

# Frames en geldigheid

Maria Aloni  
ILLC-University of Amsterdam  
M.D.Aloni@uva.nl

Logica en de Linguistic Turn 2012

3/12/13

# Plan voor vandaag

1. Modale logica: geldigheid van formules in modellen en op frames
2. Opgaven modale logica
3. Nat Ded

## Huiswerk:

- ▶ Syllabus, 4.3 incl. opgaven.
- ▶ NatDed: Gamut, opg. 4.9; extra opg. 7,8.
- ▶ Tekst Frege lezen en vragen beantwoorden.

## Nieuws

- ▶ Wittgenstein filmavond: woensdag 4 dec om 19.30, Doelenzaal, UB
- ▶ Wiki: nieuwe deadline definitieve versie lemma's: 5 dec
- ▶ Stemmen voor het beste lemma via email naar mij deadline 9-12 (graag "wiki" noemen mail header)

## Geldige principes

- Mogelijke principes voor de modale logica. Zijn de volgende altijd waar (geldig)?

- (1)
- a.  $\Box p \rightarrow p$
  - b.  $\Box p \rightarrow \Diamond p$
  - c.  $\Box p \rightarrow \Box \Box p$
  - d.  $p \rightarrow \Box \Diamond p$

- Klassieke filosofische vragen die met behulp van de modale logica scherper geformuleerd kunnen worden.
- Intuïtieve waarheid (geldigheid) van principes afhankelijk van interpretatie van  $\Box$  en  $\Diamond$ .

# Geldigheid

- ▶ In modale logica worden verschillende noties van geldigheid onderscheiden:
  1. Geldigheid in een model,
  2. Geldigheid op een frame,
  3. Logisch geldig.
- ▶ Eerder geldigheid van redeneringen, hier *geldigheid van een formule*.

# Kripke modellen, modellen en frames

- ▶ Drie noties:
  - ▶ Kripke model  $\mapsto \mathcal{K} = (W, R, V, w)$
  - ▶ Model  $\mapsto \mathcal{M} = (W, R, V)$
  - ▶ Frame  $\mapsto \mathcal{F} = (W, R)$
- ▶ Vorige keer: waarheid in een Kripke model
- ▶ Vandaag:
  - ▶ Geldigheid in een model
  - ▶ Geldigheid op een frame

## Herhaling: waarheid in een Kripke model

1.  $\langle W, R, V, w \rangle \models p$  desda  $V_w(p) = 1$ ;
2.  $\langle W, R, V, w \rangle \models \neg\phi$  desda  $\langle W, R, V, w \rangle \not\models \phi$ ;
3. ...
4.  $\langle W, R, V, w \rangle \models \Diamond\phi$  desda er is een  $v \in W$  zodanig dat  $Rwv$  en  $\langle W, R, V, v \rangle \models \phi$ ;
5.  $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box\phi$  desda voor elke  $v \in W$  zodanig dat  $Rwv$  geldt  $\langle W, R, V, v \rangle \models \phi$ .

## Geldigheid in een model

Een formule  $\phi$  is geldig in een model  $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ ,  $\mathcal{M} \models \phi$ ,  
desda  $\langle W, R, V, w \rangle \models \phi$  voor alle werelden  $w \in W$ .

Voorbeeld:  $\mathcal{M} \models \Diamond p$ , maar  $\mathcal{M} \not\models \Box p$ , voor  $\mathcal{M}$  als in (2):

(2)  $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ , voor  $L = \{p\}$

- a.  $W = \{w_1, w_2\}$ ,
- b.  $R = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle\}$ ,
- c.  $V_{w_1}(p) = 1$  en  $V_{w_2}(p) = 0$

## Opgave

Voor  $P = \{p, q\}$ , beschouw het model  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  met

- ▶  $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- ▶  $R = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$
- ▶  $V_{w_1}(p) = 1, V_{w_2}(p) = 0, V_{w_3}(p) = 0,$   
 $V_{w_1}(q) = 0, V_{w_2}(q) = 1, V_{w_3}(q) = 0.$

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn in  $\mathcal{M}$ :

- (3)    a.  $p \vee q$   
      b.  $\Box\Box p \vee \Diamond\Box p$

**Onthoud:** Om te laten zien dat een formule  $\phi$  *niet geldig is in een model*  $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$  moet een wereld  $w \in W$  worden gegeven waarvoor de formule onwaar is, i.e.,  $\langle W, R, V, w \rangle \not\models \phi$ .



