Logica en de Linguistic Turn 2013

Functies en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

October 16, 2013

Plan voor vandaag

1. Functies (en relaties)
2. Een logisch puzzel en andere opgaven
3. Tractatus: beeldtheorie (2.1-3.05)

Huiswerk:

- Proeftentamen 2
- Syllabus hoofdstuk 2 + opgaven.
- Tractatus: beeldtheorie (2.1-3.05)

Participatieopdracht:

- Maak een tekening waarin de relatie tussen de volgende begrippen wordt geïllustreerd:
  - beeld (Bild)
  - elementen van een beeld
  - afbeeldende relatie (abbildende Beziehung)
  - afbeeldingsvorm (Form der Abbildung)

Functies

- Intuïtief: een functie is een soort black box waar je aan de ene kant iets instopt, één of meerdere argumenten van de functie, en aan de andere kant krijg je weer iets terug: het resultaat van het toepassen van de functie op de argumenten.

(1) a. geboorte datum van x: mensen $\rightarrow$ data
    b. V: formulas $\rightarrow$ waarheidswaarde (valuatie)
    c. $f_\neg$: $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ (1-plaatsige waarheidsfunctie)

Bijv $f_\neg$ toegepast aan het **argument** 0 levert de **waarde** 1 op: $f_\neg(0) = 1$

- Formeel: functies gedefinieerd als relaties (verzameling van n-tuples) die voldoen aan bepaalde condities [zie volgende slide].

(2) a. geboorte datum van $x = \{\langle \text{MA, 26-5} \rangle, \langle \text{JC, 25-12} \rangle, \dots\}$
    b. $V = \{\langle p, 1 \rangle, \langle \neg p, 0 \rangle, \dots\}$
    c. $f_\neg = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$

Notatie: $F(a) = b$ dan en slechts dan als $\langle a, b \rangle \in F$

Definitie van functie

- Een **functie** van verzameling A naar verzameling B is een binaire relatie $F \subseteq A \times B$ zodanig dat:
  i. Voor alle $a \in A$ is er een $b \in B$ met $\langle a, b \rangle \in F$, en
  ii. Voor alle $a \in A$ is er slechts één $b \in B$ met $\langle a, b \rangle \in F$.
- Voorbeelden: Stel $N = \{1, 2, 3\}$ en $Z = \{x, y\}$. Zijn de volgende relaties functies van N naar Z?

(3)
a. $R_1 = \{\langle 1, x \rangle, \langle 2, y \rangle\}$ nee
b. $R_2 = \{\langle 1, x \rangle, \langle 2, y \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, y \rangle\}$ nee
c. $R_3 = \{\langle 1, x \rangle, \langle 2, y \rangle, \langle 3, x \rangle\}$ ja
d. $R_4 = \{\langle 1, x \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, x \rangle\}$ ja

Eigenschappen van functies

- Een functie F met domein A en bereik B heet **surjectief**, als geldt: [notatie: $\langle a, b\rangle \in F$ desda $F(a) = b$]

  (4) Voor alle $b \in B$ is er een $a \in A$ met $F(a) = b$.

  In ieder punt in het bereik komt tenminstens een pijl aan.

- Een functie F met domein A en bereik B heet **injectief** als geldt:

  (5) Voor alle $a_1, a_2 \in A$: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow F(a_1) \neq F(a_2)$

  In geen punt in het bereik komt meer dan een pijl aan.

- Voorbeelden: $N = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{x, y\}$ en $C = \{a, b\}$

  (6)
  a. $F_1(N \rightarrow Z) = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 3, x\rangle\}$ surjectief, niet injectief
  b. $F_2(Z \rightarrow N) = \{\langle x, 3\rangle, \langle y, 1\rangle\}$ niet surjectief, wel injectief
  c. $F_3(Z \rightarrow C) = \{\langle x, a\rangle, \langle y, b\rangle\}$ wel surjectief, wel injectief
  d. $F_4(Z \rightarrow C) = \{\langle x, a\rangle, \langle y, a\rangle\}$ niet surjectief, niet injectief

Functies met meerdere argumenten

Een **functie** F van n verzamelingen $A_1, A_2, ..., A_n$ naar verzameling B is een n-aire relatie $F \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times B$ zodanig dat:

(i) Voor alle $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ is er een $b \in B$ met $\langle a_1, a_2, ..., a_n, b \rangle \in F$, en

(ii) Voor alle $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ is er slechts één $b \in B$ met $\langle a_1, a_2, ..., a_n, b \rangle \in F$.

