Logica en de Linguistic Turn 2013

Semantiek van de propositielogica, Russell en Carnap

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

September 26, 2013

Plan voor vandaag

1. Semantiek van de propositielogica
2. Participatie opdracht: nakijken
3. Russell en Carnap

Huiswerk:

- Gamut, 2.5 Opg. 5
- Alle filosofische teksten nog een keer lezen

Volgende week

- Maandag hoorcollege: K. Schulz, Paradoxen
- Volgende week vrijdag (4 okt-11 okt): huiswerkopdracht 1 over teksten lezingen 1-4

De taal van propositielogica

1. Vocabulaire:
   - logische variabelen: $p, q, r, p_1, \ldots$ (propositieletters)
   - logische constanten: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (connectieven)
   - hulptekens:),(
2. Syntaxis: **Recursive definitie** van de *formules* van L:
   (i) Alle propositieletters in het vocabulaire zijn formules van L. [basisstap]
   (ii) Als ϕ een formule van L is, dan $\neg\phi$ ook. [bouwregel]
   (iii) Als ϕ en ψ formules van L zijn, dan $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ook. [bouwregel]
   (iv) Allen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de clausules (i)-(iii) geconstrueerd kan worden, is een formule van L. [inductieclausule]

Waarheidstafels

- Voor ieder connectief wordt in een waarheidstafel (**truth table**) vastgelegd hoe waarheidswaarden toegekend worden aan samengestelde formules op grond van de waarheidswaarden van de constituenten waaruit de formule direct met de connectief is gevormd.
- Waarheidstafel voor:
  - Negatie: $\neg$ ('niet')
  - Conjunctie: $\wedge$ ('en')
  - Disjunctie: $\vee$ ('of')
  - Implicatie: $\rightarrow$ ('als . . . , dan')
  - Equivalentie: $\leftrightarrow$ ('desda')

Semantiek van de propositielogica

- Bestudering van de interpretaties van de propositielogische talen.
- Interpretatie van formule $\phi \mapsto$ toekennen van een waarheidswaarde
- Interpretatie van taal $L \mapsto$ toekennen van een waarheidswaarde aan iedere formule uit L
- Zo'n toekenning noemen wij een waardering of valuatie (**valuation**).
- Een valuatie is een functie (**funtion**) van de formules van de taal naar waarheidswaarden.

Functies

Een functie is een toekenning van een uniek waarde aan iedere entiteit van een bepaalde soort. Bijv

(1) geboortedatum van x : mensen $\rightarrow$ data

'geboortedatum van x' is een functie die aan ieder mens x als waarde de geboortedatum van x toekent.

- mensen $\mapsto$ **domein** van ons functie
- data $\mapsto$ **bereik** van ons functie

Ons functie toegepast aan het **argument** Maria levert de **waarde** 1-1-01 op:

(2) geboortedatum van x (Maria) $=$ 1-1-01

Vergelijk 'moeder van x' met 'ouder van x', en 'oudste broer van x'

Valuatie

Een valuatie V voor taal L van PL is een functie met als domein de formules van L en als bereik de waarheidswaarden, i.e.

(3) V: formules van L $\rightarrow \{0, 1\}$

die de volgende condities vervult (voor alle formules ϕ en ψ):

(i) $V(\neg\phi) = 1$ desda $V(\phi) = 0$;

(ii) $V(\phi \wedge \psi) = 1$ desda $V(\phi) = V(\psi) = 1$;

(iii) $V(\phi \vee \psi) = 0$ desda $V(\phi) = V(\psi) = 0$;

(iv) $V(\phi \rightarrow \psi) = 0$ desda $V(\phi) = 1$ en $V(\psi) = 0$;

(v) $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ desda $V(\phi) = V(\psi)$.

De valuatie moet in overstemming zijn met de interpretatie van de connectieven, die in de waarheidstafels is vastgelegd.

