

# Modale logica

Maria Aloni  
ILLC-University of Amsterdam  
M.D.Aloni@uva.nl

Logica en de Linguistic Turn 2012

27/11/12

# Plan voor vandaag

1. Modale logica: syntaxis
2. Modale logica in meervoud
3. Logisch-filosofische motivatie van de modale logica:

## Huiswerk:

- ▶ Gamut: Opg. 3.11 (o)-(u), Extra opg. 5; Syllabus, 4 - 4.2 incl. opgaven
- ▶ HW5 (deadline 30 Nov)
- ▶ Wiki: commentaar en eindversie lemma (deadline 30 Nov)
- ▶ Frege: tekstvragen beantwoorden

# Modale logica

- ▶ Modale logica: propositielogica +  $\Box$  en  $\Diamond$ 
  - ▶  $\Box \mapsto$  noodzakelijkheid
  - ▶  $\Diamond \mapsto$  mogelijkheid
- ▶ De modale logica bestudeert de logica van modale stellingen.
  - (1) Modale stelling = stelling die niet alleen maar op grond van wat nu en hier het geval is beoordeeld kan worden
  - (2) Voorbeelden van modale stellingen:
    - a. De muur is rood maar hij had wit kunnen zijn.
    - b. Jan kwam niet naar het hoorcollege maandag, maar hij had wel moeten komen.
    - c. McX denkt dat er universalia zijn, maar er zijn geen universalia.
    - d. Volgens de Griekse mythologie is Pegasus een paard met vleugels, maar Pegasus bestaat niet.
    - e. Misschien is Jan aangekomen.
    - f. Klaas moet zijn zieke moeder verzorgen.
    - g. ...

# Definitie van de taal van modale logica

1. Een propositieletter  $p \in P$  is een formule van  $ML$ ;
  2. als  $\phi$  en  $\psi$  formules van  $ML$  zijn, dan zijn  $\neg\phi$ ,  $\neg\psi$ ,  $(\phi \wedge \psi)$ ,  $(\phi \vee \psi)$ ,  $(\phi \rightarrow \psi)$  dat ook;
  3. als  $\phi$  een formule van  $ML$  is dan zijn  $\Diamond\phi$  en  $\Box\phi$  dat ook;
  4. niets is een formule van  $ML$  als het niet gegenereerd is door de bovenstaande regels.
- (3) Voorbeelden van formules:  $p$ ,  $p \wedge \neg q$ ,  $\Diamond p \rightarrow \Box q$ ,  $\Box\Box p$ ,  $\Diamond(p \wedge \neg\Box q)$  ( $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Diamond p$ ) [constructieboom]
- (4) Niet formules:  $pp$ ,  $p\neg q$ ,  $\Diamond p\Diamond \rightarrow \Box q$ ,  $\Box\Box$ ,  $\Diamond(\Box \wedge \neg\Box q)$

# Modaliteiten (in het meervoud)

## Modale operatoren en hun verschillende interpretaties

1. Nee, hoor, dat is *niet mogelijk*. Hans kan niet zowel lang als ook klein zijn. [logische (of alethische) mogelijkheid]
2. Het *niet mogelijk* om een vak meer dan 3 keer te herkansen. [deontische mogelijkheid]
3. Ik weet niet of Johannes de goudvis nog leeft. Het is *mogelijk* dat Mathilda's kat hem heeft opgevreten. [epistemische (of doxastische) mogelijkheid]

# Alethische modaliteit

- ▶ *Mogelijkheid* en *noodzakelijkheid* vanuit een logisch oogmerk.
  - ▶  $\Box \mapsto$  logische noodzakelijkheid [aletheia = waarheid]
  - ▶  $\Diamond \mapsto$  logische mogelijkheid
- ▶ Voorbeelden:
  - (5)
    - a. Het is waar maar had ook onwaar kunnen zijn.
    - b. Het is noodzakelijk dat elke object identiek is met zichzelf.
- ▶ Mogelijke principes:
  - (6)
    - a. Als iets waar is dan is het dus mogelijk  
 $\phi \rightarrow \Diamond \phi$
    - b. Als iets noodzakelijk is dan is het dus mogelijk
    - c. Als iets noodzakelijk is dan is het dus waar
    - d. Iets is noodzakelijk waar dan en slechts dan als het niet mogelijk dat datgene onwaar is
    - e. Als iets noodzakelijk waar is dan is het dus noodzakelijk noodzakelijk waar

# Deontische modaliteit

- ▶ *Mogelijkheid* en *noodzakelijkheid* gegeven een regelsysteem.

- ▶  $\Diamond \mapsto$  het is toegestaan
- ▶  $\Box \mapsto$  het is verplicht

- ▶ Voorbeelden:

- (7)
  - a. Bellen tijdens de les is niet toegestaan.
  - b. Jij moet je mobiel uitzetten.
  - c. Alcohol drinken en auto rijden is verboden.
  - d. Jij mag nog een stukje taart nemen.

- ▶ Mogelijke principes:

- (8)
  - a. Als iets waar is, dan is het toegestaan.
  - b. Als iets verplicht is dan is het toegestaan.
  - c. Als iets verplicht is dan is het waar.
  - d. Als iets niet verplicht is dan is het toegestaan.
  - e. Iets is verplicht dan en slechts dan als het niet toegestaan is om het niet te doen.

# Epistemische en doxastische modaliteit

- ▶ *Mogelijkheid* en *noodzakelijkheid* gegeven wat wij weten of geloven.

