

Logica en de Linguistic Turn 2013

Verzamelingen en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

October 8, 2013

Plan voor vandaag

1. Verzamelingenleer
2. Tractatus: voorwoord, en ontologie

Huiswerk:

- ▶ Syllabus 2.1-2.2, opgaven 14-17. Extra opgave, Deel 3 (stel. 6-8)
- ▶ Tractatus: 1-2.063 (ontologie)
- ▶ HWO1 (deadline vrijdag 23.59)

Participatieopdracht

- ▶ Maak een tekening van de ontologie van de Tractatus, waarin de relatie tussen wereld, logische ruimte, feiten, standen van zaken en objecten geïllustreerd wordt.
- ▶ Deadline: neem de tekening donderdag 10 bij de wgc mee

Verzamelingen

- ▶ Één van de meest fundamentele begrippen van de formele wetenschappen
- ▶ Geen directe definitie mogelijk, wat een verzameling is kan alleen worden gedefinieerd door een hele theorie (axiomatic set theory)
- ▶ Voorbeelden van verzamelingen
 1. De verzameling van de eerste drie letters van het alfabet: $\{a, b, c\}$
 2. De verzameling van de natuurlijke getallen: $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$
 3. De lege verzameling: \emptyset
- ▶ Er hoeft geen samenhang te bestaan tussen de elementen van een verzameling:
 - $\{a, \{1\}, \text{Donald Duck}, \spadesuit\}$ is ook een verzameling
- ▶ Doel van de verzamelingenleer is om de eigenschappen van verzamelingen te onderzoeken onafhankelijk van de specifieke objecten die de verzameling vormen.

Elementen van verzamelingen

- ▶ De objecten die een verzameling vormen worden de **elementen** van de verzameling genoemd.
 - $a \in \{a, b, c\} \mapsto a$ is een element van $\{a, b, c\}$
 - $1 \notin \{a, b, c\} \mapsto 1$ is niet een element van $\{a, b, c\}$
- ▶ Een verzameling wordt volledig bepaald door zijn elementen:
 - $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$
 - Er is maar één lege verzameling: \emptyset
- ▶ Als je weet welke elementen er in een verzameling zitten, dan weet je alles van die verzameling.

Beschrijving van verzamelingen: drie methoden

1. **Opsomming:** alle elementen van de verzameling worden aangegeven

(1) Verzameling A van auteurs van Gamut:

$$A = \{\text{vanBentham, Groenendijk, deJongh, Stokhof, Verkuyl}\}$$

(2) Verzameling N van natuurlijke getallen:

$$N = \{0, 1, 2, \dots\}$$

2. **Karakteristieke eigenschap:** eigenschap die alle objecten in de verzameling delen, maar geen object dat niet in de verzameling zit.

(3) $A = \{x \mid x \text{ is co-auteur van Gamut}\}$

$\mapsto A$ is de verzameling van alle x met de eigenschap x is co-actor van Gamut

(4) $N = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal}\}$

$\mapsto N$ is de verzameling van alle x met de eigenschap x is een natuurlijk getal

Beschrijving van verzamelingen: drie methoden

3. **Recursieve definitie:** beschrijft hoe je gegeven eindig veel basiselementen alle andere elementen van de verzameling kunt genereren

- (5)
- a. $0 \in N$
 - b. Als $n \in N$, dan $n + 1 \in N$
 - c. Verder is niets in N .

Russell's paradox

- Komt voor als wij het volgende principe aannemen:

(6) Voor ieder eigenschap P is er een verzameling
 $\{x \mid x \text{ heeft } P\}$ [Cantor's **comprehension** principle]

- De paradox:

- Neem als karakteristieke eigenschap 'x is geen element van zichzelf' ($x \notin x$)
[Noem een object met deze eigenschap, en een zonder]
- R is de verzameling van alle verzamelingen met deze eigenschap: $R = \{x \mid x \notin x\}$
- Is $R \in R$? Of is $R \notin R$?

Relaties tussen verzamelingen

- Deelverzameling: \subseteq

$$(7) \quad A \subseteq B \text{ desda voor alle } x: x \in A \Rightarrow x \in B \\ \mapsto \text{alle elementen van } A \text{ zijn ook elementen van } B$$

- Identiteit: $=$

$$(8) \quad A = B \text{ desda } A \subseteq B \text{ \& } B \subseteq A \\ \mapsto A \text{ en } B \text{ hebben precies dezelfde elementen}$$

- Echte deelverzameling: \subset

$$(9) \quad A \subset B \text{ desda } A \subseteq B \text{ en } A \neq B$$

Voorbeelden: waar of onwaar?

