Logica en de Linguistic Turn 2012

Relaties en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

11/10/12

Plan voor vandaag

1. Relaties (als verzamelingen van lijsten)
2. Tractatus: beeldtheorie (2.1-3.05)
3. Een logisch puzzel en andere opgaven

Huiswerk:

- **Opdracht 3**, deadline zondag 22uur

  Let op: het limiet op het aantal woorden is strict. Elk woord op het ingeleverde document telt, dus, bijvoorbeeld, ook een gekopierde opgavenstelling. Als blijkt dat het aantal woorden van het ingeleverd document boven het gegeven maximum ligt, dan worden 1 cijferpunten afgetrokken.
- Syllabus tot 2.4.5, opgaven 5-6-7 en 1 en 3. Extra stellingen bewijzen
- Tractatus: 3.1–3.23, 3.34–3.5

Verzamelingen vs. lijsten

- Verzamelingen: volgorde elementen niet relevant
  - $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$
- Lijsten: volgorde wel relevant
  - $\langle a, b, c \rangle \neq \langle b, c, a \rangle$

  In een lijst komt ieder element op een specifiek plaats in de lijst, als het eerste, tweede, ... element van de lijst.
- Lijst a is identiek met lijst b, $a = b$ als
  - de lijsten hetzelfde aantal elementen hebben
  - de elementen die op dezelfde plaats in de lijst staan identiek zijn.
- Terminologie:
  - Lijsten van 2 elementen $\mapsto$ paren
  - Lijsten van 3 elementen $\mapsto$ triples
  - Lijsten van n elementen $\mapsto$ n-tuples

Cartesisch Product: paren

- Gegeven twee verzamelingen A en B kunnen wij een paar vormen door als eerste element van de lijst een element uit A en als tweede element een element uit B te kiezen.
- De verzameling van alle paren die op deze manier gevormd kunnen worden wordt het Cartesisch Product, $A \times B$, van de verzamelingen A en B genoemd:

(1) $$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \textit{ en } y \in B\}$$

- Voorbeelden: Stel $K = \{a, b, c\}$ en $L = \{1, 2\}$

(2) $$\begin{aligned} K \times L &= \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle\} \\ L \times K &= \{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 2,c\rangle\} \\ L \times L &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} \end{aligned}$$

Cartesisch Product: *n*-tuples

- Het Cartesisch Product van n verzamelingen $A_1, A_2, ..., A_n$ kan gedefiniëerd worden als volgt:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle \mid \quad x_1 \in A_1 \textit{ en } x_2 \in A_2 \textit{ en } ... \textit{ en } x_n \in A_n\}$$

- Notatie:

(3) Getallen

a. $2 \times 2 = 2^2$ [2 keer]

b. $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ [3 keer]

c. $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ [n keer]

(4) Verzamelingen

a. $A \times A = A^2$ [verzameling van paren uit A]

b. $A \times A \times A = A^3$ [verzameling van triples uit A]

c. $A \times A \times \cdots \times A = A^n$ [verzameling van n-tuples uit A]

Opgave

Zijn $X = \{z, y\}$ en $Y = \{0, 1\}$. Specificeer de volgende verzamelingen door hun elementen op te noemen:

(5)
a. $X \times Y$
b. $Y \times X$
c. $Y \times Y \quad [= Y^2]$
d. $Y \times Y \times Y \quad [= Y^3]$
e. $Y \times X \times Y$

Relaties

- Voorbeelden van binaire relaties:
  - hoofdstad van: relatie tussen steden en landen
  - broer van: relatie tussen mensen
  - deelverzameling, $\subseteq$: relatie tussen verzamelingen
  - element van, $\in$: relatie tussen objecten en verzamelingen
- Binaire relaties formeel gedefinieerd als verzamelingen van paren
- R is een **binaire relatie** tussen de verzamelingen A en B als R een deelverzameling is van het Cartesisch product van A en B: $R \subseteq A \times B$.
- Voorbeeld: H: hoofdstad van; S: verzameling van steden; L: verzameling van landen
  - $H = \{\langle \text{Rome, Italïe} \rangle, \langle \text{Berlijn, Duitsland} \rangle, \dots\} \subseteq S \times L$
- In het algemeen is R een **n-aire relatie** tussen verzamelingen $A_1, A_2, ..., A_n$, als R een deelverzameling is van het Cartesisch product van $A_1, A_2, ..., A_n$: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Opgave

Stel $X = \{0, 1\}$. Hoeveel verschillende relaties zijn er over X? 16

Eigenschappen van relaties: Reflexiviteit

- Reflexiviteit is een eigenschap die een binair relatie over A heeft als de relatie ieder object a van A verbindt met a zelf.

