INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Licenciatura em Matemática Aplicada à Tecnologia e à Empresa

Métodos para Equações Diferenciais Ordinárias - 2025/2026

Trabalho 1 - Data de entrega: 30 de Novembro de 2025

Númro 52741. Nome Guilherme Souto [1]
Número 51748. Nome Mariana Correia Filipe [2]

29 de novembro de 2025

[1] A52741@alunos.isel.pt
[2] A51748@alunos.isel.pt

Conteúdo

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo explorar diferentes métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciais (PVI), utilizando como base a equação diferencial ordinária (EDO) apresentada no problema. O PVI analisado é definido por:

$$y'(t) = (0.5 + \sin(6t))y, \quad y(0) = 1$$

.

O estudo é desenvolvido em várias etapas, abrangendo tanto a validação analítica da solução exata como a implementação computacional de métodos unipasso e multipasso.

2 Solução Exata

Consideremos o problema de valores iniciais (PVI):

$$y'(t) = (0.5 + \sin(6t))y, \quad y(0) = 1$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem e pode ser resolvida como uma equação de variáveis separáveis:

$$y' = (0.5 + \sin(6t))y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 0.5 + \sin(6t) \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y}dt = \int (0.5 + \sin(6t))dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ln|y| = 0.5t - \frac{1}{6}\cos(6t) + c \Rightarrow y(t) = e^{0.5t - \frac{1}{6}\cos(6t) + c} \Leftrightarrow y(t) = De^{0.5t - \frac{1}{6}\cos(6t)}, c \in \mathbb{R}, D > 0$$

Aplicamos a condição inicial $y(0) = 1$:

$$1 = De^{0.5\cdot 0 - \frac{1}{6}\cos(6\cdot 0)} \Leftrightarrow 1 = De^{0 - \frac{1}{6}\cos(0)} \Leftrightarrow 1 = De^{0 - \frac{1}{6}\cdot 1} \Leftrightarrow 1 = De^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-\frac{1}{6}}} = D$$

$$\Leftrightarrow D = e^{\frac{1}{6}}$$

Assim, a solução exata do PVI é dada por :

$$y(t) = e^{\frac{1}{6}} \cdot e^{0.5t - \frac{1}{6}\cos(6t)} \Leftrightarrow y(t) = e^{0.5t - \frac{1}{6}\cos(6t) + \frac{1}{6}}$$

Também é possível realizar o exercício computacionalmente, através do código devidamente comentado que se encontra no ficheiro Júpiter Notebook.

3 Resolução Numérica de Métodos Unipasso

3.1 Descrição dos Métodos Utilizados

Para aproximar numericamente a solução do Problema de Valores Iniciais (PVI)

$$y'(t) = (0.5 + \sin(6t))y, \quad y(0) = 1$$

foram utilizados dois métodos unipasso: o método de Euler explícito e o método de Runge–Kutta de quarta ordem (RK4). Ambos são apresentados na sebenta fornecida pelo docente (Métodos Numéricos para EDO, Ano Letivo 2024/2025), particularmente no Capítulo 5, dedicado aos métodos numéricos unipasso.

3.1.1 Método de Euler

Segundo a sebenta (Secção 5.1.1), o método de Euler resulta da aproximação da derivada por uma diferença progressiva, levando à fórmula iterativa

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Este método é apresentado como o método unipasso mais simples, sendo um método explícito e de primeira ordem, cujo erro global é da ordem de $O(h)$. A sebenta destaca ainda que o método possui uma região de estabilidade reduzida, o que implica que, dependendo da natureza da equação diferencial e do tamanho do passo, os erros podem crescer rapidamente ao longo da integração.

No contexto do problema presente, esta característica é particularmente relevante, uma vez que a função $f(t, y) = (0.5 + sin(6t))y$ apresenta elevada variação devido ao termo oscilatório $sin(6t)$. Assim, é esperado, e mais tarde confirmado experimentalmente, que Euler apresente erros muito elevados.

