

Logica en de Linguistic Turn 2013

# Semantiek van predicaatenlogica en Tractatus

Maria Aloni  
ILLC-University of Amsterdam  
M.D.Aloni@uva.nl

November 4, 2013

# Plan voor vandaag

1. Predicatenlogica: semantiek
2. Tractatus: Filosofie, tonen versus zeggen (4-4.041, 4.1-4.1213)

## Huiswerk:

- ▶ Gamut: 3.6-3.6.2, 3.7, 3.8. Opg.: 3.7, 3.11 (h-n); extra opg., deel 1: 3-4.
- ▶ Tractatus: 4.2-4.23, 4.25-4.52, 5, 5.1- 5.123,5.133-5.143.

# Semantiek van de predikatenlogica: introductie

- ▶ Middels **valuaties gebaseerd op modellen**,  $V_M$

$$V_M : \text{zinnen van } L \rightarrow \{0, 1\}$$

- ▶ Modellen  $M$  bepalen het domein en geven interpretaties van
  - Individuele constanten:  $a, b, c$
  - $n$ -plaatsige predicaten:  $P, Q, R$
- ▶ Connectieven geïnterpreteerd zoals in PL
- ▶ Substitutie-interpretatie (approach A) voor de kwantoren (niet gebruikelijk, maar meer intuïtief)

# Semantiek van de predikatenlogica: intuïtie

- ▶ Interpretatie van zin  $\phi$  = toekenning van waarheidswaarde
- ▶ Wat moeten wij weten om waarheidswaarde van (1) te kunnen bepalen?

(1) Iedereen behalve Marie is laat.

- ▶ Wij moeten weten:
  - wie Marie is
  - wie laat is
  - wat ons domein is (wie iedereen is)
- ▶ Al deze informatie is gegeven in een model

# Modellen

Een model  $M = \langle D, I \rangle$  voor een predikaatlogische taal  $L$  bestaat uit een domein  $D$  (een niet-lege verzameling) en een interpretatiefunctie  $I$  gedefinieerd op de verzameling constanten en predikaatletters uit het vocabulaire van  $L$  met de volgende eigenschappen:

- (i) als  $c$  een constante van  $L$  is, dan  $I(c) \in D$
- (ii) als  $B$  een  $n$ -plaatsige predikaatletter van  $L$  is, dan  $I(B) \subseteq D^n$

Voorbeeld: model voor onze klas (met onze namen als relevante individuele constanten en de predikaten *vrouw*, *man* en *langer dan* als relevanten predikaten).

## Valuaties gebaseerd op modellen

Is  $M = \langle D, I \rangle$  een model voor  $L$ , dan is  $V_M$ , de valuatie  $V$  gebaseerd op  $M$ , gedefinieerd als volgt:

- (i) Is  $Aa_1...a_n$  een atomaire zin van  $L$ , dan is  $V_M(Aa_1...a_n) = 1$  desda  $\langle I(a_1), \dots, I(a_n) \rangle \in I(A)$
- (ii)  $V_M(\neg\phi) = 1$  desda  $V_M(\phi) = 0$
- (iii)  $V_M(\phi \wedge \psi) = 1$  desda  $V_M(\phi) = 1$  en  $V_M(\psi) = 1$
- (iv)-(vi) ...
- (vii)  $V_M(\forall x\phi) = 1$  desda  $V_M([c/x]\phi) = 1$  voor alle  $c$  van  $L$
- (viii)  $V_M(\exists x\phi) = 1$  desda  $V_M([c/x]\phi) = 1$  voor tenminste één  $c$  van  $L$
- (ix)  $V_M(a_1 = a_2) = 1$  desda  $I(a_1) = I(a_2)$

**Belangrijk** Voor  $\exists$  en  $\forall$ ,  $I$  moet een functie zijn zodat voor ieder  $d \in D$ : er is een constant  $c$ :  $I(c) = d$  (vgl. suriectief)

# Atomaire zinnen en identiteit

- (i)  $V_M(Aa_1...a_n) = 1$  desda  $\langle I(a_1), \dots, I(a_n) \rangle \in I(A)$   
(ix)  $V_M(a_1 = a_2) = 1$  desda  $I(a_1) = I(a_2)$

Wat is de waarheidswaarde van de volgende in ons klasmodel?

