Logica en de Linguistic Turn 2012

Relaties, functies en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

16/10/12

Plan voor vandaag

1. Relaties en functies
2. Tractatus: Theorie van taal (3.1–3.3)

Huiswerk:

- Proeftentamen
- Syllabus hoofdstuk 2 + opgaven.
- Tractatus: 3.31, 3.32-3.33, 3.34–3.5

Mededeling:
Cursussen verzorgd door het Instituut voor Nederlands Taalonderwijs en Taaladvies (INTT) van de UvA

- *Beter schrijven*: start ma. 5 november (van 15 tot 17 uur)
- *Beter spellen*: vrijdag 23 en 30 november van 15 tot 17 uur.

Meer info: www.taalwinkel.nl

Eigenschappen van relaties

Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $X = \{1, 2, 3\}$

$$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$$

Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitief en/of samenhangend is.

Eigenschappen van relaties: Reflexiviteit

- Reflexiviteit is een eigenschap die een binair relatie over A heeft als de relatie ieder object a van A verbindt met a zelf.

  (1) Voor alle $a \in A$ geldt $\langle a, a \rangle \in R$

- Voorbeelden: identiteit, *minstens zo groot als* over de verzameling mensen, logische equivalentie over de verzameling formules van PL
- R is **niet reflexief**, als er minstens één element van A is waarvoor niet geldt $\langle a, a \rangle \in R$
- Voorbeelden: *leuk vinden* over de verzameling mensen
- R is **irreflexief**, als voor alle $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$
- Voorbeelden: *groter zijn dan* over de verzameling mensen

Eigenschappen van relaties: Symmetrie

- Een relatie heet **symmetrisch** als zodra de relatie een object a met een object b verbindt het ook geldt dat de relatie b met a verbindt.

(2) Voor alle $a, b \in A$ geldt: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.

- Voorbeeld: 'broer van' over de verzameling mannen, maar niet over verzameling mensen (Vraag: waarom niet?)
- R is **asymmetrisch** als voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$.
- Voorbeeld: 'moeder van' over de verzameling mensen
- R is **antisymmetrische** als voor alle $a, b \in A$ geldt: als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, a \rangle \in R$, dan $a = b$.
- Voorbeeld: deelverzameling relatie, $\subseteq$, over verzameling verzamelingen

Eigenschappen van relaties: Transitiviteit

- Een relatie heet transitief als geldt dat als er een pijl loopt van punt 1 naar punt 2 en er een pijl loopt van punt 2 naar punt 3, dan moet er ook een directe pijl zijn van punt 1 naar punt 3.

  (3) voor alle $a, b, c \in A$, als $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, c\rangle \in R$, dan geldt ook $\langle a, c\rangle \in R$.

- Voorbeelden:
  - 'groter dan' over de verzameling mensen is transitief: als Maria groter is dan Paul en Paul is groter dan Kim, dan is Maria ook groter dan Kim.
  - 'opvolger van' over de verzameling natuurlijke getallen is **niet** transitief: 3 is de opvolger van 2, en 2 is de opvolger van 1, maar 3 is niet de opvolger van 1.

Eigenschappen van relaties: Samenhang

- R over de verzameling A is samenhangend als voor alle elementen a en b van A geldt: of de relatie verbindt a met b, of de relatie verbindt b met a of a en b zijn identiek.

  (4) voor alle $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle \in R$ of $\langle b, a \rangle \in R$ of $a = b$

- Voorbeelden: 'kleiner dan' over de verzameling natuurlijke getallen, maar niet over de verzameling mensen

Eigenschappen van relaties: Equivalentierelatie

- Een equivalentierelatie is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is.
- Voorbeelden (wel of niet equivalentierelatie?)