(6) Voor alle $a \in A$ geldt $\langle a, a \rangle \in R$

- Voorbeelden: identiteit, *minstens zo groot als* over de verzameling mensen, logische equivalentie over de verzameling formules van PL
- R is **niet reflexief**, als er minstens één element van A is waarvoor niet geldt $\langle a, a \rangle \in R$
- Voorbeelden: *leuk vinden* over de verzameling mensen
- R is **irreflexief**, als voor alle $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$
- Voorbeelden: *groter zijn dan* over de verzameling mensen

Eigenschappen van relaties: Symmetrie

- Een relatie heet **symmetrisch** als zodra de relatie een object a met een object b verbindt het ook geldt dat de relatie b met a verbindt.

(7) Voor alle $a, b \in A$ geldt: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.

- Voorbeeld: 'broer van' over de verzameling mannen, maar niet over verzameling mensen (Vraag: waarom niet?)
- R is **asymmetrisch** als voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$.
- Voorbeeld: 'moeder van' over de verzameling mensen
- R is **antisymmetrische** als voor alle $a, b \in A$ geldt: als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, a \rangle \in R$, dan $a = b$.
- Voorbeeld: deelverzameling relatie, $\subseteq$, over verzameling verzamelingen

Eigenschappen van relaties: Transitiviteit

- Een relatie heet transitief als geldt dat als er een pijl loopt van punt 1 naar punt 2 en er een pijl loopt van punt 2 naar punt 3, dan moet er ook een directe pijl zijn van punt 1 naar punt 3.

  (8) voor alle $a, b, c \in A$, als $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, c\rangle \in R$, dan geldt ook $\langle a, c\rangle \in R$.

- Voorbeelden:
  - ‘groter dan’ over de verzameling mensen is transitief: als Maria groter is dan Paul en Paul is groter dan Kim, dan is Maria ook groter dan Kim.
  - ‘opvolger van’ over de verzameling natuurlijke getallen is **niet** transitief: 3 is de opvolger van 2, en 2 is de opvolger van 1, maar 3 is niet de opvolger van 1.

Eigenschappen van relaties: Equivalentierelatie

- Een equivalentierelatie is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is.
- Voorbeelden (wel of niet equivalentierelatie?)

(9)
a. ‘even groot als’ over de verzameling natuurlijke getallen — wel
b. ‘tweelingbroer van’ over verzameling van mensen — niet (niet reflexief)
c. logische equivalentie (‘$\Leftrightarrow$’) over de verzameling van formules in propositielogica — wel
d. ‘dezelfde leeftijd hebben als’ over de verzameling mensen — wel
e. ‘vader van’ over verzameling van mensen — niet (niet symmetrisch)
f. ‘iets gemeenschappelijk hebben met’ over verzameling van mensen — niet (niet transitief)

Eigenschappen van relaties: Samenhang

- R over de verzameling A is samenhangend als voor alle elementen a en b van A geldt: of de relatie verbindt a met b, of de relatie verbindt b met a of a en b zijn identiek.

(10) voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b\rangle \in R$ of $\langle b, a\rangle \in R$ of $a = b$

- Voorbeelden: 'kleiner dan' over de verzameling natuurlijke getallen, maar niet over de verzameling mensen

Operaties op relaties

- Compositie: Als R en S relaties zijn over een verzameling A, dan is $R \circ S$, de compositie van R en S, de (kleinste) relatie T over A zodanig dat als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, c \rangle \in S$, dan $\langle a, c \rangle \in T$.

$$R \circ S = \{\langle a, c \rangle \mid er\ is\ een\ b\ met\ \langle a, b \rangle \in R\ en\ \langle b, c \rangle \in S\}$$

- Voorbeeld: de compositie van de relatie *kind van* met de relatie *kind van* geeft de relatie *kleinkind van*
- Inverse: Als R een relatie is over A, dan is R^i, de inverse van R, de verzameling van alle paren $\langle b, a \rangle$ zodanig dat $\langle a, b \rangle \in R$.

$$R^i = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$$

- Voorbeeld: De inverse van de *kind-van* relatie is de *ouder-van* relatie

Opgave

Teken je familie boom, en beschrijf via opsomming de volgende verzamelingen:

(11) a. kind-van relatie K over de verzameling mensen in je familie
b. de inverse van kind-van relatie, K^i
c. de compositie van de relatie kind-van met de relatie kind-van, $K \circ K$

Structuur van de Tractatus

- Voorwoord
- Ontologie (1–2.063)
- **De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)**
- Theorie van taal (3.1–4.2)
- Logica (4.2–6.13)
- Wiskunde (6.2–6.3)
- Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- Besluit (7)

De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)

- Dinsdag [2.1–2.17]
  - Beeld (Bild) en zijn elementen [2.1–2.141]
  - Afbeeldende relatie (abbildende Beziehung) en de afbeeldingsvorm (Form der Abbildung) [2.15–2.17]
- Vandaag [2.17–3.05]
  - Afbeelden versus tonen
  - Logische vorm
  - Waarheid en onwaarheid
  - Betekenis
  - Contingentie
  - Gedacht

Afbeeldende relatie en afbeeldingsvorm

- Een beeld B is een afbeelding van een situatie S als
  - (i) de elementen in B gecorrelleerd zijn met de objecten in S (**afbeeldende relatie**) (2.13, 2.131, 2.1514);
  - (ii) de vorm van B gelijk is aan de vorm van S (**afbeeldingsvorm**) (2.161, 2.17, 2.171).

