

Semantiek van modale logica

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

Logica en de Linguistic Turn 2012

4/12/12

Plan voor vandaag

1. Modale logica: Kripke modellen en semantiek

Huiswerk:

- ▶ Syllabus, 4.3 incl. opgaven.
- ▶ Tekst op blackboard lezen, zelf vragen bedenken
- ▶ Wiki: stemmen voor het beste lemma via email naar mij
deadline 9-12 (graag "wiki" noemen mail header)

Definitie van de taal van modale logica

Zij P een verzameling propositieletters.

1. Een propositieletter $p \in P$ is een formule van ML ;
2. als ϕ en ψ formules van ML zijn, dan zijn $\neg\phi$, $\neg\psi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ dat ook;
3. als ϕ een formule van ML is dan zijn $\Diamond\phi$ en $\Box\phi$ dat ook;
4. niets is een formule van ML als het niet gegenereerd is door de bovenstaande regels.

Kripke modellen voor modale logica

Een Kripke-model K is een viertal $\langle W, R, V, w \rangle$ waarbij:

1. W is een verzameling objecten [de mogelijke werelden]
2. R is een binaire relatie over W [de modale basis]
geeft aan welke wereld v een mogelijkheid is in w
3. V is een valuatiefunctie zodanig dat voor elke wereld w , V_w de waarde bepaalt van alle propositieletters in w
 - ▶ $V_w(p) = 1$ lezen we dan als ' p is waar in w '
 - ▶ $V_w(p) = 0$ lezen we dan als ' p is onwaar in w '[wereld afhankelijk valuatie]
4. w is een van de elementen van W [de actuele wereld]

Semantiek van de modale propositielogica

1. $\langle W, R, V, w \rangle \models p$ desda $V_w(p) = 1$;
2. $\langle W, R, V, w \rangle \models \neg\phi$ desda $\langle W, R, V, w \rangle \not\models \phi$;
3. ...
4. $\langle W, R, V, w \rangle \models \Diamond\phi$ desda er is een $v \in W$ zodanig dat Rwv en $\langle W, R, V, v \rangle \models \phi$;
5. $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box\phi$ desda voor elke $v \in W$ zodanig dat Rwv geldt $\langle W, R, V, v \rangle \models \phi$.

Opgave 1

Voor $P = \{p, q\}$, beschouw het Kripke model $K = \{W, R, V, w\}$

- ▶ $W = \{w, w_1, w_2, w_3\}$
- ▶ $R = \{\langle w, w_1 \rangle, \langle w, w_2 \rangle, \langle w, w_3 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$
- ▶ $V_w(p) = 1, V_{w_1}(p) = 1, V_{w_2}(p) = 0, V_{w_3}(p) = 0,$
 $V_w(q) = 1, V_{w_1}(q) = 0, V_{w_2}(q) = 1, V_{w_3}(q) = 0.$

Teken dit model, en ga nu na of de volgende formules waar zijn in K :

- (1)
- a. $\Diamond p \wedge \Diamond q$
 - b. $\Box(q \vee p)$
 - c. $\Box \Diamond p$
 - d. $\Diamond \Box q$
 - e. $\Diamond(\Diamond p \wedge \Diamond \neg p)$
 - f. $\Box(p \leftrightarrow \Diamond q)$
 - g. $p \rightarrow \Diamond \Box \neg q$
 - h. $\Diamond(p \leftrightarrow \Box p)$

Opgave 2

Vertaal de volgende zinnen in ML, en definieer K-modellen waarin ze waar zijn, en waarin ze onwaar zijn:

- (2) Als het mogelijk waar is dat a is b dan is het ook noodzakelijk waar.
- a. Modale basis: alle logische mogelijkheden
 - b. Vertalingsleutel: p : a is b
 - c. Vertaling: $\Diamond p \rightarrow \Box p$
- (3) Als Peter niet binnen mag komen, dan moeten Jan en Bea ook weg.
- a. Modale basis: alle deontische mogelijkheden (of alle mogelijkheden binnen de regels van de spreker)
 - b. Vertalingsleutel: p : P komt binnen, q : J gaat weg, r : B gaat weg,
 - c. Vertaling: $\neg \Diamond p \rightarrow \Box(q \wedge r)$
- (4) Sherlock acht het mogelijk dat Thelma niet vermoord is, en gelooft dat als zij wel vermoord is, dan heeft Louise het gedaan.
- a. Modale basis: Alle mogelijkheden gegeven de beschikbare informatie van Sherlock.
 - b. Vertalingsleutel: p : T is vermoord, q : L heeft het gedaan
 - c. Vertaling: $\Diamond \neg p \wedge \Box(p \rightarrow q)$

Opgave 3

Voor ieder zin in (5) definieer een K-model waarin de zin waar is, en een waarin ze onwaar is:

- (5)
- a. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
 - b. $p \rightarrow \Box\Diamond p$
 - c. $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$
 - d. $\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Diamond p$
 - e. $p \leftrightarrow \Diamond\Box p$