(5)
a. 'even groot als' over de verzameling natuurlijke getallen — wel
b. 'tweelingbroer van' over verzameling van mensen — niet (niet reflexief)
c. logische equivalentie ('$\Leftrightarrow$') over de verzameling van formules in propositielogica — wel
d. 'dezelfde leeftijd hebben als' over de verzameling mensen — wel
e. 'vader van' over verzameling van mensen — niet (niet symmetrisch)
f. 'iets gemeenschappelijk hebben met' over verzameling van mensen — niet (niet transitief)

Operaties op relaties

- Compositie: Als R en S relaties zijn over een verzameling A, dan is $R \circ S$, de compositie van R en S, de (kleinste) relatie T over A zodanig dat als $\langle a, b \rangle \in R$ en $\langle b, c \rangle \in S$, dan $\langle a, c \rangle \in T$.

$$R \circ S = \{\langle a, c \rangle \mid \textit{er is een } b \textit{ met } \langle a, b \rangle \in R \textit{ en } \langle b, c \rangle \in S\}$$

- Voorbeeld: de compositie van de relatie *kind van* met de relatie *kind van* geeft de relatie *kleinkind van*
- Inverse: Als R een relatie is over A, dan is R^i, de inverse van R, de verzameling van alle paren $\langle b, a \rangle$ zodanig dat $\langle a, b \rangle \in R$.

$$R^i = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$$

- Voorbeeld: De inverse van de *kind-van* relatie is de *ouder-van* relatie

Opgave

Teken je familie boom, en beschrijf via opsomming de volgende verzamelingen:

(6)
a. kind-van relatie K over de verzameling mensen in je familie
b. de inverse van kind-van relatie, K^i
c. de compositie van de relatie kind-van met de relatie kind-van, $K \circ K$

Functies

- Intuïtief: een functie is een soort black box waar je aan de ene kant iets instopt, één of meerdere argumenten van de functie, en aan de andere kant krijg je weer iets terug: het resultaat van het toepassen van de functie op de argumenten.

(7) a. geboorte datum van x: mensen $\rightarrow$ data
b. V: formulas $\rightarrow$ waarheidswaarde (valuatie)
c. $f_\neg$: $\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ (1-plaatsige waarheidsfunctie)

Bijv $f_\neg$ toegepast aan het **argument** 0 levert de **waarde** 1 op: $f_\neg(0) = 1$

- Formeel: functies gedefinieerd als relaties (verzameling van n-tuples) die voldoen aan bepaalde condities [zie volgende slide].

(8) a. geboorte datum van $x = \{\langle \text{MA, 26-5} \rangle, \langle \text{JC, 25-12} \rangle, \dots\}$
b. $V = \{\langle p, 1\rangle, \langle \neg p, 0\rangle, \dots\}$
c. $f_\neg = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$

Notatie: $F(a) = b$ dan en slechts dan als $\langle a, b\rangle \in F$

Definitie van functie

- Een **functie** van verzameling A naar verzameling B is een binaire relatie $F \subseteq A \times B$ zodanig dat:
  - i. Voor alle $a \in A$ is er een $b \in B$ met $\langle a, b\rangle \in F$, en
  - ii. Voor alle $a \in A$ is er slechts één $b \in B$ met $\langle a, b\rangle \in F$.
- Voorbeelden: Stel $N = \{1, 2, 3\}$ en $Z = \{x, y\}$. Zijn de volgende relaties functies van N naar Z?

(9)
a. $R_1 = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle\}$ nee
b. $R_2 = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 3, y\rangle\}$ nee
c. $R_3 = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 3, x\rangle\}$ ja
d. $R_4 = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 3, x\rangle\}$ ja

Eigenschappen van functies

- Een functie F met domein A en bereik B heet **surjectief**, als geldt: Voor alle $b \in B$ is er een $a \in A$ met $\langle a, b \rangle \in F$ (of $F(a) = b$) .
- Een functie F met domein A en bereik B heet **injectief** als geldt: Voor alle $a_1, a_2 \in A$: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow F(a_1) \neq F(a_2)$
- Voorbeelden: $N = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{x, y\}$ en $C = \{a, b\}$

