Logica en de Linguistic Turn 2013

Predikatenlogica en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

October 31, 2013

Plan voor vandaag

1. Predicatenlogica: syntaxis, bereik, binding, vertalingen (telwoorden)
2. Tractatus: Theorie van taal (3.32-3.33, 3.34-3.5)

Huiswerk:

- Gamut: 3.3, 3.7 (zonder semantiek).
  Opg.: 3.3, 3.5 (xi-xx), 3.11 (a-g).
- Tractatus: 4-4.041, 4.1-4.1213 (Filosofie, tonen vs zeggen)

Vocabulaire van een predikaatlogischetaal L

- Constant deel:
  - PL connectieven: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - kwantoren: $\forall$, $\exists$
  - oneindig veel individuele variabelen: $x, y, z, \ldots$
  - identiteit: $=$
- Variabel deel:
  - Individuele constanten: a, b, c
    verwijzen naar individuen, entiteiten ('de Tractatus, Plato')
  - n-plaatsige predikaatconstanten
    - 1-plaatsige predikaatconstanten: P, Q
      verwijzen naar eigenschappen ('sterfelijk, mens, lachen')
    - 2-plaatsige predikaatconstanten: R
      verwijzen naar binaire relaties ('lezen, groter zijn dan')
    - ...
- Hakjes: $), ($

Syntaxis: definitie van formules van de taal L

(i) Als A een n-plaatsige predikaatletter is van L en elk van $t_1, ..., t_n$ een individuele constante uit het vocabulaire is of een variabele, dan is $At_1, ..., t_n$ een formule van L; (atomaire formules)

(ii) Als ϕ een formule van L is dan is $\neg\phi$ dat ook;

(iii) Als ϕ en ψ formules van L zijn, dan zijn $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ dat ook;

(iv) Als ϕ een formule is van L en x een variabele, dan zijn ook $\exists x\phi$ en $\forall x\phi$ formules van L; (existentiële en universele formules)

(v) Als t_1 en t_2 individuele constanten uit het vocabulaire zijn of variabelen, dan is $t_1 = t_2$ een formule van L

(vi) Alleen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de clausules (i)-(v) kan worden geconstrueerd, is een formule van L.

Vbld: Pax (ja); $\forall aPa$ (nee); $\forall xPy$ (ja); $\forall xPa$ (ja); $(\exists x \wedge Px)$ (nee); $x = a$, $y = x$, $a = b$ (ja); $P = Q, Pa = Qb$ (nee); $\neg\exists z(\forall y(\exists xPxy \rightarrow Qy) \wedge Rzy)$ (ja).

Definitie van bereik (scope)

Is $\forall x\phi$ een subformule van ψ, dan heet ϕ het **bereik** van het aangegeven voorkomen van de kwantor $\forall x$ in ψ.
(Evenzo voor voorkomens van kwantor $\exists x$).

Het is noodzakelijk om in deze definitie over voorkomens van kwantoren te spreken, omdat er formules zijn als $\forall xAx \wedge \forall xBx$ waarin dezelfde kwantor meermalen voorkomt.

Vraag: Welke bereik voor die kwantoren die voorkomen in
$\neg\exists z(\forall y(\exists xPxy \rightarrow Qy) \wedge Rzy)$?

Vrije variabelen en binding

- Een voorkomen van de variabele x in de formule ϕ (die niet een deel is van een kwantoor) heet **vrij** in ϕ als dit voorkomen van x niet ligt in het bereik van een kwantoor $\forall x$ of $\exists x$ in ϕ.

  Vraag: Welke voorkomen van welke variabel is vrij in $\neg\exists z(\forall y(\exists x Pxy \rightarrow Qy) \wedge Rzy)$?

- Als $\forall x\psi$ (of $\exists x\psi$) een subformule is van ϕ en x komt vrij voor in ψ dan heet dat voorkomen van x **gebonden door** de aangegeven kwantor $\forall x$ (of $\exists x$).
  Voorbeeld: In $\forall x(Ax \wedge \exists x Bx)$. De x in Bx is in het bereik van $\forall x$, maar is niet gebonden door $\forall x$.

  Vraag: welke variabel wordt gebonden door $\forall x$ in $\forall x Py$?

Formules, zinnen en volzinsfuncties

- Een **zin** van L is een formule van L zonder vrije variabelen.
  Voorbeelden: $\forall x Ay$ (nee); $\forall x(Ax \wedge \exists x Bx)$ (ja); $Ax \wedge \exists x Bx$ (nee)
- Een formule met vrije variabelen noemen wij een **volzinsfunctie** (propositional function).

Notatie

Als ϕ een formule is, c een constante en x een variabel, dan is $[c/x]\phi$ de formule die ontstaat door in ϕ alle vrije voorkomens van x te vervangen door c.

