

MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NÚMERICOS
DR. ING. MIGUEL ANGEL CAVALIERE - ING. DIEGO EZCURRA

Trabajo Práctico Dimensionamiento de Bomba de Desagote

× ×

14 de julio de 2024

Carmona, Alberto Alejandro - 109769
Juarez Goldemberg, Mariana Noelia - 108441
Rotondo Andrada, Rodrigo Martin - 109210

Introducción

1. Objetivo

El objetivo principal de este trabajo práctico es simular y analizar las consecuencias de una inundación en un edificio residencial con cocheras subterráneas provocada por una lluvia intensa, utilizando métodos numéricos para modelar el sistema. Específicamente, se pretende:

- Modelar el sistema de inundación utilizando el método de Euler para discretizar las ecuaciones de flujo de agua y verificar la coherencia entre el volumen de agua almacenado y el volumen de lluvia caída.
- Dimensionar adecuadamente la bomba de desagote, de manera que la altura del agua sobre el piso del sótano no exceda los 0,25 metros para ninguna de las precipitaciones consideradas, evaluando diferentes capacidades de la bomba.
- Comparar diferentes esquemas numéricos, específicamente el método de Euler y el método de Runge-Kutta de orden 2, para determinar la precisión y eficiencia de cada método en la resolución del problema.
- Analizar los errores y la estabilidad numérica asociados con las soluciones obtenidas, comprendiendo la relación entre el problema físico y su representación numérica, así como la importancia de los errores de truncamiento y redondeo, la estabilidad y la consistencia de los métodos utilizados.
- Proponer alternativas para mitigar los efectos de las inundaciones en el edificio residencial, basándose en los resultados obtenidos de las simulaciones y análisis realizados.

Este objetivo abarca el desarrollo completo del trabajo práctico, desde la modelación inicial hasta las conclusiones finales, proporcionando un marco integral para abordar la problemática planteada en la consigna.

Aclaración: Todos los cálculos realizados en el trabajo práctico se hicieron con el número de padrón 108441.

2. Propuesta

1. Modelación del sistema

- Discretizar la ec. 1 con el método de Euler, tomando $C = 1$, $Q_{sal} = 0$, correr el modelo para la precipitación de 60 min y verificar que el volumen de agua almacenado en el sótano coincida con el volumen de lluvia.
- Discretizar las ec. 1 y ec. 6 con el método de Euler, considerando C y Q_{sal} variables. Correr el modelo para todas las duraciones / intensidades de precipitación, un lapso de tiempo suficiente como para que el sótano se vacíe.

2. Dimensionamiento de la bomba

- Redimensionar la bomba adoptando un nuevo Q_{max} para que la altura de agua sobre el piso del sótano no exceda los 0,25m para ninguna de las precipitaciones de la tabla.

3. Experimentación con distintos esquemas

- Discretizar las ec. 1 y ec. 6 con el método de Runge-Kutta de orden 2, considerando esta solución como “exacta”. Correr el modelo para la precipitación de 60 min con el método de RK-2, y luego con Euler con dos pasos de tiempo distintos. Verificar que Euler es de orden 1 analizando la diferencia con la solución “exacta”. Utilizar el Q_{max} obtenido en el punto anterior.

4. Conclusiones

- Presente sus conclusiones del trabajo práctico. En particular, comente sobre la relación problema físico-problema numérico, los tipos de errores involucrados en la resolución del problema numérico, la importancia/efecto de cada uno, estabilidad y consistencia.

Datos

$$\begin{aligned}A_{terr} &= 17,32m * \frac{NP}{3000}m \\A_{sot} &= 8,66m * 8,66m \\Q_{max} &= 8 \frac{m^3}{h} \quad \text{para la bomba existente} \\ \Delta H_{max} &= 4m \\ \Delta H_{min} &= 1m \\ H_s &= 3,40m \\ C_{sat} &= 0,90 \\ C_0 &= 0,60 \\ t_k &= (1 - \frac{NP}{140000})h\end{aligned}$$

Desarrollo

3. Contenidos teóricos

3.1. Problemas de valor inicial para ecuaciones de diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar problemas en donde se presenta el cambio de una variable respecto a otra. Muchos de estos problemas requieren la solución de un problema de valor inicial, donde se busca una solución que cumpla una condición inicial específica.

En situaciones donde las ecuaciones diferenciales son demasiado complejas para una solución exacta, se emplean dos enfoques para aproximar la solución. Uno implica simplificar la ecuación para resolverla exactamente y luego, utilizar la solución de la ecuación simplificada para aproximar la solución para el problema original. En este trabajo no abordaremos esta solución. El otro enfoque, que es el utilizado en este trabajo, utiliza métodos de aproximación que ofrecen resultados más precisos y una evaluación realista del error.

Los métodos no proporcionan una aproximación continua de la solución, sino que calculan valores en puntos específicos, generalmente igualmente espaciados. A menudo se utiliza algún método de interpolación, como el método de Hermite, para obtener valores intermedios.

