

Logica en de Linguistic Turn 2013

Geldige redeneringen en Tractatus

Maria Aloni
ILLC-University of Amsterdam
M.D.Aloni@uva.nl

November 12, 2013

Plan voor vandaag

1. Predikatenlogica: geldige en ongeldige redeneringen
2. Tractatus: filosofie v.d. logica en wiskunde (5.55-5.5521, 5.5563-5.5571, 6.1-6.1202, 6.124-6.1251, 6.13-6.22)

Huiswerk:

- ▶ **Proeftentamen 3**. Gamut: Opg. 4.2 (l-r). Extra opg., deel 2: 4-6. Extra vertalingen.
- ▶ Tractatus: 5.6-5.641 over solipsisme en realisme

Mededeling:

- ▶ maandag 18 November 18-20: **Zaaltentamen 3**
- ▶ Werkgroep ma 9 dec (ipv di 10 dec)
 - tijd: 11-13
 - zaal: PC Hoofthuis 5.02

Herhaling: Semantische geldigheid

- ▶ Voor formules $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ van PredL, een redenering $\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$ is *geldig*, $\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$ als, voor alle modellen M die geschikt zijn voor $\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$, waarvoor $V_M(\phi_1) = \dots V_M(\phi_n) = 1$, ook $V_M(\psi) = 1$.
- ▶ Een model M heet *geschikt voor een redeneerschema* $\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$ als alle predikaatsletters en constanten van $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ een interpretatie krijgen in M .

Geldigheid/ongeldigheid: Bewijsstrategie

- ▶ Redenering is ongeldig: \Rightarrow tegenmodel, i.e. geef concreet model waarin premissen waar zijn en conclusie onwaar
- ▶ Redenering is geldig: \Rightarrow argumentatie
 - Stel M is een willekeurig model geschikt voor de redenering waarin de premissen waar zijn.
 - ▶ Premisse 1 zegt: ... Vanuit premisse 1 volgt dat ...
 - ▶ Premisse 2 zegt: ... Vanuit premisse 2 volgt dat ...
 - ▶ ...
 - Hieruit volgt dat in M ook de conclusie van de redenering waar is.
 - Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.

Opdracht 1

- Bewijs de geldigheid of ongeldigheid van de volgende redeneringen:

$$(1) \quad \exists x \forall y R_{xy}, \forall x R_{xx} / \forall x \forall y (R_{xy} \vee R_{yx})$$

$$(2) \quad \forall x \forall y \forall z ((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz}), \exists x \exists y (x \neq y \wedge R_{xy} \wedge R_{yx}) / \exists x R_{xx}$$

Opdracht 1: uitwerking

$$\exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \ / \ \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$$

1. Redenering is ongeldig.
2. Tegenmodel: $M = (D, I)$:
 $D = \{1, 2, 3\}$, $I(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$.
3. Uitleg: In M zijn de twee premissen waar, want
 - voor alle $d \in D$ $(1, d) \in I(R)$, i.e. vanuit 1 vertrekt een pijl naar alle punten (P1);
 - en voor alle $d \in D$ $(d, d) \in I(R)$, i.e. R is reflexief (P2)
4. maar de conclusie is onwaar want
 - $(2, 3) \notin I(R)$, en $(3, 2) \notin I(R)$, i.e. tussen 2 en 3 loopt geen pijl

Opdracht 1: uitwerking

$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \exists x \exists y (x \neq y \wedge Rxy \wedge Ryx) / \exists x Rxx$

1. Redenering is geldig. 2. Bewijs

- ▶ Stel M is een willekeurig model geschikt voor de redenering waarin de premissen waar zijn.
- ▶ $P1$ stelt: R is transitief in M , i.e. alles die in twee stappen kan worden bereikt, kan ook in een stap bereikt worden
- ▶ $P2$ stelt: er loopt een terugkerende pijl tussen twee verschillende punten in M , zeg punten 1 en 2
- ▶ Vanuit $P2$ volgt dat punt 1 in twee stappen vanuit 1 bereikt kan worden via 2
- ▶ Dan (middels $P1$) 1 moet ook in een stap bereikt worden vanuit zichzelf
- ▶ Dus, er is tenminste een punt die in relatie R met zichzelf staat
- ▶ Hieruit volgt dat in M de zin $\exists x Rxx$, i.e. de conclusie van de redenering waar is.
- ▶ Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.

