

Logica en de Linguistic Turn 2013

Predikatenlogica en Tractatus

Maria Aloni

ILLC-University of Amsterdam

M.D.Aloni@uva.nl

October 30, 2013

Plan voor vandaag

1. Predikatenlogica: vocabulair, atomaire zinnen, kwantificatie, eigenschappen van relaties
2. Tractatus: Theorie van taal (3.1–3.23, 3.25–3.31)
3. HWO1, wiki

Huiswerk:

- ▶ Gamut: 3.1, 3.2, 3.4, 3.8 (zonder semantiek). Opg. 3.1, 3.2, 3.5 (i)-(x).
- ▶ Tractatus: 3.32–3.33, 3.34–3.5.

Predikatenlogica

- ▶ Ontwikkeld door Gottlob Frege (1848–1925)
- ▶ Bestudeert redeneerschema's opgebouwd uit
 - Connectieven uit de propositielogica: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
 - Twee kwantoren:
 1. existentiële kwantor: \exists ('er is')
 2. universele kwantor: \forall ('voor alle')
- ▶ Alles wat in de **propositielogica** (PL) kon worden uitgedrukt, kan ook in de predikatenlogica (PredL) uitgedrukt worden (middels connectieven);
- ▶ Alles wat in de **categorische logica** (CL) kon worden uitgedrukt, kan ook in de predikatenlogica (PredL) uitgedrukt worden (middels \exists, \forall , en connectieven).

Predikatenlogica, propositielogica en categorische logica

- ▶ Maar de PredL is meer dan $PL + CL$
- ▶ Bij voorbeeld: in PredL (maar niet in $PL+CL$) kunnen wij de interne structuur van de volgende zinnen representeren (en dus de geldigheid van de redenering):
 - (1) a. Sommige studenten lezen alle boeken. \Rightarrow
 - b. Sommige studenten lezen de Tractatus.
- ▶ Wat missen $PL+CL$? Representaties/vertalingen voor
 - Relaties: lezen, houden van, groter zijn dan, ...
 - en individuele termen: de Tractatus, Plato, deze ketel, ...

Vocabulaire van predikatenlogica

► Constant deel:

- PL connectieven: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kwantoren: \forall, \exists
- oneindig veel individuele variabelen: x, y, z, \dots
- identiteit: $=$

► Variabel deel:

- Individuele constanten: a, b, c
verwijzen naar individuen, entiteiten ('de Tractatus, Plato')
- n -plaatsige predikaatconstanten
 - 1-plaatsige predikaatconstanten: P, Q
verwijzen naar eigenschappen ('sterfelijk, mens, lachen')
 - 2-plaatsige predikaatconstanten: R
verwijzen naar binaire relaties ('lezen, groter zijn dan')
 - ...

► hulpmiddelen: $), ($

Atomaire zinnen: subject-predikaatstructuur

► In PL of CL:

(2) Aristoteles is sterfelijk.

a. PL: p

b. CL: ? (volgens Leibniz AaS)

► In PredL, middels individuele constanten en 1-plaatsige predikaatconstanten

(3) Aristoteles is sterfelijk. $\mapsto Sa$

(4) Aristoteles is een mens. $\mapsto Ma$

(5) De vrouw lacht. $\mapsto Lv$

(6) Deze ketel lekt. $\mapsto Lk$

Atomaire zinnen: n -plaatsige relaties

- ▶ Met 2-plaatsige predikaatconstanten

(7) Socrates is ouder dan Plato. $\mapsto Osp$

(8) Plato bewondert Socrates. $\mapsto Bps$

- ▶ Met 3-plaatsige predikaatconstanten

(9) Marie zit tussen Jan en Piet. $\mapsto Tmjp$

- ▶ Vertalingssleutels: Volgorder is belangrijk, variabels nuttig (geen eigen betekenis, zij markeren een plaats in de zin)

(10) T_{xyz} : x zit tussen y en z

Kwantoren

- Kwantificerende uitdrukkingen niet vertaalbaar door middels van individuele constanten. Waarom?