3.1.1. Método de Euler

El método de Euler es la técnica de aproximación más básica para resolver problemas de valor inicial. Donde el objetivo del método de Euler es obtener aproximaciones para el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \text{ con } a \leq t \leq b \text{ y } y(a) = a.$$

La aproximación no es continua a la solución $y(t)$, se generaran aproximaciones en distintos puntos denominados puntos de malla, en un intervalo determinado $[a, b]$. Este método nos servirá para encontrar una serie de puntos que serian nuestra solución aproximada. A dicha solución aproximada se le pueden calcular otros puntos mediante interpolación.

Se estipulan que los puntos están igualmente espaciados a lo largo del intervalo $[a, b]$, donde la condición queda satisfecha al seleccionar un número N tal que:

$$h = \frac{b - a}{N} \quad (1)$$

siendo los puntos de malla:

$$t_i = a + i \cdot h \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

el **tamaño de paso** queda definido como la distancia entre los puntos:

$$h = t_{i+1} - t_i \quad (3)$$

EL método de Euler, apoyándose en el teorema de Taylor, construye $w_i \approx y(t_i)$ para cada $i = 1, 2, \dots, N$. Siendo el resultante una ecuación denominada **ecuación de diferencia**, siendo esta una ecuación iterativa que permite aproximar la solución:

$$w_0 = a$$

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i) \quad (4) \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

■ Manejo de errores en el Método de Euler

Es importante destacar que la cota del error depende **linealmente del tamaño de paso h**. Pero esto no significa que disminuir el tamaño de paso proporciona una mayor precisión en las aproximaciones, porque al efectuar esta disminución, se necesitan mas cálculos por lo que se espera mayor error de redondeo.

Como se observa, es preciso seleccionar un buen h de paso para que nuestras ecuaciones devuelvan resultados lo más acertados posibles.

3.1.2. Método de Runge-Kutta de orden 2

Los métodos de Runge-Kutta mejoran la aproximación a la respuesta sin requerir determinar las expresiones de las derivadas de orden superior. Los métodos usan una corrección a la derivada tomando valores de puntos alrededor referenciado al tamaño de paso h.

La idea es escribir la aproximación de la solución del problema de valores iniciales como

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

La función φ es la función incremento o pendiente en el intervalo. Si $\varphi(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i)$ entonces tenemos el método de Euler.

Definimos:

$\varphi(t_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$ donde a_i son constantes y k_i se definen como:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2 \cdot h, y_i + q_{21} \cdot k_1 \cdot h + q_{22} \cdot k_2 \cdot h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(t_i + p_{n-1} \cdot h, y_i + q_{n-1,1} \cdot k_1 \cdot h + q_{n-1,2} \cdot k_2 \cdot h + \dots + q_{n-1,n-1} \cdot k_{n-1} \cdot h)$$

Según la cantidad de términos que tenga la función incremento φ , se definirá el orden del método.

Debemos tener en cuenta que los p_i y los q_{ij} son constantes a determinar a partir de un sistema de ecuaciones.

Nosotros estaremos trabajando con orden 2. Por lo visto en clase, los valores de las q son:

$q_1 = hf(y_n, t_n)$, siendo una aproximación de la pendiente en el punto (y_n, t_n) .

$q_2 = hf(y_n + \frac{1}{2}q_1, t_n + h)$, siendo una aproximación de la pendiente en el punto $(y_n + \frac{1}{2}q_1, t_n + h)$.

4. Modelación del sistema

4.1. Modelado de la situación 01

En el presente trabajo, hemos realizado las implementaciones de los métodos de Euler y Runge-Kutta. Para ello hemos utilizado como herramienta principal el lenguaje Python. Nos hemos servido de **Python** y de la biblioteca **Matplotlib** para la resolución de las ecuaciones diferenciales de nuestros problemas de valores iniciales.

Partiendo del siguiente sistema:

En primer lugar buscamos resolver la ecuación de conservación de masa tomando al sótano como volumen de control, siendo esta la siguiente:

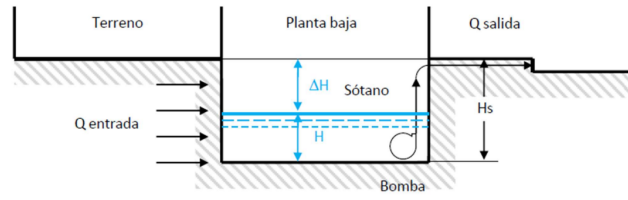


Figura 1: Esquema del modelo planteado

$$\frac{dV}{dt} = Q_{ent} - Q_{sal} \quad (1)$$

cuya condición inicial es $V_{(t=0)} = 0$ y donde $V[m^3]$ es el volumen de agua variable, $t[h]$ el tiempo, $Q_{ent}[\frac{m^3}{h}]$ el caudal de entrada del sótano y $Q_{sal}[\frac{m^3}{h}]$ caudal de salida del sótano.

