Proeftentamen en Carnap

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

Logica en de Linguistic Turn 2013

September 19, 2013

Plan voor vandaag

- Proeftentamen 1
- Carnap (Russell volgende week)

Huiswerk:

- Oefenvraag, deadline morgen (20 sept), 23.59 uur
- Zaaltentamen, maandag 23 Sept, 18-20
- Geen hoorcollege op maandag 23

Logicisme (Carnap): wat, waarom en hoe

- Wat:
  - Logicisme is thesis that mathematics is reducible to logic, hence nothing but a part of logic (Carnap, p. 41)
- Waarom:
  - Sinds 1600, wiskunde (deductieve methode) als ideaal van kennis (Descartes, Leibniz)
  - 19de eeuw, *grondslagencrisis* in de wiskunde, ontstaan o.a. door ontwikkeling van niet-Euclidische meetkunde (meetkunde zonder parallellenpostulaat, Bolyai, Lobatsjevski en Gauss rond 1830)
  - Logicisme als antwoord (Frege, Russell): laten zien dat fundamentele wiskunde herleid kan worden tot zuivere logica
- Hoe [vraag 6]:
  1. The *concepts* of mathematics can be derived from logical concepts through explicit definitions
  2. The *theorems* of mathematics can be derived from logical axioms through purely logical deductions

Herleiding van *the concepts of mathematics*

- Wat zijn *the concepts of mathematics*?
  - numbers, operations, etc.
- Wat zijn *the concepts of logics*? (p. 42)
  - Connectives ($\neg, \vee, \wedge \rightarrow$), quantifiers ($\forall x, \exists x$), identity ($=$)
- Natuurlijke getallen kunnen gedefinieerd worden in termen van logische begrippen. Voorbeeld: definitie van getal 2, p. 42 [vraag 7,8]
- De rest kan worden herleiden vanuit de natuurlijke getallen (p. 43) ('not postulated but constructed' [vraag 9])
  - Rationale getallen als 'equivalence classes of pairs': $3 \neq 3/1$
  - Reel rationeel getal r als verzameling van rationele getallen x s.t. $x < r$
  - Reel getal $\sqrt{2}$ als verzameling van rationele getallen x s.t $x^2 < 2$
- Reële getallen gedefinieerd als verzamelingen (predikaten, eigenschappen) $\Rightarrow$ probleem

Herleiding van *the theorems of mathematics*

- Wat is het verschil tussen *axioms* en *theorems*?
- Russells axiomas
  - Onproblematisch: logische axiomas en regels (four axioms of propositional calculus, two of functional calculus, two rules)
  - Problematisch: axiom of infinity, axiom of choice, axiom of reducibility
- Waarom zijn axiom of infinity en axiom of choice problematisch? (p. 44)
  - Both are existential sentences (zij beweren dat iets bestaat)
  - Logic deals only with possible entities and cannot make assertions about whether something does or does not exist (vraag 9)
- Wat is Russells oplossing?
  - Als bewijs van S afhankelijk van axiom of infinity (I)/axiom of choice (C), dan in plaats van S, $I \rightarrow S$ of $C \rightarrow S$ als 'theorem'

Axiom of reducibility

- De axioma
  - Any truth function (i.e. propositional function) can be expressed by a formally equivalent predicative truth function.

  Wat is een propositional function? Russell p. 148

- Problematisch, omdat *ad hoc* (p. 46), waarom?
- Alleen nodig om 'ramified theory of types' te redden (p. 49):
  - In ramified type theory, kan jij niet zeggen 'for all properties ...', moet jij zeggen 'for all properties of type n ...'
  - Reële getallen zijn opgebouwd als 'properties', dus kan jij niet meer zeggen 'for all reals ...'
  - Axiom of reducibility zegt dat alle 'properties' (dus ook alle reële getallen) kunnen worden uitgedrukt bij 'predicative truth functions' (property of type 1)
- Ramseys oplossing: ramified theory of types overbodig (simple theory of types genoeg), dus axiom of reducibility ook niet nodig

Theory of ramified types: waarom overbodig?

- Waarom ontwikkelde Russell de 'theory of ramified types'? (p. 46-49)
  - Antinomies (paradoxen) te voorkomen:
    - Logical antinomies, e.g. 'impredicable' [volgende HC]
      $\Rightarrow$ oplosbaar in simpele typetheorie
    - Semantical/epistemological antinomies, e.g. 'heterological'
      $\Rightarrow$ voor Russell, reden voor 'ramified types', maar volgens Ramsey onproblematisch want 'cannot be reconstructed in the symbolic language of logic'
  - Vicious circles (or impredicative definitions) te voorkomen
    - Voor Russell, reden voor ramified types
    - Volgens Ramsey onproblematisch: 'impredicative definitions admissable assuming properties exist before definition (platonic, absolutist theory)'
    - Carnaps uitdaging: impredicative definition redden zonder Ramsey absolutism: 'in mathematics, only that may be taken to exist whose existence has been proven (in a finite number of steps)' (p. 50)

Impredicative definitions

- A definition is *impredicative* if it defines a concept in terms of a totality to which the concept belongs (p. 48)
- Waarom zijn 'impredicative definitions' problematisch? [vraag 10b]
  - create antinomies
  - meaningless, circular, useless
- Illustratie: $Ind(x) =_{Df} \forall f[(Her(f) \wedge f(0)) \rightarrow f(x)]$
  - A number is *inductive* if it possesses all the hereditary properties of zero (A property is *hereditary* if it always belongs to the number $n+1$ whenever it belongs to the number n)
  - But, 'inductive' defined in terms of a totality (all properties) to which 'inductive' belongs, because 'inductive' is also a property
- Russells oplossing: ramified type theory $\Rightarrow$ probleem met 'real numbers' $\Rightarrow$ axiom of reducibility
- Ramsey en Carnap: impredicative definitions admissable