
*Domáca úloha číslo 05 –
goniometrické funkcie,
úpravy goniometrických výrazov
goniometrické rovnice a nerovnice*

1. Vyjadrite stupne v radiánoch, resp. radiány v stupňoch a vypočítajte hodnotu všetkých goniometrických funkcií pre dané uhly ($\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$).

- | | | | |
|----------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| a) 45° | i) $\frac{\pi}{3}$ | m) $\frac{24}{3}\pi$ | q) $\frac{-21}{3}\pi$ |
| b) 30° | j) $\frac{2\pi}{3}$ | n) $\frac{11}{6}\pi$ | r) $-\frac{13}{3}\pi$ |
| c) 60° | k) 4π | o) $\frac{9}{6}\pi$ | s) $-\frac{7}{6}\pi$ |
| d) 90° | l) $\frac{17}{4}\pi$ | p) $\frac{15}{2}\pi$ | |
| e) 120° | | | |
| f) 150° | | | |
| g) 720° | | | |
| h) 225° | | | |

2. Vypočítajte

- | | | | |
|--|-------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\sin 4\pi$ | $\cos 4\pi$ | h) $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ | $\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ |
| b) $\sin 7\pi$ | $\cos 7\pi$ | i) $\sin\left(\frac{13}{4}\pi\right)$ | $\cos\left(\frac{13}{4}\pi\right)$ |
| c) $\sin(-7\pi)$ | $\cos(-7\pi)$ | j) $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ | $\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ |
| d) $\sin\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$ | $\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$ | k) $\sin\left(\frac{14}{3}\pi\right)$ | $\cos\left(\frac{14}{3}\pi\right)$ |
| e) $\sin\left(-\frac{27}{6}\pi\right)$ | $\cos\left(-\frac{27}{6}\pi\right)$ | l) $\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)$ | $\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)$ |
| f) $\sin\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$ | $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$ | | |
| g) $\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ | $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ | | |

3. Vypočítajte hodnotu všetkých goniometrických funkcií pre dané uhly

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) 150° | g) 270° |
| b) 300° | h) 210° |
| c) -225° | i) 45° |
| d) -945° | j) 0° |
| e) 60° | k) -210° |
| f) 45° | l) 750° |
| m) 600° | |

4. Nakresli graf goniometrickej funkcie a urči vlastnosti funkcie:

(definičný obor funkcie, obor hodnôt funkcie, funkcia je/nie je prostá, je/nie je spojitá, párna/nepárna funkcia, neohraničená/ohraničená zdola/zhora, súradnice priesečníkov so súradnicovými osami, lokálne minimum, lokálne maximum, rastúca/klesajúca funkcia).

a) $f : y = \sin 3x$

b) $f : y = \sin(3x - 1)$

c) $f : y = \sin(1 - 3x)$

d) $f : y = \sin(3x - 1)^3$

e) $f : y = 2 \sin(3x - 1)$

f) $f : y = -2 \sin(3x + 1)$

g) $f : y = 2 - \frac{1}{2} \sin(2\pi - 3x)$

h) $f : y = 2 + \cos(\pi/3 - x)$

i) $f : y = \tan(2x - \pi/2)$

j) $f : y = \tan(2x - \pi/3)$

k) $f : y = 3 + \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

l) $f : y = 3 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

m) $f : y = 2 - \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x)$

n) $f : y = 1 - 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

o) $f : y = 2 + 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

p) $f : y = 1 - \sin\left(-2x - \frac{\pi}{4}\right)$

q) $f : y = -2 + \cot(1 + \pi x)$

Nasledujúca séria príkladov je členená podľa typov úloh – to znamená že v každej sérii sú zoradené principiálne podobné úlohy. Skúste vyriešiť polovicu príkladov, ale ak to bude príliš veľa, tak minimálne niečo zo začiatku a niečo z konca danej série a o ostatných príkladoch musíte mať presnú predstavu, čo by ste s nimi mali spáchať, aby ste sa dopracovali ku výsledkom.

5. Bez počítania veľkosti uhla φ určte hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak je dané

a) $\cos \varphi = \frac{12}{13}$ pre $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$

b) $\tan \varphi = \sqrt{2}$ pre $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$

c) $\sin \varphi = 0.8$ pre $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$

d) $\cos \varphi = -\frac{3}{5}$

e) $\tan \varphi = -\sqrt{5}$

f) $\cot \varphi = -\frac{8}{15}$ pre $1500^\circ < \varphi < 1620^\circ$

g) $\tan \varphi = 5$ pre $100^\circ < \varphi < 180^\circ$

h) $\tan \varphi = \frac{7}{8}$ pre $-7\pi < \varphi < -\frac{13}{2}\pi$

6. Možno nájsť takú hodnotu argumentu x , aby platilo

$$\text{a) } \sin x = \frac{3}{5}, \quad \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\text{b) } \sin x = \frac{2}{3}, \quad \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\text{c) } \sin x = \frac{2}{3}, \quad \tan x = \frac{1}{3}$$

