Métodos Numéricos

Introdução, Representação Numérica e Erros.

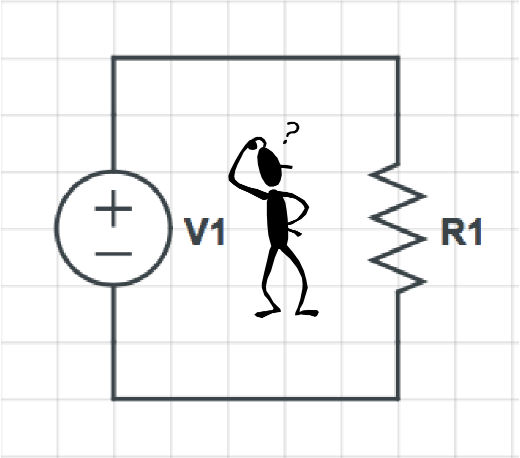
Prof. Paulo Roberto O. Valim
(pvalim@univali.br)

O que são os Métodos Numéricos, sua importância e os objetivos do curso

- O que é o Cálculo Numérico?
  - um conjunto de ferramentas ou métodos usados para se obter a solução de problemas matemáticos de forma aproximada.
  - Esses métodos se aplicam principalmente a problemas que não apresentam uma solução exata, portanto precisam ser resolvidos numericamente.

O que são os Métodos Numéricos

- Exemplo 1: seja o circuito abaixo, qual o valor da corrente elétrica que circula no circuito?



- Passo 1: encontrar o modelo matemático para o modelo físico.
  - Neste caso, as leis de Kirchoff nos fornece a seguinte relação:

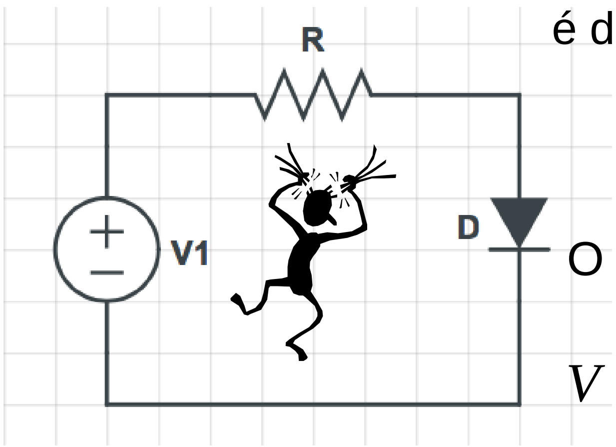
    $V - R*I = 0$
- Passo 2: resolver a equação do modelo para obter a resposta desejada.
  - Para este exemplo, a solução é exata, ou seja, é possível obter o valor exato de I.

    $I = V/R$

O que são os Métodos Numéricos

- Exemplo 2: Considere que um novo componente tenha sido inserido no circuito anterior: um diodo.

A relação entre a tensão e corrente sobre este componente é dada por*:



$$v(i) = \frac{KT}{q} \ln\left(\frac{i}{Is} + 1\right)$$

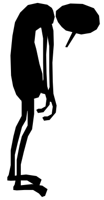
k e I_s são constantes

q é a carga do elétron

T a temperatura do dispositivo

O cálculo da corrente no circuito é dado por:

$$V - R * I - \frac{KT}{q} \ln\left(\frac{i}{Is} + 1\right) = 0$$



Agora a solução é bem mais complicada para ser resolvida analiticamente.
Ao longo do curso vamos aprender como resolver este tipo de problema numericamente!

Importância da Disciplina de Métodos Numéricos

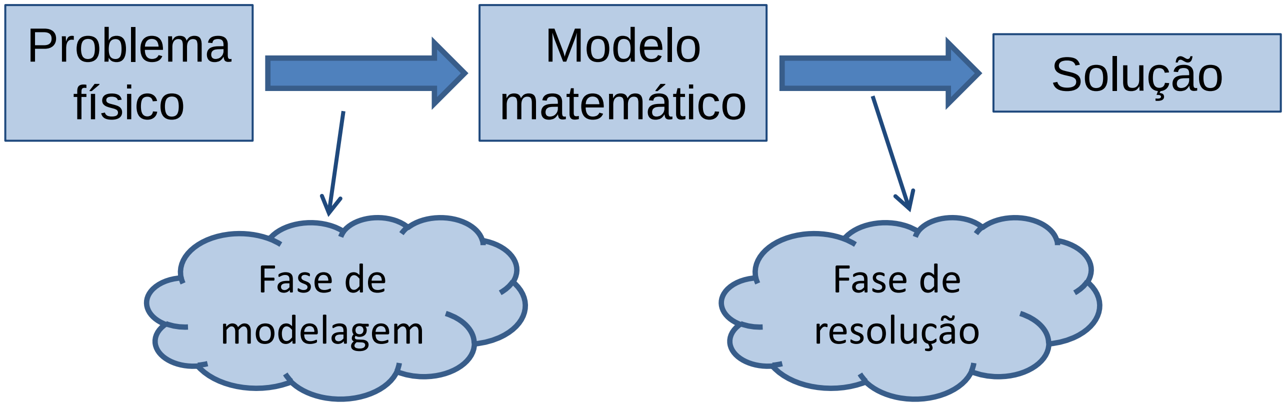
- Pela utilização ou não de um método numérico (existem métodos numéricos para se resolver este problema?);
- Escolher o método a ser utilizado, procurando aquele que é mais adequado para o seu problema. Que vantagens cada método oferece e que limitações eles apresentam;
- Saber avaliar a qualidade da solução obtida. Para isso, é importante ele saber exatamente o que está sendo feito pelo computador ou calculadora, isto é, como determinado método é aplicado;