- (11)
- a. Alle mensen zijn sterfelijk. $\nrightarrow Sa$
 - b. Geen mensen zijn sterfelijk. $\nrightarrow Sg$

- Aristoteles: Kwantificerende zinnen drukken relaties tussen predicaten uit.

- (12)
- a. Alle mensen zijn sterfelijk. $\mapsto MaS$
 - b. Geen mensen zijn sterfelijk $\mapsto MeS$

- Maar geen analyse van volgende redenering:

- (13)
- a. Geen student leest de Tractatus. \Rightarrow
 - b. Geen student leest alle boeken.

- Maria Aloni ILLC-University of Amsterdam M.D.Aloni@uva.nl:

Vertalingen categorische proposities

- (17) a. Sommige mensen zijn sterfelijk (MiS)
 b. $\exists x(Mx \wedge Sx)$
 'Er is een x : x is een mens en x is sterfelijk'
- (18) a. Geen mensen zijn sterfelijk (MeS)
 b. $\neg \exists x(Mx \wedge Sx)$
 'Er is geen x : x is een mens en x is sterfelijk'
- (19) a. Sommige mensen zijn niet sterfelijk (MoS)
 b. $\exists x(Mx \wedge \neg Sx)$
 'Er is een x : x is een mens en x is niet sterfelijk'
- (20) a. Alle mensen zijn sterfelijk. (MaS)
 b. $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$
 'Voor alle x : als x een mens is, dan is x sterfelijk'

NB: $\forall x(Mx \wedge Sx)$ betekent 'iedereen in ons domein is mens en sterfelijk'
 \neq 'alle mensen zijn sterfelijk'.

Vertalingen

- (21) a. Plato bewondert iemand.
b. $\exists x Bpx$
c. sleutel: Byx : y bewondert x ; p : Plato
d. domain: mensen
- (22) a. Alle honden zijn onvriendelijk
b. $\forall x(Hx \rightarrow \neg Fx) / \neg \exists x(Hx \wedge Fx)$
c. sleutel: Hx : x is een hond; Fx : x is vriendelijk
d. domain: dieren

Eigenschappen van relaties in PredL

- Reflexiviteit: ieder punt heeft een pijl naar zichzelf

$$\forall x Rxx$$

- Irreflexiviteit: geen punt heeft een pijl naar zichzelf

$$\forall x \neg Rxx / \neg \exists x Rxx$$

Eigenschappen van relaties in PredL

- ▶ Transitiviteit: Ieder punt die vanaf een punt in twee stappen kan worden bereikt, kan ook vanaf hetzelfde punt in één stap worden bereikt.

$$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$$

- ▶ Samenhang: tussen twee verschillend punten loopt altijd tenminste een pijl

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$$

Eigenschappen van relaties in PredL

- Symmetrie: als er tussen twee punten een pijl loopt in één richting, dan ook in de andere

$$\forall x \forall y (R_{xy} \rightarrow R_{yx})$$

- Asymmetrie: tussen twee (niet noodzakelijk andere) punten loopt in hoogstens één richting een pijl

$$\forall x \forall y (R_{xy} \rightarrow \neg R_{yx})$$

- Antisymmetrie: tussen twee verschillende punten loopt in hoogstens één richting een pijl

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (R_{xy} \rightarrow \neg R_{yx}))$$

Structuur van de Tractatus

- ▶ Ontologie (1–2.063)
- ▶ De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- ▶ **Theorie van taal (3.1–4.2)**
- ▶ Logica (4.2–6.13)
- ▶ Wiskunde (6.2–6.3)
- ▶ Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- ▶ Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- ▶ Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- ▶ Besluit (7)

Theorie van taal

- ▶ Van gedachte (Gedanke) naar zin (Satz):

3 Das logische Bild der Tatsachen ist der **Gedanke**.

3.1 Im **Satz** drückt sich der Gedanke sinnlich wahrnehmbar aus.

- ▶ Waarom?

- ▶ Een antwoord in Voorwoord:

[...] Das Buch will also dem Denken eine Grenze ziehen, oder vielmehr – nicht dem Denken, sondern dem Ausdruck der Gedanken: Denn um dem Denken eine Grenze zu ziehen, müssten wir beide Seiten dieser Grenze denken können (wir müssten als denken können, was sich nicht denken lässt).

