Logica en de Linguistic Turn 2013

Tautologies, logische equivalenties en geldigheid

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

October 1, 2013

Plan voor vandaag

1. Propositielogica: tautologies, contradicties, logische equivalenties en geldigheid
2. Zaaltentamen 1

Huiswerk:

- Gamut, 2.5, 4.2.1 (t/m p. 118) + opgaven 2.6, 2.8-2.10, 4.1(a)-(i)
- Extra opgaven PL Deel 1 (opgave over prins en tijger)
- Participatieopdracht: bedenk zelf een paradox (deadline woensdag 12uur)

Valuatie

Een valuatie V voor taal L van PL is een functie met als domein de formules van L en als bereik de waarheidswaarden, i.e.

(1) V: formules van L $\rightarrow \{0, 1\}$

die de volgende condities vervult (voor alle formules ϕ en ψ):

(i) $V(\neg\phi) = 1$ desda $V(\phi) = 0$;

(ii) $V(\phi \wedge \psi) = 1$ desda $V(\phi) = V(\psi) = 1$;

(iii) $V(\phi \vee \psi) = 0$ desda $V(\phi) = V(\psi) = 0$;

(iv) $V(\phi \rightarrow \psi) = 0$ desda $V(\phi) = 1$ en $V(\psi) = 0$;

(v) $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ desda $V(\phi) = V(\psi)$.

De valuatie moet in overstemming zijn met de interpretatie van de connectieven, die in de waarheidstafels is vastgelegd.

Tautologie, en contradictie

- Formule ϕ is een **tautologie**, $\models \phi$, desda voor ieder valuatie V: $V(\phi) = 1$;
- Formule ϕ is een **contradictie** desda voor ieder valuatie V: $V(\phi) = 0$;
- Formules die noch tautologien zijn noch contradicties worden **contingenties** genoemd.

Opgave: Ga van de volgende formules na of het tautologieen, contradicties of contingenties zijn.

(2) $(p \rightarrow \neg p)$

(3) $(p \rightarrow (p \vee q))$

(4) $(p \wedge (\neg\neg p \rightarrow \neg p))$

(Hint: gebruik samengestelde waarheidstafels)

Samengestelde waarheidstafel voor ϕ

- Kolommen: subformules van ϕ ($=$ ieder formule die voorkomt in de construtieboom van ϕ)
- Rijen: relevante waarderingen voor ϕ (afhankelijk van aantal propositieletters in ϕ)

Logische equivalentie

- Formules ϕ en ψ zijn logisch equivalent, $\phi \equiv \psi$ (of $\phi \Leftrightarrow \psi$) desda voor ieder valuatie V: $V(\phi) = V(\psi)$.
- Voorbeelden

(5) $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\mapsto$ formules $p \vee q$ en $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ zijn logisch equivalent

(6) $\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg \phi \wedge \neg \psi)$

$\mapsto$ alle formules met vorm $\phi \vee \psi$ en $\neg(\neg \phi \wedge \neg \psi)$ zijn logisch equivalent

- Anderen voorbeelden

(7)
a. $\phi \equiv \neg\neg\phi$ (*wet van dubbel negatie*)
b. $(\phi \vee \psi) \vee \chi \equiv \phi \vee (\psi \vee \chi)$ (*associativiteit van* $\vee$)
c. $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ (*associativiteit van* $\wedge$)

- Over verschil ϕ vs p?
  - ϕ (metataal) kan complex of atomair zijn
  - p (objecttaal) is atomair
- Probeer om te bepalen of de volgende een tautologie, een contradictie of een contingentie is:

(8) $\phi \rightarrow \neg\phi$

- Antwoord: (8) kan een tautologie of een contradictie of een contingentie zijn afhankelijk van ϕ. E.g.
  1. $\phi = (p \vee \neg p) \Rightarrow \phi \rightarrow \neg\phi$ is contradictie
  2. $\phi = (p \wedge \neg p) \Rightarrow \phi \rightarrow \neg\phi$ is tautologie
  3. $\phi = p \Rightarrow \phi \rightarrow \neg\phi$ is contingentie

Stellingen

Stelling 1
$\phi \equiv \psi$ desda $\phi \leftrightarrow \psi$ is een tautologie.
Stelling 2
Als ϕ een tautologie is, dan is $\neg\phi$ een contradictie.
Stelling 3
Als ϕ een contradictie is, dan is $\neg\phi$ een tautologie.
Stelling 4
ϕ is contingent desda $\neg\phi$ is contingent.

Bewijs van stelling 1 [op boord]

Semantische geldigheid (def. 3 p. 117)

- **Definitie** Voor formules $\phi_1, ...\phi_n, \psi$ van PL, een redenering $\phi_1, ...\phi_n/\psi$ is geldig, $\phi_1, ...\phi_n \models \psi$ als, voor alle valuaties V, waarvoor $V(\phi_1) = ...V(\phi_n) = 1$, ook $V(\psi) = 1$.
- **Opgave** Beredeneer aan de hand van een waarheidstafel of de volgende redeneerschema's geldig zijn. Specificeer in geval van ongeldigheid een tegenvoorbeeld.

(9) $p \to q, \neg q \ / \ \neg p$

(10) $p \to q, \neg p \ / \ \neg q$