

# Métodos Numéricos

## Interpolação

# Interpolação

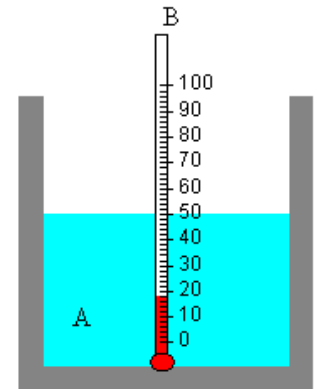
# Interpolação

➤ A tabela abaixo relaciona calor específico da água e temperatura:

| temperatura<br>(°C) | 20      | 25      | 30      | 35      | 40      | 45      | 50      |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| calor<br>específico | 0.99907 | 0.99852 | 0.99826 | 0.99818 | 0.99828 | 0.99849 | 0.99878 |

o calor específico da água a  $32.5^{\circ}$ ?

a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837?

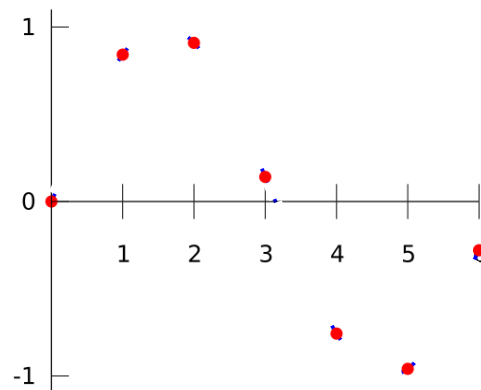


## Interpolação !!

# Interpolação

- **Interpolar** uma função  $f(x)$  consiste em aproximar essa função por uma função  $g(x)$ , escolhida dentro de uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades.
- A função  $g(x)$  é então usada no lugar da função  $f(x)$ .

***Interpolação é o método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos.***



# Interpolação - Quando usar!

- Quando temos os valores numéricos de uma função não conhecida para um conjunto de pontos e queremos o valor desta função em um ponto não tabelado.
- Aproximação de funções complexas por funções mais simples. Suponha que tenhamos uma função, mas que seja complicada demais para que seja possível avaliá-la de forma eficiente. Podemos, então, escolher alguns dados pontuais da função complicada e tentar interpolá-los com uma função mais simples.



## Interpolação

# Interpolação - O que é?

- Sejam  $(n+1)$  pontos distintos:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , chamados nós da interpolação, e os valores de  $f(x)$ :  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ .
- A interpolação de  $f(x)$  que veremos consiste em obter uma função  $g(x)$  tal que:

