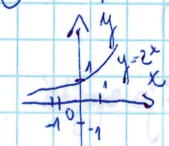
MÁRIA MATUŠISKOVÁ

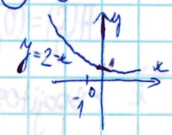
Domáca úloha číslo 03 - exponenciálne funkcie, rovnice | nerovnice

$f: y = a^x \qquad a \in R^+ - \{1\}$

$f: y = c \cdot a^{x+b} + d \qquad a>1 \quad a<1$

① $a > 1$ ② $0 < a < 1$





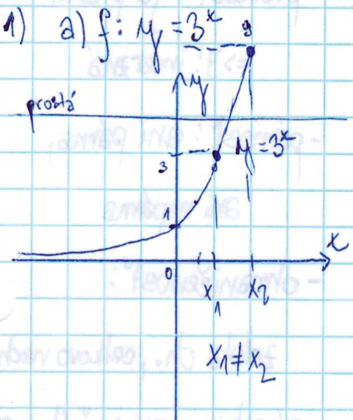
b - posúva po x s opačným znamienkom $\langle$ $b>0 \leftarrow$, $b<0 \rightarrow$

c = zväčšovanie, zmenšovanie, zápor → preklopenie

d - $d>0$↑, $d<0$, posúva po y

---

1) a) $f: y = 3^x$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

$H(f) = (0, \infty)$

- spojitosť: je spojitá

- prostosť: $x_1, x_2 \in D(f)$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ak je funkcia iba rastúca V iba klesajúca na $D(f)$ je prostá

je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná

ostré 1x
neostré viac bodov
lokálne
miestaľ = škola
glob. = naj. žiak

- extrémy: nemá

- zaujíma ma os x

glob. monotónnosť:

ok.

$M \subset D(f)$

• 1) rastúca: $x_1, x_2 \in M$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

• 2) klesajúca: $x_1, x_2 \in M$:

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

• 3) nerastúca: nesmie rásť!

$f(x_1) \geq f(x_2)$

• 4) neklesajúca:

$f(x_1) \leq f(x_2)$

• 5) konštantná

$f(x_1) = f(x_2)$

rastúca: $x \in R$

$x \in (-\infty, \infty)$

- periodickosť:

neperiodická

$2 = = -2$ opačné

- parnosť: $f \rightarrow$ a) párna: 1) $\forall x \in D(f)$ aj $(-x) \in D(f)$

2) $f(x) = f(-x)$

3) graf je osovo súmerný podľa osi y

$R - \{0\}$

$f \rightarrow$ b) nepárna: 1) $\forall x \in D(f)$ aj $(-x) \in D(f)$

2) $f(-x) = -f(x)$

3) graf je stredovo súmerný podľa $[0,0]$

$f \rightarrow$ c) ani párna, ani nepárna

$f(-x): y = 3^{-x} = \frac{1}{3^x} \Rightarrow$ nie je párna, nie je nepárna

- ohraničenosť: zdola ohraničená, celkovo neohraničená

a) zhora oh.: $\exists h \in R;\ f(x) \leq h$

b) zdola oh.: $\exists d \in R;\ f(x) \geq d$

c) ohraničená: $\exists\, d, h \in R;\ f(x) \leq h \wedge f(x) \geq d$

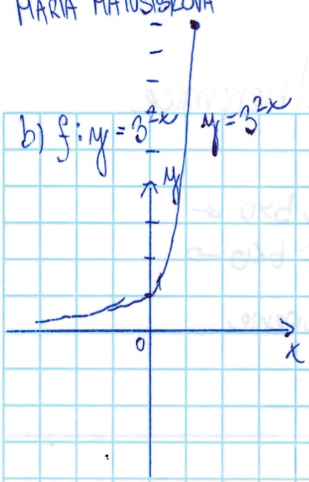
- súradnice priesečníkov so súradnicovými osami

$P_x = [x, 0] \qquad 0 = 3^x \ \emptyset \quad x \notin R$

$P_y = [0, y] \qquad y = 3^0 = 1$

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

b) $f: y = 3^{2x}$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

$H(f) = (0, \infty)$

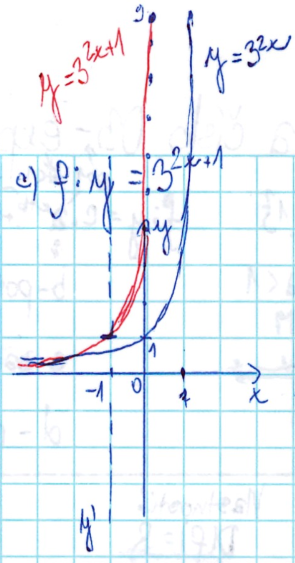
- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neohraničená
- súradnice priesečníkov s [0,0]

$P_x = [x, 0]$ $\quad 0 = 3^{2x}$ $\quad \emptyset$

$P_y = [0, y]$ $\quad y = 3^{2 \cdot 0} = 1$

- extrémy: nemá
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: neperiodická

c) $f: y = 3^{2x+1}$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

$H(f) = (0, \infty)$

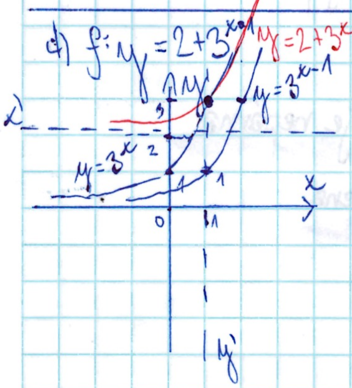
- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neohr.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

