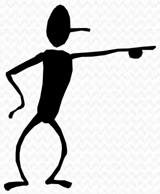
MÉTODOS NUMÉRICOS
SISTEMAS LINEARES

Solução de Sistemas Lineares

Introdução



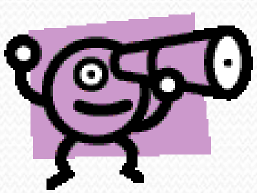
- Uma variedade de problemas de engenharia pode ser resolvido através da ***análise linear***; entre eles podemos citar: determinação do potencial em redes elétricas, cálculo da tensão na estrutura metálica da construção civil, cálculo da razão de escoamento num sistema hidráulico com derivações, previsão da concentração de reagentes sujeitos às reações químicas simultâneas.

- O problema matemático em todos estes casos se reduz ao problema de ***resolver*** um ***sistema de equações*** simultâneas.

- Também as encontramos, quando estudamos métodos numéricos para resolver problemas de equações diferenciais parciais, pois estes requerem a solução de um conjunto de equações.

Introdução

- A solução de um conjunto de equações é muito mais ***difícil*** quando as equações são ***não lineares***.
- Entretanto a maioria das aplicações envolve somente equações lineares, muito embora quando o sistema é de ***grande porte*** devemos escolher o método numérico ***adequado*** para preservar a máxima precisão.



Antes de desenvolvermos alguns métodos específicos, discutiremos o que queremos dizer com uma solução e as condições sob as quais a solução existe, pois não adianta tentar obter uma solução se não há nenhuma.

Introdução

- Uma equação é linear se cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparece na primeira potência.

Por exemplo:

$3x + 4y - 10z = -3$ → é linear

$xy - 3z = -3$ → não é, pois o primeiro termo contém duas variáveis

$x^3 + y - z = 0$ → não é linear, pois o primeiro termo contém uma variável elevada ao cubo

Introdução

- Vamos considerar ***n*** equações lineares com ***n*** variáveis (incógnitas) e vamos nos referir a elas como um *Sistema de **n** Equações Lineares* ou um *Sistema Linear de ordem **n***.

- Uma solução para esse sistema de equações consiste de valores para as ***n*** variáveis, tais que quando esses valores são substituídos nas equações, todas elas são satisfeitas simultaneamente.

Por exemplo, o sistema de três equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$

Introdução

- Observe que o sistema anterior pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- De um modo geral um sistema de *n* equações lineares é escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 \;+\; a_{12}\, x_2 \;+\; a_{13}\, x_3 \ldots \;+\; a_{1n}\, x_n \;=\; b_1 \\ a_{21}\, x_1 \;+\; a_{22}\, x_2 \;+\; a_{23}\, x_3 \ldots \;+\; a_{2n}\, x_n \;=\; b_2 \\ a_{31}\, x_1 \;+\; a_{32}\, x_2 \;+\; a_{33}\, x_3 \ldots \;+\; a_{2n}\, x_n \;=\; b_2 \\ \ldots \;\ldots \\ a_{n1}\, x_1 \;+\; a_{n2}\, x_2 \;+\; an3\, x_3 \ldots \;+\; a_{nn}\, x_n \;=\; b_n \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

$$Ax = b$$

matriz de coeficientes

vetor solução

vetor do termo independente

Classificação de um Sistema Linear

- Dado um sistema de equações arbitrário, não podemos afirmar sem investigar que há uma solução ou, se houver, que seja única. basicamente, há três e apenas três possibilidades de se classificar um sistema linear.

- A classificação de um sistema linear é feita em função do número de soluções que ele admite, da seguinte maneira:

  a) **Sistema possível ou consistente**: É todo sistema que possui pelo menos uma solução. Um sistema linear possível é:

     i. **Determinado** se admite uma única solução;
     ii. **Indeterminado** se admite mais de uma solução

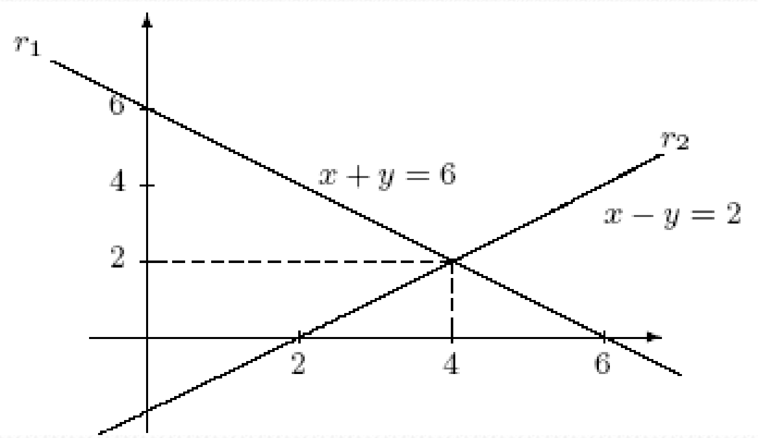
  b) **Sistema Impossível ou Inconsistente**: É todo sistema que não admite solução

Classificação de um Sistema Linear

Exemplo: Classificar os seguintes sistemas lineares:

