95.13 METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

GUÍA 7: ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

PROBLEMA 1

Dada la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales que corresponde a un problema de transferencia térmico transitorio de una barra de longitud L=3m que se encuentra inicialmente a una temperatura constante igual a 500 K. En el instante t=0 los extremos se ponen en contacto con hielo (T=273).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 5\,\frac{m^2}{s}\;\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

a) Plantear un esquema de solución a través del método de separación de variables.
b) Plantear un esquema de solución de tipo explícito a través del método de diferencias finitas tomando Δx=0.5m y Δt=0.01s y avanzar dos pasos temporales la solución.

PROBLEMA 2

Dada la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$

a) Resolverla en dos dimensiones y coordenadas cartesianas por el método de separación de variables para una placa de lados a y b sujeta a las siguientes condiciones de borde:

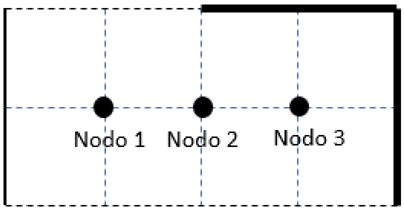
$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0$$
$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

b) Plantear el esquema numérico de diferencias finitas para el caso a=b con pasos iguales en ambas direcciones y un total de 16 nodos (4x4). ¿Cuántas incógnitas tiene el sistema resultante?
c) Indicar como se modifica el sistema obtenido en b) si en lugar de $u(x,0)$ se tuviera como dato $u_y(x,0)$.

PROBLEMA 3

3) La distribución de temperaturas $u(x,y)$ de una placa homogénea en la cual se conocen las temperaturas en el contorno satisface la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

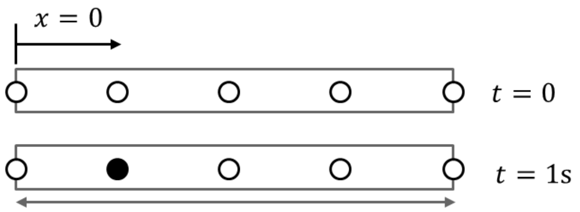


La placa tiene 2 cm x 4 cm. En los contornos donde la línea es gruesa la temperatura vale 50°C y en donde es fina 10 °C. En los contornos punteados la temperatura varía linealmente.

a) Resolver numéricamente utilizando el método de diferencias finitas centrado tomando un paso tal que permita calcular las temperaturas en los nodos indicados en la figura. Para ello deberá resolver el sistema de ecuaciones lineales planteado usando el método de eliminación de Gauss.
b) En caso de querer resolver un problema similar mediante el método de separación de variables plantear dicha resolución simplificando las condiciones de borde todo lo que sea necesario.

PROBLEMA 4

Considerar un dominio unidimensional en el cual es válida la ecuación diferencial en derivadas parciales $u_t=u_{xx}$.

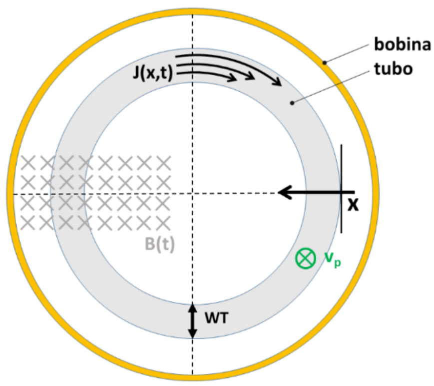


a) Suponiendo conocidas las condiciones iniciales y la solución *u* en los bordes indicar como se puede aproximar la solución *u* en el nodo negro con un esquema explícito de diferencias finitas centradas para la variable *x* con nodos equiespaciados.
b) Indicar si es necesario que los pasos espacial y temporal estén relacionados entre sí.
c) ¿Qué orden de precisión se espera que tenga la solución?
d) En el caso de utilizar un esquema implícito para la variable temporal, explicar cómo cambia la metodología.

PROBLEMA 5

5) *El siguiente problema corresponde a un trabajo práctico evaluado anteriormente. Los ítems b), c) y d) deberán realizarse con un programa computacional*.

