

# Modale logica

Maria Aloni  
ILLC-University of Amsterdam  
M.D.Aloni@uva.nl

Logica en de Linguistic Turn 2013

26/11/13

# Plan voor vandaag

1. Modale logica: syntaxis
2. Modale logica in meervoud
3. Logisch-filosofische motivatie van de modale logica
4. NatDed: extra opgaven 1 en 2

## Huiswerk:

- ▶ Gamut, opg 4.7, extra opg. NatDed 3-4; Syllabus, 4.1 incl. opgaven
- ▶ Quine: tekst lezen en tekstvragen beantwoorden

## Overig:

- ▶ HW3 (deadline 1 dec)
- ▶ Wiki: commentaar (deadline vandaag) en eindversie lemma (deadline 1 dec)

# Modale logica

- ▶ Modale logica: propositielogica +  $\Box$  en  $\Diamond$ 
  - ▶  $\Box \mapsto$  noodzakelijkheid
  - ▶  $\Diamond \mapsto$  mogelijkheid
- ▶ De modale logica bestudeert de logica van modale stellingen.
  - (1) Modale stelling = stelling die niet alleen maar op grond van wat nu en hier het geval is beoordeeld kan worden
  - (2) Voorbeelden van modale stellingen:
    - a. De muur is rood maar hij had wit kunnen zijn.
    - b. Jan kwam niet naar het hoorcollege maandag, maar hij had wel moeten komen.
    - c. McX denkt dat er universalia zijn, maar er zijn geen universalia.
    - d. Volgens de Griekse mythologie is Pegasus een paard met vleugels, maar Pegasus bestaat niet.
    - e. Misschien is Jan aangekomen.
    - f. Klaas moet zijn zieke moeder verzorgen.
    - g. ...

# Definitie van de taal van modale logica

Zij  $PROP$  een verzameling propositieletters.

1. Als  $p \in PROP$ , dan is  $p$  is een formule van  $ML$ ;
2. als  $\phi$  en  $\psi$  formules van  $ML$  zijn, dan zijn  $\neg\phi$ ,  $\neg\psi$ ,  $(\phi \wedge \psi)$ ,  $(\phi \vee \psi)$ ,  $(\phi \rightarrow \psi)$  dat ook;
3. Als  $\phi$  een formule van  $ML$  is dan zijn  $\Diamond\phi$  en  $\Box\phi$  dat ook;
4. Niets is een formule van  $ML$  als het niet in een eindig aantal stappen gegenereerd is door de bovenstaande clausules.

► Formule of niet?

$$(3) \quad p, \quad pp, \quad p\neg q, \quad p \wedge \neg q, \quad \Box(p \wedge \neg q), \quad \Diamond p \rightarrow \Box q, \\ \Diamond p \Diamond \rightarrow \Box q, \quad \Box\Box, \quad \Box\Box p, \quad \Diamond(\Box \wedge \neg\Box q), \quad \Diamond(p \wedge \neg\Box q), \\ (\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Diamond p) \text{ [constructieboom]}$$

# Modaliteiten (in het meervoud)

## Modale operatoren en hun verschillende interpretaties

1. Nee, hoor, dat is *niet mogelijk*. Hans kan niet zowel lang als ook klein zijn. [logische (of alethische) mogelijkheid]
2. Het *niet mogelijk* om een vak meer dan 3 keer te herkansen. [deontische mogelijkheid]
3. Ik weet niet of Johannes de goudvis nog leeft. Het is *mogelijk* dat Mathilda's kat hem heeft opgevreten. [epistemische (of doxastische) mogelijkheid]

# Alethische modaliteit

- ▶ *Mogelijkheid* en *noodzakelijkheid* vanuit een logisch oogmerk.
  - ▶  $\Box \mapsto$  logische noodzakelijkheid [aletheia = waarheid]
  - ▶  $\Diamond \mapsto$  logische mogelijkheid
- ▶ Voorbeelden:
  - (4) a. Het is waar maar had ook onwaar kunnen zijn.  
 $\mapsto p \wedge \Diamond \neg p$
  - b. Het is noodzakelijk dat elke object identiek is met zichzelf.  $\mapsto \Box q$