ϕ	$[c/x]\phi$
Axy	Acy
Axx	Acc
$\forall x Axx$	$\forall x Axx$
Ay	Ay

Vertalingen

(1)
a. Plato is een mens.
b. Mp
c. Vertaalsleutel: Mx: x is een mens; p: Plato

(2)
a. Plato slaat een mens.
b. $\exists x(Mx \wedge Spx)$
c. Vertaalsleutel: Mx: x is een mens; Sxy: x slaat y; p: Plato
d. Domain: personen

(3)
a. Een student die te laat is, wordt gestraft.
b. $\forall x((Sx \wedge Lx) \rightarrow Gx)$
c. Vertaalsleutel: Sx: x is een student; ...
d. Domain: personen

(4)
a. Een walvis is een zoogdier.
b. $\forall x(Wx \rightarrow Zx)$
c. Vertaalsleutel: ...
d. Domain: dieren

Zinnen met twee kwantoren

- De volgende zin is ambigu:

(5) Iedereen bewondert iemand

a. Lezing A: verschillende mensen bewonderen verschillende mensen, bijv. Jan bewondert Jaap, Marie bewondert Joke, ...
Vertaling: $\forall x \exists y Bxy$
'voor alle x: er is een y: x bewondert y

b. Lezing B: iedereen bewondert hetzelfde mens, bijv. Martin Luther King
Vertaling: $\exists y \forall x Bxy$
'er is een y: voor alle x: x bewondert y

- De twee lezingen van (5) corresponderen met twee manieren waarin de zin opgebouwd kan worden.

Vertalingen

(6) Ieder student houdt van een filosoof.

a. Interpretatie A: $\forall x(Sx \to \exists y(Fy \wedge Hxy))$

b. Interpretatie B: $\exists y(Fy \wedge \forall x(Sx \to Hxy))$

(7) a. Geen student houdt van ieder filosoof.

b. $\neg\exists x(Sx \wedge \forall y(Fy \to Hxy))$

(8) a. Everyone admires someone who admires everyone.

b. $\forall z \exists x(Azx \wedge \forall y Axy)$

Vertalingen

(9) a. Jan houdt van Marie, maar Marie houdt van iemand anders.
b. $Hjm \wedge \exists x(x \neq j \wedge Hmx)$

(10) a. Jan houdt van niemand behalve Marie.
b. $Hjm \wedge \forall x(x \neq m \rightarrow \neg Hjx)/\forall x(x = m \leftrightarrow Hjx)$

(11) a. Alleen Jan houdt van Marie.
b. $Hjm \wedge \forall x(Hxm \rightarrow x = j)/\forall x(x = j \leftrightarrow Hxm)$

(12) a. Jan houdt van iedereen behalve Marie.
b. $\neg Hjm \wedge \forall x(x \neq m \rightarrow Hjx)/\forall x(x \neq m \leftrightarrow Hjx)$

(13) a. Iedereen houdt van Marie behalve Jan.
b. $\forall x(x \neq j \rightarrow Hxm) \wedge \neg Hjm/ \forall x(x \neq j \leftrightarrow Hxm)$

Vertalingen

Wat betekenen de volgende formules?

(14) $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Sx \wedge Sy)$

(15) $\forall x \forall y ((Sx \wedge Sy) \rightarrow x = y)$

Vertalingen

(16) Er is minstens 1 student.

(17) Er zijn minstens 2 studenten.

(18) Er zijn t minstens 3 studenten.

(19) Er is hoogstens 1 student.

(20) Er zijn hoogstens 2 studenten.

(21) Er zijn hoogstens 3 studenten.

(22) Er is precies 1 student.

(23) Er zijn precies 2 studenten.

(24) Er zijn precies 3 studenten.

Structuur van de Tractatus

- Ontologie (1–2.063)
- De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- **Theorie van taal (3.1–4.2)**
- Logica (4.2–6.13)
- Wiskunde (6.2–6.3)
- Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- Besluit (7)

Vorige keer: Theorie van taal (3.1–3.3)

3.1 In de zin (Satz) drukt de gedachten zich zinnelijk waarneembaar uit.

⋮

3.3 Alleen de zin (Satz) heeft zin (Sinn); alleen in het context van een zin heeft een naam betekenis (Bedeutung)

Korte inhoudsopgave

- Zinsteken (Satzzeichen)
- Zin (Satz)
- Betekenisvolle zin (Sinvolle Satz)
- Naam
- Analyse

Vandaag: Theorie van taal (3.31, 3.32–3.33, 3.34–3.5)

Korte inhoudsopgave

- Symbol *versus* teken
- Ambiguiteit, logische syntaxis
- Het wezenlijke van tekens en notatie
- De zin als bepaling van een plek in de logische ruimte

Studievragen

- Wat is het verschil tussen symbool en teken?
- Kunnen twee teken een gemeenschappelijk symbool hebben? Als ja, geef een voorbeeld. Als nee, leg uit waarom.
- Kunnen twee symbolen een gemeenschappelijk teken hebben? Als ja, geef een voorbeeld. Als nee, leg uit waarom.

