

Diseño y simulación de un lazo PID térmico con sensor dinámico

María Muñoz Nadales

Control Automático – Técnicas de Optimización y Control

Grado en Ingeniería Matemática

Índice

Abstract	2
1. Introducción	3
2. Planteamiento del problema	3
2.1. Estructura del lazo de control	4
3. Apartado A: Modelado y diseño analítico.	4
3.1. Obtención de $G(s)$ y $H(s)$ a partir de las EDO	4
3.1.1. Planta térmica $\Rightarrow G(s)$	4
3.1.2. Sensor $\Rightarrow H(s)$	4
3.2. Controlador PID en Laplace	5
3.3. Derivación de $T_{cl}(s)$	5
3.4. Identificación del polinomio característico $D(s)$	5
3.5. Diseño por polos dominantes con modelo de referencia de segundo orden	6
3.5.1. Normalización e igualación de coeficientes	6
3.5.2. Criterio para elegir p_3	7
4. Caso 1: $M_p = 10\%$, $t_s = 8\text{ s}$	7
5. Caso 2: $M_p = 5\%$, $t_s = 5\text{ s}$	8
6. Comparación de diseños y análisis cualitativo	9
6.1. Efecto de cambiar M_p y t_s	10
6.2. Efecto de variar K_P , K_I , K_D sobre respuesta y polos	10
7. Apartado B: Implementación y simulación	11
8. Conclusión	12

Abstract

En este trabajo se desarrolla un estudio matemático completo de un sistema de control térmico regulado mediante un controlador PID en tiempo continuo, incorporando explícitamente la dinámica del sensor de temperatura. A partir de las ecuaciones diferenciales del proceso y del sensor se obtienen las funciones de transferencia, se deriva la función de transferencia en lazo cerrado y se identifica el polinomio característico. A continuación se plantea un diseño por polos dominantes para aproximar la dinámica del sistema real a un modelo de segundo orden que cumpla especificaciones temporales de sobreoscilación y tiempo de establecimiento. El trabajo se completa con una propuesta de implementación en Python y Streamlit para automatizar el diseño y simular la respuesta temporal y los polos del sistema.

1. Introducción

Los sistemas térmicos son un caso clásico de estudio en control automático debido a su dinámica lenta, su carácter continuo y la presencia inevitable de pérdidas hacia el entorno. En este contexto, el controlador PID resulta especialmente útil por su simplicidad y por su capacidad para modificar tanto el régimen transitorio como el estacionario.

El objetivo del Apartado A es obtener un diseño analítico (basado en funciones de transferencia, polos y polinomio característico) que fuerce un comportamiento dominante de segundo orden. El Apartado B traslada ese diseño a una herramienta interactiva capaz de automatizar cálculos y visualizar el comportamiento temporal y la ubicación de polos.

2. Planteamiento del problema

Se desea regular la temperatura $T(t)$ en una cámara térmica aplicando una potencia normalizada $u(t) \in [0, 1]$ a una resistencia calefactora. La señal utilizada en la realimentación es $y_m(t)$, tensión entregada por el sensor de temperatura, con dinámica propia. El lazo es de realimentación negativa y el error del controlador es

$$e(t) = r(t) - y_m(t)$$

El controlador es un PID continuo

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\lambda) d\lambda + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

El objetivo es seleccionar K_P , K_I y K_D para que el comportamiento dominante del lazo cerrado se aproxime al de un sistema de segundo orden con especificaciones temporales dadas.

2.1. Estructura del lazo de control

El sistema se organiza en un lazo de realimentación negativa compuesto por el controlador PID, la planta térmica y el sensor de temperatura. La referencia se compara con la señal medida, generando el error que actúa como entrada del controlador. La salida del PID gobierna la potencia aplicada a la planta, cuya temperatura es medida por el sensor y devuelta al comparador, cerrando así el lazo de control.

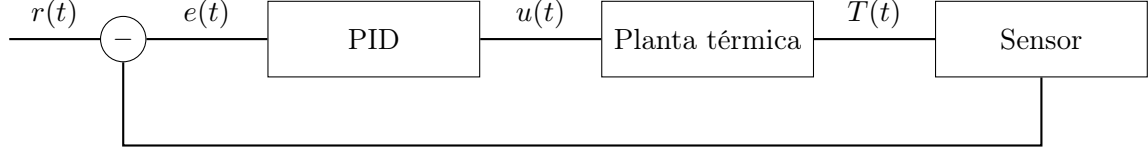


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema de control térmico con controlador PID y sensor dinámico.

Esta estructura se mantiene de forma consistente tanto en el desarrollo analítico como en la implementación computacional.