# Deontische modaliteit

- ▶ *Mogelijkheid* en *noodzakelijkheid* gegeven een regelsysteem.
  - ▶  $\Diamond \mapsto$  het is toegestaan
  - ▶  $\Box \mapsto$  het is verplicht
- ▶ Voorbeelden:
  - (5) a. Bellen tijdens de les is niet toegestaan.  $\mapsto \neg\Diamond p$
  - b. Jij moet je mobiel uitzetten.  $\mapsto \Box p$
  - c. Alcohol drinken en auto rijden is verboden.  
 $\mapsto \neg\Diamond(p \wedge q)$
  - d. Jij mag nog een stukje taart nemen.  $\mapsto \Diamond p$

# Epistemische en doxastische modaliteit

- ▶ *Mogelijkheid* en *noodzakelijkheid* gegeven wat wij weten of geloven.
  - ▶  $\Diamond \mapsto$  gegeven de beschikbare informatie is het mogelijk
  - ▶  $\Box \mapsto$  gegeven de beschikbare informatie is het noodzakeiljk
- ▶ Voorbeelden
  - (6)
    - a. Jan moet aangekomen zijn.  $\mapsto \Box p$
    - b. Misschien heeft Piet een ongeluk gehad.  $\mapsto \Diamond p$
  - (7)
    - a. Jan gelooft dat Sinterklaas in het land is.  $\mapsto \Box p$  [doxa]
    - b. Ik weet dat Sinterklaas in het land is.  $\mapsto \Box p$   
[episteme]



# Logisch-filosofische motivatie van de modale logica

- ▶ Een valuatie  $V$  voor de taal van de propositielogica was een functie van formules naar waarheidswaardes:
  - ▶  $V : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ In Modale Logica:
  1. Valuaties gezien als *mogelijke werelden*;
  2. De waarheid van een formule kan afhankelijk zijn van *meer dan één* mogelijke wereld;
  3. Niet alles wat logisch mogelijk is is ook daadwerkelijk mogelijk.

# Valuaties als mogelijke werelden

- ▶ In een valuatie  $V$  voor de taal van de propositiële logica, voor elke  $\phi$ :  $V(\phi) = 1$ , of  $V(\phi) = 0$ .
- ▶ Een valuatie legt de waarheidswaarde van elke mogelijke uitspraak over de wereld vast
- ▶ En kan dus worden gezien als een volledige beschrijving van een mogelijke toestand van de wereld
- ▶ We noemen een valuatie om die reden ook wel een *mogelijke wereld*.
- ▶ Alles wat we zullen zeggen over mogelijkheid en noodzakelijkheid in ML, zal gedefiniëerd zijn in termen van mogelijke werelden.

*I believe, and so do you, that things could have been different in countless ways. (. . . ) Ordinary language permits the paraphrase: there are many ways things could have been besides the way they actually are. (. . . ) It says that there exist many entities of a certain description, to wit ways things could have been. (. . . ) I believe permissible paraphrases of what I believe; (. . . ) I therefore believe in the existence of entities that might be called ways things could have been. I prefer to call them possible worlds. [David Lewis, 1979]*

# Mogelijkheid in de Tractatus en modale logica

- ▶ Wittgensteins Tractatus:
  - ▶ Logische ruimte: verzameling mogelijke standen van zaken
  - ▶ Actuele wereld: deelverzameling logische ruimte
- ▶ Modale logica:
  - ▶ Logische ruimte: verzameling mogelijke werelden
  - ▶ Actuele wereld: element van logische ruimte

# Waarheid in ML afhankelijk van *meer dan één* wereld

- ▶ In PL was de waarheid van een formule bepaald op basis van één valuatie, die wat feitelijk het geval is in de actuele wereld representeert.
  - ▶ In modale logica, de waarheid van een formule kan afhankelijk zijn van meer dan één mogelijke wereld.
    - (8) a. Zin: Jan kwam niet naar het hoorcollege gisteren, maar hij had wel kunnen komen
    - b. Vertaling:  $\neg p \wedge \Diamond p$
    - c. Analyse: in de actuele wereld kwam Jan niet, maar er is een andere mogelijk wereld waarin hij wel kwam.
  - ▶ Dit vraagt om een *wereld afhankelijk notie van valuatie*:
    - ▶  $V : W \times PROP \rightarrow \{0, 1\}$
- Intuitief, per wereld  $w$ , zegt die valuatie  $V$  dat  $V(w, p) = 1$  als  $p$  waar is in  $w$ , en  $V(w, p) = 0$  als  $p$  onwaar is in  $w$