Opdracht 2

Beschouw het volgende model voor een predikatenlogische taal met een 2-plaatsige predikaatletter R:

- ▶ $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- ▶ $I(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}$
- a. Teken het model door de elementen uit het domein op te vatten als punten in een diagram, en de relatie R_{xy} te interpreteren als er loopt een pijl van x naar y .
- b. Onderzoek tegen welke van de volgende redeneerschema's het model een tegenmodel is. Definieer voor de anderen een tegenmodel:

(i) $\forall x \exists y R_{xy}, \forall x \neg R_{xx} / \forall x \forall y (R_{xy} \rightarrow \exists z (R_{xz} \wedge R_{zy}))$

(ii) $\exists x \exists y (R_{xy} \wedge R_{yx}) / \forall x \forall y \forall z ((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$

(iii) $\forall x \forall y (R_{xy} \vee R_{yx}) / \forall x \forall y (R_{xy} \rightarrow R_{yx})$

Opdracht 3

- ▶ Vertaal de volgende zinnen in de taal van de predikatenlogica
 - (3) Iedereen behalve Marie is laat.
 - (4) Alleen Marie is laat.
- ▶ Definieer een model die een situatie representeert waarin de zin waar is
- ▶ Definieer een model die een situatie representeert waarin de zin onwaar is
- ▶ Proeftentamen bekijken

Syntaxis: definitie van formules van de taal L

- (i) Als A een n -plaatsige predikaatletter is van L en elk van t_1, \dots, t_n is een constante uit het vocabulaire of een variabele, dan is At_1, \dots, t_n een formule van L ; (atomaire formules)
- (ii) Als ϕ een formule van L is dan is $\neg\phi$ dat ook;
- (iii) Als ϕ en ψ formules van L zijn, dan zijn $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$ dat ook;
- (iv) Als ϕ een formule is van L en x een variabele, dan zijn ook $\exists x\phi$ en $\forall x\phi$ formules van L ; (existentiele en universele formules)
- (v) Alleen wat in een eindig aantal stappen met behulp van de clausules (i)-(iv) kan worden geconstrueerd, is een formule van L .

Semantiek: Valuaties gebaseerd op modellen (definition 7)

Is $M = \langle D, I \rangle$ een model voor L , dan is V_M , de valuatie V gebaseerd op M , gedefinieerd als volgt:

- (i) $V_M(Aa_1...a_n) = 1$ desda $\langle I(a_1), \dots, I(a_n) \rangle \in I(A)$
- (ii) $V_M(\neg\phi) = 1$ desda $V_M(\phi) = 0$
- (iii) $V_M(\phi \wedge \psi) = 1$ desda $V_M(\phi) = 1$ en $V_M(\psi) = 1$
- (iv) ...
- (v) $V_M(\phi \rightarrow \psi) = 1$ desda $V_M(\phi) = 0$ of $V_M(\psi) = 1$
- (vi) ...
- (vii) $V_M(\forall x\phi) = 1$ desda $V_M([c/x]\phi) = 1$ voor alle c van L
- (viii) $V_M(\exists x\phi) = 1$ desda $V_M([c/x]\phi) = 1$ voor tenminste één c van L

Belangrijk Voor \exists en \forall , I moet een functie zijn zodat voor ieder $d \in D$: er is een constant c : $I(c) = d$ (vrg. suriectief)

Structuur van de Tractatus

- ▶ Ontologie (1–2.063)
- ▶ De algemene beeldtheorie (2.1–3.05)
- ▶ Theorie van taal (3.1–4.2)
- ▶ **Logica (4.2–6.13)**
- ▶ **Wiskunde (6.2–6.3)**
- ▶ Natuurwetenschap (6.31–6.372)
- ▶ Ethiek en het mystieke (6.373–6.4321, 6.44–6.522)
- ▶ Filosofie en de Tractatus zelf (6.53, 6.54)
- ▶ Besluit (7)

Filosofie van de logica en wiskunde

Inhoudsopgave:

- ▶ 5.55 – 5.552: Logica en ervaring, en de aard van elementaire zinnen
- ▶ 5.5563–5.5571 logica en toepassing
- ▶ 6.1–6.1202, 6.124–6.1251, 6.13–6.22: de aard van logische (en wiskundige) uitspraken
- ▶ NB: 5.6–5.641 worden de volgende keer behandeld

Logica en ervaring (5.551–5.5521)

- ▶ VRAAG: Zijn logische uitspraken a priori?
- ▶ Elke vraag in de **logica** moet a priori beantwoord zijn (5.551).
- ▶ Contrast tussen:
 - Hoe: wisselen, contingent (stand van zaken)
 - Wat: vaste, noodzakelijk (objecten) (vgl 2.0271)
- ▶ De logica is verbonden met het laatste, met de ‘ervaring’ dat er een wereld is, niet met hoe de wereld in elkaar zit (5.552, 5.5521)
- ▶ De logische ‘ervaring’ (eigenlijk geen ervaring want ze is niet met iets in de wereld verbonden) is de ervaring van het bestaan, niet van het bestaan van iets.