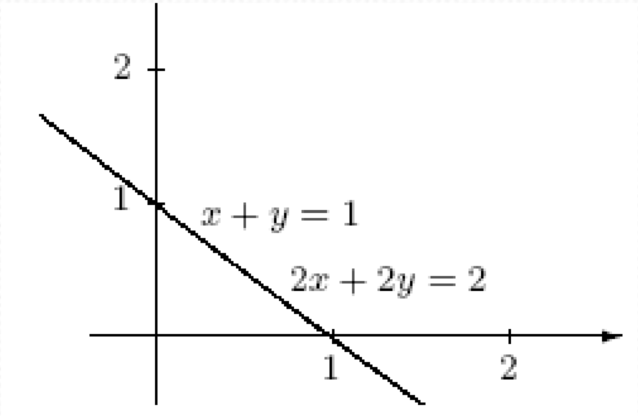
$$(I)\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Sistema possível e determinado



$$(II)\begin{cases} x + y = 1 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$$

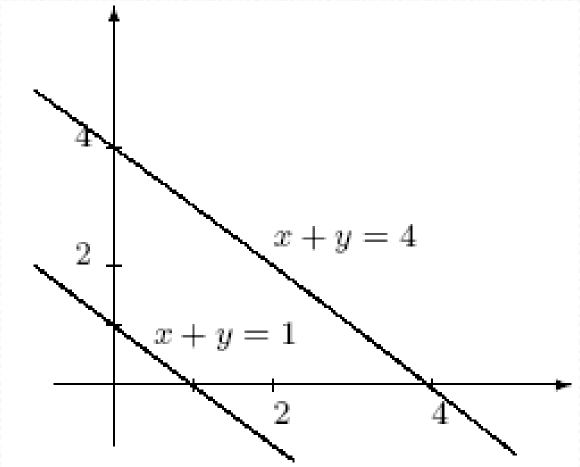
Sistema possível e indeterminado



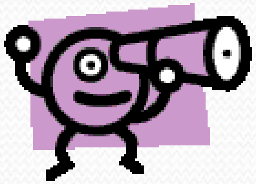
Classificação de um Sistema Linear

Exemplo: Classificar os seguintes sistemas lineares:

$$(III)\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$



Sistema impossível

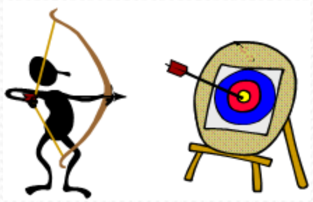


*Nosso objetivo aqui será o de desenvolver métodos numéricos para resolver sistemas lineares de ordem **n**, que tenham solução única. Observe que tais sistemas são aqueles onde a matriz dos coeficientes é não singular, isto é, $\det(A) \neq 0$.*

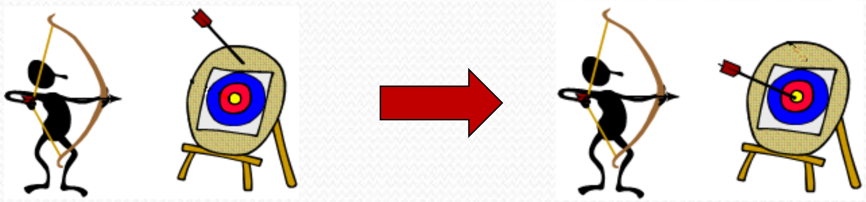
Métodos Numéricos para Solução de Sistemas Lineares

- Métodos numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos principalmente em dois grupos:

  - ✓ **Métodos Exatos**: são aqueles que forneceriam a solução exata, não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações.



  - ✓ **Métodos Iterativos**: são aqueles que permitem obter a solução de um sistema com uma dada precisão através de um processo infinito convergente.



- Observações:

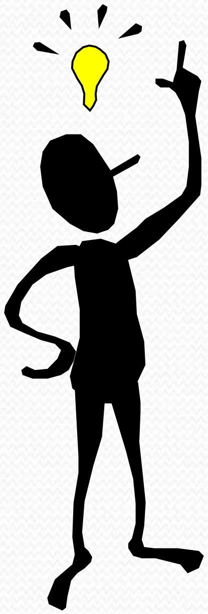
  - Os métodos exatos em princípio produzirão uma solução, se houver, em um número finito de operações aritméticas.

  - Um método iterativo, por outro lado, iria requerer em princípio, um número infinito de operações aritméticas para produzir a solução exata. Assim, um método iterativo tem um erro de truncamento e o exato não tem.

  - Por outro lado, em sistemas de grande porte os erros de arredondamento de um método exato podem tornar a solução sem significado, enquanto que nos métodos iterativos os erros de arredondamento não se acumulam.

Vantagens e limitações!!

Antes de estudar os métodos numéricos para sistemas lineares, vamos lembrar alguns conceitos fundamentais sobre matrizes



Conceitos Fundamentais

Definição 1: Matriz Real

Uma matriz real $A = A_{n\times m}$ *é um conjunto de* $n \times m$ *elementos ordenados do seguinte modo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A notação $n \times m$ significa que a matriz tem n linhas e m colunas.

Também usaremos a seguinte notação para a matriz A

$$A = (a_{ij}) \; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$$

Se $m = n$ a matriz é dita quadrada.

Um **vetor coluna** é uma matriz consistindo de uma única coluna.

