Logica en de Linguistic Turn 2013

Functionele volledigheid en waarheidstheorie

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

October 6, 2013

Plan voor vandaag

1. Propositielogica: functionele volledigheid
2. Tarski: paradoxen en waarheidstheorie

Huiswerk:

- Gamut, 2.6 + (extra) opgaven (zie planning)
- Huiswerkopdracht 1 (morgen op Blackboard, vrijdag 11 okt op Blackboard inleveren)

Volgende week:

- Ma: hoorcollege Michiel van Lambalgen
- Di en do: 2x3 uur (Wittgenstein)

PL: directe interpretatie van connectieven [Gamut 2.6]

- Tot nu toe contextuele (syncategorematische) interpretatie van connectieven:
  - Bv. in de semantiek hebben wij niet direct $\wedge$ zelf geïnterpreteerd maar alleen aangegeven hoe $\phi \wedge \psi$ wordt geïnterpreteerd, als de interpretaties van ϕ en ψ bepaald zijn.
- Connectieven kunnen ook direct (categorematisch) worden geïnterpreteerd als *waarheidsfuncties*:

(1)	$f_{\neg} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$	1-plaatsige waarheidsfunctie
(2)	$f_{\wedge} : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$	2-plaatsige waarheidsfunctie
(3)	$f_{\vee} : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$	2-plaatsige waarheidsfunctie

- Waarheidsfuncties: functies van (n-tuples van) waarheidswaarde naar waarheidswaarde

- **Vraag**: Er zijn vier 1-plaatsige waarheidsfuncties (i.e. van $\{0,1\}$ naar $\{0,1\}$). Welke nemen wij als interpretatie van $\neg$?

f_1:

x	$f_1(x)$
0	1
1	1

f_2:

x	$f_2(x)$
0	0
1	0

f_3:

x	$f_3(x)$
0	0
1	1

f_4:

x	$f_4(x)$
0	1
1	0

- **Feit**: Alle 1-plaatsige waarheidsfuncties kunnen worden uitgedrukt middels $\neg, \wedge$ en $\vee$, i.e. wij kunnen formules vinden die precies de waarheidstafels hebben overkomend met deze waarheidsfuncties:

(4) f_1: $p \vee \neg p$ f_2: $p \wedge \neg p$ f_3: p f_4: $\neg p$

- Dit resultaat kan worden gegeneraliseerd voor n-plaatsige waarheidsfuncties, als in Theorem 5

Functionele volledigheid van de propositie logica

Theorem 5:
Als f een n-plaatsige waarheidsfunctie is, dan is er een formule ϕ (met $\wedge, \vee$ en $\neg$) met n propositeletters $p_1, ..., p_n$ zodat voor iedere valuatie V van $p_1, ..., p_n$: $V(\phi) = f(V(p_1), ..., V(p_n))$

Illustratie van algemene methode

- Theorem 5: $(\wedge, \vee, \neg) \mapsto$ functioneel volledig
- Gevolg: $(\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow) \mapsto$ ook functioneel volledig
- **Opgave** Laat zien dat ook de volgende systemen van connectieven functioneel volledig zijn:
  1. $(\vee, \neg)$
  2. $(\wedge, \neg)$ (exercise 13 (b)-c))
  3. $(\rightarrow, \neg)$
  4. $(\dagger)$, Quine's dagger

Opgaven

- Bepaal met behulp van waarheidstafels voor elk van de onderstaande formules of het een tautologie, een contradictie, of een contingentie is.

(5) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(6) $p \vee (p \rightarrow q)$

- Bewijs of de volgende logische equivalenties geldig zijn:

(7) $\phi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\phi \rightarrow \neg\psi$

(8) $\phi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

(9) $\phi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$

Opgaven

- Onderzoek in een waarheidstafel de volgende redeneerschema's op hun geldigheid. Specificeer in geval van ongeldigheid een tegenvoorbeeld.