Objetivos da disciplina

- Apresentar diversos métodos numéricos para a resolução de diferentes problemas matemáticos.
  - Pretende-se deixar bem claro a importância desses métodos, mostrando:
    - a essência de um método numérico;
    - a diferença em relação a soluções analíticas;
    - as situações em que eles devem ser aplicados;
    - as vantagens de se utilizar um método numérico;
    - e as limitações na sua aplicação e confiabilidade na solução obtida.
- Apresentar ao aluno maneiras práticas de se desenvolver e utilizar métodos numéricos. Isso significa mostrar como usar esses métodos numéricos na calculadora, com linguagens de programação s e aplicativos computacionais;

Fases na resolução de um problema

- O processo de solução de um problema por meio da aplicação de métodos numéricos envolve algumas fases, que de forma resumida pode ser representado por:



- Erros podem estar presentes tanto na fase de modelagem quanto na fase de resolução.

Fases na resolução de um problema

- *Erros na Fase de Modelagem:*
  - Para representar um fenômeno do mundo físico por meio de um método matemático, normalmente, são necessárias várias simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo.
  - A precisão dos dados de entrada.

- *Erros na Fase de Resolução:*
  - A forma como os dados são representados no computador (aproximações).
  - As operações numéricas efetuadas.

Exemplo 1

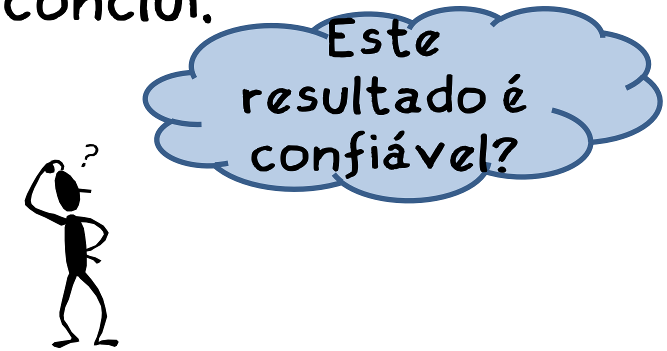
- Supondo-se que um engenheiro queira determinar a altura de um edifício e que para isto disponha apenas de uma bolinha de metal, um cronômetro e a equação básica da mecânica que estuda o movimento de um corpo sujeito a uma aceleração constante:

$$d = d_0 + v_0 t + 1/2\, a t^2$$

Onde: d – distância percorrida
d_0 – distância inicial
v_0 – velocidade inicial
t – tempo
a - aceleração

- Ele então sobe no alto do edifício e solta a bolinha de aço, que leva 3s para tocar no solo. Como resultado, aplicando-se a equação acima, ele conclui:

$$d = 0 + 0 * 3 + 1/2 * 9{,}8 * 3^2 = 44{,}1m$$



Exemplo 1

- É bem provável que o resultado não seja confiável, pois no modelo matemático não foram consideradas outras forças como, por exemplo, a resistência do ar, a velocidade do vento etc.
- Um outro fator também tem bastante influência sobre o resultado: a precisão da leitura do cronômetro. Ex.: se o tempo medido fosse 3,5s, a altura calculada do prédio seria de 60 metros. Uma variação de 16,7% no valor lido no cronômetro resultou em uma variação de 36% na altura calculada.

Exemplo 2

- Cálculo da área de uma circunferência de rai

Resultados obtidos:

a) $A = 31400\ m^2$

b) $A = 31416\ m^2$

c) $A = 31415{,}92654\ m^2$

Como justificar as diferenças? É possível obter "e

O número π é um número irracional, ou seja, não pode ser representado por um número finito de dígitos.

