

Logica en de Linguistic Turn 2012

Semantiek en waarheidstheorie

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

27/9/12

Plan voor vandaag

1. Semantiek van de propositielogica
2. Vertalingen
3. Tarski + tekstvragen

Huiswerk:

- ▶ Gamut, 2.5 Opg. 5
- ▶ Tarski + tekstvragen
- ▶ Huiswerk opdracht 2

De taal van propositielogica

1. Vocabulaire:

- logische variabelen: p, q, r, p_1, \dots (propositieletters)
- logische constanten: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (connectieven)
- hulptekens: $), ($

2. Syntaxis: **Inductieve definitie** van de *formules* van L:

- (i) Alle propositieletters in het vocabulaire zijn formules van L.
[basisstap]
- (ii) Als ϕ een formule van L is, dan $\neg\phi$ ook. [bouwregel]
- (iii) Als ϕ en ψ formules van L zijn, dan $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$
en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ook. [bouwregel]
- (iv) Allen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de
clausules (i)-(iii) geconstrueerd kan worden, is een formule van
L. [inductieclausule]

Semantiek van de propositiologica

- ▶ Bestudering van de interpretaties van de propositiologische talen.
- ▶ Interpretatie van formule $\phi \mapsto$ zijn waarheidswaarde
- ▶ Interpretatie van taal $L \mapsto$ toekennen van een waarheidswaarde aan iedere formule uit L
- ▶ Zo'n toekenning noemen wij een **waardering** of **valuatie** (valuation).
- ▶ Een valuatie is een **functie** (function) van de formules van de taal naar waarheidswaarden.

Functies

Een functie is een toekenning van een uniek waarde aan iedere entiteit van een bepaalde soort. Bijv

(1) geboortedatum van x : mensen \rightarrow data

‘geboortedatum van x ’ is een functie die aan ieder mens x als waarde de geboortedatum van x toekent.

► mensen \mapsto **domein** van ons functie

► data \mapsto **bereik** van ons functie

Ons functie toegepast aan het **argument** Maria levert de **waarde** 26-5-69 op:

(2) geboortedatum van x (Maria) = 26-5-69

Vergelijk ‘moeder van x ’ met ‘ouder van x ’, en ‘oudste broer van x ’

Valuatie

Een valuatie V voor taal L van PL is een functie met als domein de formules van L en als bereik de waarheidswaarden, i.e.

$$(3) \quad V: \text{formules van } L \rightarrow \{0, 1\}$$

die de volgende condities vervult (voor alle formules ϕ en ψ):

- (i) $V(\neg\phi) = 1$ desda $V(\phi) = 0$;
- (ii) $V(\phi \wedge \psi) = 1$ desda $V(\phi) = V(\psi) = 1$;
- (iii) $V(\phi \vee \psi) = 0$ desda $V(\phi) = V(\psi) = 0$;
- (iv) $V(\phi \rightarrow \psi) = 0$ desda $V(\phi) = 1$ en $V(\psi) = 0$;
- (v) $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ desda $V(\phi) = V(\psi)$.

De valuatie moet in overstemming zijn met de interpretatie van de connectieven, die in de waarheidstafels is vastgelegd.

Semantiek middels waarheidstheorie à la Tarski

- ▶ Een valuatie V voor de taal van de propositiologica is een functie van de formules van de propositiologica naar waarheidswaarden.
- ▶ Voor elke formule ϕ wordt gedefiniëerd of $V(\phi) = 1$, dus of ϕ waar is, of $V(\phi) = 0$, dus of ϕ onwaar is.
- ▶ Een valuatie kan dus worden gezien als een *volledige beschrijving* van een mogelijke toestand van de wereld.
- ▶ Betekenis van ϕ in V = een waarheidswaarde (1 of 0)
- ▶ Betekenis van ϕ = zijn waarheidscondities

Einen Satz verstehen, heisst, wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist. (To understand a proposition means to know what is the case, if it is true.) [Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, Satz 4.024]

Tarski

- ▶ Tarski, Truth and Proof, *Scientific American*
- ▶ Tarski, The semantic conception of truth and the foundations of semantics, *Philosophy and Phenomenological Research* 4 (1944).

