

Logica en de Linguistic Turn 2013

Proeftentamen 2 en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

October 19, 2013

Plan voor vandaag

► Proeftentamen 2

- Stellingen bewijzen [opgave 4]
- Operatie over verzamelingen [opgave 6]
- Equivalentierelatie [opgave 8]
- Functioneel volledigheid [opgave 5]
- andere opgaven

► Tractatus: beeldtheorie (2.1-3.05)

Volgende week:

- Zaal tentamen 2: ma 21 oktober, 12-14uur IWO 4.04B (geel)
- HWO2 (meeneemtentamen) uitgesteld:
 - van maandag 21 okt tot maandag 25 okt (ipv vr-vr)
 - Nieuwe deadline ma 28 okt, 23.59uur

Stellingen bewijzen

- ▶ Bewijsstrategie
 - Stellingen over concrete formules (met p, q, \dots)
 - ▶ Stelling juist/onjuist \Rightarrow waarheidstafel
 - Stelling over alle formules (met metavariables ϕ, ψ)
 - ▶ Stelling juist \Rightarrow argumentatie
 - ▶ Stelling onjuist \Rightarrow tegenvoorbeeld, i.e. geef concrete formules waarvoor de stelling niet klopt
- ▶ Opgave 4: Bewijs of de volgende juist zijn of onjuist:
 - (a) Als ϕ een contingentie is en ψ een tautologie, dan is $\psi \rightarrow \neg\phi$ een tautologie
 - (b) Als $\phi \vee \neg\psi$ een contradictie is, dan is $\phi \rightarrow \psi$ een tautologie.
- ▶ Meer stellingen: Bewijs of ze juist zijn of onjuist:
 1. $p \rightarrow \neg p$ is een contradictie
 2. $\phi \rightarrow \neg\phi$ is een contingentie
 3. Als $\neg(\phi \rightarrow \psi)$ een tautologie is, dan is ψ een contradictie
 4. $\neg(\phi \rightarrow \psi)$ is een tautologie desda ϕ een tautologie is

Operaties en relaties over verzamelingen: opgave 6

- ▶ Vereniging van A en B : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$
- ▶ Doorsnede van A en B : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$
- ▶ Complement van B gegeven A : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$
- ▶ Machtsverzameling van A : $\wp(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$
- ▶ Deelverzameling: $A \subseteq B$ desda voor alle x : $x \in A \Rightarrow x \in B$

Operaties en relaties over verzamelingen: opgave 6

- Gegeven zijn de volgende verzamelingen:

$$\bullet A := \{a\}, \quad B := \{2, \{2\}\}, \quad C := \{1, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad D := \{\{a\}, 2, \{2\}, 3\}.$$

- (i) Welke van de verzamelingen A t/m D zijn elementen van D ?
- (ii) Welke van de verzamelingen A t/m D zijn deelverzamelingen van D ?
- (iii) Geef de volgende verzamelingen aan middels opsomming van de elementen:
 - (a) $B \cap D$
 - (b) $B \cup C$
 - (c) $D - B$
 - (d) $(A \cap C) \cup (B \cap D)$
 - (e) $\wp(\wp(A))$
- (iv) Definiëer, door opsomming, drie verzamelingen X , Y en Z zodanig dat tegelijk zowel (i) $X - Y \in Z$ en tevens (ii) $Y - Z \subseteq X$ gelden.

Equivalentierelatie: opgave 8

- ▶ Een equivalentierelatie is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is.
- ▶ Voorbeelden (wel of niet equivalentierelatie?)

