Domáca úloha číslo 06 –
Komplexné čísla

1. Zapíšte v algebraickom tvare – zjednodušte na jedno komplexné číslo

a) $(2-3i)(4+5i)-3i^7+4$

b) $2+(2-3i)^3+(1-4i)(-i+5)$

c) $8-(2-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i+2)+5i^2$

d) $(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)^2+5i^7+2i-\dfrac{4}{i+1}$

e) $\dfrac{4+7i}{2i-1}+\dfrac{2+i}{i-5}$

f) $(i-18):(2i-1)^2+5i^7+2i^{-4}$

g) $\dfrac{4-7i}{(2i-1)^2}:\dfrac{2-i}{i-5}+5i-\dfrac{2}{i}$

h) $1+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^n$

i) $\dfrac{2-\sqrt{3}i}{1+i}\cdot\dfrac{(2-i)^3}{\sqrt{2+i}}$

j) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2-i}}+\dfrac{(4-2i)^2}{\sqrt{2+\sqrt{3}i}}$

k) $z=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-\dfrac{5}{2}i$

2. Znázornite v Gaussovej rovine množinu všetkých komplexnýxh čísel, pre ktoré platí

a) $\operatorname{Re} z=2$

b) $\operatorname{Im} z<2$

c) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=|z|$

d) $|z|<3$

e) $|z+i|\leq 3$

f) $|z+1-4i|\geq 5$

g) $\operatorname{Re} z=z.\,\overline{z}$

h) $|z|<2|z|$

i) $\operatorname{Re} z^2=2$

j) $|1+z|\leq|1-z|$

k) $|z|\geq 3$ a $\varphi=\dfrac{5}{6}$,
kde φ je argument čísla z

3. Vyjadrite dané komplexné číslo v goniometrickom tvare

a) $z=1-\sqrt{3}\,i$

b) $z=1-\sqrt{3}$

c) $z=\sin 2-\pi$

d) $z=\sin(2-\pi)$

e) $z=7i$

f) $z=8\sqrt{3}\,i-8$

g) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{5}+\dfrac{i}{5}$

h) $z=4-4i$

i) $z=-8\sqrt{3}+8i$

j) $z=-3-3i\sqrt{3}$

k) $z=-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}+\dfrac{9}{2}i$

l) $z=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}+\dfrac{5}{4}i$

m) $z=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}-\dfrac{9i}{4}$

n) $z=2\sqrt{3}+2i$

o) $z=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}i$

p) $z=-6+6i\sqrt{3}$

q) $z=-\dfrac{9\sqrt{3}}{5}-\dfrac{9}{5}i$

4. Určte reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla z, ak

a) $z=\left(\sqrt{3}+1\right)^{33}$

b) $z=(1-i)^{16}\left(i-\sqrt{3}\right)^{6}$

c) $z=\left(\dfrac{i-1}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^{24}$

d) $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{19}.i^{33}$

e) $z=\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{15}$

f) $z=\left(-\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{5}i\right)^{7}$

g) $z=\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{11}$

h) $z=\left(+8\sqrt{3}-8i\right)^{6}+(2+2i)^{4}$

i) $z=\left(+\dfrac{2\sqrt{3}}{5}-\dfrac{2}{5}i\right)^{9}$

j) $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}$

5. V algebraickom aj v tvare určte všetky hodnoty danej odmocniny a výpočty interpretujte v Gaussovej rovine

a) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}\,i}$

b) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}\,i-8}$

c) $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$

d) $\sqrt[4]{i}$

e) $\sqrt[4]{-1-i}$

f) $\sqrt[6]{i}$

g) $\sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$

h) $\sqrt[6]{-\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}i}$

i) $\sqrt[3]{-4-4i}$

j) $\sqrt[4]{5\sqrt{3}\,i-5}$

k) $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}+2i}$

6. V množine komplexných čísel vyriešte rovnicu

a) $z^2-4z+8=0$

b) $z^2-(2+3i)z-1+3i=0$

c) $x^4+8x^2+16=0$

d) $x^4+16=0$

e) $z^3+z^2+z+1=0$

f) z^6-4z^3+8

g) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{2}=2i$

7. Je známe, že jedna z hodnôt $\sqrt[3]{z}$ má tvar $z=3\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)$. Bez výpočtu čísla z určte goniometrické tvary všetkých hodnôt $\sqrt[3]{z}$. Riešenia aj zakreslite do jednotkovej kružnice. Varianty príkladu

- $\sqrt{z}$, $\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[4]{z}$, $\sqrt[5]{z}$, $\sqrt[6]{z}$, $\sqrt[7]{z}$

a) $5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

b) $-2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

c) $3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

d) $-6\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

e) $-2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

f) $-2\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)-i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

g) $-3\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)-i\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)$

h) $5\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)-i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$