Semantiek middels waarheidstheorie (à la Tarski)

- Een valuatie V voor de taal van de propositielogica is een functie van de formules van de propositielogica naar waarheidswaarden.
- Voor elke formule ϕ wordt gedefiniëerd of $V(\phi) = 1$, dus of ϕ waar is, of $V(\phi) = 0$, dus of ϕ onwaar is.
- Een valuatie kan dus worden gezien als een *volledige beschrijving* van een mogelijke toestand van de wereld.
- Betekenis van ϕ in V = een waarheidwaarde (1 of 0)
- Betekenis van ϕ = zijn waarheidscondities

Einen Satz verstehen, heisst, wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist. (To understand a propositon means to know what is the case, if it is true.) [Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, Satz 4.024]

PO: Oefenvraag

Leibniz zegt op p. 478 van de *New Essays* dat de uitvinding van de syllogistische vorm een van de grootste ontdekkingen ooit is geweest, omdat daarmee een 'onfeilbaarheidskunst' beschikbaar is gekomen, dat wil zeggen een techniek of methode die behulpzaam kan zijn bij het vermijden van redeneerfouten. Reconstrueer op basis van het gelezen fragment uit Lockes *Essay Concerning Human Understanding* kort wat Lockes commentaar op deze stelling geweest zou kunnen zijn. Welke overeenkomsten zie je tussen Lockes standpunten en de ideeën van Descartes zoals besproken in het college?

Samenvatting modeluitwerking

Puntenverdeling:

- Kennis en begrip: 5 punten
- Argumentatie: 4 punten
- Schrijfvaardigheid: 1p

Puntenverdeling kennis en begrip + argumentatie

- Volgens Locke:
  1. Syllogismen dragen niet aan het vinden van fouten (1p) + argument en/of citaat (1p)
  2. Syllogismen dragen niet bij aan nieuwe kennis (1p) + argument en/of citaat (1p)
  3. De rede kan het beter (1p) + argument en/of citaat (1p)
- Descartes het eens met Locke
  1. Syllogismen leveren geen nieuwe kennis (1p)
  2. Mechanische redeneervormen zijn minder verkieslijk dan het direct inzien van redeneerstappen (1p)
- Algemeen structuur antwoord: 1p

Antwoord 1 (Jan)

Locke is een empirist, terwijl Leibniz een rationalist is. Locke onderscheidt vier delen binnen de rede. Het eerste deel is het *ontdekken van waarheden*, het tweede deel het *ordelijk uiteenzetten van waarheden*, het derde het *leggen van verbanden tussen waarheden* en het vierde deel *conclusies trekken*. Locke maakt duidelijk dat syllogismen alleen verbonden zijn met het tweede deel. Hij zegt: 'syllogism serves our reason but [...] to show the connexion of the proofs in any one instance' (*Essay Concerning Human Understanding*, Ch. 17, Section 4, para. 1/13). Locke schrijft hier dat we syllogismen alleen nodig hebben om onze bewijzen gestructureerd te presenteren. Om kennis te verwerven kunnen we syllogismen niet gebruiken. Descartes denkt, net als Locke, dat syllogismen niet bijdragen aan het verwerven van kennis. Om een syllogisme op te stellen moeten we de conclusie en de premissen al kennen.

Analyse antwoord 1 (Jan)

- Cijfer: 5 (onvoldoende)
  1. Kennis en begrip: 3 punten (Locke (2), Descartes (1p))
  2. Argumentatie: 1 punt
  3. Schrijfvaardigheid: 1 punt
- Problemen bij deze antwoord:
  - geen antwoord op de vraag (bijv Leibniz positie niet genoemd)
  - belangrijke punten niet genoemd (bijv. dat syllogisme niet bijdragen aan het ontdekken van redeneerfouten)
  - vol irrelevante informatie (bijv. Locke is een empirist, terwijl Leibniz een rationalist is)

Antwoord 2 (Marie)

Locke zou hier waarschijnlijk op antwoorden dat een expert in syllogismen niet per se beter is in het opsporen van fouten in een redenering. Sommige syllogismeleken zijn daar zelfs beter in met alleen het gezonde verstand (*Essay Concerning Human Understanding*, Ch. 17, Section 4, para. 11/13). Met de ontdekking van het syllogisme is dus helemaal geen 'onfeilbaarheidskunst' beschikbaar gekomen, in ieder geval geen 'onfeilbaarheidskunst' die beter is dan het gezonde verstand. Daarbij vertroebelen syllogismen de geest en zijn ze een beperking in het zoeken naar nieuwe 'kennis'. Het leidt niet tot nieuwe gedachtes en nieuwe ideeën, maar ordent slechts oude gedachtes (*Essay Concerning Human Understanding*, Ch. 17, Section 6).

Ook Descartes vindt dat syllogismen niet goed zijn voor de geest. Het draait alleen nog maar om de vorm, waardoor de scherpe menselijke geest wel op vakantie kan gaan. Dit standpunt van Descartes komt gedeeltelijk overeen met het standpunt van Locke dat syllogismen de geest vertroebelen. Daarbij vindt ook Descartes dat syllogismen niets opleveren, de conclusie was immers al 'aanwezig' in de premissen.