$$g(x_0) = f(x_0),$$

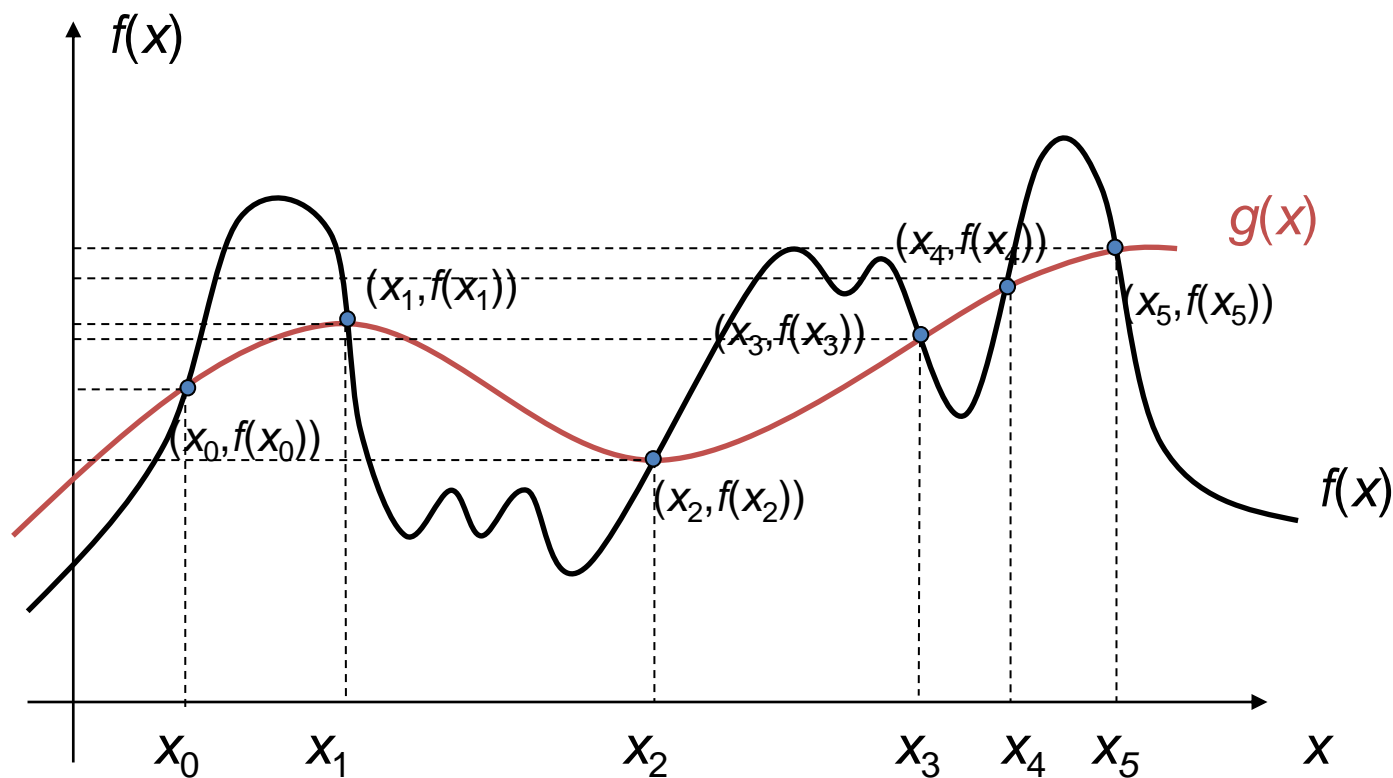
$$g(x_1) = f(x_1),$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$g(x_n) = f(x_n).$$

# Interpolação - O que é?

➤ Gráficamente:



# Interpolação

- Consideraremos aqui que  $g(x)$  é uma função polinomial. Contudo, a função  $g(x)$  escolhida pode ser: racional, trigonométrica, etc.
- Existem outras formas de interpolação, por exemplo via fórmula de Taylor, via polinômios de Hermite, etc.

*A aproximação de funções por polinômios é uma das idéias mais antigas da análise numérica, e ainda uma das mais usadas. É bastante fácil entender por que razão isso acontece. Os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade, etc.*



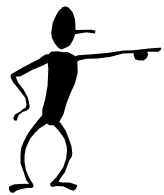
# Interpolação Polinomial

- Veremos aqui como aproximar uma função usando Métodos de Interpolação Polinomial.
- Tais métodos são usados como uma aproximação para uma função  $f(x)$ , principalmente, nas seguintes situações:
  - a) não conhecemos a expressão analítica de  $f(x)$ , isto é, sabemos apenas seu valor em alguns pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , (esta situação ocorre muito frequentemente na prática, quando se trabalha com dados experimentais) e necessitamos manipular  $f(x)$  como, por exemplo, calcular seu valor num ponto, sua integral num determinado intervalo, etc.
  - b)  $f(x)$  é extremamente complicada e de difícil manejo. Então, às vezes, é interessante sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos.

# Interpolação Polinomial

- Dados os pontos:  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ , queremos aproximar  $f(x)$  por um polinômio  $p_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , tal que

$$f(x_k) = p_n(x_k), k=0,1,2,\dots, n$$



$$p_n(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1}x + \underline{a_2}x^2 + \dots + \underline{a_n}x^n$$



*Obter os  
coeficientes*

# Interpolação Polinomial

Teorema: Existe um único polinômio  $p_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , tal que  $f(x_k) = p_n(x_k)$ ,  $k=0,1,2,\dots, n$  desde que  $x_k \neq x_j, j \neq k$

Demonstração do teorema:

Seja

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

das condições de interpolação:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1)$$

.....

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n)$$

# Interpolação Polinomial

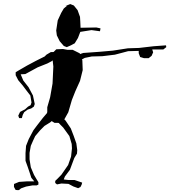
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

A matriz dos coeficientes (A) é do tipo Vandermonde, logo desde que sejam pontos distintos, então o determinante da matriz dos coeficientes é não-nulo. Consequentemente o sistema admite solução única.

