

# TRABALHO INDIVIDUAL 1

**OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA  
2023/2024**

**MARIA FERREIRA**  
Nº 110986 CDB2



# Índice

Introdução .....	3
Enunciado.....	4
Resolução .....	5
Alínea a).....	5
Alínea b).....	6
Alínea c).....	8
I).....	9
II).....	9
Alínea d).....	10
Alínea e).....	12

## Introdução

A otimização heurística é um campo crucial da ciência da computação que visa encontrar soluções para problemas complexos, muitas vezes num tempo computacionalmente viável.

Neste trabalho pretende-se aplicar técnicas de otimização heurística com o objetivo de resolver um problema de uma organização que pretende ajudar um país que sofreu uma catástrofe natural.

Irão ser apresentados os passos para a resolução de cada alínea que corresponderá ao desenrolar do problema.

## Enunciado

Uma organização que presta ajuda humanitária a vários países necessitados de todo o mundo, pretende atribuir ajuda, no próximo ano, a um país que foi alvo de uma catástrofe natural.

A organização pretende enviar kits de ajuda humanitária para os cidadãos daquele país.

Existem três tipos de kits:

- **Kit básico**, constituído apenas por alimentos, tais como cereais e leite em pó. Cada centena de kits custa €30000, pesa 12000 quilos e permite ajudar 3000 pessoas.
- **Kit avançado**, constituído por alimentos e vestuário, tais como cobertores e tecidos. Cada centena de kits custa €35000, pesa 18000 quilos e permite ajudar 3500 pessoas.
- **Kit premium**, constituído por alimentos, vestuário e medicamentos. Cada centena de kits custa €72000, pesa 22000 quilos e permite ajudar 5400 pessoas.

A organização estabeleceu um protocolo com o governo do país e tem de cumprir as condições seguintes:

- ajudar, pelo menos, 2.1 milhões de habitantes do país; e
- enviar, pelo menos, 3000 **kits premium**.

Devido a restrições de transporte, o total da carga transportada não pode exceder 10000 toneladas. Para além disso, por cada centena de kits premium, há necessidade de enviar um médico a um custo de €33000.

A organização pretende realizar esta campanha humanitária com o menor custo possível e maximizando o número total de kits transportado.

## Resolução

No enunciado, foram sombreadas as informações necessárias à resolução do problema para se tornar mais fácil a identificação no texto.

Antes de se iniciar qualquer resolução, de modo a facilitar todo o processo, ir-se-á organizar numa tabela as informações e deixar nas mesmas unidades.

Em unidades tem-se:

	<i>Custo (€)</i>	<i>Peso (Kg)</i>	<i>Ajuda (pessoas)</i>
<i>Kit básico</i>	300	120	30
<i>Kit avançado</i>	350	180	35
<i>Kit premium</i>	720	220	54
<i>Médico</i>	33 000	-	-

2.1 milhões de pessoas ↔ 2 100 000 pessoas

1000 toneladas ↔ 10 000 000 Kg

Agora que a informação está devidamente organizada, pode-se começar a resolução da primeira alínea.

### Alínea a)

*Formule o problema em Programação Linear.*

Para se formular um modelo em Programação Linear é necessário definir as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo do problema em questão.

**Variáveis de Decisão:**

$X_i$  – número de kits enviados da categoria  $i$ , no próximo ano, a um país que foi alvo de uma catástrofe natural,  $i \in \{1: \text{básico}, 2: \text{avançado}, 3: \text{premium}\}$ ;

$M$  – número de médicos enviados.

No enunciado é explicado que existem condições a cumprir, nomeadamente, ajudar um determinado número mínimo de pessoas e um número mínimo de kits (não especificados) a enviar. É, também, dito que existe um peso total para a carga transportada

e que por cada 100 kits premium é necessário o envio de um médico, ou seja, apenas com o número exato de 100 kits.

Posto isto, é possível estabelecer as seguintes *restrições*:

$$\text{Ajuda mínima: } 30 X_1 + 35 X_2 + 54 X_3 \geq 2\,100\,000$$

$$\text{Envio mínimo de kits premium: } X_3 \geq 3000$$

$$\text{Peso máximo da carga: } 120 X_1 + 180 X_2 + 220 X_3 \leq 10\,000\,000$$

$$\text{Nº de médicos: } X_3 \times (1/100) \leq M$$

$$\text{Variáveis inteiras e positivas: } X_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, 3\} ; M \in \mathbb{Z}$$

Através do enunciado pode-se formular as duas *funções objetivo*:

$$\text{Min Custo: } 300 X_1 + 350 X_2 + 720 X_3 + 33000 M$$

$$\text{Max Nº Kits: } X_1 + X_2 + X_3$$

## Alínea b)

Na tabela seguinte são apresentadas propostas de envio de kits de cada tipo (em centenas):

	<i>kit básicos</i>	<i>kit avançado</i>	<i>kits premium</i>
Proposta 1	184	396	30
Proposta 2	646	0	30
Proposta 3	761	4	30
Proposta 4	765	0	30

Investigue se as propostas são admissíveis e se existem propostas dominadas. Justifique a sua resposta.

