Logica en de Linguistic Turn 2012

Formules in predicatenlogica en de logica van het Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

1/11/12

Plan voor vandaag

1. Predicatenlogica: preciese syntaxis, bereik, binding, vertalingen
2. Tractatus: logica als systeem 4.2-4.23, 4.25-4.52, 5, 5.1-5.123,5.133-5.143.
3. opdracht 3 en zaaltentamen 2

Huiswerk:

- Gamut 3.3; Opg. 3.3, 3.5 (xi)-(xx); Extra opg. 1a-c.
- Tractatus: 5.55-5.5521, 5.5563-5.5571, 6.1-6.1202, 6.124-6.1251, 6.13-6.22.

Mededeling: wiki opdracht

Vocabulaire van een predikaatlogischetaal L

- Constant deel:
  - PL connectieven: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - kwantoren: $\forall$, $\exists$
  - oneindig veel individuele variabelen: $x, y, z, \ldots$
  - hakjes: $), ($
- Variabel deel:
  - Individuele constanten: a, b, c
    verwijzen naar individuen, entiteiten ('de Tractatus, Plato')
  - n-plaatsige predikaatconstanten
    - 1-plaatsige predikaatconstanten: P, Q
      verwijzen naar eigenschappen ('sterfelijk, mens, lachen')
    - 2-plaatsige predikaatconstanten: R
      verwijzen naar binaire relaties ('lezen, groter zijn dan')
    - ...

Syntaxis: definitie van formules van de taal L

(i) Als A een n-plaatsige predikaatletter is van L en elk van $t_1, ..., t_n$ is een constante uit het vocabulaire of een variabele, dan is $At_1, ..., t_n$ een formule van L; (atomaire formules)

(ii) Als ϕ een formule van L is dan is $\neg\phi$ dat ook;

(iii) Als ϕ en ψ formules van L zijn, dan zijn $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ dat ook;

(iv) Als ϕ een formule is van L en x een variabele, dan zijn ook $\exists x\phi$ en $\forall x\phi$ formules van L; (existentile en universele formules)

(v) Alleen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de clausules (i)-(iv) kan worden geconstrueerd, is een formule van L.

Voorbeelden: Pax (ja); $\forall aPa$ (nee); $\forall xPy$ (ja); $(\exists x \wedge Px)$ (nee); $\neg\exists z(\forall y(\exists xPxy \rightarrow Qy) \wedge Rzy)$ (ja, met constructieboom)

Definitie van bereik (scope)

Is $\forall x \phi$ een subformule van ψ, dan heet ϕ het **bereik** van het aangegeven voorkomen van de kwantor $\forall x$ in ψ. Evenzo voor voorkomens van kwantoren $\exists x$.

Het is noodzakelijk om in deze definitie over voorkomens van kwantoren te spreken, omdat er formules zijn als $\forall xAx \wedge \forall xBx$ waarin dezelfde kwantor meermalen voorkomt.

Vraag: Welke bereik voor die kwantoren die voorkomen in $\neg\exists z(\forall y(\exists xPxy \rightarrow Qy) \wedge Rzy)$?

Vrije variabelen en binding

- Een voorkomen van de variabele x in de formule ϕ heet **vrij** in ϕ als dit voorkomen van x niet ligt in het bereik van een kwantoor $\forall x$ of $\exists x$ in ϕ.

  Vraag: Welke voorkomen van welke variabel is vrij in $\neg\exists z(\forall y(\exists x Pxy \to Qy) \wedge Rzy)$?

- Als $\forall x\psi$ (of $\exists x\psi$) een subformule is van ϕ en x komt vrij voor in ψ dan heet dat voorkomen van x **gebonden door** de aangegeven kwantor $\forall x$ (of $\exists x$).
  Voorbeeld: In $\forall x(Ax \wedge \exists x Bx)$. De x in Bx is in het bereik van $\forall x$, maar is niet gebonden door $\forall x$.

  Vraag: welke variabel wordt gebonden door $\forall x$ in $\forall x Py$?

Formules, zinnen en volzinsfuncties

- Een **zin** van L is een formule van L zonder vrije variabelen.
  Voorbeelden: $\forall x Ay$ (nee); $\forall x(Ax \wedge \exists x Bx)$ (ja); $Ax \wedge \exists x Bx$ (nee)
- Een formule met vrije variabelen noemen wij een **volzinsfunctie** (propositional function).

Notatie

Als ϕ een formule is, c een constante en x een variabel, dan is $[c/x]\phi$ de formule die ontstaat door in ϕ alle vrije voorkomens van x te vervangen door c.