(10) a. $F_1(N \to Z) = \{\langle 1, x \rangle, \langle 2, y \rangle, \langle 3, x \rangle\}$ surjectief, niet injectief
b. $F_2(Z \to N) = \{\langle x, 3 \rangle, \langle y, 1 \rangle\}$ niet surjectief, wel injectief
c. $F_3(Z \to C) = \{\langle x, a \rangle, \langle y, b \rangle\}$ wel surjectief, wel injectief
d. $F_4(Z \to C) = \{\langle x, a \rangle, \langle y, a \rangle\}$ niet surjectief, niet injectief

- Vraag 1: Stel F een functie is, is F^i ook een functie?
- Vraag 2: Stel F_1 en F_2 functies zijn, is $F_1 \circ F_2$ ook een functie?

Functies met meerdere argumenten

Een **functie** F van n verzamelingen $A_1, A_2, ..., A_n$ naar verzameling B is een n-aire relatie $F \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times B$ zodanig dat:

iii. Voor alle $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ is er een $b \in$ $\langle a_1, a_2, ..., a_n, b \rangle \in F$, en

iv. Voor alle $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ is er slechts één $b \in$ $\langle a_1, a_2, ..., a_n, b \rangle \in F$.

Wij noemen in dit geval $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ **het domein** van de functie F en B **het bereik** van de functie.

Opgave: Stel $A = \{a, b\}$. Beschrijf $\cap$ als functie van $\wp(A)^2$ naar $\wp(A)$.

Structuur van de Tractatus

- Ontologie (1–2.063)
- De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- **Theorie van taal (3.1–4.2)**
- Logica (4.2–6.13)
- Wiskunde (6.2–6.3)
- Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- Besluit (7)

Theorie van taal (3.1–4.2)

- Van gedachte (Gedanke) naar zin (Satz):

  3 Das logische Bild der Tatsachen ist der **Gedanke**.

  3.1 Im **Satz** drückt sich der Gedanke sinnlich wahrnehmbar aus.
- Waarom?
- Een antwoord in Voorwoord:

  [...] Das Buch will also dem Denken eine Grenze ziehen, oder vielmehr – nicht dem Denken, sondern dem Ausdruck der Gedanken: Denn um dem Denken eine Grenze zu ziehen, müssten wir beide Seiten dieser Grenze denken können (wir müssten als denken können, was sich nicht denken lässt).

  Die Grenze wird also nur in der Sprache gezogen werden können und was jenseits der Grenze liegt, wird einfach Unsinn sein. [...]

  $\mapsto$ Wij kunnen niet onlogisch denken, maar wel onzinnig spreken!

Theorie van taal (3.1–3.3)

3.1 In de zin (Satz) drukt de gedachten zich zinnelijk waarneembaar uit.

⋮

3.3 Alleen de zin (Satz) heeft zin (Sinn); alleen in het context van een zin heeft een naam betekenis (Bedeutung).

Korte inhoudsopgave

- Zinsteken (Satzzeichen)
- Zin (Satz)
- Betekenisvolle zin (Sinvolle Satz)
- Naam
- Analyse

Satzzeichen

- Satzzeichen = zinsteken
- Het zintuigelijk waarneembare aan de zin (geluidtekens, schrifttekens) (3.11, 3.12)
- Op te vatten als type (3.203). Token versus type (Peirce 1931).

  (11) Amsterdam is nat.

  (12) Amsterdam is nat.

  (11) en (12) zijn twee token van hetzelfde *Satzzeichen*.

- Zie 3.203 ... ("A" ist dasselbe Zeichen wie "A".)

Satz

- Satz= (vol)zin
- Zinsteken plus de projectieve relatie tot de wereld (3.12, 3.13)

  3.12 Das Zeichen, durch welches wir den Gedanken ausdrücken, nenne ich das Satzzeichen. Und der Satz ist das Satzzeichen in seiner projektiven Beziehung zur Welt.