El caudal de entrada viene dado por precipitaciones. La determinación del mismo se hace mediante el “método racional”, el cual establece que:

$$Q_{ent} = CIA_{terr} \quad (2)$$

Donde $C[adim]$ es el coeficiente de infiltración(variable), $I[\frac{mm}{h}]$ la intensidad de la precipitación (dato, de tabla de recurrencia) y $A_{terr}[ha]$ es el área del terreno (dato)

Siendo que el caudal de salida viene dado por la bomba de desagote, se observa que la curva característica tiene la siguiente forma:

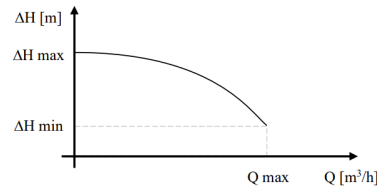


Figura 2: Curva característica de ΔH

De la cual se extraer el caudal en función de la altura de agua en el sótano:

$$Q_{sal} = Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - \Delta H}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \quad (3)$$

Donde $Q_{max}[\frac{m^3}{h}]$ es el caudal máximo que puede extraer la bomba, $\Delta H_{max}[m]$ máximo desnivel que puede extraer la bomba, entre la superficie del agua y el desagote, $\Delta H_{min}[m]$ mínimo desnivel que puede extraer la bomba, entre la superficie del agua y el desagote y $\Delta H[m]$ desnivel entre la superficie del agua y el desagote, el cual viene dado por:

$$\Delta H = H_s - H \quad (4)$$

Donde $H_s[m]$ es la altura del sótano (dato) y $H[m]$ es la altura de agua por encima del fondo del pozo (variable)

Por ultimo es preciso tener en cuenta que las variables altura y volumen se encuentran relacionadas mediante:

$$H = \frac{V}{A_{sot}} \quad (5)$$

Donde $V[m^3]$ es el volumen de agua (variable) y $A_{sot}[m^2]$ es la superficie del sótano, en planta (dato)

4.2. EDO 1

La primera discretización a realizar con el método de Euler será la de la ecuación de conservación de masa tomando $C = 1$ y $Q_{sal} = 0$. Para ello, procedemos a resolverla desarrollándola completamente y sustituyendo la expresión de la Q_{ent} en la misma.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= Q_{ent} - Q_{sal} \\ \frac{dV}{dt} &= CIA_{terr}\end{aligned}$$

Por el enunciado, sabemos que A_{terr} y C (sólo en este caso) son constantes y tenemos su valor.

Discretizamos por el método de Euler de la siguiente manera, definiendo los puntos de malla como:

$$V_{n+1} = V_n + hf(V_n) \quad (1)$$

Siendo h el tamaño de paso. Escribiendo de forma completa obtenemos:

$$V_{n+1} = V_n + h(CIA_{terr}) \quad (2)$$

4.2.1. Corroboración

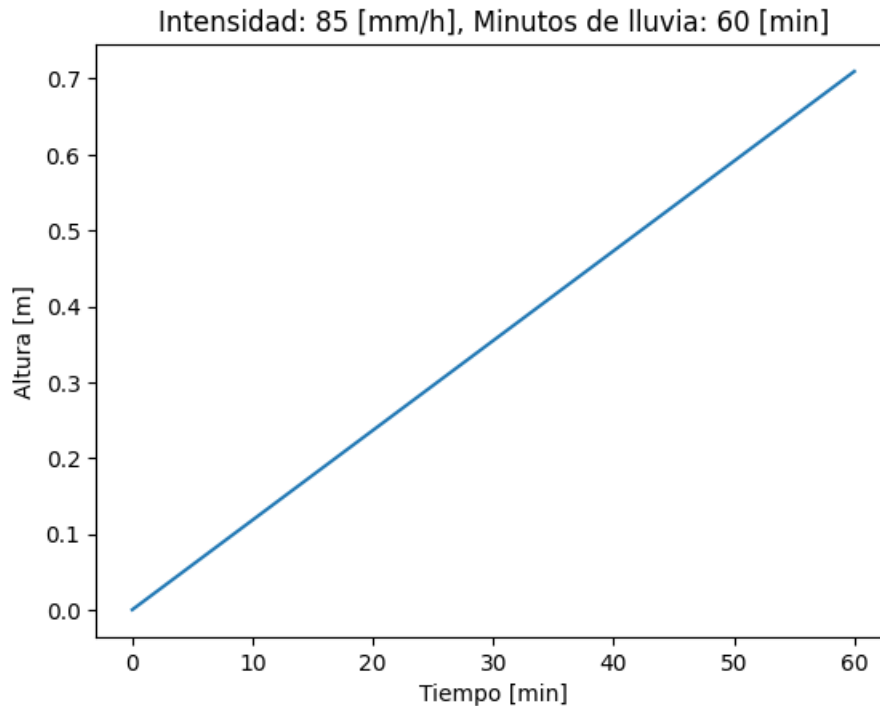
¿La discretización se realizó correctamente? Haciendo el pasaje de unidades, el resultado que deberíamos obtener para la precipitación de 60 minutos es:

Tomando en cuenta la tabla de densidades de precipitación, para una hora (60 minutos) tenemos $85mm$, sabiendo que $1mm$ equivale a $1 \frac{L}{m^2}$, trabajando con un área de $626.06m^2$ obtenemos

$$85 \text{ mm} \times 1 \frac{L}{m^2} \times 626,06 \text{ m}^2 = 53129,25 \text{ L}$$

Transformando de L a m^3 , nos da aproximadamente 53 m^3 .