- (1)
- | | | |
|----|--|------------------------|
| a. | 'even groot als' over de verzameling natuurlijke getallen | wel |
| b. | 'tweelingbroer van' over verzameling van mensen (niet reflexief) | niet |
| c. | logische equivalentie (\Leftrightarrow) over de verzameling van formules in propositielogica | wel |
| d. | 'dezelfde leeftijd hebben als' over de verzameling mensen | wel |
| e. | 'vader van' over verzameling van mensen | niet |
| f. | 'iets gemeenschappelijk hebben met' over verzameling van mensen | niet (niet transitief) |

Eigenschappen van relaties

- ▶ R is **reflexief**, als voor alle $a \in A$ geldt $\langle a, a \rangle \in R$
- ▶ R is **irreflexief**, als voor alle $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$
- ▶ R is **symmetrisch** als voor alle $a, b \in A$ geldt: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.
- ▶ R is **asymmetrisch** als voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$.
- ▶ R is **antisymmetrisch** als voor alle $a, b \in A$ geldt: als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, a \rangle \in R$, dan $a = b$.
- ▶ R is **transitief** als voor alle $a, b, c \in A$, als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, c \rangle \in R$, dan geldt ook $\langle a, c \rangle \in R$.
- ▶ R over de verzameling A is **samenhangend** als voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R$ of $\langle b, a \rangle \in R$ of $a = b$

Operaties op relaties

- Compositie: Als R en S relaties zijn over een verzameling A , dan is $R \circ S$, de compositie van R en S , de (kleinste) relatie T over A zodanig dat als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, c \rangle \in S$, dan $\langle a, c \rangle \in T$.

$$R \circ S = \{ \langle a, c \rangle \mid \text{er is een } b \text{ met } \langle a, b \rangle \in R \text{ en } \langle b, c \rangle \in S \}$$

- Voorbeeld: de compositie van de relatie *kind van* met de relatie *kind van* geeft de relatie *kleinkind van*
- Inverse: Als R een relatie is over A , dan is R^i , de inverse van R , de verzameling van alle paren $\langle b, a \rangle$ zodanig dat $\langle a, b \rangle \in R$.

$$R^i = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

- Voorbeeld: De inverse van de *kind-van* relatie is de *ouder-van* relatie

Structuur van de Tractatus

- ▶ Voorwoord
- ▶ Ontologie (1–2.063)
- ▶ **De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)**
- ▶ Theorie van taal (3.1–4.2)
- ▶ Logica (4.2–6.13)
- ▶ Wiskunde (6.2–6.3)
- ▶ Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- ▶ Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- ▶ Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- ▶ Besluit (7)

De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)

- ▶ Beeld (Bild) en zijn elementen
- ▶ Afbeeldende relatie (abbildende Beziehung)
- ▶ Afbeeldingsvorm (Form der Abbildung)
- ▶ Afbeelden versus tonen
- ▶ Logische vorm
- ▶ Waarheid en onwaarheid
- ▶ Betekenis
- ▶ Contingentie
- ▶ Gedacht

Beeld: herhaling

- ▶ Wat is een beeld? Wat is het wezenlijke verschil tussen een Tatsache die geen beeld is en een Tatsache die wel een beeld is?
 - Beelden zijn Tatsachen die iets verbeelden, die model zijn voor iets anders
- ▶ Wat verbeelden beelden? Sachlagen
 - Een beeld is een beeld van een situatie (*Sachlage*), een (mogelijk complexe) stand van zaken (2.11)
 - Dus kan het ook een niet-bestaande stand van zaken afbeelden (2.201)

Totstandkoming van een beeld

- ▶ Wat maakt een beeld tot een beeld van een bepaalde situatie?
- ▶ Twee belangrijke elementen
 - (a) de afbeeldende relatie (abbildende Beziehung)
 - (b) de afbeeldingsvorm (Form der Abbildung)
- ▶ TLP 2.15 –2.17

Afbeeldingsvorm

2.15 Dass sich die Elemente des Bildes in bestimmter Art und Weise zu einander verhalten stellt vor, dass sich die Sachen so zu einander verhalten. Dieser Zusammenhang der Elemente des Bildes heiße seine Struktur und ihre Möglichkeit seine **Form der Abbildung**.

That the elements of the picture are combined with one another in a definite way, represents that the things are so combined with one another. This connexion of the elements of the picture is called its structure and the possibility of this structure is called the form of representation of the picture.