Analyse antwoord 2 (Marie)

- Cijfer: 7/8 (ruim voldoende/goed)
    1. Kennis en begrip: 5 punten (Locke (3p), Descartes (2p))
    2. Argumentatie: 2 punten
    3. Schrijvaardigheid: 0.5 punten
- Problemen bij deze antwoord:
    - Structuur, argumentatie, stijl hadden beter gekund

Antwoord 3 (Bettie)

Locke zegt: ‘Some eyes want spectacles to see things clearly and distinctly; but let not those that use them therefore say nobody can see clearly without them’ (*Essay Concerning Human Understanding*, Ch. 17, Section 4, para 13/13). Hier zien we goed Lockes ideeën over syllogismen. Volgens Locke zijn syllogismen alleen nuttig voor mensen die ze nodig hebben om te redeneren, net zoals sommige mensen een bril nodig hebben om te kunnen zien. Hij wijst erop dat vóór Aristoteles mensen ook al logisch konden denken. Locke zou het dus niet met Leibniz eens geweest zijn. Descartes heeft vergelijkbare ideeën over syllogismen.

Analyse antwoord 3 (Bettie)

- Cijfer: 3/4 (onvoldoend)
  1. Kennis en begrip: 2 punten (Locke (2p), Descartes (0p))
  2. Argumentatie: 1 punt
  3. Schrijvaardigheid: 0.5 p
- Problemen bij deze antwoord:
  - Geen antwoord aan de vraag
  - Belangrijke punten niet genoemd
  - ...

Antwoord 4 (Kees)

Volgens Locke is iedere redenering die in de vorm van een syllogisme wordt gegoten, een redenering die, voor hij deze kunstmatige vorm aannam, al volkomen duidelijk was voor degene die hem vertaalde. Het inzicht gaat altijd aan het maken van het syllogisme vooraf. Het verduidelijkt dan ook niets, maar verwart het denkproces juist. Het menselijk verstand kan namelijk veel makkelijker de juistheid van een redenering inzien in de natuurlijke dan in de formele taal. Redeneerfouten doen zich met behulp van syllogismen daarom juist sneller voor.

Descartes was eveneens van mening dat er niets nieuws te leren valt uit een syllogisme. Ook hij zei dat het slechts opgesteld kan worden wanneer de maker van te voren al kennis heeft van de waarheid van de conclusie.

Analyse antwoord 4 (Kees)

- Cijfer: 5/6 (voldoende)
  1. Kennis en begrip: 3 punten (Locke (2p), Descartes (1p))
  2. Argumentatie: 2 punten
  3. Schrijvaardigheid: 0.5 p
- Problemen bij deze antwoord:
  - Belangrijk punt niet genoemd
  - Stijl
  - Structuur

Conclusie

- Volledigheid: noem alle belangrijke punten
- Argumentatie: ondersteun je stellingen met argumenten en/of citaten
- Correctheid: maak geen fouten
- Relevantie: beantwoord de vraag, vermijd irrelevante informatie
- Structuur and helderheid: wees systematisch en duidelijk in je antwoord

Ook belangrijk:

- niet vergeten om je naam, st. nummer en naam docent in het document te schrijven!

Logicisme (Carnap): wat, waarom en hoe

- Wat:
  - Logicisme is thesis that mathematics is reducible to logic, hence nothing but a part of logic (Carnap, p. 41)
- Waarom:
  - Sinds 1600, wiskunde (deductieve methode) als ideaal van kennis (Descartes, Leibniz)
  - 19de eeuw, *grondslagencrisis* in de wiskunde, ontstaan o.a. door ontwikkeling van niet-Euclidische meetkunde (meetkunde zonder parallellenpostulaat, Bolyai, Lobatsjevski en Gauss rond 1830)
  - Logicisme als antwoord (Frege, Russell): laten zien dat fundamentele wiskunde herleid kan worden tot zuivere logica
- Hoe [vraag 6]:
  1. The *concepts* of mathematics can be derived from logical concepts through explicit definitions
  2. The *theorems* of mathematics can be derived from logical axioms through purely logical deductions

