95.13 METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS

FACULTAD DE INGENIERIA

GUIA 3 – SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

PARTE A: METODOS DIRECTOS

Problema 1

Resolver el sistema lineal $A \cdot x = b$ utilizando eliminación de Gauss sin pivoteo, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{Bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{Bmatrix}$$

Problema 2

Resolver el siguiente sistema: $$\begin{bmatrix} 3.241 & 160 \\ 10200 & 1540 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 163.2 \\ 11740 \end{Bmatrix}$$

a) Utilizar el método de eliminación de Gauss sin pivoteo y aritmética de punto flotante con t=4 y redondeo simétrico.
b) Ídem a) pero con pivoteo parcial.
c) Ídem (a), sin pivoteo y con refinamiento de la solución.
d) Obtener conclusiones.

Problema 3

Resolver el siguiente sistema: $$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{Bmatrix}$$

a) Utilizar eliminación de Gauss con pivoteo parcial (observar que el sistema utiliza aritmética de punto flotante con 3 dígitos).
b) Hallar la descomposición LU de la matriz de coeficientes y utilizarla para hallar una estimación del error de redondeo, refinando la solución.

Problema 4

Dada la siguiente descomposición *LU* de Doolittle de la matriz *A* efectuada utilizando pivoteo parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \quad p = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

El vector p indica cómo fueron las permutaciones de filas. Por ej: el “2” en la primera posición indica que la segunda fila de la matriz original quedó en la primera fila.

a) Resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$ siendo $b = \{1 \quad -2 \quad 7\}^T$

b) obtener la matriz A y verificar la solución obtenida en a)

Problema 5

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{bmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{Bmatrix}$

a) Obtener la solución mediante eliminación de Gauss utilizando cuatro dígitos.
b) Efectuar el refinamiento iterativo de la solución. Recuerde utilizar doble precisión al calcular el residuo.
c) Estimar el número de dígitos significativos de la solución obtenida previamente.
d) Repetir el punto b) sin utilizar doble precisión al evaluar el residuo.
e) Obtener la solución del problema utilizando toda la precisión de una calculadora. Comparar las soluciones obtenidas y extraer conclusiones.

Problema 6

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{bmatrix} 0.003152 & -15.28 \\ -0.009413 & 45.60 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.98 \\ -44.75 \end{Bmatrix}$

a) Obtenerla solución numérica utilizando dos algoritmos: eliminación de Gauss con pivoteo parcial y eliminación de Gauss con pivoteo total.
b) Estimar el número de condición de la matriz de coeficientes.

PARTE B: METODOS ITERATIVOS

Problema 7

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales donde la matriz A no singular: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$

a) Establecer cuando el método de Jacobi diverge.
b) Demostrar que si el método de Jacobi converge el método de Gauss Seidel lo hace más rápido.
Resolver el sistema.

Problema 8

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{bmatrix} 0.01235 & -2.387 \\ 5.462 & 0.008406 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.370 \\ 10.85 \end{Bmatrix}$

a) Resolverlo por el método de Jacobi. Efectuar las modificaciones necesarias para garantizar la convergencia. Trabajar con 5 dígitos de precisión.
b) Explicar la convergencia o no de los algoritmos del punto a) en términos de la norma de la matriz de iteración.

Problema 9

Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel, iterando hasta que la máxima diferencia entre dos valores sucesivos de x, y, z sea menor que 0.02.

$$\begin{aligned} 10x + 2y + 6z &= 28 \\ x + 10y + 4z &= 7 \\ 2x - 7y - 10z &= -17 \end{aligned}$$

Problema 10

Resolver el siguiente sistema utilizando los métodos de Jacobi y Gauss Seidel:

$$\begin{aligned} a \qquad\qquad + d &= 2 \\ a + 4b \qquad - d &= 4 \\ a + \qquad c \qquad &= 2 \\ c + d &= 2 \end{aligned}$$

¿Como se comporta la solución a medida que se itera? Piense alguna explicación de este comportamiento en base al criterio de convergencia del radio espectral.

Problema 11
Considerar el sistema poco denso de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
2a - b &= 1 \\
-a + 2b - c &= 1 \\
-b + 2c - d &= 1 \\
-c + 2d &= 1
\end{aligned}
$$

"Poco denso" sugiere que la matriz tiene gran cantidad de ceros a ambos lados de la diagonal (también llamada matriz rala).
Mostrar que el sistema permanece poco denso cuando se lleva a la forma triangular utilizando el método de eliminación de Gauss. Hallar la solución por Gauss y luego por Gauss-Seidel.

Problema 12
Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
3.210\, x_1 + 0.943\, x_2 + 1.020\, x_3 &= 2.300 \\
0.745\, x_1 \qquad\qquad - 1.290\, x_3 &= 0.740 \\
0.875\, x_1 - 2.540\, x_2 + 0.247\, x_3 &= 3.390
\end{aligned}
$$

a) Efectuar, si es posible, las modificaciones necesarias para poder garantizar la convergencia utilizando el método de Gauss-Seidel.
b) Resolverlo iterando hasta alcanzar una precisión de 3 dígitos significativos. Trabajar con una precisión que garantice un error de redondeo despreciable.