$P_x = [x, 0]$ $\quad \emptyset$

$P_y = [0, y]$ $\quad y = 3^{2 \cdot 0} = 1$

- extrémy: nemá
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: neperiodická

d) $f: y = 2 + 3^{x-1}$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

$H(f) = (2, \infty)$

- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neohraničená
- súradnice priesečníkov s [0,0]

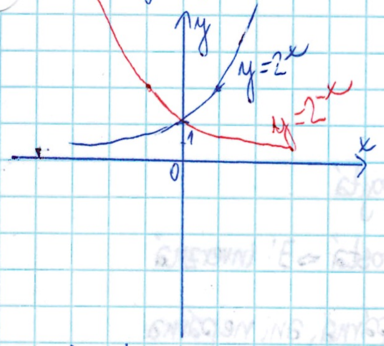
$P_x = [x, 0]$ $\quad 0 = 2 + 3^{x-1}$ $\quad -2 = 3^{x-1}$ $\quad \emptyset$

$P_y = [0, y]$ $\quad y = 2 + 3^{0-1} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

- extrémy: nemá
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: nie je periodická

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

e) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

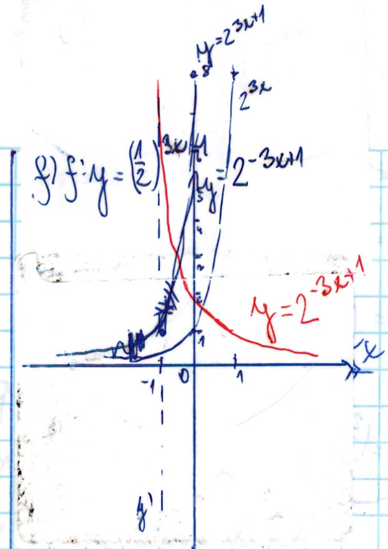
$H(f) = (0, \infty)$

- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0]$ $0 = 2^{-x}$ $\emptyset$

  $P_y = [0, y]$ $y = 2^{-0} = 1$
- extrémy: nemá
- monotónnosť: klesajúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: nie je periodická

f) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 2^{-3x+1}$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

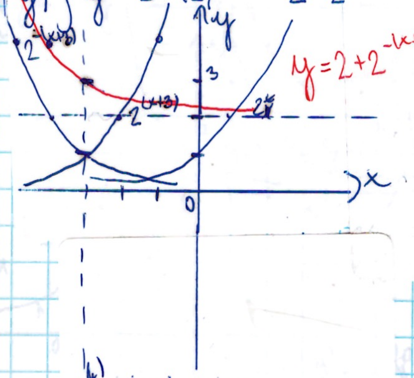
$H(f) = (0, \infty)$

- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neohraničená
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0]$ $0 = 2^{-3x+1}$ $\emptyset$

  $P_y = [0, y]$ $y = 2^{-3 \cdot 0 + 1} = 2$
- extrémy: nemá
- monotónnosť: klesajúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: nie je periodická

g) $f: y = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 2 + 2^{-(x+3)}$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

$H(f) = (2, \infty)$

- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0]$ $0 = 2 + 2^{-(x+3)} - 2 = 2^{-(x+3)}$ $\emptyset$

  $P_y = [0, y]$ $y = 2 + 2^{-(0+3)} = 2 + 2^{-3} = 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$
- extrémy: nemá
- monotónnosť: klesajúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: nie je periodická

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

h) $f: y = 2^x \cdot 5^{-x}$

$f \circ g$

$f: y = 2^x \quad x \geq 0$

$g: y = 5^{-x} \quad x \leq 0$

$f(g(x))$

$f(g(x_2)) < f(g(x_1))$

$g(x_2) < g(x_1)$

$x_1 < x_2$

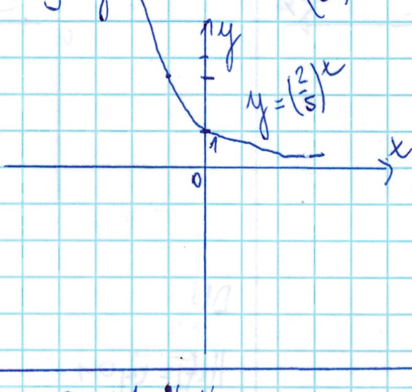
$g(x_1) > g(x_2)$

$f(g(x_1)) > f(g(x_2))$

$f \circ g = f(g(x)) = f(5^{-x})$

$f(5^{-x}) = 2^{5^{-x}} = 2^{\frac{1}{5^x}} = \sqrt[5^x]{2}$

h) $f: y = 2^x \cdot 5^{-x} = \left(\frac{2}{5}\right)^x$



Vlastnosti:

$D(f) = R$

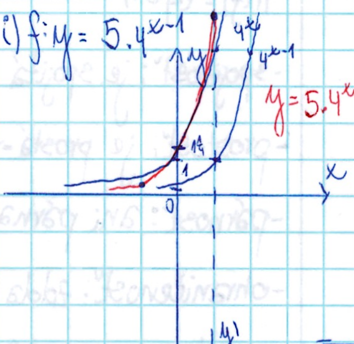
$H(f) = (0, \infty)$

- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0] \quad 0 = 2^x \cdot 5^{-x} \quad \emptyset$

