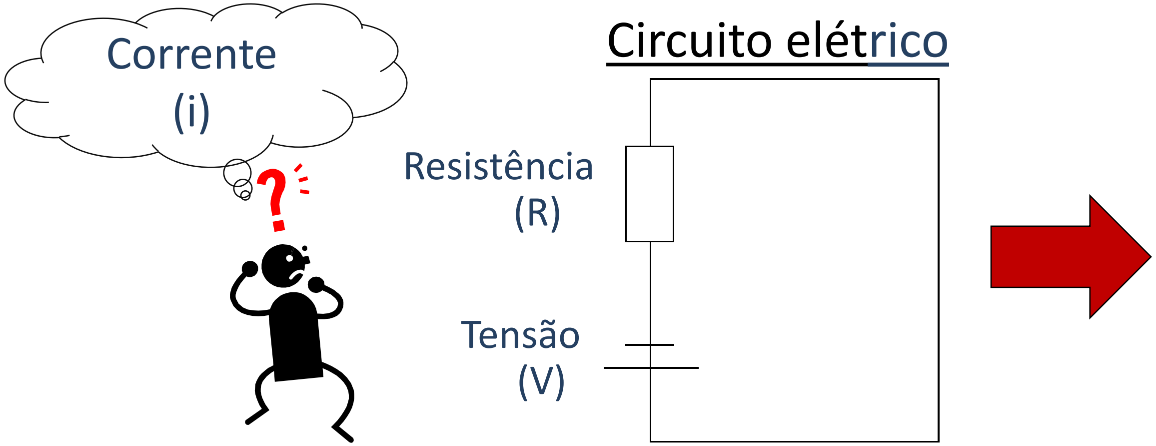
Zeros Reais de Funções Reais

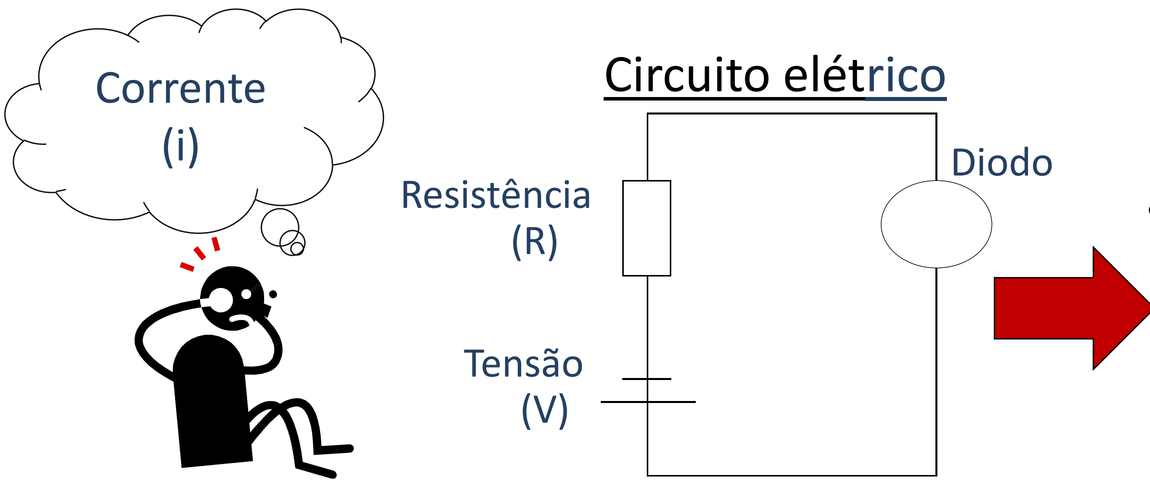
Prof. Paulo Roberto O. Valim
(pvalim@univali.br)

No primeiro exemplo apresentado vimos:



Lei de Kirchoff

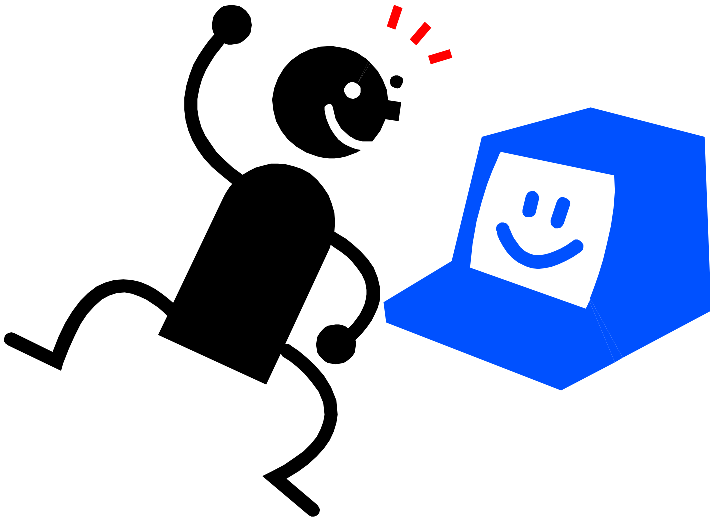
$$V = i \times R$$



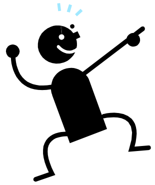
$$V - Ri - \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{i}{I_s}+1\right) = 0$$

precisamos resolver ou encontrar o zero da função

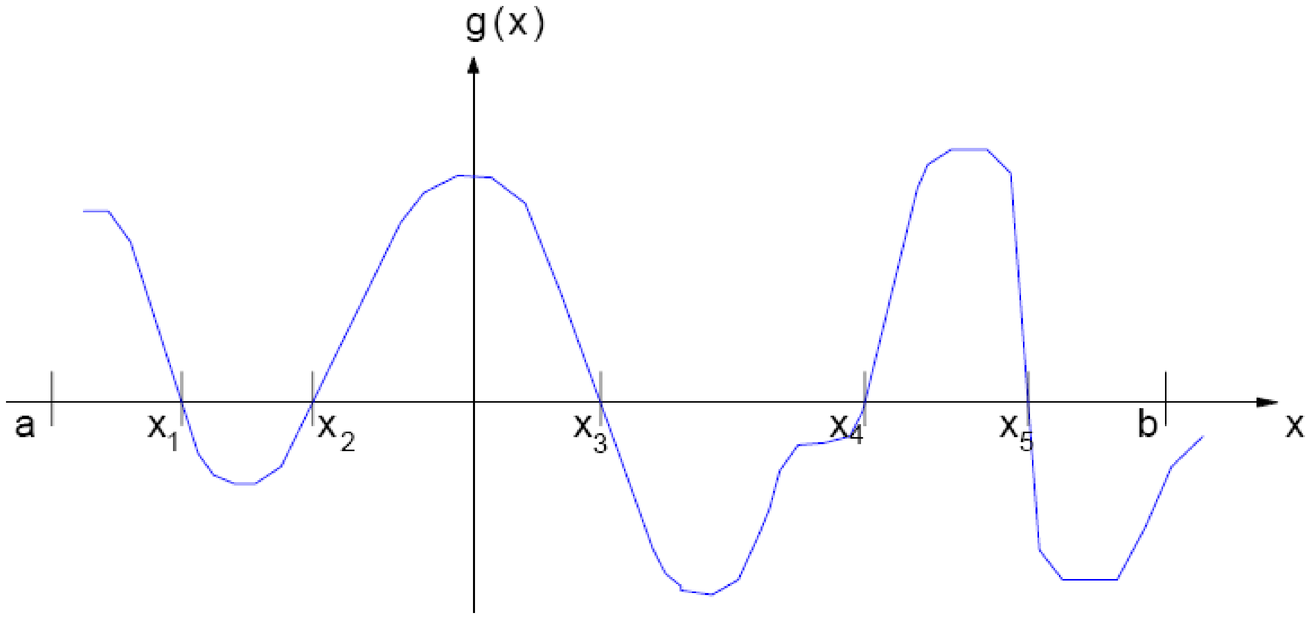
Assim, vamos iniciar o estudo de métodos numéricos que nos permitirão resolver problemas como o citado anteriormente



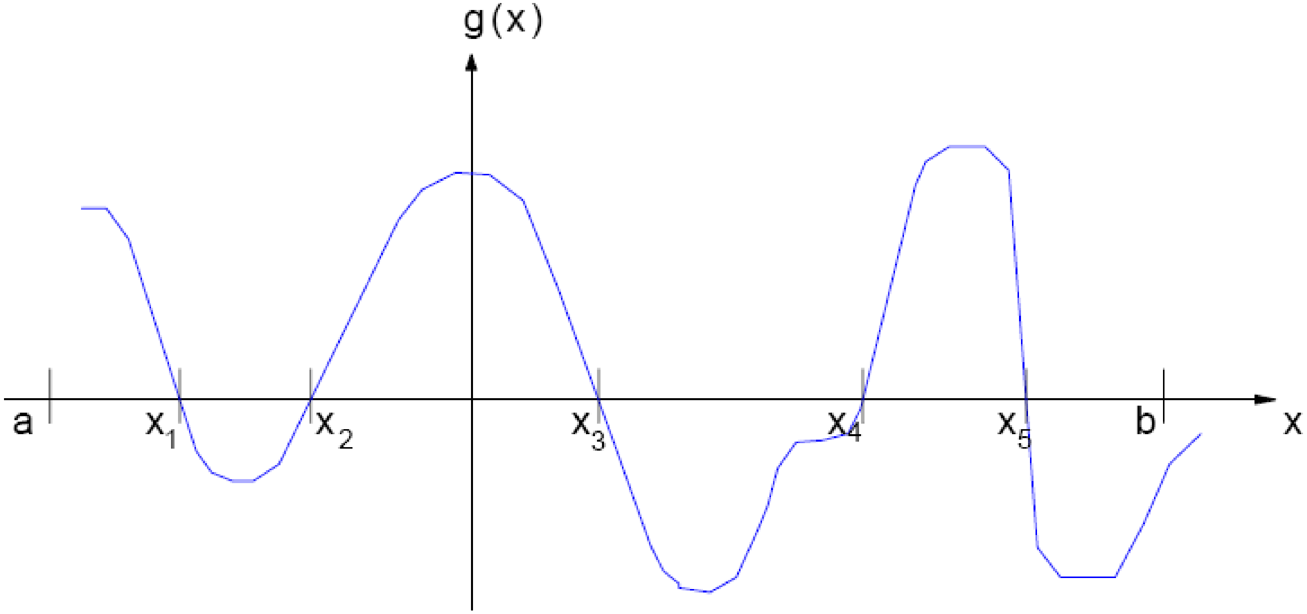
Zeros ou Raizes de Funções



- Dada uma função $f(x)$, dizemos que α é raiz, ou zero de f se e somente $f(\alpha)=0$.
- Graficamente, os zeros de uma função correspondem ao ponto x em que a função intercepta o eixo das abcissas do gráfico.



Zeros ou Raizes de Funções



- A função $g(x)$ acima tem 5 raízes no intervalo [a,b]: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
- As raízes de uma função podem ser encontradas analiticamente, ou seja, resolvendo a equação $f(x)=0$ de maneira exata.

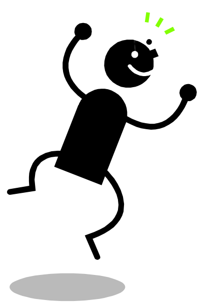
Exemplos

- Vejamos os seguintes exemplos:

a) $f(x) = x - 3$ → $x = 3$ é raíz de $f(x)$ pois: $f(3) = 3 - 3 = 0$

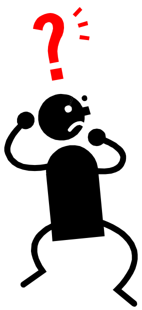
b) $g(x) = \frac{8}{3}x - 4$ → $\frac{8}{3}x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}x = 4 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 6$ → $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$ $\quad x_1 = 3$, $x_2 = 2$



Podemos sem grandes dificuldades determinar os zeros das funções acima

Mais exemplos

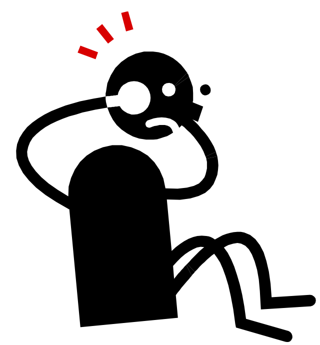


- Porém, nem sempre é possível encontrar analiticamente a raiz de uma função, como nos casos abaixo:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

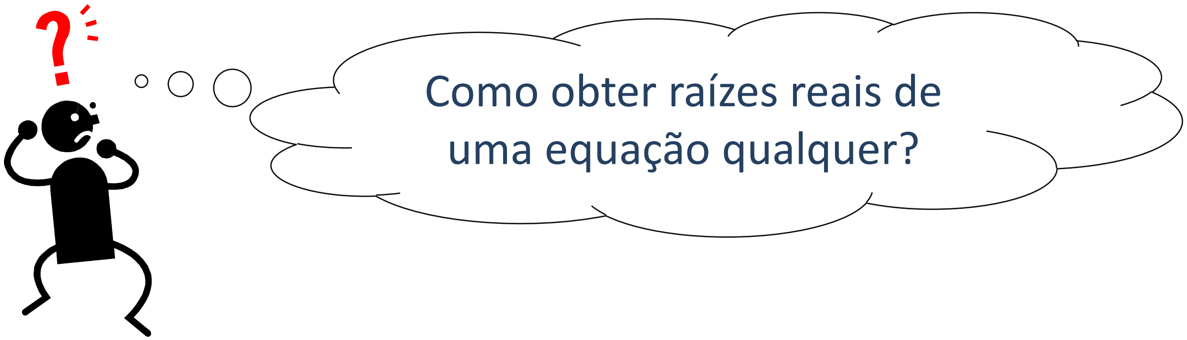
b) $g(x) = \text{sen}(x) + e^x$

c) $h(x) = x + \ln(x)$



Nestes casos precisamos de um método numérico para encontrar uma estimativa para a raiz da função estudada

Métodos Numéricos para Determinação de Zeros de Funções



- A idéia central destes métodos é partir de uma *aproximação inicial* para a raiz e em seguida *refinar essa aproximação* através de um processo iterativo.