2.151 Die **Form der Abbildung** ist die Möglichkeit, dass sich die Dinge so zu einander verhalten, wie die Elemente des Bildes.

The form of representation is the possibility that the things are combined with another as are the elements of the picture.

Afbeeldende relatie

2.1511 Das Bild ist so mit der Wirklichkeit verknüpft; es reicht bis zu ihr.
Thus the picture is linked with reality; it reaches up to it.

2.1512 Es ist wie ein Masstab an die Wirklichkeit angelegt.
It is like a scale applied to reality.

2.1513 Nachdieser Auffassung gehört also zum Bilde auch noch die **abbildende Beziehung**, die es zum Bild macht.
According to this view the representing relation which makes it a picture, also belongs to the picture.

2.1514 Die **abbildende Beziehung** besteht aus den Zuordnungen der Elemente des Bildes und der Sachen.
The representing relation consists of the coordination of the elements of the picture and the things.

2.1515 Diese Zuordnungen sind gleichsam die Fühler der Bildelemente, mit denen das Bild die Wirklichkeit berührt.
These coordinations are as it were the feelers of its elements with which the picture touches reality.

2.16 Die Tatsache muss um Bild zu sein, etwas mit dem Abgebildeten gemeinsam haben.

In order to be a picture a fact must have something in common with what it pictures

2.161 In Bild und Abgebildetem muss etwas identisch sein, damit das eine überhaupt ein Bild des anderen sein kann.

In the picture and in the pictured there must be something identical in order that the one can be a picture of the other at all.

2.17 Was das Bild mit der Wirklichkeit gemein haben muss, um sie auf seine Art und Weise – richtig oder falsch – abbilden zu können, ist seine **Form der Abbildung**.

What the picture must have in common with reality in order to be able to represent it after its manner – rightly or falsely – is its form of representation.

Afbeeldende relatie

- ▶ Wat is de afbeeldende relatie?
- ▶ De afbeeldende relatie is de correlatie tussen de elementen van het beeld en de objecten in de afgebeelde situatie (2.1514, 2.13, 2.131).
- ▶ De afbeeldende relatie is direct (2.1511, 2.1512, 2.15121, 2.1515)
 - Terugkerende thema (verg. 2.03): geen zelfstandig ontologisch status voor relaties (vgl relaties in verzamelingenleer)
 - Voor 2de jaar studenten: Vergelijk met projectiemethode in kubus argument in PU

Afbeeldingsvorm

- ▶ De afbeeldingsvorm is de mogelijkheid van de structuur van het beeld (2.15).
- ▶ De structuur van een beeld is de manier waarop zijn elementen zich tot elkaar verhouden (verg. 2.032, 2.033)
- ▶ Voorbeelden afbeeldingsvorm: ruimtelijke vorm, gekleurde vorm, ...

Totstandkoming van een beeld

- ▶ Een beeld B is een afbeelding van een situatie S als
 - (i) de elementen in B gecorreleerd zijn met de objecten in S (**afbeeldende relatie**) (2.13, 2.131, 2.1514);
 - (ii) de vorm van B gelijk is aan de vorm van S (**afbeeldingsvorm**) (2.161, 2.17, 2.171), en logische vorm (2.18)).
- ▶ Over afbeeldingsvorm:

2.17 Was das Bild mit der Wirklichkeit gemein haben muss, um sie auf seine Art und Weise – richtig oder falsch – abbilden zu können, ist seine Form der Abbildung.

What the picture must have in common with reality in order to be able to represent it after its manner – rightly or falsely – is its form of representation.

Afbeelden versus tonen

- ▶ Kunnen wij alles afbeelden?
- ▶ Een beeld kan ieder werkelijkheid afbeelden (waarmee het formele overeenkomst heeft)

2.171 Das Bild kann jede Wirklichkeit abbilden, deren Form es hat.
Das räumliche Bild alles Räumliche, das farbige alles Farbige, etc.

The picture can represent every reality whose form it has. The spatial picture, everything spatial, the coloured, everything coloured, etc.