Exemplo 3

Efetuar os somatórios seguintes em uma calculad

$x_i = 0{,}5$ e $x_i = 0{,}11$.

$$S = \sum_{i=1}^{30000} x_i$$

Os erros ocorridos nos dois problemas dependem da representação dos números na máquina utilizada.

Resultados obtidos:

a) Para $x_i = 0{,}5$ → no computador $S = 15000$

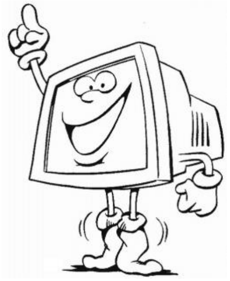
b) Para $x_i = 0{,}11$ → no computador S = ,99691

Como justificar a diferença entre o resultado sperado e o obtido pelo computador para x_i=0,11?

Representação Numérica

Sistema Decimal

Sistema Binário



Dados
(Sistema Decimal)

Resultados
(Sistema Decimal)

Dados
(Sistema Binário)

Operações

Em uma base um número pode ter uma representação finita e em outra uma representação infinita (arredondamentos e truncamentos ocorrem!!!!!!!!!)

Estudaremos os erros que surgem da representação de números em um computador e os erros resultantes das operações numéricas efetuadas.

Sistemas de Numeração

- É o conjunto de símbolos utilizados para representação de quantidades e as regras que definem a forma de representação.
- É determinado fundamentalmente pela **Base**:
  - Indica o número de símbolos utilizados.
- Notação matemática para indicar um número em determinada base:

Número X na base B $\rightarrow$ $X_{(B)}$

Sistemas de Numeração

- Tipos de sistemas de numeração:
  - Sistemas posicionais e sistemas não-posicionais
- Sistemas Não-Posicionais:
  - São aqueles em que o valor atribuído a um símbolo não se altera, independente da posição em que ele se encontra no conjunto de símbolos que está representando um quantidade

Sistemas não-posicionais (exemplo)

- Sistema de numeração romano:

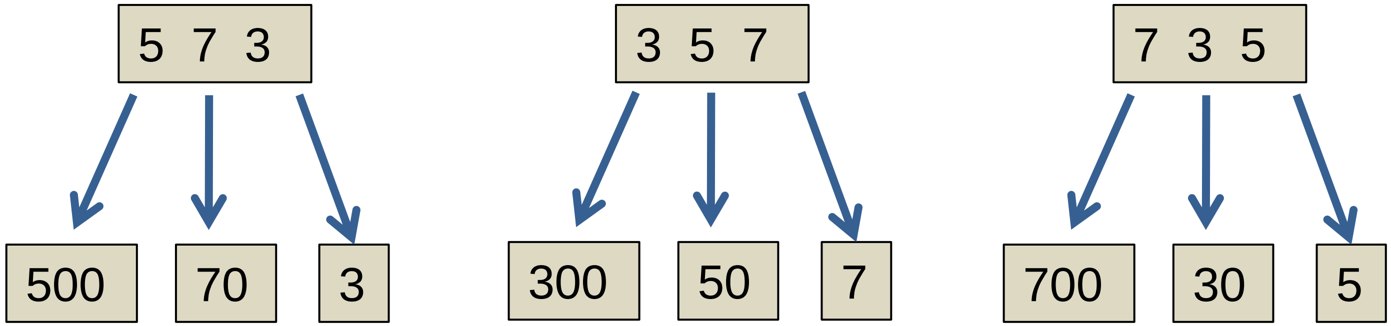
Numeração romana antiga Princípio aditivo	Numeração romana moderna Princípio subtrativo
I I I I 1 + 1 + 1 + 1 = 4	I V 5 − 1 = 4
V I I I I 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9	I X 10 − 1 = 9

	Princípio aditivo	Princípios subtrativo e aditivo
Nossa numeração	Numeração romana antiga	Numeração romana moderna
1	I	I
2	II	II
3	III	III
4	IIII	IV
5	V	V
6	VI	VI
7	VII	VII
8	VIII	VIII
9	VIIII	IX
10	X	X
11	XI	XI
12	XII	XII
13	XIII	XIII
14	XIIII	XIV

	Princípio aditivo	Princípios subtrativo e aditivo
Nossa numeração	Numeração romana antiga	Numeração romana moderna
15	XV	XV
16	XVI	XVI
17	XVII	XVII
18	XVIII	XVIII
19	XVIIII	XIX
20	XX	XX
30	XXX	XXX
40	XXXX	XL
50	L	L
90	LXXXX	XC
100	C	C
400	CCCC	CD
500	D	D
1000	M	M