- Por isso, os métodos constam de duas fases:

FASE I: Isolar cada zero que se deseja determinar da função *f* em um intervalo [a,b], sendo que cada intervalo deverá conter um e somente um zero da função *f* .

FASE II: Calcular a raiz aproximada através de um processo iterativo até a precisão desejada.

Processo iterativo

- Existe um grande número de métodos numéricos que são processos iterativos. Estes processos se caracterizam pela repetição de uma determinada operação.

- A idéia nesse tipo de processo é repetir um determinado cálculo várias vezes, obtendo-se a cada repetição ou iteração um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior.

- Cabe ressaltar que a cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte.

Processo iterativo

- Existem diversos aspectos comuns a qualquer processo iterativo:

  ✓ Estimativa inicial: Para iniciar um processo iterativo, é preciso ter uma estimativa inicial do resultado do problema. Essa estimativa pode ser conseguida de diferentes formas (depende do problema).

  ✓ Convergência: Para obtermos um resultado próximo do resultado real esperado, é preciso que a cada passo ou iteração, nosso resultado esteja mais próximo daquele esperado.

  ✓ Critério de Parada: Obviamente não podemos repetir um processo numérico infinitamente. É preciso pará-lo em um determinado instante. O critério adotado para parar as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada (depende do problema e da precisão que desejamos para obter a solução).

FASE I: Isolamento das Raizes

- Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ delimitar os zeros de f significa determinar intervalos [a, b] que contenham os zeros de f. Sendo que cada intervalo deverá conter um e somente um zero da função f.

- Existem dois métodos para resolver este problema:

1) Método Gráfico

2) Método Analítico

FASE I: Isolamento das Raizes

1) Método Gráfico: Como já foi observado, determinar os zeros de f é equivalente a determinar as raízes da equação $f(x) = 0$. Tendo como base esta observação o método gráfico consiste em :

- Escrever f como a diferença de funções g e h ou seja $f = g-h$ onde possamos sem muito esforço esboçar os gráficos das funções g e h;
- Usar $f(x) = 0 \leftrightarrow g(x) = h(x)$;
- Esboçar, da melhor maneira possível, os gráficos de g e h e determinar por inspeção os intervalos onde estão os pontos de interseção de $g(x)$ e $h(x)$ ou seja os pontos onde $g(\bar{x}) = h(\bar{x})$

FASE I: Isolamento das Raizes

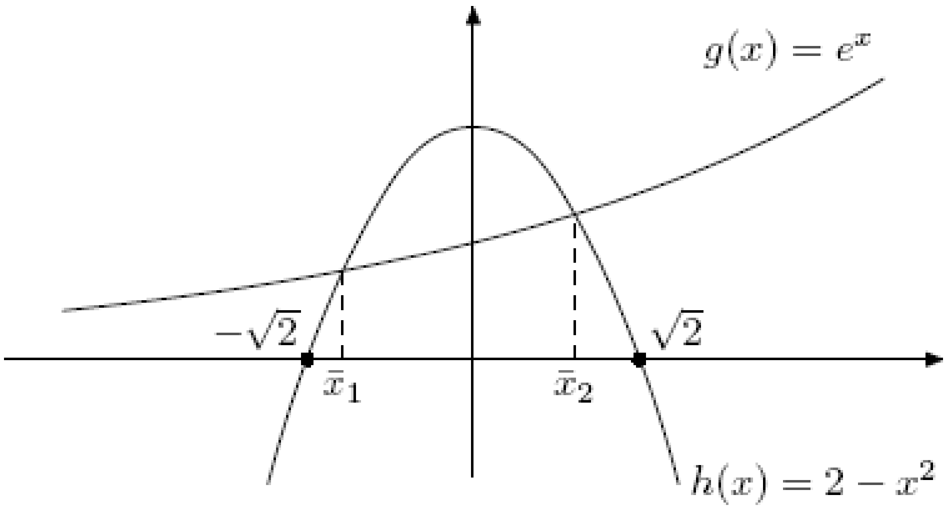
- Vejamos os seguintes exemplos:

a) Delimitar os zeros da função $f(x) = e^x + x^2 - 2$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

$f(x) = 0 \iff e^x + x^2 - 2 = 0 \iff e^x = 2 - x^2$

Assim temos $g(x) = e^x$ e $h(x) = 2 - x^2$



$\therefore \exists\, \bar{x}_1$ zero de $f \in (0, \sqrt{2})$

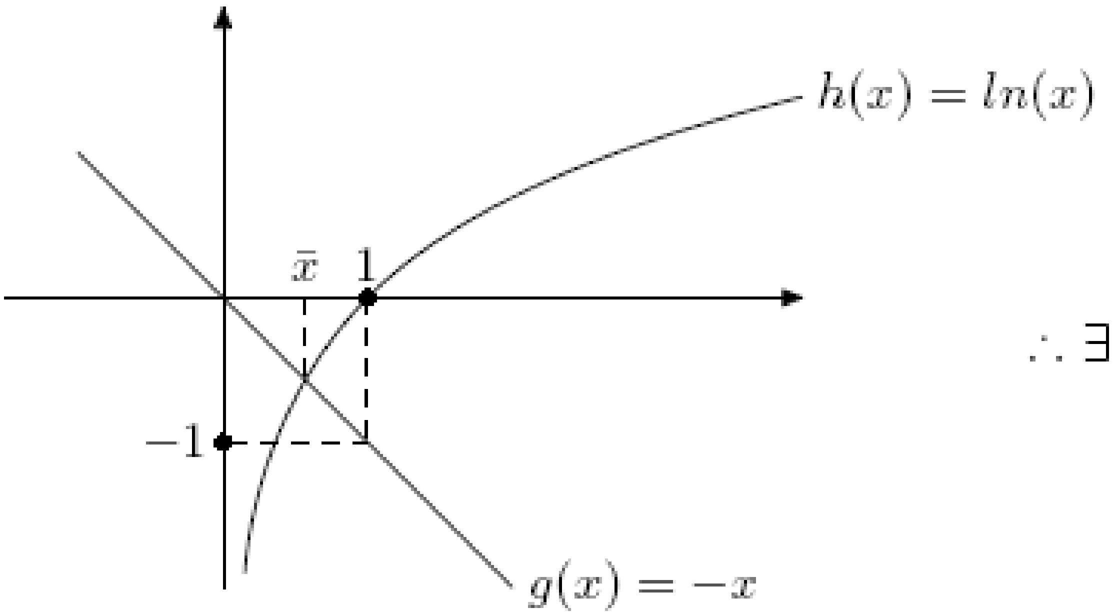
$\exists\, \bar{x}_2$ zero de $f \in (-\sqrt{2}, 0)$

FASE I: Isolamento das Raizes

b) Delimitar os zeros da função $f(x) = ln(x) + x$

$\boxed{\textbf{Solução}}$

$f(x) = 0 \iff ln(x) + x = 0 \iff ln(x) = -x$



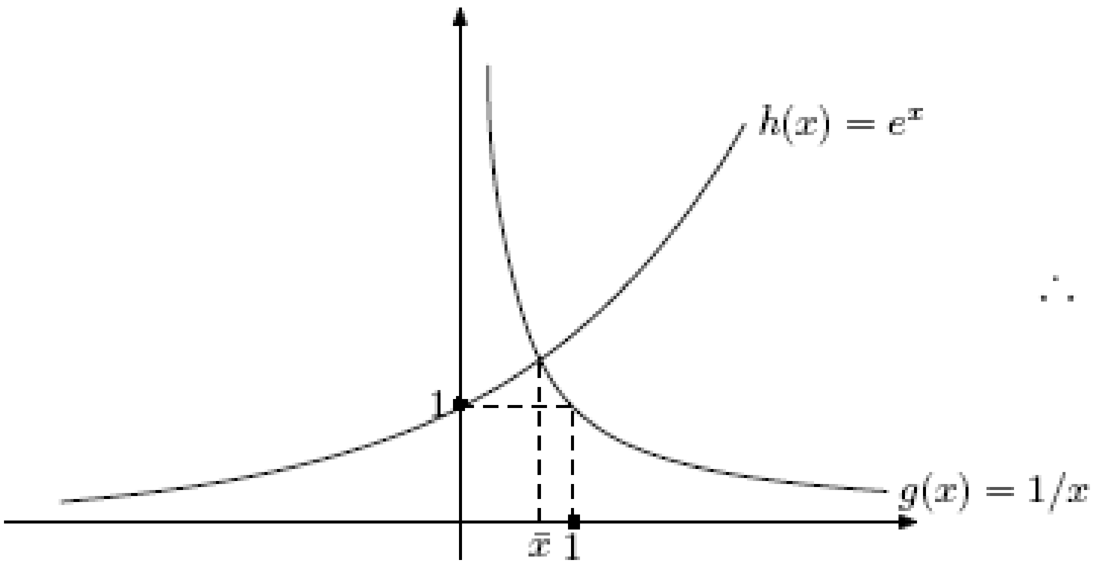
$\therefore \exists\ \bar{x}$ zero de $f : \bar{x} \in (0, 1)$

FASE I: Isolamento das Raizes

c) Delimitar os zeros da função $f(x) = e^x - 1/x$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

$$f(x) = 0 \iff e^x - 1/x = 0 \iff e^x = 1/x$$



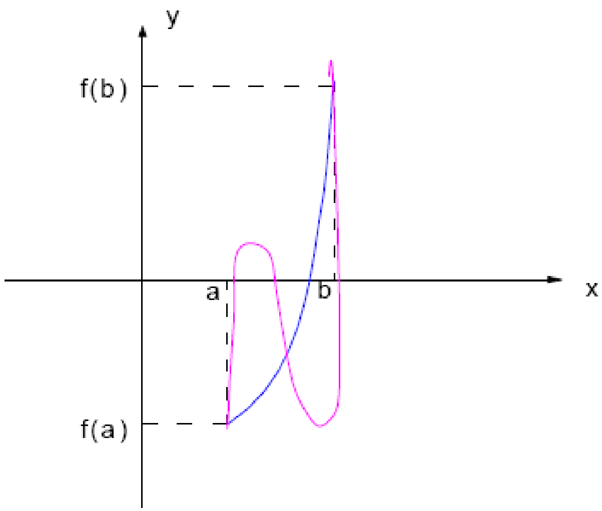
$\therefore \exists\, \bar{x}$ zero de $f : \bar{x} \in (0,1)$

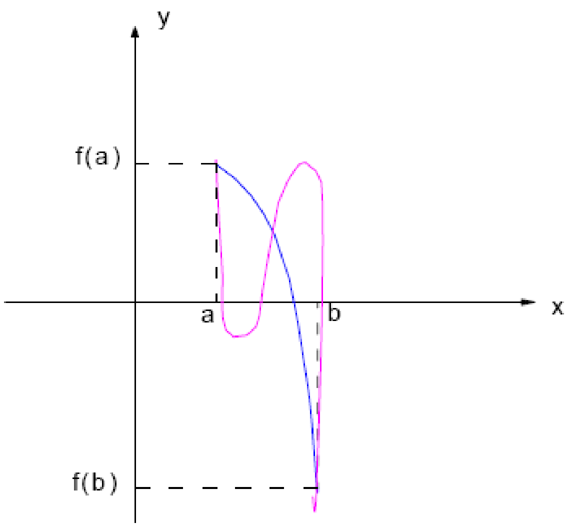
FASE I: Isolamento das Raizes

1) Método Analítico: Este método é baseado no seguinte teorema,

Teorema de Bolzano: Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo [a,b], tal que, $f(a).f(b)<0$. Então a função $f(x)$ possui pelo menos uma raiz no intervalo [a,b].

