

# Kripke-modellen en Frege

Maria Aloni  
ILLC-University of Amsterdam  
M.D.Aloni@uva.nl

Logica en de Linguistic Turn 2012

29/11/12

# Plan voor vandaag

1. Modale logica: Kripke modellen en semantiek
2. Frege

## **Huiswerk:**

- ▶ Gamut: Opg. 3.12b; Syllabus, 4.3 incl. opgaven.
- ▶ HW5 (deadline 30 Nov)
- ▶ Wiki: commentaar en eindversie lemma (deadline 30 Nov)

# Mogelijke werelden

- ▶ Modale logica: propositielogica +  $\Box$  en  $\Diamond$ 
  - ▶  $\Box \mapsto$  noodzakelijkheid
  - ▶  $\Diamond \mapsto$  mogelijkheid
- ▶ Alles wat we zullen zeggen over mogelijkheid en noodzakelijkheid in ML, zal gedefiniëerd zijn in termen van mogelijke werelden.

*I believe, and so do you, that things could have been different in countless ways. (. . . ) Ordinary language permits the paraphrase: there are many ways things could have been besides the way they actually are. (. . . ) It says that there exist many entities of a certain description, to wit ways things could have been. (. . . ) I believe permissible paraphrases of what I believe; (. . . ) I therefore believe in the existence of entities that might be called ways things could have been. I prefer to call them possible worlds. [David Lewis, 1979]*

# Waarheid in ML afhankelijk van *meer dan één* wereld

- ▶ In PL was de waarheid van een formule bepaald op basis van één valuatie, die wat feitelijk het geval is in de actuele wereld representeert.

Een PL valuatie kan worden gezien als een volledige beschrijving van een mogelijke toestand van de wereld, want ze legt de waarheidswaarde van elke mogelijke uitspraak over de wereld vast:  $\forall \phi: V(\phi) = 1$ , of  $V(\phi) = 0$ .

- ▶ In modale logica, de waarheid van een formule kan afhankelijk zijn van meer dan één mogelijke wereld.
  - (1)
    - a. Zin: Jan kwam niet naar het hoorcollege vandaag, maar hij had wel kunnen komen
    - b. Vertaling:  $\neg p \wedge \Diamond p$
    - c. Analyse: in de actuele wereld kwam Jan niet, maar er is een andere mogelijk wereld waarin hij wel kwam.
- ▶ Valuaties in modale logica moeten niet alleen waarheidswaarden toekennen aan propositieletters in de wereld waarin de formule wordt geïnterpreteerd, maar ook aan alle andere mogelijke werelden die misschien relevant zijn voor de betekenis van een formule.
- ▶ Dit vraagt om een wereld afhankelijk notie van valuatie

# Niet alles wat logisch mogelijk is is ook daadwerkelijk mogelijk

- ▶ In PL, alle logische mogelijke valuaties relevant voor *metalogische noties* zoals logisch equivalentie of geldigheid
- ▶ In ML, meerdere werelden relevant voor *waarheid* van formules:
  - (2) a.  $\Diamond\phi$  waar in  $w$  desda er is een  $w'$  die toegankelijk is vanuit  $w$  zodat  $\phi$  waar is in  $w'$
  - b.  $\Box\phi$  waar in  $w$  desda elke  $w'$  die toegankelijk is vanuit  $w$  is zodat  $\phi$  waar is in  $w'$
- ▶ Afhankelijk van interpretatie van  $\Diamond$  en  $\Box$  kunnen verschillende verzamelingen van werelden toegankelijk (mogelijke) zijn:
  - ▶ alle logisch mogelijke werelden (alethisch modaliteit);
  - ▶ werelden in overeenstemming met een bepaalde verzameling van wetten (deontische modaliteit);
  - ▶ mogelijkheden die een persoon onderscheidt op basis van wat hij/zij weet (epistemische modaliteit).

We noemen dit de **modale basis** van de operatoren  $\Diamond$  en  $\Box$ .

# Saul Kripke (1940)

- ▶ Saul Kripke, Amerikaanse filosoof en logicus (Princeton)
- ▶ Belangrijke werken:
  - ▶ 1959. 'A Completeness Theorem in Modal Logic', Journal of Symbolic Logic 24(1):114.
  - ▶ 1970. 'Naming and Necessity'. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
  - ▶ ...