  $P_y = [0, y] \quad y = 2^0 \cdot 5^0 = 1$
- extrémy: nemá
- monotónnosť: klesajúca $(-\infty, \infty)$
- periodickosť: neperiodická

i) $f: y = 5 \cdot 4^{x-1}$



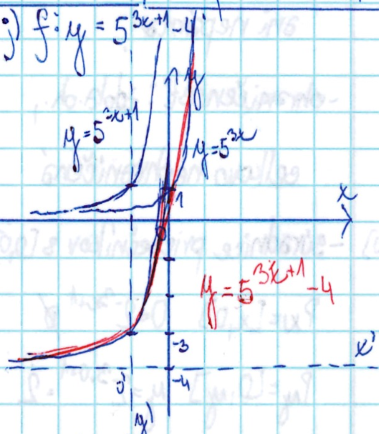
Vlastnosti:

- $D(f) = R$
- $H(f) = (0, \infty)$
- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh.; celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0] \quad 0 = 5 \cdot 4^{x-1} \quad \emptyset$

  $P_y = [0, y] \quad y = 5 \cdot 4^{0-1} = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$
- monotónnosť: rastúca; $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: neperiodická

j) $f: y = 5^{3x+1} - 4$



Vlastnosti:

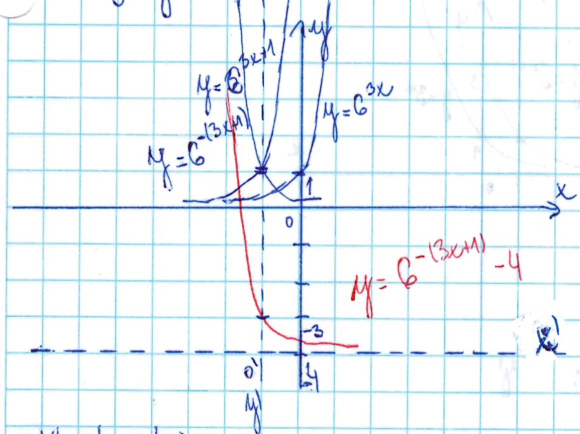
- $D(f) = R$
- $H(f) = (-3, \infty)$
- spojitosť: je spojitá
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0] \quad 0 = 5^{3x+1} - 4$

  $P_y = [0, y] \quad y = 5^{3 \cdot 0 + 1} - 4 = 1$
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: nie je periodická

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

k) $f: y = \left(\frac{1}{6}\right)^{3x+1} - 4 = 6^{-(3x+1)} - 4$



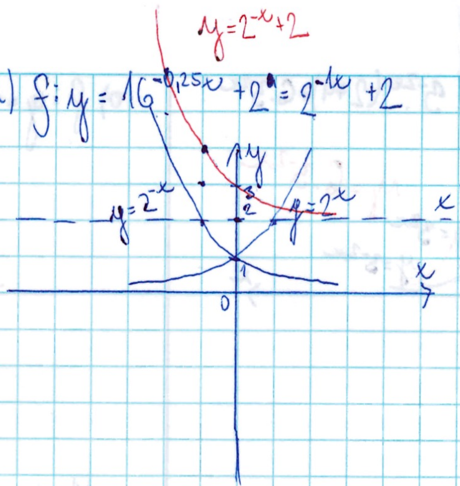
Vlastnosti:

- $D(f) = R$
- $H(f) = (-4, \infty)$
- spojitosť: je spojitá
- periodickosť: nie je periodická
- monotónnosť: klesajúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0]$ $\quad 0 = 6^{-(3x+1)} - 4$ $\emptyset$

  $P_y = [0, y]$ $\quad y = 6^{-(3\cdot 0+1)} - 4 = \frac{1}{6} - \frac{24}{6} = -\frac{23}{6} = -3\frac{5}{6}$
- extrémy: nemá

l) $f: y = 16^{-0{,}25x} + 2 = 2^{-x} + 2$



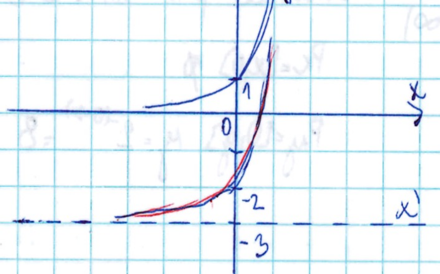
Vlastnosti:

- $D(f) = R$
- $H(f) = (2, \infty)$
- spojitosť: je spojitá
- periodickosť: nie je periodická
- monotónnosť: klesajúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_x = [x, 0]$ $\quad 0 = 2^{-x} + 2$ $\emptyset$

  $P_y = [0, y]$ $\quad y = 2^{-0} + 2 = 3$
- extrémy: nemá

m) $f: y = \frac{3^x}{0{,}3^x} - 3 = \left(\frac{3}{0{,}3}\right)^x - 3 = 10^x - 3$



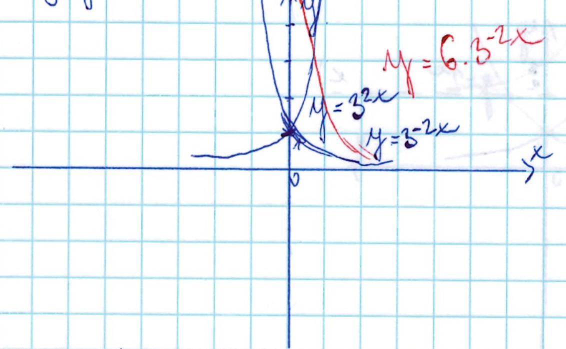
Vlastnosti:

- $D(f) = R$
- $H(f) = (-2, \infty)$
- spojitosť: je spojitá
- periodickosť: neperiodickosť
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- extrémy: nemá
- súradnice priesečníkov s [0,0]