Conceitos Fundamentais

Definição 2: Matriz Diagonal

Uma matriz D é dita diagonal $\Longleftrightarrow$ $D = (d_{ij})$ $i, j = 1, \ldots, n$ *onde* $d_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ d_i \text{ se } i = j \end{cases}$

$$\therefore \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Se $d_i = 1$ $i = 1, \ldots, n$ *então D é dita matriz identidade de ordem n e denotada* I_n.

$$\therefore \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Conceitos Fundamentais

Definição 3: Igualdade de Matrizes

$$\textit{Sejam} \begin{cases} A = (a_{ij}) \; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m \\ B = (b_{ij}) \; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

$$\textit{Então } A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$$

Conceitos Fundamentais

Definição 4: Operações com Matrizes

$$\text{Sejam} \begin{cases} A_{n\times m} = (a_{ij}) \\ B_{n\times m} = (b_{ij}) \\ \alpha \in R \end{cases}$$

Definimos então **soma de matrizes** e **multiplicação de matriz por um real** respectivamente como

$$(A+B)_{n\times m} := (a_{ij} + b_{ij})\ i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.$$

$$(\alpha A)_{n\times m} := \alpha a_{ij}\ i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.$$

Definição 4: Operações com Matrizes (cont.)

Sejam $\begin{cases} A_{n\times m} = (a_{ij}) \\ B_{m\times k} = (b_{jk}) \end{cases}$

A matriz C é o produto das matrizes A e B se

$$C_{n\times k} = (c_{ik}) := \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{jk}$$

Conceitos Fundamentais

Definição 5: Matriz Transposta

Seja a matriz A dada por $A_{n \times m} = (a_{ij})$

Então a transposta de A que denotamos por A^t *é dada por*

$$A^t = B_{m \times n} = (b_{ij}) := a_{ji} \; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.$$

Conceitos Fundamentais

Definição 6: Matriz Triangular

Matriz triangular é uma matriz de uma das seguintes formas

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{21} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

L é dita triangular inferior e U triangular superior

Observe que

$$L \text{ triangular inferior} \Rightarrow l_{ij} = 0 \text{ se } j > i$$
$$U \text{ triangular superior} \Rightarrow u_{ij} = 0 \text{ se } j < i$$

Definição 7: Determinante de uma Matriz

Determinante de uma matriz é uma função com valores reais definida no conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}$ *das matrizes* $n \times n$

$$\therefore \quad det : \mathcal{M}_{n\times n} \rightarrow R$$

Denotaremos $det(A)$ *o determinante de uma matriz* $A_{n\times n}$

As três regras dadas a seguir são suficientes para computar $det(A)$ *para qualquer matriz* $A_{n\times n}$

Definição 7: Determinante de uma Matriz (cont.)

i) O determinante de uma matriz não se altera se adicionarmos uma linha (coluna) multiplicada por um número α à outra linha (coluna);

ii) O determinante de uma matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal;

iii) Se duas linhas (colunas) são trocadas o valor do determinante é multiplicado por -1 .

Conceitos Fundamentais

Definição 8: Matriz Singular

Dizemos que $A_{n\times n}$ *é singular se* $det(A) = 0.$

Definição 9: Matriz Inversa

Se A *é não singular então existe a matriz inversa de* A *que denotamos* A^{-1} *e satisfaz*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Métodos Diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Fatoração LU
- Fatoração de Cholesky

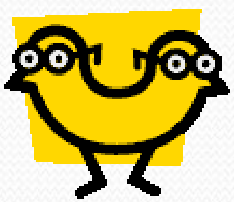
Métodos Iterativos:

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Método da Eliminação de Gauss

- Este método consiste em ***transformar*** o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz de coeficientes ***triangular superior***, pois estes são de ***resolução imediata***. *Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem a* ***mesma*** *solução.*

$$\underbrace{\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n &= b_n \end{aligned}}$$



$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}\cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

Método da Eliminação de Gauss

$$
\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1\\
a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{nn}\cdot x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Esse sistema é de fácil resolução. Partindo-se da solução da última equação, que é dada por:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

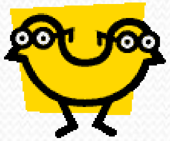
obtém-se o resultados das outras equações recursivamente, isto é:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot x_j}{a_{ii}}$$

Método da Eliminação de Gauss

Exemplo:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & & - & 4x_3 & = & -4 \end{array}$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 = 1$$

Algoritmo de um Sistema Triangular Superior

Dado um sistema triangular superior $n \times n$ com elementos da diagonal da matriz A não nulos , as variáveis x_n, x_{n-1}, x_{n-2},..., x_2, x_1 são obtidas através do seguinte algoritmo:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$\text{Para } k = (n-1),\ldots,1$$

$$\left[\begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k+1),\ldots,n \\ s = s + a_{kj}x_j \\ x_k = \dfrac{b_k - s}{a_{kk}} \end{array}\right.$$

Descrição do Método da Eliminação de Gauss

TEOREMA: Seja $Ax=b$ um sistema linear. Aplicando sobre equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

a) Trocar duas equações;

b) Multiplicar uma equação por uma constante não nula

c) Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação

Obtemos um novo sistema $\tilde{A}x.=\tilde{b}$

Sendo que os sistemas $Ax=b$ e $\tilde{A}x=\tilde{b}$ são equivalentes

Da álgebra linear, sabemos que essas operações não alteram a solução do sistema.

