95.13 METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS

FACULTAD DE INGENIERIA

GUIA 5 – PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Método de *Euler Explícito* para una variable discreta *u*: $u_{n+1} = u_n + h\,f(u_n, t_n)$

Método de *Euler Implícito* para una variable discreta *u*: $u_{n+1} = u_n + h\,f(u_{n+1}, t_{n+1})$

Método de *RK2* para una variable discreta *u*:

$$q_{1u} = h\,f(u_n, t_n)$$
$$q_{2u} = h\,f(u_n + q_{1u}, t_{n+1})$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_{1u} + q_{2u})$$

Método de *RK4* para una variable discreta *u*:

$$q_{1u} = h\,f(u_n, t_n)$$
$$q_{2u} = h\,f\left(u_n + \frac{1}{2}q_{1u}, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$q_{3u} = h\,f\left(u_n + \frac{1}{2}q_{2u}, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$q_{4u} = h\,f(u_n + q_{3u}, t_{n+1})$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(q_{1u} + 2q_{2u} + 2q_{3u} + q_{4u})$$

Problema 1

Dada la ecuación diferencial: $y' = -y + t + 1$ con $\mathrm{y}(0) = 1$

a) Discretizar la ecuación por el método de *Euler Explicito* (esto implica llegar a la forma recursiva).
b) Calcular u(t=1) con un solo avance (h=1)
c) Calcular u(t=1) con 2 avances (h=0.5).
d) Calcular el error en t=1 para los casos b) y c) sabiendo que la solución exacta es: $y(t) = t + e^{-t}$
e) Compare los valores obtenidos y obtenga conclusiones.

f) Discretizar la ecuación por el método de *Runge Kutta de orden 2*.
g) Calcular u(t=1) con un solo avance.
h) Calcular u(t=1) con 2 avances
i) Calcular el error en t=1 para los casos f) y g)
j) La relación entre los errores para h=0.5 y h=1 es la misma para *Euler* y para *RK2*?

k) ¿Cómo calcularía u(t=4)?¿Qué sucede si utiliza h=4?

Problema 2

Dada la siguiente ecuación diferencial: $\frac{du}{dt} + e^u = 0$ con $u(t = 0) = 0$

a) Discretizarla por el método de Euler Implícito.
b) A partir de la expresión hallada en a) estimar (t = 1) avanzando un solo paso (h = 1). Para la resolución utilizar un método iterativo de convergencia cuadrática, asegurando 2 decimales correctos. ¿Qué semilla convendría elegir para el arranque del método? Justifique.
c) Si la discretización de la ecuación diferencial se realiza con el método de Euler (explicito) determinar si es correcto utilizar el mismo paso que en b) para el primer avance. Justifique.

Problema 3

Dada la siguiente ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dt^2} = a$ y sus condiciones de borde: $y(t = 0) = 0$ $\frac{dy}{dt}(t = 0) = b$
(a y b son números reales conocidos)
a) Discretizarla por el método de *Runge Kutta de orden 2*.
b) A partir de la discretización del ítem a), obtener una estimación para $y(t = 1)$ en términos de *a* y *b* con *h=1*. Obtenga conclusiones sobre la solución obtenida.

Problema 4

Dada la siguiente ecuación diferencial: $\frac{d^2u}{dt^2} + au = t^2$

y sus condiciones de borde: $u(t = 0) = 1$ $\frac{du}{dt}(t = 0) = 0 \ (a > 0)$

a) Discretizarla por el método de *Euler Implícito*. Dejar expresado el sistema de ecuaciones correspondiente que resulta de la discretización.

b) Para el sistema hallado en el ítem a) indicar las condiciones que aseguran la convergencia por el método de *Jacobi*.

c) Para el caso $a = 1$, estimar $u(t = 2)$ y $\frac{du}{dt}(t = 2)$ por el método de *Jacobi*. Realizar 2 iteraciones y expresar el resultado con una adecuada cota de error. Elegir una semilla adecuada para el arranque y un paso de cálculo que garantice la estabilidad y minimice el esfuerzo de cálculo. Justificar ambas elecciones.

d) Si la ecuación diferencial hubiera sido: $\frac{d^2u}{dt^2} + au^4 = t^2$
Explicar (no calcular) como se modifica la resolución del problema y que consideraciones son necesarias para resolverlo.