# Niet alles wat logisch mogelijk is is ook daadwerkelijk mogelijk

- ▶ In PL, alle logische mogelijke valuaties relevant voor *metalogische noties* zoals logisch equivalentie of geldigheid
- ▶ In ML, meerdere werelden relevant voor *waarheid* van formules:
  - (9) a.  $\Diamond\phi$  waar in  $w$  desda er is een  $w'$  die bereikbaar is vanuit  $w$  zodat  $\phi$  waar is in  $w'$
  - b.  $\Box\phi$  waar in  $w$  desda elke  $w'$  die bereikbaar is vanuit  $w$  is zodat  $\phi$  waar is in  $w'$
- ▶ Afhankelijk van interpretatie van  $\Diamond$  en  $\Box$  kunnen verschillende verzamelingen van mogelijke werelden relevant (bereikbaar) zijn:
  - ▶ alle logisch mogelijke werelden (alethisch modaliteit);
  - ▶ werelden in overeenstemming met een bepaalde verzameling van wetten (deontische modaliteit);
  - ▶ mogelijkheden die een persoon onderscheidt op basis van wat hij/zij weet (epistemische modaliteit).

We noemen dit de **modale basis** van de operatoren  $\Diamond$  en  $\Box$ .

## Voorbeeld: logisch mogelijk $\neq$ deontisch mogelijk

- ▶ Stel dat drinken en rijden verboden is
  - ▶ Twee propositieletters:  $p$  is drinken, en  $q$  is rijden
  - ▶ Vier logische mogelijkheden (vier mogelijke werelden)
  - ▶ Maar alleen drie deontische mogelijkheden.
  - ▶ Dus alleen drie werelden in deontische modale basis.
- (10)
  - a. Jij mag drinken, jij mag rijden, maar jij mag niet drinken en rijden.
  - b.  $\Diamond p \wedge \Diamond q \wedge \neg \Diamond(p \wedge q)$
  - c. Er is een deontisch mogelijke wereld waarin jij drinkt, er is een deontisch mogelijke wereld waarin jij rijdt, maar er is geen deontisch mogelijke wereld waarin jij drinkt en rijdt.

## Opgave

Vertaal de volgende zinnen in de taal van de modale logica:

- (11) Als het mogelijk waar is dat  $a$  is  $b$  dan is het ook noodzakelijk waar.
- a. Modale basis: alle logische mogelijkheden
  - b. Vertalingsleutel:  $p$  :  $a$  is  $b$
  - c. Vertaling:  $\Diamond p \rightarrow \Box p$
- (12) Als Peter niet binnen mag komen, dan moeten Jan en Bea ook weg.
- a. Modale basis: alle deontische mogelijkheden (of alle mogelijkheden binnen de regels van de spreker)
  - b. Vertalingsleutel:  $p$  :  $P$  komt binnen,  $q$  :  $J$  gaat weg,  $r$  :  $B$  gaat weg,
  - c. Vertaling:  $\neg \Diamond p \rightarrow \Box (q \wedge r)$
- (13) Sherlock acht het mogelijk dat Thelma niet vermoord is, en gelooft dat als zij wel vermoord is, dan heeft Louise het gedaan.
- a. Modale basis: Alle mogelijkheden gegeven de beschikbare informatie van Sherlock.
  - b. Vertalingsleutel:  $p$ :  $T$  is vermoord,  $q$ :  $L$  heeft het gedaan
  - c. Vertaling:  $\Diamond \neg p \wedge \Box (p \rightarrow q)$

## Opgave

Vertaal de volgende zinnen in de taal van de modale logica:

- (14)
- a. De muur is rood maar hij had wit kunnen zijn.
  - b. Jan kwam niet naar het hoorcollege maandag, maar hij had wel moeten komen.
  - c. McX denkt dat er universalia zijn, maar er zijn geen universalia.
  - d. Volgens de Griekse mythologie is Pegasus een paard met vleugels, maar Pegasus bestaat niet.
  - e. Misschien is Jan aangekomen.
  - f. Klaas moet zijn zieke moeder verzorgen.