Logica & de Linguistic Turn
zaaltentamen 2

Onderwijsinstituut Wijsbegeerte
Faculteit Geesteswetenschappen, UvA

22 oktober 2012

Propositielogica

Opgave 1 ($3 \times 6 = 18$ punten) Vertaal de volgende zinnen in de taal van de propositielogica. Geef zoveel mogelijk de logische structuur weer en vermeld de vertaalsleutel.

(i) *Rutte heeft het roer niet meer in handen, en Samsom evenmin.*

(ii) *Armstrong is zijn titels kwijt maar alleen als Ullrich gerehabiliteerd kan worden verdient Ullrich een zege.*

(iii) *Als Louis van Gaal doorzet haalt het team de WK, tenzij Johan Cruijff roet in het eten gooit.*

Opgave 2 ($3 \times 4 = 12$ punten) Beredeneer aan de hand van een waarheidstafel welke van de volgende formules aan elkaar equivalent zijn.

(i) $\neg(p \to q) \vee (\neg p \wedge q)$

(ii) $(\neg p \vee q) \to \neg q$

(iii) $\neg(p \leftrightarrow q)$

Opgave 3 ($2 \times 8 = 16$ punten) Beredeneer aan de hand van een waarheidstafel of de volgende redeneerschema's geldig zijn. Specificeer in geval van ongeldigheid een tegenvoorbeeld.

(i) $p \vee q, \neg p \to \neg q / q$, (ii) $r \to \neg(p \vee q), \neg p \to q / r \to \neg r$.

Opgave 4 ($2 \times 7 = 14$ punten) Onderzoek voor elk van de volgende twee stellingen of deze juist of onjuist is. Als de stelling juist is, geef dan een bewijs voor de stelling, als de stelling onjuist is, weerleg haar dan met een tegenvoorbeeld. Geef, in geval van een tegenvoorbeeld, kort aan waarom het een tegenvoorbeeld is.

(a) Als φ een contingentie is en ψ is een tautologie, dan is $\psi \to \neg\varphi$ een tautologie.

(b) Als $\varphi \vee \neg\psi$ een contradictie is, dan is $\varphi \to \psi$ een tautologie.

Opgave 5 (5 punten) De Sheffer-stroke, een connectief aangegeven door '|', heeft de volgende waarheidstafel.

ϕ	ψ	$\phi \vert \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Het enkele connectief Sheffer-stroke is functioneel volledig. Toon dit aan. U mag in uw argumentatie gebruik maken van het feit dat $\neg$, $\vee$ en $\wedge$ een functioneel volledige verzameling connectieven is.

Verzamelingenleer

Opgave 6 (22 punten) Gegeven zijn de volgende verzamelingen: $A := \{a\}$, $B := \{2, \{2\}\}$, $C := \{1, \emptyset, \{\emptyset\}\}$, $D := \{\{a\}, 2, \{2\}, 3\}$. Beantwoord de volgende vragen:

(i) (4 punten) Welke van de verzamelingen A t/m D zijn elementen van D?

(ii) (4 punten) Welke van de verzamelingen A t/m D zijn deelverzamelingen van D?

(iii) (10 punten) Geef de volgende verzamelingen aan middels opsomming van de elementen:

(a) $B \cap D$
(b) $B \cup C$
(c) $D - B$
(d) $(A \cap C) \cup (B \cap D)$
(e) $\wp(\wp(A))$

(iv) (4 punten) Definiëer, door opsomming, drie verzamelingen X, Y en Z zodanig dat tegelijk zowel (i) $X - Y \in Z$ en tevens (ii) $Y - Z \subseteq X$ gelden.

Opgave 7 (10 punten) Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $A = \{a, b, c\}$.

$$R = \{\langle c, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle c, b\rangle\}$$

a) (6 punten) Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch en/of samenhangend is. Geef de eigenschappen aan die de relatie heeft en ook de eigenschappen die de relatie niet heeft.
b) (2 punten) De relatie is transitief. Ga na of we door één paar objecten uit de verzameling A uit R te verwijderen een relatie kunnen verkrijgen die niet transitief is. Als dit mogelijk is, geef een paar van objecten waarbij dit het geval is. Beargumenteer kort uw antwoord.
c) (2 punten) Beschouw de volgende relatie R tussen de verzamelingen $A = \{a, b\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$.

$$R = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$$

Is R een functie? Beargumenteer kort uw antwoord.

Opgave 8 (3 punten) Stel dat S de verzameling is van alle studenten die dit tentamen zullen inleveren. We nemen aan dat elk van deze studenten er een cijfer voor krijgt, maar we weten de cijfers op dit moment nog niet. Op de verzameling S zijn hieronder drie binaire relaties gedefiniëerd. Hoewel we de cijfers nog niet weten, kunnen we van sommige van deze relaties al zeggen dat ze gegarandeerd bepaalde eigenschappen zullen hebben. Welke van de volgende relaties zullen *zeker* een equivalentierelatie zijn, en welke zullen mogelijk geen equivalentierelatie zijn? Beargumenteer kort uw antwoord.

1. $\{\langle s, t\rangle \in S \times S \mid$ s en t hebben hetzelfde cijfer voor opdracht 1$\}$
2. $\{\langle s, t\rangle \in S \times S \mid$ s en t hebben hetzelfde cijfer voor opdracht 1 en s en t hebben ook hetzelfde cijfer voor opdracht 2$\}$
3. $\{\langle s, t\rangle \in S \times S \mid$ s en t hebben hetzelfde cijfer voor opdracht 1 óf s en t hebben hetzelfde cijfer voor opdracht 2$\}$