Sistemas Posicionais

- São aqueles em que o valor atribuído a um símbolo depende da posição em que ele se encontra no conjunto de símbolos que está representando a quantidade. Exemplo:



Sistemas de Numeração

- Notação posicional (cont.)
  - O valor do número pode ser obtido através do seguinte somatório:

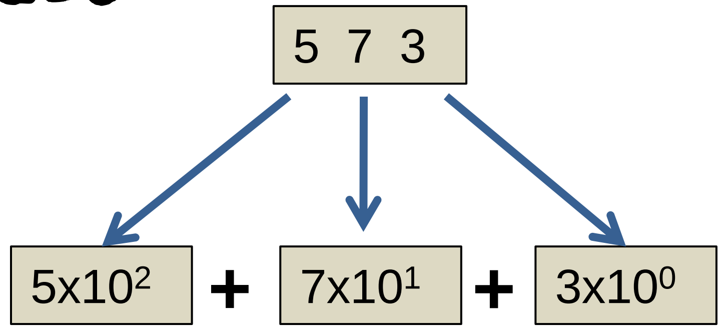
$$N = d_{n-1} \times b^{n-1} + d_{n-2} \times b^{n-2} + \ldots + d_0 \times b^0$$

Onde:

d → corresponde ao dígito da posição

b → corresponde à base

Exemplo: $(573)_{10}$



Sistemas de Numeração

- Sistema binário (ou de base 2)
  - Usa os símbolos 0 e 1 para representar os números.
  - Exemplo: o número $(11001)_2$ representa o valor:
  - $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$
  - $16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25$

Sistemas de numeração

- Correspondência
  diferentes bases:

Decimal	Binário	Hexadecimal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Conversão entre sistemas (entre bases)

- De qualquer sistema para o decimal:
- É feita conforme já apresentado:

$$N = d_{n-1} \times b^{n-1} + d_{n-2} \times b^{n-2} + \ldots + d_0 \times b^0$$

Onde:

d → corresponde ao dígito da posição

b → corresponde à base

Conversão decimal→binário

- Utiliza-se a técnica denominada divisões sucessivas. Como no caso a conversão é para o sistema de binário, o divisor utilizado é o 2
- Exemplo: $(109)_{10} = (?)_2$

109/2	=	54	resto **1**
54/2	=	27	resto **0**
27/2	=	13	resto **1**
13/2	=	6	resto **1**
6/2	=	3	resto **0**
3/2	=	2	resto **1**
1/2	=	0	resto **1**

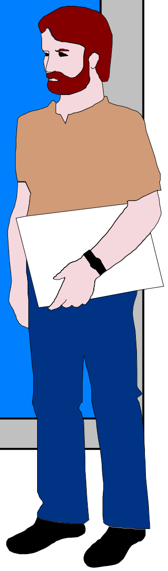
$(1101101)_2$

Os restos correspondem aos algarismos do valor na nova base

Exercícios

1) Realizar as conversões de decimal para binário abaixo:
a) $(127)_{10}$
b) $(128)_{10}$
c) $(1230)_{10}$
d) $(1023)_{10}$

2) Realizar as conversões do sistema binário para o sistema decimal:
a) $(101101)_2$
b) $(110111)_2$
c) $(11111111)_2$
d) $(01111111)_2$



Processo para converter um número fracionário do sistema decimal para o sistema binário

- <u>Conversão de Números Fracionários:</u>

  Dado um número entre 0 e 1, como encontrar a sua representação $(0.d_1 d_2 \dots d_j \dots)_2$ na base 2?

- Exemplo: Considere $(0.125)_{10}$

  Multiplicando 0.125 por 2 temos:

$$2 \times 0.125 = 0.250 = \underbrace{0}_{\substack{\text{parte inteira} \\ d_1 = 0}} + \underbrace{0.25}_{\text{parte fracionária}}$$

$$\text{Logo} \quad d_1 = 0$$

Base binária admite somente 0 ou 1!!!!!!!!!!

Processo para converter um número fracionário do sistema decimal para o sistema binário

Aplicando o mesmo procedimento para 0.250,

$$2 \times 0.250 = 0.500 = \underbrace{0}_{\substack{\text{parte inteira} \\ d_2 = 0}} + \underbrace{0.5}_{\text{parte fracionária}}$$

e repetindo para 0.5,

$$2 \times 0.5 = 1.0 = \underbrace{1}_{\substack{\text{parte inteira} \\ d_3 = 1}} + \underbrace{0}_{\text{parte fracionária}}$$

O processo termina pois a parte fracionária é zero. Assim, a representação de $(0.125)_{10}$, na base 2, será $(0.001)_2$, pois:

$$(0.001)_2 = 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 0 + 0 + \frac{1}{8} = 0.125$$

Processo para converter um número fracionário do sistema binário para o sistema decimal

- Conversão de Números Fracionários:

Seja agora um número entre 0 e 1 no sistema binário. Como encontrar a sua representação na base 10?