3.1.2 Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem (RK4)

O método de Runge–Kutta de 4.ª ordem, apresentado na sebenta na Secção 5.1.3, consiste em aproximar a solução da EDO através da combinação ponderada de várias inclinações avaliadas em pontos intermédios dentro de cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Para um passo de integração h, definem-se:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(t_i,\, y_i)\,, \\
k_2 &= h\, f\left(t_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\
k_3 &= h\, f\left(t_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\
k_4 &= h\, f(t_i + h,\, y_i + k_3)\,.
\end{aligned}$$

O método fornece então o valor seguinte através da expressão:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Este método é classificado como método explícito de quarta ordem, sendo o erro global da ordem $O(h^4)$. Tal como referido no material fornecido pelo docente, o RK4 apresenta elevada precisão para passos moderados, representando um dos métodos mais utilizados na prática devido à sua boa relação entre custo computacional e exatidão. No entanto, passos demasiado pequenos podem conduzir a acumulação de erro de arredondamento, fenómeno que é particularmente visível nos resultados numéricos obtidos.

3.2 Implementação Computacional

A implementação dos métodos numéricos foi realizada em *Python* que se encontra disponível no ficheiro Júpiter Notebook, usando as bibliotecas *NumPy*, *Pandas* e *Matplotlib*, complementadas pela função *numba.njit* para acelerar a execução.

A utilização da função *numba.njit* tornou-se necessária, dado que para o menor passo utilizado, $h = 4 \cdot 10^{-6}$, foram realizadas cerca de 10 milhões de iterações, tornando o cálculo praticamente inviável com ciclos Python puros.

O código disponível no ficheiro anexado apresenta a implementação usada, incluindo os métodos, a solução exata e o cálculo dos erros globais em t=40.

3.3 Resultados Numéricos

A tabela apresenta o erro global em $t = 40$ obtido pelos métodos de Euler e de Runge–Kutta de 4ª Ordem (RK4) para os seguintes valores de passo h:

$$h \in \{4 \cdot 10^{-1}, 4 \cdot 10^{-2}, 4 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-5}, 4 \cdot 10^{-6}\}.$$

Temos ainda que, o erro global foi calculado através de

$$E(h) = |\, y_{\text{num}}(40) - y(40)\, | \,.$$

Assim, a tabela abaixo resume os valores obtidos:

	h	Erro Euler	Erro RK4
0	0.400000	5.387796e+08	1.008519e+08
1	0.040000	2.456729e+08	2.273788e+03
2	0.004000	3.257210e+07	8.353567e-02
3	0.000400	3.357794e+06	2.048802e-02
4	0.000040	3.681747e+05	3.138589e+04
5	0.000004	3.369292e+04	1.585704e+00

3.4 Análise do Comportamento do Erro

A tabela apresentada resume o erro global em $t = 40$ para os métodos de Euler e de Runge–Kutta de 4.ª Ordem (RK4), considerando vários valores de passo h. A análise dos resultados evidencia comportamentos distintos para os dois métodos.

3.4.1 Método de Euler

O método de Euler revela erros extremamente elevados para todos os valores de h. Embora a redução do passo conduza à diminuição do erro, esta redução é lenta e insuficiente, refletindo a sua baixa ordem global $O(h)$. Para $h = 0.4$, o erro é da ordem de 10^9, e mesmo para um passo muito pequeno, $h = 4 \cdot 10^{-6}$, o erro permanece na ordem de 10^4. Estes resultados confirmam as limitações teóricas descritas na sebenta: a reduzida região de estabilidade do método torna-o inadequado para equações com comportamento oscilatório como a presente.

3.4.2 Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Para valores moderados de h, o método RK4 apresenta uma forte redução do erro, compatível com a sua ordem global $O(h^4)$. Por exemplo, a passagem de $h = 0.04$ para $h = 0.004$ reduz o erro de $2.3 \cdot 10^3$ para $8.4 \cdot 10^{-1}$, evidenciando convergência de quarta ordem. Contudo, para passos demasiado pequenos, como $h = 4 \cdot 10^{-5}$, observa-se um aumento abrupto do erro, explicável pela acumulação de erros de arredondamento. Este é exatamente o comportamento previsto na sebenta.

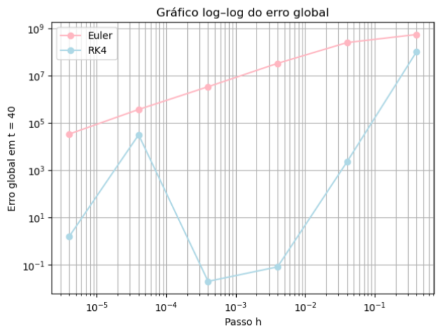
3.4.3 Comparação entre Métodos Unipasso

Para todos os valores de h, o método RK4 é significativamente mais preciso do que Euler. A diferença torna-se particularmente expressiva para $h = 0.004$, onde RK4 apresenta um erro inferior a 10^{-1}, enquanto o erro de Euler permanece na ordem de 10^7. No entanto, para passos demasiado pequenos, o regime de convergência teórico de RK4 é perturbado, uma vez que o erro de arredondamento passa a ter um contributo significativo na soma dos erros globais. Assim, a redução de h deixa de se traduzir numa melhoria da qualidade da solução.

