

Logica en de Linguistic Turn 2013

Geldigheid en de Tractatus

Maria Aloni

ILLC-University of Amsterdam

M.D.Aloni@uva.nl

November 7, 2013

Plan voor vandaag

1. Predicatenlogica: geldigheid
2. Tractatus: logica als systeem 4.2-4.23, 4.25-4.52, 5, 5.1-5.123, 5.133-5.143.
3. ZT2

Huiswerk:

- ▶ Gamut: 4.2.1. Opg. 4.2 (a)-(k), extra opg., deel 1, 5; extra opg., deel 2: 1-3.
- ▶ Tractatus: 5.55-5.5521, 5.5563-5.5571, 6.1-6.1202, 6.124-6.1251, 6.13-6.22.

NB:

- ▶ Aanstaande maandag, 11 november, 13-15uur:
Hoorcollege van Martin Stokhof over de Tractatus.
- ▶ **Aanwezigheidsplicht** (telt voor participatiecijfer blok 2)

Herhaling: Logisch systeem

Componenten van een logische systeem:

1. Syntaxis: definitie van taal
2. Semantiek: definitie van valuaties (intepretatie, betekenis)
3. Semantische Geldigheid
4. (Afleidingssysteem en syntactische geldigheid)

Syntaxis: definitie van formules van de taal L

- (i) Als A een n -plaatsige predikaatletter is van L en elk van t_1, \dots, t_n is een constante uit het vocabulaire of een variabele, dan is At_1, \dots, t_n een formule van L ; (atomaire formules)
- (ii) Als ϕ een formule van L is dan is $\neg\phi$ dat ook;
- (iii) Als ϕ en ψ formules van L zijn, dan zijn $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ dat ook;
- (iv) Als ϕ een formule is van L en x een variabele, dan zijn ook $\exists x\phi$ en $\forall x\phi$ formules van L ; (existentiele en universele formules)
- (v) Alleen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de clausules (i)-(iv) kan worden geconstrueerd, is een formule van L .

Semantiek: Valuaties gebaseerd op modellen (definition 7)

Is $M = \langle D, I \rangle$ een model voor L , dan is V_M , de valuatie V gebaseerd op M , gedefinieerd als volgt:

- (i) $V_M(Aa_1...a_n) = 1$ desda $\langle I(a_1), \dots, I(a_n) \rangle \in I(A)$
- (ii) $V_M(\neg\phi) = 1$ desda $V_M(\phi) = 0$
- (iii) $V_M(\phi \wedge \psi) = 1$ desda $V_M(\phi) = 1$ en $V_M(\psi) = 1$
- (iv) ...
- (v) $V_M(\phi \rightarrow \psi) = 1$ desda $V_M(\phi) = 0$ of $V_M(\psi) = 1$
- (vi) ...
- (vii) $V_M(\forall x\phi) = 1$ desda $V_M([c/x]\phi) = 1$ voor alle c van L
- (viii) $V_M(\exists x\phi) = 1$ desda $V_M([c/x]\phi) = 1$ voor tenminste één c van L

Belangrijk Voor \exists en \forall , I moet een functie zijn zodat voor ieder $d \in D$: er is een constant c : $I(c) = d$ (vrg. suriectief)

Semantische geldigheid (Gamut 4.

- ▶ Definitie semantische geldigheid:
Voor formules $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ van PredL, een redenering $\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$ is *geldig*, $\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$ als, voor alle modellen M die geschikt zijn voor $\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$, waarvoor $V_M(\phi_1) = \dots V_M(\phi_n) = 1$, ook $V_M(\psi) = 1$.
- ▶ Een model M heet *geschikt voor een redeneerschema* $\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$ als alle predikaatsletters en constanten van $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ een interpretatie krijgen in M .
- ▶ Essentieel verschil tussen PropL en PredL:
 - In PropL, er is wel een methode om in een eindig aantal stappen te bepalen of een redeneringschema geldig is of niet. Hoe? Middels waarheidstafels.
 - In PredL, er is **geen** methode om in een eindig aantal stappen te bepalen of een redeneringschema geldig is of niet [**Stelling van Church** over de onbeslisbaarheid van PredL)]

Geldigheid: voorbeelden

- | | | |
|-----|---|----------|
| (1) | $\forall x Sx / Sa$ | geldig |
| (2) | $\exists x Sx / \forall x Sx$ | ongeldig |
| (3) | $\forall x (Mx \rightarrow Sx), Ma / Sa$ | geldig |
| (4) | $\forall x (Mx \rightarrow Sx) / \exists x Sx$ | ongeldig |
| (5) | $\exists y \forall x Rxy / \forall x \exists y Rxy$ | geldig |
| (6) | $\forall x \exists y Rxy / \exists y \forall x Rxy$ | ongeldig |

