek (2.0123)
- Met de objecten zijn ook alle mogelijke standen van zaken gegeven, dus de logische ruimte, de vorm van de wereld (2.0124, 2.014)

Voorbeeld (of beter analogie): domino

- Object (*Gegenstand*) als een dominosteen
  - Alle mogelijke verbindingen met anderen stenen gegeven in steen zelf (vorm van object)
  - Verschillende combinaties mogelijk (standen van zaken, logische ruimte)
  - Één combinatie gerealiseerd aan het eind van het spel (feiten, wereld)

Substantie [2.02]

- Substantie is dat, wat onhafhankelijk van wat het geval is, bestaat (2.024)
- Objecten zijn de substantie van de wereld, daarom moeten zijn simpel zijn (2.021,2.02).
  - Complex $\mapsto$ wisselend, contingent (standen van zaken)
  - Simpel $\mapsto$ vast, bestaand, noodzakelijk (objecten)
- De objecten zijn het vaste, de configuratie is het wisselen (2.0271)

Argument voor het bestaan van substantie

- Argument van taal:
  - Zonder substantie (simpele objecten), dan oneeindig deelbaarheid, dus geen bepaaldheid van betekenis (2.0211-2.0212)
- Verondersteld: compositionaliteit van betekenis (2.0201)
  - Wil je de betekenis van gehelen kunnen opbouwen uit de betekenissen van delen (compositionaliteit),
  - Dan moeten er betekenisatomen zijn, kleinste betekenisvolle eenheden, d.w.z. eenheden waarvan de betekenis (verwijzing) gegarandeerd is
  - De objecten vervullen die rol (ze zijn de verwijzing, betekenis, van de kleinste talige eenheden, de namen, zie 3.22).
- Ontologie vanaf de taal bedacht
  - Objecten (*Gegenständen*) $\mapsto$ verwijzing van namen
  - Standen van zaken (*Sachverhalten*) $\mapsto$ verwijzing van elementaire zinnen

Het argument nog een keer

- Zonder simpele objecten zou of een zin betekenisvol is ervan afhangen of een andere zin waar was (2.0211)

  (14) Russell's example
  a. The king of France is bald
  b. There is a unique king of France.

  Of een zin over complexen (14-a) betekenisvol is, is afhankelijk van de waarheid van een andere zin (14-b) (maar vergelijk met 3.24).

- dus zou het onmogelijk zijn een beeld van de wereld te ontwerpen (2.0212). [aangenomen als onacceptabel]

(On)zelfstandigheid van Gegenständen (2.0122)

- Een Gegestand is zelfstandig voor zover het in alle mogelijke Sachlagen (toestanden) kan voorkomen, maar voor deze zelfstandigheid is het afhankelijk van andere Gegenständen, een vorm van onzelfstandigheid (2.0122)
- Een Gegestand is zelfstanding
  - Substantie is dat, wat onhafhankelijk van wat het geval is, bestaat (2.024)
  - Objecten vormen de substantie van de wereld (2.0201)
- Maar ook onzelfstandig:
  - We kunnen de Gegenstände niet los denken van hun mogelijke verbindingen met andere Gegenstände (2.013, maar ook 2.03)
  - Ik kan weliswaar de mogelijke Sachverhalte van de Gegenstands wegdenken, maar ik kan de Gegenstand niet denken zonder een verbinding, een Sachverhalt (2.0131)

Vorm en structuur van standen van zaken [2.03]

- Standen van zaken zijn niets anders dan mogelijke configuratie van objecten (2.0272)
- De verbinding tussen de objecten tot een stand van zaken is direct, word door de objecten zelf tot stand gebracht. (Metafoor van de ketting, 2.03)
- De manier waarop de objecten samenhangen is de structuur van de stand van zaken (2.033), en de vorm is de mogelijkheid van de structuur (2.033)

Wereld en werkelijkheid [2.04-2.063]

- 2.04 De totaliteit van de bestaande standen van zaken is de wereld.
- 2.06 Het bestaan en niet bestaan van standen van zaken is de werkelijkheid.
- 2.063 De totale werkelijkheid is de wereld.
- Inconsistent terminologie?
- 2.05 De totaliteit van de bestaande standen van zaken bepaalt welke standen van zaken niet bestaan

(15) wereld $\rightarrow$ alle feiten $\rightarrow$ alle objecten $\rightarrow$ alle mogelijke standen van zaken $\rightarrow$ werkelijkheid