75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

GUÍA DE PROBLEMAS

6. INTEGRACIÓN

1. Calcular la siguiente integral utilizando las fórmulas del trapecio y de Simpson, con pasos h=π/4 y h=π/2, respectivamente:

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} e^{\left(2 - \frac{1}{2}\cdot\sin(x)\right)} dx$$

   Obtener conclusiones sobre la precisión obtenida.

2. Integrar la función $y = \sqrt{x}$ entre los argumentos 1.00 y 1.30, según las fórmulas del trapecio y de Simpson. Obtener conclusiones sobre la precisión obtenida.

3. Integrar la función y=sen(x) entre 0 y π/2, a partir de la siguiente tabla:

x	0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2
sen x	0.0000	0.2587	0.5000	0.7071	0.8660	0.9659	1.0000

   por el método del trapecio y por el método de Simpson. Comparar los resultados con el valor exacto.

4. Integrar la función $y = \sin(x)/x$ entre 0 y 0.8 por el método de Romberg con 5 dígitos significativos.

5. Integrar la función $y = f(x)$ entre 0 y 4, por el método de Romberg. Los valores de $f(x)$ están correctamente redondeados. ¿Cuál es la precisión obtenida?

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
f(x)	-4.271	-2.522	-0.499	1.795	4.358	7.187	10.279	13.633	17.247

6. Integrar la función $y = e^{-x}$ entre 0 y 10, por el método de cuadratura de Gauss con 6 puntos. Comparar con el resultado exacto a 6 decimales: 0.999955.

7. Evaluar la integral

$$I = \int_0^2 \sin^2(x) dx$$

a) Utilizar el método de Romberg hasta una precisión de 4 dígitos.
b) Estimar el error de redondeo en los resultados parciales obtenidos por la regla del trapecio suponiendo que se ha trabajado con aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión. Suponer que el orden en que se efectúan las operaciones es el siguiente:

$$T(h) = \left[\frac{1}{2} \cdot (f_0 + f_n) + \sum_{j=1}^{n-1} f_j\right] \cdot h$$

donde n es el número de intervalos y h el paso.

8. Evaluar la integral

$$I = \int_0^2 \sin^2(x) dx$$

mediante cuadratura de Gauss con 3 puntos. Proceder de la siguiente forma:

a) Hallar la fórmula de cuadratura sabiendo que el polinomio de Legendre de grado 3 es:

$$p_3(x) = \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (5 \cdot x^2 - 3)$$

Aplicarla a la integral.

b) Estimar el error cometido en base al desarrollo en serie de Taylor del integrando. Indicar de qué tipo de error de trata.

9. Evaluar la integral:

$$I = \int_0^2 e^{x^2} dx$$

mediante cuadratura de Gauss con 4 puntos. La siguiente tabla presenta los puntos de evaluación y los coeficientes asociados:

Puntos	Coeficientes
± 0.86114	0.34785
± 0.33998	0.65215

Efectuar los cálculos con 5 decimales de precisión.

10. Evaluar la integral:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

mediante el método de Romberg hasta obtener 4 dígitos de precisión.

11. Hallar una fórmula de cuadratura para la integral:

$$I = \int_0^3 f(x)dx$$

utilizando 4 nodos equiespaciados e interpolación polinomial sobre todo el intervalo. Utilizar el método de los coeficientes indeterminados. Si M es una cota superior para $\left| f^{IV}(0) \right|$, hallar una estimación del error por truncamiento en términos de M.

12. Evaluar la integral:

$$I = \int_1^5 \ln(x)dx$$

utilizando la fórmula de Simpson, con un error no mayor a 0.01.

Sabiendo que la regla de Simpson aplicada a un intervalo genérico (x_{i-1}, x_{i+1}) es:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot [f(x_{i-1}) + 4 \cdot f(x_i) + f(x_{i+1})] - \frac{h^5}{90} \cdot f^{IV}(\varepsilon_i)$$

donde $x_{i-1} < \varepsilon_i < x_{i+1}$,se pide:

a) Obtener una expresión para acotar el error de truncamiento global sobre todo el intervalo de integración.
b) Utilizando la expresión hallada en el punto anterior, determinar un paso h que garantice la cota de error establecida y efectuar el cálculo utilizando este valor de h.
c) Comparar el resultado de la integración numérica con el valor exacto de la integral y verificar que la diferencia está acotada por el error estimado.

13. La función error se define como:

$$erf = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

a) Hallar $erf(1)$ utilizando el método de Romberg, hasta alcanzar una precisión de 4 dígitos significativos. Trabajar con una cantidad suficiente de dígitos para garantizar que no influya el error de redondeo.

b) Hallar $erf(1)$ utilizando Cuadratura de Gauss con 5 puntos. Los nodos de evaluación y los correspondientes coeficientes son:

± 0.90618	0.23693
± 0.53847	0.47863
0	0.56889

c) Estimar el error de truncamiento del resultado obtenido por Romberg. Estimar el error del resultado obtenido por Gauss debido al redondeo en las coordenadas y en los coeficientes provistos. En base a la comparación entre los resultados obtenidos en a) y b),
¿qué puede decir del error de truncamiento del método de Gauss?,
¿cuál de los dos métodos ha resultado más trabajoso en términos de la cantidad de cálculos?

14. Obtener una fórmula de integración que involucre 4 nodos equiespaciados (fórmula de Cotes) mediante el método de los coeficientes indeterminados. Para simplificar la resolución del sistema de ecuaciones, tener en cuenta que la fórmula resulta simétrica alrededor del punto medio.
    a) Hallar una expresión para el error de truncamiento.
    b) Aplicar las fórmulas obtenidas para estimar la integral:

$$I = \int_0^{1.5} \sin^2(x)dx$$

junto con su error. Sabiendo que el valor correcto de la integral a 5dígitos significativos es 0.71472, comparar la estimación del error con su valor correcto.

15. Programar en pseudolenguaje un algoritmo para resolver la siguiente integral, por el método de Romberg.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

16. Evaluar la integral

$$I = \int_0^{\pi} \ln(2 - \cos(x))dx$$

a) Utilizar el método de Romberg comenzando con un paso $h=\pi/2$. Trabajar con 5 decimales de precisión. Afinar el paso de cálculo no más de 2 veces.
b) Calcular la influencia de los errores en los valores del integrando sobre los valores obtenidos por la Regla del Trapecio.
c) El valor exacto de la integral es

$$\pi \cdot \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1.959759164\ldots$$

Dar una explicación de la alta precisión obtenida con la Regla del Trapecio.