- | | | | |
|------|----|-------------------------------------|--------|
| (10) | a. | $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$ | waar |
| | b. | $\{a, b, c\} \subseteq \{b, a, c\}$ | waar |
| | c. | $\{a, b, c\} \subset \{b, a, c\}$ | onwaar |
| (11) | a. | $\{a, b\} = \{b, a, c\}$ | onwaar |
| | b. | $\{a, b\} \subseteq \{b, a, c\}$ | waar |
| | c. | $\{a, b\} \subset \{b, a, c\}$ | waar |
| (12) | a. | $\{a\} = \{\{a\}\}$ | onwaar |
| | b. | $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ | onwaar |
| | c. | $\{a\} \in \{\{a\}\}$ | waar |
| | d. | $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | waar |
| | e. | $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ | waar |

Operaties

- ▶ Vereniging van A en B : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$
- ▶ Doorsnede van A en B : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$
- ▶ Complement van B gegeven A : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Venn-diagrammen

- ▶ Voorbeelden: Stel $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{a, d\}$. Dan
 - $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
 - $A \cap B = \{a\}$
 - $A - B = \{b, c\}$
 - $B - A = \{d\}$

Machtsverzameling

- ▶ Toegepast op een verzameling A geeft de machtsverzamelingsoperatie de verzameling van alle deelverzamelingen van A .
- ▶ Machtsverzameling van A : $\wp(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

- (13)
- a. $\wp(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
 - b. $\wp(\{a, b, c\}) =$
 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
 - c. $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Logica Wiki

- ▶ In de Wittgestein-weeken wordt jullie gevraagd om in groepen een Tractatus glossarium in te vullen.
- ▶ Instructies staan al op Blackboard
- ▶ Vandaag worden jullie in groepen van 3 à 4 studenten ingedeeld.

Groepen

groep	leden	start/einddatum	begripen
1	student1, ...	10.10/17.10	Welt, Logischer Raum
2		10.10/17.10	Tatsache, Sachverhalt, Gegenstand
3		15.10/22.10	Bild, Element des Bildes, Abbildende Beziehung
4		17.10/24.10	Logisches Bild, Gedanke
5		29.10/5.11	Satz, Satzzeichen, Name
6		5.11/12.11	Zeigen, Sagen
7		07.11/14.11	Tautologie, Kontradiktion
8		12.11/19.11	Form, Struktur
9		14.11/21.11	Solipsismus, Realismus

Ludwig Wittgenstein

- ▶ Geboren: Wenen, 26 april 1889
- ▶ Overleden: Cambridge, 29 april 1951
- ▶ Opleiding:
 - 1903: Oberrealschule Linz
 - 1906 - 1907: Technische Hochschule Berlin
 - 1908 - 1910: Manchester University, Department of Engineering (aëronautica)
 - 1911 - 1914: Cambridge, Trinity College (logica bij Bertrand Russell)

Ludwig Wittgenstein

► Werkervaring:

- 1914 - 1918: Soldaat in het Oostenrijks-Hongaarse leger; krijgsgevangene in Monte Cassino tot augustus 1919
- 1919 - 1928: lagere school leraar in Trattenbach, Hasbach, Puchberg; bijdrage aan ontwerp en bouw van het Stoneborough Mansion in de Kundmangasse, Wenen
- 1929 - 1936: fellow Trinity College, Cambridge
- 1939 - 1947: hoogleraar filosofie, Cambridge
- 1940 - 1944: verpleegkundig assistent Guys Hospital, London; laboratorium assistent in onderzoeksgroep van R.T. Grant, Newcastle
- 1947 - 1951: verblijf in V.S., Ierland, Engeland

Ludwig Wittgenstein

- ▶ Publicaties:
 - Tractatus Logico-Philosophicus (1921)
 - Some Remarks on Logical Form (1929)
- ▶ Hobby's:
 - Schubert fluiten
- ▶ Een gedeelte van Wittgensteins Nachlass:
 - Notebooks 1914-1916
 - Philosophische Untersuchungen (1945)
 - Über Gewißheit (1950-1951)
 - ...

Tractatus Logico-Philosophicus

Doelstelling

De grenzen van het denkbare te bepalen door het betekenisvolle taalbegruik af te grenzen van het betekenisloze.

