Logica en Logicisme

Frank Veltman

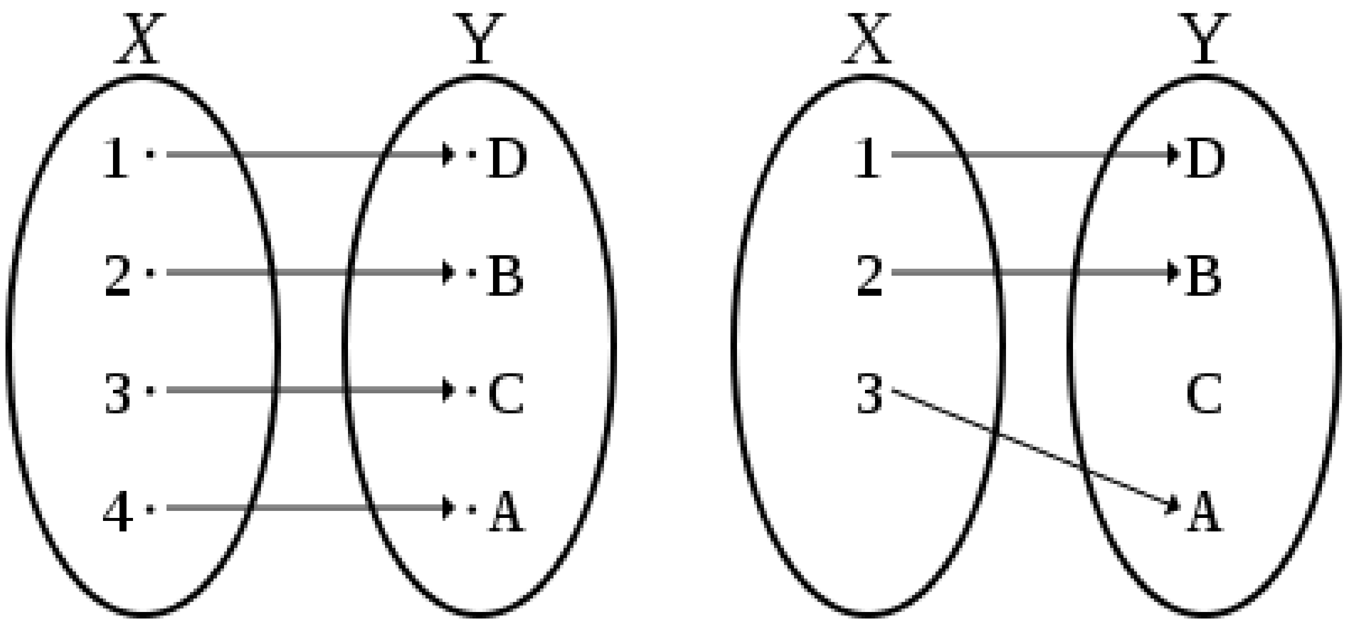
Institute for Logic, Language en Computation.

University of Amsterdam

10 December, 2012

Evenveel

Twee verzamelingen X en Y hebben evenveel elementen desda er een bijectie bestaat tussen X en Y.



Bijectie

Een relatie R is een bijectie tussen twee verzamelingen X en Y desda de volgende twee beweringen waar zijn:

- Bij elk object x uit X hoort precies één object y uit Y zodanig dat x in de relatie R met y staat.

- Bij elk object y uit Y hoort precies één object x uit X zodanig dat y in de relatie R met x staat.

Evenveel

Natuurlijke getallen

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots\ldots \end{array}$$

Even natuurlijke getallen

Evenveel

...				
1/4	...			
1/3	2/3	...		
1/2	2/2	3/2	...	
1/1	2/1	3/1	4/1	...

Breuken

Natuurlijke getallen

$\cdots$				
$1/4$	$\cdots$			
$1/3$	$2/3$	$\cdots$		
$1/2$	$2/2$	$3/2$	$\cdots$	
1				
$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$	$\cdots$

Breuken

Natuurlijke getallen

$$
\begin{array}{lllll}
\cdots & & & & \\
1/4 & \cdots & & & \\
1/3 & 2/3 & \cdots & & \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & \cdots & \\
\overset{1}{1/1} & \overset{2}{2/1} & 3/1 & 4/1 & \cdots
\end{array}
$$

Breuken

Natuurlijke getallen

...				
1/4	...			
1/3	2/3	...		
3				
1/2	2/2	3/2	...	
1	2			
1/1	2/1	3/1	4/1	...

Breuken

Natuurlijke getallen

$\cdots$				
$1/4$	$\cdots$			
$1/3$	$2/3$	$\cdots$		
3				
$1/2$	$2/2$	$3/2$	$\cdots$	
1	2	4		
$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$	$\cdots$

Breuken

Natuurlijke getallen

...				
1/4	...			
1/3	2/3	...		
3	5			
1/2	2/2	3/2	...	
1	2	4		
1/1	2/1	3/1	4/1	...