Descrição do Método da Eliminação de Gauss

Exemplo: Resolver o sistema de 4 equações e 4 incógnitas, dado por:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -7 \\
6x_1 - 3x_2 + 12x_3 + 11x_4 &= 4 \\
4x_1 - x_2 + 10x_3 + 8x_4 &= 4 \\
-2x_2 - 8x_3 + 10x_4 &= -60
\end{aligned}
$$

Para facilitar a resolução do problema, vamos representá-lo na forma de uma matriz aumentada, que corresponde a uma matriz cujos elementos são os fatores a_{ii}, e ela é "aumentada" incluindo-se os fatores b_i. Portanto, o sistema acima ficará na forma:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\
6 & -3 & 12 & 11 & 4 \\
4 & -1 & 10 & 8 & 4 \\
0 & -2 & -8 & 10 & -60
\end{array}\right]
$$

Descrição do Método da Eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ X & -3 & 12 & 11 & 4 \\ X & X & 10 & 8 & 4 \\ X & X & X & 10 & -60 \end{array}\right]$$

A eliminação da variável x_1 das equações i=2,3,4 é feita da seguinte forma: da equação i subtraímos a 1ª equação multiplicada por m_{i1}.

$$\boxed{L_i \leftarrow L_i - m_{i1} \times L_1}$$

multiplicadores

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

Pivô

Descrição do Método da Eliminação de Gauss

Pivô: $$a_{11} = 2$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & 12 & 11 & 4 \\ 4 & -1 & 10 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 10 & -60 \end{array}\right]$$

Multiplicadores:

$$m_{21} = \frac{6}{2} = 3 \quad m_{31} = \frac{4}{2} = 2$$

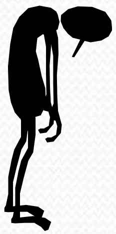
$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \times L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \times L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 25 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & -8 & 10 & -60 \end{array}\right]$$

Descrição do Método da Eliminação de Gauss

Pivô: $a_{22} = 0$



$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 25 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & -8 & 10 & -60 \end{array}\right]$$

Trocar a linha 2 pela linha 3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 25 \\ 0 & -2 & -8 & 10 & -60 \end{array}\right]$$

Descrição do Método da Eliminação de Gauss

Pivô: $a_{22} = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 25 \\ 0 & -2 & -8 & 10 & -60 \end{array}\right]$$

Multiplicadores:

$$m_{42} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{array}\right]$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - m_{42} \times L_2$$

Descrição do Método da Eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{array}\right]$$

A próxima etapa corresponderia a operação que anularia o elemento da terceira coluna da quarta linha. Porém, esse elemento já é nulo.

Portanto, já podemos obter a solução desse sistema, que será dada por:

$$x_4 = -4 \qquad x_3 = 3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_1 = 1$$

Resolução de Ax=b através da Eliminação de Gauss

Seja o sistema linear $Ax=b$, A: $n\times n$, x: $n\times 1$, b: $n\times 1$.

Eliminação

$$
\left[
\begin{array}{l}
\text{Para } k = 1,\dots,n-1 \\
\quad \left[
\begin{array}{l}
\text{Para } i = k+1,\dots,n \\
\qquad m = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \\
\qquad a_{ik} = 0 \\
\qquad \text{Para } j = k+1,\dots,n \\
\qquad\qquad a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj} \\
\qquad\qquad b_i = b_i - m b_k
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

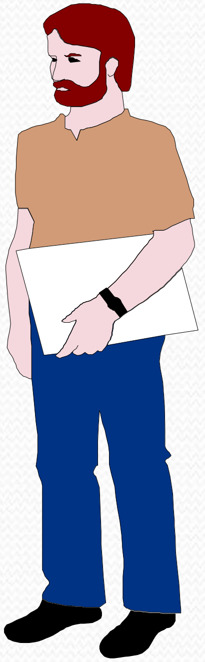
Resolução

$$
\left[
\begin{array}{l}
x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\
\text{Para } k = (n-1),\dots,1 \\
\quad \left[
\begin{array}{l}
s = 0 \\
\text{Para } j = (k+1),\dots,n \\
\qquad s = s + a_{kj} x_j \\
\qquad x_k = \dfrac{b_k - s}{a_{kk}}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Exercícios

Considere o sistema dado por

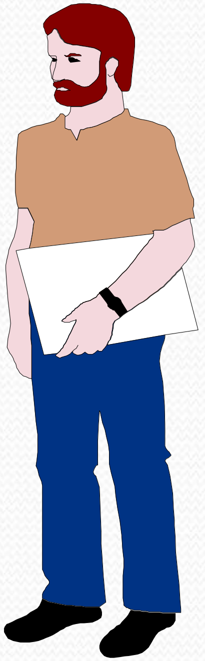
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$



Exercícios

Considere o sistema dado por

$$\begin{cases} 0{,}0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$



Analisando o Exercício ....

$$\begin{cases} 0{,}0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{Eliminação}} x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

<u>Problema</u>: Pivô nulo ou próximo de zero!!!!

Estratégias

➢ Estratégia de Pivotamento Parcial:

$$\begin{cases} 0{,}0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

No início de cada eliminação de Gauss, trocando as linhas, escolher para o pivô o maior $|a_{ij}|$ da coluna j.

