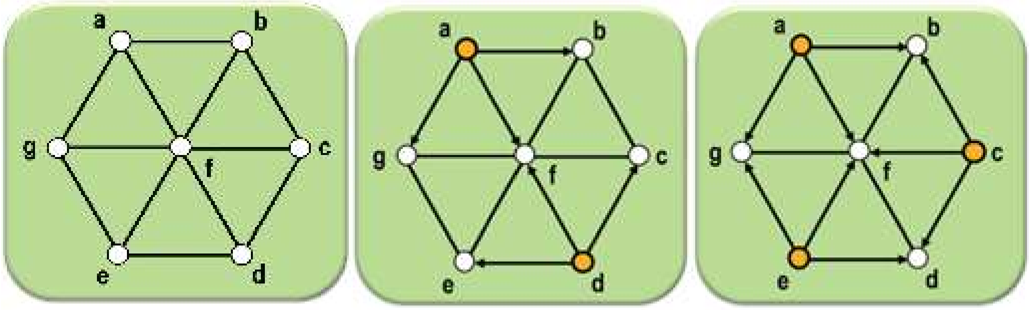
GRAFOS – COLORAÇÃO
CONJUNTOS INDEPENDENTES E CONJUNTOS DOMINANTES

CONJUNTOS INDEPENDENTES

Definição: Um conjunto independente (ou conjunto de estabilidade) de um grafo G é um subconjunto de vértices no qual não existam dois vértices adjacentes.
O número de independência $\alpha(G)$ é a cardinalidade do conjunto independente máximo (letra grega alpha).
Determinar o número de independência de um grafo é um problema NP-Difícil.

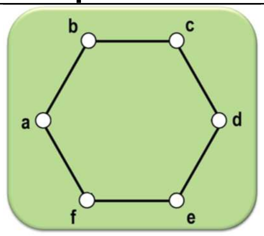
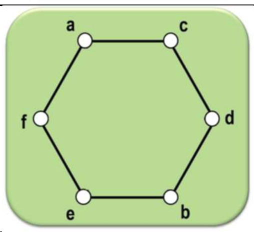


Na figura acima, temos o grafo original e dois conjuntos independentes, sendo o segundo conjunto com $\alpha(G) = 3$.

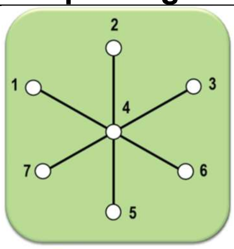
Algoritmo Guloso Simples para Construção de um Conjunto Independente Máximo

1. Selecione o próximo vértice (ordem lexicográfica ou de menor grau) ainda não considerado;
2. Se este vértice não possuir conflitos com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;
3. Remova as arestas deste vértice e os seus vértices vizinhos do grafo original;
4. Se houverem vértices ainda não considerados volte para 1.

Exemplos de execuções do algoritmo

	Execução1: considerando os vértices em ordem alfabética: a : OK b : removido c : OK d : removido e : OK f : removido Conjunto independente S = {a; c; e}, |S| = 3.
	Execução2: mesmo grafo, <u>com rótulos diferentes</u>: a : OK b : OK c : removido d : removido e : removido f : removido Conjunto independente S = {a; b}, |S| = 2.

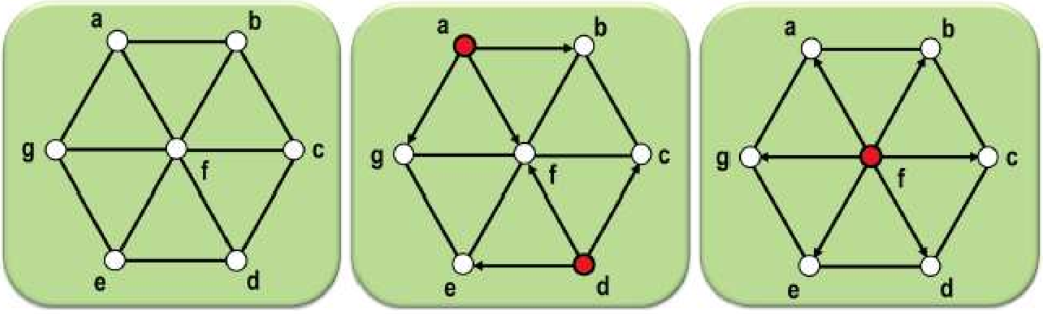
Caso patológico

	**Conjunto Independente Maximal** Suponha que o algoritmo comece sua execução pelo vértice 4. Tem-se S = {4} e |S| = 1. Este não é o conjunto independente **máximo**, mas não se pode adicionar nenhum outro vértice sem desfazer escolhas já feitas. Denomina-se o mesmo de conjunto independente maximal.

GRAFOS – COLORAÇÃO
CONJUNTOS INDEPENDENTES E CONJUNTOS DOMINANTES

CONJUNTOS DOMINANTES

Definição: Um conjunto dominante é um subconjunto de vértices tal que todo vértice do grafo está no conjunto ou é adjacente a um de seus vértices.
O número de dominação $\gamma(G)$ é a cardinalidade do menor conjunto dominante de G (letra grega gamma).
Determinar o conjunto dominante mínimo em um grafo sem características particulares é um problema NP-Difícil.



Na figura acima, temos o grafo original e dois conjuntos dominantes, sendo o segundo conjunto com $\gamma(G) = 1$.

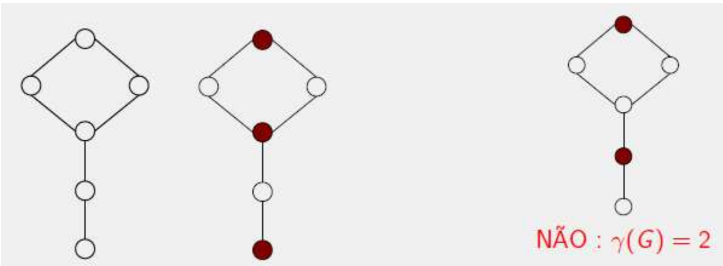
Outras definições importantes:

- Um conjunto dominante minimal é aquele que não pode ser diminuído.
- Um conjunto dominante mínimo é aquele de menor cardinalidade possível em um grafo.

Algoritmo Guloso para Determinação de γ(G)

Selecionar em sequência os vértices com maior grau (que cobrem uma quantidade maior de vértices), até que se obtenha um conjunto dominante.

Problema: nem sempre funciona...



Teorema:

Se S ϵ V é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo G=(V,E), então V \ S também é um conjunto dominante.

Demonstração:

Pelas condições do teorema, todos os vértices de V \ S também são adjacentes a um vértice de S.
Pela minimalidade, todo vértice v de S também é adjacente a algum vértice de V \ S, senão S \ {v} seria também dominante. Logo, V \ S também é dominante.

Implicação:

Limite máximo de n/2 elementos no conjunto dominante mínimo.

Relação entre Conjuntos Dominantes e Conjuntos Independentes

- Um conjunto independente maximal é sempre dominante.
- Um conjunto dominante mínimo pode não ser independente.