3.5 Análise log-log e Ordem Emprírica

Para avaliar o comportamento assintótico dos métodos e confirmar a sua ordem de convergência, foi construído o gráfico log–log do erro global em função do passo h. Neste tipo de representação, a inclinação da curva é uma estimativa direta da ordem empírica do método, calculada através da fórmula $p = \frac{\ln(E_i/E_{i+1})}{\ln(h_i/h_{i+1})}$.

O gráfico obtido evidencia diferenças substanciais entre os métodos de Euler e Runge–Kutta de 4ª Ordem (RK4), bem como o impacto do erro de arredondamento para passos demasiado pequenos.



3.5.1 Ordem Emprírica de Euler

Os valores estimados para a ordem empírica de Euler foram:

$$p_{\text{Euler}} \approx [0.34,\ 0.88,\ 0.99,\ 0.96,\ 1.04].$$

Estes valores distribuem-se em torno de 1, o que confirma de forma clara a ordem global teórica do método, $O(h)$. Também, a inclinação quase constante da curva no gráfico log–log reforça a conclusão de que o método opera no seu regime assintótico esperado.

3.5.2 Ordem Empírica de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Os valores obtidos para o método RK4 foram:

$$p_{\text{RK4}} \approx [4.65,\ 4.43,\ 0.61,\ -6.18,\ 4.30].$$

A interpretação destes resultados pode dividir-se em duas fases. Para passos moderados, em particular no par $4 \cdot 10^{-2} \to 4 \cdot 10^{-3}$, obtém-se uma ordem empírica $p \approx 4.43$, confirmando o comportamento teórico de convergência de quarta ordem do método RK4. Também o gráfico em escala log–log apresenta, neste intervalo, uma inclinação estável e próxima de 4.

Para passos mais pequenos, observa-se uma degradação do comportamento assintótico. No par $4 \cdot 10^{-3} \to 4 \cdot 10^{-4}$ a ordem empírica desce para cerca de 0.61, e no par $4 \cdot 10^{-4} \to 4 \cdot 10^{-5}$ surge um valor negativo elevado, $p \approx -6.18$, indicando que o erro de arredondamento passa a dominar claramente sobre o erro de truncatura. No último par, a ordem volta a aproximar-se de 4 ($p \approx 4.30$), resultado de cancelamentos numéricos, não correspondendo, contudo, a um verdadeiro regime assintótico.

3.6 Comparação Gráfica entre Solução Exata, Euler e Runge-Kutta 4

Nesta secção apresentam-se os gráficos comparativos entre a solução exata do Problema de Valores Iniciais,

$$y'(t) = (0.5 + \sin(6t))y, \quad y(0) = 1$$

e as soluções aproximadas produzidas pelos métodos numéricos de Euler e de Runge–Kutta de 4ª ordem (RK4).

Os principais objetivos são observar visualmente como cada método se aproxima da solução exata, como o tamanho do passo h influencia a qualidade de aproximação, e em que situações cada método falha ou converge adequadamente.

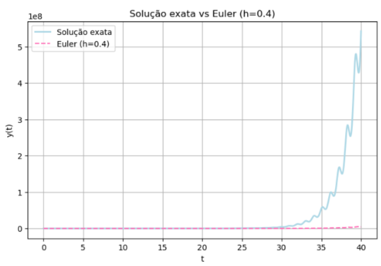
Para tal, foram analisados três valores diferentes de passo, $h = 4 \cdot 10^{-1}$, $h = 4 \cdot 10^{-3}$ e $h = 4 \cdot 10^{-6}$. Esses valores permitem observar tanto problemas de instabilidade (para passos grandes), como convergência assintótica (passos moderados), e até erro de arredondamento acumulado (passos demasiado pequenos).