De aard van elementaire zinnen en toepassing van logica (5.55, 5.557, 5.5571)

- ▶ VRAAG: Moeten wij de vraag over mogelijke vormen van elementaire zinnen a priori beantwoorden? Kunnen wij dat?
- ▶ Elke vraag in de **logica** moet a priori beantwoord zijn. Dus ook de vraag naar de mogelijke vormen van **elementaire zinnen**.
- ▶ Wij hebben a priori een bepaalde notie van een elementaire zin, namelijk dat een elementaire zin bestaat uit namen.
- ▶ Maar over aantallen namen, en dus mogelijke samenstellingen van elementaire zinnen, valt a priori niets te zeggen (5.55)
- ▶ Het enige dat te verwachten is, is dat een *analyse van zinnen* in elementaire zinnen (**toepassing van logica**) zal laten zien welke elementaire zinnen er (onder anderen) zijn (5.557)
- ▶ Al het andere zal tot onzin leiden (5.5571)

Over dagelijkse taal (5.5563)

- ▶ VRAAG Is ons dagelijkse taal betekenisvol, logisch 'in orde'?
- ▶ Het bestaan van elementaire zinnen volgt uit de betekenisvolheid van ongeanalyseerde zinnen (vgl. 3.23, 3.25, 4.221. 4.411).
- ▶ In die zin, zijn ook de zinnen van de **dagelijkse taal** logisch gezien geordend (dan wel 'in orde')
- ▶ De logica staat niet naast de taal, maar ligt eronder (5.5563)

De aard van logische uitspraken (6.1–6.113)

- ▶ VRAAG Wat zijn logische uitspraken (Sätze der Logika) (6.1)? Wat zeggen logische uitspraken (6.11)? Wat is het verschil tussen logische en niet logische afspraken (6.113)?
- ▶ Logische uitspraken (Sätze der Logika) zijn tautologien (6.1), en zeggen dus niets (6.11, vgl 4.461)
- ▶ Onderscheid logische – niet-logische uitspraken (6.113)
 - Logische uitspraken: analytisch (de waarheid ervan kan men aan de uitspraak zelf afzien), dus geen beelden
 - Niet-logische uitspraken: niet analytisch
- ▶ (NB: 'Satz' staat in deze context eerder voor 'wet', 'stelling', dan voor 'zin'. vandaar de vertaling 'uitspraak'.)

Het nut van logische uitspraken (6.12-6.1202, 6.124-6.1251)

- ▶ VRAAG Wat is dan het nut van logische uitspraken?
- ▶ Dat logische uitspraken tautologien zijn, toont de formele, interne eigenschappen van de taal en van de wereld (6.12, vgl 6.13)
- ▶ Logische uitspraken brengen het (logisch) geraamte (*logische Gerüst* vgl 4.023) van de wereld tot uitdrukking door te tonen dat sommige verbindingen van symbolen (die zelfstandig wel betekenis hebben) geen betekenis hebben. De logica berust op het beeld karakter van de taal (6.124)
- ▶ Het is mogelijk a priori alle logische wetten (tautologien) te geven, en kan nooit sprake zijn van verrasingen (6.125, 6.1251)

Logica als transcendentiaal (6.13)

6.13 Die Logik ist keine Lehre, sondern ein Spiegelbild der Welt.
Die Logik ist transzendental.

- ▶ VRAGEN: Wat betekent transcendentiaal? Waarom is logica transcendentiaal?
- ▶ De logica is transcendentiaal (vgl 6.421), i.e.
 - is onafhankelijk van ervaring
 - bepaalt de mogelijkheid van ervaring (vgl 5.552)
- ▶ De logica is geen leer, maar een spiegelbeeld van de wereld
- ▶ VRAGEN: Wat is een leer? Waarom is logica geen leer? Is filosofie een leer (4.112)? Wat is de relatie tussen logica en filosofie?

Wiskunde (6.2-6.22)

- ▶ VRAAG: Zijn de stellingen van wiskunde betekenisvol, betekenisloos of onzinnig?
- ▶ De wiskunde is een logische methode
- ▶ De stellingen van de wiskunde zijn vergelijkingen, dus ook *Scheinsätze* (6.2)
- ▶ Zij drukken geen gedachten uit (6.21), zij zijn geen beelden van de werkelijkheid, dus betekenisloos
- ▶ Maar niet onzinnig:
 - Zij tonen de logica van de wereld (6.22)
 - Zij hebben ook praktisch nuttigheid (6.211). Ze kunnen worden gebruikt om contingente zinnen van andere contingente zinnen af te leiden

Korte antwoorden HWO2

Welke twee belangrijkste rollen spelen Gegenstände in de Tractatus? Wat zijn de cruciale eigenschappen van Gegeständen die garanderen dat zij deze rollen kunnen vervullen? Leg uit hoe deze eigenschappen dit garanderen. Ondersteun uw antwoorden met passages uit de tekst.