  $P_y = [0, y]$ $\quad y = 10^0 - 3 = -2$

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

n) $f: y = 2\cdot 3^{-2x} + 4\cdot 9^{-x} = 3^{-2x}(2+4) = 6\cdot 3^{-2x}$



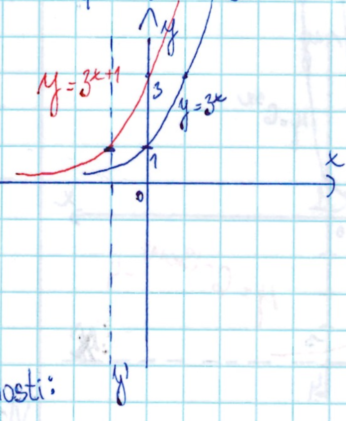
Vlastnosti:

- $D(f) = R$
- $H(f) = (0, \infty)$
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo oh.
- periodickosť: nie je periodická
- monotónnosť: klesajúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- spojitosť: je spojitá
- súradnice priesečníkov s $[0,0]$

  $P_x = [x, 0]$ $\emptyset$

  $P_y = [0, y]$ $y = 6\cdot 3^{-2\cdot 0} = 6$
- extrémy: nemá

o) $f: y = -3 \cdot \frac{12^x}{4^x} = 3\cdot 3^x = 3^{x+1}$



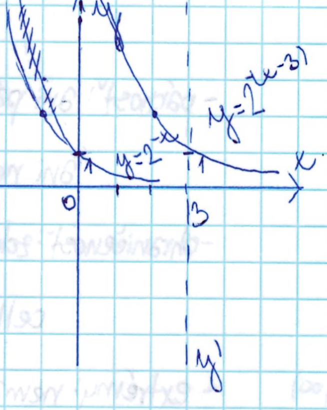
Vlastnosti:

- $D(f) = R$
- $H(f) = (0, \infty)$
- spojitosť: je spojitá
- periodickosť: nie je periodická
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- extrémy: nemá
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s $[0,0]$

  $P_x [x, 0]$ $\emptyset$

  $P_y [0, y]$ $y = 3^1 = 3$
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$

p) $f: y = 8\cdot 2^x \cdot 4^{-x} = 2^{3-x} = 2^{-(x-3)}$



Vlastnosti:

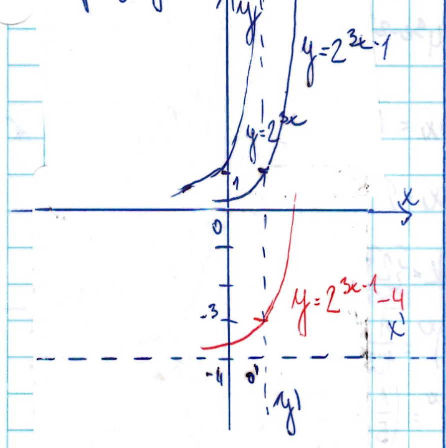
- $D(f) = R$
- $H(f) = (0, \infty)$
- monotónnosť: klesajúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: nie je periodická
- extrémy: nemá
- spojitosť: je spojitá
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo neoh.
- súradnice priesečníkov s $[0,0]$

  $P_x = [x, 0]$ $\emptyset$

  $P_y = [0, y]$ $y = 2^{-(0-3)} = 8$

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

q) $f: y = 2^{3x-1} - 4$



Vlastnosti:

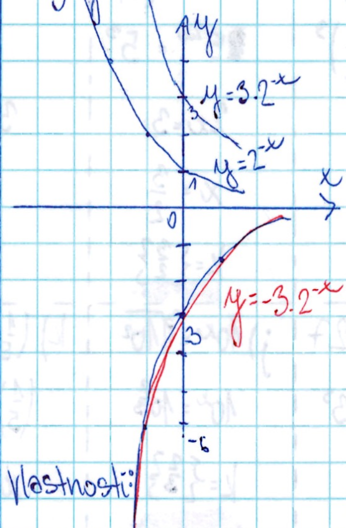
- $D(f) = R$
- $H(f) = (-4, \infty)$
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: neperiodická
- ohraničenosť: zdola oh., celkovo ohran.
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- extrémy: nemá
- súradnice priesečníkov s [0,0]

$P_x = [x, 0]$

$P_y = [0, y]$ $y = 2^{3 \cdot 0 - 1} - 4 = -3\frac{1}{2}$

- spojitosť: je spojitá

r) $f: y = -3 \cdot 2^{-x}$



Vlastnosti:

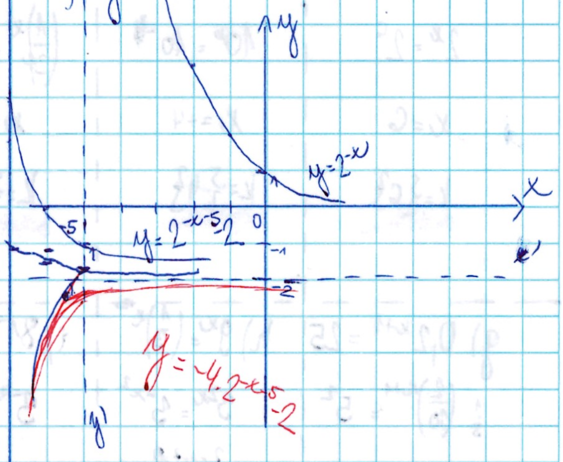
- $D(f) = R$
- $H(f) = (-\infty, 0)$
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: neperiodická
- ohraničenosť: zhora oh., celkovo neoh.
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- extrémy: nemá
- súradnice priesečníkov s [0,0]

