Logica en de Linguistic Turn 2012

# Propositielogica

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

25/9/12

# Plan voor vandaag

Propositielogica

- Definitie van taal
- Semantiek via waarheidstafels

**Huiswerk**:

- Gamut, 2.1-2.3. Opg. 1,2 en 5 (t/m zin (9))
- Tarski + tekstvragen

# Logische Systemen

Verschillende logische systemen bestuderen bepaalde klassen van redeneerschema's.

**Categorische logica**
$\mapsto$ redeneerschema's opgebouwd uit zogenoemd categorische proposities.

**Propositielogica** $\Lleftarrow$
$\mapsto$ redeneerschema's opgebouwd uit voegwoorden zoals *en, of, als (. . . , dan), dan en slechts dan als*, en de zinsontkenning *niet*.

**Predikatenlogica**
$\mapsto$ ook kwantificerende uitdrukkingen, zoals *alle* en *sommige*, (en individuele termen, zoals *Sokrates*).

**Modale logica**
$\mapsto$ ook modale operatoren, zoals *noodzakelijk* en *mogelijk*.

# Propositielogica

- Ontwikkeld door George Boole (1779-1848)
- Eerste voorbeeld van moderne formele logica
- Bestudeert redeneerschema's opgebouwd uit
  1. Conjunctie: $\wedge$ ('en')
  2. Disjunctie: $\vee$ ('of')
  3. Implicatie: $\rightarrow$ ('als ..., dan')
  4. Equivalentie: $\leftrightarrow$ ('desda')
  5. Negatie: $\neg$ ('niet')
- 1-5 zijn **waarheidfunctionele** operatoren (truth functors).

# Waarheidfunctionele operatoren

- Operatoren waarvoor geldt dat de waarheidswaarde van een er mee samengestelde zin geheel afhankelijk is van de waarheidswaarden van de samenstellende delen.
- Voorbeeld
  - *Not*: waarheidsfunctioneel
  - *Necessarily*: niet waarheidsfunctioneel

(1) a. God exists.
 b. God does not exist.
 c. Necessarily god exists.

De waarheid van (1-b) is geheel afhankelijk van de waarheidswaarde van (1-a): (1-b) is waar desda (1-a) onwaar is. Voor *necessarily* geldt dit niet.

# Logische Systemen

- Doel: formele definitie van geldige redeneringen
- Componenten van een logische systeem:
  - Definitie van de **taal**
  - **Semantiek**: Definitie van *waarheid condities* (betekenis) van de uitdrukkingen in de taal (semantische perspectief)
  - [Afleiding systeem: verzameling van regels voor hoe wij *afleidingen* mogen construeren (syntactische perspectief)]
  - Definitie van **geldige redeneringen**

# De taal van propositielogica

1. Vocabulaire:
   - logische variabelen: $p, q, r, p_1, \ldots$ (propositieletters)
   - logische constanten: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (connectieven)
   - hulptekens: ),(
2. Syntaxis: **Inductieve definitie** van de *formules* van L:
   (i) Alle propositieletters in het vocabulaire zijn formules van L. [basisstap]
   (ii) Als $\phi$ een formule van L is, dan $\neg\phi$ ook. [bouwregel]
   (iii) Als $\phi$ en $\psi$ formules van L zijn, dan $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ook. [bouwregel]
   (iv) Allen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de clausules (i)-(iii) geconstrueerd kan worden, is een formule van L. [inductieclausule]

## Voorbeelden: formules of niet?

1. $p$
2. $\wedge p \neg q$
3. $\neg\neg\neg q$
4. $((\neg(p \vee q) \rightarrow \neg\neg q) \leftrightarrow r)$ [gebruik constructieboom!]
5. $p \vee (q)$
6. $(p \wedge p)$
7. $\neg(p \rightarrow q \vee r)$
8. $\neg(p \rightarrow (q \vee r))$
9. $\neg((p \rightarrow q) \vee r)$
10. $(\neg q \vee (p \vee q))$

Buiten hakjes kunnen weggelaten worden: $\neg q \vee (p \vee q) =$10.
Binnen hakjes niet: 7 is ambigu tussen 8 en 9.

# Inductief bewijs

Wij willen bewijzen dat alle formules van PL eigenschap A bezitten.

(2) A = het hebben van evenveel linker- als rechterhaakjes.

**Bewijs met inductie** naar de opbouw van de formule:

(i) propositieletters bezitten eigenschap A

Ja, propositieletters hebben geen haakjes!

(ii) Als $\phi$ eigenschap A bezit, dit geldt ook voor $\neg\phi$

Ja, want er komen geen haakjes bij!

(iii) Als zowel $\phi$ en $\psi$ eigenschap A bezitten, dit geldt ook voor$(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$

Ja, er komt in ieder van deze gevallen precies èèn linker- en èèn rechter haakje bij!

De inductieclausule verzekert ons dat dan slecht formules die de eigenschap A bezitten kunnen worden opgebouwd.

# De betekenis van de connectieven

Voor ieder connectief wordt in een **waarheidstafel** vastgelegd hoe waarheidswaarden toegekend worden aan samengestelde formules op grond van de waarheidswaarden van de constituenten waaruit de formule direct met de connectief is gevormd.

| $\phi$ | $\psi$ | $\phi \wedge \psi$ | $\phi \vee \psi$ | $\phi \rightarrow \psi$ | $\phi \leftrightarrow \psi$ | $\neg\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

## Pro material implication: *als (. . . , dan)* in wiskunde en logica

Neem Stelling 2, eerste deel van voorwaarde (iv):

(3) Als de conclusie negatief is, dan is één van de premissen negatief.

Welke syllogisme voldoet aan (3)?

(4)
a. aee-4 ja $\mapsto$ [1,1]
b. aao-2 nee $\mapsto$ [1,0]
c. aoa-3 ja $\mapsto$ [0,1]
d. aaa-1 ja $\mapsto$ [0,0]

# Contra material implication: Lewis Carroll's Barbers

Once upon a time, there were three barbers, Allen, Brown, and Carr by name. They ran their barbershop according to the rule that at all times, at least one of them must be in the shop. Suppose someone claims:

(5) If Allen is out, Brown is in.

This claim seems to be false, given our scenario. But then (6) should be true:

(6) It is not the case that if Allen is out, Brown is in.

But if 'if ... then' is interpreted as material implications, then (6) entails (7):

(7) Allen is out.

Denying (5), then, should commit us to the truth of (7).