"O teorema assegura que se f troca de sinal nos pontos a e b então f tem pelo menos um zero entre estes pontos"





FASE I: Isolamento das Raizes

- Vejamos o seguinte exemplo:

a) Seja a função $f(x)=x \cdot \ln(x) - 3{,}2$. Podemos calcular o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x, como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3.20	-1.81	0.10	2.36

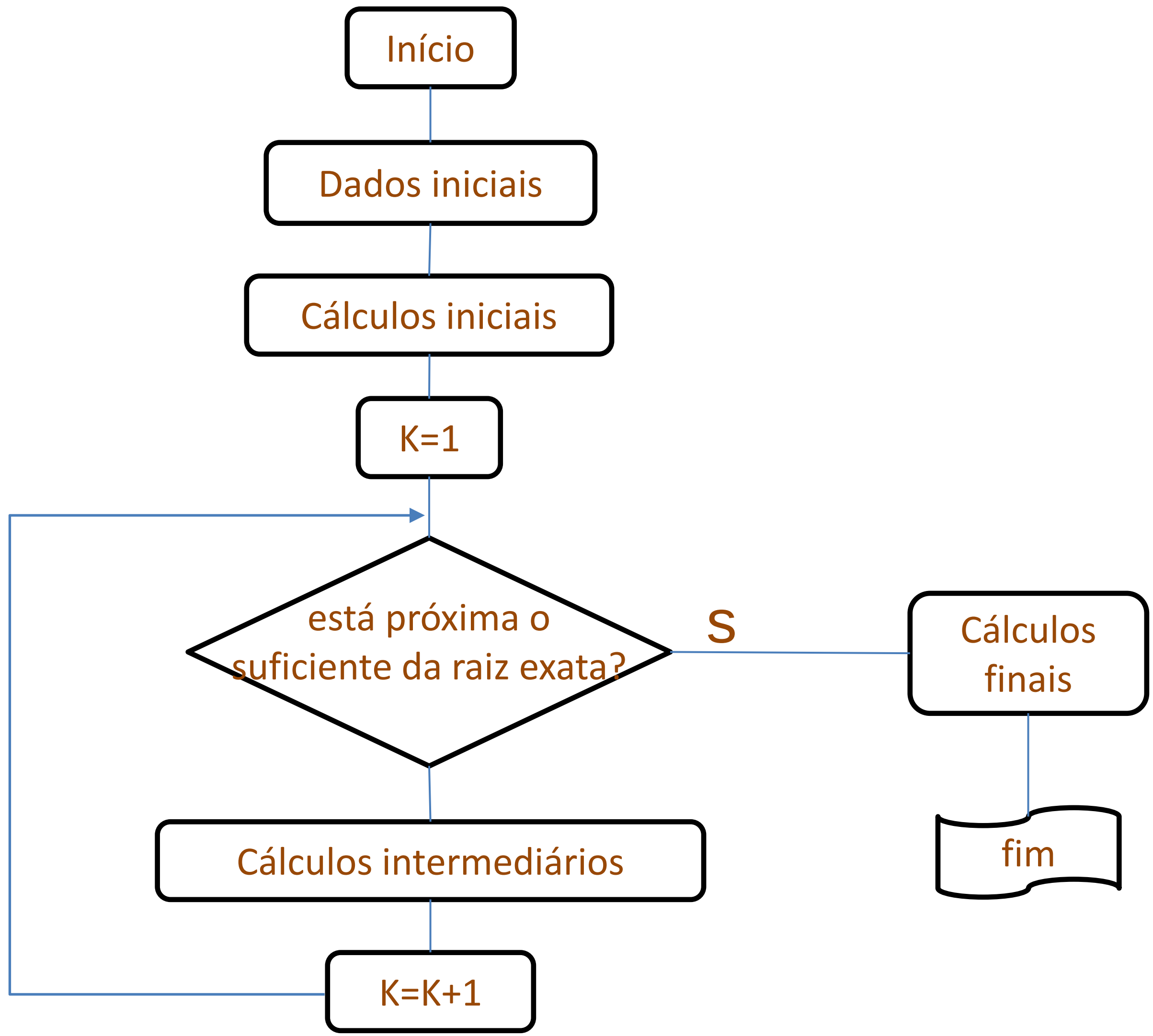
Pelo teorema de Bolzano, concluímos que existe pelo menos uma raiz real no intervalo [2,3].

FASE II: Refinamento

- Estudaremos vários métodos numéricos de refinamento de raiz. A forma como se efetua o refinamento é que diferença os métodos. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos.

- Os métodos iterativos para refinamento da aproximação inicial para a raiz exata podem ser colocados num diagrama de fluxo.

FASE II: Refinamento



Critérios de Parada

- Existem duas interpretações para raiz aproximada que nem sempre levam ao mesmo resultado.

$$\bar{x} \text{ é raiz aproximada com precisão } \varepsilon \text{ se:}$$

$$i) \ \left|\bar{x} - \alpha\right| < \varepsilon \quad ou$$

$$ii) \ \left|f(\bar{x})\right| < \varepsilon$$

Como efetuar o teste i) se não conhecemos α?

Uma forma é reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração. Ao se conseguir um intervalo [*a*,*b*] tal que:

$$\alpha \in [a,b]$$

$$\text{e}$$

$$b - a < \varepsilon$$

Métodos de Refinamento Iterativos

- Método da Bissecção;
- Método do Ponto Fixo (MPF);
- Método de Newton-Raphson;
- Método da Secante.

Método da Bissecção

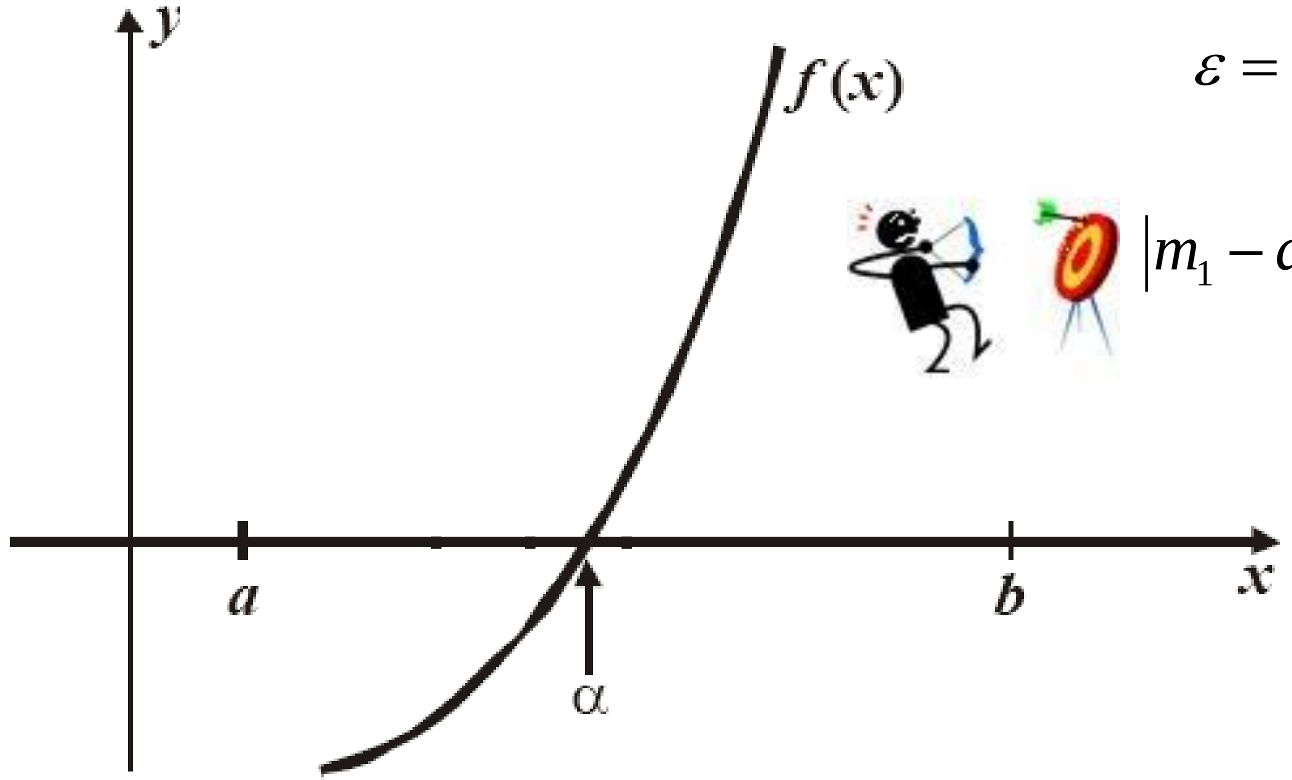
- O processo consiste em *dividir o intervalo que contém o zero ao meio* e por *aplicação* do Teorema de Bolzano, aplicado aos *subintervalos resultantes*, determinar qual deles *contém o zero*.

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

- O processo é repetido para o novo subintervalo *até que se obtenha uma precisão prefixada*. Desta forma, em cada iteração o zero da função é aproximado pelo ponto médio de cada subintervalo que a contém.

- Este método é normalmente utilizado para diminuir o intervalo que contém o zero da função, para a aplicação de outro método, pois o esforço computacional cresce demasiadamente quando se aumenta a precisão exigida.

Método da Bissecção



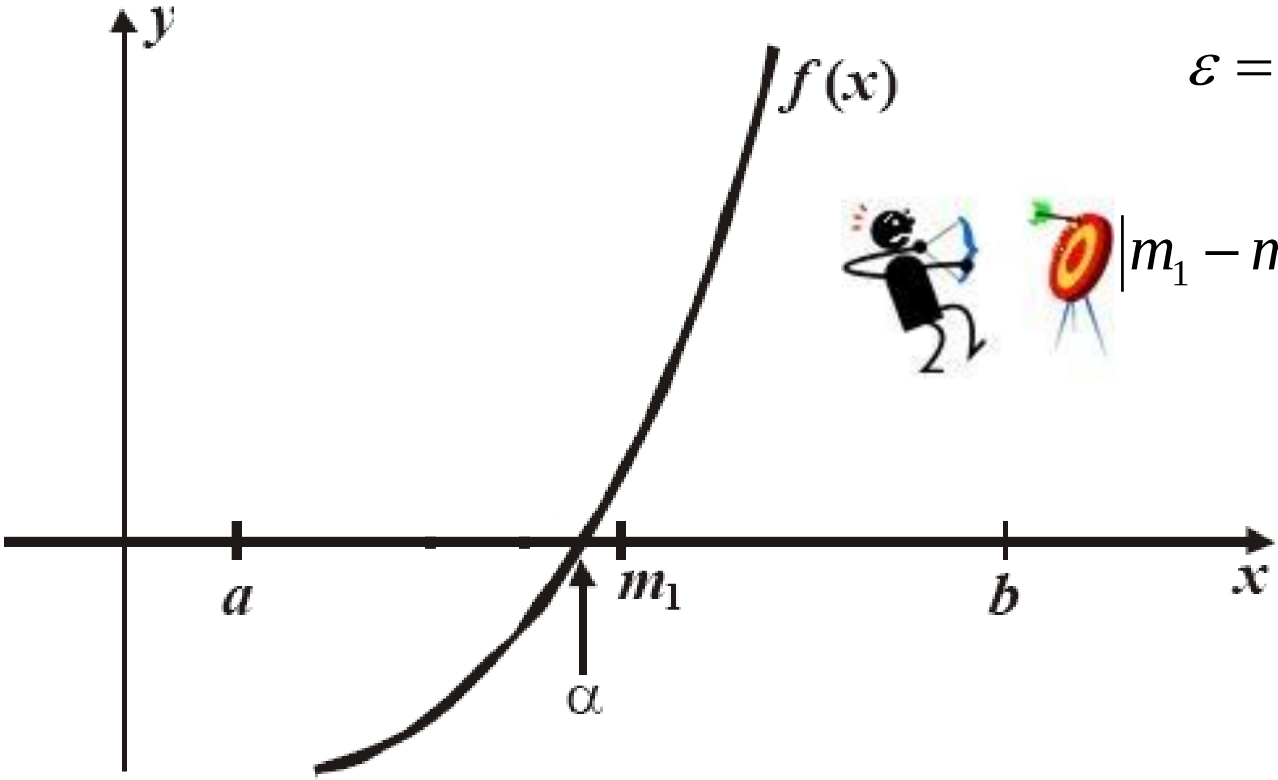
$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fixo}}$$

$$|m_1 - a| < \varepsilon$$

Iteração 1:

$$m_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{[a, m_1]} & \rightarrow \quad f(a) \times f(m_1) < 0 \\ [m_1, b] & \rightarrow \quad f(m_1) \times f(a) > 0 \end{cases}$$