Considere o número $(0.000111)_2 = (0.b_1 b_2 \ldots b_j)_{10}$

Definimos $r_1=(0.000111)_2$ e multiplicamos por $(1010)_2$. Note que $(1010)_2=(10)_{10}$

$$\begin{aligned} w_1 &= (1010)_2 \times r_1 \\ &= (1010)_2 \times (0.000111)_2 = \left(1.000110\right)_2 = \underbrace{1}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{0.00011}_{\text{parte fracionária}} \end{aligned}$$

Multiplicação binária

```
    0.000111
        1010
  ---------------
     0.000000
    0.000111
   0.000000
  0.000111
 ---------------
     1.000110
```

Processo para converter um número fracionário do sistema binário para o sistema decimal

$$\begin{aligned} w_1 &= (1010)_2 \times r_1 \\ &= (1010)_2 \times (0.000111)_2 = (1.000110)_2 = \underbrace{1}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{0.00011}_{\text{parte fracionária}} \end{aligned}$$

Convertendo a parte inteira para a base decimal, obtemos

$$(1)_2 = 1 \times 2^0 = (1)_{10} \Rightarrow b_1 = 1$$

Assim,

$$b_1 = 1 \text{ e } r_2 = 0.00011$$

Repetindo o processo até r_{k+1}=0.

Processo para converter um número fracionário do sistema binário para o sistema decimal

$$w_2 = (1010)_2 \times r_2 = (1010)_2 \times (0.00011)_2 = (0.1111)_2$$
$$\Rightarrow (0)_2 = (0)_{10} \Rightarrow b_2 = 0 \text{ e } r_3 = 0.1111$$
$$w_3 = (1010)_2 \times r_3 = (1010)_2 \times (0.1111)_2 = (1001.011)_2$$
$$\Rightarrow (1001)_2 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = (9)_{10} \Rightarrow b_3 = 9 \text{ e } r_4 = 0.011$$
$$w_4 = (1010)_2 \times r_4 = (1010)_2 \times (0.011)_2 = 11.11$$
$$\Rightarrow (11)_2 = 1\times 2^1 + 1\times 2^0 = (3)_{10} \Rightarrow b_4 = 3 \text{ e } r_5 = 0.11$$
$$w_5 = (1010)_2 \times r_5 = (1010)_2 \times (0.11)_2 = 111.1$$
$$\Rightarrow (111)_2 = 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 = (7)_{10} \Rightarrow b_5 = 7 \text{ e } r_6 = 0.1$$
$$w_6 = (1010)_2 \times r_6 = (1010)_2 \times (0.1)_2 = 101$$
$$\Rightarrow (101)_2 = 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = (5)_{10} \Rightarrow b_6 = 5 \text{ e } r_7 = 0$$

O processo termina pois r_7=0

$$\boxed{(0.000111)_2 = (0.109375)_{10}}$$

Exercícios:

$0.35_{(10)} \Rightarrow$ ________$_{(2)}$

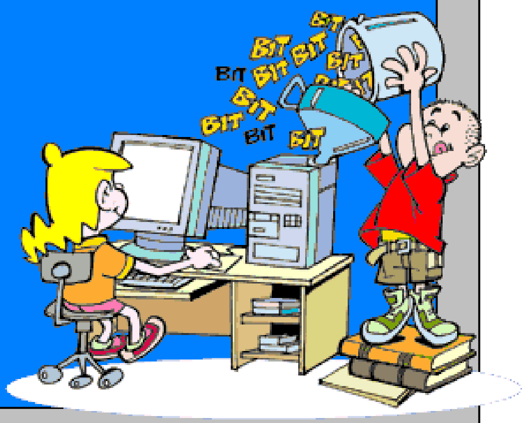
$35.454_{(10)} \Rightarrow$ ________$_{(2)}$

$14,375_{(10)} \Rightarrow$ ________$_{(2)}$

$10111,01101_{(2)} \Rightarrow$ ________$_{(10)}$

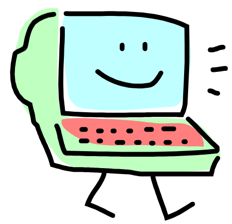
$100011,0111_{(2)} \Rightarrow$ ________$_{(10)}$

