

Logica en de Linguistic Turn 2012

Verzamelingen en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

9/10/12

Plan voor vandaag

1. Verzamelingenleer
2. Tractatus: beeldtheorie (2.1-3.05)
3. Een logisch puzzel

Huiswerk:

- ▶ Syllabus 2.1, opgaven 1-4. Extra stellingen bewijzen
- ▶ Tractatus: 2.1-3.05

Verzamelingen

- ▶ Één van de meest fundamentele begrippen van de formele wetenschappen
- ▶ Geen directe definitie mogelijk, wat een verzameling is kan alleen worden gedefinieerd door een hele theorie (axiomatic set theory)
- ▶ Voorbeelden van verzamelingen
 - De verzameling van de eerste drie letters van het alfabet: $\{a, b, c\}$
 - De verzameling van de natuurlijke getallen: $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$
 - De lege verzameling: \emptyset
- ▶ Er hoeft geen samenhang te bestaan tussen de elementen van een verzameling:
 - $\{a, \{1\}, \text{Donald Duck}\}$ is ook een verzameling
- ▶ Doel van de verzamelingenleer is om de eigenschappen van verzamelingen te onderzoeken onafhankelijk van de specifieke objecten die de verzameling vormen.

Elementen van verzamelingen

- ▶ De objecten die een verzameling vormen worden de **elementen** van de verzameling genoemd.
 - $a \in \{a, b, c\} \mapsto a$ is een element van $\{a, b, c\}$
 - $1 \notin \{a, b, c\} \mapsto 1$ is niet een element van $\{a, b, c\}$
- ▶ Een verzameling wordt volledig bepaald door zijn elementen:
 - $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$
 - Er is maar één lege verzameling: \emptyset
- ▶ Als je weet welke elementen er in een verzameling zitten, dan weet je alles van die verzameling.

Beschrijving van verzamelingen: drie methoden

1. **Opsomming:** alle elementen van de verzameling worden aangegeven

(1) Verzameling A van auteurs van Gamut:

$A = \{\text{vanBentham, Groenendijk, deJongh, Stokhof, Verkuyl}\}$

2. **Karakteristieke eigenschap:** eigenschap die alle objecten in de verzameling delen, maar geen object dat niet in de verzameling zit.

(2) a. $A = \{x \mid x \text{ is co-auteur van Gamut}\}$

b. $N = \{x \mid x \text{ is een natuurlijke getal}\}$

3. **Recursieve definitie:** beschrijft hoe je gegeven eindig veel basiselementen alle andere elementen van de verzameling kunt genereren

(3) a. $0 \in N$

b. Als $n \in N$, dan $n + 1 \in N$

c. Verder is niets in N .

Vraag: welke methode werkt niet voor oneindige verzamelingen?

Russell's paradox

- Komt voor als wij het volgende principe aannemen:

(4) Voor ieder eigenschap P is er een verzameling
 $\{x \mid x \text{ heeft } P\}$ [Cantor's **comprehension** principle]

- De paradox:

- Neem als karakteristieke eigenschap 'x is geen element van zichzelf' ($x \notin x$)
[Noem een object met deze eigenschap, en een zonder]
- R is de verzameling van alle verzamelingen met deze eigenschap: $R = \{x \mid x \notin x\}$
- Is $R \in R$? Of is $R \notin R$?

Relaties tussen verzamelingen

- Identiteit: $=$

(5) $A = B$ desda A en B precies dezelfde elementen hebben

- Deelverzameling: \subseteq

(6) $A \subseteq B$ desda alle elementen van A ook elementen van B zijn

- Echte deelverzameling: \subset

(7) $A \subset B$ desda $A \subseteq B$ en $A \neq B$

Voorbeelden: waar of onwaar?