(10) $p, r \rightarrow (p \rightarrow q) / r \rightarrow q$

(11) $p \vee q, (p \wedge q) \rightarrow r / r$

- Bewijs of de volgende stellingen waar zijn of niet waar:

(12) Als $\phi \rightarrow \psi$ een contradictie is, dan is $\psi \rightarrow \phi$ een tautologie.

(13) Als $\phi \rightarrow \psi$ een tautologie is, dan is $\psi \rightarrow \phi$ een contradictie.

Een logisch puzzel

Een gevangene kan kiezen uit twee deuren, waarachter of een prins zit, of een tijger (maar niet beide). Het is in principe mogelijk dat er achter beide deuren een prins zit, of achter beide deuren een tijger. Op beide deuren zitten bordjes met gegevens die waar of onwaar kunnen zijn. Dit is wat op de deuren staat:

- Deur 1: In deze kamer zit een prins en in de andere kamer een tijger.
- Deur 2: In een van de kamers zit een tijger en in de andere een prins.

De gevangene wordt nog vertelt dat één van de stellingen waar is en de andere onwaar. Verder wordt er niets verteld over de waarheid of onwaarheid van de gegevens. (i) Vindt met (gewoon) redeneren een deur waarachter een prins zit. (ii) Vindt een oplossing onder gebruik van waarheidstafels.

Alfred Tarski (1901-1983)

- Tarski over waarheid en logische semantiek:
  - Alfred Tarski, 1944, 'The semantic conception of truth and the foundations of semantics', *Philosophy and Phenomenological Research* 4
- Wij lezen een gesimplificeerde versie:
  - Alfred Tarski, 1969, 'Truth and Proof', *Scientific American*

Paradoxen

- Hoe definieert Tarski een paradox (antinomie)?
  - Argument that leads to a contradiction (p. 65)
- Paradoxen $\neq$ contradicties
  - Contradicties: altijd onwaar
  - Paradoxen: waar en onwaar
    - waar $\Rightarrow$ onwaar
    - onwaar $\Rightarrow$ waar
- **Tarski's voorbeelden**: z: z is onwaar
- A book with 100 pages, with just one sentence printed on each page:
  - On page 1 we read: the sentence printed on page 2 of this book is true
  - ...
  - On page 100 we read: the sentence printed on page 1 of this book is false

Paradoxen

- **Carnaps voorbelden**:
  - impredicable: a *property* is impredicable, if it does not belong to itself. Is the property 'impredicable' itself impredicable?
  - heterological: a *predicate* is heterological, if the property designated by the predicate does not belong to the predicate self. Is the predicate 'heterological' itself heterological?
- Vraag 9: Beschouw onderstaande zin. Geeft deze zin aanleiding tot een paradox?

(14) Een Kretenzer zegt: "Alle Kretenzers zijn leugenaars."

  - Nee, de zin kan onwaar zijn zonder paradoxale consequenties.

Paradoxen

- Geven de volgende zinnen aanleiding tot een paradox?
  1. Ik lieg altijd.
  2. Deze zin bevat geen woorden
  3. Ik weet dat ik niets weet.
  4. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
  5. Geloof niet alles wat je denkt
  6. Deze zin is geen zin
  7. Hoewel je het wilt weten, wil je het niet weten
  8. Ik lever mijn participatie opdracht pas in als er geen later moment is waarop ik mijn opdracht mag inleveren. Dus ik lever mijn opdracht op tijd in. Toch zal ik mijn opdracht nooit inleveren, want er is altijd een later moment.