Die Grenze wird also nur in der Sprache gezogen werden können und was jenseits der Grenze liegt, wird einfach Unsinn sein. [...]

⇒ Wij kunnen niet onlogisch denken, maar wel onzinnig spreken!

Theorie van taal (3.1–3.3)

3.1 In de zin (Satz) drukt de gedachten zich zinnelijk waarneembaar uit.

⋮

3.3 Alleen de zin (Satz) heeft zin (Sinn); alleen in het context van een zin heeft een naam betekenis (Bedeutung).

Korte inhoudsopgave

- ▶ Zinsteken (Satzzeichen)
- ▶ Zin (Satz)
- ▶ Betekenisvolle zin (Sinvolle Satz)
- ▶ Naam
- ▶ Analyse

Vraag

- ▶ Wat is het verschil tussen zinsteken en zin?

Satzzeichen

- ▶ Satzzeichen = zinsteken
- ▶ Het zintuigelijk waarneembare aan de zin (geluidtekens, schrifttekens) (3.11, 3.12)
- ▶ Op te vatten als type (3.203). Token versus type (Peirce 1931).

(23) Amsterdam is nat.

(24) Amsterdam is nat.

(23) en (24) zijn twee token van hetzelfde *Satzzeichen*.

- ▶ Zie 3.203 ... (“A” ist dasselbe Zeichen wie “A”.)

Satz

- ▶ Satz= (vol)zin
- ▶ Zinstecken plus de projectieve relatie tot de wereld (3.12, 3.13)

3.12 Das Zeichen, durch welches wir den Gedanken ausdrücken, nenne ich das Satzzeichen. Und der Satz ist das Satzzeichen in seiner projektiven Beziehung zur Welt.

The sign through which we express the thought I call the propositional sign. And the proposition is the propositional sign in its projective relation to the world.

- ▶ Vergelijk met de afbeeldende relatie (2.1513)
- ▶ Satzzeichen maar geen Satz: voorbeelden (die waarschijnlijk niet kloppen)

(25) Su ciò di cui non si può parlare, si deve tacere.

(26) Colorless green ideas sleep furiously.

Sinnvolle Satz

► Sinnvolle Satz = betekenisvolle zin

3.13 Zum Satz gehört alles, was zur Projektion gehört; aber nicht das Projizierte. Also die Möglichkeit des Projizierten, aber nicht dieses selbst. Im Satz ist also sein Sinn noch nicht enthalten, wohl aber die Möglichkeit, ihn auszudrücken. (“Der Inhalt des Satzes” heißt der Inhalt des **sinnvollen Satzes**.) Im Satz ist die Form seines Sinnes enthalten, aber nicht dessen Inhalt To the proposition belongs everything which belongs to the projection; but not what is projected. Therefore the possibility of what is projected but not this itself. In the proposition, therefore, its sense is not yet contained, but the possibility of expressing it. (The content of the proposition means the content of the **significant proposition**.) In the proposition the form of its sense is contained, but not its content.

► Zin plus het geprojecteerd, dus plus zijn betekenis (Sinn), de afgebeelde situatie (3.13)

Samenvatting

► Drie elementen:

Zinsteken \rightarrow Situatie

- Zinsteken = materiele object zonder interpretatie
- Zin = zinsteken + \rightarrow (projectieve relatie)
- Betekenisvolle zin = zinsteken + \rightarrow + situatie

Zinsteken als feit [3.14–3.144]

- ▶ Een zinteken is een feit (3.14). Er zijn elementen –woorden– en een vorm (structuur) (vergelijk met 2.14)
- ▶ De zin is een gestructureerd geheel (*artikuliert* (3.141, 3.251))
- ▶ Dat een zin meer is dan een rijtje namen, maar een bepaalde vorm heeft, maakt dat het een afbeelding van iets is (3.142, 3.1432, 3.144)
- ▶ Alleen feiten kunnen een betekenis (*Sinn*) uitdrukken, een klasse van namen kan dat niet

Namen: vragen

1. Wat zijn namen?
2. Zijn namen simpel of complex?
3. Wat is de betekenis van een naam?
4. Wat kunnen wij zeggen over de relatie naam-object?
5. Zijn namen zelfstandig?