$101,1101111_{(2)} \Rightarrow$ ________$_{(10)}$



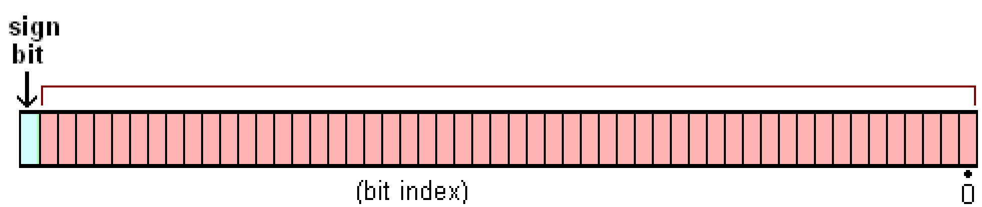
Ponto fixo e ponto flutuante

- A idéia por trás da representação dos números em bases numéricas é utilizada para representar números no computador.

Inteiros  Reais

Manipulação mais eficiente

- Um número inteiro apresenta a chamada representação de ponto fixo, onde a posição do ponto decimal está fixa e todos os dígitos são usados para representar o número em si, com exceção do primeiro digito usado para representar o sinal do número.



Ponto fixo e ponto flutuante

- Para um número real qualquer é utilizada a representação de ponto flutuante, que é dada pela expressão:

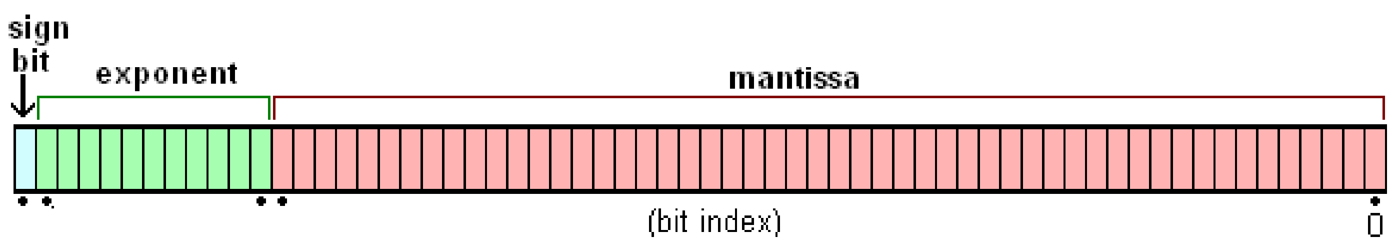
$$\pm(0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t) \times \beta^e \qquad \begin{cases} 0 \le d_j \le (\beta - 1) \\ j = 1, \ldots, t \\ d_1 \neq 0 \end{cases}$$

onde:

$0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t$ é uma fração na base *b*, chamada de mantissa.

t número máximo de dígitos da mantissa.

e Expoente que varia em um intervalo dado pelos limites da maquina utilizada.

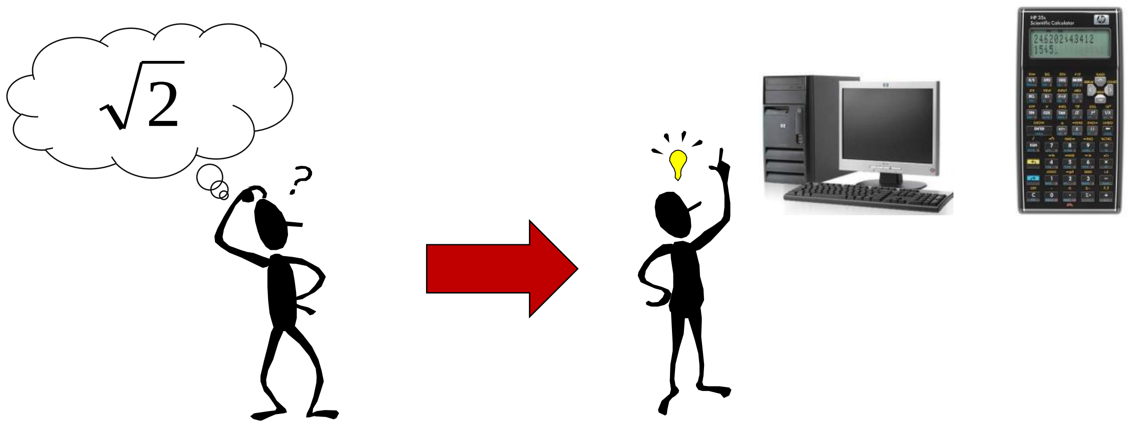


Ponto fixo e ponto flutuante

- Exemplos da representação de ponto flutuante (β=10, t=3 e $e \in [-4,4]$):

