Logica en de Linguistic Turn 2013

Propositielogica

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

24 September 2013

Plan voor vandaag

Propositielogica

- Definitie van taal
- Semantiek via waarheidstafels

Huiswerk:

- Gamut, 2.1-2.3. Opg. 1,2 en 5 (t/m zin (9)) (en extra opgaven 3 en 4)
- Russell en Carnap
- Participatieopdracht: nakijken
  - 4 gegeven antwoorden + eigen antwoord ordenen en uitprint met ranking en eigen antwoord meenemen op donderdag

Logische Systemen

Verschillende logische systemen bestuderen bepaalde klassen van redeneerschema's.

Categorische logica
$\mapsto$ redeneerschema's opgebouwd uit zogenoemd categorische proposities.

Propositielogica $\Longleftarrow$
$\mapsto$ redeneerschema's opgebouwd uit voegwoorden zoals *en, of, als (. . . , dan), dan en slechts dan als*, en de zinsontkenning *niet*.

Predikatenlogica
$\mapsto$ ook kwantificerende uitdrukkingen, zoals *alle* en *sommige*

Modale logica
$\mapsto$ ook modale operatoren, zoals *noodzakelijk* en *mogelijk*.

Propositielogica

- Ontwikkeld door George Boole (1815-1864)
- Eerst voorbeeld van moderne formele logica
- Bestudeert redeneerschema's opgebouwd uit
  1. Conjunctie: $\wedge$ ('en') [Logische constanten]
  2. Disjunctie: $\vee$ ('of')
  3. Implicatie: $\rightarrow$ ('als ..., dan')
  4. Equivalentie: $\leftrightarrow$ ('desda')
  5. Negatie: $\neg$ ('niet')
- 1-5 zijn **waarheidfunctionele** operatoren (truth functors).

Waarheidfunctionele operatoren

- Operatoren waarvoor geldt dat de waarheidswaarde van een er mee samengestelde zin geheel afhankelijk is van de waarheidswaarden van de samenstellende delen.
- Waarheidswaarden: *onwaar* $\mapsto$ 0 en *waar* $\mapsto$ 1
- Voorbeeld
  - *Not*: waarheidsfunctioneel
  - *Necessarily*: niet waarheidsfunctioneel

(1) a. God exists.
    b. God does not exist.
    c. Necessarily god exists.

De waarheid van (1-b) is geheel afhankelijk van de waarheidswaarde van (1-a): (1-b) is waar desda (1-a) onwaar is. Voor *necessarily* geldt dit niet.

Logische Systemen

- Doel: formele definitie van geldige redeneringen
- Componenten van een logische systeem:
  - Definitie van de **taal**
  - **Semantiek**: Definitie van *waarheid condities* (betekenis) van de uitdrukkingen in de taal
  - **Afleiding systeem**: verzameling van regels voor hoe wij *afleidingen* mogen construeren [2de blok]
  - Definitie van **geldige redeneringen**

De taal van propositielogica: Vocabulaire

Vocabulaire:

- logische variabelen: $p, q, r, p_1, \ldots$ (propositieletters)
- logische constanten: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (connectieven)
- hulptekens:),(

Russell over logische costanten: 'Logical constants are symbols having constant logical meaning [...] Logical constants may be defined exactly as we defined forms; in fact they are in essence the same thing. [p. 201]'

De taal van propositielogica: Syntaxis

Recursieve (of inductieve) **definitie** van de *formules* van L:

(i) Alle propositieletters in het vocabulaire zijn formules van L. [basisstap]

(ii) Als ϕ een formule van L is, dan $\neg\phi$ ook. [bouwregel]

(iii) Als ϕ en ψ formules van L zijn, dan $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ook. [bouwregel]

(iv) Allen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de clausules (i)-(iii) geconstrueerd kan worden, is een formule van L. [inductieclausule]

Voorbeelden: formules of niet?

1. p
2. $\wedge p \neg q$
3. $\neg\neg\neg q$
4. $((\neg(p \vee q) \rightarrow \neg\neg q) \leftrightarrow r)$ [gebruik constructieboom!]
5. $p \vee (q)$
6. $(p \wedge p)$
7. $\neg(p \rightarrow q \vee r)$
8. $\neg(p \rightarrow (q \vee r))$
9. $\neg((p \rightarrow q) \vee r)$
10. $(\neg q \vee (p \vee q))$

Buiten hakjes kunnen weggelaten worden: $\neg q \vee (p \vee q) = (10)$
Binnen hakjes niet: (7) is ambigu tussen (8) en (9).

Inductief bewijs

Wij willen bewijzen dat alle formules van PL eigenschap A bezitten.

(2) A = het hebben van evenveel linker- als rechterhaakjes.

Bewijs met inductie naar de opbouw van de formule:

(i) propositieletters bezitten eigenschap A

Ja, propositieletters hebben geen haakjes!

(ii) Als ϕ eigenschap A bezit, dit geldt ook voor $\neg\phi$

Ja, want er komen geen haakjes bij!