Namen

- ▶ Namen zijn de elementen waaruit een zin is opgebouwd (3.2, 3.201, 3.202)
- ▶ Namen zijn enkelvoudig, niet samengesteld (*einfache Zeichen*)
- ▶ De betekenis (Bedeutung) van een naam is het object waar het voor staat (3.203, 3.22)
- ▶ Namen benoemen, vertegenwoordigen (vertreten) hun objecten, ze beschrijven ze niet (3.221). Beschrijven is iets dat een zin doet.
- ▶ Namen zijn oerteken (logisch gezien), er is geen definitie van mogelijk (3.26, 3.221), de relatie naam-object is inmiddelijk en noodzakelijk, kan alleen verhelderd worden, niet gedefinieerd (3.262, 3.263)
- ▶ Namen hebben alleen betekenis in de context van een zin (3.3) (vgl. Frege's contextprincipe uit de Grundlagen) (vgl 2.0122)

Analyse: vragen

1. Wanneer is een zin volledig geanalyseerd?
2. Kunnen alle zinnen volledig geanalyseerd worden?
3. Voor welke zinnen moet een volledig analyse mogelijk zijn en waarom?

Analyse

- ▶ Het is mogelijk een gedachte in een zin zo uit te drukken dat de objecten in de gedachten precies corresponderen met de elementen (namen) van het zinsteken (3.2)
- ▶ Zo'n zin heet volledig geanalyseerd (3.201)
- ▶ Elke betekenisvolle zin moet tot zo'n zin te herleiden zijn, door tekens die voor complexe dingen staan via definities te herleiden tot combinaties van namen, die voor enkelvoudige objecten staan (3.23, (3.24), 3.25, 3.261)
- ▶ Op deze wijze wordt betekenis uiteindelijk ontologisch gefundeerd
- ▶ Stel geen enkelvoudige tekens of objecten, dan oneindige deelbaarheid, dus geen bepaaldheid van betekenis (vergelijk 2.0201, 2.0211, 2.0212)

Studievragen

- ▶ Wat is het verschil tussen symbool en teken?
- ▶ Kunnen twee teken een gemeenschappelijk symbool hebben?
Als ja, geef een voorbeeld. Als nee, leg uit waarom.
- ▶ Kunnen twee symbolen een gemeenschappelijk teken hebben?
Als ja, geef een voorbeeld. Als nee, leg uit waarom.
- ▶ Wat bedoelt Wittgenstein met stelling 3.324? Breng ze in verband met wat W over filosofie zegt in het voorwoord:

*So entstehen leicht die fundamentalsten
Verwechslungen (deren die ganze Philosophie voll
ist). (3.324)*

Vraag 1: Aristoteles

- ▶ Redenering: If every B is A, then some A is B
- ▶ Vertaling: BaA / AiB
- ▶ Onderzoek geldigheid met Venn Diagrammen:
 - geldig met existentielle import (EI)
 - ongeldig zonder EI
- ▶ Bewijstechniek argument van Aristoteles: Reductio ad absurdum
- ▶ Toepassing techniek
 1. Stel BaA [premissie]
 2. en AeB [negatie conclusie]
 3. dan BeA
 4. Tegenspraak tussen BeA en BaA [onder aanname van EI]
 5. Dus AiB [conclusie]
- ▶ Verondersteld: EI in stap 4

Vraag 1: Russell

- ▶ (27) kan geen logische propositie (geen logische waarheid) volgens Russell zijn

(27) “If every B is A, then some A is B”

- ▶ Want anders zouden wij vanuit een universele formule (every B is A), een existentielle formule (some A is B) kunnen afleiden
- ▶ Maar logica kan niets over existentie beweren:
 - (i) ‘No principle of logic can assert existence’ ... (p. 204)
- ▶ En alle proposities van logica zijn universele formules:
 - (ii) ‘The complete asserted propositions of logic will all be such as affirm that some propositional function is always true’ (p. 204)
- ▶ Dus geen EI bij Russell (en ook niet bij de predikatenlogica)