Número na base decimal	*Representação em ponto flutuante*	*mantissa*	*base*	*expoente*
1532	$0,153 \times 10^{4}$	0.1532	10	4
15.32	0.153×10^{2}	0.1532	10	2
0.00255	0.255×10^{-2}	0.255	10	-2
10	0.10×10^{2}	0.10	10	2
0.000002	Underflow	Expoente < -4		
817235.89	Overflow	Expoente > +4		

Erros Numéricos



- Porém, um profissional que utilizará o resultado fornecido pela calculadora para projetar, construir pontes, edifícios, etc, não pode aceitar o valor obtido antes de fazer alguns questionamentos.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309 5$$

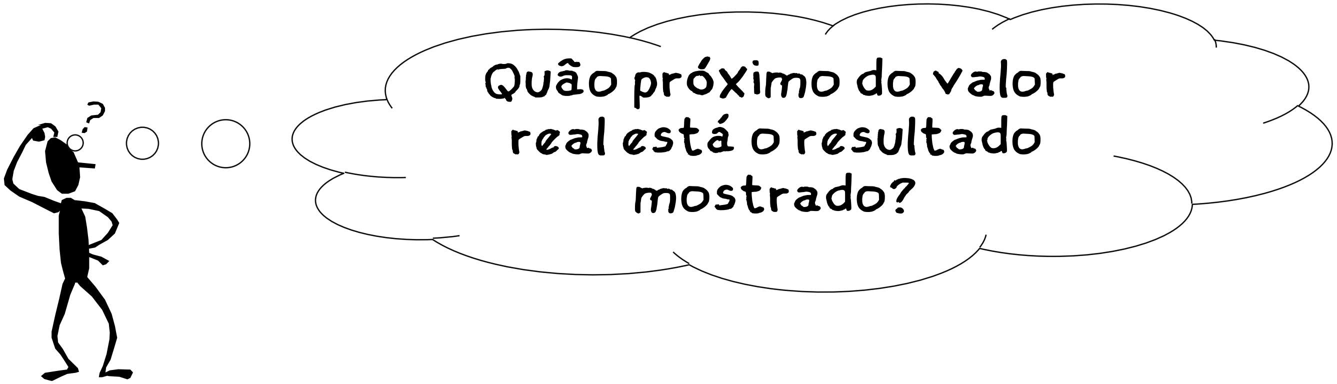
Como fez para chegar nesse resultado?

Qual é a confiabilidade do resultado que foi obtido?

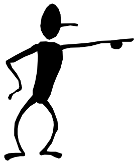
Erros Numéricos

$\sqrt{2}$ é um número irracional → Não existe uma forma de representá-lo com um número finito de algarismos

$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095$ → *Solução Aproximada*



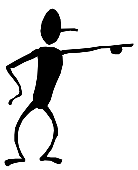
Erros Numéricos



- Vamos definir a diferença entre o valor real da grandeza que queremos calcular e o valor aproximado que efetivamente calculamos como erro, ou seja:

$$erro = valor\ real - valor\ aproximado$$

Erro Absoluto



- Quanto menor for esse erro, mais preciso será o resultado da operação.

- Se estivermos lidando com números muito grandes, o erro pode ser grande em termos absolutos, mas o resultado ainda será preciso.

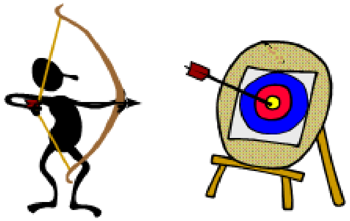
- O caso inverso também pode ocorrer: um erro absoluto pequeno, mas um resultado impreciso.

Definições: erro absoluto

Resultado de uma operação → 2.123.542,7

Valor real → 2.123.544,5

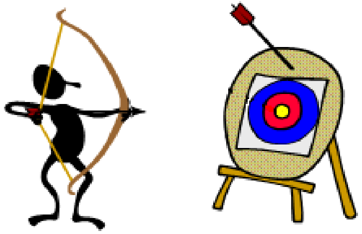
$$erro\ absoluto = 1{,}8$$



Resultado de uma operação → 0,234

Valor real → 0,128

$$erro\ absoluto = 0{,}106$$



Definições: erro relativo

- Para evitar ambigüidade, podemos criar uma nova definição:

$$erro = \frac{valor\ real\ -\ valor\ aproximado}{valor\ real}$$

Erro Relativo

- É uma forma mais geral de se avaliar a *precisão* de um cálculo efetuado.