Em unidades tem-se:

	<i>Kits básico</i>	<i>Kits avançado</i>	<i>Kits premium</i>
<i>Proposta 1</i>	18 400	39 600	3000
<i>Proposta 2</i>	64 600	0	3000
<i>Proposta 3</i>	76 100	400	3000
<i>Proposta 4</i>	76 500	0	3000

Para se verificar se uma proposta é admissível tem-se de substituir nas restrições anteriormente formuladas e verificar se são verdadeiras.

A condição das variáveis serem inteiras positivas e a condição de envio mínimo de kits premium, como se pode observar, verifica-se em todas as propostas. Verifique-se as restantes.

**Proposta 1:**

$$30 (18400) + 35 (39600) + 54 (3000) \geq 2\,100\,000$$

$$\leftrightarrow 2\,100\,000 \geq 2\,100\,000$$

$$120 (18400) + 180 (39600) + 220 (3000) \leq 10\,000\,000$$

$$\leftrightarrow 9\,996\,000 \leq 10\,000\,000$$

**Proposta 2:**

$$30 (64600) + 35 (0) + 54 (3000) \geq 2\,100\,000$$

$$\leftrightarrow 2\,100\,000 \geq 2\,100\,000$$

$$120 (64600) + 180 (0) + 220 (3000) \leq 10\,000\,000$$

$$\leftrightarrow 8\,412\,000 \leq 10\,000\,000$$

**Proposta 3:**

$$30 (76100) + 35 (400) + 54 (3000) \geq 2\,100\,000$$

$$\leftrightarrow 2\,459\,000 \geq 2\,100\,000$$

$$120 (76100) + 180 (400) + 220 (3000) \leq 10\,000\,000$$

$$\leftrightarrow 9\,864\,000 \leq 10\,000\,000$$

**Proposta 4:**

$$30 (76500) + 35 (0) + 54 (3000) \geq 2\,100\,000$$

$$\leftrightarrow 2\,457\,000 \geq 2\,100\,000$$

$$120 (76500) + 180 (0) + 220 (3000) \leq 10\,000\,000$$

$$\leftrightarrow 9\,840\,000 \leq 10\,000\,000$$

Uma vez que todas as propostas verificam todas as condições, são todas consideradas como admissíveis. Para se verificar se existem propostas dominadas é necessário comparar as propostas em termos dos objetivos:

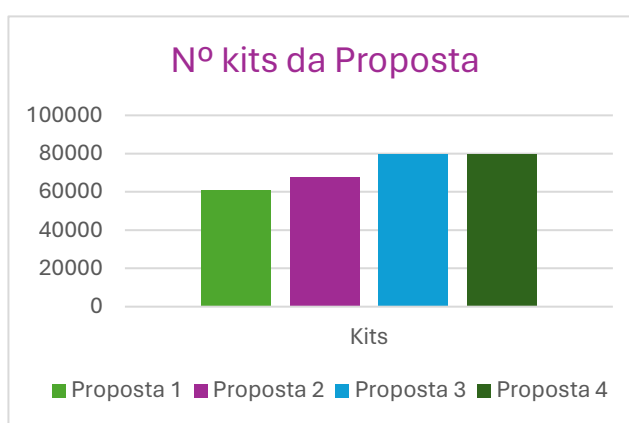
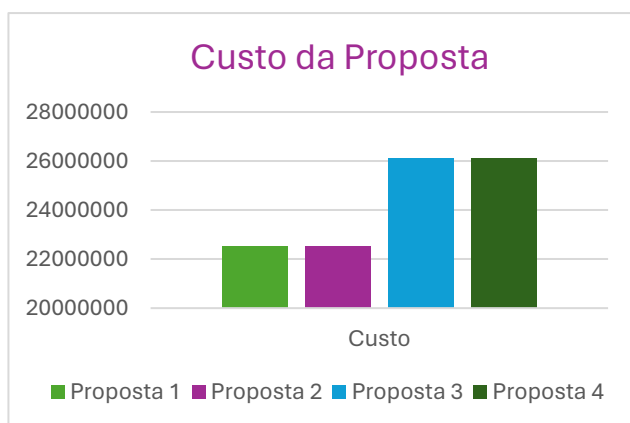
*Min Custo:*

$$300 X_1 + 350 X_2 + 720 X_3 + 33000 M$$

*Max N° Kits:*

$$X_1 + X_2 + X_3$$

<i>Proposta 1</i>	22 530 000	610 00
<i>Proposta 2</i>	22 530 000	676 00
<i>Proposta 3</i>	26 120 000	795 00
<i>Proposta 4</i>	26 100 000	795 00



Como é possível perceber através dos gráficos Custo da Proposta e Nº kits da Proposta, com os valores de cada objetivo, as Propostas 1 e 2 têm o mesmo custo (22 530 000) e as Propostas 3 e 4 têm o mesmo número de kits a enviar (795 00).