Método da Bissecção



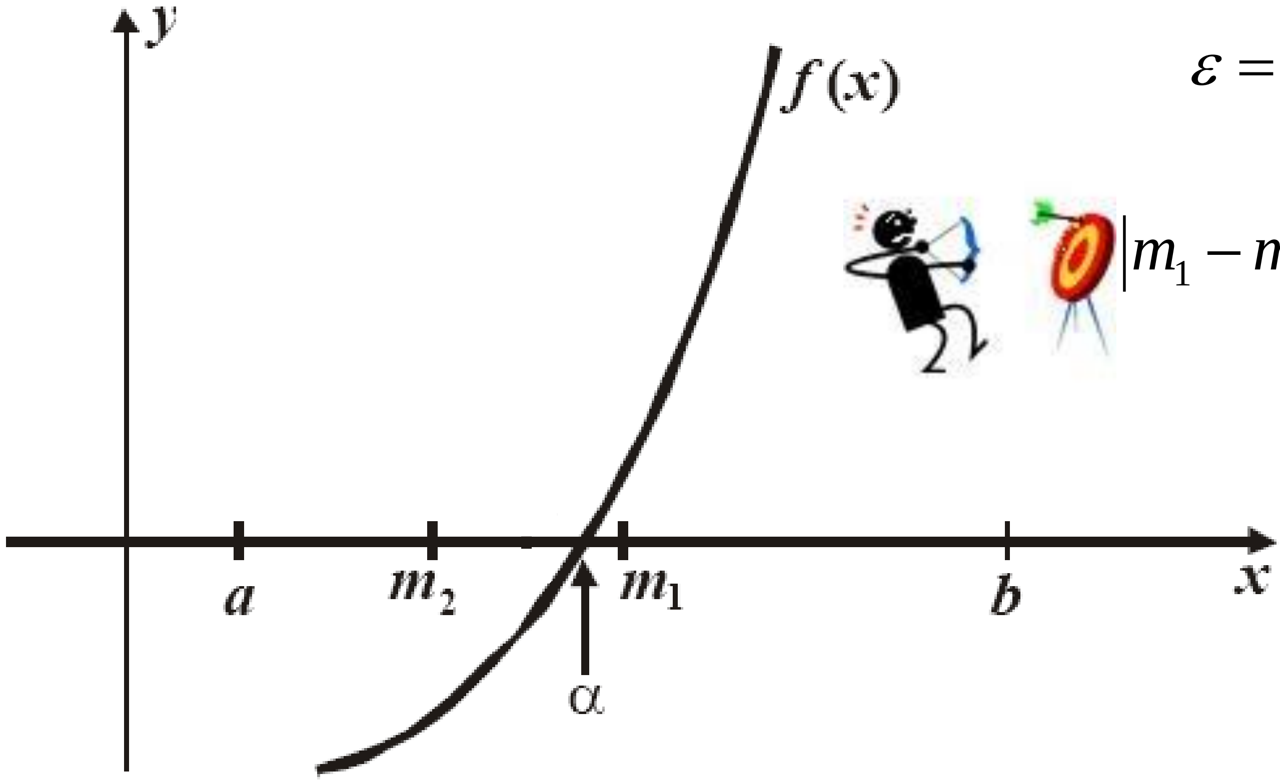
$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fixo}}$$

$$|m_1 - m_2| < \varepsilon$$

Iteração 2:

$$m_2 = \frac{a + m_1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [a, m_2] \\ \underline{[m_2, m_1]} \end{cases}$$

Método da Bissecção



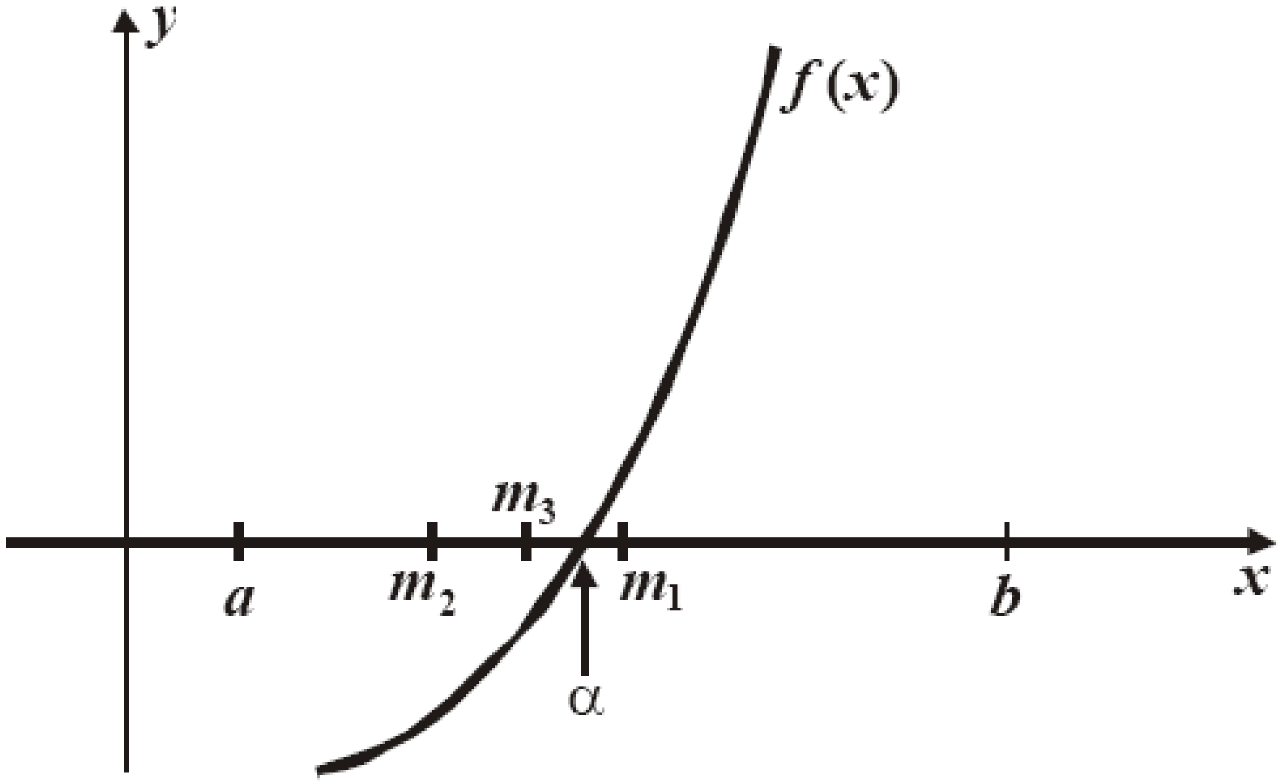
$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fixo}}$$

$$|m_1 - m_3| < \varepsilon$$

Iteração 3:

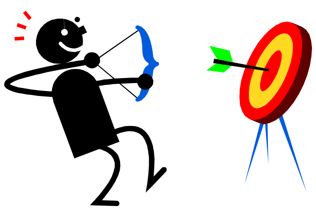
$$m_3 = \frac{m_2 + m_1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [m_2, m_3] \\ \underline{[m_3, m_1]} \end{cases}$$

Método da Bissecção

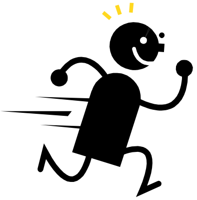


Continua até:

$$\left| m_i - m_j \right| < \varepsilon$$



Determinando o Número de Iterações

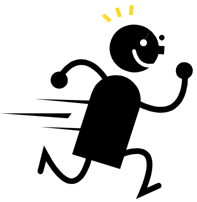


- Como em cada passo, dividimos o intervalo por 2, temos:

  - 1ª iteração ($n = 1$): é $\dfrac{(b-a)}{2}$
  - 2ª iteração ($n = 2$): é $\dfrac{(b-a)}{2^2}$
  - 3ª iteração ($n = 3$): é $\dfrac{(b-a)}{2^3}$

    $\vdots \qquad \vdots$
  - nª iteração: é $\dfrac{(b-a)}{2^n}$

Determinando o Número de Iterações



- Se o problema exige que o erro cometido seja inferior a um parâmetro ε, determina-se a quantidade n de iterações encontrando o maior inteiro que satisfaz a inequação:

$$\frac{(b-a)}{2^n} \leq \varepsilon$$

- Isto pode-se resolver como:

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \ln\left(\frac{b-a}{2^n}\right) \leq \ln\varepsilon \Rightarrow \ln(b-a) - \ln 2^n \leq \ln\varepsilon \Rightarrow$$

$$\ln(b-a) - n\ln 2 \leq \ln\varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}$$

Método da Bissecção (ALGORITMO)

Seja $f(x)$ contínua em [a,b] e tal que $f(a).f(b)<0$.

1) Dados Iniciais:
   a) Intervalo inicial [a,b]
   b) Precisão ε

2) Se $(b-a) < \varepsilon$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in [a,b]$. FIM
3) K=1
4) M=f(a)
5) x= (a+b)/2
6) Se M.f(x)>0, faça a=x. Vá para o passo 8.
7) b=x
8) Se $(b-a) < \varepsilon$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in [a,b]$. FIM
9) K=k+1. Volte para o passo 4.

Exercícios

Exemplo 1: Determine uma aproximação para $\sqrt{3}$ com erro inferior a 10^{-2}.

Observe que o problema é equivalente a determinar o zero de $f(x) = x^2 - 3$ com erro inferior a 10^{-2}.

$$f(x) = x^2 - 3,\ f(1) = -2 \text{ e } f(2) = 1 \Longrightarrow \exists\, \bar{x} \text{ zero de } f \text{ em } (1, 2)$$

Vamos calcular quantas etapas serão necessárias para atingir a precisão desejada ou seja determinar n tal que $(b_0 - a_0)/2^n < 10^{-2}$

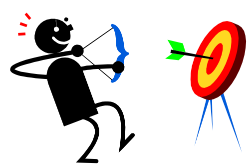
$$\frac{(b_0 - a_0)}{2^n} < 10^{-2} \iff \frac{(2-1)}{2^n} < 10^{-2} \iff 2^n > 10^2 \iff$$
$$\ln(2^n) > \ln(10^2) \iff n\ln(2) > 2\ln(10) \iff n > 2\ln(10)/\ln(2) = 6.64$$

Logo $n = 7$ ou seja devemos realizar 7 etapas.

Exemplo 1: Determine uma aproximação para $\sqrt{3}$ com erro inferior a 10^{-2}.

k	a_k	b_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

$$1.72657 - 1.73438 < 0.01 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1.72657 + 1.73438}{2} = 1.73048$$