Definições: erro relativo

Resultado de uma operação → $2.123.542,7$

Valor real → $2.123.544,5$

$$erro\ absoluto = 1{,}8$$

$$\underline{erro\ relativo = 0{,}000008}$$

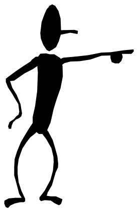
Resultado de uma operação → $0,234$

Valor real → $0,128$

$$erro\ absoluto = 0{,}106$$

$$\underline{erro\ relativo = 0{,}83}$$

Tipos de erros

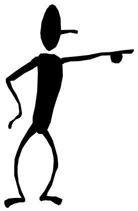


- A resolução de um problema de engenharia num computador utilizando um modelo numérico produz, em geral, uma solução aproximada do problema. A introdução de erros na resolução do problema pode ser devida a vários fatores.

☹ Erros de arredondamento;

☹ Erros de truncamento.

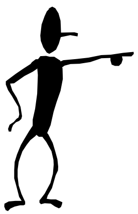
Erros de arredondamento



- Quer os cálculos sejam efetuados manualmente quer obtidos por computador somos conduzidos a utilizar uma aritmética de precisão finita, ou seja, apenas podemos ter em consideração um número finito de dígitos. O erro devido a desprezar os outros e arredondar o número é designado por erro de arredondamento.

$$\sqrt{2} = 1,41 \qquad \sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{2} = 1,41421356237309$$

Erros de Truncamento



- Muitas equações têm soluções que apenas podem ser construídas no sentido que um processo infinito possa ser descrito como limite da solução em questão. Por definição, um processo infinito não pode ser completado, por isso tem de ser truncado após certo número finito de operações. Esta substituição de um processo infinito por um processo finito, resulta num certo tipo de erros designado erro de truncamento.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

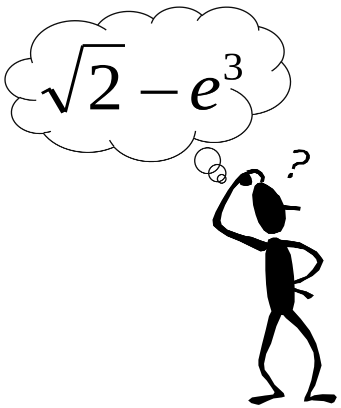
Truncamento da série !!

☹ Erros de arredondamento;

☹ Erros de truncamento.

são erros que ocorrem no processo de cálculo de uma solução numérica

Propagagação e condicionamento de erros numéricos



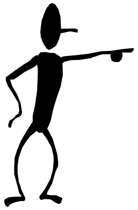
$$\sqrt{2} \rightarrow arredondamento$$ (valor aproximado)

$$e^3 \rightarrow truncamento$$ (erro no resultado obtido)

$\sqrt{2} - e^3$ ➡ Apresentará um erro que é proveniente dos erros nos valores de raiz de 2 e e^3.

Os erros nos valores se propagam para o resultado final

Propagação e condicionamento de erros numéricos

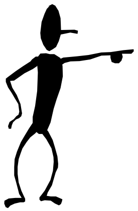


- A propagação de erros é muito importante pois, além de determinar o erro final de uma operação numérica, ela também determina a sensibilidade de um determinado problema ou método Numérico.

- Se uma pequena variação nos dados de entrada de um problema levar a uma grande diferença no resultado final, considera-se que essa operação é *mal-condicionada*, ou seja, existe uma grande propagação de erros nessa operação.

- Por outro lado, se uma pequena variação nos dados de entrada leva a apenas uma pequena diferença no resultado final, então essa operação é *bem-condicionada*.

Erros na aritmética em ponto flutuante



- Se pensarmos um pouco, erros de arredondamento e truncamento sempre estão presentes na matemática computacional, pois os computadores precisam representar os números com uma quantidade finita de algarismos.

- Vamos supor, para simplificação, um computador com uma representação de ponto flutuante na base decimal (β=10) e uma mantissa de 4 algarismos (t=4).

		<u>ERRO</u>
$734{,}68$	$0{,}7346\times10^{3}$ *(truncá-lo)*	$0{,}8\times10^{-1}$
	$0{,}7347\times10^{3}$ *(arredondá-lo)*	$0{,}2\times10^{-1}$

Erros na aritmética em ponto flutuante

- Exemplo:

$$6563 \quad \left(= 0{,}6563 \times 10^{4}\right)$$

$$3{,}375 \left(= 0{,}3375 \times 10^{1}\right)$$

$$6566{,}375$$

4 algarismos

$$0{,}6566 \times 10^{4} = 6566$$

- Apesar de partirmos de dois números exatos, o resultado da soma não será exata. Em um computador real, esse erro é pequeno, porém, se um número muito grande de operações for realizado e se existir a necessidade de se obter um resultado bastante preciso, será preciso se levar em consideração esse tipo de erro para avaliar o resultado obtido.

- Livro eletrônico (disponível na biblioteca online da Univali) – Leitura capítulos 1, 2 e 3.

https://biblioteca-a.read.garden/viewer/9788580555691/capa