## Geldigheid op een frame

- ▶ Een structuur  $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$  noemen wij een *frame*.
- ▶ Een formule  $\phi$  is geldig op een frame  $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ,  $\mathcal{F} \models \phi$ , desda voor alle valuaties  $V$  geldt dat  $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \models \phi$ .
- ▶ Voorbeeld:  $\mathcal{F} \models \Box p \rightarrow \Diamond p$ , maar  $\mathcal{F} \not\models \Box p \rightarrow p$ , voor  $\mathcal{F}$  als in (4):

$$(4) \quad \mathcal{F} = \langle W, R \rangle$$

$$\text{a.} \quad W = \{w_1, w_2\},$$

$$\text{b.} \quad R = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle\}$$

## Opgave

Beschouw de frame  $F = (W, R)$  met

- ▶  $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- ▶  $R = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn op  $\mathcal{F}$ :

- (5)
- a.  $\Box p \rightarrow \Diamond p$
  - b.  $\Box p \rightarrow p$
  - c.  $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$
  - d.  $p \rightarrow \Box \Diamond p$

**Onthoud:** Om te laten zien dat een formule  $\phi$  *niet geldig is op een frame*  $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$  moet een valuatie  $V$  en een wereld  $w \in W$  worden gegeven waarvoor de formule onwaar is, *i.e.*,  $\langle W, R, V, w \rangle \not\models \phi$ .

# Opgave 1

Voor  $P = \{p, q\}$ , beschouw het Kripke model  $K = (W, R, V, w)$

- ▶  $W = \{w, w_1, w_2, w_3\}$
- ▶  $R = \{\langle w, w_1 \rangle, \langle w, w_2 \rangle, \langle w, w_3 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$
- ▶  $V_w(p) = 1, V_{w_1}(p) = 1, V_{w_2}(p) = 0, V_{w_3}(p) = 0,$   
 $V_w(q) = 1, V_{w_1}(q) = 0, V_{w_2}(q) = 1, V_{w_3}(q) = 0.$

Teken dit model, en ga nu na of de volgende formules waar zijn in  $K$ :

- (6)
- a.  $\Diamond p \wedge \Diamond q$
  - b.  $\Box(q \vee p)$
  - c.  $\Box \Diamond p$
  - d.  $\Diamond \Box q$
  - e.  $\Diamond(\Diamond p \wedge \Diamond \neg p)$
  - f.  $\Box(p \leftrightarrow \Diamond q)$
  - g.  $p \rightarrow \Diamond \Box \neg q$
  - h.  $\Diamond(p \leftrightarrow \Box p)$

## Opgave 2

Vertaal de volgende zinnen in ML, en definieer K-modellen waarin ze waar zijn, en waarin ze onwaar zijn:

- (7) Als het mogelijk waar is dat  $a$  is  $b$  dan is het ook noodzakelijk waar.
- Modale basis: alle logische mogelijkheden
  - Vertalingsleutel:  $p$  :  $a$  is  $b$
  - Vertaling:  $\Diamond p \rightarrow \Box p$
- (8) Als Peter niet binnen mag komen, dan moeten Jan en Bea ook weg.
- Modale basis: alle deontische mogelijkheden (of alle mogelijkheden binnen de regels van de spreker)
  - Vertalingsleutel:  $p$  :  $P$  komt binnen,  $q$  :  $J$  gaat weg,  $r$  :  $B$  gaat weg,
  - Vertaling:  $\neg \Diamond p \rightarrow \Box (q \wedge r)$
- (9) Sherlock acht het mogelijk dat Thelma niet vermoord is, en gelooft dat als zij wel vermoord is, dan heeft Louise het gedaan.
- Modale basis: Alle mogelijkheden gegeven de beschikbare informatie van Sherlock.
  - Vertalingsleutel:  $p$ :  $T$  is vermoord,  $q$ :  $L$  heeft het gedaan
  - Vertaling:  $\Diamond \neg p \wedge \Box (p \rightarrow q)$

## Opgave 3

Voor ieder zin in (10) definieer een K-model waarin de zin waar is, en een waarin ze onwaar is:

- (10)
- a.  $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
  - b.  $p \rightarrow \Box\Diamond p$
  - c.  $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$
  - d.  $\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Diamond p$
  - e.  $p \leftrightarrow \Diamond\Box p$