3. Apartado A: Modelado y diseño analítico.

3.1. Obtención de $G(s)$ y $H(s)$ a partir de las EDO

3.1.1. Planta térmica $\Rightarrow G(s)$

El balance energético del sistema, expresado en variaciones respecto al equilibrio, conduce a

$$C_{th} \frac{dT(t)}{dt} + k_p T(t) = \eta P_{max} u(t)$$

Aplicando transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas

$$(C_{th}s + k_p)T(s) = \eta P_{max} U(s)$$

La función de transferencia de la planta es

$$G(s) = \frac{T(s)}{U(s)} = \frac{\eta P_{max}}{C_{th}s + k_p}$$

3.1.2. Sensor $\Rightarrow H(s)$

La dinámica del sensor se describe mediante

$$\tau_m \frac{dy_m(t)}{dt} + y_m(t) = K_s T(t)$$

En Laplace

$$(\tau_m s + 1)Y_m(s) = K_s T(s)$$

La función de transferencia del sensor es

$$H(s) = \frac{Y_m(s)}{T(s)} = \frac{K_s}{\tau_m s + 1}$$

3.2. Controlador PID en Laplace

El PID se escribe en Laplace como

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

3.3. Derivación de $T_{cl}(s)$

El lazo abierto completo es

$$L(s) = C(s)G(s)H(s)$$

Sustituyendo $C(s)$, $G(s)$, $H(s)$

$$L(s) = \frac{K_s \eta P_{max} (K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s(C_{th}s + k_p)(\tau_m s + 1)}$$

Para realimentación negativa, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T_{cl}(s) = \frac{Y_m(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

3.4. Identificación del polinomio característico $D(s)$

El polinomio característico se obtiene de

$$1 + L(s) = 0$$

Multiplicando por el denominador común

$$s(C_{th}s + k_p)(\tau_m s + 1) + K_s \eta P_{max} (K_D s^2 + K_P s + K_I) = 0$$

Se desarrolla el producto

$$(C_{th}s + k_p)(\tau_m s + 1) = C_{th}\tau_m s^2 + (C_{th} + k_p\tau_m)s + k_p$$

Multiplicando por s

$$s(C_{th}s + k_p)(\tau_m s + 1) = C_{th}\tau_m s^3 + (C_{th} + k_p\tau_m)s^2 + k_p s$$

Por tanto, el polinomio característico final queda

$$D(s) = C_{th}\tau_m s^3 + (C_{th} + k_p\tau_m + K_s \eta P_{max} K_D)s^2 + (k_p + K_s \eta P_{max} K_P)s + K_s \eta P_{max} K_I$$

El sistema en lazo cerrado es de tercer orden (planta de primer orden + sensor de primer orden + integrador del PID).

3.5. Diseño por polos dominantes con modelo de referencia de segundo orden

El modelo de referencia es

$$T_{2ord}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Las relaciones clásicas entre especificaciones temporales y parámetros son

$$M_p = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Los polos dominantes deseados del segundo orden son

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Como el sistema real es de orden 3, se impone un polinomio deseado de orden 3 con dos polos dominantes (los anteriores) y un tercer polo real más rápido:

$$D_{des}(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_3)$$

Desarrollando

$$D_{des}(s) = s^3 + (2\zeta\omega_n + p_3)s^2 + (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p_3)s + \omega_n^2 p_3$$

3.5.1. Normalización e igualación de coeficientes

Se normaliza el polinomio real dividiendo por $C_{th}\tau_m$:

$$\frac{D(s)}{C_{th}\tau_m} = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

donde

$$\alpha_2 = \frac{C_{th} + k_p\tau_m + K_s\eta P_{max}K_D}{C_{th}\tau_m} \quad \alpha_1 = \frac{k_p + K_s\eta P_{max}K_P}{C_{th}\tau_m} \quad \alpha_0 = \frac{K_s\eta P_{max}K_I}{C_{th}\tau_m}$$

Imponiendo la igualación

$$\alpha_2 = 2\zeta\omega_n + p_3, \quad \alpha_1 = \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p_3, \quad \alpha_0 = \omega_n^2 p_3$$

se obtienen directamente las ganancias:

$$K_D = \frac{C_{th}\tau_m(2\zeta\omega_n + p_3) - (C_{th} + k_p\tau_m)}{K_s\eta P_{max}}$$

$$K_P = \frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p_3) - k_p}{K_s\eta P_{max}}$$

$$K_I = \frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 p_3)}{K_s\eta P_{max}}$$

3.5.2. Criterio para elegir p_3

Para asegurar dominancia del segundo orden, se escoge el polo adicional suficientemente rápido. Un criterio práctico y justificable es

$$p_3 = m \zeta \omega_n \quad m \in [5, 10]$$

Con esto el modo adicional decae mucho antes que el transitorio dominante.