Exercícios

Isole as raízes das seguintes equações: Obs.: erro < 10^{-2}

(a) $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$

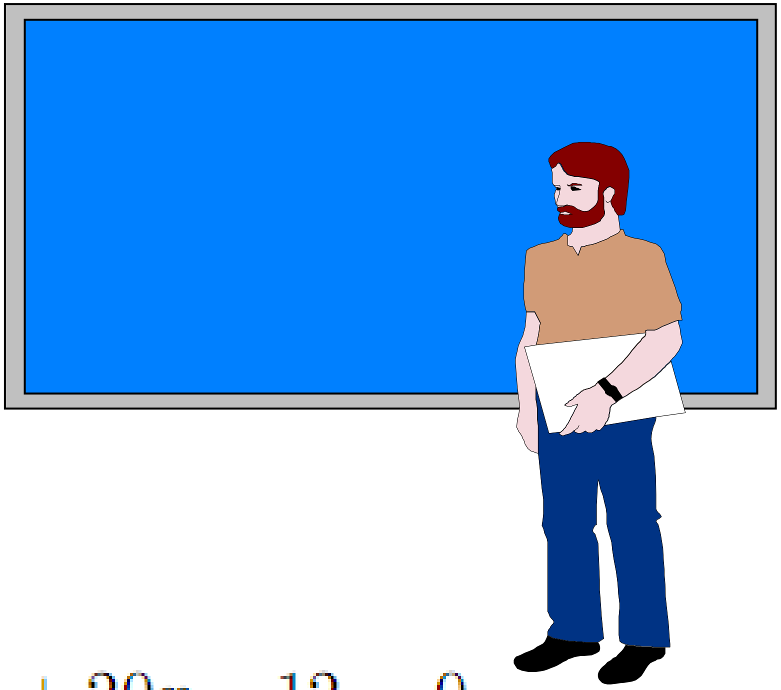
(b) $f(x) = x + \ln x = 0$

(c) $f(x) = x \ln x - 1 = 0$

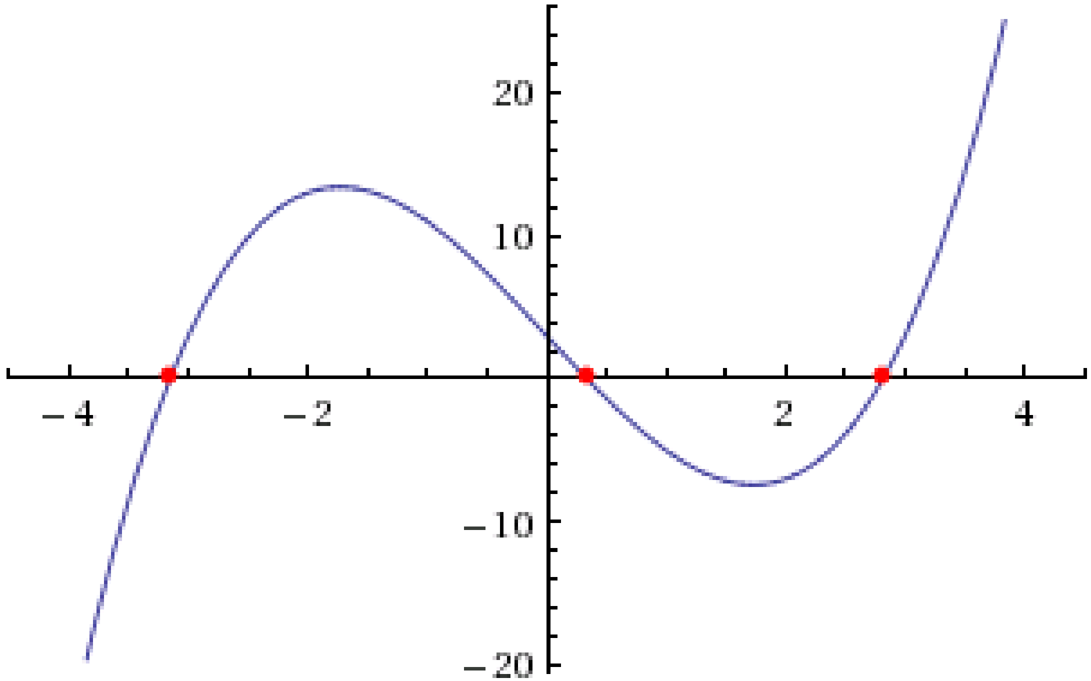
(d) $f(x) = x^3 + 2 + 10^x = 0$

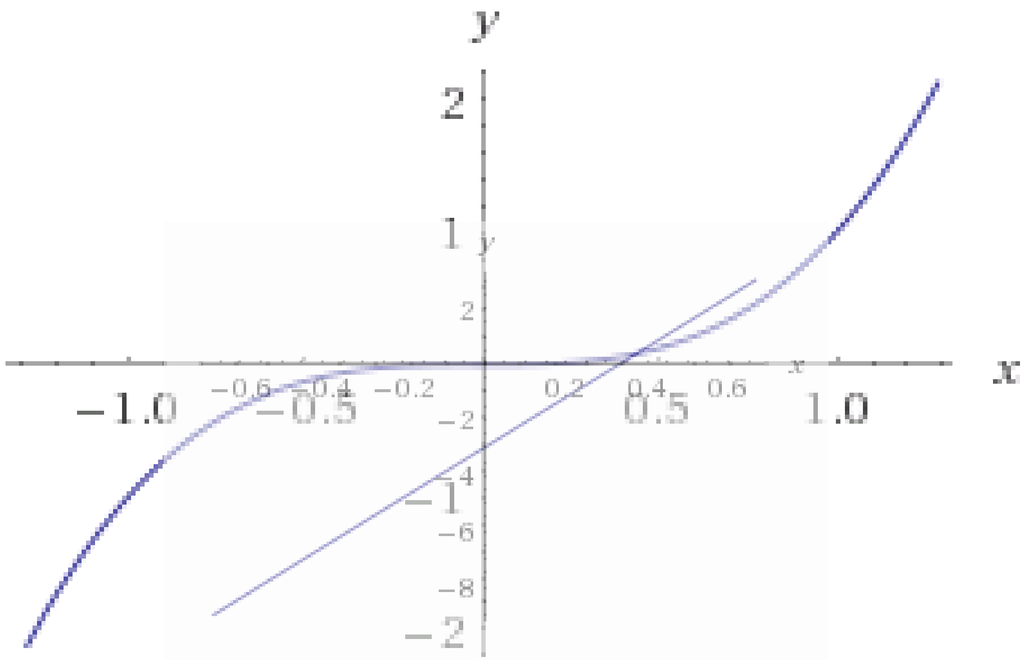
(e) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$

(f) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$

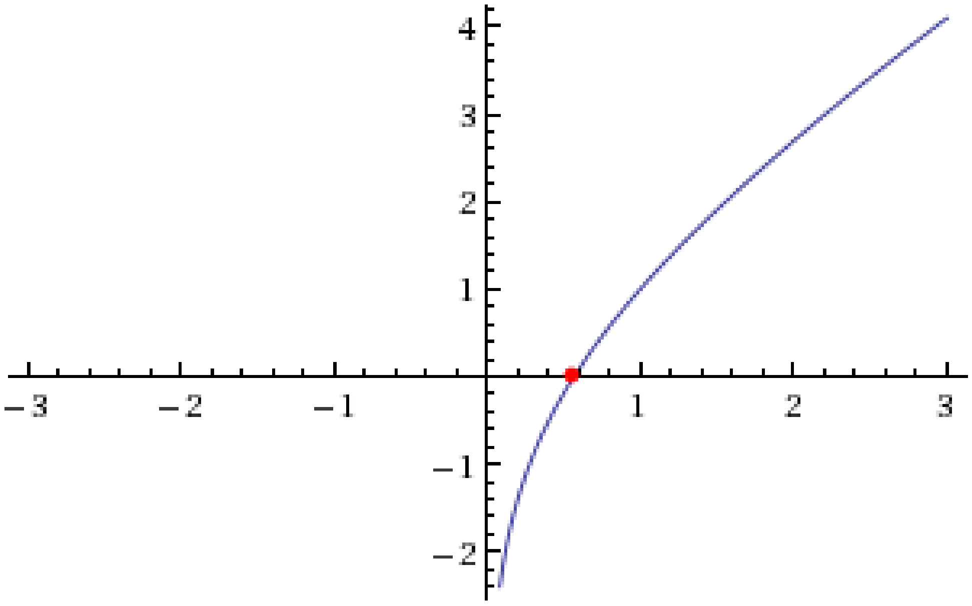


a)




y
2
1
2
−2
−4
−6
−8
−2
x
−1.0
−0.5
0.5
1.0
−0.6
−0.4
−0.2
0.2
0.4
0.6

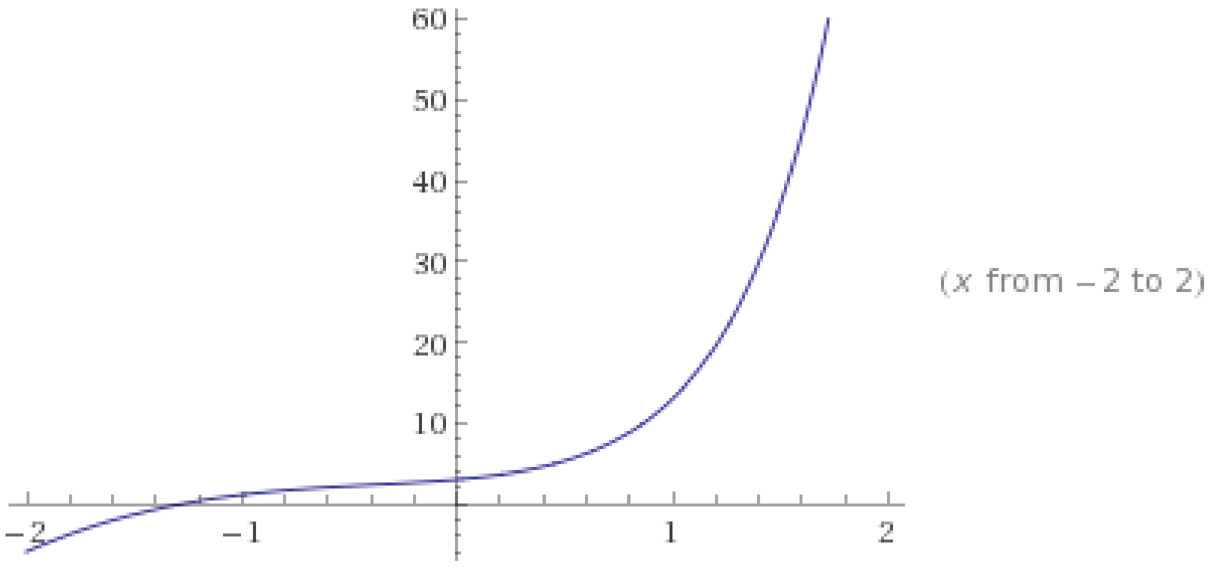
b)



Input interpretation:

plot	$(x^3 + 2) + 10^x$

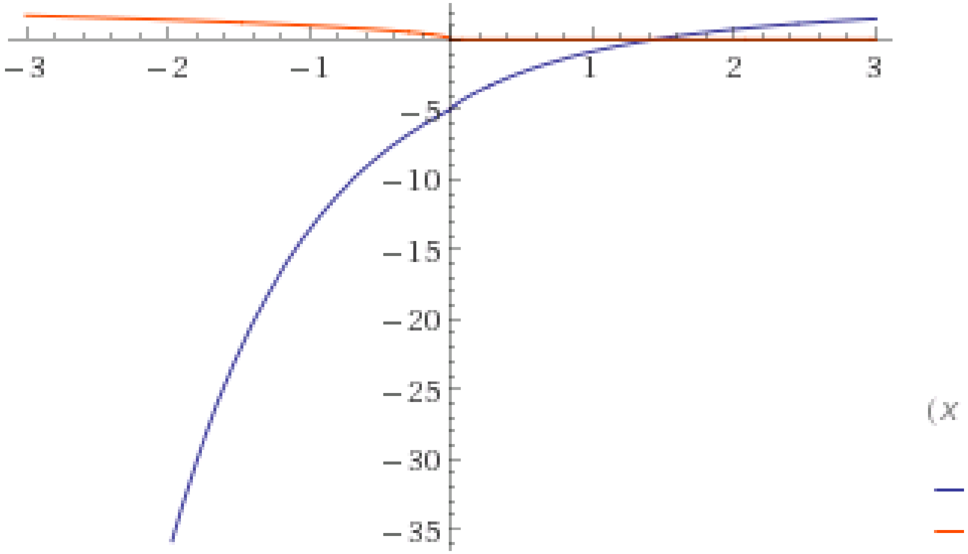
Plots:



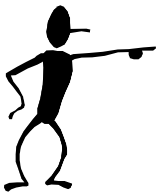
Input interpretation:

plot	$\sqrt{x} - 5\,e^{-x}$

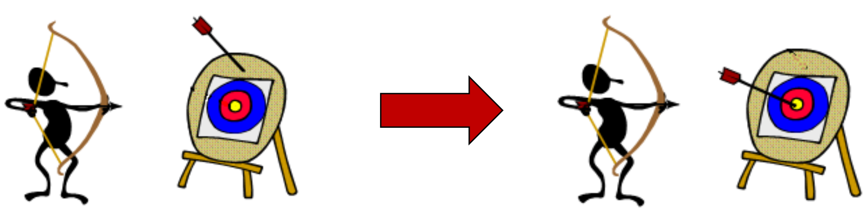
Plots:



Método do Ponto Fixo (MPF)



- Como já vimos, para utilizar o método da bissecção é *necessário* que exista *um intervalo* no qual a função troca de sinal.
- É claro que existem funções que *não satisfazem* esta propriedade. Uma função f tal que $f(x) \geq 0$ tem obviamente zeros que não podem ser determinados através do método da bissecção.
- Assim serão necessários *outros métodos* para se determinar aproximações para os zeros nestes casos.
- Um desses métodos é o *método do ponto fixo* ou *método da aproximação linear* ou *método das aproximações sucessivas*.



Método do Ponto Fixo (MPF)

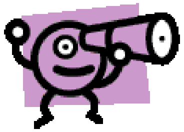
- Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a,b]$ que contenha uma raiz de $f(x)$. O Método do Ponto Fixo inicia-se reescrevendo a função $f(x)$ como,

$$f(x) = \varphi(x) - x$$

- Essa forma de escrever $f(x)$ é bastante útil. No ponto x que corresponde à raiz de $f(x)$, isto é, $f(x)=0$, teremos que:

$$f(x) = \varphi(x) - x = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x$$

- Ou seja, no ponto x que corresponde à raiz de $f(x)$, ao substituirmos o valor de x na função $\varphi(x)$, teremos como resultado o próprio valor de x. Portanto, a raiz de $f(x)$ será o ponto fixo de $\varphi(x)$, ou seja, o valor que ao ser substituído em $\varphi(x)$ retorna o próprio valor de x.



Exemplo

- Por exemplo, a função,

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

pode ser escrita como,

$$f(x) = x^2 - 2 - x = \varphi(x) - x$$

onde $\varphi(x)=x^2-2$.

