
*Domáca úloha číslo 01 –
postupnosti,
aritmetická a geometrická postupnosť*

1. Nájdite aspoň jeden spôsob rekurentného vyjadrenia nasledujúcich postupností, napíšte prvých 5 členov týchto postupností a skontrolujte, či váš rekurentný zápis určuje rovnakú postupnosť ako uzavretý tvar postupnosti.

a) $\{3n \cdot (2 - n)\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\{(3n - 1) \cdot (3n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{\frac{n+1}{n-3}\right\}_{n=4}^{\infty}$

d) $\{n^3 - n^2 - n\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

f) $\{\sqrt{n^n}\}_{n=1}^{\infty}$

g) $\left\{\frac{(n+1)^2}{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

h) $\left\{\frac{n^2 - n - 6}{n + 2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

i) $\left\{\binom{n}{2} - \binom{n}{3}\right\}_{n=3}^{\infty}$

j) $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{2}\right\}_{n=2}^{\infty}$

k) $\left\{3 \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

l) $\left\{\frac{1}{(n-1)!}\right\}_{n=2}^{\infty}$

m) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$

2. Zisti, či je daná postupnosť ohraničená, zdola ohraničená, alebo zhora ohraničená. Svoje tvrdenie zdôvodni.

a) $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{\frac{2}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{\frac{n+2}{n-3}\right\}_{n=4}^{\infty}$

d) $\{1 - n^2\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

f) $\{n^2 - 4n + 3\}_{n=1}^{\infty}$

g) $\left\{\frac{n+1}{n^2-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$

h) $\left\{4 \cdot (1 - (-1)^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$

i) $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

j) $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{2}\right\}_{n=2}^{\infty}$

k) $\left\{\frac{(n+1)^2}{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

l) $\left\{3 \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. Vyšetrite monotónnosť postupnosti (zisti či je daná postupnosť rastúca alebo klesajúca), ak

a) $a_{n+1} - a_n = 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $a_n - a_{n+1} = 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

f) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

g) $\left\{ \frac{3n+1}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

h) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

i) $\left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

j) $\left\{ \frac{n+4}{n-3} \right\}_{n=4}^{\infty}$

k) $\left\{ \frac{n^2}{2-4n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

l) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right\}_{n=1}^{\infty}$

m) $\left\{ \frac{1-(-1)^n}{4} \right\}_{n=1}^{\infty}$

n) $\left\{ \frac{1+(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

o) $\left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

p) $\left\{ (-1)^n \frac{2}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

4. Ktoré z nasledujúcich postupností sú aritmetické. Zistite ich diferenciu d , a_1 a súčet prvých n členov

a) $\{9-6n\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\{4-n^2\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{7n+2\}_{n=1}^{\infty}$

d) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\{\log_2 2^n\}_{n=1}^{\infty}$

5. Vypočítajte prvý člen a diferenciu aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

a) $a_2 = 7$ a $a_3 = 8.5$

b) $a_4 = -5$ a $a_6 = 15$

c) $a_1 = 3$ a $a_3 = -12$

d) $a_3 = 2 \cdot a_4$ a $a_2 = -a_8$

e) $a_2 - a_1 = 6$ a $a_{20} - a_{18} = 15$

f) $a_4 + a_5 = 4$ a $a_4 \cdot a_5 = -5$

Ktoré z predchádzajúcich postupností sú rastúce / klesajúce ?

6. Súčet prvých troch členov aritmetickej postupnosti je 60, ich súčin je 7500. Určte diferenciu a prvý člen postupnosti

7. Z aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvoríme postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby pre všetky členy platilo:

a) $b_n = 6 + a_n$

b) $b_n = 6 \cdot a_n$

c) $b_n = 6 - a_n$

d) $b_n = 1 / a_n$

V ktorých prípadoch bude takto vytvorená postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ aritmetická ?