$P_x = [x, 0]$ $\emptyset$

$P_y = [0, y]$ $y = -3 \cdot 2^{-0} = -3$

- spojitosť: je spojitá

s) $f: y = -4 \cdot 2^{-x-5} - 2$ ($2^{-(x+5)}$)



Vlastnosti:

- $D(f) = R$
- $H(f) = (-\infty, -2)$
- monotónnosť: rastúca: $x \in (-\infty, \infty)$
- periodickosť: nie je periodická
- ohraničenosť: zhora oh., celkovo neoh.
- prostosť: je prostá $\Rightarrow \exists!$ inverzná
- párnosť: ani párna, ani nepárna
- extrémy: nemá
- súradnice priesečníkov s [0,0]

P_x $\emptyset$

P_y $[0, y]$ $y = -4 \cdot 2^{-0-5} - 2 = -\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{32} - 2 = -\frac{1}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{17}{8}$

- spojitosť: je spojitá

Mária Matušisková

$x \in R$

2) a) $2^x = 64$, $2^x = 2^6$, $x = 6$, $K = \{6\}$

b) $10^x = 0{,}0001$, $10^x = 10^{-4}$, $x = -4$, $K = \{-4\}$

c) $2^{-x} = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x = 3$, $K = \{3\}$

d) $25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$, $5^{2x} = 5^3$, $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$, $K = \{\frac{3}{2}\}$

e) $4^{3x-2} = 256$, $4^{3x-2} = 4^4$, $3x = 6$, $x = 2$, $K = \{2\}$

f) $0{,}125^{x-1} = 128$, $2^{-3}\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 2^7$, $-3x + 3 = 7$, $x = -\frac{4}{3}$, $K = \{-\frac{4}{3}\}$

g) $0{,}2^{x+1} = 25$, $\frac{1}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^{x+1} = 5^2$, $-x - 1 = 2$, $-x = 3$, $K = \{-3\}$

h) $9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$, $3^{2x} = 3^{-x^2}$, $2x = -x^2$, $2x + x^2 = 0$, $x(2+x) = 0$, $x = -2$, $K = \{0, -2\}$

i) $81^{-x} = 27$, $3^{-4x} = 3^3$, $x = -\frac{3}{4}$, $K = \{-\frac{3}{4}\}$

j) $10^x = \sqrt[3]{10^2}$, $10^x = 10^{\frac{2}{3}}$, $K = \{\frac{2}{3}\}$

k) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{125}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3$, $x = 3$, $K = \{3\}$

l) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} = \frac{49}{9}$ $\quad \frac{7^2}{3^2}$, $\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$, $x = -3$, $K = \{-3\}$

m) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} = \frac{27}{8}$ $\quad \frac{3^3}{2^3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, $2x = -4$, $x = -2$, $K = \{-2\}$

n) $\left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{8}{125}\right)^{x+1}$ $\quad \frac{2^3}{5^3}$, $\left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3x-3}$, $4x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $K = \{-\frac{1}{2}\}$

o) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(1\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$, $x = -3$, $K = \{-3\}$

p) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+6}$, $x = 0$, $K = \{0\}$

q) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3x^2-1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1}$, $2x^2 = 2$, $x = \pm 1$, $K = \{-1, 1\}$

r) $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $K = \{2\}$

s) $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{512}{125}\right)^{3-x}$, $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-9+3x}$, $\frac{2x+1}{x-1} = -9 + 3x$, $-9x + 3x^2 + 9 - 3x$, $-3x^2 + 14x - 8 = 0$, $3x^2 - 14x + 8$

$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ 4 \end{cases}$, $K = \{\frac{2}{3}, 4\}$, OR: $x \neq 1$

t) $\left(1\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^{x+1} = \frac{9}{4}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $x = -3$, $K = \{-3\}$

$x \in R$

3) a) $5^{2x+1} = \sqrt{25^x}$, $5^{2x+1} = 5^x$, $x = -1$, $K = \{-1\}$

b) $3^{1-x} = \sqrt[3]{27^x}$, $3^{1-x} = 3^x$, $x = \frac{1}{2}$, $K = \{\frac{1}{2}\}$

c) $\sqrt{4^{x-1}} = \sqrt[3]{2^{1+x}}$, $2^{x-1} = 2^{\frac{1+x}{3}}$, $3x - 3$, $2x = 4$, $K = \{2\}$

d) $\sqrt[x+2]{2^x} = 8$, $2^{\frac{x}{x+2}} = 2^3$, $-2x$, $3x+6$, $x = -3$, OR: $x \neq -2$, $K = \{-3\}$

e) $\sqrt[x+2]{27} = \sqrt[x+1]{9}$, $3^{\frac{3}{x+2}} = 3^{\frac{2}{x+1}}$, $3x + 3$, $2x + 4$, $x = 1$, $K = \{1\}$

OR: $x \neq -2$, $x \neq -1$

f) $\sqrt[2x+3]{x^{3-x}} = 1024$, $x^{\frac{3-x}{2x+3}} = 2^{10}$, $K = \emptyset$

h) $3^{x-1} = 1$, $x = 1$, $K = \{1\}$

g) $\sqrt[x+2]{4^{8+x}} = \sqrt{128}$, $-2x + 4$, $16 + 2x$, $2^{\frac{8+x}{x+2}} = 2^{3}\sqrt{2}$, 2^2, $K = \{10\}$, OR: $x \neq -2$

i) $2^{x+3} = 1$, $x = -3$, $K = \{-3\}$

j) $5^{x^2 - x} = 1$, $x(x-1) = 0$, $K = \{0, 1\}$

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

k) $4^{x^3-4x}=1$

$x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$

$K=\{-2,0,2\}$

l) $7^{x^2-5x+6}=1$

$K=\{2,3\}$

4) a) $2^{6x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{9+x}=2^{3x-5}$ $x\in R$