► Opbouw

- bepaling van de grens van het discursieve denken
(argumentatie, bewijs, ...) [kritische traditie (Kant)]
- via: bepaling van de grens van wat betekenisvol kan worden
gezegd [de 'talige wending']
- vereist: algemene theorie van betekenis;
geleverd: afbeeldingstheorie van betekenis
- ingrediënten: algemene theorie over de structuur van de taal
en over de structuur van de werkelijkheid
- logica als uniek en absoluut kader

De opbouw van de Tractatus

Wat is **betekenisvol** (sinnvol)?

Wittgenstein's antwoord: afbeeldingstheorie van betekenis:

(14) Zin A is betekenisvol \Leftrightarrow A is beeld van een (contingent)
 feit

Drie componenten van Wittgensteins betekenisstheorie:

- ▶ Wat is een feit? Ontologie (1–2.063)
- ▶ Wat is een beeld? Beeldtheorie (2.1–3.05)
- ▶ Wat is een zin? Theorie van taal (3.1–4.2)

De opbouw van de Tractatus

Wat is **betekenisloos** (sinnlos)?

- ▶ logische uitspraken (6.1, 6.13, 5.552)
- ▶ wiskunde (6.2)
- ▶ ethiek, esthetiek (6.4–6.421)
- ▶ filosofie (4.003, 4.112, 6.53) en de Tractatus zelf (6.54)

Betekenisloos dus onuitspreekbaar (7), maar niet onbelangrijk (integendeel zie (6.52)).

Sinnvol, sinnlos, unsinnig

- ▶ **Sinnvol:** natuurwetenschap

Een betekenisvolle zin heeft betekenis, d.w.z. zegt iets over de stand van zaken in de wereld.

- ▶ **Sinnlos:** logica, wiskunde, filosofie, ...

Betekenisloos taalgebruik heeft geen betekenis, het zegt niets maar laat iets zien, namelijk de grenzen tussen betekenisvol en betekenisloos. Het is eigenlijk transcendentiaal.

- ▶ **Unsinnig:** 'slechte' filosofie

Onzin is taalgebruik dat noch de wereld verbeeldt noch iets transcendentiaals te melden heeft. Bijvoorbeeld:

(15) Sokrates is identiek.

Tractatus Logico-Philosophicus: Structuur van het boek

- ▶ **Voorwoord**
- ▶ **Ontologie (1–2.063)**
- ▶ De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- ▶ Theorie van taal (3.1–4.2)
- ▶ Logica (4.2–6.13)
- ▶ Wiskunde (6.2–6.3)
- ▶ Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- ▶ Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- ▶ Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- ▶ Besluit (7)

Tractatus: Voorwoord (vertaling M. Stokhof)

Dit boek zal wellicht alleen door diegenen begrepen worden die de gedachten die er in worden uitgedrukt – of soortgelijke gedachten –zelf al eens heeft gehad. – Het is dus geen leerboek. –Het bereikt zijn doel als het iemand die het met begrip leest genoeg verschaft. Het boek behandelt de filosofische problemen en laat zien –zoals mijn overtuiging is– dat de vraagstelling van deze problemen berust op een verkeerd begrip van de logica van onze taal. Men kan de gehele strekking van het boek ongeveer als volgt samenvatten: wat überhaupt gezegd kan worden, kan helder worden gezegd; en waar men niet over kan spreken, daarover moet men zwijgen. Het boek wil dus de grens van het denken bepalen, of liever gezegd – niet die van het denken maar die van de uitdrukking van gedachten: want om de grens van het denken te bepalen, zouden we aan beide zijden van die grens moeten kunnen denken (we zouden dus moeten kunnen denken wat niet gedacht kan worden). De grens kan dus alleen in de taal worden getrokken en alles wat aan gene zijde van de grens ligt zal eenvoudigweg onzin zijn.

Voorwoord (vervolg)

In hoeverre mijn pogingen overeenkomen met die van andere filosofen, laat ik buiten beschouwing. Sterker, wat ik hier heb opgeschreven, maakt geen aanspraak op originaliteit in details, en daarom geef ik ook geen bronnen aan, omdat het mij om het even is of wat ik gedacht heb al eens eerder door een ander gedacht is. Wel wil ik vermelden dat ik aan de grote werken van Frege en aan de geschriften van mijn vriend Bertrand Russell zeer veel verschuldigd ben als inspiratiebronnen voor mijn ideeën.