ϕ	$[c/x]\phi$
Axy	Acy
Axx	Acc
$\forall xAxx$	$\forall xAxx$
Ay	Ay

Vertalingen

(1) a. Plato is een mens.
b. Mp
c. Vertaalsleutel: Mx: x is een mens; p: Plato

(2) a. Plato slaat een mens.
b. $\exists x(Mx \wedge Spx)$
c. Vertaalsleutel: Mx: x is een mens; Sxy: x slaat y; p: Plato
d. Domain: personen

(3) a. Een student die te laat is, wordt gestraft.
b. $\forall x((Sx \wedge Lx) \rightarrow Gx)$
c. Vertaalsleutel: Sx: x is een student; ...
d. Domain: personen

(4) a. Een walvis is een zoogdier.
b. $\forall x(Wx \rightarrow Zx)$
c. Vertaalsleutel: ...
d. Domain: dieren

Structuur van de Tractatus

- Ontologie (1–2.063)
- De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- Theorie van taal (3.1–4.2)
- **Logica (4.2–6.13)**
- Wiskunde (6.2–6.3)
- Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- Besluit (7)

Logica in de Tractatus

- Logica als grondslag
  $\mapsto$ logische ruimte bepaalt de grenzen van taal, betekenis, denkbaar en werkelijkheid
- Logica als methode
  $\mapsto$ logische analysis als methode van de juiste filosofie
- Logica als systeem
  $\mapsto$ één ware logica = classieke predicatenlogica (Frege, Russell)

Logica als systeem (4.2–5.143)

Korte inhoudsopgave

- 4.2–4.23, 4.25: elementaire zinnen
- 4.26–4.45: combinatie van elementaire zinnen
- 4.46–4.4661: tautologie en contradictie
- 4.5–4.53: de algemene zinsvorm
- 5–5.101 zinnen als waarheidsfuncties van elementaire zinnen
- 5.11–5.131, 5.133–5.143: logisch gevolg

Betekenis van een zin (4.2)

- Algemene karakterisering gegeven van de betekenis van een zin:
  overeenstemming/niet-overeenstemming met de mogelijkheid van het bestaan/ niet bestaan van standen van zaken (4.2)
- Uitgewerkt in twee stappen:
  1. voor elementaire zinnen
  2. voor niet-elementaire zinnen

Elementaire zinnen (4.21–4.23, 4.25)

- Een elementaire zin (kleinste talige eenheid) is verbonden met een stand van zaken (kleinste ontologische einheid) (4.21, 2.01)
- Net als standen van zaken zijn elementaire zinnen logisch onafhankelijk van elkaar (4.211, vgl 1.21, 2.062)
- Een elementaire zin is een combinatie van namen (4.22), zoals een stand van zaken een combinatie van objecten is (2.01, 2.03)
- Elementaire zinnen $\mapsto$ eindpunt van analyse van complexe zinnen (4.221)
- Het bestaan van elementaire zinnen wordt in verband gebracht met de noodzakelijkheid van het bestaan van objecten en standen van zaken (4.2211, vgl 3.23)
- Een elementaire zin is waar/onwaar als de afgebeelde stand van zaken bestaat/niet bestaat (4.25)

Belang van elementaire zinnen

- Alle ware elementaire zinnen geven tezamen een volledige beschrijving van de wereld (4.26, vgl 1, 2.04)
- Ieder zin kan worden geanalyseerd in termen van elementaire zinnen (5)

Waarheidsmogelijkheden

- Bij n elementaire zinnen zijn er 2^n mogelijke werelden te beschrijven (4.27), zijn er 2^n waarheidsmogelijkheden (4.28, 4.3)
- Deze laten zich noteren in schema's (4.31)
- Waarheidsmogelijkheden = rijen in een waarheidstafel = valuaties

Complexe zinnen

- Elke zin kan worden opgevat als de uitdrukking van overeenstemming/ niet-overeenstemming met de waarheidsmogelijkheden van de elementaire zinnen waaruit hij is opgebouwd (en triviaal alle overige) (4.4, vgl 4.2)
- Dus elke zin kan gekarakteriseerd worden door een distributie van 1's en 0's over de rijen van de samengestelde waarheidstafel van zijn samenstellende elementaire zinnen (dus door een *waarheidsfunctie* van de elementaire zinnen (vgl 5)).
- Bij n elementaire zinnen zijn er 2^{2^n} distributies (waarheidsfuncties) mogelijk (4.42)

Voorbeeld

- In 4.442 een voorbeeld van een schematisch weergave van een complexe zin (welke?)
- Gegeven een conventie om de waarheidsmogelijkheden bij een gegeven aantal elementaire zinnen op te schrijven, kan een eenvoudiger notatie worden gebruikt: een rijtje 1's 0's gevolgd door de betreffende elementaire zinnen (4.442).
- B.v. (1101) (p,q) of (11-1)(p,q) (nb afwijking van gebruikelijke waarheidstafel wb de volgorde)
- 1 (of 0) is geen naam van een object (4.441 vgl de nadruk op het niet-refereren van logische constanten (tegen Frege)).