$2^{6x}\cdot 2^{-9-x}=2^{3x-5}$

$6x-9-x=3x-5$

$2x=4$

$x=2$

$K=\{2\}$

b) $4\cdot 2^{x^2}=2^{3x}$

$2+x^2=3x$

$K=\{1,2\}$

c) $32^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{3x-2}=1$

$2^{-4x+1}=1$

$-4x=-1$

$x=\frac{1}{4}$

$K=\{\frac{1}{4}\}$

d) $16^{3x-2}=2\cdot 8^x$

$2^{12x-8}=2^{3x+1}$

$9x=9$

$x=1$

$K=\{1\}$

e) $27^{5x-6}\cdot 81^{2x+3}=9^{4x-2}\cdot 3^{7x-2}$

$3^{15x-18}\cdot 3^{8x+12}=3^{8x-8}\cdot 3^{7x-2}$

$3^{23x-6}=3^{15x-10}$

$8x=-4$

$x=-\frac{1}{2}$

$K=\{-\frac{1}{2}\}$

f) $\frac{10^{x^2}}{2^{-15}}=\frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$

$10^{x^2}=\frac{5^{-15}\cdot 2^{-15}}{10^{12-12x}}$

$10^{x^2-12x+12}=10^{-15}$

$x^2-12x+27=0$

$K=\{3,9\}$

g) $\frac{2^{x-3}\cdot 3^{x-2}}{6^{7-x}\cdot 8^{x-1}}=\frac{9^{x-2}}{3}$

?

h) $\left(\frac{7}{3}\right)^{1-3x}\cdot\frac{9}{49}=\left(\frac{49}{9}\right)^{1-2x}$

$\left(\frac{7}{3}\right)^{1-3x}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{7}{3}\right)^{1-2x}$

$-1-3x=1-2x$

$-x=2$

$K=\{-2\}$

i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1}\left(\frac{8}{27}\right)^{x+3}=\frac{16}{81}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3x-9}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

$-x=6$

$K=\{-6\}$

j) $\frac{64}{25}\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}}=\left(\frac{125}{512}\right)^{3-x}$

$\left(\frac{8}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}}=\left(\frac{8}{5}\right)^{-9+3x}$

$-11x+11+3x^2-3x$

$\frac{3}{x-1}=-11+3x$

$3x^2-14x+8=0$

$x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{196-96}}{6}=\begin{cases}4\\ \frac{2}{3}\end{cases}$

$K=\{\frac{2}{3},4\}$

OR: $x\neq 1$

5) a) $2^{x+2}-2^x=96$

$2^{x+2}-2^x=2^4\cdot 2\cdot 3$

$2^x\cdot 2^2-2^x=2^5\cdot 3$

$2^x(4-1)=2^5\cdot 3$

$2^x\cdot 3=2^5\cdot 3$

$2^x=32$

$2^x=2^5$

$x=5$

$K=\{5\}$

b) $3^x+3^{x+2}=\frac{10}{3}$

$3^x(1+9)=\frac{10}{3}$

$3^x\cdot 10=10\cdot 3^{-1}$

$3^x=\frac{1}{3}$

$x=-1$

$K=\{-1\}$

c) $3^{x-2}+3^{x-1}=36$

$3^x\left(\frac{4}{9}\right)=36$

$3^x=81$

$x=4$

$K=\{4\}$

d) $3\cdot 2^x-20=2^{x-1}$

$3\cdot 2^x-2^{x-1}=20$

$2^x\left(3-\frac{1}{2}\right)=20$

$2^x=8$

$x=3$

$K=\{3\}$

e) $5^x+3\cdot 5^{x-2}=140$

$5^x\left(1+3\cdot\frac{1}{25}\right)=140$

$5^x=125$

$x=3$

$K=\{3\}$

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

f) $7^{x+2}+2\cdot7^{x-1}=345$

$7^x(49+2\cdot\frac{1}{7})=345$

$7^x=7^1$

$x=1$

$K=\{1\}$

g) $3^x+3^{x+1}-3^{x-1}=\frac{11}{9}$

$3^x(1+3-\frac{1}{3})=\frac{11}{9}$

$3^x=3^{-1}$

$K=\{-1\}$

h) $3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=13$

$3^x(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27})=13$

$3^x=3^3$

$K=\{3\}$

i) $4\cdot3^{x+1}-3^{x+2}=72+3^{x-1}$

$4\cdot3^{x+1}-3^{x+2}-3^{x-1}=72$

$3^x(4\cdot3-9-\frac{1}{3})=72$

$3^x=3^3$

$K=\{3\}$

j) $\frac{9}{2}\cdot3^{5x-1}+3^{5x+2}-\frac{5}{2}=3^{5x+1}$

$\frac{9}{2}\cdot3^{5x-1}+3^{5x+2}-3^{5x+1}=\frac{5}{2}$

$3^{5x}(\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}+9-3)=\frac{5}{2}$