Voorwoord (vervolg)

Als dit werk van enige waarde is, dan bestaat die in twee dingen. Ten eerste daarin dat er bepaalde gedachten in zijn uitgedrukt en de waarde daarvan zal des te groter zijn naarmate die gedachten beter zijn uitgedrukt. –Ik ben me ervan bewust dat ik op dit punt tekort geschoten ben. En wel daarom omdat mij de kracht ontbreekt die opgave te volbrengen. –Moge er anderen komen en het beter doen. De *waarheid* van de hier meegedeelde gedachten daarentegen komt mij onaantastbaar en definitief voor. Met andere woorden, ik ben van mening dat ik de problemen in essentie definitief heb opgelost. En als ik mij niet vergis, dan bestaat de waarde van dit werk ten tweede daarin dat het laat zien hoe weinig er tot stand is gebracht als de problemen zijn opgelost.

Ontologie (1–2.063)

Leer van (de structuur van) de werkelijkheid, theorie van wat er is.

- ▶ Vandaag: 1-2.01
 - Welt en logische ruimte (1-1.21)
 - Feiten en standen van zaken (2)
 - Standen van zaken en objecten (2.01)
- ▶ Donderdag: 2.01-2.063

TLP 1-1.13

1 Die Welt ist alles, was der Fall ist.

1 The world is everything that is the case.

1.1 Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen, nicht der Dinge.

1.1 The world is the totality of facts, not of things.

1.11 Die Welt ist durch die Tatsachen bestimmt und dadurch, dass es alle Tatsachen sind.

1.11 The world is determined by the facts, and by these being all the facts.

1.12 Denn, die Gesamtheit der Tatsachen bestimmt, was der Fall ist und auch, was alles nicht der Fall ist.

1.12 For the totality of facts determines both what is the case, and also all that is not the case.

1.13 Die Tatsachen im logischen Raum sind die Welt.

1.13 The facts in logical space are the world.

TLP 1.2–2.01

1.2 Die Welt zerfällt in Tatsachen.

1.2 The world divides into facts.

1.21 Eines kann der Fall sein oder nicht der Fall sein und alles übrige gleich bleiben

1.21 Any one can either be the case or not be the case, and everything else remain the same.

2 Was der Fall ist, die Tatsache, ist das Bestehen von Sachverhalten.

2 What is the case, the fact, is the existence of atomic facts (state of affairs).

2.01 Der Sachverhalt ist eine Verbindung von Gegenst—'Anden.
(Sachen, Dingen)

2.01 An atomic fact is a combination of objects (entities, things)

Logisch atomisme (1 – 1.21)

De wereld is alles, wat het geval is: de totaliteit van de feiten niet van de dingen

1. De wereld bestaat uit discrete zelfstandig eenheden (atomen)
2. Atomen zijn (atomaire) feiten, niet dingen

Alternatieven

- ▶ Holisme: het geheel is groter dan de verzameling van de delen
- ▶ Klassiek atomisme: atomen zijn dingen, niet feiten

Tatsachen en Sachverhalten

Feiten (*Tatsachen*) zijn bestaande standen van zaken (*Sachverhalten*) (2).

Voorbeelden

- | | | |
|------|---------------------------------|---------------------------------------|
| (16) | Sokrates was ouder dan Plato | <i>Sachverhalt</i> en <i>Tatsache</i> |
| (17) | Aristoteles was ouder dan Plato | alleen <i>Sachverhalt</i> |

Standen van zaken en objecten

- ▶ Standen van zaken bestaan uit een (direct) verbinding van objecten (*Gegenständen*) (2.01)
- ▶ De objecten zijn de kleinste bouwstenen, maar geen atomen, want niet zelfstandig (2.011, 2.0121, 2.0122)
- ▶ De objecten
 - bepalen de *vorm* van de wereld [2.01] en
 - zijn de *substantie* van de wereld [2.02]

Sachlagen

(Verbindingen van) standen van zaken worden ook aangeduid als *Sachlagen* (situaties, toestanden) (2.0122, 2.11)

- ▶ De standen van zaken zijn de echte atomen (2.061, 2.062)
- ▶ *Sachlagen* kunnen zowel atomair als complex zijn

Voorbeelden

- (18) Aristoteles was ouder dan Plato
Sachlagen, Sachverhalt, geen Tatsache
- (19) Aristoteles was ouder dan Plato en Sokrates was onwijs
Sachlagen, geen Sachverhalt, geen Tatsache