- (2)      a.     $Mm$                                       onwaar, want  $I(m) \notin I(M)$   
            b.     $Lem$                                     waar, want  $\langle I(e), I(m) \rangle \in I(L)$   
            c.     $e = s$                                    onwaar, want  $I(e) \neq I(s)$   
            d.     $y = y$                                    (geen, want geen zin)

# Kwantoren

- (vii)  $V_M(\forall x\phi) = 1$  desda  $V_M([c/x]\phi) = 1$  voor alle  $c$  van  $L$
- (viii)  $V_M(\exists x\phi) = 1$  desda  $V_M([c/x]\phi) = 1$  voor tenminste één  $c$  van  $L$

- Notatie: Als  $\phi$  een formule is,  $c$  een constante en  $x$  een variabel, dan is  $[c/x]\phi$  de formule die ontstaat door in  $\phi$  alle vrije voorkomens van  $x$  te vervangen door  $c$ .

$\phi$	$[c/x]\phi$
$Axy$	$Acy$
$Axx$	$Acc$
$\forall xAxx$	$\forall xAxx$
$Ay$	$Ay$

- **Aanname:**  $I$  moet een functie zijn zodat voor ieder  $d \in D$ : er is een constant  $c$ :  $I(c) = d$  (vgl. suriectief). I.e. ieder object in  $D$  moet een naam hebben in  $L$



## Voorbeeld

Beschouw de volgende predikaatlogische taal  $L$ , en model  $M$  voor  $L$ :

(3) Taal  $L$

- a. drie constanten  $c_1, c_2, c_3$
- b. een 1-plaatsige predikaatletter  $A$
- c. een 2-plaatsige predikaatletter  $R$

(4) Model  $M = (D, I)$

- a.  $D = \{1, 2, 3\}$
- b. (i) Constanten:  $I(c_1) = 1, I(c_2) = 2, I(c_3) = 3$   
(ii) Predikaten:  
 $I(A) = \{1, 2\};$   
 $I(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$

Laat zien of de volgende zinnen in dit model waar of onwaar zijn.

(5)  $\forall x A x; \exists x A x; \forall x x = x; \forall x R x c_1; \forall x \exists y R x y; \exists y \forall x R x y$

# Opdracht

- ▶ Vertaal de volgende zinnen in de taal van de predikatenlogica
  - (6) Iedereen behalve Marie is laat.
  - (7) Alleen Marie is laat.
- ▶ Definieer een model die een situatie representeert waarin de zin waar is
- ▶ Definieer een model die een situatie representeert waarin de zin onwaar is

# Filosofie, tonen versus zeggen (4–4.041, 4.1–4.1213)

## Korte inhoudsopgave

- ▶ 4–4.001: gedachten, zinnen en taal
- ▶ 4.002–4.0031: de logica van de dagelijkse taal, de aard van filosofische uitspraken, de rol van de filosofie
- ▶ 4.01–4.041: de zin als beeld van de werkelijkheid
- ▶ 4.1–4.116 de rol van de filosofie in het licht van de doelstelling van de Tractatus
- ▶ 4.12–4.1213 tonen versus zeggen

# Gedachten, zinnen en taal

- ▶ Wat is de relatie tussen gedachten en zinnen? Kan ieder gedachte door een zin wordt uitgedrukt? Drukt ieder zin een gedachte uit?
- ▶ De gedachte is de zinvolle zin (4)
  - Ieder gedachte kan worden uitgedrukt door een zinvolle zin.
  - Ieder zinvolle zin is de uitdrukking van een gedachte.
  - Grenzen van het denken = grenzen van zinvol taalgebruik (vergelijk voorwoord)
- ▶ Hoe wordt de taal gedefinieerd?
- ▶ De totaliteit van de zinnen is de taal (4.001)