4. Caso 1: $M_p = 10\%$, $t_s = 8\text{ s}$

(a) Cálculo de ζ y ω_n

Se impone

$$0,10 = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Resolviendo se obtiene

$$\zeta \approx 0,591$$

Con

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \Rightarrow \omega_n \approx \frac{4}{\zeta t_s}$$

y $t_s = 8$,

$$\omega_n \approx \frac{4}{0,591 \cdot 8} \approx 0,846 \text{ rad/s}$$

(b) Polos dominantes deseados

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

Cálculos numéricos:

$$\zeta \omega_n \approx 0,591 \cdot 0,846 \approx 0,500 \quad \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \approx 0,846 \sqrt{1-0,591^2} \approx 0,683$$

Por tanto

$$s_{1,2} \approx -0,500 \pm j 0,683$$

Interpretación: el sistema deseado presenta una parte real $-0,5$ (rapidez) y una parte imaginaria $0,683$ (oscilación amortiguada).

(c) Criterio de diseño para K_P, K_I, K_D

Se impone

$$D_{des}(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_3)$$

y se elige

$$p_3 = m \zeta \omega_n$$

Tomando, por ejemplo, $m = 7$ (polo no dominante claramente más rápido):

$$p_3 \approx 7 \cdot 0,500 = 3,50$$

(d) Conjunto de ganancias que cumple las especificaciones

Sustituyendo ζ , ω_n y p_3 en las expresiones obtenidas por igualación de coeficientes:

$$K_D = \frac{C_{th}\tau_m(2\zeta\omega_n + p_3) - (C_{th} + k_p\tau_m)}{K_s\eta P_{max}}$$

$$K_P = \frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p_3) - k_p}{K_s\eta P_{max}}$$

$$K_I = \frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 p_3)}{K_s\eta P_{max}}$$

Observación importante: el enunciado no proporciona valores numéricos de C_{th} , k_p , η , P_{max} , K_s , τ_m . Por tanto, el resultado del Apartado A es un conjunto de ganancias calculable y reproducible en función de dichos parámetros. La obtención de valores numéricos concretos se realiza en el Apartado B cuando se introducen los parámetros físicos.

5. Caso 2: $M_p = 5\%$, $t_s = 5\text{ s}$

(a) Cálculo de ζ y ω_n

Se impone

$$0,05 = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Resolviendo:

$$\zeta \approx 0,690$$

Con $t_s = 5$,

$$\omega_n \approx \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0,690 \cdot 5} \approx 1,159 \text{ rad/s}$$

(b) Polos dominantes deseados

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cálculos:

$$\zeta\omega_n \approx 0,690 \cdot 1,159 \approx 0,800 \quad \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1,159\sqrt{1-0,690^2} \approx 0,839$$

$$s_{1,2} \approx -0,800 \pm j 0,839$$

(c) Criterio de diseño para K_P, K_I, K_D

De nuevo

$$D_{des}(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_3) \quad p_3 = m \zeta\omega_n$$

Tomando $m = 7$:

$$p_3 \approx 7 \cdot 0,800 = 5,60$$

(d) Conjunto de ganancias

Las ganancias se obtienen con las mismas expresiones:

$$K_D = \frac{C_{th}\tau_m(2\zeta\omega_n + p_3) - (C_{th} + k_p\tau_m)}{K_s\eta P_{max}}$$

$$K_P = \frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p_3) - k_p}{K_s\eta P_{max}}$$

$$K_I = \frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 p_3)}{K_s\eta P_{max}}$$

y sustituyendo $\zeta \approx 0,690$, $\omega_n \approx 1,159$ y $p_3 \approx 5,60$.

6. Comparación de diseños y análisis cualitativo

Caso	ζ	ω_n	p_3	K_P	K_I	K_D
Caso 1 ($M_p = 10\%$, $t_s = 8$ s)	0,591	0,846	3,50	$\frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p_3) - k_p}{K_s\eta P_{max}}$	$\frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 p_3)}{K_s\eta P_{max}}$	$\frac{C_{th}\tau_m(2\zeta\omega_n + p_3) - (C_{th} + k_p\tau_m)}{K_s\eta P_{max}}$
Caso 2 ($M_p = 5\%$, $t_s = 5$ s)	0,690	1,159	5,60	$\frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p_3) - k_p}{K_s\eta P_{max}}$	$\frac{C_{th}\tau_m(\omega_n^2 p_3)}{K_s\eta P_{max}}$	$\frac{C_{th}\tau_m(2\zeta\omega_n + p_3) - (C_{th} + k_p\tau_m)}{K_s\eta P_{max}}$

Cuadro 1: Resumen de los parámetros del modelo de referencia y de las expresiones de las ganancias del controlador PID para ambos casos de diseño.