Wij noemen in dit geval $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ **het domein** van de functie F en B **het bereik** van de functie.

Opgave (extra): Stel $A = \{a, b\}$. Beschrijf $\cap$ als functie met domein $\wp(A) \times \wp(A)$ (of $\wp(A)^2$) en bereik $\wp(A)$.

Eigenschappen van relaties

- Opgave 1: Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $X = \{1, 2, 3\}$

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$$

  Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitief en/of samenhangend is.

- Opgave 2: Definieer een R die alleen reflexief is.

Eigenschappen van relaties

- R is **reflexief**, als voor alle $a \in A$ geldt $\langle a, a \rangle \in R$
- R is **irreflexief**, als voor alle $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$
- R is **symmetrisch** als voor alle $a, b \in A$ geldt: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.
- R is **asymmetrisch** als voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$.
- R is **antisymmetrisch** als voor alle $a, b \in A$ geldt: als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, a \rangle \in R$, dan $a = b$.
- R is **transitief** als voor alle $a, b, c \in A$, als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, c \rangle \in R$, dan geldt ook $\langle a, c \rangle \in R$.

Eigenschappen van relaties: Samenhang

- R over de verzameling A is samenhangend als voor alle elementen a en b van A geldt: of de relatie verbindt a met b, of de relatie verbindt b met a of a en b zijn identiek.

(7) voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R$ of $\langle b, a \rangle \in R$ of $a = b$

- Voorbeelden: 'kleiner dan' over de verzameling natuurlijke getallen, maar niet over de verzameling mensen

Eigenschappen van relaties: Equivalentierelatie

- Een equivalentierelatie is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is.
- Voorbeelden (wel of niet equivalentierelatie?)

(8)
a. 'even groot als' over de verzameling natuurlijke getallen — wel
b. 'tweelingbroer van' over verzameling van mensen — niet (niet reflexief)
c. logische equivalentie ('$\Leftrightarrow$') over de verzameling van formules in propositielogica — wel
d. 'dezelfde leeftijd hebben als' over de verzameling mensen — wel
e. 'vader van' over verzameling van mensen — niet (niet symmetrisch)
f. 'iets gemeenschappelijk hebben met' over verzameling van mensen — niet (niet transitief)

Een logisch puzzel

Een gevangene kan kiezen uit twee deuren, waarachter of een prins zit, of een tijger (maar niet beide). Het is in principe mogelijk dat er achter beide deuren een prins zit, of achter beide deuren een tijger. Op beide deuren zitten bordjes met gegevens die waar of onwaar kunnen zijn. Dit is wat op de deuren staat:

- Deur 1: In deze kamer zit een prins en in de andere kamer een tijger.
- Deur 2: In een van de kamers zit een tijger en in de andere een prins.

De gevangene wordt nog vertelt dat één van de stellingen waar is en de andere onwaar. Verder wordt er niets verteld over de waarheid of onwaarheid van de gegevens. (i) Vindt met (gewoon) redeneren een deur waarachter een prins zit. (ii) Vindt een oplossing onder gebruik van waarheidstafels.

