75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

GUÍA DE PROBLEMAS

5. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES: INTERPOLACIÓN

1- Calcular f(3) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	1	2	4	5
f(x)	0	2	12	21

a) Tomar los puntos 1, 2 y 4 y luego los puntos 2, 4 y 5.

b) Calcular f(3) por interpolación cúbica.

c) Comparar los resultados de (a) y (b). Obtener conclusiones.

2- Calcular f(0) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	0.1	0.2	0.4	0.8
f(x)	64987	62055	56074	43609

Notar que la fórmula de interpolación se utiliza para extrapolar.

Analizar si la extrapolación es admisible.

3- Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Newton:

x	4	6	8	10
y	1	3	8	20

4- Encontrar el polinomio de grado 4 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Newton:

x	1	2	3	4	5
y	1	-1	1	-1	1

5- Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Lagrange:

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

6- Hallar los valores de $(1.01)^{1/2}$ y $(1.28)^{1/2}$, a partir de la siguiente tabla, por interpolación de Newton con 3 dígitos significativos:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$(x)^{1/2}$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1 14017

7- Encontrar un algoritmo para evaluar los coeficientes del polinomio de Newton minimizando las operaciones.

8- Calcular el sen(0.390736) conociendo la siguiente tabla:

x	sen(x)
0.390	0.380188415
0.391	0.381113134
0.392	0.382037472
0.393	0.382961427

Utilizar la fórmula de Gregory-Newton para obtener un polinomio interpolante de grado 2.

9- Hallar un polinomio Q de grado 3 tal que Q(0)=0, Q'(0)=1, Q(1)=3 y Q'(1)=6.

10- Se conocen los siguientes datos acerca de la función f(x):

f(0)=1, f(1)=2, f(2)=5, f'(0)=0 y f'(2)=4

a) Hallar el polinomio interpolante que verifica esa tabla mediante el método de Hermite.

b) Hallar la función spline de orden 2 que verifica esas condiciones.

11- Dada la siguiente tabla:

x	0	1	3
f(x)	-1.201	0.8204	2.253

a) Construir el polinomio interpolante $P_n(x)$ que surge de la fórmula de Newton. Luego reescribirlo de la forma $P_t(x)=\sum a_i\ x^i$. Redondear los coeficientes a 4 dígitos.

b) Estudiar el error por redondeo durante las operaciones que se comete al evaluar $P_n(2)$ y $P_t(2)$.

12- Aproximar los datos con un polinomio de grado 2, por cuadrados mínimos y graficar la solución.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Calcular los errores para cada dato de la tabla. Calcular el error mínimo que puede ser obtenido con un polinomio cuadrático.

Calcular el polinomio interpolante de Lagrange de grado 2, en los nodos 0, 0.5 y 1. Graficar la solución y calcular los errores para cada dato de la tabla.

Comparar los resultados obtenidos y determinar cuál solución aproxima mejor a la curva en [0,1].

Comparar los resultados obtenidos con la función $f(x) = e^x$ en los puntos 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 ; calcular los erroresy obtener conclusiones.

13- Hallar el polinomio interpolante de grado 2 para f(x)= 1/x , por medio de la fórmula de Lagrange, utilizando los nodos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$.
Graficar la curva y su aproximación. Analizar los errores para x = 0.5 y x = 1/3.

14- Cada 10 años se realiza un censo de población en los Estados Unidos.
La siguiente tabla presenta los resultados entre 1930 y 1980.

Año:	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Población en miles:	123203	131669	150697	179323	203212	226505

a) Hallar el polinomio de Lagrange de grado 5 que aproxime estos datos.

b) Hallar el polinomio de Newton de grado 5 .

c) Utilizar las aproximaciones anteriores para estimar la población en 1920, 1965 y 2000. Comparar los resultados.

d) La población en 1920 fue de 105.711 millones de habitantes. En base a este dato, indicar qué tan exactos cree usted que son sus resultados de 1965 y 2000.