  The sign through which we express the though I call the propositional sign. And the proposition is the propositional sign in its projective relation to the world.
- Vergelijk met de afbeeldende relatie (2.1513)
- Satzzeichen maar geen Satz: voorbeelden (die waarschijnlijk niet kloppen)

(13) Su ciò di cui non si può parlare, si deve tacere.

(14) Colorless green ideas sleep furiously.

Sinvolle Satz

- Sinvolle Satz = betekenisvolle zin

  3.13 Zum Satz gehört alles, was zur Projektion gehört; aber nicht das Projizierte. Also die Möglichkeit des Projizierten, aber nicht dieses selbst. Im Satz ist also sein Sinn noch nicht enthalten, wohl aber die Möglichkeit, ihn auszudrücken. ("Der Inhalt des Satzes" heißt der Inhalt des **sinnvollen Satzes**.) Im Satz ist die Form seines Sinnes enthalten, aber nicht dessen Inhalt To the proposition belongs everything which belongs to the projection; but not what is projected. Therefore the possibility of what is projected but not this itself. In the proposition, therefore, its sense is not yet contained, but the possibility of expressing it. (The content of the proposition means the content of the **signicant proposition**.) In the proposition the form of its sense is contained, but not its content.

- Zin plus het geprojecteerd, dus plus zijn betekenis (Sinn), de afgebeelde situatie (3.13)

Samenvatting

- Drie elementen:

$$\text{Zinsteken} \quad \rightarrow \quad \text{Situatie}$$

  - Zinsteken = materiele object zonder interpretatie
  - Zin = zinsteken + $\rightarrow$ (projectieve relatie)
  - Betekenisvolle zin = zinsteken + $\rightarrow$ + situatie

Zinsteken als feit [3.14–3.144]

- Een zinteken is een feit (3.14). Er zijn elementen –woorden– en een vorm (structuur) (vergelijk met 2.14)
- De zin is een gestructureerd geheel (*artikuliert* (3.141, 3.251))
- Dat een zin meer is dan een rijtje namen, maar een bepaalde vorm heeft, maakt dat het een afbeelding van iets is (3.142, 3.1432, 3.144)
- Alleen feiten kunnen een betekenis (*Sinn*) uitdrukken, een klasse van namen kan dat niet

Namen

- Namen zijn de elementen waaruit een zin is opgebouwd (3.2, 3.201, 3.202)
- Namen zijn enkelvoudig, niet samengesteld (*einfache Zeichen*)
- De betekenis (Bedeutung) van een naam is het object waar het voor staat (3.203, 3.22)
  Namen benoemen hun objecten, ze beschrijven ze niet (3.221). Beschrijven is iets dat een zin doet.
- Namen zijn oerteken (logisch gezien), er is geen definitie van mogelijk (3.26, 3.221), de relatie naam-object is inmiddelijk en noodzakelijk, kan alleen verhelderd worden, niet gedefinieerd (3.262, 3.263)
- Namen hebben alleen betekenis in de context van een zin (3.3) (vgl. Frege's contextprincipe uit de Grundlagen) (vgl 2.0122)

Analyse

- Het is mogelijk een gedachte in een zin zo uit te drukken dat de objecten in de gedachten precies corresponderen met de elementen (namen) van het zinsteken (3.2)
- Zo'n zin heet volledig geanalyseerd (3.201)
- Elke betekenisvolle zin moet tot zo'n zin te herleiden zijn, door tekens die voor complexe dingen staan via definities te herleiden tot combinaties van namen, die voor enkelvoudige objecten staan (3.23, 3.24, 3.25, 3.261)
- Op deze wijze wordt betekenis uiteindelijk ontologisch gefundeerd
- Stel geen enkelvoudige tekens of objecten, dan oneindige deelbaarheid, dus geen bepaaldheid van betekenis.