La figura muestra la vista de frente de un tubo de acero de espesor *WT* sometido a un campo magnético variable en el tiempo. La consecuente fuerza electromotriz induce una densidad de corriente *J(x,t)* en la dirección tangencial del tubo, disipando calor por efecto Joule y elevando la temperatura del tubo. Este fenómeno es conocido como *calentamiento por inducción* y es altamente utilizado en la industria metalúrgica.



Despreciando la curvatura del tubo, la ecuación diferencial asociada a la transferencia de calor en el tubo se puede expresar de la siguiente manera:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + J(x,t)^2 \rho_E$$

Donde:

ρ	[kg/m^3]	densidad del solido
C	[J/kg K]	capacidad calorífica del sólido
T	[K]	temperatura del solido
t	[s]	tiempo
λ	[W/ m K]	conductividad térmica
x	[m]	coordenada asociada a la dirección radial del tubo
J	[A/m^2]	densidad de corriente
ρ_E	[Ωm]	resistividad del solido

Cada sección del tubo se traslada en la dirección *z* (saliente a la hoja) pasando por diferentes instancias de calentamiento. Las condiciones de borde son de tipo Neumann tanto para el radio interno como el externo. La temperatura ambiente $T_{□}$ y los coeficientes de convección interno h_{int} y externo h_{ext} son conocidos, de forma tal que:

$$q_{int} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=WT} = h_{int}(T - T_\infty)$$

$$q_{ext} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -h_{ext}(T - T_{\infty})$$

La fuente electromagnética se caracteriza mediante una exponencial decreciente con el espesor según la constante conocida *"s"* (skin):

$J(x,t) = J_0 e^{-x/s}$ → durante el pasaje por una bobina

Esta fuente estará presente mientras la sección del tubo esté pasando por el interior de una bobina. En cada descanso (separación entre bobinas) deberá "apagarse" esta fuente, siendo su valor:

$J(x,t) = 0$ → durante el pasaje por un descanso

a) Discretizar la ecuación diferencial por el método de *Euler explícito*. Encontrar, si existe, alguna condición para los avances espacial y temporal en referencia a poder obtener una solución consistente y estable.

b) Calcular la temperatura *T(x,t)* en función del tiempo *t* y la posición radial *x* para una configuración de 6 bobinas inter-espaciadas de largo L_b y descanso L_d. Resolverlo con una discretización espacial de al menos 10 intervalos. Mostrar en una tabla los resultados del comienzo y final de la evolución temporal (entre 20 y 30 filas).

Utilizar los siguientes datos:

Propiedades del acero	ρ	7850 kg/m^3
	C	550 J/kg K
	k	35 W/mK
	ρ_E	6. 10^{-7} Ωm
Geometría del material	*WT*	30 mm
Parámetros de proceso	V_p	0.035 m/s
	J_0	1.58 10^7 A/m^2
	s	6 mm
	Lb	1m
	Ld	0.8m
Parámetros de la transferencia de calor	h_{int}	10 W/m^{2}K
	h_{ext}	30 W/m^{2}K
	$T_{\square}$	20°C

c) Graficar las temperaturas máxima, mínima y promedio en función del tiempo. Superponer en el mismo grafico la variación de temperatura $\Delta T = T_{máxima}(t) - T_{mínima}(t)$. Indicar los resultados finales del proceso, correspondientes a la salida de la sexta bobina (posición $z=6*Lb+5*Ld$).
d) El proceso tiene por objetivo calentar el tubo hasta una temperatura T_{obj}., con la mayor homogeneidad posible. De esta forma, la variación de temperatura ΔT debe ser restringida. En base al modelo construido, obtener cuáles deberían ser los parámetros de proceso v_p y J_0 para lograr las siguientes condiciones de proceso:

Caso	***ΔTmax***	***Tobj***	v_p	J_0
A	*100°C*	*600°C*		
B	*100°C*	620°C		
C	*50°C*	600°C		

Analizar ventajas y desventajas que pueden surgir, desde el punto de vista de la fabricación, por restringir la variación de temperatura ΔT.