Modale logica en natuurlijke deductie

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

Logica en de Linguistic Turn 2013

9 December 2013

Plan voor vandaag

1. Modale logica: afronding
2. Natuurlijke Deductie

Huiswerk:

- Proeftentamen
- Wiki: stemmen voor het beste lemma via email naar mij deadline vanavond 22 uur (graag "wiki" noemen in mail header)

Definitie van de taal van modale logica

Zij *PROP* een verzameling propositieletters.

1. Een propositieletter $p \in PROP$ is een formule van *ML*;
2. als ϕ en ψ formules van *ML* zijn, dan zijn $\neg\phi$, $\neg\psi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ dat ook;
3. als ϕ een formule van *ML* is dan zijn $\Diamond\phi$ en $\Box\phi$ dat ook;
4. niets is een formule van *ML* als het niet gegenereerd is door de bovenstaande regels.

Kripke modellen, modellen en frames

1. Een Kripke-model $\mathcal{K}$ is een viertal $\langle W, R, V, w \rangle$ waarbij:
   1.1 W is een verzameling objecten [de mogelijke werelden]
   1.2 R is een binaire relatie over W [de modale basis]
   geeft aan welke wereld v een mogelijkheid is in w
   1.3 V is een valuatiefunctie zodanig dat voor elke wereld w, V_w de waarde bepaalt van alle propositieletters in w
   - $V_w(p) = 1$ lezen we dan als 'p is waar in w'
   - $V_w(p) = 0$ lezen we dan als 'p is onwaar in w'

   [wereld afhankelijk valuatie]
   1.4 w is een van de elementen van W [de actuele wereld]
2. Model $\mapsto$ $\mathrm{M} = \langle W, R, V \rangle$
3. Frame $\mapsto$ $\mathrm{F}= \langle W, R \rangle$

Waarheid en geldigheid

1. **Waarheid in een Kripke model**:
   1.1 $\langle W, R, V, w\rangle \models p$ desda $V_w(p) = 1$;
   1.2 $\langle W, R, V, w\rangle \models \neg\phi$ desda $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \phi$;
   1.3 ...
   1.4 $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\phi$ desda er is een $v \in W$ zodanig dat Rwv en $\langle W, R, V, v\rangle \models \phi$;
   1.5 $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box\phi$ desda voor elke $v \in W$ zodanig dat Rwv geldt $\langle W, R, V, v\rangle \models \phi$.
2. **Geldigheid in een model**
   Een formule ϕ is geldig in een model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, $\mathcal{M} \models \phi$, desda $\langle W, R, V, w\rangle \models \phi$ voor alle werelden $w \in W$.
3. **Geldigheid op een frame**
   Een formule ϕ is geldig op een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, $\mathcal{F} \models \phi$, desda voor alle valuaties V geldt dat $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle \models \phi$.

Vandaag

Definitie Een formule ϕ *karakteriseert* een verzameling G van frames als voor alle frames $\mathcal{F}$ geldt

$$\mathcal{F} \models \phi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F} \in G$$

i.e., ϕ is geldig alleen op frames F die element zijn van G.

Stellingen

(1) $\Box p \to p$ karakteriseert reflexieve frames

a. $\Box p \to p$ is geldig op alle reflexieve frames
b. $\Box p \to p$ is ongeldig op alle niet-reflexieve frames

(2) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ karakteriseert transitieve frames

a. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ is geldig op alle transitieve frames
b. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ is ongeldig op alle niet-transitieve frames

(3) $p \to \Box\Diamond p$ karakteriseert symmetrische frames

a. $p \to \Box\Diamond p$ is geldig op alle symmetrische frames
b. $p \to \Box\Diamond p$ is ongeldig op alle niet-symmetrische frames

Opgave

Voor $P = \{p, q\}$, beschouw het Kripke model $K = \langle W, R, V, w \rangle$

- $W = \{w, w_1, w_2, w_3\}$
- $R = \{\langle w, w_1 \rangle, \langle w, w_2 \rangle, \langle w, w_3 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle\}$
- $V_w(p) = 1$, $V_{w_1}(p) = 1$, $V_{w_2}(p) = 0$, $V_{w_3}(p) = 0$,
  $V_w(q) = 1$, $V_{w_1}(q) = 0$, $V_{w_2}(q) = 1$, $V_{w_3}(q) = 0$.

Teken dit model, en ga nu na of de volgende formules waar zijn in K.
Licht dan uw antwoord kort toe:

(4)
a. $\Box p \vee \Diamond q$
b. $\Box\Diamond p \wedge \Diamond\Box q$
c. $\Diamond p \rightarrow \Box q$
d. $\Diamond(p \leftrightarrow \Box p)$ $\Leftarrow$

Opgave

Voor $P = \{p, q\}$, beschouw het model $M = (W, R, V)$ met

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $R = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_1, w_3\rangle\}$
- $V_{w_1}(p) = 1, V_{w_2}(p) = 0, V_{w_3}(p) = 0,$
  $V_{w_1}(q) = 0, V_{w_2}(q) = 1, V_{w_3}(q) = 0\,.$

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn in $\mathcal{M}$:

(5) a. $\neg p \to \Box q$
b. $p \vee \Diamond\Box q$

Onthoud: Om te laten zien dat een formule ϕ *niet geldig is in een model* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ moet een wereld $w \in W$ worden gegeven waarvoor de formule onwaar is, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \phi$.

Opgave

Beschouw de frame $F = (W, R)$ met

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $R = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_1, w_3\rangle\}$

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn op $\mathcal{F}$:

(6) a. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
    b. $p \rightarrow \Box\Diamond p$

Onthoud: Om te laten zien dat een formule ϕ *niet geldig is op een frame* $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ moet een valuatie V en een wereld $w \in W$ worden gegeven waarvoor de formule onwaar is, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \phi$.

Opgave

Beschouw het volgende frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$:

$$
\begin{aligned}
W &= \{w_1, w_2\} \\
R &= \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle\}
\end{aligned}
$$

Laat zien of de volgende formules geldig zijn op $\mathcal{F}$:

(i) $p \rightarrow \Box\Diamond p$

(ii) $p \rightarrow \Diamond p$

Natuurlijke Deductie

1. $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
2. $p \to \neg q \vdash q \to \neg p$
3. $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$ (hint: try to derive $\neg\neg p$ from $((p \to q) \to p)$
4. Extra opgave 7, 8, 9, 10