8. Vypočítajte súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti, ak

a) $n = 12$, $a_1 = 7$, $d = 0,5$

b) $n = 25$, $b_1 = 70$, $d = -5$

c) $n = 100$, $c_1 = -15$, $d = 0,1$

d) $n = 20$, $a_1 = -7$, $d = 2$

Koľko členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ musíme sčítať, aby súčet bol 252 ?

Koľko členov postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžeme sčítať, aby ich súčet bol kladný ?

9. Vypočítajte súčet všetkých
- Nepárnych dvojčiferných čísel
 - Trojčiferných čísel deliteľných 6
 - Trojčiferných čísel deliteľných 4 a menších ako 700
10. Pre aritmetickú postupnosť doplňte tabuľku

a_1	d	n	a_n	S_n
2			18	330
0		11	5	
3	-0,5			0
		14	140	1050

11. Ktoré z nasledujúcich postupností sú geometrické? Zistite ich kvocient a prvý člen

- $\{6^n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

12. Vypočítajte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

- $a_2 = 1,5$ a $a_5 = 40,5$
- $a_4 = 5$ a $a_6 = 125$
- $a_1 = 3$ a $a_3 = -12$
- $a_3 = 48$ a $a_7 = -3$
- $a_1 + a_2 = 4$ a $a_2 - a_4 = -24$
- $a_2 \cdot a_3 = 9$ a $a_2 + a_3 = 10$

Ktoré z predchádzajúcich postupností sú rastúce / klesajúce ?

13. Medzi čísla 8 a 648 vložte tri čísla tak, aby všetky spolu tvorili 5 po sebe idúcich členov geometrickej postupnosti. Vypočítajte jej prvý člen, kvocient a súčet prvých n členov.

14. Z geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvoríme postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby pre všetky členy platilo:

- $b_n = 6 + a_n$
- $b_n = 6 \cdot a_n$
- $b_n = \log a_n$
- $b_n = 1 / a_n$

V ktorých prípadoch bude takto vytvorená postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická ?

15. Vypočítajte súčet prvých n členov geometrickej postupnosti ak

- $n = 12$, $a_1 = 7$, $q = 2$
- $n = 5$, $b_1 = 70$, $q = -5$
- $n = 10$, $c_1 = 1500$, $q = 0,2$

Koľko členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ musíme sčítať, aby súčet bol 1 785 ?

Koľko členov postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ musíme sčítať, aby súčet bol 35 470 ?

Koľko členov postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ musíme sčítať, aby súčet bol aspoň 2 000 ?

16. Pre geometrickú postupnosť doplňte tabuľku

a_1	q	n	a_n	S_n
90	1/3	5		
2	3		1458	
	-3	4	121,5	
	2		96	189

17. Napíšte prvé štyri členy geometrickej postupnosti, pre ktorú platí $a_1 + a_3 = \frac{10}{9}$ a $\frac{a_4}{a_2} = 9$.

18. V geometrickej postupnosti platí $a_1 = 1, q = \sqrt{2}, a_n = 32$. Určte n .

19. Určte a_1 a q geometrickej postupnosti, ak platí $a_1 + a_4 = 18$ a $a_2 + a_3 = 12$.

20. Nech $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1 a q , ak $b_1 + b_2 + b_3 = 31$, $b_1 + b_3 = 26$.

21. Nech $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1 a q , ak $b_1 + b_2 + b_3 = 195$, $b_3 - b_1 = 120$.

22. Nech $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1 a q , ak $b_3 = 18$, $S_3 = 26$.

23. Nech $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1 a q , ak $b_2 - b_1 = 18$, $b_4 - b_3 = 162$.

24. Nech $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte S_5 ak $S_2 = 4$ a $S_3 = 13$

25. Vypočítajte

$$\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{11}}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^5}$$

26. Sčítajte

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

27. Určte osemčlennú geometrickú postupnosť, ak súčet dvoch prostredných členov je 6 a súčin dvoch krajných členov je 5.