Onderscheid symbol–teken

- Generalisatie van het onderscheid volzin–zinsteken.
- Een symbol is elk deel van een zin dat bijdraagt tot zijn betekenis (3.31)
- Het teken is het zintuigelijk waarneembare aan het symbol (3.32)
- Het symbol is het teken met de wijze van betekenen (3.322, 3.323)
  - Synoniemen: eenzelfde wijze van betekenen, twee tekens: *object, voorwerp*
  - Homoniemen: eenzelfde teken, verschillende wijzen van betekenen, verschillende symbolen: *bank*
- Om het symbol uit het teken te halen moet je letten op het betekenisvolle gebruik ervan (3.326)

(25) a. Ik zit op mijn bank.
b. Ik heb geld aan je bank opgestuurd.

Ambiguiteit en logische syntaxis

- De verwisseling van teken met symbol leidt tot misverstanden.
- In de dagelijkse taal kan eenzelfde teken de zintuigelijke waarneembare uitdrukking zijn van verschillende symbolen (3.321, 3.323)
- B.v. *zijn*: eenzelfde teken, verschillende symbolen: copula, identiteit, existentie (3.323). Welke vertalingen in PredLog?

(26) a. De vrouw is moe.
b. Jan is Piet.
c. Er is een hond in de tuin.

- Het gebruik van een tekentaal waarin dergelijke **ambiguiteiten** vermeden zijn, helpt die misverstanden te voorkomen. Een tekentaal dus die aan de **logische syntaxis** gehoorzaamt. Bijv. Frege's en Russell's logische symbolismen (3.325)

Over filosofie

- Wat bedoelt Wittgenstein met stelling 3.324? Breng ze in verband met wat W over filosofie zegt in het voorwoord:

  > *So entstehen leicht die fundamentalsten Verwechslungen (deren die ganze Philosophie voll ist). (3.324)*

- Relevante passage in Voorwoord:

  > *Het boek behandelt de filosofische problemen en laat zien –zoals mijn overtuiging is– dat de vraagstelling van deze problemen berust op een verkeerd begrip van de logica van onze taal.*

Het wezenlijke van symbolen en notatie

- Symbolen hebben **wezenlijke** en **toevallige** kenmerken (3.34, 3.341)
- Het wezenlijke aan een symbool is wat het met alle andere symbolen die voor hetzelfde staan, gemeen heeft (3.341)

(27) a. De zon is geel.
b. The sun is yellow.

- Dus het teken is willekeurig. (3.322)
- Elke notatie (taal) heeft willekeurige en wezenlijke trekken.
- Bv. gemeenschappelijk (dus wezenlijk) van alle notaties voor de waarheidsfuncties: Zij kunnen worden vervangen door de notatie van $\neg p$ en $p \vee q$. (3.3441) [cf. Gamut over functionele volledigheid]

3.342-3.343

- Als wij ‘A’ gebruiken als naam voor a, dan is dat willekeurig.
- Maar ‘A’, ook een object, draagt als zodanig alle combinatiemogelijkheden met andere namen in zich.
- Met de namen zijn alle betekenisvolle zinnen gegeven, en dat is iets noodzaakelijk. (3.342)
- De vorm van een naam is een weerspiegeling van de vorm van de benoemde object.
- En daarmee bepaalt dus de vorm van de werkelijkheid de vorm van elke notatiesysteem.
- Gevolg is dat alle die systemen (talen) in elkaar vertaalbaar zijn (3.343).

Zin als bepaling van een plek in de logische ruimte (3.4-3.5)

- De betekenis van een zin is een situatie, dwz een plek in de logische ruimte van alle standen van zaken.
- De existentie hiervan is gegarandeerd door de betekenisvolheid van de uiteindelijke constituenten van de zin.
- De namen verwijzen naar de objecten, een zinvolle combinatie van namen correspondeert automatisch met een combinatie van objecten, een stand van zaken (*logische Koordinaten*: correlatie tussen namen en objecten)
- Door een plek in de logische ruimte te bepalen, bepaalt een zin tevens zijn relaties met alle andere zinnen.
- Gegeven de betekenis van een zin, zijn zijn logische relaties met alle andere zinnen bepaald. (Metafoor van de staketsel (geraamte, of skelet))

Studievragen (4-4.041, 4.1-4.1213)

- Wat is de relatie tussen gedachten en zinnen? Kan ieder gedachte door een zin wordt uitgedrukt? Drukt ieder zin een gedachte uit?
- Wat is een taal?
- Wat is de rol van de filosofie volgens Wittgenstein?
- Wat kan gezegd worden? Wat kan niet gezegd worden?