## CONCLUSÃO:

Existem  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  únicos que satisfazem as condições de interpolação.

# Interpolação Polinomial



➤ Há várias maneiras para obter  $p_n(x)$ . Discutiremos três possibilidades:




✓ Resolução de Sistema Linear

✓ Forma de Lagrange

✓ Forma de Newton

➤ Teoricamente as três formas conduzem ao mesmo polinômio. A escolha entre elas depende de condições como estabilidade do sistema linear, tempo computacional, etc.

# Métodos de Interpolação

-  Resolução do Sistema Linear
-  Forma de Lagrange
-  Forma de Newton

# Resolução do sistema linear

Uma das formas de obter o polinômio é a resolução do sistema linear obtido a partir das condições de interpolação:

[illegible]



Obter os coeficientes:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

# Resolução do sistema linear

Exemplo 1: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela abaixo:

|        |    |   |    |
|--------|----|---|----|
| $x$    | -1 | 0 | 2  |
| $f(x)$ | 4  | 1 | -1 |

Resolução:

Temos então  $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$p_2(-1) = f(-1) \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4$$

$$\rightarrow p_2(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = 1$$

$$p_2(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1$$





# Resolução do sistema linear

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -7/3 \quad a_2 = 2/3$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$



polinômio que interpola  
 $f(x)$  em  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$

# Resolução do sistema linear



- Nem sempre a resolução do sistema linear para se obter  $p_n(x)$  é simples e exato.

Exemplo 2: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 3 que interpola os dados da tabela abaixo:

|        |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| $x$    | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| $f(x)$ | 5   | 13  | -4  | -8  |

Resolução:

Temos então

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

# Resolução do sistema linear

| $x$    | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | 5   | 13  | -4  | -8  |

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$p_3(0.1) = f(0.1) \Leftrightarrow a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5$$

$$p_3(0.2) = f(0.2) \Leftrightarrow a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13$$

$$p_3(0.3) = f(0.3) \Leftrightarrow a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4$$

$$p_3(0.4) = f(0.4) \Leftrightarrow a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8$$



Sistema de 4 equações com 4 incógnitas



$$\begin{cases} a_0 + 0.1 a_1 + 0.01 a_2 + 0.001 a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2 a_1 + 0.04 a_2 + 0.008 a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3 a_1 + 0.09 a_2 + 0.027 a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4 a_1 + 0.16 a_2 + 0.064 a_3 = -8 \end{cases}$$

Resolvendo por eliminação de Gauss, obtemos:

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

Para  $x=0,4$ :



$$p_3(0.4) = -10$$

$$f(0.4) = -8$$

| $x$    | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | 5   | 13  | -4  | -8  |

# Métodos de Interpolação

 Resolução do Sistema Linear

 Forma de Lagrange

 Forma de Newton

# Forma da Lagrange

- Sejam  $(n+1)$  pontos distintos:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , chamados nós da interpolação, e os valores de  $f(x)$ :  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ .
- A **interpolação** de  $f(x)$  consiste em obter uma função  $p_n(x)$  tal que:

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

onde os polinômios  $L_k(x)$  são de grau  $n$ .

## IMPORTANTE:



Como os  $f(x_i)$  são dados, devemos no Método de Lagrange determinar os  $L_k(x)$ .



Polinômios de Lagrange:

# Forma da Lagrange

➤ Para cada  $i$ , queremos que a condição  $p_n(x_i)=f(x_i)$  seja satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = f(x_0)L_0(x_i) + f(x_1)L_1(x_i) + \dots + f(x_n)L_n(x_i) = f(x_i)$$

Por exemplo:

$$p_n(x_0) = f(x_0)\underbrace{L_0(x_0)}_1 + f(x_1)\underbrace{L_1(x_0)}_0 + \dots + f(x_n)\underbrace{L_n(x_0)}_0 = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = f(x_0)\underbrace{L_0(x_1)}_0 + f(x_1)\underbrace{L_1(x_1)}_1 + \dots + f(x_n)\underbrace{L_n(x_1)}_0 = f(x_1)$$

$p(x)$  passe sobre os pontos  $(x_i, f(x_i))$

# Forma da Lagrange

➤ A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases}$$

para isso, definimos  $L_k(x)$  por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_i) = 0 \quad \text{se } i \neq k \end{array} \right.$$