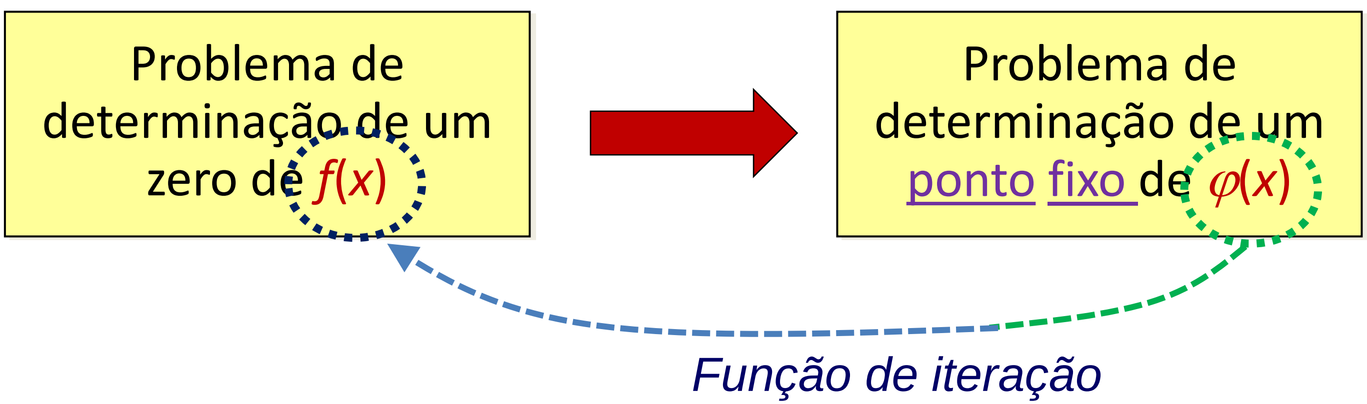
- Essa função tem como ponto fixo o valor $x=2$, pois $\varphi(2) = 2^2 - 2 = 2$. E esse é exatamente o valor da raiz de $f(x)$, pois $f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$.

Problema de determinação de um zero de $f(x)$	→	Problema de determinação de um ponto fixo de $\varphi(x)$

Método do Ponto Fixo (MPF)

- Portanto, para encontrarmos a raiz de $f(x)$, podemos encontrar o valor numérico que ao substituirmos em $\varphi(x)$, essa função retorna o próprio valor de x.

- Para encontrarmos esse valor de x, vamos utilizar um processo iterativo, onde começamos a calcular o valor de $\varphi(x)$ com um valor inicial de x, e recalculamos repetidamente o valor de $\varphi(x)$ sempre usando o resultado de uma dada iteração como a nova estimativa de x.

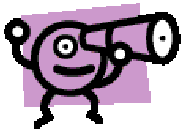


Método do Ponto Fixo (MPF)

- Neste método a seqüência de aproximações do zero a de uma função *f*(*x*) (*f*(α)=0) é obtida através de uma relação de recorrência da forma:

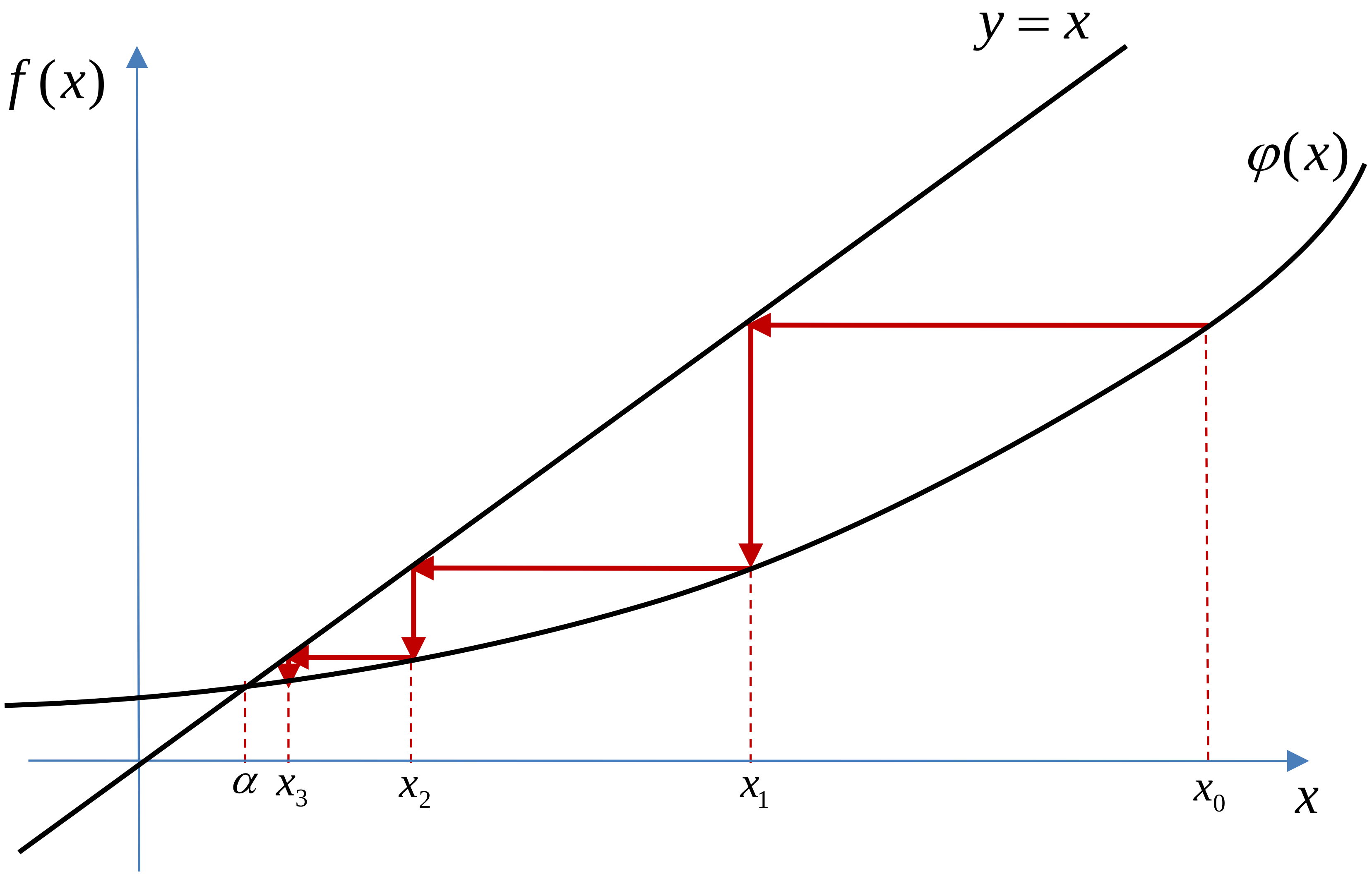
$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

onde, *k* é a ordem da iteração em que estamos (*k* = 0, 1, 2, 3, 4, ...). A função φ(*x*) é chamada de função de iteração. Ela não é única para uma dada função *f*(*x*), assim o bom resultado deste método depende de uma boa escolha de φ(*x*).

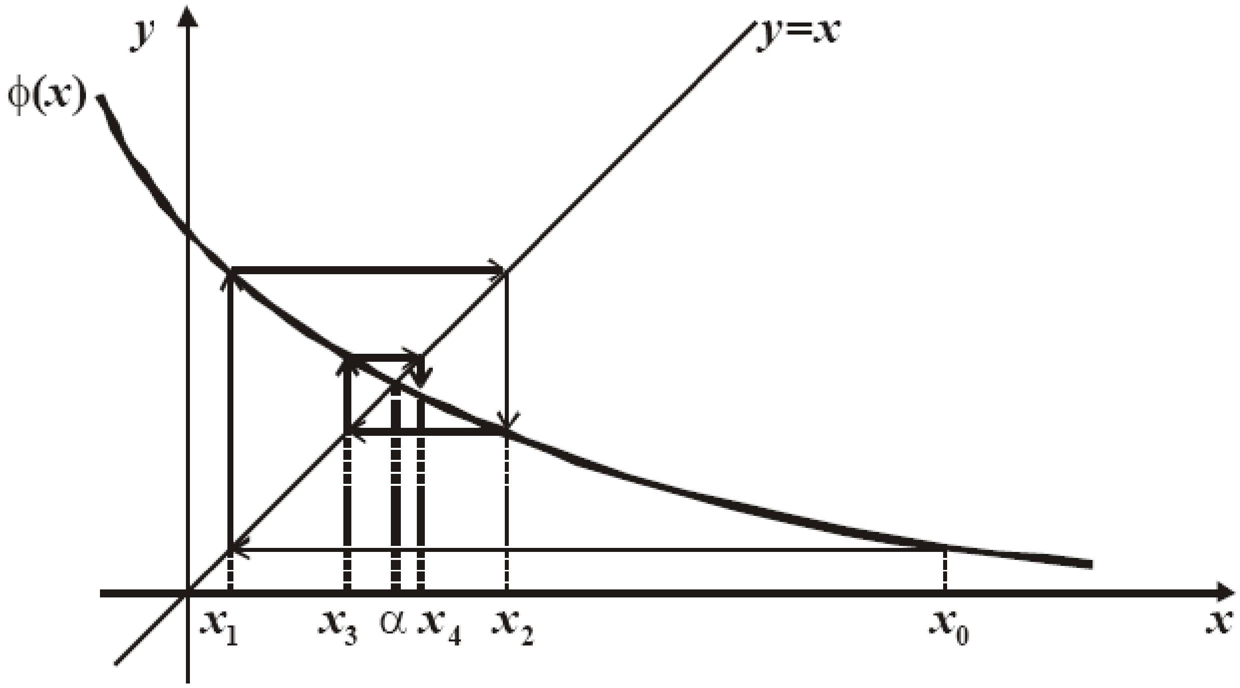


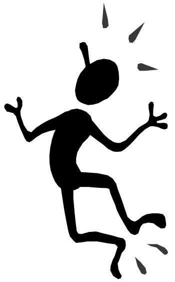
(estimativa de *x*)

Método do Ponto Fixo (MPF)



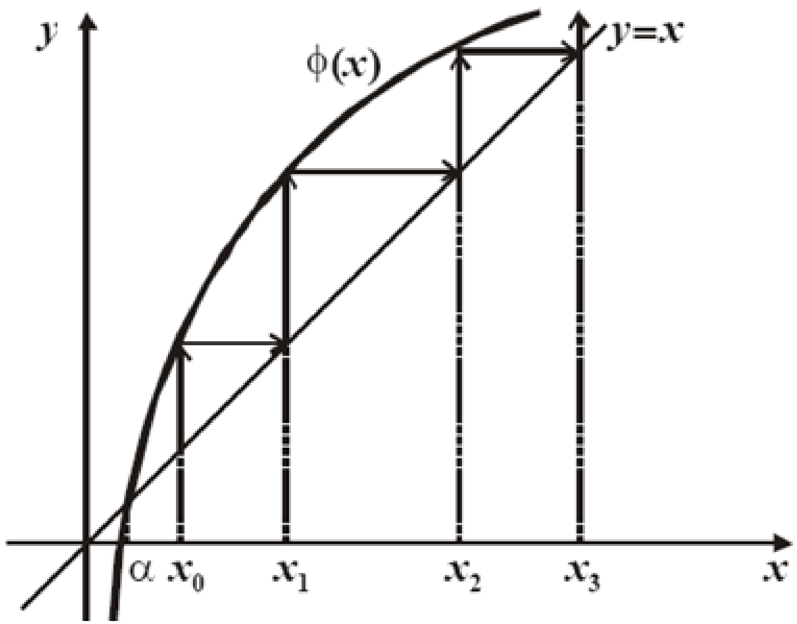
Método do Ponto Fixo (MPF)

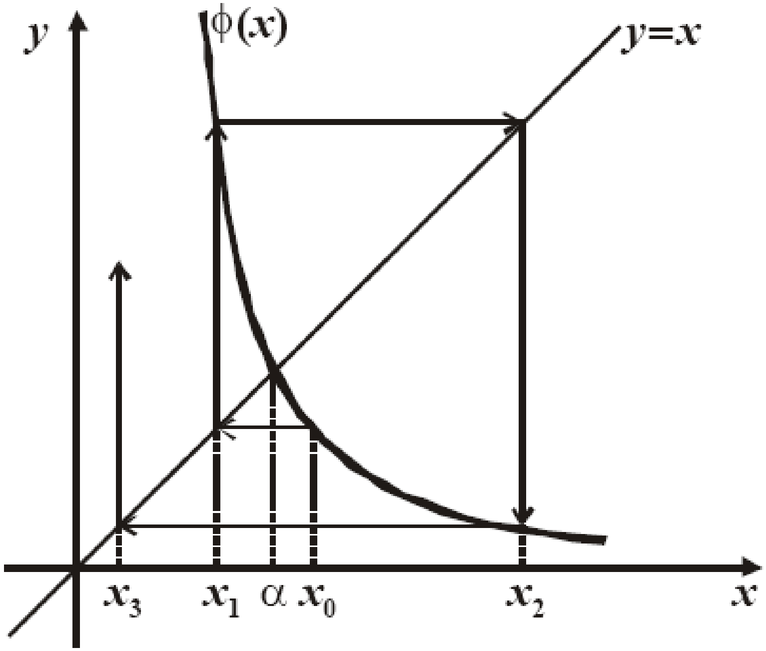


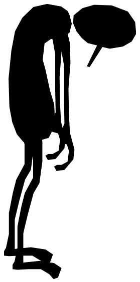


A seqüência $\{x_k\}$ converge para o zero α

Método do Ponto Fixo (MPF)







Para se obter um resultado coerente e preciso com um processo iterativo, é preciso que a cada iteração a resposta se aproxime mais e mais da solução real, ou seja, que o método convirja para o valor real.