$3^{5x}=3^{-1}$

$K=\{-\frac{1}{5}\}$

k) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=40$

$3^x(1+3+9+27)=40$

$3^x=3^0$

$K=\{0\}$

l) $3^x+2=3^{x+2}$

$3^x-3^{x+2}=-2$

$3^x(1-9)=-2$

$3^x=\frac{1}{4}$

$\log_a(a^x)=x$

$\log_3(3^x)=\log_3(\frac{1}{4})$ 2^{-2}

$x=-2\log_3 2$

$K=\{-2\log_3 2\}$

6) a) $4^x-9\cdot2^x+8=0$

$(2^2)^x-9\cdot2^x+8=0$

SUB.: $2^x=y$

$y^2-9y+8=0$

$y_1=8$

$y_2=1$

y_1: $2^x=8$

$x=3$

y_2: $2^x=1$

$x=0$

$K=\{0,3\}$

b) $3^{x+1}+9^x-108=0$

$3^x\cdot3+(3^2)^x-108=0$

$3^x=y$

$3y+y^2-108=0$

$y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+432}}{2}=\begin{cases}9\\-12\end{cases}$

y_1: $3^x=9$

$x=2$

y_2: $3^x=-12$

$\emptyset$

$K=\{2\}$

c) $16^{2x}+16=2^{4x+3}$

$(2^4)^{2x}+2^4-2^{4x+3}=0$

$2^{4x\cdot2}-2^{4x}\cdot2^3+2^4=0$

SUB.: $2^{4x}=y$

$y^2-8y+16=0$

$2^{4x}=4$

$4x=2$

$x=\frac{1}{2}$

$K=\{\frac{1}{2}\}$

d) $3^{x+2}+9^{x+1}-810=0$

$3^x\cdot3^2+(3^2)^x\cdot3-810=0$

SUB.: $3^x=y$

$3y^2+9y-810=0$

$y^2+3y-270=0$

$y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+1080}}{2}=\begin{cases}15\\-18\end{cases}$

y_1: $3^x=15$

y_2: $\emptyset$

$K=\emptyset$

e) $3^{2x-1}+3\cdot3^x-12=0$

$\frac{1}{3}\cdot3^{2x}+3\cdot3^x-12=0$

SUB.: $3^x=y$

$\frac{1}{3}y^2+3y-12=0$

$y^2+9y-36=0$

$y_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+144}}{2}=\begin{cases}3\\-12\end{cases}$

y_1: $3^x=3$

$x=1$

y_2: $3^x=-12$

$\emptyset$

$K=\{1\}$

f) $2^{2x+1}-33\cdot2^{x-1}+4=0$

$2\cdot2^{2x}-33\cdot\frac{1}{2}\cdot2^x+4=0$

SUB.: $2^x=y$

$2y^2-\frac{33}{2}y+4=0$

$4y^2-33y+8=0$

$y_{1,2}=\frac{33\pm\sqrt{1089-128}}{8}=\begin{cases}8\\\frac{1}{4}\end{cases}$

y_1: $2^x=2^3$

$x=3$

y_2: $2^x=2^{-2}$

$x=-2$

$K=\{-2,3\}$

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

g) $\frac{8}{3}\cdot 3^{x-1}+1=9^{x-1}$

SUB.: $3^{x-1}=y$

$-y^2+\frac{8}{3}y+1=0$

$3y^2-8y-3=0$

$y_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\begin{cases}\frac{18}{6}=\frac{9}{3}=3\\ -\frac{1}{3}\end{cases}$

$y_1: 3^{x-1}=3$ $\quad y_2: 3^{x-1}=-3^{-1}$

$x-1=1$ $\quad \emptyset$

$x=2$

$K=\{2\}$

h) $16^{x-1}+4(4^x-384)=0$

$4^{2x-2}+4^{x+1}-1536=0$

SUB.: $4^x=y$

$\frac{1}{16}y^2+4y-1536=0$

$y^2+64y-24576=0$

$y_{1,2}=\frac{-64\pm\sqrt{4096+98304}}{2}=\begin{cases}\frac{256}{2}=128\\ -\frac{384}{2}=-192\end{cases}$

$y_1: 4^x=128$ $\quad y_2: 4^x=-192$

$2^{2x}=2^7$ $\quad \emptyset$

$x=\frac{7}{2}$

$K=\{\frac{7}{2}\}$

i) $3^x(19-3^x)=90$

$19\cdot 3^x-3^{2x}-90=0$

SUB.: $3^x=y$

$-y^2+19y-90=0$

$y^2-19y+90=0$

$y_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{361-360}}{2}=\begin{cases}10\\ 9\end{cases}$

$y_1: 3^x=10$

$\emptyset$

$y_2: 3^x=9$ $\quad x=2$

$K=\{2\}$

7) a) $2^{3x-4}\geq 1$

$2^{3x-4}\geq 2^0$

$3x\geq 4$

$x\geq\frac{4}{3}$

$x\in\langle\frac{4}{3},\infty)$

$K=\langle\frac{4}{3},\infty)$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x}<1$

$a<1$

$3x>0$

$x>0$

$x\in(0,\infty)$

$K=(0,\infty)$

c) $2^{x+1}>16$

$x+1>4$

$x>3$

$x\in(3,\infty)$

$K=(3,\infty)$

d) $9^{\frac{4}{x}}<\sqrt{3}$ $\quad$ OR: $x\neq 0$

$3^{\frac{8}{x}}<3^{\frac{1}{2}}$

$\frac{8}{x}-\frac{1}{2}<0$

$\frac{16-x}{2x}<0$

	$(-\infty,0)$	$(0,16)$	$(16,\infty)$
$16-x$	+	+	−
$2x$	−	+	+
	−		−

$K=(-\infty,0)\cup(16,\infty)$

e) $3^{x+4}>3^{1-x}$

$x+4>1-x$

$2x>-3$

$x>-\frac{3}{2}$

$K=(-\frac{3}{2},\infty)$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+4}>\left(\frac{1}{9}\right)^{1-x}$