# Forma da Lagrange

➤ Então, a forma de lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x)$$

onde,

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}$$

# Forma da Lagrange

Exemplo 1: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela abaixo:

|        |    |   |    |
|--------|----|---|----|
| $x$    | -1 | 0 | 2  |
| $f(x)$ | 4  | 1 | -1 |


Resolução:

Devemos interpolar os 3 pontos com uma forma de Lagrange. Segue:

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) L_k(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x) + f(x_2) L_2(x)$$

# Forma da Lagrange

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$


$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

# Forma da Lagrange

Enfim, a forma de Lagrange da interpolação:

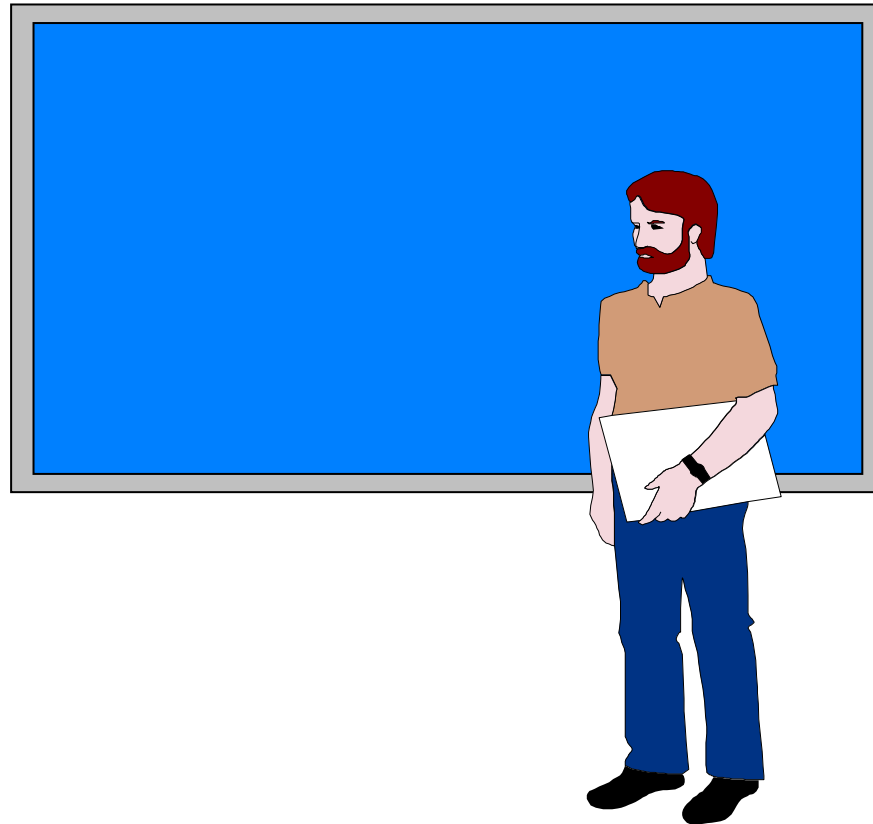
$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right)$$

$$\rightarrow p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$



Mesmo resultado à resolução do sistema linear!!!

# Exercícios



# Métodos de Interpolação

 Resolução do Sistema Linear

 Forma de Lagrange

 Forma de Newton

# Forma de Newton

- A forma de Newton para o polinômio  $p_n(x)$ , que interpola em  $(n+1)$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , é a seguinte:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

- No Método de Newton, os valores de  $d_k$  são dados por diferenças divididas de ordem  $k$ .

# Diferenças divididas

- Seja  $f(x)$  definida em  $(n+1)$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . O operador diferenças divididas é dado:

$$f[x_0] = f(x_0) \quad (\text{Ordem } 0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (\text{Ordem } 1)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad (\text{Ordem } 2)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \quad (\text{Ordem } 3)$$

$$\vdots$$
$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (\text{Ordem } n)$$