Como o objetivo é reduzir o custo e aumentar o número de kits conclui-se que a Proposta 1 é dominada pela Proposta 2, uma vez que para o mesmo custo a Proposta 2 tem maior número de kits a enviar (o que é melhor). O mesmo acontece com a Proposta 3 que é dominada pela Proposta 4, que possui menor custo para o mesmo número de kits.

### Alínea c)

*Quantos kits básicos, avançados e premium deve a organização enviar para o país se a organização estiver interessada, exclusivamente, na*

*(i) na minimização do custo da ajuda humanitária? e*



(ii) na maximização do total de kits enviados?

A organização tem hipótese de atingir os dois objetivos em simultâneo? Justifique as suas respostas.

I)

A questão foi resolvida através de código Python em Jupyter Notebook. Como o objetivo definido é “minimização do custo” a função objetivo será:

$$\text{Min Custo: } 300 X_1 + 350 X_2 + 720 X_3 + 33000 M$$

```
objective: 22530000.0
Solução:
x1: 64600.0
x2: 0.0
x3: 3000.0
x4: 30.0
ajuda_minima: 0.0
envio_minimo_de_k_premium: 0.0
peso_maximo: -1588000.0
medico_por_k_premium: 0.0
```

Figura 1 – Output

O valor ótimo é de 21 milhões, 549 mil e 900 euros, como se observa em “objective” na Figura 1. Para este valor ótimo enviam-se:

**Kit básico ( $X_1$ ):** 64 mil e 600 kits

**Kit avançado ( $X_2$ ):** 0 kits

**Kit premium ( $X_3$ ):** 3 mil kits

**Médico ( $X_4$ ):** 30 médicos

II)

Como o objetivo definido é “maximização do total de kits enviados” a função objetivo será:

$$\text{Max N° Kits: } X_1 + X_2 + X_3$$

```
objective: 80833.0  
x1: 77833.0  
x2: 0.0  
x3: 3000.0  
x4: 30.0  
ajuda_minima: 396990.0  
envio_minimo_de_k_premium: 0.0  
peso_maximo: -40.0  
medico_por_k_premium: 0.0
```

Figura 2 – Output

O valor ótimo é de 80 mil e 833 kits, como se observa em “*objective*” na Figura

1. Para este valor ótimo enviam-se:

***Kit básico ( $X_1$ ): 77 mil e 833 kits***

***Kit avançado ( $X_2$ ): 0 kits***

***Kit premium ( $X_3$ ): 3 mil kits***

***Médico ( $X_4$ ): 30 médicos***

Depois de se resolver os dois objetivos, separadamente, percebe-se que não é possível a organização atingir os dois e cumprir todas as restrições, uma vez que os objetivos são inversamente proporcionais. O aumento do número de kits implica um custo maior, sempre.

Quando se minimiza o custo o número de kits básicos é de 64 mil e 600 kits e quando se maximiza o número de kits percebe-se que o número kits básicos passa a 77 mil e 833 kits, ou seja, existe uma grande discrepância nos valores sendo que os restantes são iguais, por isso, comprova-se que atingir ambos não é executável.

### Alínea d)

*Admitindo que a organização atribui igual importância aos objetivos, determine uma solução de envio de kits que garanta:*

- *um custo de envio de aproximadamente 22.5 milhões de euros; e*
- *o envio de aproximadamente 80800 kits.*

*Explique detalhadamente a metodologia aplicada. Comente a solução obtida.*

Nesta alínea é essencial, criar-se 4 desvios. Dois por cada objetivo, que ir-se-á chamar de Meta. A Meta 1 representará o objetivo de diminuir os custos totais e a Meta 2 significará a maximização do número de kits a enviar.

Desta forma, é possível juntar ambas as metas no modelo como restrições e onde a função objetivo será a de minimizar a soma dos desvios, de modo a aproximar os resultados aos valores ambicionados.

**Meta 1:** *um custo de envio de aproximadamente 22.5 milhões de euros*

$d_1^-$  – quanto falta para alcançar o valor da Meta 1, em euros;

$d_1^+$  – quanto se excede o valor da Meta 1, em euros.