# Kripke-modellen voor modale logica

Een Kripke-model  $K$  is een viertal  $\langle W, R, V, w \rangle$  waarbij:

1.  $W$  is een verzameling objecten [de mogelijke werelden]
2.  $R$  is een binaire relatie over  $W$  [de modale basis]  
geeft aan welke wereld  $v$  een mogelijkheid is in  $w$
3.  $V$  is een valuatiefunctie zodanig dat voor elke wereld  $w$ ,  $V_w$  de waarde bepaalt van alle propositieletters in  $w$ 
  - ▶  $V_w(p) = 1$  lezen we dan als ' $p$  is waar in  $w$ '
  - ▶  $V_w(p) = 0$  lezen we dan als ' $p$  is onwaar in  $w$ '[wereld afhankelijk valuatie]
4.  $w$  is een van de elementen van  $W$  [de actuele wereld]

# Kripke modellen tekenen

- ▶  $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w^* \rangle$ , voor  $L = \{p\}$ 
  - ▶  $W = \{w^*, v\}$ ,
  - ▶  $R = \{\langle w^*, v \rangle, \langle v, w^* \rangle\}$ ,
  - ▶  $V_{w^*}(p) = 1$  en  $V_v(p) = 0$
- ▶  $\mathcal{L} = \langle W, R, V, w^* \rangle$ , voor  $L = \{p, q\}$ 
  - ▶  $W = \{w^*, w_1, w_2, w_3\}$
  - ▶  $R = \{\langle w^*, w_1 \rangle, \langle w^*, w_2 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle, \langle w_2, w_3 \rangle, \langle w_3, w_3 \rangle\}$
  - ▶  $V_{w^*}(p) = 1, V_{w_1}(p) = 1, V_{w_2}(p) = 0, V_{w_3}(p) = 0,$   
 $V_{w^*}(q) = 1, V_{w_1}(q) = 0, V_{w_2}(q) = 1, V_{w_3}(q) = 0.$



# Semantiek van de modale propositielogica

1.  $\langle W, R, V, w \rangle \models p$  desda  $V_w(p) = 1$ ;
2.  $\langle W, R, V, w \rangle \models \neg\phi$  desda  $\langle W, R, V, w \rangle \not\models \phi$ ;
3. ...
4.  $\langle W, R, V, w \rangle \models \Diamond\phi$  desda er is een  $v \in W$  zodanig dat  $Rwv$  en  $\langle W, R, V, v \rangle \models \phi$ ;
5.  $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box\phi$  desda voor elke  $v \in W$  zodanig dat  $Rwv$  geldt  $\langle W, R, V, v \rangle \models \phi$ .

Ga nu na, voor het eerder beschouwde model  $\mathcal{K}$  of de volgende formules waar zijn in  $\mathcal{K}$ :  $p$ ,  $\Diamond p$ ,  $\Diamond\neg p$ ,  $\Box p$ ,  $\Box\neg p$ ,  $\Diamond\Diamond p$

# Opgave

Vertaal de volgende zinnen in ML, en definieer K-modellen waarin ze waar zijn:

- (3) Drinken is toegestaan, rijden is toegestaan, maar drinken en rijden is niet toegestaan.
- (4) Wij weten dat Marie ziek is, maar wij weten niet of Jan ook ziek is.

Definieer een K-model waarin (5) waar is, en een waarin (5) onwaar is:

- (5)  $\Box p \rightarrow p$

## Frege

1. In de beroemde tekst "Über Sinn und Bedeutung" duikt Frege meteen in het diepe. Wat is het probleem waar hij mee zit op de pagina's 25/26? Wat is zijn oplossing?
- Probleem: dat identiteit echt kennis kan uitdrukken, en geen relatie tussen namen.
    - (6) a.  $a = a$  (a priori, analytisch, noodzakelijk)  
b.  $a = b$  (a posteriori, synthetisch, ook contingent?)
    - (7) Analytisch = predicaat al vervat in het begrip van het subject: 'goud is een metaal'  
Synthetisch = predicaat niet vervat in het begrip van het subject: 'deze kat is zwart'
      - a. Analytisch  $\Rightarrow$  a priori
      - b. Synthetisch  $\nRightarrow$  a posteriori [Kant]
  - Oplossing: dat behalve de verwijzing van namen ook hun betekenis, de wijze van gegeven zijn telt. (26/27)

Eine Verschiedenheit kann nur dadurch zustande kommen, daß der Unterschied des Zeichens einem Unterschiede in der Art des Gegebenseins des Bezeichneten entspricht.

# Frege

Wat is zijn oplossing?

Oplossing: dat behalve de verwijzing (Bedeutung) van namen en zinnen ook hun betekenis (Sinn), de wijze van gegeven zijn (Art des Gegebenseins) telt.

(...) [50] Kehren wir nun zu unserem Ausgangspunkte zurück!