Opdracht

- ▶ Vertaal de volgende zinnen in de taal van de predikatenlogica
 - (7) Iedereen behalve Marie is laat.
 - (8) Alleen Marie is laat.
- ▶ Definieer een model die een situatie representeert waarin de zin waar is
- ▶ Definieer een model die een situatie representeert waarin de zin onwaar is

Structuur van de Tractatus

- ▶ Ontologie (1–2.063)
- ▶ De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- ▶ Theorie van taal (3.1–4.2)
- ▶ **Logica (4.2–6.13)**
- ▶ Wiskunde (6.2–6.3)
- ▶ Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- ▶ Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- ▶ Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- ▶ Besluit (7)

Logica in de Tractatus

Welke rol voor logica in de Tractatus?

1. Logica als grondslag
 \mapsto logische ruimte bepaalt de grenzen van taal, betekenis, denkbaar en werkelijkheid
2. Logica als methode
 \mapsto logische analysis als methode van de juiste filosofie
3. Logica als systeem
 \mapsto één ware logica = klassieke predicaatlogica (Frege, Russell)

Logica als systeem (4.2–5.143)

Korte inhoudsopgave

- ▶ 4.2–4.23, 4.25: betekenis van elementaire zinnen
- ▶ 4.26–4.45: betekenis van combinatie van elementaire zinnen
- ▶ 4.46–4.4661: tautologie en contradictie
- ▶ 4.5–4.53: de algemene zinsvorm
- ▶ 5–5.101 zinnen als waarheidsfuncties van elementaire zinnen
- ▶ 5.11–5.131, 5.133–5.143: logisch gevolg

Betekenis van een zin (4.2)

- ▶ Algemene karakterisering van de betekenis (Sinn) van een zin:
 - overeenstemming/niet-overeenstemming met de mogelijkheid van het bestaan/ niet bestaan van standen van zaken (4.2)
- ▶ Uitgewerkt in twee stappen:
 1. voor elementaire zinnen
 2. voor niet-elementaire zinnen

Elementaire zinnen (4.21–4.23, 4.25)

- ▶ Een elementaire zin (kleinste talige eenheid) is verbonden met een stand van zaken (kleinste ontologische eenheid) (4.21, 2.01)
- ▶ Net als standen van zaken zijn elementaire zinnen logisch onafhankelijk van elkaar (4.211, vgl 1.21, 2.062)
- ▶ Een elementaire zin is een combinatie van namen (4.22), zoals een stand van zaken een combinatie van objecten is (2.01, 2.03)
- ▶ Elementaire zinnen \mapsto eindpunt van analyse van complexe zinnen (4.221)
- ▶ Het bestaan van elementaire zinnen wordt in verband gebracht met de noodzakelijkheid van het bestaan van objecten en standen van zaken (4.2211, vgl 3.23)
- ▶ Een elementaire zin is waar/onwaar als de afgebeelde stand van zaken bestaat/niet bestaat (4.25)

Belang van elementaire zinnen

- ▶ Alle ware elementaire zinnen geven tezamen een volledige beschrijving van de wereld (4.26, vgl 1, 2.04)
- ▶ Ieder zin kan worden geanalyseerd in termen van elementaire zinnen (5)

Waarheidsmogelijkheden

- ▶ Bij n elementaire zinnen zijn er 2^n mogelijke werelden te beschrijven (4.27), zijn er 2^n waarheidsmogelijkheden (4.28, 4.3)
- ▶ Deze laten zich noteren in schema's (4.31)
- ▶ Waarheidsmogelijkheden = rijen in een waarheidstafel = valuaties

Complexe zinnen

- ▶ Elke zin kan worden opgevat als de uitdrukking van overeenstemming/ niet-overeenstemming met de waarheidsmogelijkheden van de elementaire zinnen waaruit hij is opgebouwd (en triviaal alle overige) (4.4, vgl 4.2)
- ▶ Dus elke zin kan gekarakteriseerd worden door een distributie van 1's en 0's over de rijen van de samengestelde waarheidstafel van zijn samenstellende elementaire zinnen (dus door een *waarheidsfunctie* van de elementaire zinnen (vgl 5)).
- ▶ Bij n elementaire zinnen zijn er 2^{2^n} distributies (waarheidsfuncties) mogelijk (4.42)

Voorbeeld

- ▶ In 4.442 een voorbeeld van een schematisch weergave van een complexe zin (welke?)
- ▶ Gegeven een conventie om de waarheidsmogelijkheden bij een gegeven aantal elementaire zinnen op te schrijven, kan een eenvoudiger notatie worden gebruikt: een rijtje 1's 0's gevolgd door de betreffende elementaire zinnen (4.442).
- ▶ B.v. (1101) (p,q) of (11-1)(p,q) (nb afwijking van gebruikelijke waarheidstafel wb de volgorde)
- ▶ 1 (of 0) is geen naam van een object (4.441 vgl de nadruk op het niet-refereren van logische constanten (tegen Frege)).