Problema de Convergência

- No método de ponto fixo a convergência não é garantida *a priori*. A cada iteração podemos nos aproximar ou nos afastar da solução real. Portanto, é preciso se verificar se haverá ou não a convergência.

Teorema:
Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo [a,b] e α uma raiz de $f(x)$ contida em [a,b]. Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração obtida a partir de $f(x)$.

Se:

i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ forem contínuas em $[a,b]$;

ii) $|\varphi'(x)| < 1$ (para todo) $\forall\, x \in [a,b]$;

iii) $x_0 \in [a,b]$.

Então:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$$

Exercício

Exemplo 1: Calcular o zero da seguinte função sabendo que este encontra-se no intervalo [0,1].

$$f(x) = xe^{x} - 1$$

Solução:

$$f(x) = xe^{x} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} i)\,\varphi(x) = e^{-x} \\ ii)\,\varphi(x) = -\ln x \end{cases}$$

convergirá?

$$i)\;\; \varphi'(x) = -e^{-x} \Rightarrow |\varphi'(x)| = |e^{-x}| = e^{-x}$$

Como a função $f(x) = e^{-x}$ é decrescente no intervalo [0, 1], teremos $e^{-x} < 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Concluímos então que $|\varphi'(x)| < 1 \;\; \forall x \in [0, 1]$.

Assim escolhendo $x_0 \in [0, 1]$ a seqüência $x_n = \varphi(x_{n-1}) = e^{-x_{n-1}}$ convergirá para $\bar{x}$ que é o ponto fixo de φ e portanto o zero de f.

Exercício

Exemplo 1: Calcular o zero da seguinte função sabendo que este encontra-se no intervalo [0,1].

$$f(x) = xe^{x} - 1$$

Solução:

$$f(x) = xe^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} i)\, \varphi(x) = e^{-x} \\ ii)\, \varphi(x) = -\ln x \end{cases}$$

convergirá?

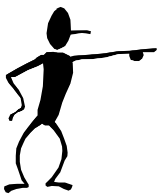
$$ii)\ \varphi'(x) = -\ln(x) \Rightarrow |\varphi'(x)| = |1/x| > 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

Essa escolha para $\varphi(x)$ não é adequada.

Exercício

k	$x_k = \varphi(x_{k-1}) = e^{-x_{k-1}}$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5 (arbitrário)	
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Critérios de Parada



- No caso do método do ponto fixo, podemos usar qualquer uma (ou todas simultaneamente) das condições abaixo como critério de parada:

1) Variação de x_k:

$$\left| x_k - x_{k-1} \right| < \varepsilon$$

Conforme avançamos no número de iterações, se as estimativas da raiz de $f(x)$ começam a variar muito pouco, podemos concluir que estamos bem próximos da raiz de $f(x)$ e o processo iterativo pode ser parado.

2) Valor de $f(x_k)$:

$$\left| f(x_k) \right| < \varepsilon$$

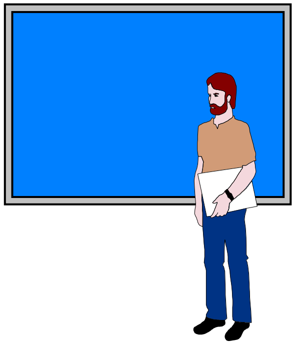
3) Número de Iterações

Exercícios

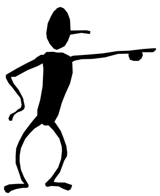
Obter a raiz usando o MPF:

$f(x)= x^2-7x$

$f(x)= \cos(x) - x$



Método de Newton Raphson



- O método de ponto fixo consiste em estimar a raiz de uma função $f(x)$ usando o processo iterativo:

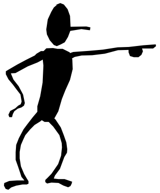
$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

- Essa expressão define a forma de $\varphi(x)$. Podemos escrever uma forma geral para essa função dada por:

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x)$$

pois, para x igual à raiz de $f(x)$, tem-se $f(x)=0$, ou seja $x=\varphi(x)$ para qualquer $A(x)\neq 0$.

Método de Newton Raphson



- Para haver a convergência no método da iteração linear é preciso que $|\varphi'(x)|<1$ em um intervalo $[a,b]$ que contém a raiz de $f(x)$.

- Portanto, a idéia no método de Newton-Raphson é escolher uma função $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(\alpha)=0$ onde α é a raiz de $f(x)$ e $\alpha \in [a,b]$.

- Com isso, teremos $|\varphi'(x)|<1$ desde que não nos afastemos muito do valor de α durante o processo de resolução do Problema.

Método de Newton Raphson

- Derivando φ(x) dada pela expressão anterior em relação a x, temos:

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x)$$

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x).f(x) + A(x).f'(x)$$

Exigindo que φ'(x)=0, tem-se:

$$0 = 1 + A'(x).f(x) + A(x).f'(x)$$

Portanto,

$$1 + A'(x).f(x) + A(x).f'(x) = 0$$

$$A(x).f'(x) = -1$$

$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Método de Newton Raphson

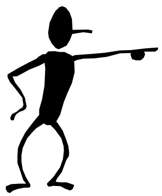
- O Método de Newton-Raphson consiste em usar o processo iterativo:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

e como função de iteração a expressão:

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Convergência no Método de Newton Raphson

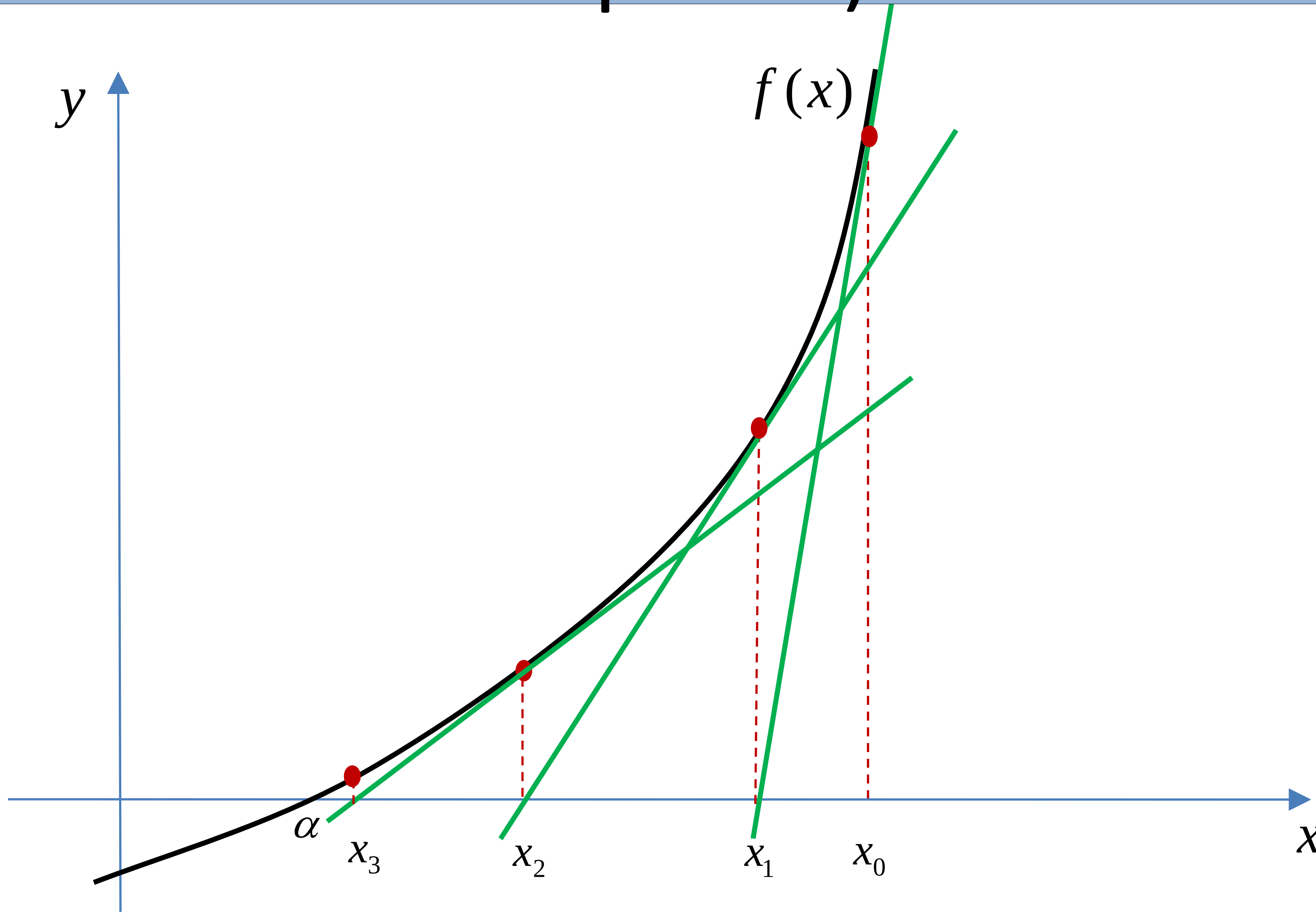


- Apesar de obtermos a forma da função φ(x) procurando garantir a convergência do processo iterativo, esta não esta sempre garantida para este método (mas quase sempre).

- A convergência no método de Newton-Raphson está sempre garantida para um certo intervalo [a,b] que contém a raiz de f(x), desde que f(x) e f '(x) sejam contínuas nesse intervalo e que f '(α)≠0, onde α é a raiz de f(x) (f(α)=0). Portanto, se utilizarmos uma estimativa inicial x_0 tal que $x_0 \in [a,b]$, a convergência estará garantida.

- Em outras palavras, para o método de Newton-Raphson convergir, é preciso que nossa estimativa inicial esteja próxima da raiz de f(x). A proximidade exigida para a convergência vai depender de caso a caso e nem sempre é simples de determinar.

Interpretação geométrica (Newton Raphson)



Exercício

Exemplo 1: Calcule a raiz de $f(x)=x^2+x-6$, usando o método de Newton-Raphson, $x_0=3$ como estimativa inicial e como critério de parada $|f(x_n)|\leq 0{,}001$.

Solução:

Para encontrar a raiz de $f(x)$ usando o método de Newton-Raphson, devemos ter:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

onde,

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi(x)=x-\frac{x^2+x-6}{2\cdot x+1}=\frac{2\cdot x^2+x-x^2-x+6}{2\cdot x+1}=\frac{x^2+6}{2\cdot x+1}$$

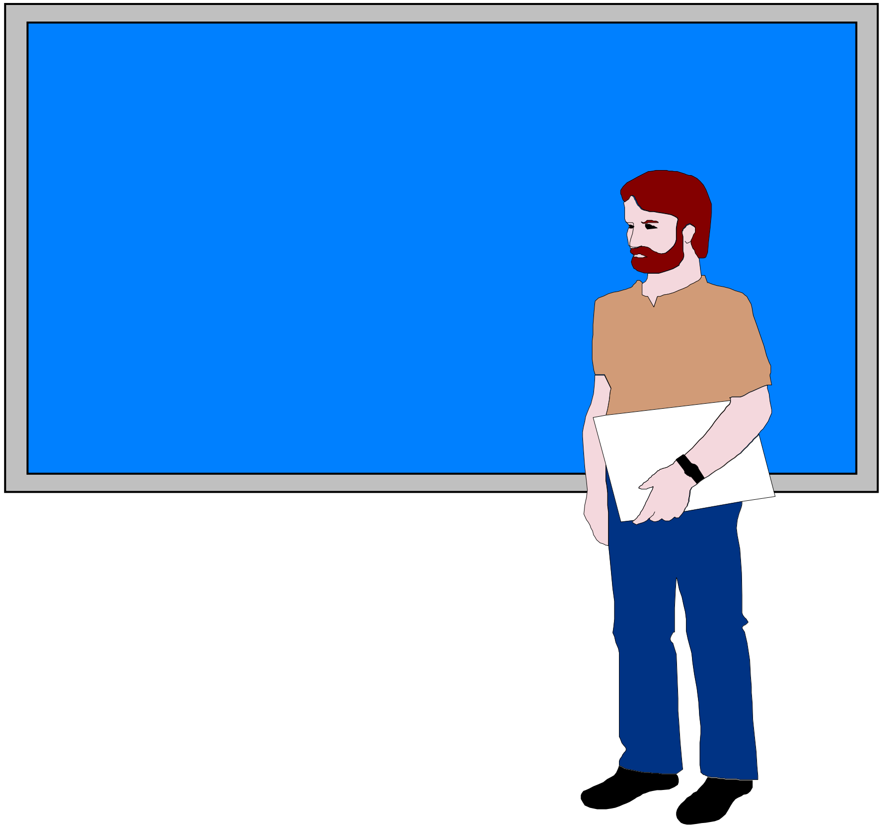
Exercício

Portanto, temos que:

n	x_n	$\varphi(x_n) = \dfrac{x_n^2 + 6}{2x_n + 1}$	$f(x_n) = x_n^2 + x_n - 6$
0			
1			
2			
3			

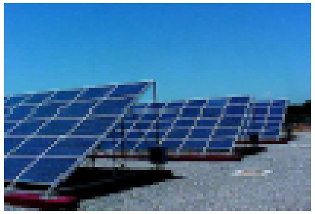
$$\bar{x} = 2{,}0000$$

Exercícios



1. A recolha de energia solar através da focagem de um campo plano de espelhos numa central de recolha foi estudada por Vant-Hull (1976). A equação para a concentração geométrica do factor C é dada por:

$$C = \frac{\pi (h/cos(A))^2 F}{0.5\pi D^2 (1 + sen(A) - 0.5cos(A))}$$



em que A é o ângulo do campo, F é a cobertura da fracção do campo com espelhos, D é o diâmetro do colector e h é o comprimento do colector. Considerando $h = 300$, $F = 0.8$ e $D = 14$, calcule o ângulo positivo A inferior a $\frac{\pi}{25}$ para o qual a concentração do factor C é 1200. Utilize o método iterativo mais adequado e considere no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ ou no máximo 3 iterações.