Wenn wir den Erkenntniswert von " $a = a$ " und " $a = b$ " im allgemeinen verschieden fanden, so erklärt sich das dadurch, daß für den Erkenntniswert der Sinn des Satzes, nämlich der in ihm ausgedrückte Gedanke, nicht minder in Betracht kommt als seine Bedeutung, das ist sein Wahrheitswert. Wenn nun  $a = b$  ist, so ist zwar die Bedeutung von " $b$ " dieselbe wie die von " $a$ " und also auch der Wahrheitswert von " $a = b$ " derselbe wie von " $a = a$ ". Trotzdem kann der Sinn von " $b$ " von dem Sinn von " $a$ " verschieden sein, und mithin auch der in " $a = b$ " ausgedrückte Gedanke verschieden von dem in " $a = a$ " ausgedrückten sein; dann haben beide Sätze auch nicht denselben Erkenntniswert. Wenn wir, wie oben, unter "Urteil" verstehen den Fortschritt vom Gedanken zu dessen Wahrheitswerte, so werden wir auch sagen, daß die Urteile verschieden sind.

2. Frege heeft over "Zeichen", "Sinn" en "Bedeutung". Wat is het verband tussen de drie?
- ▶ Verschillende termen (Zeichen) kunnen eenzelfde verwijzing (Bedeutung) hebben,
    - ▶ maar een andere betekenis (Sinn).
  - ▶ De betekenis (Sinn) is de wijze waarop de verwijzing (Bedeutung) gegeven is.
  - ▶ Betekenis (Sinn) bepaalt verwijzing (Bedeutung).
  - ▶ Betekenis is een zelfstandige, objectieve entiteit. [29]

Ein Eigenname (Wort, Zeichen, Zeichenverbindung, Ausdruck) drückt aus seinen Sinn, bedeutet oder bezeichnet seine Bedeutung. Wir drücken mit einem Zeichen dessen Sinn aus und bezeichnen mit ihm dessen Bedeutung.

3. Bijna iedereen beaamt dat een indicatieve zin een "Gedanke" uitdrukt. Waarom is dat dan niet de verwijzing van een zin?

Frege's argument (p.32)

- 0.1 De verwijzing van een geheel is bepaald door de verwijzingen van de delen, en de wijze waarop die zijn samengesteld.  
[compositionality]
- 0.2 De vervanging van een deel door een deel met dezelfde verwijzing verandert de verwijzing van het geheel dus niet.  
[substitutie]
- 0.3 De vervanging van een deel door een deel met dezelfde verwijzing verandert de gedachte van het geheel echter wel!  
der Gedanke des Satzes "der Morgenstern ist ein von der Sonne beleuchteter Körper" verschieden von dem des Satzes "der Abendstern ist ein von der Sonne beleuchteter Körper"
- 0.4 De uitgedrukte gedachte is dus niet de verwijzing van het geheel.

## 3. Wat is wel verwijzing van een zin?

[34] So werden wir dahin gedrängt, den Wahrheitswert eines Satzes als seine Bedeutung anzuerkennen. Ich verstehe unter dem Wahrheitswerte eines Satzes den Umstand, daß er wahr oder daß er falsch ist. Weitere Wahrheitswerte gibt es nicht.

En waarom?

- ▶ Argument rond (8) (p. 33)

(8) Odysseus wurde tief schlafend in Ithaka ans Land gesetzt.

- ▶ Voor het begrip en de esthetische waardering van de gedachte doet de verwijzing van de term 'Odysseus' er niet toe. (De gedachte is de betekenis en niet de verwijzing.)
- ▶ We vragen naar de verwijzing van het bestanddeel 'Odysseus' als en alleen als we willen weten of de door het geheel uitgedrukte gedachte waar is.
- ▶ De waarheid of de onwaarheid van de zin is dus de verwijzing ervan. [tweede argument rond Leibniz principe]

4. Vraag: Hebben welgevormde zinnen altijd een betekenis?

Antwoord: Misschien wel:

Vielleicht kann man zugeben, daß ein grammatisch richtig gebildeter Ausdruck, der für einen Eigennamen steht, immer einen Sinn habe.

Vraag: En altijd een verwijzing?

Antwoord: Waarschijnlijk niet:

Aber ob dem Sinne nun auch eine Bedeutung entspreche, ist damit nicht gesagt. Die Worte "der von der Erde am weitesten entfernte Himmelskörper" haben einen Sinn; ob sie aber auch eine Bedeutung haben, ist sehr zweifelhaft.

[...]

Der Satz "Odysseus wurde tief schlafend in Ithaka ans Land gesetzt" hat offenbar einen Sinn. Da es aber zweifelhaft ist, ob der darin vorkommende Name "Odysseus" eine Bedeutung habe, so ist es damit auch zweifelhaft, ob der ganze Satz eine habe.