(iii) Als zowel ϕ en ψ eigenschap A bezitten, dit geldt ook voor$(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$

Ja, er komt in ieder van deze gevallen precies èèn linker- en èèn rechter haakje bij!

De inductieclausule verzekert ons dat dan slecht formules die de eigenschap A bezitten kunnen worden opgebouwd.

De betekenis van de connectieven

Voor ieder connectief wordt in een **waarheidstafel** vastgelegd hoe waarheidswaarden toegekend worden aan samengestelde formules op grond van de waarheidswaarden van de constituenten waaruit de formule direct met de connectief is gevormd.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$	$\neg\phi$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

$1 \mapsto$ waar

$0 \mapsto$ onwaar

Disjunctie

- Inclusief ($\vee$) vs exclusief (∞) disjunctie:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\phi \infty \psi$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

  - Inclusief disjunctie ($\vee$): mogelijk allebei waar
  - Exclusief disjuctie (∞): niet allebei waar

- Is 'of' in het Nederlands inclusief of exclusief?

(3) Jan speelt bastekbal of volleybal.

Disjunctie: inclusief of exclusief?

- Vertaal de volgende zin in de taal van de propositielogica:

  (4) Jan is niet Italiaans of Nederlands.

- Stel dat Jan Italiaans én Nederlands is, is (4) waar of niet waar?
- Welke notie van disjunctie heb jij hier gebruikt: inclusief of exclusief?
- Vertaal de volgende zin in de taal van de propositelogica:

  (5) Als in 5 of 7 een kruisje staat, dan is XiY waar.

- Stel dat (5) waar is, en dat gebieden 5 en 7 allebei een kruisje hebben, is XiY ook waar?
- Welke notie van disjunctie heb jij hier gebruikt: inclusief of exclusief?

Pro material implication: *als (. . . , dan)* in wiskunde en logica

Neem Stelling 2, eerste deel van voorwaarde (iv):

(6) Als de conclusie negatief is, dan is één van de premissen negatief.

Welke syllogisme voldoet aan (6)?

(7)
a. aee-4 ja $\mapsto$ [1,1]
b. aao-2 nee $\mapsto$ [1,0]
c. aoa-3 ja $\mapsto$ [0,1]
d. aaa-1 ja $\mapsto$ [0,0]

Contra material implication: Lewis Carroll's Barbers

Once upon a time, there were three barbers, Allen, Brown, and Carr by name. They ran their barbershop according to the rule that at all times, at least one of them must be in the shop. Suppose someone claims:

(8) If Allen is out, Brown is in.

This claim seems to be false, given our scenario. But then (9) should be true:

(9) It is not the case that if Allen is out, Brown is in.

But if 'if ... then' is interpreted as material implications, then (9) entails (10):

(10) Allen is out.

Denying (8), then, should commit us to the truth of (10).

Vertalingen

(11) Zowel de VVD als de PvdA steunde het wetsontwerp.

a. $p \wedge q$ [vertaling]

b. p: De VVD steunde het wetsontwerp [vertaalsleutel]
   q: De PvdA steunde het wetsontwerp

(12) Jan is thuis, maar Piet niet.

a. $p \wedge \neg q$

b. p: Jan is thuis
   q: Piet is thuis

(13) Hoewel het heel koud was, bleef Jan niet thuis.

a. $p \wedge \neg q$

b. p: Het was heel koud
   q: Jan bleef thuis

Vertalingen

(14) Terwijl Anneke steeds problemen maakt, is Hannekke de liefheid zelve.

a. $p \wedge q$

b. p: Anneke maakt steeds problemen
q: Hannekke is de liefheid zelve

(15) Jan en Marie ontmoeten elkaar morgen avond.

a. p

b. p: Jan en Marie ontmoeten elkaar morgen avond.

(16) Aardvarkens zijn geen zoogdieren.

a. $\neg p$

b. p: Aardvarkens zijn zoogdieren.

Vertalingen

(17) Als Jan de keuken of zijn kamer opruimt, dan krijgt hij 10 euro.

a. $(p \vee r) \rightarrow q$

b. p: Jan ruimt de keuken op
r: Jan ruimt zijn kamer op
q: Jan krijgt 10 euro

(18) Er is niemand thuis.

a. $\neg p$

b. p: Er is iemand thuis

(19) Jan in noch thuis noch op school.

a. $\neg(p \vee q)$

b. p: Jan is thuis
q: Jan is op school

Vertalingen

(20) Jan huilt, als hij zijn hoofd gestoten heeft.

a. $p \rightarrow q$

b. p: Jan heeft zijn hoofd gestoten.

q: Jan huilt.

(21) Jan heeft alleen een slecht humeur als hij net uit bed komt.

a. $p \rightarrow q$

b. p: Jan heeft een slecht humeur.

q: Jan komt net uit bed.

(22) Jan heeft een slecht humeur als en alleen als hij net uit bed komt.

a. $p \leftrightarrow q$

b. p: Jan heeft een slecht humeur.

q: Jan komt net uit bed.