- ▶ Maar een beeld kan zijn afbeeldingsvorm niet afbeelden; deze toont het (2.172, 2.173, 2.174)
- ▶ Vergelijk met Russell (p. 198): “Are we to infer that the general form itself is a constituent of such logical propositions?”

Afbeelden versus tonen

2.172 Seine Form der Abbildung aber, kann das Bild nicht abbilden; es weist sie auf.

The picture, however, cannot represent its form of representation; it shows it forth.

2.173 Das Bild stellt sein Objekt von ausserhalb dar (sein Standpunkt ist seine Form der Darstellung), darum stellt das Bild sein Objekt richtig oder falsch dar.

The picture represents its object from without (its standpoint is its form of representation), therefore the picture represents its object rightly or falsely.

2.174 Das Bild kann sich aber nicht ausserhalb seiner Form der Darstellung stellen.

But the picture cannot place itself outside of its form of representation.

Logische vorm [2.18–2.203]

- ▶ Wat een beeld in ieder geval gemeen moet hebben met de afgebelde situatie is de logische vorm, de vorm van de werkelijkheid (2.18)
- ▶ Wat is de verhouding tussen afbeeldende vorm en logische vorm?
 - Een tekening of een beschrijving van een situatie hebben een verschillende afbeeldingsvorm. Maar de logische vorm van de situatie komt bij beide overeen.
- ▶ Alle beelden (ruimtelijke, gekleurde, ...) zijn ook logische beelden (2.182), maar niet alle beelden zijn ruimtelijk, gekleurde, ...

2.182 Jedes Bild ist auch ein logisches. (Dagegen ist z. B. nicht jedes Bild ein räumliches.) / Every picture is also a logical picture. (On the other hand, for example, not every picture is spatial.)

Waarheid en onwaarheid

- ▶ Wanneer is een Bild waar/onwaar?
- ▶ Waar is een beeld als het met de werkelijkheid overeenstemt (bijv. 2.21), als de stand van zaken die het beeld afbeeldt, bestaat.

2.21 Das Bild stimmt mit der Wirklichkeit überein oder nicht; es ist richtig oder unrichtig, wahr oder falsch. / The picture agrees with reality or not; it is right or wrong, true or false.

- ▶ Onwaarheid is niet een ander soort relatie tot een stand van zaken, maar simpelweg het niet-bestaan van de stand van zaken.

Betekenis (Sinn)

- ▶ Wat is de Sinn (betekenis) van een Bild?
- ▶ De betekenis van een beeld is de afgebeelde stand van zaken in de logische ruimte. (2.202, 2.221)
- ▶ De betekenis van een zin kennen is dus de waarheidscondities ervan kennen, weten wat het geval is als de zin waar is (verg. 4.024)

Contingentie

- ▶ Er zijn geen a priori ware beelden (2.225).
 - a priori waar \mapsto de waarheid ervan kan worden ingezien los van ervaring;
 - a posteriori waar \mapsto de waarheid ervan kan niet worden ingezien los van ervaring.
- ▶ Waarom zijn er geen a-priori waren beelden?
 - Ware beelden verbeelden Sachlagen die bestaan (i.e. Tatsachen) (bv. 2.221, 2.222)
 - het bestaan van een situatie is iets contingent (b.v. 2.0271)
 - iets contingent kan jij niet kennen los van ervaring [2.223] (dus is a posteriori)
- ▶ Twee onderscheiden
 - Noodzakelijk/contingent: metafysisch/ontologisch/logisch
 - A priori/a posteriori: kentheoretisch

Gedachten [3–3.05]

- ▶ Wat is volgens de Tractatus een gedachte? Wat is denken? Wat is denkbaar? Waarom kunnen wij niet onlogisch denken?
- ▶ Gedachten zijn logische beelden (3) ...
 - dus kunnen wij niet onlogisch denken (3.03)
 - dus zijn er geen a priori ware gedachten (3.04, 3.05)