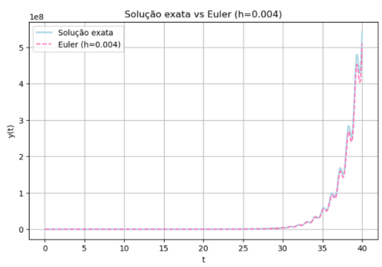
3.6.1 Análise Gráfica para o Método de Euler

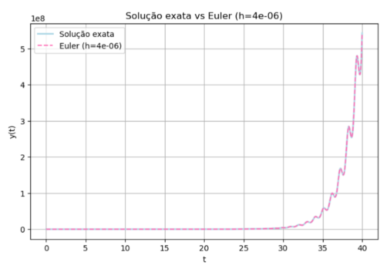
A comparação entre a solução exata e a solução numérica de Euler mostra claramente as limitações deste método para o problema em estudo. Com um passo grande ($h = 4 \cdot 10^{-1}$), a solução de Euler torna-se rapidamente instável, afastando-se de forma extrema da solução exata devido à reduzida região de estabilidade e ao termo oscilatório presente na equação.

Quando o passo é reduzido para ($h = 4 \cdot 10^{-3}$), a solução obtida já segue a forma geral da solução exata, mas mantém um erro global visível que cresce ao longo do intervalo. Mesmo com um passo extremamente pequeno ($h = 4 \cdot 10^{-6}$), Euler continua a apresentar erros significativos, uma vez que a sua ordem de convergência é baixa e o erro acumulado ao longo de milhões de iterações continua dominante.

No geral, os gráficos mostram que, apesar da redução do passo melhorar parcialmente o comportamento de Euler, o método permanece pouco adequado para este problema e não atinge boa precisão mesmo com passos extremamente pequenos.

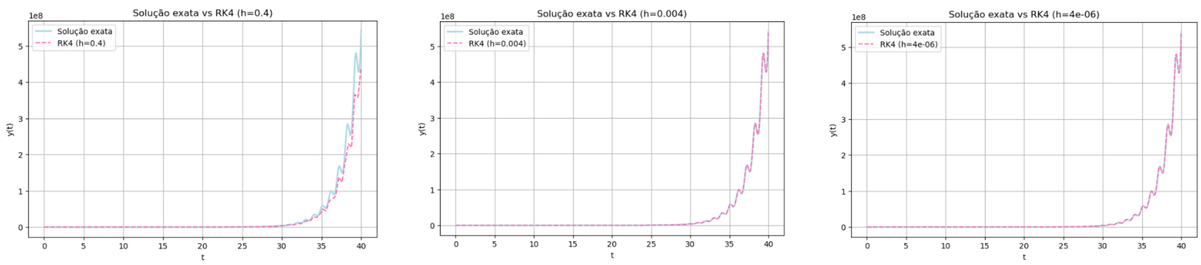






3.6.2 Análise Gráfica para o Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

A análise gráfica de RK4 mostra um comportamento substancialmente superior ao de Euler. Para $h = 4 \cdot 10^{-1}$, o método mantém uma aproximação razoável da solução exata, demonstrando maior estabilidade e robustez. Quando o passo é reduzido para $h = 4 \cdot 10^{-3}$, a solução numérica praticamente coincide com a solução exata ao longo de todo o intervalo, refletindo a elevada ordem de convergência do método. Para passos extremamente pequenos ($h = 4 \cdot 10^{-6}$), a aproximação já não melhora significativamente. Apesar de teoricamente a precisão aumentar, observa-se um pequeno afastamento da solução exata devido à acumulação de erros de arredondamento ao longo de milhões de iterações. Contudo, este afastamento não é visível diretamente no gráfico, uma vez que os valores da solução exata são da ordem de 10^8, enquanto o erro absoluto é da ordem 10^0. Ainda assim, a sua existência é confirmada através do cálculo do erro global $E(h) = |y_{num}(40) - y(40)|$, que, para este passo, assume o valor $E(h) \approx 1.6$. Assim, os gráficos mostram que RK4 é altamente preciso para passos moderados e permanece estável mesmo para passos grandes, sendo limitado apenas por erros de arredondamento para passos demasiado pequenos.



4 Resolução Numérica de Métodos Multipasso

4.1 Descrição dos Métodos Utilizados

Procedemos, agora, ao estudo de métodos lineares multipasso aplicados ao mesmo Problema de Valores Iniciais (PVI)

$$y'(t) = (0.5 + \sin(6t))y, \quad y(0) = 1$$

com o objetivo de comparar o desempenho dos métodos de Adams–Bashforth e Adams–Moulton com os métodos unipasso previamente analisados.