Herleiding van *the concepts of mathematics*

- Wat zijn *the concepts of mathematics*?
  - numbers, operations, etc.
- Wat zijn *the concepts of logics*? (p. 42)
  - Connectives ($\neg, \vee, \wedge \rightarrow$), quantifiers ($\forall x, \exists x$), identity ($=$)
- Natuurlijke getallen kunnen gedefinieerd worden in termen van logische begrippen. Voorbeeld: definitie van getal 2, p. 42 [vraag 7,8]
- De rest kan worden herleiden vanuit de natuurlijke getallen (p. 43) ('not postulated but constructed' [vraag 9])
  - Rationale getallen als 'equivalence classes of pairs': $3 \neq 3/1$
  - Reel rationeel getal r als verzameling van rationele getallen x s.t. $x < r$
  - Reel getal $\sqrt{2}$ als verzameling van rationele getallen x s.t $x^2 < 2$
- Reële getallen gedefinieerd als verzamelingen (predikaten, eigenschappen) $\Rightarrow$ probleem

Herleiding van *the theorems of mathematics*

- Wat is het verschil tussen *axioms* en *theorems*?
- Russells axiomas
  - Onproblematisch: logische axiomas en regels (four axioms of propositional calculus, two of functional calculus, two rules)
  - Problematisch: **axiom of infinity, axiom of choice, axiom of reducibility**
- Waarom zijn axiom of infinity en axiom of choice problematisch? (p. 44)
  - Both are existential sentences (zij beweren dat iets bestaat)
  - Logic deals only with possible entities and cannot make assertions about whether something does or does not exist (vraag 9)
- Wat is Russells oplossing?
  - Als bewijs van S afhankelijk van axiom of infinity (I)/axiom of choice (C), dan in plaats van S, $I \to S$ of $C \to S$ als 'theorem'

Axiom of reducibility

- De axioma
  - Any truth function (i.e. propositional function) can be expressed by a formally equivalent predicative truth function.

  Wat is een propositional function? Russell p. 148
- Problematisch, omdat *ad hoc* (p. 46), waarom?
- Alleen nodig om 'ramified theory of types' te redden (p. 49):
  - In ramified type theory, kan jij niet zeggen 'for all properties ...', moet jij zeggen 'for all properties of type *n* ...'
  - Reële getallen zijn opgebouwd als 'properties', dus kan jij niet meer zeggen 'for all reals ...'
  - Axiom of reducibility zegt dat alle 'properties' (dus ook alle reële getallen) kunnen worden uitgedrukt bij 'predicative truth functions' (property of type 1)
- Ramseys oplossing: ramified theory of types overbodig (simple theory of types genoeg), dus axiom of reducibility ook niet nodig

Theory of ramified types: waarom overbodig?

- Waarom ontwikkelde Russell de ‘theory of ramified types’? (p. 46-49)
  - Antinomies (paradoxen) te voorkomen:
    - Logical antinomies, e.g. ‘impredicable’ [volgende HC]
      $\Rightarrow$ oplosbaar in simpele typetheorie
    - Semantical/epistemological antinomies, e.g. ‘heterological’
      $\Rightarrow$ voor Russell, reden voor ‘ramified types’, maar volgens Ramsey onproblematisch want ‘cannot be reconstructed in the symbolic language of logic’
  - Vicious circles (or impredicative definitions) te voorkomen
    - Voor Russell, impredicative definitions are not admissible
    - Volgens Ramsey onproblematisch: ‘impredicative definitions admissable assuming properties exist before definition (platonic, absolutist theory)’
    - Carnaps uitdaging: impredicative definitions redden zonder Ramsey absolutism: ‘in mathematics, only that may be taken to exist whose existence has been proven (in a finite number of steps)’ (p. 50)

Impredicative definitions

- A definition is *impredicative* if it defines a concept in terms of a totality to which the concept belongs (p. 48)
- Waarom zijn 'impredicative definitions' problematisch? [vraag 10b]
  - create antinomies
  - meaningless, circular, useless
- Illustratie: $Ind(x) =_{Df} \forall f[(Her(f) \wedge f(0)) \rightarrow f(x)]$
  - A number is *inductive* if it possesses all the hereditary properties of zero (A property is *hereditary* if it always belongs to the number $n + 1$ whenever it belongs to the number n)
  - But, 'inductive' defined in terms of a totality (all properties) to which 'inductive' belongs, because 'inductive' is also a property
- Russells oplossing: ramified type theory $\Rightarrow$ probleem met 'real numbers' $\Rightarrow$ axiom of reducibility
- Ramsey en Carnap: impredicative definitions admissable