Tarski: vraag 1

- ▶ Vraag 1: Welke van de drie oplossingsstrategieën voor het leugenaarsparadox die tijdens het hoorcollege werden besproken past Tarski toe. Hoe past hij deze oplossingsstrategie toe?
- ▶ Drie oplossingsstrategieën:
 1. Aannames over uitdrukbaarheid (niet alles is uitdrukbaar)
 2. We dropen het principe LEM (law of excluded middle, of tertium non datur) $\vdash A$ of niet A
 3. We dropen de aanname dat zinnen niet tegelijk waar en onwaar kunnen zijn

Tarski: vraag 1

- Tarski's oplossing: niet 2 of 3

Personally as a logician, I could not reconcile myself with antinomies as a permanent element of our system of knowledge [p.66] [niet 3]

In particular we can derive from it [theory of truth], in addition to all equivalences of form (3), some consequences of a general nature, such as the famous law of contradiction and of excluded middle [p. 69] [niet 2 of 3]

Tarski: vraag 1

- ▶ Tarski's oplossing: Aannames over uitdrukbaarheid
- ▶ De taal L waarvoor we waarheid definiëren mag niet semantisch gesloten (semantically universal) zijn. I.e.
 - in L komt de waarheid predicaat niet voor of
 - L heeft geen namen voor alle zinnen

In particular, it [common language] is semantically universal in the following sense. Together with the linguistic objects, ... names of these objects are also included ...; in addition the language contains semantic terms such as 'truth', ... [p.67]

The question arises whether the notion of truth can be precisely defined, and thus a consistent and adequate usage of this notion can be established at least for the semantically restricted languages [thus not semantically universal]. Under certain conditions the answer to this question proves to be affirmative. [p.68]

Tarski vraag 2

- ▶ Vraag 2: Aan welke eigenschappen moet een waarheidstheorie volgens Tarski voldoen?
 - must preserve basic intentions of the Aristotelian formulation, confirm to the classical conception of truth
 - must be general (i.e. apply to all sentences of the language under consideration)
 - must be precise (e.g. language must be rigorously defined)
 - and formally correct (e.g. no vicious circle or paradoxes)

[It must be] formally correct and adequate in the sense that it implies all the equivalences of the form

(3) “p” is true if and only if p

in which “p” is replaced by any sentence of the language L [p. 65]

Tarski: vraag 3

- ▶ Wat is het verschil tussen objecttaal en metataal? Hoeveel metatalen zijn er voor het Nederlands? Welke?

We should make a strict distinction between the language which is the object of our discussion and for which in particular we intend to construct the definition of truth, and the language in which the definition has to be formulated and its implications are studied ... [p.68]

- ▶ Waarheid is uitsluitend voor objecttaal L gedefinieerd en niet voor de metataal.

Tarski: vraag 3

- ▶ Objecttaal
 - mag niet semantisch gesloten zijn
 - heeft een gespecificeerde syntaxis
- ▶ Metataal
 - heeft namen voor alle zinnen in de objecttaal,
 - waarheidspredicaat waar-in-L voor de objecttaal L, en
 - een vertaling van de objecttaal.
- ▶ Hoeveel metatalen voor Nederlands? Oneindig veel (maar NL is wel semantisch gesloten, dus mogen wij geen waarheidstheorie voor NL definiëren)

Tarski: vraag 4

- ▶ Geef een voorbeeld voor een verzameling die recursief gedefinieerd kan worden. Geef ook de recursieve definitie.
- ▶ De verzameling van even getallen E

(4) Recursieve definiëring van verzameling E

- 0 is in E ,
- Als x is in E , dan $x + 2$ is in E ,
- Verder is niets in E .

- ▶ Opgave: definieer nu de verzameling van oneven getallen.

Tarski: vraag 5

- ▶ Beschouw onderstaande zin. Geeft deze zin aanleiding tot een paradox? Beargumenteer uw antwoord.

(5) Een Kretenzer zegt: “Alle Kretenzers zijn leugenaars.”

- ▶ Nee, de zin kan onwaar zijn zonder paradoxale consequenties.