➢ Estratégia de Pivotamento Completo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 25 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & -8 & 10 & -60 \end{array}\right]$$

No início de cada eliminação de Gauss, escolher para o pivô o maior $|a_{ij}|$ entre todos elementos que atuam no processo de eliminação.

Métodos Diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Fatoração LU
- Fatoração de Cholesky

Métodos Iterativos:

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Fatoração LU

- Seja o sistema linear $Ax=b$. Este processo de fatoração consiste em decompor a matriz A em um produto de dois ou mais fatores.
- Exemplo: Seja $A=CD$, então resolver $Ax=b$ é equivalente a resolver,

$$Ax = b \Longrightarrow C\underbrace{Dx}_{y} = b \Longrightarrow Cy = b$$

obtemos *y* !

$$\Downarrow$$

$$Dx = y$$

obtemos *x* !

Fatoração LU

- Na fatoração $A=LU$ a matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e a matriz U é triangular superior.

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Fatoração LU

TEOREMA: Dada uma matriz quadrada $n \times n$. Se $\boldsymbol{Det}(A) \neq 0$ então existe uma única matriz triangular inferior $L = m_{ij}$, com diagonal principal unitária, e uma única matriz triangular superior $U = u_{ij}$, tais que:

- $$LU = A$$
- $$det(A) = \prod_{i=0}^{n} u_{ii}$$

Exemplo de Fatoração *LU*

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se aplicarmos o método de Gauss sem pivotamento:

Exemplo de Fatoração *LU*

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 1/3 & -10/3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3\\ \boxed{4/3} & 1/3 & -10/3\end{pmatrix}$$

No último passo foram acrescentados os multiplicadores m_{ij}.

Os multiplicadores são definidos como segue: da equação (linha) j subtraímos a equação (linha) i multiplicada por m_{ij}, de modo a escalonar a matriz A.

Continuando o processo ...

Exemplo de Fatoração *LU*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & \boxed{1} & -4 \end{pmatrix}$$

Assim as matrizes L e U são:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow LU = A$$

Exemplo de Fatoração *LU*

Resolvendo o sistema $Ax=b$ por fatoração LU:

$$Ax = b \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \Rightarrow Ly = b$$

obtemos *y* !

$$\Downarrow$$

$$Ux = y$$

obtemos *x* !

Exemplo de Fatoração *LU*

Considerando: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

temos,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow L\ y = b \Rightarrow \begin{aligned} y_1 \qquad\qquad &= 1 \\ 1/3y_1 + y_2 \qquad &= 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

continuando,

$$U\ x = y \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 \quad + 2x_2 \quad + 4x_3 &= 1 \\ 1/3\, x_2 + 2/3\, x_3 &= 5/3 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fatoração LU + Pivotamento

- Fatoração LU com ***pivotamento parcial***.
- Fatoração LU com ***pivotamento completo***.

O pivoteamento pode ser implementado por meio da matriz de permutação.

DEFINIÇÃO: Uma matriz quadrada de ordem n é uma matriz de permutação se pode ser obtida da matriz identidade de ordem n permutando-se suas linhas (ou colunas).

Exemplo de Fatoração *LU*

Exemplo de permutação:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

seja,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

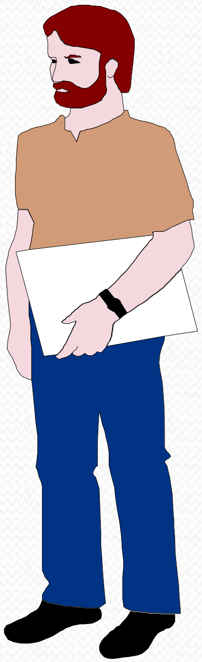
note que,

$$P\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercícios

Considere o sistema dado por

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & -12 \\ -\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 20 \\ 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & 10\,x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$



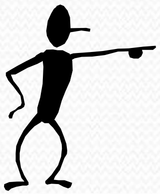
Métodos Diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Fatoração LU
- Fatoração de Cholesky

Métodos Iterativos:

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Fatoração de Cholesky



- No caso em que a matriz do sistema linear é simétrica podemos simplificar os cálculos da decomposição LU significativamente, levando em conta a simetria. Esta é a estratégia do método de Cholesky, o qual se baseia no seguinte corolário.

<u>Corolário</u>: Se A é simétrica, positiva definida, então A pode ser decomposta unicamente no produto GG^T, onde G é matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

Uma matriz A: $n \times n$ é definida positiva se $x^T A x > 0$ para todo $x \in R^n$, $x \neq 0$

Esquema Prático para a Decomposição GG^T

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$GG^t = \begin{pmatrix} g_{11} & & & & \bigcirc \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \dots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{32} & \dots & g_{n2} \\ & & g_{33} & \dots & g_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Esquema Prático para a Decomposição GG^T

- Do teorema LU, temos: $$A = LD\overline{U}$$

  onde D é uma matriz diagonal de ordem n.