## De logica van de dagelijkse taal (4.002)

4.002 Der Mensch besitzt die Fähigkeit Sprachen zu bauen, womit sich jeder Sinn ausdrücken lässt, ohne eine Ahnung davon zu haben, wie und was jedes Wort bedeutet. Wie man auch spricht, ohne zu wissen, wie die einzelnen Laute hervorgebracht werden. Die Umgangssprache ist ein Teil des menschlichen Organismus und nicht weniger kompliziert als dieser. Es ist menschenunmöglich, die Sprachlogik aus ihr unmittelbar zu entnehmen. Die Sprache verkleidet den Gedanken. Und zwar so, dass man nach der äußeren Form des Kleides, nicht auf die Form des bekleideten Gedankens schließen kann; weil die äußere Form des Kleides nach ganz anderen Zwecken gebildet ist als danach, die Form des Körpers erkennen zu lassen. Die stillschweigenden Abmachungen zum Verständnis der Umgangssprache sind enorm kompliziert.

## De logica van de dagelijkse taal (4.002)

- ▶ De dagelijkse taal is gecompliceerd, maar ook verhullend.
- ▶ Haar uiterlijke (grammaticale) vorm heeft weinig te maken met de (logische) vorm van de gedachten die ermee kunnen worden uitgedrukt.
- ▶ Het is daarom moeilijk haar logica te vatten, en dat is een brom van onsinnigheid.

## De aard van (slechte) filosofische uitspraken (4.003)

4.003 Die meisten Sätze und Fragen, welche über philosophische Dinge geschrieben worden sind, sind nicht falsch, sondern unsinnig. Wir können daher Fragen dieser Art überhaupt nicht beantworten, sondern nur ihre Unsinnigkeit feststellen. Die meisten Fragen und Sätze der Philosophen beruhen darauf, dass wir unsere Sprachlogik nicht verstehen. (Sie sind von der Art der Frage, ob das Gute mehr oder weniger identisch sei als das Schöne.) Und es ist nicht verwunderlich, dass die tiefsten Probleme eigentlich keine Probleme sind.

## De aard van (slechte) filosofische uitspraken (4.003)

- ▶ De meeste filosofische vragen en uitspraken zijn onsinnig (vergelijk voorwoord)
- ▶ Zij berusten op misverstand inzake de logica van ons taal, b.v.  
(8) Is het goede meer of minder identiek dan het schone?
- ▶ De meeste filosofische problemen zijn dus geen problemen.
- ▶ Wat is dan de rol van de juiste filosofie?



# De rol van de (juiste) filosofie (4.0031)

4.0031 Alle Philosophie ist “Sprachkritik”. ... Russell's Verdienst ist es, gezeigt zu haben, dass die scheinbar logische Form des Satzes nicht seine wirkliche sein muss.

- ▶ Filosofie (dwz de juiste filosofie) is taalkritiek.
- ▶ Haar doel is de juiste logische vorm van onze taal achterhalen (vergelijk 6.53).
- ▶ Russell's 'On denoting': logische vorm  $\neq$  grammaticale vorm

- (9)
- a. The king of France is bald. (grammaticale vorm)
  - b. There is a unique  $x$  such that  $x$  is king of France  
and  $x$  is bald. (logische vorm)

# Zin als beeld van de werkelijkheid

- ▶ Sluit direct aan op 4
- ▶ De zin is een (logische) beeld van de werkelijkheid
- ▶ Het is een model van de werkelijkheid zoals wij denken dat die in elkaar zit (4.01 vergelijk 2.1, 2.12)
- ▶ Zinnen hebben dus een waarheidspretentie.