Al resolver el modelo mediante nuestro código elaborado en Python se observa que nuestro resultado es acertado. Añadimos un gráfico donde se pueden observar diferentes puntos, incluyendo el pedido de 60 minutos con el respectivo volumen obtenido.



4.3. Modelado de la situación 02

El coeficiente de infiltración presente en la ec. 2 varía teóricamente entre 0 (suelo permeable) y 1 (suelo impermeable), y depende a su vez del volumen de agua almacenado en el sótano, puesto que, a mayor volumen, el suelo se satura y disminuye su capacidad de absorber agua. Asumimos que este fenómeno puede aproximarse con la siguiente expresión:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{V}{V_{tot} - t_k} \cdot (C_{sat} - C) \quad (6)$$

Cuya condición inicial es $C_{(t=0)} = C_0$, coeficiente de infiltración con el suelo seco, y donde $V_{SOT}[m^3]$ es el volumen del sótano (dato), $t_k[h]$ el tiempo característico(dato) y $C_{sat}[adim]$ el coeficiente de infiltración con el suelo saturado de agua (dato)

Siendo que las densidades de precipitación presentes en la expresión del caudal de entrada se extraen de la siguiente tabla:

Duración	5 min	10 min	15 min	30 min	60 min	3 h	6 h	12 h	24 h	72 h
Intensidad [$\frac{mm}{h}$]	241.4	190.7	162.6	119.6	85.0	41.7	26.4	16.7	10.9	5.2

Cuadro 1: Tabla de duración e intensidad de una tormenta promedio

4.4. EDO 2

La segunda discretización a realizar con el método de Euler será la de la ecuación de la variación del coeficiente de infiltración con respecto al tiempo. Será de utilidad para resolver la ecuación de conservación de masa sin considerar $C = 1$ y $Q_{sat} = 0$. Para ello, procedemos a resolverla desarrollándola completamente y sustituyendo las ecuaciones correspondientes:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{V}{V_{tot} - t_k} \cdot (C_{sat} - C) \quad (6)$$

Discretizamos por el método de Euler de la siguiente manera, definiendo los puntos de malla como:

$$C_{n+1} = C_n + hf(C_n) \quad (3)$$

Siendo h el tamaño de paso. Escribiendo de forma completa obtenemos:

$$C_{n+1} = C_n + h \left(\frac{V}{V_{tot} - t_k} \cdot (C_{sat} - C_n) \right) \quad (4)$$

Para la resolución de esta EDO es preciso definir un valor de c para nuestra primera iteración, en este caso definimos $C_{(t=0)} = C_0 = 0, 60$. Siendo que en este caso deseamos correr el modelo para todas las duraciones / intensidades de precipitación consideramos un paso = 1.

Para la resolución de esta EDO es preciso tener en cuenta los valores variables, que en este caso son el volumen de agua y el coeficiente de infiltración. Por su parte, las variables altura del sotano y volumen se encuentran relacionadas mediante la H , es decir, la altura de agua por encima del fondo del pozo (variable):

$$H = \frac{V}{A_{sot}} \quad (5)$$

Es por ello que haciendo uso de la ecuación (4) podemos reformular la ecuación (5) para reemplazarla en nuestra EDO de la siguiente forma:

$$\Delta H = H_s - H \quad (4)$$

Obtenemos de ese modo la siguiente relación:

$$V(t) = A_{sot} \cdot H(t) \quad (4)$$

4.5. EDO 3

Para esta ecuación, tomaremos C y Q_{sal} como variables, por lo tanto, debemos incluir la discretización del coeficiente de infiltración dentro de la ecuación de variabilidad del volumen.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= Q_{ent} - Q_{sal} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{dC}{dt} I A_{terr} - Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - \Delta H}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{dC}{dt} I A_{terr} - Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - (H_s - H)}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{dC}{dt} I A_{terr} - Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - (H_s - \frac{V}{A_{sot}})}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \\ \frac{dV}{dt} &= \left(C_n + h \left(\frac{V}{V_{tot} - t_k} \cdot (C_{sat} - C_n) \right) \right) I A_{terr} - Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - (H_s - \frac{V}{A_{sot}})}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \end{aligned}$$

Realizamos la discretización de la ecuación resultante:

$$V_{n+1} = V_n + hf(V_n)$$

Siendo h el tamaño de paso. Escribiendo de forma completa obtenemos:

$$V_{n+1} = V_n + h \left(\left(C_n + h \left(\frac{V_n}{V_{tot} - t_k} \cdot (C_{sat} - C_n) \right) \right) I A_{terr} - Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - (H_s - \frac{V_n}{A_{sot}})}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \right)$$

Realizamos un modelo donde simulamos para todas las intensidades de precipitaciones, el volumen máximo de llenado del sótano con sus respectivos tiempos de vaciado producido por la bomba. Recopilamos los tiempos de vaciado correspondientes a cada intensidad en el siguiente cuadro:

Duración [min]	5	10	15	30	60	180	360	720	1440	4320
Intensidad [$\frac{mm}{h}$]	241.4	190.7	162.6	119.6	85.0	41.7	26.4	16.7	10.9	5.2
Volumen máximo [m^3]	7.25	11.34	14.39	20.82	29.06	40.1	45.86	44.33	28.24	0
Tiempo de vaciado [min]	123	190	240	346	487	746	996	1338	1857	0

Nuestros valores parecen tener sentido, ya que la bomba de agua no se encuentra siempre trabajando en su máxima capacidad durante todo vaciado del sótano, ya que depende del volumen a sacar.

