Opgave 3 Laat door middel van een tegenmodel zien dat de volgende redeneerschema's ongeldig zijn. Licht uw antwoord kort toe.

(i) $\forall x(Ax \vee Bx), \forall x(Ax \rightarrow Bx) \; / \; \forall x(Ax \wedge Bx)$

(ii) $\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryx) \; / \; \forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$

(iii) $\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \neg Ay)), \forall x(\neg Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ay)) \; / \; \exists x \exists y(Rxy \wedge Ryx)$

Antwoord

(i) Tegenmodel: $M = (D, I)$ [andere oplossingen mogelijk]

- $D = \{1\}$
- $I(A) = \emptyset$, $I(B) = \{1\}$

Korte uitleg

- $V_M(\forall x(Ax \vee Bx)) = 1$, want alle onze objecten hebben eigenschap B (1ste premisse is waar)
- $V_M(\forall x(Ax \rightarrow Bx)) = 1$, want $I(A) \subseteq I(B)$, (of want geen objecten hebben eigenschap A, dus het is waar dat als x eigenschap A heeft, dan heeft x ook eigenschap B) (2de premisse is waar)
- $V_M(\forall x(Ax \wedge Bx)) = 0$, want geen object heeft eigenschap A (conclusie is onwaar)

(ii) Tegenmodel: $M = (D, I)$ [andere oplossingen mogelijk]

- $D = \{1, 2\}$
- $I(R) = \{< 1, 1, >, < 2, 2 >, < 1, 2 >\}$

Korte uitleg

- $V_M(\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryx)) = 1$, want $I(R)$ is reflexsief, dus vanuit ieder punt loopt tenmisten een pijl die terug keert (premisse is waar)
- $V_M(\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)) = 0$, want $I(R)$ is niet symmetrisch, vanuit 1 loopt een pijl naar 2, maar vanuit 2 loopt geen pijl naar 1 (conclusie is onwaar)

(ii) Tegenmodel: $M = (D, I)$ [andere oplossingen mogelijk]

- $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- $I(R) = \{< 1, 2, >, < 2, 3 >, < 3, 4 >, < 4, 1 >\}$

Korte uitleg (wij interpreteren Ax als x is omcirkeld)

- $V_M(\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \neg Ay))) = 1$, want vanuit alle omcirkelde punten loopt tenmisten een pijl naar een niet omcirkelde punt (1ste premisse is waar)
- $V_M(\forall x(\neg Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ay))) = 1$, want vanuit alle niet omcirkelde punten loopt tenmisten een pijl naar een omcirkelde punt (2de premisse is waar)
- $V_M(\exists x \exists y(Rxy \wedge Ryx)) = 0$, want er is geen pijl die terugkeert (conclusie is onwaar)

Opgave 4 (10 punten) In deze opgave beschouwen wij als domein de verzameling van alle mensen, en gaan wij uit van de volgende vertaalsleutel:

a:	Jan,
b:	Piet,
Rxy:	x is vader of moeder van y.

a. Hoe kun je in een formule van de predikatenlogica uitdrukken dat Jan grootouder is van Piet zonder daarbij gebruik te maken van andere predikaten dan het gegeven predikaat R?

   Antwoord: $\exists x(Rax \wedge Rxb)$

b. Hoe kun je in een formule van de predikatenlogica uitdrukken dat Jan een halfbroer of halfzus is van Piet zonder daarbij gebruik te maken van andere predikaten dan het gegeven predikaat R?

   Antwoord: $\exists x(Rxa \wedge Rxb) \wedge \exists y(Rya \wedge \neg Ryb) \wedge \exists z(Rzb \wedge \neg Rza)$