- Over afbeeldingsvorm:

  2.17 Was das Bild mit der Wirklichkeit gemein haben muss, um sie auf seine Art und Weise – richtig oder falsch – abbilden zu können, ist seine Form der Abbildung.
  What the picture must have in common with reality in order to be able to represent it after its manner – rightly or falsely – is its form of representation.

Afbeelden versus tonen

- Een beeld kan ieder werkelijkheid afbeelden (waarmee het formele overeenkomst heeft)

  2.171 Das Bild kann jede Wirklichkeit abbilden, deren Form es hat. Das räumliche Bild alles Räumliche, das farbige alles Farbige, etc.

  The picture can represent every reality whose form it has. The spatial picture, everything spatial, the coloured, everything coloured, etc.

- Maar een beeld kan zijn afbeeldingsvorm niet afbeelden; deze toont het (2.172, 2.173, 2.174)

Afbeelden versus tonen

2.172 Seine Form der Abbildung aber, kann das Bild nicht abbilden; es weist sie auf.
The picture, however, cannot represent its form of representation; it shows it forth.

2.173 Das Bild stellt sein Objekt von ausserhalb dar (sein Standpunkt ist seine Form der Darstellung), darum stellt das Bild sein Objekt richtig oder falsch dar.
The picture represents its object from without (its standpoint is its form of representation), therefore the picture represents its object rightly or falsely.

2.174 Das Bild kann sich aber nicht ausserhalb seiner Form der Darstellung stellen.
But the picture cannot place itself outside of its form of representation.

Logische vorm [2.18–2.203]

- Wat een beeld in ieder geval gemeen moet hebben met de afgebelde situatie is de logische vorm, de vorm van de werkelijkheid (2.18)

  2.18 Was jedes Bild, welcher Form immer, mit der Wirklichkeit gemein haben muss, um sie berhaupt – richtig oder falsch – abbilden zu können, ist die logische Form, das ist, die Form der Wirklichkeit. What every picture, in whatever form, must have in common with reality in order to be able to represent it at all –rightly or falsely – is the logical form, that is, the form of reality.

- Alle beelden (ruimtelijke, gekleurde, ...) zijn ook logische beelden (2.182).

  2.182 Jedes Bild ist auch ein logisches. (Dagegen ist z. B. nicht jedes Bild ein räumliches.) / Every picture is also a logical picture. (On the other hand, for example, not every picture is spatial.)

Waarheid en onwaarheid

- Waar is een beeld als het met de werkelijkheid overeenstemt (bijv. 2.21), als de stand van zaken die het beeld afbeeldt, bestaat.

  2.21 Das Bild stimmt mit der Wirklichkeit überein oder nicht; es ist richtig oder unrichtig, wahr oder falsch. / The picture agrees with reality or not; it is right or wrong, true or false.

- Onwaarheid is niet een ander soort relatie tot een stand van zaken, maar simpelweg het niet-bestaan van de stand van zaken.

  (12) Madrid is de hoofdstad van Spanje.

  (13) Madrid is de hoofdstad van Nederland.

Betekenis (Sinn)

- De betekenis van een beeld is de afgebeelde stand van zaken in de logische ruimte. (2.202, 2.221)
- De betekenis van een zin kennen is dus de waarheidscondities ervan kennen, weten wat het geval is als de zin waar is (verg. 4.024)

  (14) Madrid is de hoofdstad van Nederland.

Contingentie

- Er zijn geen a priori ware beelden (2.225)
- De waarheid of onwaarheid van een beeld is een contingente zaak.
- Alles wat noodzakelijk is (bijv. logische wetten) is geen beeld (2.201, 2.202)

a priori $\mapsto$ de waarheid ervan kan worden ingezien los van ervaring;
a posteriori $\mapsto$ niet a priori

Gedachten [3–3.05]

- Gedachten zijn logische beelden (3), dus ...
- dus kunnen wij niets onlogisch kunnen denken (3.03)
- dus zijn er geen a priori ware gedachten (3.04, 3.05)

Een logisch puzzel

Een gevangene kan kiezen uit twee deuren, waarachter of een prins zit, of een tijger (maar niet beide). Het is in principe mogelijk dat er achter beide deuren een prins zit, of achter beide deuren een tijger. Op beide deuren zitten bordjes met gegevens die waar of onwaar kunnen zijn. Dit is wat op de deuren staat:

- Deur 1: In deze kamer zit een prins en in de andere kamer een tijger.
- Deur 2: In een van de kamers zit een tijger en in de andere een prins.

De gevangene wordt nog vertelt dat één van de stellingen waar is en de andere onwaar. Verder wordt er niets verteld over de waarheid of onwaarheid van de gegevens. (i) Vind met (gewoon) redeneren een deur waarachter een prins zit. (ii) Vind een oplossing onder gebruik van waarheidstafels.