# De logica van de afbeelding

- ▶ Beeld (taal) en afgebeelde (werkelijkheid) zijn gerelateerd door
  - de afbeeldende relatie en
  - de identiteit van logische vorm.
- ▶ Ook verschillende afbeelding van hetzelfde hebben die relatie tot elkaar: b.v. partituur, grammofoonplaat, muziek als gedachten zijn zo aan elkaar gerelateerd. Al de zaken hebben de logische bouw gemeen (4.014, 4.0141)
- ▶ De mogelijkheid tot het gehele beeldzijn van onze uitdrukkingswijze berust op de logica van de afbeelding. (4.015)

# Betekenis van zinnen als waarheidscondities

- ▶ De betekenis van een beeld (zin) is de afgebeelde situatie.
- ▶ De zin toont zijn betekenis (dus de beschreven situatie) en zegt dat die situatie bestaat (4.022)
- ▶ De zin beweert dat bepaalde standen van zaken bestaan, en andere niet. De beschreven situatie bepaalt de logische relatie met andere zinnen, de (on)waarheid ervan staat er los van (4.023)
- ▶ Een zin begrijpen, betekent, weten wat het geval is als hij waar is (4.024)

# Compositionaliteit en 'creativiteit' van betekenis

- ▶ Men begrijpt een zin, als men zijn delen begrijpt (4.024).
- ▶ Compositionaliteit verklaart 'creativiteit' van betekenis: oneindige nieuwe betekenissen kunnen worden uitgedrukt met oude woorden.
- ▶ We begrijpen de betekenis van een (nieuwe) zin via de betekenis van de (oude) woorden, dwz via de afbeeldende relatie tussen namen en objecten. De betekenis van de zin hoeft ons niet nog apart verklaard worden (4.02, 4.021, 4.025, 4.027, 4.03)
- ▶ Creativiteit en compositionaliteit berusten op het beeldkarakter van onze taal.

- ▶ Dat een zin een beeld kan zijn van een situatie berust op de mogelijkheid dat namen staan voor objecten (4.0312)
- ▶ Door de namen te combineren stelt de zin de stand van zaken voor die bestaat uit de corresponderende combinatie van objecten (4.0311)
- ▶ In de zin moet evenveel onderscheiden zijn als in de afgebeelde situatie: zij moeten dezelfde logische menigvuldigheid bezitten (4.032, 4.04)
- ▶ Net als de logische vorm, is de menigvuldigheid niet iets dat afgebeeld kan worden: het is geen object, of stand van zaken. Het is een vorm-aspect (4.041)

## De rol van de filosofie

- ▶ Sluit direct aan op 4.0031
- ▶ Zinnen zijn waar of onwaar, alle ware zinnen vormen samen de wetenschap (4.11)
- ▶ De filosofie is geen wetenschap (4.111). Filosofische uitsprake zijn niet waar of onwaar.
- ▶ Filosofie is geen leer, maar een bezigheid, die tot doel heeft de gedachten logisch te verhelderen (4.112)
- ▶ De filosofie bepaalt de grenzen van de wetenschap door het denkbare van het ondenkbare af te grenzen (4.113, 4.114, vgl voorwoord)
- ▶ Zij doet dat door te bepalen wat gezegd kan worden (4.115)
- ▶ Wat denkbaar is kan helder worden gadacht, en helder tot uitdrukking worden gebracht (4.116, vgl 6.5, 6.51)

# Tonen versus zeggen

- ▶ Een zin is een beeld van een situatie. De mogelijkheid ervan berust op een identiteit in vorm van beeld en afgebeelde.
- ▶ Deze logische vorm is niet weer af te belden (4.12 vgl 2.172–2.174)
- ▶ De logische vorm toont zich in het beeld (4.121)
- ▶ Wat wordt getoond kan niet gezegd worden (4.1212)
- ▶ Wat gezegd kan worden betreft contingenties, het bestaan of niet-bestaan van standen van zaken. Wat wordt getoond is iets noodzakelijk, b.v. dat twee zinnen elkaar tegenspreken (4.1211)



# Huiswerk: Logica als systeem (4.2–5.143)

## Korte inhoudsopgave

- ▶ 4.2–4.23, 4.25: elementaire zinnen
- ▶ 4.26–4.45: combinatie van elementaire zinnen
- ▶ 4.46–4.4661: tautologie en contradictie
- ▶ 4.5–4.53: de algemene zinsvorm
- ▶ 5–5.101 zinnen als waarheidsfuncties van elementaire zinnen
- ▶ 5.11–5.131, 5.133–5.143: logisch gevolg