5. Dimensionamiento de la bomba

5.1. Dimensionamiento de la bomba

Siendo que $H[m]$ es la altura de agua por encima del fondo del pozo, nos piden $H < 0,25$ para todas las precipitaciones de la tabla, donde debemos definir un nuevo Q_{max} para cumplir dicha condición.

$$H = \frac{V}{A_{sot}}$$

$$\frac{V}{A_{sot}} < 0,25$$

$$V < 0,25 \cdot A_{sot}$$

Siendo $A_{sot} = 8.66m * 8.66m$.

$$V < 0,25 * 8,66m * 8,66m = 18,7489m^2$$

Usamos el valor límite de $V = 18,7489m^2$ en la discretización de la ecuación de conservación de masa (referida como ecuación 1), de modo que podamos buscar a partir de esa función el superlativo del caudal máximo que podrá extraer la bomba. Utilizando el coeficiente de infiltración más pesimista, es decir $C = 0.90$ que representa cuando el suelo se encuentra saturado maximizando el caudal entrante.

De esta manera, iteramos en la implementación hasta encontrar la menor Q_{max} de la bomba que extrae el agua debajo de ese umbral.

El resultado final encontrado para redimensionar la bomba de agua es:

$$Q_{max} = 28,6 \frac{m^3}{h}$$

Luego del resultado, realizamos una búsqueda para verificar que el resultado obtenido sea coherente con bombas de agua presentes en el mercado.

5.1.1. Representación del peor caso

Hemos realizado un gráfico con el peor caso de precipitación, es decir, la mayor intensidad por un período de tiempo de 1 hora.

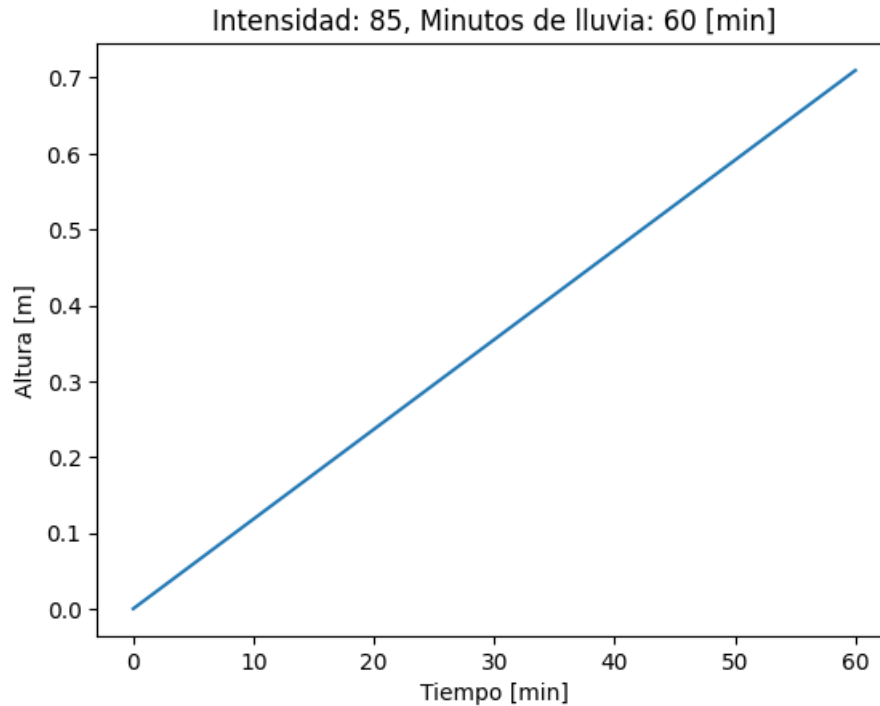


Figura 3: Gráfico

6. Experimentación con distintos esquemas

Realizaremos la discretización con el método de Runge-Kutta de orden 2 y realizaremos una comparación con el método de Euler que hemos utilizado anteriormente.

6.1. Discretización con Runge-Kutta de orden 2

6.1.1. EDO 1

Realizamos la discretización de la ecuación con $Q_{sal} = 0$ y $C = 1$. Obtuvimos el valor $53,21m^3$ para la intensidad de $85[mm/h]$ y 60 minutos de duración.