- Ainda se A for simétrica, então: $$\overline{U} = L^T$$

- Assim, a fatoração escreve-se como:

$$A = L\,D\,L^T = L\,\overline{D}\,\overline{D}\,L^T \quad \text{onde} \quad \bar{\mathrm{d}}_{\mathrm{ii}} = \sqrt{d_{ii}}$$

portanto,

$$G = L\,\overline{D}$$

Esquema Prático para a Decomposição GG^T

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix}$$

Calculando os fatores L e U

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Esquema Prático para a Decomposição GG^T

Calculando os fatores LD e $LD\overline{U}$

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = L\,U$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L\,D\,L^T$$

Esquema Prático para a Decomposição GG^T

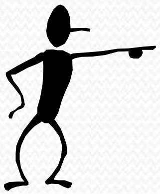
Enfim,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=L\,\overline{D}\,\overline{D}L^T$$

ou ainda,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=G\,G^T$$

Fatoração de Cholesky



- A resolução de Sistemas Lineares é semelhante ao método LU. Seja $A=GG^T$, então resolver :

$$Ax = b \Rightarrow G\underbrace{G^T x}_{y} = b \Rightarrow Gy = b$$

obtemos y !

$$\Downarrow$$

$$G^T x = y$$

obtemos x !

Fatoração de Cholesky (Observações)

i. Se A satisfaz as condições do método de Cholesky, a aplicação do método requer menos cálculos que a decomposição LU.

ii. O fato de A ser positiva definida garante que na decomposição teremos somente raízes quadradas de números positivos.

iii. O método de Cholesky pode também ser aplicado a matrizes simétricas que não sejam positivas definidas desde que trabalhemos com aritmética complexa. Entretanto, só usaremos o método de Cholesky se pudermos trabalhar com aritmética real.

iv. Vimos no caso da decomposição LU, que $\det(A) = u_{11}u_{22} \ldots u_{nn}$, uma vez que os elementos diagonais de L eram unitários. No caso do Método de Cholesky temos que $A = GG^T$ e portanto:

$$det(A) = (\det G)^2 = (g_{11}\, g_{22} \, \ldots \, g_{nn})^2$$

Exercícios

Seja:

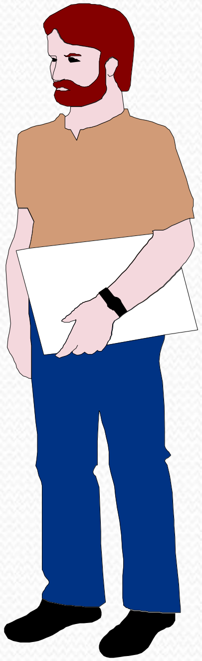
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Verificar se A satisfaz as condições do método de Cholesky.

b) Decompor A em GG^t.

c) Calcular o determinante de A, usando a decomposição obtida .

d) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (0,\ 6,\ 5)^t$.



Métodos Diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Fatoração LU
- Fatoração de Cholesky

Métodos Iterativos:

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Métodos iterativos

- Existe um grande número de métodos numéricos que são processos iterativos. Estes processos se caracterizam pela repetição de uma determinada operação.

- A idéia nesse tipo de processo é repetir um determinado cálculo várias vezes, obtendo-se a cada repetição ou iteração um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior.

- Cabe ressaltar que a cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte.

Processo iterativo

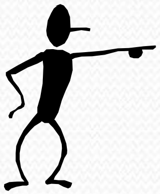
- Existem diversos aspectos comuns a qualquer processo iterativo:

  ✓ **Estimativa inicial:** Para iniciar um processo iterativo, é preciso ter uma estimativa inicial do resultado do problema. Essa estimativa pode ser conseguida de diferentes formas (depende do problema).

  ✓ **Convergência:** Para obtermos um resultado próximo do resultado real esperado, é preciso que a cada passo ou iteração, nosso resultado esteja mais próximo daquele esperado.

  ✓ **Critério de Parada:** Obviamente não podemos repetir um processo numérico infinitamente. É preciso pará-lo em um determinado instante. O critério adotado para parar as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada (depende do problema e da precisão que desejamos para obter a solução).

Introdução



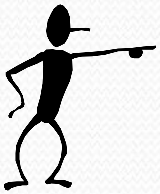
- Ao lado dos métodos exatos para resolver sistemas lineares, existem os métodos iterativos. Em certos casos, tais métodos são melhores do que os exatos, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero).

- Eles ainda são mais econômicos no sentido que utilizam menos memória do computador.

- Além disso, possuem a vantagem de se auto corrigir se um erro é cometido, e eles podem ser usados para reduzir os erros de arredondamento na solução obtida por métodos exatos

- Podem também sob certas condições ser aplicado para resolver um conjunto de equações não lineares.

Introdução

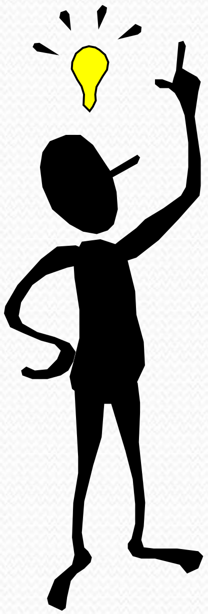


- Um método é iterativo quando fornece uma ***seqüência*** de ***aproximantes*** da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela ***repetição*** do mesmo tipo de processo.

- Um método iterativo é estacionário se cada aproximante é ***obtido*** do anterior ***sempre*** pelo mesmo processo.