Breuken

Natuurlijke getallen

...				
1/4	...			
6				
1/3	2/3	...		
3	5			
1/2	2/2	3/2	...	
1	2	4		
1/1	2/1	3/1	4/1	...

Breuken

Natuurlijke getallen

...				
10 1/4	...			
6 1/3	9 2/3	...		
3 1/2	5 2/2	8 3/2	...	
1 1/1	2 2/1	4 3/1	7 4/1	...

Breuken

Vraag Hebben alle oneindige verzamelingen evenveel elementen?

Cantors antwoord Nee! Er zijn méér reële getallen dan natuurlijke getallen.

Bewijs (1891)

1 $\leftrightarrow$ 0, 2 8 4 9 8 6 5 3 1 1 4 6...

2 $\leftrightarrow$ 0, 8 7 6 5 4 4 4 4 3 9 6 9 8...

3 $\leftrightarrow$ 0, 7 7 7 7 3 1 2 2 5 3 4 6 0...

4 $\leftrightarrow$ 0, 7 7 7 1 0 1 0 4 9 7 2 8 7...

5 $\leftrightarrow$ 0, 6 5 2 3 2 4 2 5 2 6 2 7 2 8...

6 $\leftrightarrow$ 0, 5 5 1 6 6 1 3 1 4 2 2 2 7 6...

7 $\leftrightarrow$ 0, 0 0 0 4 5 0 9 4 3 0 0 2 1 1...

8 $\leftrightarrow$ ...

1 $\leftrightarrow$ 0, 2 8 4 9 8 6 5 3 1 1 4 6. . .

2 $\leftrightarrow$ 0, 8 7 6 5 4 4 4 4 3 9 6 9 8. . .

3 $\leftrightarrow$ 0, 7 7 7 7 3 1 2 2 5 3 4 6 0. . .

4 $\leftrightarrow$ 0, 7 7 7 1 0 1 0 4 9 7 2 8 7. . .

5 $\leftrightarrow$ 0, 6 5 2 3 2 4 2 5 2 6 2 7 2 8. . .

6 $\leftrightarrow$ 0, 5 5 1 6 6 1 3 1 4 2 2 2 7 6. . .

7 $\leftrightarrow$ 0, 0 0 0 4 5 0 **9** 4 3 0 0 2 1 1. . .

8 $\leftrightarrow$. . .

1 $\leftrightarrow$ 0, 2 8 4 9 8 6 5 3 1 1 4 6...

2 $\leftrightarrow$ 0, 8 7 6 5 4 4 4 4 3 9 6 9 8...

3 $\leftrightarrow$ 0, 7 7 7 7 3 1 2 2 5 3 4 6 0...

4 $\leftrightarrow$ 0, 7 7 7 1 0 1 0 4 9 7 2 8 7...

5 $\leftrightarrow$ 0, 6 5 2 3 2 4 2 5 2 6 2 7 2 8...

6 $\leftrightarrow$ 0, 5 5 1 6 6 1 3 1 4 2 2 2 7 6...

7 $\leftrightarrow$ 0, 0 0 0 4 5 0 9 4 3 0 0 2 1 1...

8 $\leftrightarrow$...

$\mathbf{1} \leftrightarrow 0,\ \mathbf{2}\ 8\ 4\ 9\ 8\ 6\ 5\ 3\ 1\ 1\ 4\ 6\ldots$

$\mathbf{2} \leftrightarrow 0,\ 8\ \mathbf{7}\ 6\ 5\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 9\ 6\ 9\ 8\ldots$

$\mathbf{3} \leftrightarrow 0,\ 7\ 7\ \mathbf{7}\ 7\ 3\ 1\ 2\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6\ 0\ldots$

$\mathbf{4} \leftrightarrow 0,\ 7\ 7\ 7\ \mathbf{1}\ 0\ 1\ 0\ 4\ 9\ 7\ 2\ 8\ 7\ldots$

$\mathbf{5} \leftrightarrow 0,\ 6\ 5\ 2\ 3\ \mathbf{2}\ 4\ 2\ 5\ 2\ 6\ 2\ 7\ 2\ 8\ldots$

$\mathbf{6} \leftrightarrow 0,\ 5\ 5\ 1\ 6\ 6\ \mathbf{1}\ 3\ 1\ 4\ \ 2\ 2\ 2\ 7\ 6\ldots$

$\mathbf{7} \leftrightarrow 0,\ 0\ 0\ 0\ 4\ 5\ 0\ \mathbf{9}\ 4\ 3\ 0\ 0\ 2\ 1\ 1\ldots$

$\mathbf{8} \leftrightarrow \ldots$

Beschouw eerst het *diagonaalgetal*

$$0,\ 2\ 7\ 7\ 1\ 2\ 1\ 9\ 0\ 7\ 1\ldots$$

En vervolgens een getal dat in elke decimaal van het diagonaalgetal verschilt.

Bijvoorbeeld:

$$0,\ 8\ 3\ 3\ 9\ 8\ 9\ 1\ 6\ 3\ 5\ldots$$

Claim: Dit getal komt nergens in de lijst voor!