# Diferenças divididas

➤ Para auxiliar nos cálculos pode-se utilizar a seguinte tabela:

| $x$   | Ordem 0  | Ordem 1           | Ordem 2            | Ordem n                   |
|-------|----------|-------------------|--------------------|---------------------------|
| $x_0$ | $f[x_0]$ |                   |                    |                           |
|       |          | $f[x_0, x_1]$     |                    |                           |
| $x_1$ | $f[x_1]$ |                   | $f[x_0, x_1, x_2]$ |                           |
|       |          | $f[x_1, x_2]$     |                    |                           |
| $x_2$ | $f[x_2]$ |                   | $f[x_1, x_2, x_3]$ |                           |
|       |          | $f[x_2, x_3]$     |                    |                           |
| ..... | .....    | .....             | .....              | $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ |
|       |          | $f[x_{n-1}, x_n]$ |                    |                           |
| $x_n$ | $f[x_n]$ |                   |                    |                           |

# Forma de Newton

1. Mostra-se que  $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$  é simétrica nos argumentos, ou seja,

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = \dots\dots$$

2. Mostra-se que a forma de Newton para o polinômio de ordem  $n$  que interpola  $f(x)$  é

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \end{aligned}$$

# Forma de Newton

Exemplo 1: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela abaixo:

|        |    |   |    |
|--------|----|---|----|
| $x$    | -1 | 0 | 2  |
| $f(x)$ | 4  | 1 | -1 |

Resolução:

Devemos interpolar os 3 pontos com a forma de Newton. Segue:

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$


# Forma de Newton

| $x$        | Ordem 0       | Ordem 1 | Ordem 2 |
|------------|---------------|---------|---------|
| $x_0 = -1$ | $f[x_0] = 4$  |         |         |
|            |               |         |         |
| $x_1 = 0$  | $f[x_1] = 1$  |         |         |
|            |               |         |         |
| $x_2 = 2$  | $f[x_2] = -1$ |         |         |

Ordem 0   $f[x_i] = f(x_i)$


# Forma de Newton

| $x$        | Ordem 0       | Ordem 1            | Ordem 2 |
|------------|---------------|--------------------|---------|
| $x_0 = -1$ | $f[x_0] = 4$  |                    |         |
|            |               | $f[x_0, x_1] = -3$ |         |
| $x_1 = 0$  | $f[x_1] = 1$  |                    |         |
|            |               | $f[x_1, x_2] = -1$ |         |
| $x_2 = 2$  | $f[x_2] = -1$ |                    |         |

Ordem 1   $f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

# Forma de Newton

| $x$        | Ordem 0       | Ordem 1            | Ordem 2                          |
|------------|---------------|--------------------|----------------------------------|
| $x_0 = -1$ | $f[x_0] = 4$  |                    |                                  |
|            |               | $f[x_0, x_1] = -3$ |                                  |
| $x_1 = 0$  | $f[x_1] = 1$  |                    | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2}{3}$ |
|            |               | $f[x_1, x_2] = -1$ |                                  |
| $x_2 = 2$  | $f[x_2] = -1$ |                    |                                  |

Ordem 2  
$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_k]}{x_k - x_i}$$

# Forma de Newton

| $x$        | Ordem 0       | Ordem 1            | Ordem 2                          |
|------------|---------------|--------------------|----------------------------------|
| $x_0 = -1$ | $f[x_0] = 4$  |                    |                                  |
|            |               | $f[x_0, x_1] = -3$ |                                  |
| $x_1 = 0$  | $f[x_1] = 1$  |                    | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2}{3}$ |
|            |               | $f[x_1, x_2] = -1$ |                                  |
| $x_2 = 2$  | $f[x_2] = -1$ |                    |                                  |