Problema 5

Dada la ecuación diferencial: $\frac{du}{dt} + t.\mathrm{u} = 0$ y su condición inicial: $u(t = 0) = 1$

a) Hallar la condición de estabilidad al discretizarla por el método de Euler Explicito.
b) Si se quisiera estimar la solución para todo t entre [0,+∞], ¿existe algún paso h a aplicar que garantice la estabilidad? Explique acorde a la expresión obtenida en el ítem a).
c) Discretizar la ecuación diferencial por el método de Runge Kutta de Orden 2.
d) Dar una estimación para $u(t = 0.2)$ con alguno de los métodos anteriores, de forma que garantice un orden de precisión 2 con el mínimo esfuerzo de cálculo. ¿Qué suposición debe realizar para considerar confiable la solución calculada?

Problema 6

El intercambio de calor por convección entre un sólido y su entorno está dado por la ley de conservación de energía:

$$-mC\frac{dT}{dt} = h_cS(T - T_\infty) \qquad \text{con la condición inicial:} T(t = 0) = T_0$$

Donde:

m	[kg]	masa del sólido
C	[J/kg K]	calor especifico del sólido
T	[K]	temperatura del solido
t	[s]	Tiempo
hc	[W/ m^2 K]	coeficiente de convección
S	[m^2]	área de intercambio de calor por convección/radiación
T□	[K]	temperatura del entorno

a) Discretizar la ecuación diferencial por el método de Euler explicito para el caso:

$$\frac{mC}{hc\,S} = 1 \qquad T_\infty = 20°C \qquad T_0 = 40°C$$

Comparar resultados con la solución exacta.

b) Discretizar nuevamente por Euler teniendo en cuenta el término radiativo (es decir incluir la transferencia de calor por radiación):

$$-mC\frac{dT}{dt} = h_cS(T - T_\infty) + \sigma\varepsilon S(T^4 - T_\infty^4)$$

¿Tiene solución exacta esta ecuación diferencial? ¿Es lineal?

c) Si aparte se quiere tener en cuenta en el modelo una variación de la temperatura ambiente con el tiempo $T_\infty(t)$, y la variación de la capacidad calorífica con la temperatura $C(T)$, se complejiza la implementación el método numérico?

Problema 7
Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 \qquad \frac{du_2}{dt} = -u_1 \qquad t > 0 \qquad u_1(0) = a \qquad u_2(0) = b$$

Problema 8
Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} u' + u \cdot v = 0 \\ v' + v^2 = 0 \end{cases}$$

$$u(0) = a \,,\; v(0) = 1 \,,\; a = \text{constante}$$

Demostrar que si se discretiza el sistema por el método de Euler, la estabilidad numérica está sujeta a la restricción $k \leq 1/v$.

Problema 9
Sea el problema rígido

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 1001 \cdot \frac{du}{dt} + 1000 \cdot u = 0 \qquad u(0) = 1 \qquad u'(0) = -1$$

a) Convertir la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizarlo mediante Euler Explicito.
b) Hallar la condición de estabilidad del problema numérico planteado, es decir, el valor de k_{max} tal que $k<k_{max}$.
c) Con las condiciones iniciales dadas, la solución del problema es $u(t) = e^{-t}$, es decir que solo está activa la componente lenta. Mostrar que con $k>k_{max}$ cualquier perturbación dispara la componente rápida que se amplifica tornando inestable el cálculo.

Problema 10
Dada la siguiente ecuación diferencial: $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u = t$ con sus condiciones: $u(t = 0) = 1 \quad \frac{du}{dt}(t = 0) = 1$

a) Se desea estimar (t = 2) por el método de *Euler Implícito* con el mínimo esfuerzo de cálculo. Dejar expresado el sistema de ecuaciones resultante, indicando si es lineal o no lineal y justificar la elección del h utilizado en la discretización. (no realizar el cálculo de u en este ítem).
b) Calcule (t = 2) según la discretización de a). Si el sistema expresado en a) es lineal, resuélvalo por eliminación de Gauss sin pivoteo. En caso contrario utilice Newton-Raphson.
c) Justifique si la resolución de b) hubiera sido posible hacerla por el método de Jacobi. En caso negativo Explique qué parámetro modificaría para hacerlo posible.
d) Explique si la estimación de b) tiene errores de tipo inherentes, de redondeo y/o truncamiento. Indique en cuales etapas de la resolución se introduce cada error.
e) Estimar (t = 2) y $u'(t = 2)$ por el método de RK2 con el mínimo esfuerzo de cálculo. Comente si debe realizar alguna suposición para que la estimación sea adecuada.
f) Discretice la ecuación por el método de Euler Explicito y realice un análisis de estabilidad de la solución. Desarrolle hasta obtener la ecuación que relaciona los autovalores $\lambda 1$ y $\lambda 2$ con el paso h. No despeje h. A partir de allí, solamente explique cuáles serían las condiciones sobre $\lambda 1$ y $\lambda 2$ que tienen que cumplirse para que la solución sea estable.