- | | | | |
|------|----|-------------------------------------|--------|
| (8) | a. | $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$ | waar |
| | b. | $\{a, b, c\} \subseteq \{b, a, c\}$ | waar |
| | c. | $\{a, b, c\} \subset \{b, a, c\}$ | onwaar |
| (9) | a. | $\{a, b\} = \{b, a, c\}$ | onwaar |
| | b. | $\{a, b\} \subseteq \{b, a, c\}$ | waar |
| | c. | $\{a, b\} \subset \{b, a, c\}$ | waar |
| (10) | a. | $\{a\} = \{\{a\}\}$ | onwaar |
| | b. | $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ | onwaar |
| | c. | $\{a\} \in \{\{a\}\}$ | waar |
| | d. | $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | waar |
| | e. | $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ | waar |

Operaties

- ▶ Vereniging van A en B : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$
- ▶ Doorsnede van A en B : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$
- ▶ Complement van B gegeven A : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Machtsverzameling

- ▶ Toegepast op een verzameling A geeft de machtsverzamelingsoperatie de verzameling van alle deelverzamelingen van A .
- ▶ Machtsverzameling van A : $\wp(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

$$(11) \quad \wp(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Groepindeling

gr.	leden	startdat.	begripen
gr.1	Hoitzing, Koolen, vd Maas	04.10	Welt, Logischer Raum
gr.2	de Leeuw, Sukan	04.10	Tatsache, Sachverhalt, Gegenstand
gr.3	Hooyman, Luyckx, , deCuba	09.10	Bild, Element des Bildes Abbildende Beziehung
gr.4	Delver, Kruithof, Meester	11.10	logisches Bild, Gedanke
gr.5	Mol, de Lint	16.10	Satz, Satzzeichen, Name
gr.6	Kroon, van Hoorn	30.10	Zeigen, Sagen
gr.7	Lazâr, Koks, Labrujere	01.11	Tautologie, Kontradictie
gr.8	van Wijk, Heijn	06.11	Form, Struktur
gr.9	Ubbels, Post, Rietveld	08.11	Solipsismus Realismus

Structuur van de Tractatus

- ▶ Voorwoord
- ▶ Ontologie (1–2.063)
- ▶ **De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)**
- ▶ Theorie van taal (3.1–4.2)
- ▶ Logica (4.2–6.13)
- ▶ Wiskunde (6.2–6.3)
- ▶ Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- ▶ Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- ▶ Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- ▶ Besluit (7)

De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)

- ▶ Vandaag [2.1–2.17]
 - Beeld (Bild) en zijn elementen [2.1–2.141]
 - Afbeeldende relatie (abbildende Beziehung) en de afbeeldingsvorm (Form der Abbildung) [2.15–2.17]
- ▶ Donderdag [2.17–3.05]

2.1 Wir machen uns Bilder der Tatsachen. / We make to ourselves pictures of the facts. [TLP 2.1 –2.141]

2.11 Das Bild stellt die Sachlage im logischen Raume, das Bestehen und Nichtbestehen von Sachverhalten vor. / The picture presents the facts [situations] in logical space, the existence and non-existence of atomic facts.

2.12 Das Bild ist ein Modell der Wirklichkeit. / The picture is a model of reality.

2.13 Den Gegenständen entsprechen im Bilde die Elemente des Bildes. To the objects correspond in the picture the elements of the picture.

2.131 Die Elemente des Bildes vertreten im Bild die Gegenstände. The element of the picture stand, in the picture, for the objects.

2.14 Das Bild besteht darin, dass sich seine Elemente in bestimmter Art und Weise zu einander verhalten. / The picture consists in the fact that its elements are combined with one another in a definite way.

2.141 Das Bild ist eine Tatsache. / The picture is a fact.

Beelden zijn Tatsachen (2.141)

- ▶ Beelden zijn geen objecten, zij hebben een structuur en een vorm.
- ▶ Beelden zijn mogelijk complex (i.e. niet atomair)
Een 'atomair' beeld is een bestaande stand van zaken, een configuratie van objecten die gerealiseerd is.
De objecten noemt Wittgenstein de elementen van het beeld (2.13, 2.131).
- ▶ Beelden bestaan.

Beelden verbeelden Sachlagen (2.11)

- ▶ Een beeld is een beeld van een situatie (*Sachlage*), een (mogelijk complexe) stand van zaken (2.11)
- ▶ Dus kan het ook een niet-bestaande stand van zaken afbeelden (2.201)

- ▶ Wat maakt een beeld tot een beeld van een bepaalde situatie?
- ▶ Twee dingen
 - (a) de afbeeldende relatie (abbildende Beziehung)
 - (b) de afbeeldingsvorm (Form der Abbildung)
- ▶ TLP 2.15 –2.17

2.15 Dass sich die Elemente des Bildes in bestimmter Art und Weise zu einander verhalten stellt vor, dass sich die Sachen so zu einander verhalten. Dieser Zusammenhang der Elemente des Bildes heiße seine Struktur und ihre Möglichkeit seine **Form der Abbildung**.