7. Zjednodušte výrazy

$$\text{a) } \sin x \cdot \cot x + \cos x$$

$$\text{b) } \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y}$$

$$\text{c) } \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\text{d) } \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x - 1}$$

$$\text{e) } (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$$

$$\text{f) } 1 - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\text{g) } \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\text{h) } \frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$$

$$\text{i) } \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$\text{j) } \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$$

8. Upravte na súčin

$$\text{a) } \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\text{b) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha$$

$$\text{c) } 1 - \cos^2 \beta + \sin^2 \beta$$

$$\text{d) } 1 - \sin^2 \alpha + \cot^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\text{e) } (1 + \tan^2 \beta) \cos^2 \beta$$

$$\text{f) } \sqrt{1 + \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha}}$$

$$\text{g) } \sqrt{\tan \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\tan \alpha - \sin \alpha}$$

9. Ukážte, že platia vzťahy

a)

10. \mathbb{R} riešte goniometrické rovnice

$$\text{a) } \frac{5 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$$

$$\text{b) } 4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\text{c) } \sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$$

$$\text{d) } 2 \tan x - 3 \cot x = 1$$

$$\text{e) } 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\text{f) } 2 \sin^2 x = 3 \cos x$$

11. \mathbb{R} riešte goniometrické rovnice

$$\text{a) } \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{b) } \sin^2 x + 3 \cos^2 x + \cos x = 1$$

$$\text{c) } 2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 2 \sin x$$

$$\text{d) } \tan^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0$$

$$\text{e) } \tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0$$

12. \mathbb{R} riešte goniometrické rovnice

$$\text{a) } \sin x = \cos x - 1$$

$$\text{b) } 15 \sin x + 10 \cos x = 12$$

$$\text{c) } \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

$$\text{d) } 12 \cos x + 5 \sin x = 11,2$$

$$\text{e) } \sin x + \sin 2x = \tan x$$

$$\text{f) } \sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$\text{g) } 7 \sin x + 4 \cos x = 8$$

13. V \mathbb{R} riešte goniometrické rovnice

- a) $\cos 2x = 2 \cos x$
- b) $\tan x = \sin 2x$
- c) $\sin 2x = 3 \sin^2 x$

- d) $\tan \alpha + \cot \alpha = 4 \sin 2x$
- e) $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \cdot \tan x = 1$

14. V \mathbb{R} riešte goniometrické rovnice

- a) $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$
- b) $6 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2$
- c) $\sin^2 x + \frac{3}{2} \cos^2 x = \frac{5}{2} \sin x \cos x$

- d) $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$
- e) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1$
- f) $\sin^2 x - 6 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$

15. V \mathbb{R} riešte goniometrické rovnice

- a) $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = 2 \tan \frac{x}{2}$
- b) $a \cdot \sin x = b \cdot \cos x$

- c) $a \cdot \sin x = b \tan x$
- d) $\sin(a + x) + \sin(a - x) = c$

16. V \mathbb{R} riešte goniometrické rovnice

- a) $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$
- b) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$
- c) $\tan x - \cot x = \frac{4}{3} \sin 2x$
- d) $\cos 2x + \sin 2x = \cos x + \sin x$
- e) $\sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 1$

17. V \mathbb{R} riešte goniometrické **nerovnice**

- a) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$
- b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$
- c) $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$
- d) $\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) $\tan\left(\frac{x}{4} + \pi\right) > 1$
- f) $\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) > -1$
- g) $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$

- h) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \frac{1}{2}$
- i) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$
- j) $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- k) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- l) $\sin\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$
- m) $\cotg\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) > -1$
- n) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{1}{2}$

18. V \mathbb{R} riešte goniometrické **nerovnice**

a) $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} < 0$

$\sin x + \sqrt{3} \cos x > 0$

b) $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 \geq 0$

c) $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 5 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 < 0$

d) $\tan^3 x + \tan^2 x - \tan x - 1 < 0$

e) $\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} \leq 0$

f) $\frac{\sin 2x - 1}{\cos 3x - \frac{1}{2}} \geq 0$

g) $\tan(\sin x) \geq 0$

h) $\cotg(2x - 1) \leq 1$

i) $\cos(\sin x) < 0$

j) $\sin x \leq \cos x$

k) $\tan 2x \geq \sqrt{3}$

l) $\sqrt{2} \cos^2 3x - \cos 3x < 0$

m) $(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) > \sin^2 x$

n) $\cos x \leq \frac{1}{\cos x}$

o) $\cos 2x < 2 \cos x$

p) $\tan x \geq \sin 2x$

q) $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \cdot \tan x < 1$

r) $\sin 2x \leq 3 \sin^2 x$