GRAFOS – 25/2

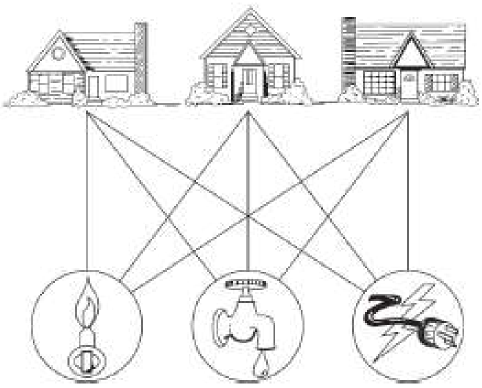
Ciência da Computação
Universidade do Vale do Itajaí – UNIVALI

Profª Fernanda dos Santos Cunha
fernanda.cunha@univali.br

Fonte: Marco Goldbarg, Elizabeth Goldbarg. Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. ISBN 978-85-352-5716-8

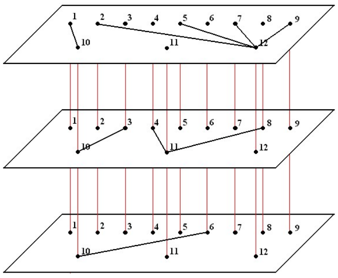
Grafos: Unidade 5 – Planaridade

- **Problema das 3 casas.**
  - É possível conectar os 3 serviços às 3 casas sem haver cruzamento de tubulação?



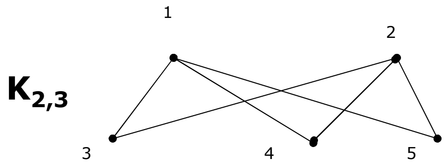
Grafos: Unidade 5 – Planaridade

- Aplicações de **grafos planares** estão por toda parte, como em projetos de:
  - circuitos integrados e circuitos impressos
  - rodovias conectando cidades
  - linhas de transmissão de energia elétrica
  - linha de produção em uma indústria



Grafo Bipartido Completo $K_{m,n}$

- Um grafo G bipartido é dito completo se cada vértice do conjunto V_1 com *m* vértices, é adjacente a todos os *n* vértices do conjunto V_2, e vice versa.

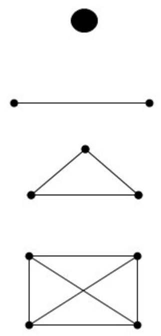


- Sendo conjuntos disjuntos $V_1=\{1,2\}$ e $V_2=\{3,4,5\}$, quaisquer dois vértices tomados no mesmo conjunto não são adjacentes, porém todos os vértices tomados em conjuntos diferentes são adjacentes.

Grafo Clique K_n

- Um grafo clique de um grafo G é um subgrafo completo de G.
  - Ao lado tem-se grafos simples completos com 1, 2, 3 e 4 vértices.

K_1, K_2, K_3, K_4

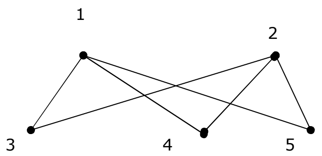


Teoremas relacionados

- **Teorema 1:**
  Um grafo G é bipartido se e somente se todo ciclo em G for par.

  Ex.: no grafo $\mathbf{K_{2,3}}$ tem-se 3,2,4,1,3 ou 1,4,2,5,1 (4 arestas), ou 3,1,4,2,5,1,3 (6 arestas).

$\mathbf{K_{2,3}}$

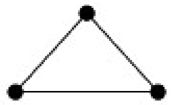


Teoremas relacionados

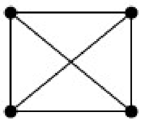
- **Teorema 2:**
  O nº de arestas de um grafo completo G(V,E) é n(n-1)/2, onde n é o nº de vértices.

  - Ex.: no grafo $\mathbf{K_3}$ tem-se 3(3-1)/2 = 3*2/2 = 3 arestas e no grafo $\mathbf{K_4}$ tem-se 4(4-1)/2 = 4*3/2 = 6 arestas.

K_3



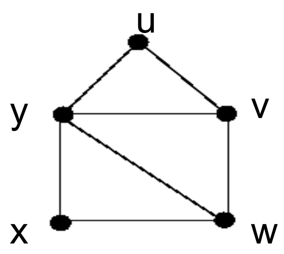
K_4

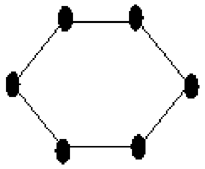


7

Grafo Planar

- Um grafo G é dito planar se seus vértices e suas arestas podem ser imersos em R^2 tal que suas arestas não se cortem/cruzem (representação planar).