Een logisch puzzel

Modellering in propositielogica:

- Propositieletters:
  - p_1: prins is achter deur 1
  - p_2: prins is achter deur 2
  - t_1: tijger is achter deur 1
  - t_2: tijger is achter deur 2
- Voorwaarde 1: achter elk deur zit of een prins zit, of een tijger (maar niet beide)
  - V1: $\neg(p_1 \leftrightarrow t_1) \wedge \neg(p_2 \leftrightarrow t_2)$
- Op de deuren staat:
  - D1: $(p_1 \wedge t_2)$
  - D2: $(p_1 \wedge t_2) \vee (p_2 \wedge t_1)$
- Voorwaarde 2: Één van de stellingen D1 en D2 is waar en de andere onwaar:
  - V2: $\neg(D1 \leftrightarrow D2)$
- Vanuit hier berekenen met waarheidstafels ...

Stellingen

Onderzoek voor elk van de volgende stellingen of deze juist of onjuist is. Als de stelling juist is, geef dan een bewijs voor de stelling, als de stelling onjuist is, weerleg haar dan met een tegenvoorbeeld. Geef, in geval van een tegenvoorbeeld, kort aan waarom het een tegenvoorbeeld is.

1. Als ϕ een contingentie is, dan is $\phi \rightarrow \psi$ ook een contingentie.
2. Als ϕ een contradictie is, dan is $\phi \rightarrow \psi$ een tautologie.

Wiki: Groepindeling

gr.	leden	deadline	begrippen
gr.2	Wiard, Emiel, Joost	17.10	Tatsache, Sachverhalt, Gegenstand
gr.3	Noa, Odette, Caeser	22.10	Bild, Element des Bildes, Abbildende Beziehung
gr.4	TimBo, Camiel, Lotje	24.10	logisches Bild, Gedanke
gr.5	Svenja, Matthijs, Emma	05.11	Satz, Satzzeichen, Name
gr.6	Lucas, Satchel, Ilja	12.11	Zeigen, Sagen
gr.7	Luc Jacinta, TimBu	14.11	Tautologie, Kontradictie, Welt, Logischer Raum
gr.8	Elkan, Pieter	19.11	Form, Struktur
gr.9	Roel, Thomas, Laurens	21.11	Solipsismus, Realismus

Structuur van de Tractatus

- Voorwoord
- Ontologie (1–2.063)
- **De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)**
- Theorie van taal (3.1–4.2)
- Logica (4.2–6.13)
- Wiskunde (6.2–6.3)
- Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- Besluit (7)

De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)

- Vandaag [2.1–2.17]
  - Beeld (Bild) en zijn elementen [2.1–2.141]
  - Afbeeldende relatie (abbildende Beziehung) en de afbeeldingsvorm (Form der Abbildung) [2.15–2.17]
- Donderdag [2.17–3.05]
  - Afbeelden versus tonen
  - Logische vorm
  - Waarheid en onwaarheid
  - Betekenis
  - Contingentie
  - Gedacht

2.1 Wir machen uns Bilder der Tatsachen. / We make to ourselves pictures of the facts. [**TLP 2.1 –2.141**]

2.11 Das Bild stellt die Sachlage im logischen Raume, das Bestehen und Nichtbestehen von Sachverhalten vor. / The picture presents the facts [situations] in logical space, the existence and non-existence of atomic facts.

2.12 Das Bild ist ein Modell der Wirklichkeit. / The picture is a model of reality.

2.13 Den Gegenständen entsprechen im Bilde die Elemente des Bildes. To the objects correspond in the picture the elements of the picture.

2.131 Die Elemente des Bildes vertreten im Bild die Gegenstände. The element of the picture stand, in the picture, for the objects.

2.14 Das Bild besteht darin, dass sich seine Elemente in bestimmter Art und Weise zu einander verhalten. / The picture consists in the fact that its elements are combined with one another in a definite way.

2.141 Das Bild ist eine Tatsache. / The picture is a fact.

Beelden zijn Tatsachen (2.141)

- Beelden zijn geen objecten, zij hebben een structuur en een vorm.
- Beelden zijn mogelijk complex (i.e. niet atomair)
  Een 'atomair' beeld is een bestaande stand van zaken, een configuratie van objecten die gerealiseerd is.
  De objecten noemt Wittgenstein de elementen van het beeld (2.13, 2.131).
- Beelden bestaan.
- Donderdag gaan wij verder ...