**Meta 2:** *o envio de aproximadamente 80800 kits*

$d_2^-$  – quanto falta para alcançar o valor da Meta 2, em kits;

$d_2^+$  – quanto se excede o valor da Meta 2, em kits.

Uma vez que será resolvido através de código Python, de maneira a otimizar o problema (caso se queira alterar os valores dos objetivos), pode-se definir as constantes dos objetivos:

**custo alvo** = 22 500 000

**envio alvo** = 80 800

Como é referido no enunciado da alínea, a organização atribuiu igual importância aos objetivos. O que possibilita estabelecer o modelo de Programação Linear por Metas:

$$\text{Min desvios: } \left( \frac{1}{\text{custo\_alvo}} \right) \times (d_1^- + d_1^+) + \left( \frac{1}{\text{envio\_alvo}} \right) \times (d_2^- + d_2^+)$$

```
objective: 0.1646996699669967
x1: 64600.0
x2: 0.0
x3: 3000.0
x4: 30.0
dM1: 30000.0
dM2: 0.0
dm1: 0.0
dm2: 13200.0
minimizante: 0.0
maximizante: 0.0
ajuda_minima: 0.0
envio_minimo_de_k_premium: 0.0
peso_maximo: -1588000.0
medico_por_k_premium: 0.0
```

Figura 3 – Output

O valor ótimo é de 0.124171, aproximadamente. Para este valor ótimo enviam-se:

**Kit básico ( $X_1$ ):** 67 mil e 767 kits

**Kit avançado ( $X_2$ ):** 0 kits

**Kit premium ( $X_3$ ):** 3 mil kits

**Médico ( $X_4$ ):** 30 médicos

E relativamente à concretização das Metas, tem-se:

**Excede Meta 1 ( $d_1^+$ ):** 0 euros

**Falta para Meta 1 ( $d_1^-$ ):** 0 euros

**Excede Meta 2 ( $d_2^+$ ):** 0 kits

**Falta para Meta 2 ( $d_2^-$ ):** 10 mil e 33 kits

O que significa que a Meta 1 é alcançada, por isso, existe um custo de 22.5 milhões de euros, aproximadamente e fica-se por enviar 10 mil e 33 kits para concretizar-se a Meta 2 (enviar 80 mil e 800 kits).

### Alínea e)

*Suponha que a organização decidiu dar mais importância ao cumprimento do nível de aspiração do total de kits enviado. Deste modo, atribuiu uma penalização de 8 pontos por cada 10 kits abaixo do nível de aspiração (80800 kits) e uma penalização de 1 ponto por cada milhão de euros acima do nível de aspiração (22.5 milhões de euros). Sob este cenário, quantos kits básicos, avançados e premium deve a organização enviar para o país?*

*Explique detalhadamente a metodologia aplicada. Comente a solução obtida.*

Para esta alínea é necessário criar e adicionar as penalizações ao modelo. Tem-se então a seguinte função objetivo:

$$\text{Peso} = [1, 8]$$

$$\text{Min desvios: } \left( \frac{\text{peso}[0]}{\text{custo\_alvo}} \right) \times (d_1^- + d_1^+) + \left( \frac{\text{peso}[1]}{\text{envio\_alvo}} \right) \times (d_2^- + d_2^+)$$

```

objective: 0.17733333333333334
x1: 77800.0
x2: 0.0
x3: 3000.0
x4: 30.0
dM1: 3990000.0
dM2: 0.0
dm1: 0.0
dm2: 0.0
minimizante: 0.0
maximizante: 0.0
ajuda_minima: 396000.0
envio_minimo_de_k_premium: 0.0
peso_maximo: -4000.0
medico_por_k_premium: 0.0

```

Figura 4 – Output

O valor ótimo é de 0.17733, aproximadamente. Para este valor ótimo enviam-se:

**Kit básico ( $X_1$ ):** 77 mil e 800 kits

**Kit avançado ( $X_2$ ):** 0 kits

**Kit premium ( $X_3$ ):** 3 mil kits

**Médico ( $X_4$ ):** 30 médicos

E relativamente à concretização das Metas, tem-se:

**Excede Meta 1 ( $d_1^+$ ):** 3 milhões e 990 mil euros

**Falta para Meta 1 ( $d_1^-$ ):** 0 euros

**Excede Meta 2 ( $d_2^+$ ):** 0 kits

**Falta para Meta 2 ( $d_2^-$ ):** 0 kits

O que significa que a Meta 2 é alcançada, por isso, existe uma ajuda humanitária de 80 mil e 800 kits, com um custo que excede os 22.5 milhões de euros por 3 milhões e 990 mil euros.