Tautologie en contradictie

- ▶ Tautologie en contradictie worden ingevoerd als extremen (4.46)
- ▶ Gegeven dat een zin toont wat hij zegt (4.022), tonen tautologie en contradictie dat ze niets zeggen (4.461)
- ▶ Tautologie en contradictie zijn betekenisloos (4.461)
- ▶ Maar niet onzinnig, ze behoren tot en functioneren binnen het logische symbolisme (4.4611)
- ▶ Tautologie en contradictie zijn geen beelden van de werkelijkheid (4.462) dus beschrijven ze geen situatie.
- ▶ Maar zij tonen eigenschappen van de logische ruimte door te laten zien dat in bepaalde verbindingen van betekenisvolle tekens, betekenis 'verdwijnt'.

De algemene zinsvorm (4.5)

- ▶ Een karakterisering van de algemene zinsvorm moet gelden voor alle soorten zinnen, en moet onafhankelijk zijn van concrete tekens en betekenissen
- ▶ W's karakterisering is: het is zo en zo (of zo zit de wereld in elkaar)
- ▶ In feite niets anders dan de uitspraak dat het wezen van een zin ligt in zijn afbeelding karakter
- ▶ Zinnen zijn (contingente) beelden van de wereld, zinnen zeggen hoe de wereld in elkaar zit
- ▶ De algemene zinsvorm kan geen zin zijn: het is een variabel, een schema van zinnen (4.53)

Zinnen als waarheidsfuncties van elementaire zinnen

- ▶ Elke zin is een waarheidsfunctie van (alle) elementaire zinnen (5, vgl 4.4)
- ▶ Een elementaire zin is een waarheidsfunctie van zichzelf
- ▶ Elementaire zinnen zijn de argumenten van de waarheidsfunctie (5.01)
- ▶ De waarheidsfunctie kunnen worden geordend (5.1)
- ▶ 5.101 doet dat voor twee-plaatsige waarheidsfuncties (nb de strook notatie in het 12e geval is W's notatie voor de Quine-dolk. Zie ook 5.1311 (functionele volledigheid van de dolk))

Logisch gevolg

- ▶ De waarheidsgronden van een zin zijn die waarheidsmogelijkheden van zijn argumenten (dwz rijen in de waarheidstafel) die de zin waar maken.
- ▶ Logisch gevolg (geldigheid) kan in termen daarvan gedefinieerd worden (5.11, 5.12, 5.13):
 ψ volgt logisch uit ϕ_1, \dots, ϕ_n desda alle waarheidsgronden van ϕ_1, \dots, ϕ_n zijn ook waarheidsgronden van ψ

Logisch gevolg

- ▶ In 5.122 andere formulering in termen van betekenis van zinnen:
als ψ logisch uit ϕ volgt dan is de betekenis van ψ in de betekenis van ϕ besloten.
- ▶ De betekenis van p is in de betekenis van $p \wedge q$ besloten.
- ▶ Maar is de betekenis van $p \vee q$ besloten in de betekenis van p ?

Logisch gevolg versus causaliteit

- ▶ De relatie van logisch gevolg is noodzakelijk (5.123)
- ▶ Zij berust op de vorm van de zinnen: het is een interne eigenschap (5.13, 5.131)
- ▶ Daarom is logisch gevolg a priori (5.133)
- ▶ Maar het is ook de enige a priori relatie tussen zinnen.
- ▶ Elementaire zinnen zijn logisch onafhankelijk (5.134, 5.135)
- ▶ Er is geen causale verbinding die het mogelijk zou maken uit de ene elementaire zin tot de andere te concluderen (5.136)
- ▶ Causaliteit is geen interne noodzakelijkheid, en daarin ligt ook ons wilsvrijheid (5.1362)

Tautologie en contradictie

- ▶ Tautologie en contradictie zijn extremen van de logisch gevolg relatie (5.143 vgl 4.463)
- ▶ De contradictie is de 'sterkste' zin, het is wat geen twee zinnen gemeenschappelijk hebben (in de zin dat ze het beide impliceren)
- ▶ De tautologie is de 'zwakste' zin, het is wat elk tweetal zinnen gemeenschappelijk hebben.