6.1.2. EDO 2

La segunda discretización a realizar será la de la ecuación del volumen respecto al coeficiente de infiltración. Para ello, procedemos a resolverla desarrollándola completamente y sustituyendo las ecuaciones correspondientes:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dC}{dt} I A_{terr} - Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - (H_s - \frac{V}{A_{sot}})}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}}$$

Discretizamos por el método de Runge Koutta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}q_1 &= hf(V_n, C_n, t_n) \\k_1 &= hf(V_n, C_n, t_n) \\q_2 &= hf(V_n + \frac{1}{2}q_1, C_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + h) \\k_2 &= hf(V_n + \frac{1}{2}q_1, C_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + h)\end{aligned}$$

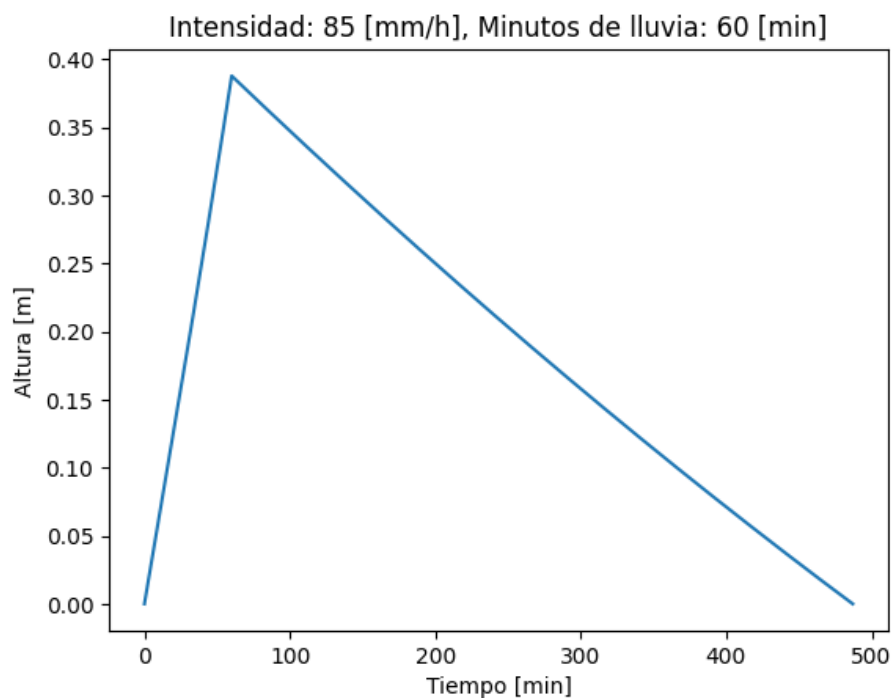
Para la resolución de esta EDO es preciso definir un valor de C y V para nuestra primera iteración, en este caso definimos $C_{(t=0)} = C_0 = 0,60$ y $V_{(t=0)} = V_0 = 0m$.

7. Gráfico de los resultados obtenidos

7.1. Método de Euler

A continuación, añadiremos gráficos que hemos realizado para analizar los valores obtenidos, para la intensidad de los 60 minutos, con la discretización obtenida a partir del método de Euler.

Los gráficos a la izquierda muestran la evolución de la altura en función del tiempo e intensidad de precipitación y los de la derecha, la evolución del volumen.

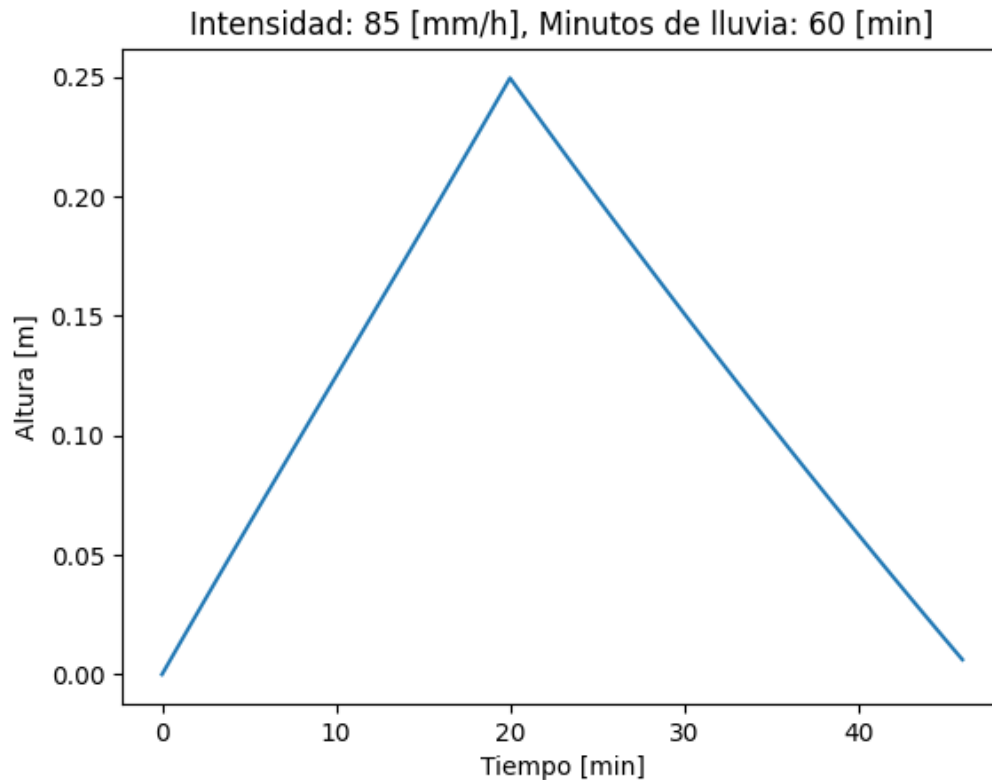


En el método de Euler ejecutando con los mismos pasos de 0.1 y 0.05 obtuvimos los resultados:

Paso	Resultado [m^3]
0.1	39.55672820340513
0.05	18.8349964759229

7.2. Método de Runge-Kutta de orden 2

De la misma manera, realizamos los gráficos con este método para cada intensidad y su respectivo tiempo de duración de precipitaciones.



Con los pasos 0.1 y 0.05 donde obtuvimos en ambos un volumen de:

Paso	Resultado [m^3]
0.1	18.70987177317238
0.05	18.714926795439442

7.3. Análisis de orden del Método de Euler

Dadas las comparaciones realizadas, tomando como valores *exactos* las aproximaciones realizadas por el método de Runge-Kutta de orden 2, y lo comparamos con las del método de Euler, siendo que este de forma teórica es de orden 1, observamos que reducir el paso (por ejemplo, de 1 hasta 0.05) produce un acercamiento mucho más preciso a la solución que hemos tomado como exacta.

Siendo que, notablemente se reduce el error de truncamiento de forma lineal a medida que disminuimos el valor del paso, concluimos que el método es de orden 1.

7.4. Discretización con Runge-Kutta de orden 4

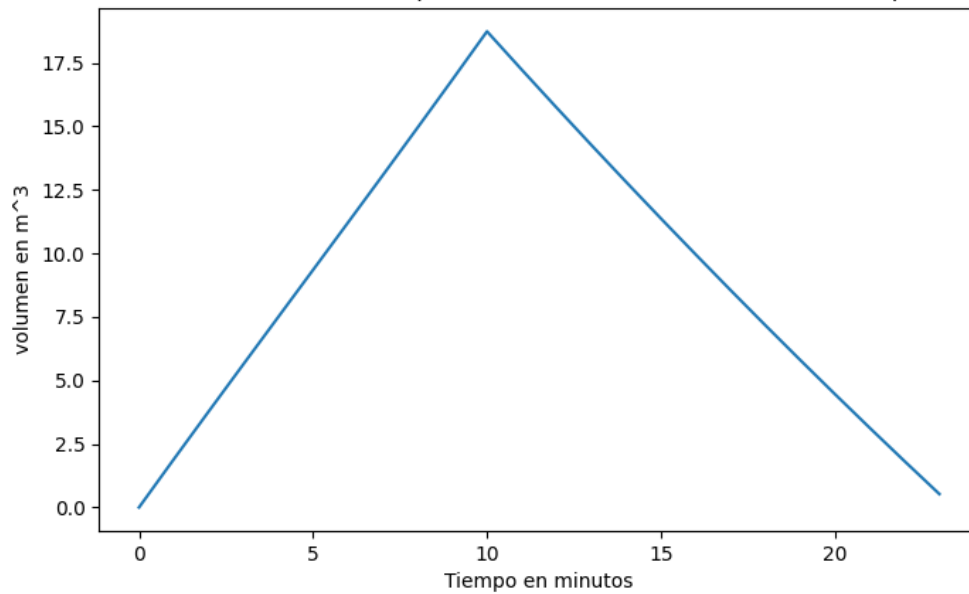
Decidimos, aunque no fuese parte de la consigna del trabajo, realizar la discretización en método de Runge-Kutta de orden 4.

Arrojando para los 60 minutos el resultado:

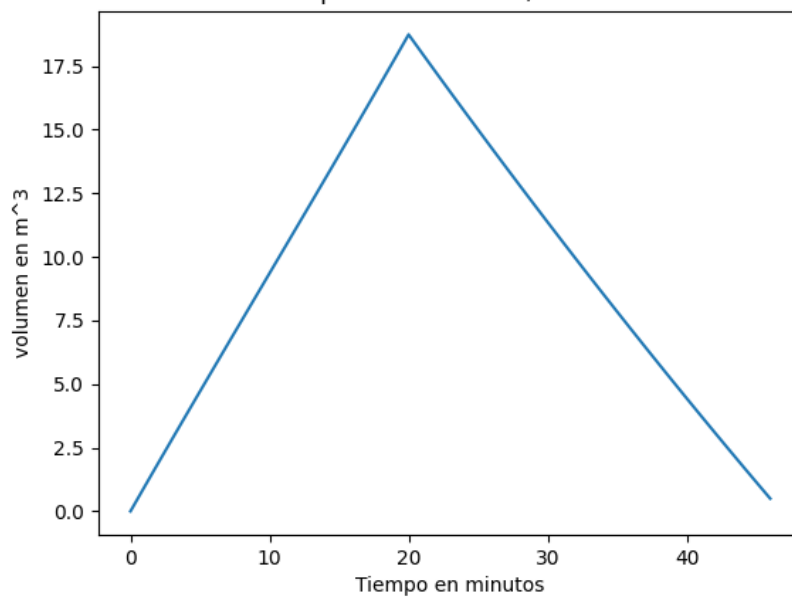
Paso	Resultado [m^3]
0.1	18.742886276937032
0.05	18.73232726506707