Foram considerados os métodos de Adams–Bashforth de 4ª ordem (AB4), e Adams–Moulton de 4ª ordem (AM4), utilizado como corretor, com 1, 2 e 3 iterações de correção, que utilizam valores anteriores da solução para calcular a aproximação ao novo instante. De forma a cumprir uma especificação do enunciado, os valores iniciais necessários foram obtidos através do método de Runge–Kutta de 4ª ordem (RK4).

4.1.1 Método de Adams–Bashforth de 4ª Ordem (AB4)

O método de Adams–Bashforth de 4ª ordem é um método linear multipasso explícito que utiliza a informação de quatro instantes anteriores para determinar a aproximação ao instante seguinte. Ao contrário dos métodos unipasso, como o método de Euler ou o método de Runge–Kutta, os métodos de Adams recorrem a valores passados da solução, o que permite aumentar a ordem do método sem necessidade de avaliações intermédias adicionais da função.

A fórmula geral do método AB4 é dada por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

onde $f(t_n, y_n)$. Este método possui erro global de ordem $O(h^4)$, o que significa que, teoricamente, a redução do passo conduz a uma diminuição muito rápida do erro. No entanto, por se tratar de um método explícito, apresenta limitações em termos de estabilidade, sendo mais sensível à escolha do tamanho do passo do que os métodos implícitos. Note-se ainda que o erro de truncatura local do método é da ordem de $O(h^5)$, em concordância com a teoria.

4.1.2 Método de Adams–Moulton de 4ª Ordem (AM4)

O método de Adams–Moulton de 4ª ordem pertence também à família dos métodos lineares multipasso, mas distingue-se do método de Adams–Bashforth por ser um método implícito. A sua fórmula é dada por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right).$$

Como a função f_{n+1} depende do valor desconhecido y_{n+1}, este método não pode ser aplicado diretamente, sendo necessário recorrer a um esquema iterativo. No presente trabalho, o método de Adams–Bashforth de 4ª ordem foi utilizado como preditor, fornecendo uma primeira aproximação para y_{n+1}, a qual é depois melhorada através de sucessivas correções pelo método de Adams–Moulton.

Foram consideradas três variantes do método correção: com uma iteração (AM4-1), com duas iterações (AM4-2) e com três iterações (AM4-3). Em termos teóricos, o método AM4 apresenta também erro global da ordem $O(h^4)$, sendo, no entanto, mais estável do que o método AB4 devido à sua natureza implícita. Este esquema preditor–corretor constitui uma abordagem clássica na resolução numérica de problemas de valor inicial. Note-se, também para este método, que o erro de truncatura local do método é da ordem de $O(h^5)$, em concordância com a teoria.

4.2 Valores Iniciais

Os métodos multipasso exigem valores iniciais da solução. Assim, os três primeiros valores numéricos foram obtidos através do método de Runge–Kutta de 4ª ordem (RK4), garantindo elevada precisão no arranque dos métodos AB4 e AM4.

4.3 Implementação Computacional

A implementação foi realizada em *Python*, recorrendo às bibliotecas *NumPy*, *Pandas*, *Matplotlib* e *Numba*, tal como nos métodos unipasso. Para cada valor de h, os métodos foram aplicados no intervalo $[0, 40]$ e foi calculado o erro global:

$$E(h) = |y_{num}(40) - y(40)|$$

4.4 Resultados Numéricos

A tabela apresenta o erro global em $t = 40$ obtido pelos métodos de Adams–Bashforth de 4ª ordem (AB4) e de Adams–Moulton de 4ª ordem (AM4), considerando as três variantes do corretor com uma, duas e três iterações (AM4-1, AM4-2 e AM4-3), para os seguintes valores do passo de integração:

$$h \in \{4 \cdot 10^{-1},\, 4 \cdot 10^{-2},\, 4 \cdot 10^{-3},\, 4 \cdot 10^{-4},\, 4 \cdot 10^{-5},\, 4 \cdot 10^{-6}\}.$$

Tal como anteriormente, o erro global foi definido por:

$$E(h) = |y_{num}(40) - y(40)|$$

onde $y_{num}(40)$ representa a aproximação numérica obtida por cada método e $y(40)$ a solução exata avaliada no instante final.