Tarski over paradoxen: vraag 1

- Vraag 1: Welke van de drie oplossingsstrategieën voor het leugenaarsparadox die tijdens het hoorcollege werden besproken past Tarski toe. Hoe past hij deze oplossingsstrategie toe?
- Drie oplossingsstrategieën:
  1. Aannames over uitdrukbaarheid (niet alles is uitdrukbaar)
  2. We droppen het principe LEM (law of excluded middle, of tertium non datur) $\vdash$ A of niet A
  3. We droppen de aanname dat zinnen niet tegelijk waar en onwaar kunnen zijn (Ex Falso Quodlibet)

Tarski over paradoxen: vraag 1

- Tarski's oplossing: niet 2 of 3

  Personally as a logician, I could not reconcile myself with antinomies as a permanent element of our system of knowledge [p.66] [niet 3]

  In particular we can derive from it [theory of truth], in addition to all equivalences of form (3), some consequences of a general nature, such as the famous law of contradiction and of excluded middle [p. 69] [niet 2 of 3]

Tarski over paradoxen: vraag 1

- Tarski's oplossing: Aannames over uitdrukbaarheid
- De taal L waarvoor we waarheid definiëren mag niet semantisch gesloten (semantically universal) zijn. I.e.
    - in L komt de waarheid predicaat niet voor of
    - L heeft geen namen voor alle zinnen
- In zo een 'semantically restricted' taal is de leugenaarparadox (z: z is niet waar) niet uitdrukbaar

  In particular, it [common language] is semantically universal in the following sense. Together with the linguistic objects, ... names of these objects are also included ...; in addition the language contains semantic terms such as 'truth', ... [p.67]

  The question arises whether the notion of truth can be precisely defined, and thus a consistent and adeguate usage of this notion can be established at least for the semantically restricted languages [thus not semantically universal]. Under certain conditions the answer to this question proves to be affirmative. [p.68]

Tarski over paradoxen: vraag 2

- Vraag 2: Tarski bespreekt ook een aantal andere oplossingen voor het leugenaars paradox. Welke? Welke van de drie oplossingsstrategieën passen deze oplossingen toe?
  (i) Disregard them as jokes (p 66) [geen oplossingsstrategie]
  (ii) Antinomies constitute a very essential element of human thought (p. 66) [oplossingsstrategie 3]
  (iii) Nihilistic approach to the theory of truth (p. 66) [oplossingsstrategie 1]

Tarski's waarheidstheorie: vraag 3

- Vraag 3: Aan welke eigenschappen moet een waarheidstheorie volgens Tarski voldoen?
  - must preserve basic intentions of the Aristotelian formulation, confirm to the classical conception of truth
  - must be general (i.e. apply to all sentences of the language under consideration)
  - must be precise (e.g. language must be rigorously defined)
  - and formally correct (e.g. no vicious circle or paradoxes)

[It must be] formally correct and adequate in the sense that it implies all the equivalences of the form

(3) "p" is true if and only if p

in which "p" is replaced by any sentence of the language L [p. 65]

Tarski over objecttaal en metataal: vraag 4

- Wat is het verschil tussen objecttaal en metataal? Hoeveel metatalen zijn er voor het Nederlands? Welke?

  We should make a strict distinction between the language which is the object of our discussion and for which in particular we intend to construct the definition of truth, and the language in which the definition has to be formulated and its implications are studied . . . [p.68]

- Waarheid is uitsluitend voor objecttaal L gedefinieerd en niet voor de metataal.
  - Objecttaal (L): hiervoor willen wij waarheid definiëren
  - Metataal (ML): hierin gaan wij de waarheid van L definiëren

Tarski: vraag 4

- Objecttaal
  - mag niet semantisch gesloten zijn
  - heeft een gespecificeerde syntaxis
- Metataal
  - heeft namen voor alle zinnen in de objecttaal,
  - waarheidspredicaat waar-in-L voor de objecttaal L, en
  - een vertaling van de objecttaal.
- Hoeveel metatalen voor Nederlands? Oneindig veel (maar NL is wel semantisch gesloten, dus mogen wij geen consistente waarheidstheorie voor NL definiëren)

Recursieve definitie: vraag 8

- Geef een voorbeeld voor een verzameling die recursief gedefinieerd kan worden. Geef ook de recursieve definitie.
- De verzameling van even getallen E

(15) Recursieve definiëring van verzameling E

a. 0 is in E,

b. Als x is in E, dan $x + 2$ is in E,

c. Verder is niets in E.

- Opgave: definieer nu de verzameling van oneven getallen.