Con los gráficos:

Volumenes variando en tiempo intensidad: 85, minutos de lluvia: 60 paso: 0.1



Volumenes variando en tiempo intensidad: 85, minutos de lluvia: 60 paso: 0.1



Observaciones

8. Conclusiones

A partir del desarrollo que hemos realizado para este trabajo práctico, logramos la resolución de un problema con aplicaciones reales en la ingeniería aplicando métodos numéricos y estudiando su resultado, significado físico y su medida de eficiencia.

Hemos simulado cómo diferentes intensidades de precipitaciones dadas en un determinado tiempo construyen el problema a solucionar, teniendo valores, tanto constantes como variables, de caudal de salida y coeficiente de infiltración del suelo.

Siendo la primera aproximación realizada con el método de Euler, observamos que es un enfoque sencillo y directo para la integración de EDOs. Su principal ventaja reside en su simplicidad y facilidad de implementación, lo que lo convierte en una herramienta útil para problemas donde se requiere una aproximación rápida y sencilla. Sin embargo, esta simplicidad tiene un costo en términos de precisión y estabilidad. Debido a su naturaleza de primer orden, el método de Euler acumula errores más rápidamente, lo que puede llevar a soluciones inexactas en problemas donde la solución cambia rápidamente o es muy sensible a los cambios iniciales.

Por otro lado, el método de Runge-Kutta ofrece una mejora significativa en términos de precisión y estabilidad. Si bien es más complejo y computacionalmente más costoso que el método de Euler, esta complejidad adicional se traduce en una reducción notable del error global, que es proporcional a h^2 en lugar de h . El método RK utiliza una estimación intermedia para ajustar mejor la pendiente de la solución, lo que le permite manejar variaciones rápidas y comportamientos complejos de manera más eficaz.

Similar a la comparación entre los métodos de bisección y Newton-Raphson, la elección entre Euler y RK dependerá de los requisitos específicos del problema y los recursos disponibles. En resumen, el método de Euler es adecuado para aplicaciones rápidas y simples, pero para obtener soluciones más precisas y estables, especialmente en problemas donde la exactitud es crucial, siendo nuestro caso el de la elección de una bomba extractora de agua, el método de Runge-Kutta es una mejor opción.

Por otro lado, se procedió a realizar una simulación adicional utilizando el método de Runge-Kutta 4 con el objetivo de comparar la variación del error obtenido respecto al método de Runge-Kutta 2. La razón de seleccionar el método de Runge-Kutta 4 radica en su capacidad para optimizar la precisión, ya que mejora significativamente la exactitud en comparación con el método de segundo orden. Se observó que, la precisión del método de cuarto orden es superior. Al realizar un análisis comparativo entre los resultados obtenidos mediante el método de Runge-Kutta 4, los de Runge-Kutta 2 y los obtenidos mediante el método de Euler, se observa claramente la diferencia en los errores. Esta diferencia indica que el método de Runge-Kutta 4 proporciona una aproximación mucho más precisa en comparación con el método de Euler. Por lo tanto, concluimos que el método de Runge-Kutta 4 es más preciso que el 2

En conclusión, el método de Runge-Kutta de cuarto orden proporciona una simulación mas acertada, siendo esto lo optimo para representar un modelo de la vida real.

Además, dada esta posibilidad de virtualización del problema, hemos podido maximizar el caudal de extracción de la bomba sin necesidad de probar con diferentes bombas de forma manual, lo cual desagiliza y aumenta el costo del proceso. Para mitigar los efectos de las inundaciones en el edificio residencial, proponemos la compra de una bomba de agua con una capacidad ligeramente menor a $28.6 \text{ m}^3/\text{h}$. Basándonos en datos estadísticos sobre las precipitaciones en Buenos Aires, incluyendo intensidades y duraciones promedio, esta bomba mayor garantizaría que el nivel del agua en el sótano no exceda los 0.25 metros. Este nivel es considerado seguro y evitaría daños a los motores de los vehículos estacionados.

Comparando los resultados obtenidos, vemos que con Runge-Kutta nos dió mínimamente menos que en Euler, y como habíamos encontrado la menor bomba que cumplía con los requisitos (0.25m de altura) deberíamos volver a redimensionar la bomba para que cumpla con lo pedido, debido a

que sabemos que Runge-Kutta es más preciso.

9. Bibliografía

- Burden, R. L., Faires, D. J., Burden, A. M. (2015). Análisis Numérico (10th ed.). Cengage Learning. ISBN 978-607-526-411-0.