- ▶ ROL: Dan zou het niet meer mogelijk zijn om een beeld van de wereld te maken [2.0212] Zonder objecten zou de betekenis van een zin afhankelijk zijn van of een andere zin waar is. [2.0211] De definitie van betekenis is dan circulair, niet meer gefundeerd.
- ▶ EIGENSCHAP: Objecten zijn enkelvoudig [2.02] en bestaan [2.0271], zij vormen de substantie van de wereld.
- ▶ ROL: Zonder objecten zou er geen vaste vorm van de wereld zijn [2.023] (evt. [2.025]).
- ▶ EIGENSCHAP: Objecten hebben vorm [2.0141] (of interne eigenschappen [2.01231]). Het is objecten eigen om in Sachverhalten te kunnen voorkomen. De vaste vorm van de wereld wordt gedefinieerd door de vorm van de objecten [2.023].

Beschrijf wat Wittgenstein verstaat onder de noties Welt en logischer Raum. Geef daarbij aan hoe deze noties zich tot elkaar verhouden. ...

► Uitleg notie wereld:

- De wereld is de totaliteit van alle feiten in de logische ruimte [1;1.1;1.11;1.12;1.13;1.2].
- Daarbij een uitleg wat feiten dan zijn (zoals: gerealiseerde standen van zaken).

► Uitleg notie logische ruimte:

- Het geheel van alle mogelijke standen van zaken [1.12; 1.13; 2.0121].
- Daarbij een uitleg wat standen van zaken zijn (zoals: mogelijke verbinding van objecten).

► Uitleg verhouding tussen beide noties:

- De totaliteit van alle feiten (de wereld) bepaalt ook alles wat niet het geval is [1.12](dus de wereld bepaalt in die zin de logische ruimte)
- De mogelijkheid van een stand van zaken bepaalt wat er überhaupt gerealiseerd kan zijn/worden (dus de logische ruimte bepaalt in die zin de mogelijkheid van de wereld)

Wittgenstein bespreekt ook de notie Wirklichkeit. Hoe verhoudt deze notie zich tot de noties Welt en logischer Raum? ...

- ▶ Omschrijving/ definitie notie werkelijkheid: De werkelijkheid is de logische ruimte, gegeven een bepaalde contingente wereld
- ▶ De werkelijkheid is enerzijds het bestaan en niet bestaan van standen van zaken (Das Bestehen und Nichtbestehen von Sachverhalten ist die Wirklichkeit [2.06]), dus logische ruimte plus info over wat bestaat;
- ▶ De werkelijkheid is (anderzijds) de wereld: Die gesamte Wirklichkeit ist die Welt [2.063]
- ▶ Uitleg van de notie werkelijkheid die overeenkomt met de twee bovenstaande definities. Dat kan zijn:
 - De werkelijkheid (als in 2.06) enerzijds bepaalt de wereld (het bestaan van standen van zaken).
 - De wereld anderzijds bepaalt de werkelijkheid: De totaliteit van alle feiten (de wereld) bepaalt ook alles wat niet het geval is [1.12] Met een bepaalde wereld is dus ook de rest van de logische ruimte en dus de werkelijkheid bepaald.
 - Dus werkelijkheid is de wereld (maar het is niet zo dat de werkelijkheid de logische ruimte is)

Wat is een Gedanke volgens de Tractatus? Wat zijn noodzakelijke vereisten voor een Gedanke om een Gedanke te zijn? Ondersteun uw antwoorden met passages uit de tekst.

- ▶ Definitie: Een Gedanke is een logisch beeld (Das logische Bild der Tatsachen ist der Gedanke [3]) en een logisch beeld is een beeld waarin de afbeeldingsvorm de logische vorm is (2.181)
- ▶ Noodzakelijke vereiste voor een gedachte:
 - Abbildende Beziehung tussen elementen van gedachte en objecten in bedachte situatie
 - Gemeenschappelijk vorm (logische vorm=afbeeldingsvorm) met bedachte situatie

Wat is denkbaar volgens de Tractatus? Is een tautologie denkbaar? Is een contradictie denkbaar? Beargumenteer hoe Wittgenstein tot zijn antwoord op deze vragen zou komen.

- ▶ Alles wat in de werkelijkheid is is denkbaar (+ uitleg), jij kan niet onlogisch denken (+ uitleg)
- ▶ Tauto en contra zijn niet denkbaar,
- ▶ want gedachten (beelden) mogen alleen contingenties (sachlage) verbeelden.