That the elements of the picture are combined with one another in a definite way, represents that the things are so combined with one another. This connexion of the elements of the picture is called its structure and the possibility of this structure is called the form of representation of the picture.

2.151 Die **Form der Abbildung** ist die Mglichkeit, dass sich die Dinge so zu einander verhalten, wie die Elemente des Bildes.

The form of representation is the possibility that the things are combined with another as are the elements of the picture.

2.1511 Das Bild ist so mit der Wirklichkeit verknüpft; es reicht bis zu ihr.
Thus the picture is linked with reality; it reaches up to it.

2.1512 Es ist wie ein Masstab an die Wirklichkeit angelegt.
It is like a scale applied to reality.

2.1513 Nachdieser Auffassung gehört also zum Bilde auch noch die **abbildende Beziehung**, die es zum Bild macht. [afbeeldende relatie]
According to this view the representing relation which makes it a picture, also belongs to the picture.

2.1514 Die **abbildende Beziehung** besteht aus den Zuordnungen der Elemente des Bildes und der Sachen.
The representing relation consists of the coordination of the elements of the picture and the things.

2.1515 Diese Zuordnungen sind gleichsam die Fühler der Bildelemente, mit denen das Bild die Wirklichkeit berührt.
These coordinations are as it were the feelers of its elements with which the picture touches reality.

2.16 Die Tatsache muss um Bild zu sein, etwas mit dem Abgebildeten gemeinsam haben.

In order to be a picture a fact must have something in common with what it pictures

2.161 In Bild und Abgebildetem muss etwas identisch sein, damit das eine überhaupt ein Bild des anderen sein kann.

In the picture and in the pictured there must be something identical in order that the one can be a picture of the other at all.

2.17 Was das Bild mit der Wirklichkeit gemein haben muss, um sie auf seine Art und Weise – richtig oder falsch – abbilden zu können, ist seine **Form der Abbildung**.

What the picture must have in common with reality in order to be able to represent it after its manner – rightly or falsely – is its form of representation.

Afbeeldende relatie

- ▶ De afbeeldende relatie is de correlatie tussen de elementen van het beeld en de objecten in de afgebeelde situatie (2.1514, 2.13, 2.131).
- ▶ De afbeeldende relatie is direct (2.1511, 2.1512, 2.15121, 2.1515) Terugkerende thema (verg. 2.03)

Afbeeldingsvorm

- ▶ De afbeeldingsvorm is de mogelijkheid van de structuur van het beeld (2.15).
- ▶ De structuur van een beeld is de manier waarop zijn elementen zich tot elkaar verhouden (verg. 2.032, 2.033).

- ▶ Een beeld B is een afbeelding van een situatie S als
 - (i) de elementen in B gecorrelleerd zijn met de objecten in S (**afbeeldende relatie**) (2.13, 2.131, 2.1514);
 - (ii) de vorm van B gelijk is aan de vorm van S (**afbeeldingsvorm**) (2.161, 2.17, 2.171).

Een logisch puzzel

Een gevangene kan kiezen uit twee deuren, waarachter of een prins zit, of een tijger (maar niet beide). Het is in principe mogelijk dat er achter beide deuren een prins zit, of achter beide deuren een tijger. Op beide deuren zitten bordjes met gegevens die waar of onwaar kunnen zijn. Dit is wat op de deuren staat:

- ▶ Deur 1: In deze kamer zit een prins en in de andere kamer een tijger.
- ▶ Deur 2: In een van de kamers zit een tijger en in de andere een prins.

De gevangene wordt nog verteld dat één van de stellingen waar is en de andere onwaar. Verder wordt er niets verteld over de waarheid of onwaarheid van de gegevens. (i) Vindt met (gewoon) redeneren een deur waarachter een prins zit. (ii) Vindt een oplossing onder gebruik van waarheidstafels.