Russell: ‘Mathematics en Logic’

- Centrale thema: over logica en zijn relatie met wiskunde
- Kernbegrippen:
  - Logic and Mathematics
  - Form, logical variables and logical constants
  - Logical propositions, tautologies, . . .
- Structuur tekst:
  1. Relatie logica en wiskunde (p. 194-196)
  2. What is logic? (p. 196-198)
  3. What are the constituents of logical propositions? (p. 198-202)
  4. What are the logical propositions? (p. 203-205)
- Vergelijk met Carnap:
  - ‘We sufficiently defined [in 2 en 3] the character of the primitive *ideas* in terms of which all ideas of mathematics can be *defined*, but not of the primitive *propositions* from which all the proposition of mathematics can be *deduced* [to be done in 4] (p. 202)

Logic and mathematics (p. 194-196)

- Op welke manier zijn logica en wiskunde verbonden?
  - 'Impossible to draw a line between the two. They differ as boy and man: logic is the youth of mathematics and mathematics is the manhood of logic' (p. 194)
- Wat is de rol van wiskunde in logica? En welke rol speelt de logica in de wiskunde?
  - Logic gives meaning and justification
  - Mathematics gives technical sophistication (symbolic reasoning)
- Nog een citaat:
  - 'In a synthetic, deductive treatment these fundamentals [of logics] come first, and then the natural numbers are reached after a long journey' (p. 195)
- Logicisme: logical concepts $\mapsto$ natural numbers $\mapsto$ ....

What is logic? (p.196-198)

- Kerneigenschap van logica: purely *formal*
- Logische proposities:
  - not over particulars
  - actual truth irrelevant
- Hoe moet het volgende syllogisme veranderd worden wil het een logische propositie zijn en waarom?

(4) All men are mortal. Socrates is a man. Therefore, Socrates is mortal.

- (4) gaat over 'particulars' en is afhankelijk van 'actual truth', (5) niet:

(5) No matter what possible values x and α and β may have, 'if all α's are β's and x is an α, then x is a β' is always true'

Constituents of a logical proposition (p. 198-202)

- Constituents of a logical proposition: variables, constants
- Form of a proposition:
  - 'The "form" of a proposition is that that remains unchanged when every constituent of the proposition is replaced by another.' (p. 199)
- Voorbeeld: twee proposities, een vorm

(6) a. Proposition 1: Socrates was before Aristoteles
    b. Proposition 2: Napoleon is greater than Wellington.
    c. Form: xRy

- Vraag: is the general form itself a constituent or not?

Constituents of a logical proposition (p. 198-202)

- Vraag: is the general form itself a constituent or not?
- Argument against (third man argument):
  - 'Given a proposition, such as 'Socrates is before Aristotle,' we have certain constituents and also a certain form. But the form is not itself a new constituent; if it were, we should need a new form to embrace both it and the other constituents. '(p. 198-199)
- Third man argument (Aristoteles tegen Plato):
  - 'If a man is a man because he partakes in the form of man, then a third form would be required to explain how man and the form of man are both man, and so on, *ad infinitum*.'

Logical Proposition (p. 203-206)

- Logical propositions:
  - logical truths from which all the propositions of mathematics can be deduced
  - analytic (true by virtue of their meaning (Kant)/by virtue of logic (Russell))
  - tautological (their negations are self-contradictory)
  - known a priori (known without study of the actual world)
- Open problem: definition of logical propositions: which axioms should we assume? (next week semantic definition of tautologies)

Infinity and existence (p. 203-204)

- Axiom of infinity: for every natural number there is a successor
- Is the "axiom of infinity" a logical proposition?
  - Russell: No, it can be enunciated in logical terms, but cannot be asserted by logic to be true. Why?
  - Because it has an existential character and existence is an accident (not logically necessary)
- No principle of logic can assert existence, no principle of logic is particular (no *i*- or *o*-sentences)
- All principles of logic are universal (for Russell universal statements do not assert/imply existence)

Ordinary language and the necessity of logical symbolism (p. 205-206)

> *Because language is misleading, as well as because it is diffuse and inexact when applied to logic (for which it was never intended), logical symbolism is absolutely necessary to any exact or thorough treatment of our subject. Those readers, therefore, who wish to acquire a mastery of the principles of mathematics, will, it is to be hoped, not shrink from the labour of mastering the symbols – a labour which is, in fact, much less than might be thought.*