Considere a seguinte equação:

$$C = \frac{M}{r}[1-(1+r)^{-n}]$$

$f(r)$

$$10000 = \frac{1250}{r}[1-(1+r)^{10}] \Rightarrow \frac{1250}{r}[1-(1+r)^{10}] - 10000 = 0$$

em que C é o capital emprestado, M é a mensalidade, r é a taxa de juro por cada período (expressa como uma fracção) e n é o número de anos.

M

Uma pessoa pode pagar uma mensalidade de 1250 euros. Se pretender contrair um empréstimo de 10000 euros a 10 anos, qual é a taxa que poderá suportar?

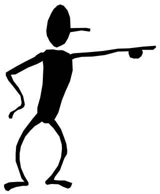
C n

Use um método iterativo que não recorre à derivada, fazendo duas iterações e apresentando uma estimativa do erro relativo cometido. O valor da taxa deve estar entre 0.01 e 0.05.

SECANTE

Método da Secante

Método da Secante



- Este método não é mais do que uma variante do método de Newton-Raphson visto anteriormente.

- O método da secante evita o cálculo de $f\,'(x)$ (em certos problemas pode consumir muito tempo de computação).

- No método da secante a derivada é substituída por:

$$f\,'(x) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Método da Secante

- conseqüentemente a fórmula de recorrência virá:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

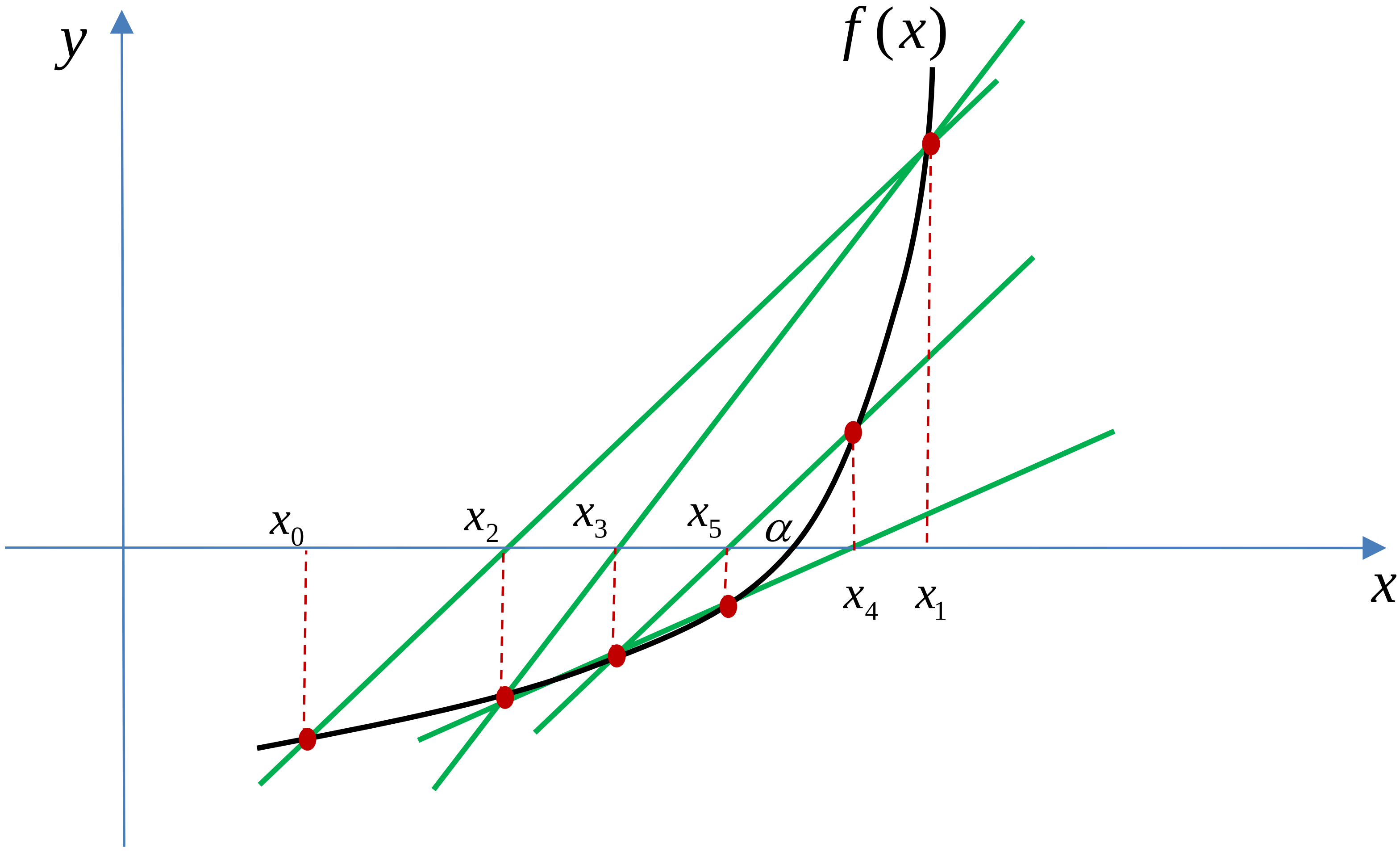
$$= \frac{x_n(f(x_n)-f(x_{n-1})) - f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\cdot f(x_n) - x_n \cdot f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots}$$

a partir de dois valores iniciais de x_0 e x_1 quaisquer.

Os valores x_0 e x_1 podem ser tomados dos extremos do intervalo [*a*,*b*], da qual sabemos que existe uma raiz.

Interpretação geométrica (Secante)



Exercício

Exemplo 1: Calcule a raiz de $f(x)=x^2+x-6$, usando o método da Secante, sabendo que este encontra-se no intervalo [1,3] e como critério de parada $|f(x_n)| \leq 0{,}001$.

Solução:

Para encontrar a raiz de $f(x)$ usando o método da Secante, devemos fazer:

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{x_{n-1} \cdot f(x_n) - x_n \cdot f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}_{\varphi(x_{n-1}, x_n)} \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

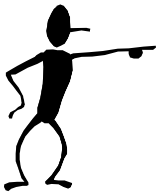
Exercício

Portanto, temos que:

n	x_n	$\varphi(x_{n-1}, x_n) = \dfrac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_n) = x_n^2 + x_n - 6$
0	1		
1	3		
2			
3			
4			
5			

$$\bar{x} = 2{,}0000$$

Comparação dos Métodos

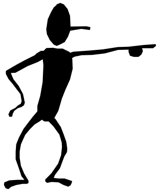


- Os quatro métodos podem ser comparados quanto à existência e velocidade de convergência e também quanto a características especiais, de modo a facilitar a escolha do método mais adequado a cada situação.

- O método mais simples e robusto é o da bissecção, que apresenta como grande vantagem o fato de convergir sempre. É contudo um método muito lento, apresentando como curiosidade o fato de convergir para a raiz sempre com a mesma velocidade.

- Pela sua robustez são ótimos como métodos preliminares para a definição de um intervalo de pequena amplitude, dentro do qual se encontra uma raiz da equação a resolver.

Comparação dos Métodos

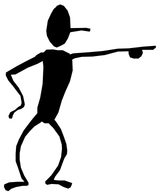


- O método das aproximações sucessivas é mais rápido do que o da bissecção, mas obriga a una escolha criteriosa da função $f(x)$, ao re-escrever $F(x)=0$ como $x= f(x)$ de modo a que seja satisfeita a condição de convergência.

- O método de Newton-Raphson é sem dúvida o método que converge para a solução mais rapidamente. Este método apresenta no entanto algumas desvantagens.

- Para que este método seja convergente é porém necessário que certas condições sejam satisfeitas, além disso obriga ao cálculo, em cada iteração, não só da função como também da sua derivada. Este último cálculo pode consumir muito tempo de computação por ser difícil, ou então ser mesmo impossível (por exemplo se a função é definida por pontos).

Comparação dos Métodos



- Para estes casos podemos recorrer ao método da secante ou mesmo ao das aproximações sucessivas.

- O método da secante converge com uma velocidade apreciável, mas existe circunstâncias em que é muito lento a convergir.

- Uma dificuldade característica do método de Newton-Raphson é a determinação de duas raízes muito próximas, dado que a derivada se anula na vizinhança das duas raízes.

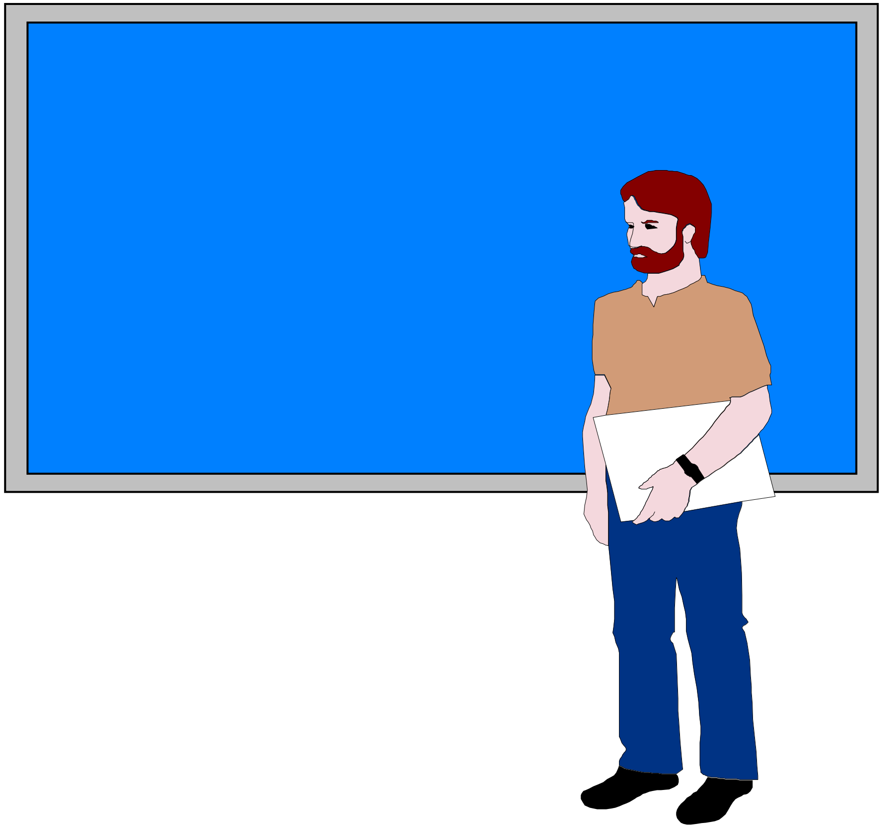
Conclusão

Podemos dizer como conclusão que o método da bissecção converge sempre e portanto podem ser utilizados em qualquer circunstância, tendo como desvantagem serem bastante lentos a convergir.

O método das aproximações sucessivas é bastante rápido a convergir, mas exige a escolha correta da função f(x) para que a condição de convergência seja satisfeita.

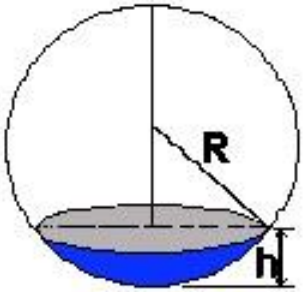
Por último temos o método de Newton- Raphson que é sem dúvida o mais rápido a convergir, mas que apresenta duas grandes desvantagens - para que o método seja convergente é necessário que certas condições sejam satisfeitas e também obriga em cada iteração ao cálculo não só da função mas também da sua primeira derivada.

Exercícios



1) O volume v de um liquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:

   i) calcule, utilizando o método da secante, a profundidade h, num tanque de raio r = 1 m para um volume de 0,5 m³. Utilize para aproximação inicial o intervalo [0,25; 0,5] e considere o erro admissível igual a 10^{-2}.



$$v = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}.$$