- ▶  $\Diamond \mapsto$  gegeven de beschikbare informatie is het mogelijk
- ▶  $\Box \mapsto$  gegeven de beschikbare informatie is het noodzakelijk

- ▶ Voorbeelden

- (9)
- a. Jan moet aangekomen zijn
  - b. Misschien heeft Piet een ongeluk gehad.
  - c. Jan gelooft dat Sinterklaas in het land is. [doxa]
  - d. Ik weet dat Sinterklaas in het land is. [episteme]

- ▶ Mogelijke principes:

- (10)
- a. Als je gelooft dat iets waar is dan is dat ook waar.
  - b. Als je weet dat iets waar is dan is dat ook waar.
  - c. Als je gelooft dat iets waar is dan geloof je ook dat je dat gelooft.
  - d. Als je weet dat iets waar is dan weet je ook dat je dat weet.



# Logisch-filosofische motivatie van de modale logica

- ▶ Een valuatie  $V$  voor de taal van de propositiële logica, was een functie van formules naar waarheidswaarden.
- ▶  $V(\phi)$  geheel en allen afhangt van de waarde die  $V$  toekent aan de propositionele constanten in  $\phi$ .
- ▶ Zoals in Wittgenstein, propositionele constanten zoals  $p$  en  $q$  betreffen atomaire standen van zaken die al of niet het geval kunnen zijn. Elke rij in de volgende waarheidstafel komt overeen met een (logische) mogelijkheid.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

- ▶ In Modale Logica:
  1. Valuaties gezien als *mogelijke werelden*;
  2. De waarheid van een formule kan afhankelijk zijn van *meer dan één* mogelijke wereld;
  3. Niet alles wat logisch mogelijk is is ook daadwerkelijk mogelijk.

# Valuaties als mogelijke werelden

- ▶ In een valuatie  $V$  voor de taal van de propositiële logica, voor elke  $\phi$  wordt gedefiniëerd of  $V(\phi) = 1$ , of  $V(\phi) = 0$ .
- ▶ Een valuatie kan dus worden gezien als een volledige beschrijving van een mogelijke toestand van de wereld, want ze legt de waarheidswaarde van elke mogelijke uitspraak over de wereld vast.
- ▶ We noemen een valuatie om die reden ook wel een *mogelijke wereld*.
- ▶ Alles wat we zullen zeggen over mogelijkheid en noodzakelijkheid in ML, zal gedefiniëerd zijn in termen van mogelijke werelden.

*I believe, and so do you, that things could have been different in countless ways. (. . . ) Ordinary language permits the paraphrase: there are many ways things could have been besides the way they actually are. (. . . ) It says that there exist many entities of a certain description, to wit ways things could have been. (. . . ) I believe permissible paraphrases of what I believe; (. . . ) I therefore believe in the existence of entities that might be called ways things could have been. I prefer to call them possible worlds. [David Lewis, 1979]*

# Waarheid in ML afhankelijk van *meer dan één* wereld

- ▶ In de propositiologica was de waarheid van een formule bepaald op basis van één valuatie, die wat feitelijk het geval is in de actuele wereld representeert.
  - ▶ In modale logica, de waarheid van een formule kan afhankelijk zijn van meer dan één mogelijke wereld.
- (11)
- a. Zin: Jan kwam niet naar het hoorcollege vandaag, maar hij had wel kunnen komen
  - b. Vertaling:  $\neg p \wedge \Diamond p$
  - c. Analyse: in de actuele wereld kwam Jan niet, maar er is een andere mogelijk wereld waarin hij wel kwam.
- ▶ Valuaties in modale logica moeten niet alleen waarheidswaarden toekennen aan propositieletters in de wereld waarin de formule wordt geïnterpreteerd, maar ook aan alle andere mogelijke werelden die misschien relevant zijn voor de betekenis van een formule.
  - ▶ Dit vraagt om een wereld afhankelijk notie van valuatie:  
Per wereld  $w$  zegt die valuatie  $V$  dat  $V_w(p) = 1$  als  $p$  waar is in  $w$ , en  $V_w(p) = 0$  als  $p$  onwaar is in  $w$

# Niet alles wat logisch mogelijk is is ook daadwerkelijk mogelijk

- ▶ In PI, alle logische mogelijke valuaties relevant voor *metalogische noties* zoals logisch equivalentie of geldigheid
- ▶ In ML, meerdere werelden relevant voor *waarheid* van formules:

- (12)
- a.  $\Diamond\phi$  waar in  $w$  desda er is een  $w'$  die bereikbaar is vanuit  $w$  zodat  $\phi$  waar is in  $w'$
  - b.  $\Box\phi$  waar in  $w$  desda elke  $w'$  die bereikbaar is vanuit  $w$  is zodat  $\phi$  waar is in  $w'$

- ▶ Afhankelijk van interpretatie van  $\Diamond$  en  $\Box$  kunnen verschillende verzamelingen van mogelijke werelden relevant (bereikbaar) zijn:
  - ▶ alle logisch mogelijke werelden (alethisch modaliteit);
  - ▶ werelden in overeenstemming met een bepaalde verzameling van wetten (deontische modaliteit);
  - ▶ mogelijkheden die een persoon onderscheidt op basis van wat hij/zij weet (epistemische modaliteit).

We noemen dit de **modale basis** van de operatoren  $\Diamond$  en  $\Box$ .