95.13 METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS

FACULTAD DE INGENIERIA

GUIA 6 - PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

Operador de derivada **primera** de orden de **precisión 1** para una variable *u*: $u_i = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$

Operador de derivada **primera** de orden de **precisión 2** para una variable *u*: $u_i = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$

Operador de derivada **segunda** de orden de **precisión 2** para una variable *u*: $u_i = \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$

Problema 1

Dado el siguiente problema de valores de contorno en el dominio [0, π/2]:

$$y'' + y = 0 \qquad \text{con} \qquad \mathrm{y}(x=0) = 1 \;,\; \mathrm{y}(x=\pi/2) = 0$$

a) Dejar expresado en forma genérica el sistema de ecuaciones lineales que surge de aplicar el método de diferencias finitas de forma tal que el error de discretización sea de orden 2 (asumir que el dominio se discretiza en N partes iguales).
b) Calcular la solución aproximada en x=π/4 usando N=2 y N=4.
c) Sabiendo que la solución analítica del PVC planteado es $y = \cos x$ verificar experimentalmente el orden del error de truncamiento correspondiente al valor de x analizado en el punto b).

Problema 2

Dado el siguiente problema de valores de contorno definido en el dominio [0,2]:

$$-2y'' + y = e^{-0.2x} \qquad \text{con} \qquad \mathrm{y}(0) = 1 \qquad \mathrm{y}'(2) = 0$$

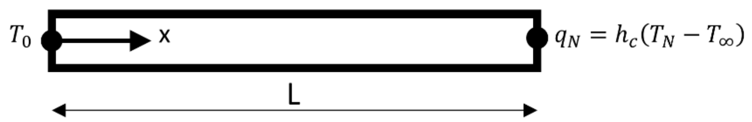
a) Plantear en forma genérica las ecuaciones resultantes (sistema de ecuaciones lineales) cuando el dominio se discretiza en N intervalos de igual longitud.
b) Calcular la solución aproximada para el caso de N=2.

Problema 3

Una barra de longitud L y conductividad térmica K genera calor a través de una fuente interna $R(x)$ e intercambia calor a través de sus extremos. La ecuación diferencial asociada para la transferencia de calor estacionaria a lo largo de la barra es la siguiente:

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + R(x) = 0 \qquad \text{para} \quad 0 < x < L \quad \text{y} \quad R(x) = 1 + x$$

El extremo izquierdo de la barra se encuentra a una temperatura T_0, mientras que el derecho tiene un flujo de calor q_N proporcional a la diferencia de temperatura entre la temperatura del extremo derecho T_N y la temperatura ambiente T_∞:



a) Discretizar el problema utilizando diferencias finitas con operadores centrados y dejar indicada la forma de calcular la solución para N intervalos (N+1 nodos equiespaciados).
b) Estimar la temperatura en la mitad de la barra y en el extremo derecho con el mínimo esfuerzo de cálculo. Utilizar los siguientes datos: *L=2m* *K=1W/(m°C)* T_0*=10°C* h_c*=1W/m²°C* T_∞*=5°C*
c) En base a los resultados del ítem b) estimar posibles valores del flujo de calor en cada extremo. Indicar el orden de precisión de cada estimación realizada.

Recuerde que la definición de flujo de calor en una dimensión para un determinado punto es: $q = -K\frac{\partial T}{\partial x}$

Problema 4

El problema térmico unidimensional estacionario expresado de la siguiente forma: $\frac{d}{dx}\left(k(x,T)\frac{dT}{dx}\right) = 0$ corresponde a casos muy generales donde la conductividad térmica puede variar con la posición y/o la temperatura. Dada una barra de largo *L* con temperaturas en sus extremos T_0 y $T_L=2T_0$.

a) Plantear una discretización numérica con operadores de segundo orden y N=2 intervalos para el caso en que la conductividad térmica es solamente función de la posición según la forma $k(x) = \ln x$

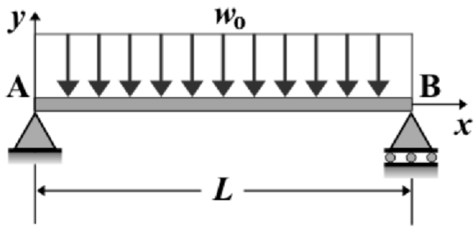
b) Plantear una discretización numérica con operadores de segundo orden y N=2 intervalos para el caso en que la conductividad térmica es solamente función de la temperatura según la forma $k(T) = \ln T$

Indicar para ambos ítems si la resolución corresponde a un problema lineal o no lineal. Si es posible, dar una expresión para la temperatura en la mitad de la barra en términos de T_0 y L. Si no es posible la expresión, indique como procedería para lograr un resultado.

NOTA: recuerde aplicar las reglas de derivación del producto y cadena en caso que sea necesario.

Problema 5

La ecuación diferencial que resuelve la deflexión*"v(x)"* en una viga (desplazamiento vertical en cada punto debido a una acción externa) está dada del siguiente modo: $\frac{EIv''}{(1+v'^2)^{3/2}} = M(x)$



donde *M(x)* es el momento flector a lo largo de toda la barra, *E* es el módulo de Young e *I* es el momento de inercia de la sección transversal a la barra (ambas constantes positivas). Para una viga simplemente apoyada con una carga distribuida w_0 el momento flector vale: $M(x) = \frac{w_0 x(L-x)}{2}$ y las condiciones en las fronteras son $v_A = v(x=0) = 0$ y $v_B = v(x=L) = 0$ (es decir desplazamientos verticales nulos).

a) Calcular las deflexiones en los puntos x_1=L/3 y x_2=2L/3 suponiendo que las deformaciones son pequeñas. Esto implica que el termino v'^2 se aproxime a 0. Considerar L=1m y w_0/EI=10 [1/m^3].

b) Recalcular las deflexiones en ambos puntos sin la suposición de pequeñas deformaciones. Indique claramente todas las herramientas usadas para dicha resolución.

NOTA: Observe que el problema tiene simetría respecto de la mitad de la barra.

Problema 6

Sea el problema: $0.1u'' + u' + u = 0$ $0 \leq x \leq 1$ con $u(0) = 1$ $u(1) = 1$

a) Hallar la solución numérica por diferencias finitas con paso h=0.25. Resolver el sistema resultante y graficar la solución obtenida. Para la derivada primera utilizar el operador centrado.

b) Resolver nuevamente pero con un operador de derivada primera descentrado. Graficar la solución obtenida.

c) Siendo la solución analítica u(x) = 3,08777 (e –1,12702 x - e –8,87298 x), comparar y comentar sobre los resultados obtenidos.

Problema 7

El problema de transferencia de calor estacionario en una barra de sección A variable responde a la siguiente ecuación diferencial

$$kA\frac{d^2T}{dx^2} + k\frac{dA}{dx}\frac{dT}{dx} + Q = 0$$

donde T es la temperatura en K y A(x)=0.25m^2 + x 0.2 m. La coordenada longitudinal x se mide en metros mientras que k=100 W/Km y Q=10 W/m (conductividad térmica y fuente de calor respectivamente). Considerar que la barra tiene 1.5 m de longitud y que en el extremo izquierdo (x=0) la temperatura es de 40K y en el otro extremo es adiabático con lo cual existe flujo de calor saliente ni entrante (q=-k.dT/dx=0).

a) Plantear la resolución por el método de diferencias finitas centradas para un número de intervalos N y N+1 nodos equiespaciados.

b) Calcular la distribución de temperaturas considerando un espaciamiento uniforme Δx=0.5 m.