$2x<-3$

$x<-\frac{3}{2}$

$K=(-\infty,-\frac{3}{2})$

g) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+4}>3^{1-x}$

$3^{-2x-8}>3^{1-x}$

$-x>9$

$K=(-\infty,-9)$

h) $2^{3x+5}-4^{x-1}\geq 0$

$2^{3x+5}\geq 2^{2x-2}$

$x\geq -7$

$K=\langle -7,\infty)$

i) $6^{4x+1}-6>1290$

$6^{4x+1}>1296$

$4x>3$

$K=(\frac{3}{4},\infty)$

j) $10^{x^2-5x}<0{,}1^6$

$10^{x^2-5x}<10^{-6}$

$x^2-5x+6<0$

$K=(2,3)$

k) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}>\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}>\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{x}{2}}$

$x^2<-\frac{x}{2}$

$2x^2+x<0$

$x(2x+1)$

$K=(-\frac{1}{2},0)$

l) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}\geq 243$

$3^{-\frac{1+x}{1-x}}\geq 3^5$

$-\frac{1+x}{1-x}-5\geq 0$

$\frac{1+x}{1-x}+5\leq 0$

$\frac{1+x+5-5x}{1-x}\leq 0$

$\frac{-4x+6}{1-x}\leq 0$

$\frac{2(-2x+3)}{1-x}\leq 0$

	$(-\infty,1)$	$(1,\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},\infty)$
$-2x+3$	+	+	−
$1-x$	+	−	−
		−	

$K=(1,\frac{3}{2}\rangle$

MÁRIA MATUŠISKOVÁ

m) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3x^2-1}{2}} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

$3x^2-x-2 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$

$-\frac{2}{3}$ 1

$K = (-\infty, -\frac{2}{3}\rangle \cup \langle 1, \infty)$

n) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{27}\right)^{x}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}$

$-x \geq -1$

$x \leq 1$

$K = (-\infty, 1\rangle$

o) $0{,}25^{2-x} \geq 256 \cdot 2^{-x-3}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} \geq 2^{8} \cdot 2^{-x-3}$

$2^{-4+2x} \geq 2^{-x+5}$

$3x \geq 9$

$x \geq 3$

$K = \langle 3, \infty)$

p) $4^{x} - 3 \cdot 2^{x} < 4$

$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} < 2^{2}$

SUB.: $2^{x} = y$

$y^2 - 3y - 4 < 0$

$y_1: 2^{x} = 4$ $\quad y_2: 2^{x} = -1$

$x = 2$ $\quad \emptyset$

$K = (-\infty, 2)$

q) $4^{x} - 12 \cdot 2^{x} + 32 \leq 0$

$2^{2x} - 12 \cdot 2^{x} + 32 \leq 0$

SUB.: $2^{x} = y$

$y^2 - 12y + 32 \leq 0$

$y_1: 2^{x} = 4$

$x = 2$

$y_2: 2^{x} = 8$

$x = 3$

$K = \langle 2, 3 \rangle$

r) $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$

$2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$

SUB.: $2^{-x} = y$

$2y^2 - 7y - 4 < 0$ $\quad >$

$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$y_1: 2^{-x} = 4$

$x = -2$

$y_2: 2^{-x} = -2^{-1}$

$\emptyset$

$K = (-2, \infty)$

s) $2^{x} - 4 \cdot 4^{x-1} > 4^{-1} - 2^{x-2}$

$2^{x} - 4 \cdot 2^{2x-2} > \frac{1}{4} - 2^{x-2}$

SUB.: $2^{x} = y$

$y - 4y^2 \cdot \frac{1}{4} > \frac{1}{4} - \frac{1}{4}y$

$4y - 4y^2 > 1 - y$

$-4y^2 + 5y - 1 > 0$

$4y^2 - 5y + 1 < 0$

$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

$y_1: 2^{x} = 1$

$x = 0$

$y_2: 2^{x} = 2^{-2}$

$x = -2$

$K = (-2, 0)$

t) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \geq 1$

$2^{-x} - 2^{-1+x} \geq 1$

SUB.: $y = 2^{x}$

$\frac{1}{y} - \frac{y}{2} \geq 1$

$\frac{2-y^2}{2y} \geq 1$

$\frac{-y^2-2y+2}{2y} \geq 0$

$\frac{y^2+2y-2}{2y} \leq 0$

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

$y_1: 2^{x} = -1 \pm \sqrt{3}$

$\emptyset$

$K = \emptyset$

v) $\frac{2^{1-x} - 2^{x} + 1}{2^{x} - 1} \leq 0$ $\quad$ OP: $x \neq 0$

I. $\leq$ $>$

$2^{1-x} - 2^{x} + 1 \leq 0$

$2^{x} - 1 > 0 \Rightarrow 2^{x} > 1$

$2^{x} > 2^{0}$

$x > 0$

$2^{1} \cdot 2^{-x} - 2^{x} + 1 \leq 0$

SUB.: $2^{x} = y$ $\quad$ y_1: $2^{x} = -1$ $\quad$ $\emptyset$

$x \in (0, \infty)$

$2 \frac{1}{y} - y + 1 \leq 0$ $\quad$ y_2: $2^{x} = 2$

$\frac{2 - y^2 + y}{y} \leq 0$ $\quad$ $\boxed{x = 1}$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$(y+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(y-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$
y	$-$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$(-\infty, -1) \cup (0, 2)$

2

6