- Como no caso de equações não lineares, para determinar a solução de um sistema linear por métodos iterativos, precisamos ***transformar*** o sistema dado em um ***outro sistema*** onde possa ser ***definido*** um ***processo iterativo***; e mais, que a solução obtida para o sistema transformado seja também solução do sistema original, isto é, os sistemas lineares devem ser ***equivalentes***.

A idéia central dos métodos iterativos é generalizar o método de ponto fixo usado na busca de raízes de uma equação não linear



Esquema Iterativo

Seja o sistema linear:

$$Ax = b$$

onde:

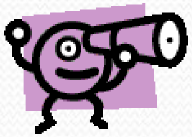
A: matriz de coeficientes, $n \times n$;
x: vetor de variáveis, $n \times 1$;.
b: vetor de termos constantes, $n \times 1$.

Este sistema é convertido, de alguma forma, num sistema do tipo:

$$x = Cx + g$$

onde:

C: matriz $n \times n$;
g: vetor $n \times 1$.



$$\boxed{f(x) = Cx + g}$$

Função de Iteração!!

Esquema Iterativo

Partimos de $x^{(0)}$ (vetor de aproximação inicial) e então construímos consecutivamente os vetores:

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)}) \qquad \text{(primeira aproximação)}$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)}) \qquad \text{(segunda aproximação),}$$

etc.

De um modo geral, a aproximação $x^{(k+1)}$ é calculada pela fórmula:

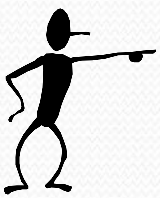
$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g = \varphi(x^{(k)}) \quad k = 0,1,\ldots$$

É importante observar que se a seqüência de aproximações $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$, é tal que:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$$

então $\alpha = C\alpha + g$, ou seja, α é solução do sistema linear $Ax=b$

Critérios de Parada



- O processo iterativo pode ser repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k\text{-}1)}$. Assim, esta distancia pode ser medido como:

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

- Assim, dada uma precisão ε, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como $\bar{x}$, solução aproximada da solução exata, se $d^{(k)} < \varepsilon$.

- Da mesma maneira que no teste de parada dos métodos iterativos para zeros de funções, podemos efetuar aqui o teste do erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} \right|}$$

Métodos Diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Fatoração LU
- Fatoração de Cholesky

Métodos Iterativos:

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Método Iterativo Gauss-Jacobi

- A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear *Ax=b* em *x=Cx+g* é a seguinte:

Sistema Original

$$Ax=b \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

supondo $a_{ii} \neq 0$, $i=1,\ldots,n$, isolamos o vetor x mediante separação pela diagonal, da seguinte maneira:

Método Iterativo Gauss-Jacobi

$$Ax=b \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 & = & \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \dfrac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{n(n-1)}x_{(n-1)})}{a_{nn}} \end{cases}$$

Para que exista o sistema x=Cx+g, é necessário que $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$. Caso isto não ocorra, o sistema $Ax = b$ deve ser reagrupado.

Método Iterativo Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 & = & \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \dfrac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{n(n-1)}x_{(n-1)})}{a_{nn}} \end{cases}$$

$$\boxed{x = Cx + g}$$

Formula recursiva

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} & -\dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \dfrac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Método Iterativo Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{n(n-1)}x_{(n-1)})}{a_{nn}} \end{cases}$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k)})}{a_{nn}} \end{cases}$$

Exemplo

- Resolva o sistema a seguir, utilizando o método Gauss-Jacobi, com $x^{(0)}=[0,0,0]^T$ e $\varepsilon=10^{-2}=0,01$.

$$A \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max\limits_{1 \le i \le 3} \left\| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right\|$
0	0	0	0	-
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Com $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\varepsilon = 0{,}01$, o processo convergiu com .... iterações para:

$\bar{x} =$

Gauss-Jacobi

10	2	1	7
1	5	1	-8
2	3	10	6

k	x1	x2	x3	erro
0	0,000	0,000	0,000	
1	0,700	-1,600	0,600	1,6
2	0,960	-1,860	0,940	0,34
3	0,978	-1,980	0,966	0,12
4	0,999	-1,989	0,998	0,032
5	0,998	-1,999	0,997	0,01
6	1,000	-1,999	1,000	0,003
7	1,000	-2,000	1,000	1E-03
8	1,000	-2,000	1,000	0
9	1,000	-2,000	1,000	0

79

Um Critério de Convergência

Teorema (Critério das Linhas): Uma condição suficiente (mas não necessária) para garantir a convergência do método de Gauss-Jacobi aplicado ao sistema $Ax=b$, com $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$, é:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Neste caso, o método de Gauss-Jacobi gera uma seqüência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$.

Exemplo 1

Verificar se o critério das linhas é satisfeito no sistema de equações $Ax=b$, que segue:

$$A \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{cases}$$

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2+1<10 \\ 1+1<5 \\ 2+3<10 \end{cases}$$

Logo, a matriz dos coeficientes A garante a convergência do método de Gauss-Jacobi aplicado a este sistema com esta ordem de equações e incógnitas.

Exemplo 2

Verificar se o critério das linhas é satisfeito no sistema de equações $Ax=b$, que segue:

$$A \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3+1<1 \\ 5+2<2 \\ 0+6<8 \end{cases}$$

Logo a matriz dos coeficientes A não garante a convergência do método de Gauss-Jacobi aplicado a este sistema com esta ordem de equações e incógnitas.