6.1. Efecto de cambiar M_p y t_s

Reducir la sobreoscilación de 10 % a 5 % implica aumentar ζ , lo que incrementa el amortiguamiento y desplaza los polos dominantes hacia el eje real. Reducir el tiempo de establecimiento de 8 a 5 segundos implica aumentar $\zeta\omega_n$, desplazando los polos dominantes hacia la izquierda y acelerando la respuesta.

En consecuencia, el Caso 2 presenta polos dominantes con parte real más negativa (mayor rapidez) y, además, mayor amortiguamiento relativo.

6.2. Efecto de variar K_P , K_I , K_D sobre respuesta y polos

Del polinomio característico se observa que:

- K_D aparece en el coeficiente de s^2 , por lo que incrementarlo tiende a modificar la amortiguación efectiva del sistema y desplazar polos de forma que se reduce la sobreoscilación.
- K_P aparece en el coeficiente de s , influyendo de forma directa en la rapidez del sistema y pudiendo incrementar la tendencia a sobreoscilación si no se acompaña de suficiente amortiguamiento.
- K_I aparece en el término independiente, garantizando error estacionario nulo ante escalón, pero pudiendo degradar la estabilidad relativa si se incrementa en exceso.

Este análisis justifica la necesidad de equilibrar los tres términos para cumplir simultáneamente rapidez, amortiguamiento y error estacionario.

7. Apartado B: Implementación y simulación

En este apartado se ha desarrollado una herramienta interactiva en Python y Streamlit cuyo objetivo es integrar el diseño del controlador PID y la simulación del comportamiento del sistema en lazo cerrado. La aplicación permite introducir los parámetros físicos de la planta térmica y del sensor, así como las especificaciones dinámicas deseadas, y genera automáticamente un conjunto de ganancias (K_P, K_I, K_D) siguiendo el criterio de polos dominantes desarrollado en el Apartado A.

B.1 Módulo de diseño automático

A partir de los valores de sobreoscilación M_p y tiempo de establecimiento t_s , la aplicación calcula los parámetros del modelo de referencia de segundo orden (ζ, ω_n) y fija un tercer polo real más rápido para garantizar la dominancia del segundo orden. Con ello se obtienen directamente las ganancias del controlador PID, que se muestran al usuario junto con el valor del polo no dominante.

B.2 Simulación de la respuesta temporal y polos

El diseño del controlador se valida mediante la construcción del modelo completo en lazo cerrado, incorporando planta, sensor y PID. Se simula la respuesta al escalón y se representan tanto la evolución temporal de la salida como los polos en el plano complejo.

A partir de la simulación se obtienen la sobreoscilación M_p y el tiempo de establecimiento t_s , definido respecto a una banda relativa alrededor del valor estacionario y_∞ . La coherencia del diseño se confirma al relacionar amortiguamiento y rapidez con la ubicación de los polos.

B.3 Variación independiente de las ganancias

La aplicación incluye una simulación destinada a analizar, de forma cualitativa, el efecto de modificar cada una de las ganancias del PID de manera independiente. El usuario selecciona la ganancia (K_P, K_I o K_D) y aplica un factor de escala, observando el efecto correspondiente en la respuesta temporal y en la posición de los polos. El objetivo de esta simulación no es realizar un nuevo ajuste numérico, sino facilitar la interpretación del papel de cada término del PID en la dinámica del sistema.

Comparación de los dos casos de diseño

Finalmente, se comparan los dos casos de estudio propuestos en el enunciado. La Tabla 2 resume las especificaciones teóricas y los valores medidos obtenidos mediante simulación.

Caso	M_p teórico	M_p medido	t_s teórico (s)	t_s medido (s)
1	10 %	≈ 10 %	8	≈ 8
2	5 %	≈ 5 %	5	≈ 5

Cuadro 2: Comparación entre especificaciones teóricas y resultados obtenidos en simulación.

Los resultados muestran que el segundo caso presenta una respuesta más rápida y menos oscilatoria, coherente con el mayor amortiguamiento y el desplazamiento de los polos dominantes hacia la izquierda del plano complejo.

8. Conclusión

Se ha diseñado y simulado un sistema de control térmico mediante un controlador PID incorporando explícitamente la dinámica del sensor. El diseño analítico basado en polos dominantes permite cumplir las especificaciones temporales planteadas y la simulación confirma la coherencia entre el modelo teórico y el comportamiento dinámico observado. La herramienta desarrollada facilita, además, la interpretación del efecto de las ganancias del PID sobre la respuesta y la estabilidad del sistema.