Vraag 2(i): Extensie vs. Intensie

1. Extensie: concerns individuals [onze interpretatie van CatL]
2. Intensie: concerns ideas [Aristoteles]

(28) All men are animals

- a. All men are included amongst all animals [extensie]
- b. The idea of animal is included in the idea of man [intensie]

(29) a. Intension (man) = { *animal*, *rational*, *biped*, ... }

b. Extension (man) = { *John*, *Bill*, *Jack*, ... }

(30) a. 'Animal' comprises more individuals than 'man' does
[extensie]

b. Idea of man has more attributes than the idea of animal
[intensie]

Vraag 2(ii)

- ▶ Locke kritiek: (31-a) beter dan (31-b), want middenterm in het midden:

- (31)
- a. AaB, BaC/AaC ipv
 - b. BaC, AaB/AaC

- ▶ Leibniz het eens, maar laat zien waarom (b) standaard: middenterm in het midden in (b) als intensioneel geïnterpreteerd (zoals in Aristoteles):

- (32)
- a. 'C is in B' [=BaC]
 - b. 'B is in A' [=AaB]
 - c. 'C is in A' [=AaC]

Vraag 3(i)

Een eigenschap P heet impredicable desda P niet van toepassing is op P .

1. De eigenschap 'impredicable' is impredicable of het is niet impredicable. (LEM)
2. Geval 1: Stel dat de eigenschap 'impredicable' impredicable is.
3. Dan is 'impredicable' niet van toepassing op 'impredicable'. (Definitie).
4. Dan is dus 'impredicable' niet impredicable. (Afspraken over 'van toepassing zijn')
5. Dan is de eigenschap 'impredicable' impredicable en niet impredicable. (Adjunction)
6. Geval 2: Stel dat de eigenschap 'impredicable' niet impredicable is.
7. Dan is 'impredicable' niet van toepassing op 'impredicable'. (Afspraken over 'van toepassing zijn')
8. Dan is 'impredicable' impredicable. (definitie)
9. Dan is de eigenschap 'impredicable' impredicable en niet impredicable. (Adjunction)
10. De eigenschap 'impredicable' is impredicable en niet impredicable. (Disjunction Principle) (\Rightarrow Koeien kunnen vliegen. EFSQ)

Vraag 3(i)

- ▶ Tarski's oplossingsstrategie helpt niet bij dit paradox
- ▶ Tarski's oplossing is specifiek voor het waarheidspredikaat.
- ▶ Als wij dit paradox met Tarski willen oplossen, dan zouden wij 'impredicable' uit de verzameling van eigenschappen moeten halen waarop de eigenschap 'impredicable' mag worden toegepast.

Vraag 3(ii)

- ▶ Ja, Russells typentheorie kan de antinomie oplossen.
- ▶ Met Russells typentheorie zou 'impredicable' geen eigenschap meer kunnen zijn van 'impredicable'.
- ▶ 'Impredicable' zou alleen maar toepasbaar zijn op predikaten van een lager type dan 'impredicable' zelf.

Vraag 3(iii)

► Overeenkomsten:

- Beide oplossingsstrategieën werken met beperkingen op de uitdrukkingen waarop bepaalde predikaten kunnen worden toegepast. Dus beide theorieën werken met beperkingen op wat gezegd kan worden.

► Verschillen:

- De theorieën verschillen erin voor welke predikaten restricties worden geformuleerd. Tarski doet dit alleen voor het waarheidspredikaat. Russells beperking geldt in principe voor alle predikate.
- Een gevolg hiervan is dat Tarski's oplossing alleen bij paradoxen een uitkomst kan bieden die te maken hebben met het waarheidspredikaat. Russells oplossing is veel algemener.
- Een nadeel die hieruit voortkomt is wel dat Russells theorie veel meer uitdrukkingen verbiedt die eigenlijk onproblematisch zijn.