Exemplo 2

Verificar se o critério das linhas é satisfeito no sistema de equações *Ax*=*b* , que segue:

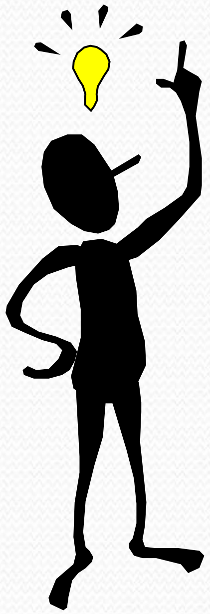
$$A\cdot x=b\Rightarrow\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2\\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3\\ & & 6x_2 & + & 8x_3 & = & -6\end{cases}$$

Solução:

Mas permutando adequadamente as equações do sistema, obtém-se o sistema Equivalente:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2+2<5\\ 1+1<3\\ 0+6<8\end{cases}$$

Sempre que o critério de linhas não for satisfeito, devemos tentar uma permutação de linhas e/ou colunas de forma a obtermos uma disposição para a qual a matriz de coeficientes satisfaça o critério das linhas



Métodos Diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Fatoração LU
- Fatoração de Cholesky

Métodos Iterativos:

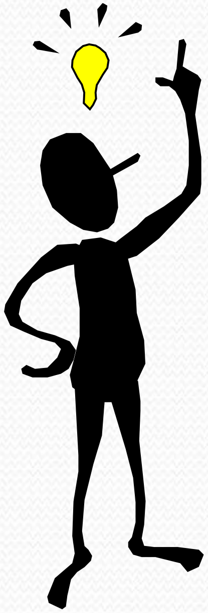
- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Método Iterativo Gauss-Seidel

- É semelhante ao método de Gauss-Jacobi, com a diferença de utilizar $x_i^{(k+1)}$, $1 \leq i < p$, para o cálculo de $x_p^{(k+1)}$. Desta forma, as equações recursivas ficam:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)})}{a_{33}} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + a_{n3}x_3^{(k+1)} + \cdots + a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k+1)})}{a_{nn}}
\end{cases}
$$

Portanto no processo iterativo de Gauss-Seidel, no momento de se calcular $x_j^{(k+1)}$ usamos todos os valores $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ restantes.



Exemplo

- Resolva o sistema a seguir, utilizando o método Gauss-Seidel, com $x^{(0)}=[0,0,0]^T$ e $\varepsilon=10^{-2}=0,01$.

$$A \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max\limits_{1 \le i \le 3} \left\| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right\|$
0	0	0	0	-
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Com $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\varepsilon = 0{,}01$, o processo convergiu com .... iterações para:

$\bar{x} =$

Gauss-Seidel				
10	2	1	7	
1	5	1	-8	
2	3	10	6	

k	x1	x2	x3	erro
0	0,000	0,000	0,000	
1	0,700	-1,740	0,982	1,74
2	0,950	-1,986	1,006	0,25
3	0,997	-2,001	1,001	0,047
4	1,000	-2,000	1,000	0,003
5	1,000	-2,000	1,000	0
6	1,000	-2,000	1,000	0

Gauss-Jacobi				
10	2	1	7	
1	5	1	-8	
2	3	10	6	

k	x1	x2	x3	erro
0	0,000	0,000	0,000	
1	0,700	-1,600	0,600	1,6
2	0,960	-1,860	0,940	0,34
3	0,978	-1,980	0,966	0,12
4	0,999	-1,989	0,998	0,032
5	0,998	-1,999	0,997	0,01
6	1,000	-1,999	1,000	0,003
7	1,000	-2,000	1,000	1E-03
8	1,000	-2,000	1,000	0
9	1,000	-2,000	1,000	0

Métodos Diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Fatoração LU
- Fatoração de Cholesky

Métodos Iterativos:

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Comparação entre os Métodos

CONVERGÊNCIA:

Os métodos diretos são processos finitos e, portanto, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema não singular de equações. Já os métodos iterativos têm convergência assegurada apenas sob determinadas condições.

ERROS DE ARREDONDAMENTO:

Os métodos diretos apresentam sérios problemas com erros de arredondamento. Uma forma de amenizar esses problemas é adotar técnicas de pivoteamento. Os métodos iterativos têm menos erros de arredondamento, visto que a convergência, uma vez assegurada, independe da aproximação inicial. Somente os erros de arredondamento cometidos na última iteração afetam a solução.

Comparação entre os Métodos

ESPARSIDADE DA MATRIZ A:

Se a matriz A for esparsa e de grande porte, uma desvantagem dos métodos diretos para a resolução do sistema linear $Ax=b$ é o preenchimento na matriz (podem surgir elementos não nulos em posições a_{ij} que originalmente eram nulas), exigindo técnicas especiais para a escolha do pivô para reduzir este preenchimento.

Uma alternativa são os métodos iterativos que têm como principal vantagem não alterar a estrutura da matriz A dos coeficientes.

5ª. Questão (1,0 ponto): É possível afirmar que o sistema ao lado converge se resolvido pelo método iterativo de Gauss-Seidel? (justificar a resposta)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

94