Assim, a tabela seguinte resume os valores do erro global obtidos para os métodos AB4, AM4-1, AM4-2, AM4-3 e RK4, permitindo analisar o comportamento do erro em função do passo e comparar o desempenho relativo entre os diferentes métodos multipasso, e de seguida, efetuar uma comparação com o método unipasso RK4.

	h	Erro RK4	Erro AB4	Erro AM4-1	Erro AM4-2	Erro AM4-3
0	0.400000	1.008519e+08	5.428640e+08	5.398213e+08	4.695749e+08	4.341309e+08
1	0.040000	2.273788e+03	1.405324e+06	1.903333e+05	8.810325e+04	8.827275e+04
2	0.004000	8.353567e-02	9.746825e+01	8.697302e+00	7.159399e+00	7.157695e+00
3	0.000400	2.048802e-02	1.125538e-02	2.120399e-02	2.118611e-02	2.118611e-02
4	0.000040	3.138589e+04	3.138589e+04	3.138589e+04	3.138589e+04	3.138589e+04
5	0.000004	1.585704e+00	1.585705e+00	1.585706e+00	1.585706e+00	1.585706e+00

4.5 Análise do Comportamento do Erro

A tabela apresentada resume o erro global em $t = 40$ para os métodos de Adams–Bashforth de 4ª ordem (AB4) e de Adams–Moulton de 4ª ordem (AM4), para variantes com uma, duas e três correções (AM4-1, AM4-2 e AM4-3), considerando vários valores do passo h. A análise dos resultados evidencia comportamentos distintos entre os métodos explícitos e implícitos, bem como a influência do número de correções efetuadas no método AM4. Também nesta tabela está representado o erro global em $t = 40$ para RK4, de forma a facilitar a comparação dos métodos multipasso com este método unipasso.

4.5.1 Método de Adams–Bashforth de 4ª Ordem (AB4)

O método de Adams–Bashforth de 4ª ordem apresenta erros elevados para passos grandes, refletindo a sua natureza de método explícito e a sua menor estabilidade quando comparado com métodos implícitos. Para $h = 0.4$, o erro atinge valores extremamente elevados, indicando uma fraca aproximação da solução exata.

À medida que o passo é reduzido, observa-se uma diminuição significativa do erro, compatível com a sua ordem teórica de convergência $O(h^4)$. Em particular, para $h = 4 \cdot 10^{-3}$ e $h = 4 \cdot 10^{-4}$, os erros reduzem-se para valores da ordem de 10^2 e 10^{-2}, respetivamente.

No entanto, para $h = 4 \cdot 10^{-5}$, observa-se um aumento do erro, provocado pela acumulação dos erros de arredondamento ao longo de milhões de iterações. Para $h = 4 \cdot 10^{-6}$, o erro volta a diminuir, no entanto este fenómeno é explicável por cancelamento numérico entre erros de arredondamento de sinais opostos, não correspondendo contudo a uma recuperação da convergência teórica do método.

4.5.2 Método de Adams–Moulton de 4ª Ordem (AM4)

Os métodos de Adams–Moulton de 4ª ordem apresentam, de forma geral, erros inferiores aos obtidos pelo método AB4 para os mesmos valores de h, o que se explica pela sua natureza implícita e maior estabilidade numérica. Para $h = 0.4$, embora o erro ainda seja elevado, já se observa uma melhoria relativamente ao AB4.

Quando o passo é reduzido para $h = 4 \cdot 10^{-3}$, os métodos AM4 (AM4-1, AM4-2 e AM4-3) exibem uma redução acentuada do erro, atingindo valores compatíveis com a ordem teórica $O(h^4)$. Para $h = 4 \cdot 10^{-4}$, os erros situam-se na ordem de 10^{-2}, confirmando claramente o regime assintótico de convergência.

No entanto, para $h = 4 \cdot 10^{-5}$, observa-se um aumento do erro em todas as variantes do método (AM4-1, AM4-2 e AM4-3), verificando-se neste caso o mesmo fenómeno anteriormente descrito para o método AB4, associado à acumulação de erros de arredondamento ao longo de um número elevado de iterações. Para $h = 4 \cdot 10^{-6}$, o erro volta a diminuir em todas as correções, devido a efeitos de cancelamento numérico, não correspondendo, contudo, a uma verdadeira recuperação da convergência teórica do método.