Tautologie en contradictie

- Tautologie en contradictie worden ingevoerd als extremen (4.46)
- Gegeven dat een zin toont wat hij zegt (4.022), tonen tautologie en contradictie dat ze niets zeggen (4.461)
- Tautologie en contradictie zijn betekenisloos (4.461)
- Maar niet onzinnig, ze behoren tot en functioneren binnen het logische symbolisme (4.4611)
- Tautologie en contradictie zijn geen beelden van de werkelijkheid (4.462) dus beschrijven ze geen situatie.
- Maar zij tonen eigenschappen van de logische ruimte door te laten zien dat in bepaalde verbindingen van betekenisvolle tekens, betekenis 'verdwijnt'.

De algemene zinsvorm (4.5)

- Een karakterisering van de algemene zinsvorm moet gelden voor alle soorten zinnen, en moet onafhankelijk zijn van concrete tekens en betekenissen
- W's karakterisering is: het is zo en zo (of zo zit de wereld in elkaar)
- In feite niets anders dan de uitsprak dat het wezen van een zin ligt in zijn afbeelding karakter
- Zinnen zijn (contingente) beelden van de wereld, zinnen zeggen hoe de wereld in elkaar zit
- De algemene zinsvorm kan geen zin zijn: het is een variabel, een schema van zinnen (4.53)

Zinnen als waarheidsfuncties van elementaire zinnen

- Elke zin is een waarheidsfunctie van (alle) elementaire zinnen (5, vgl 4.4)
- Een elementaire zin is een waarheidsfunctie van zichzelf
- Elementaire zinnen zijn de argumenten van de waarheidsfunctie (5.01)
- De waarheidsfunctie kunnen worden geordend (5.1)
- 5.101 doet dat voor twee-plaatsige waarheidsfuncties (nb de strook notatie in het 12e geval is W's notatie voor de Quine-dolk. Zie ook 5.1311 (functionele volledigheid van de dolk))

Logisch gevolg

- De waarheidsgronden van een zin zijn die waarheidsmogelijkheden van zijn argumenten (dwz rijen in de waarheidstafel) die de zin waar maken.
- Logisch gevolg (geldigheid) kan in termen daarvan gedefineerd worden (5.11, 5.12, 5.13):
  ψ volgt logisch uit $\phi_1, ..., \phi_n$ desda alle waarheidsgronden van $\phi_1, ..., \phi_n$ zijn ook waarheidsgronden van ψ

- In 5.122 andere formulering in termen van betekenis van zinnen:
  als ψ logisch uit ϕ volgt dan is de betekenis van ψ in de betekenis van ϕ besloten.
- De betekenis van p is in de betekenis van $p \wedge q$ besloten.
- Maar is de betekenis van $p \vee q$ besloten in de betekenis van p?

Logisch gevolg versus causaliteit

- De relatie van logisch gevolg is noodzakelijk (5.123)
- Zij berust op de vorm van de zinnen: het is een interne eigenschap (5.13, 5.131)
- Daarom is logisch gevolg a priori (5.133)
- Maar het is ook de enige a priori relatie tussen zinnen.
- Elementaire zinnen zijn logisch onafhankelijk (5.134, 5.135)
- Er is geen causale verbinding die het mogelijk zou maken uit de ene elementaire zin tot de andere te concluderen (5.136)
- Causaliteit is geen interne noodzakelijkheid, en daarin ligt ook ons wilsvrijheid (5.1362)

Tautologie en contradictie

- Tautologie en contradictie zijn extremen van de logisch gevolg relatie (5.143 vgl 4.463)
- De contradictie is de ‘sterkste’ zin, het is wat geen twee zinnen gemeenschappelijk hebben (in de zin dat ze het beide impliceren)
- De tautologie is de ‘zwakste’ zin, het is wat elk tweetal zinnen gemeenschappelijk hebben.