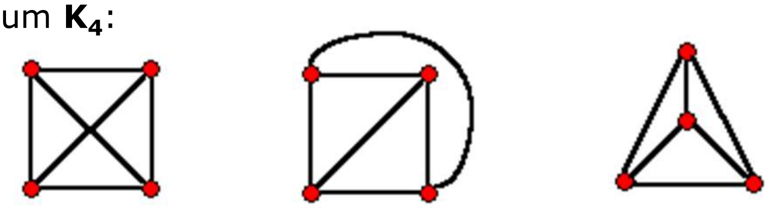


- Ou seja, admite representação no plano de modo que não exista cruzamento de arestas.

8

Grafo Planar

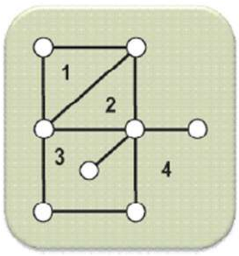
- Três representações gráficas distintas para um $\mathbf{K_4}$:



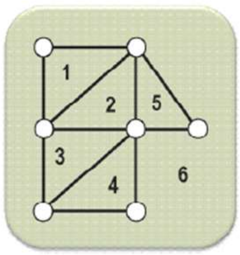
- $\mathbf{K_4}$ é um grafo planar pois admite pelo menos uma representação num plano sem cruzamento de arestas.

Fórmula de Euler

- Euler percebeu que um *grafo simples, planar e conexo* divide o plano em um certo nº de regiões (ou faces), incluindo regiões totalmente fechadas e a região infinita exterior.



(1) Grafo que divide o plano em 4 regiões



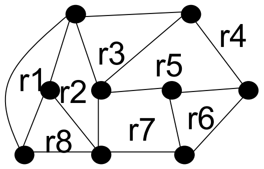
(2) Grafo que divide o plano em 6 regiões

- A relação entre nº de arestas (E), nº de vértices (V) e nº de regiões (R) para tais grafos é dada pela fórmula: $\mathbf{V-E+R = 2}$

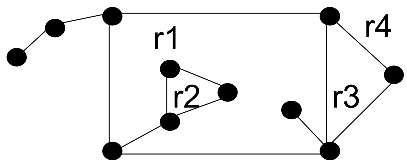
Fórmula de Euler

- Se G é um grafo planar, a representação planar de G divide o plano em regiões:

9-15+R=2 | | 11-13+R=2
-6+R=2 | $\boxed{\textbf{V-E+R=2}}$ | -2+R=2
R = 2+6 = 8 | | **R = 2+2= 4**



8 regiões



4 regiões

r_4 é região externa em ambos

Demonstrar a fórmula de Euler por indução

- Considere o grafo $\mathbf{K_1}$

  - Neste grafo o nº de arestas é zero (E=0) e possui um só vértice (V=1).
  - Logo, aplicando a fórmula:

    V – **E** + R = 2

    1 – **0** + R = 2

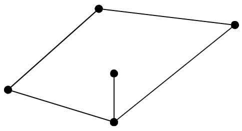
    R = 1
  - Isto mostra que a fórmula se verifica!

Demonstrar a Fórmula de Euler por indução

- Considere um grafo que possui um vértice de grau 1.
  - Elimina-se então o vértice de grau 1 e a aresta que o conecta, tornando um grafo de E-1 arestas, V-1 vértices e um número de regiões R para os quais

    (**V-1**)–(**E-1**)+R=2 => **V**–**E**+R=2

  - No grafo original, antes de retirar a aresta e o nó deve também valer a fórmula, ou seja (**V+1**)–(**E+1**)+R=2 que pela hipótese de indução é verdadeira.



(5-1) – (5-1) + R = 2
4 – 4 + R = 2
R = 2

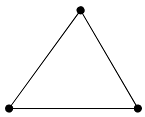
Demonstrar a fórmula de Euler por indução

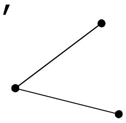
- Considere um grafo que não tem vértices de grau 1.
  - Retira-se então uma aresta que define uma região fechada, o que o torna um grafo planar simples com E arestas, algum número V de vértices, da forma:

    V-E+R = 3-2+1 = **2**

  - Verifica-se assim a fórmula de Euler. Note que antes de eliminar a aresta tinha-se:

    V-E+R = V-(E+1)+(R+1)
    = 3-(2+1)+(1+1) = **2**





Teorema sobre o Número de Vértices e Arestas

- Se um grafo *simples, planar e conexo*, com V vértices e E arestas, então

  $$\mathbf{V - E + R = 2}$$

  - Se $V \geq 3$ então

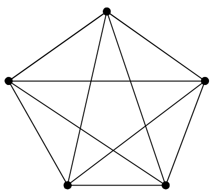
    $$\mathbf{E \leq 3V - 6}$$

  - Se $V \geq 3$ e não existem ciclos de comprimento 3 então

    $$\mathbf{E \leq 2V - 4}$$

Teorema sobre o Número de Vértices e Arestas

- Este teorema pode ser usado para **demonstrar que certos grafos <u>não são planares</u>**.
  - Ex1: $\mathbf{K_5}$ é um grafo simples e conexo com 5 vértices com 10 arestas.