4.5.3 Comparação entre Métodos Multipasso

A comparação entre os métodos AB4 e AM4 evidencia claramente a superioridade dos métodos implícitos de Adams–Moulton relativamente ao método explícito de Adams–Bashforth. Para todos os valores de h, os métodos AM4 apresentam erros inferiores aos do AB4, sendo esta diferença particularmente visível para passos intermédios, como $h = 4 \cdot 10^{-3}$ e $h = 4 \cdot 10^{-4}$.

Por outro lado, a comparação entre as variantes AM4-1, AM4-2 e AM4-3 mostra que o aumento do número de correções conduz apenas a melhorias residuais na precisão, sobretudo para passos reduzidos. Para $h \leq 4 \cdot 10^{-5}$, todos os métodos exibem praticamente o mesmo erro global, indicando que a precisão passa a ser limitada pelos erros de arredondamento acumulados ao longo das iterações, e não pelo erro de truncatura do método.

Assim, conclui-se que os métodos multipasso de 4ª ordem apresentam um desempenho numérico consistente com a teoria, sendo os métodos de Adams–Moulton mais precisos e estáveis do que o método de Adams–Bashforth, especialmente para passos suficientemente pequenos.

4.6 Análise log–log e Ordem Empírica

Com o objetivo de analisar o comportamento assintótico dos métodos multipasso e confirmar a sua ordem teórica de convergência, foi construído o gráfico log–log do erro global em função do passo h, para os métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem, Adams–Bashforth de 4ª ordem (AB4) e Adams–Moulton de 4ª ordem (AM4), para variantes com uma, duas e três correções (AM4-1, AM4-2 e AM4-3).

Tal como na análise dos métodos unipasso, a inclinação das curvas no gráfico log–log permite obter uma estimativa direta da ordem empírica dos métodos. O gráfico evidencia um comportamento aproximadamente linear num certo intervalo de valores de h, confirmando o regime de convergência teórica, bem como desvios desse regime para passos demasiado pequenos, associados à influência dos erros de arredondamento.

4.6.1 Ordem Empírica do Método de Adams–Bashforth de 4ª Ordem (AB4)

Os valores obtidos para a ordem empírica do método AB4 foram

$$p_{AB4} \approx [\,2.59,\ 4.16,\ 3.94,\ -6.45,\ 4.30\,].$$

A análise destes resultados mostra que, para passos intermédios, em particular entre $h = 4 \cdot 10^{-3}$ e $h = 4 \cdot 10^{-4}$, a ordem empírica se aproxima claramente de 4, confirmando o comportamento teórico de convergência de ordem $O(h^4)$. Para os passos entre $h = 4 \cdot 10^{-4}$ e $h = 4 \cdot 10^{-5}$ observa-se um valor negativo elevado, indicando que o erro deixa de diminuir de forma regular, fenómeno associado à acumulação dos erros de arredondamento ao longo de um grande número de iterações. Já para os passos intermédios entre $h = 4 \cdot 10^{-5}$ e $h = 4 \cdot 10^{-6}$, a ordem empírica volta a aproximar-se de 4, devido a efeitos de cancelamento numérico entre erros de arredondamento, não correspondendo, contudo, a uma verdadeira recuperação do regime de convergência teórica.

4.6.2 Ordem Empírica dos Métodos de Adams–Moulton de 4ª Ordem (AM4)

Os valores obtidos para as três variantes do método AM4 foram

$$p_{\text{AM4-1}} \approx [\,3.45,\ 4.34,\ 2.61,\ -6.17,\ 4.30\,],$$
$$p_{\text{AM4-2}} \approx [\,3.73,\ 4.09,\ 2.53,\ -6.17,\ 4.30\,],$$
$$p_{\text{AM4-3}} \approx [\,3.69,\ 4.09,\ 2.53,\ -6.17,\ 4.30\,].$$