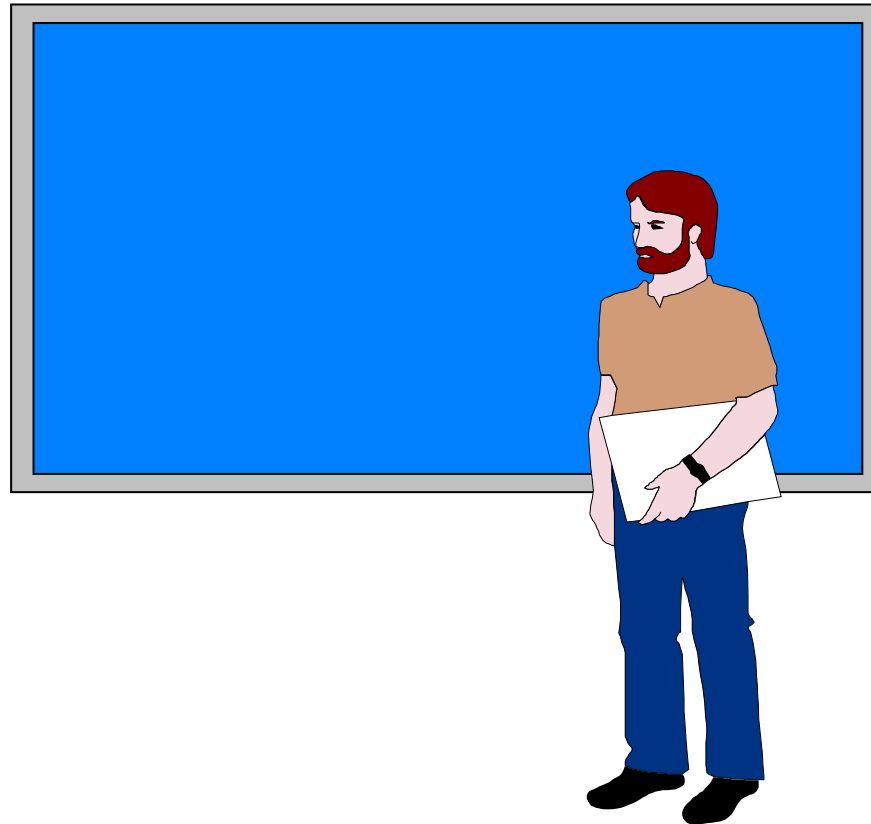
Logo,

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
 &= 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)\left(\frac{2}{3}\right) \\
 &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1
 \end{aligned}$$



Mesmo resultado à resolução do sistema linear!!!

# Exercícios





Para a função dada, seja  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0,6$  e  $x_2 = 0,9$ . Construa polinômios de grau  $n \leq 2$ , para aproximar  $f(0,45)$ , e encontre o valor do erro verdadeiro.

(a)  $f(x) = \cos x$

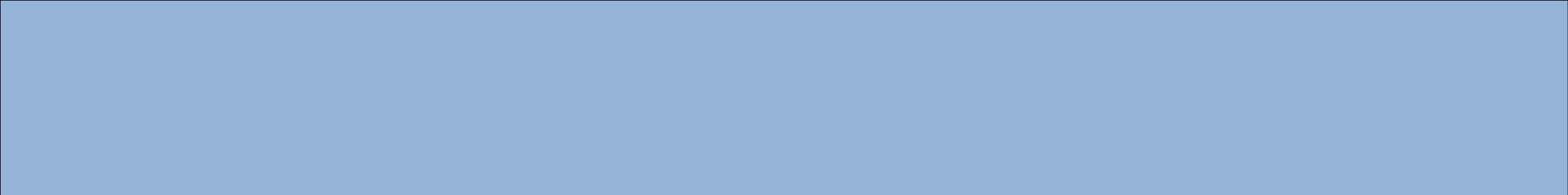
(b)  $f(x) = \sqrt{1+x}$

(c)  $f(x) = \ln(x+1)$

Considere a tabela abaixo:

|             |     |     |     |     |     |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Altura (cm) | 183 | 173 | 188 | 163 | 178 |
| Peso(kg)    | 79  | 69  | 82  | 63  | 73  |

- (a) Usando um Polinômio Interpolador de grau dois, calcule a altura aproximada de uma pessoa com peso de 70 kg.