Aplicando o teorema vê-se que:

$\mathbf{E \leq 3V - 6}$

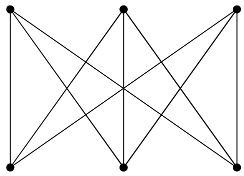
$10 \leq 3*5 - 6$

$10 \leq 9$

  - O teorema não se verifica. Portanto, este grafo **não é planar**.

Teorema sobre o Número de Vértices e Arestas

- Ex2: O grafo **$K_{3,3}$** é conexo, simples, com 6 vértices e 9 arestas, não possui ciclos de comprimento 3.



Aplicando o teorema vê-se que:

$\mathbf{E \leq 3V - 6}$

$9 \leq 3*6 - 6$

$9 \leq 12$

- O teorema inicialmente se verifica, **PORÉM, esse grafo não possui ciclos de comprimento 3, logo deve-se verificar a 2ª condição.**

17

Teorema sobre o Número de Vértices e Arestas

- Entretanto, a 2ª condição do teorema diz:

  $\mathbf{E \leq 2V - 4}$

  $9 \leq 2*6 - 4$

  $9 \leq 8$

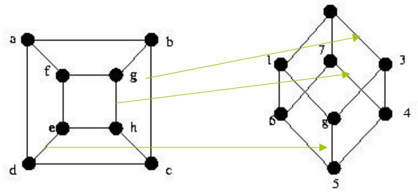
- A 2ª fórmula não se verifica, **logo o grafo não é planar.**

  - Esta desigualdade é necessária mas não suficiente para a planaridade dos grafos.

18

Grafos Isomorfos G_I

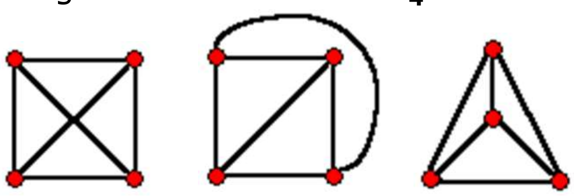
- Dois grafos $G_1=(E_1,V_1)$ e $G_2=(E_2,V_2)$ são **isomorfos** se existe uma função unívoca ***f*:$E_1 \rightarrow E_2$** tal que (i,j) é elemento de V_1 se e somente se (f(i),f(j)) é elemento de V_2.
  - Ex.: grafos isomorfos:



f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3, f(d)=8,
f(e)=5, f(f)=6, f(g)=7, f(h)=4
(b,c)=(2,3)   (g,h)=(7,4)   (d,e)=(8,5)

Grafos Isomorfos G_I

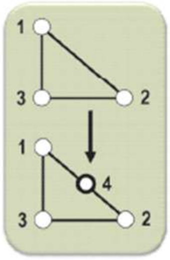
- Ex.: grafos isomorfos ao $\mathbf{K_4}$



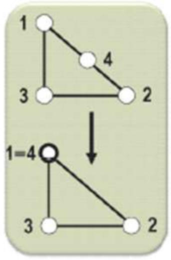
- **Teorema 3**:
  - Grafos isomorfos possuem a mesma sequência de graus.
  - Dois grafos não são isomorfos se um deles contém um subgrafo que não pertence ao outro.

Grafos homeomorfos H(G)

- Dois grafos G_1 e G_2 são ditos homeomorfos se são isomorfos ou podem ser feitos isomorfos por **subdivisões elementares.**
  1. <u>Inserção de vértices</u>: adicionar um vértice em qualquer aresta, criando consequentemente 2 novas arestas em G.
  2. <u>Fusão de arestas</u>: suprimir um vértice v de G se d(v)=2, eliminando as arestas que incidem sobre v suprimindo-o e criando nova aresta que liga os vértices originalmente conectados ao v eliminado.



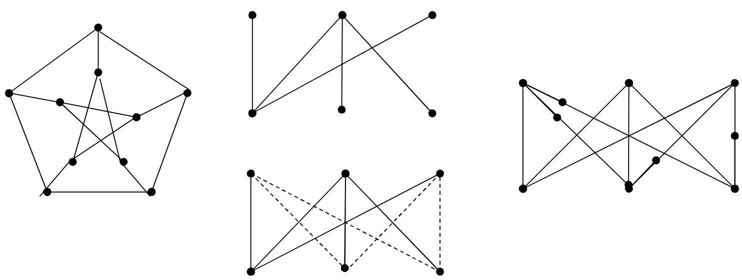
(1) Inserção



(2) Fusão

Teorema de Kuratowski

- Um grafo G é **planar** se e somente se **não possui** um **subgrafo homeomorfo** ao K_5 ou ao $K_{3,3}$ (chamados de grafos de Kuratowski).
  - Ex. de grafos não-planares:



Algoritmos

- Apesar de elegante, a caracterização de Kuratowski não fornece um algoritmo muito prático para teste de planaridade, nem está claro como obter a representação planar.
- Para verificar se um grafo é planar e desenhá-lo em sua forma planar, existem:
  - Hopcroft-Trajan (1974)
  - Demoucron et al. (1990)
  - Boyer-Myrvold (1999)