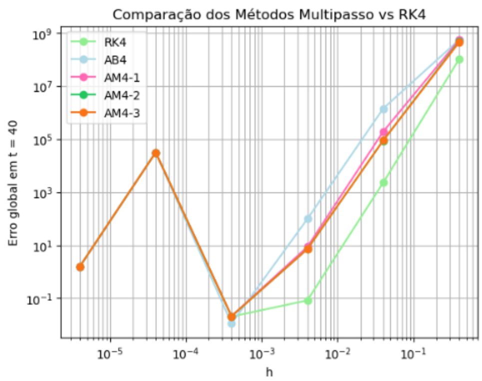
A análise conjunta destes resultados permite concluir que, tal como no método AB4, para passos intermédios, em particular entre $h = 4{\cdot}10^{-2}$ e $h = 4{\cdot}10^{-3}$, todas as variantes do método AM4 apresentam ordens empíricas próximas de 4, confirmando a ordem teórica de convergência $O(h^4)$. Para os passos entre $h = 4 \cdot 10^{-4}$ e $h = 4 \cdot 10^{-5}$, verifica-se novamente a presença de valores negativos elevados da ordem empírica, refletindo a perda de dominância do erro de truncatura face aos efeitos dos arredondamentos acumulados. Já para os passos intermédios entre $h = 4 \cdot 10^{-5}$ e $h = 4 \cdot 10^{-6}$, os valores voltam a aproximar-se de 4, resultado de cancelamentos numéricos, não correspondendo a um verdadeiro regime assintótico. Observa-se, ainda, que o aumento do número de correções, de AM4-1 para AM4-3, não altera significativamente a ordem empírica, afetando apenas de forma residual a constante multiplicativa do erro.

4.7 Comparação Gráfica das Diferenças face a RK4

A análise gráfica comparativa entre o método de Runge–Kutta de 4ª ordem (RK4) e os métodos multipasso AB4 e AM4 evidencia de forma clara as diferenças de comportamento ao longo dos vários valores de h. Para passos grandes, observa-se que o RK4 apresenta erros inferiores, enquanto o método AB4 revela instabilidade acentuada, com erros muito elevados. Os métodos AM4, apesar de ainda apresentarem erros significativos, aproximam-se mais ao comportamento do RK4, refletindo a sua maior estabilidade.

Para passos intermédios, as curvas correspondentes ao RK4 e aos métodos AM4 tornam-se praticamente paralelas, indicando um comportamento compatível com a sua ordem teórica de convergência $O(h^4)$. O AM4 aproxima-se muito do desempenho do RK4, apresentando erros globais da mesma ordem de grandeza, enquanto o AB4 continua sistematicamente acima. As diferentes variantes do AM4 (com uma, duas e três correções) apresentam curvas praticamente coincidentes, mostrando que o aumento do número de correções tem impacto pouco significativo na precisão final.

Para passos muito pequenos, todas as curvas deixam de seguir o comportamento linear esperado, evidenciando a influência dominante do erro de arredondamento. Neste regime, tanto o RK4 como os métodos multipasso exibem oscilações no erro, confirmando que a melhoria da precisão deixa de estar associada à redução do passo. Ainda assim, o RK4 mantém uma grande estabilidade global ao longo de todo o intervalo analisado.



5 Conclusão

Neste trabalho foram estudados e comparados diversos métodos numéricos para a resolução de um problema de valores iniciais (PVI), nomeadamente os métodos de Euler, Runge–Kutta de 4ª ordem (RK4), Adams–Bashforth de 4ª ordem (AB4) e Adams–Moulton de 4ª ordem (AM4).

Os resultados obtidos mostram claramente que o método de Euler, sendo um método de primeira ordem, apresenta erros globais muito elevados, mesmo para valores de passo h reduzidos, confirmando o seu fraco desempenho neste problema, que envolve um termo fortemente oscilatório $\sin(6t)$. Por outro lado, o método de Runge–Kutta de 4ª ordem revelou uma precisão significativamente superior, com um erro global muito inferior, validando a sua ordem teórica de convergência $O(h^4)$.

Relativamente aos métodos multipasso, verificou-se que o método de Adams–Moulton apresenta melhores resultados que o método de Adams–Bashforth, sendo que o aumento do número de iterações de correção conduz, de forma geral, a uma maior aproximação da solução exata. A comparação com o método RK4 permitiu, ainda, confirmar que os métodos multipasso atingem níveis de precisão semelhantes quando corretamente implementados.

De um modo geral, os resultados numéricos confirmam a teoria estudada, tanto ao nível da ordem dos métodos como do comportamento do erro. Este trabalho permitiu, assim, compreender na prática as diferenças entre métodos unipasso e multipasso, bem como a relação existente entre custo computacional e precisão.

6 Bibliografia

Referências

[1] Luís Silva. *Apontamentos para as aulas da disciplina Equações Diferenciais e Transformadas*. ISEL, 2024.