15- Hallar el polimonio interpolante de Hermite de grado 5 y estimar el valor para x = 0.34 de la función f(x) = sen x .

x	0.30	0.32	0.35
sen x	0.29552	0.31457	0.34290

Determinar una cota de error para la aproximación anterior y comparar con el error real.

Agregar sen(0.33) = 0.32404 a los datos y rehacer los cálculos.

En ambos casos completar la tabla con los valores de la derivada.

16- Un coche que viaja en una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos obtenidos se dan en la siguiente tabla.

Utilice un polinomio de Hermite para predecir la posición del coche y su velocidad cuando t = 10 segundos.

Tiempo (seg)	0.00	3.00	5.00	8.00	13.00
Distancia (m)	0.00	67.50	114.90	186.90	297.90
Velocidad (m/s)	22.50	23.10	24.00	22.20	21.60

17- Se desea hallar una función polinómica para aproximar a la función $f(x) = e^x \cos x$, en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

a) Tabular f(x) en los nodos x = 0, 0.5, 1 y 2 y hallar el polinomio interpolante por el método de Newton. Trabajar con una precisión de 5 dígitos.

b) Agregar el nodo x = 1.5 para hallar una expresión aproximada para el error de truncamiento. Utilizarla para estimar el error en x = 0.1, 0.3, 0.8, 1.2, 1.5 y 1.7 .

c) Comparar los errores estimados en el punto anterior con los valores correctos, calculados como diferencia entre el valor correcto de f(x) y el obtenido por medio del polinomio interpolante.

18- Se tiene una tabla de valores de una función, es decir, $\{ x_i , f(x_i) , 1 \leq i \leq n \}$, donde la grilla es equiespaciada, $x_i = x_o + i * h$, siendo h el paso.

a) Construir una fórmula de interpolación con 3 nodos por el método de Newton.Si x es tal que $x_i \le x \le x_{i+1}$, los nodos a utilizar deben ser x_{i-1}, x_i y x_{i+1} . Expresar la fórmula final en términos de la variable $\varepsilon = (x - x_i) / h$. Obtener el término de error utilizando el nodo x_{i+2} .

b) Idem que el punto anterior, pero para una fórmula con 2 nodos, ahora no se usa x_{i-1}.
Mostrar que la relación entre los términos de error de la primera y segunda fórmula vale:

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{3}\right)\left(1-\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}\right)$$

A partir de esta expresión determinar cuándo es mayor el error de la primera fórmula que el de la segunda, suponiendo que la diferencia segunda es positiva para todo i.

19- Se tiene la función $f(x) = e^x$, de la cual se proveen los siguientes valores:

x	0.0	0.5	1.0	2.0
f(x)	1.00000	1.64872	2.71828	7.38906

a) Estimar f(0.25) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$ y $x_1 = 0.5$.

b) Estimar f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0.5$ y $x_1 = 1.0$.

c) Estimar f(0.25) y f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$, $x_1 = 1.0$ y $x_2 = 2.0$.

d) Estimar los errores de truncamiento de los cálculos realizados en los puntos a, b y c en base a la fórmula:

$$f(x) = f^*(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}\,(x - x_0) \ldots (x - x_n)$$

Compararlos con los valores "exactos" calculados a partir de los valores reales de la función f(0.25) = 1.28403 y f(0.75) =2.11700.

e) Indicar qué aproximaciones resultaron más precisas y por qué.

20- Se desea hallar una función de interpolación polinómica para aproximar la función $\operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $0 \le x \le \pi$.

a) Construir un polinomio por interpolación de Hermite en los nodos 0, $\pi/2$ y π. Garantizar una precisión de 4 decimales en los coeficientes. Estimar el error de redondeo cometido en la construcción del polinomio, en forma expeditiva.

b) Estimar el error de truncamiento cometido en 0.2, 0.5, 1 utilizando el punto extra $5\pi/4$ en la tabla de interpolación de Hermite. Compararlo con el error "exacto" (valor interpolado - valor provisto por la calculadora).

21- Se desea interpolar una spline cúbica para una función tabulada en 4 nodos. Explicar cuántas son las incógnitas y cuáles las ecuaciones que completan el planteo del problema.