# Estudo do Erro na Interpolação

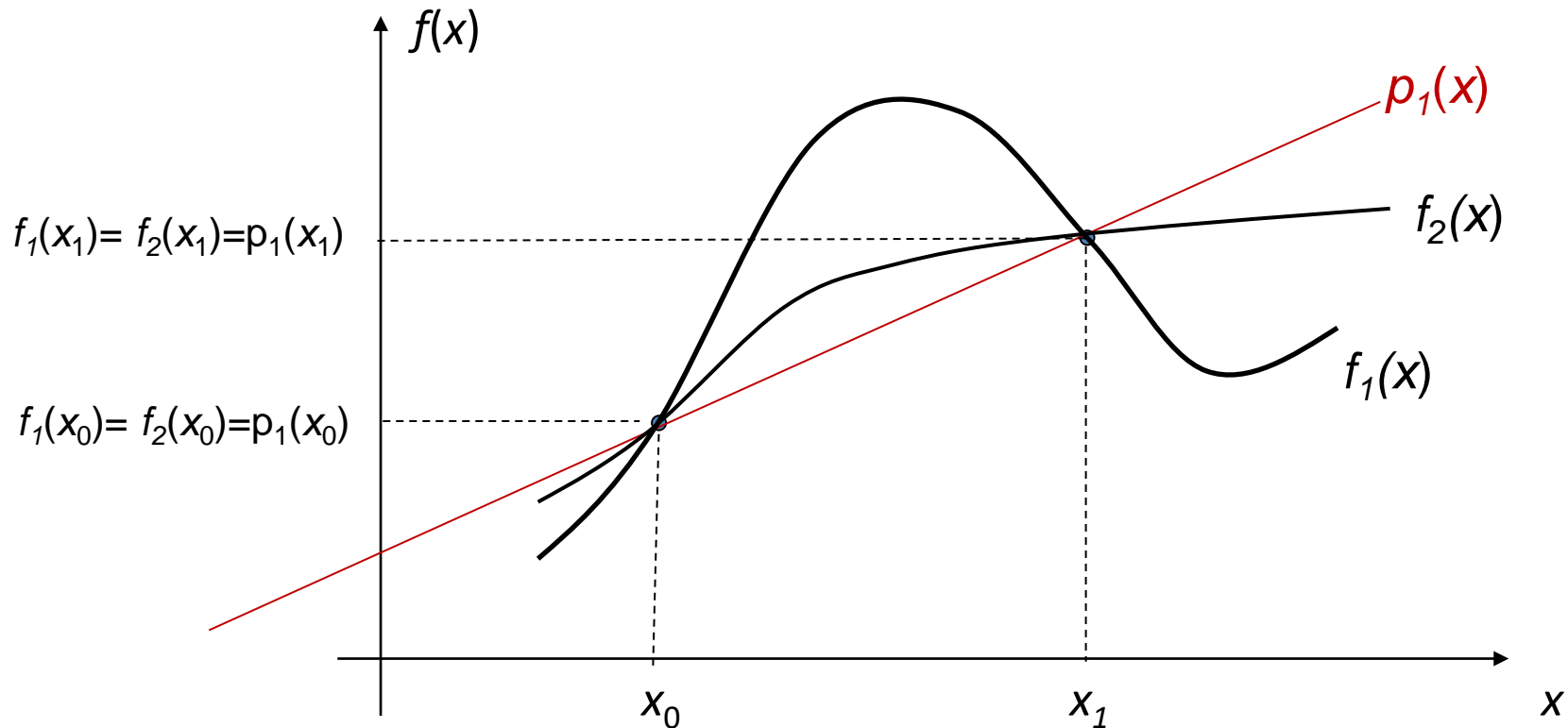
- O erro em aproximar a função  $f(x)$  por um polinômio interpolador  $p_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , é:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } [x_0, x_n]$$

- Estudar o erro na interpolação significa saber o quão próximo  $f(x)$  está de  $p_n(x)$ .

# Estudo do Erro na Interpolação

➤ Interpolação linear de  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  :



# Estudo do Erro na Interpolação

➤ Interpolação linear de  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  por  $p_1(x)$ .

- ✓ O mesmo polinômio  $p_1(x)$  interpola  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  em  $x_0$  e  $x_1$ .
- ✓ O erro  $E_1^1(x)=f_1(x)-p_1(x) > E_1^2(x)=f_2(x)-p_1(x)$  para todo  $x$  de  $(x_0, x_1)$ .
- ✓ O erro depende da concavidade da curva, ou seja, de  $f_1''(x)$  e  $f_2''(x)$ .

# Estudo do Erro na Interpolação

## Teorema 1:

“Sejam  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $(n+1)$  pontos. Seja  $f(x)$  com derivadas até ordem  $(n+1)$  para todo  $x$  em  $[x_0, x_n]$ . Seja  $p_n(x)$  o polinômio interpolador de  $f(x)$  nos pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Então, em qualquer ponto do intervalo  $[x_0, x_n]$  o erro é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

onde  $\xi_x \in (x_0, x_n)$ .

# Estudo do Erro na Interpolação

- Se  $f(x)$  e suas derivadas até ordem  $(n+1)$  são contínuas em  $I=[x_0, x_1]$ , então pode-se escrever:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)|$$

$$|E_n(x)| = \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{onde } M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$$



*Limitante Superior  
para o Erro*

# Estudo do Erro na Interpolação

Exemplo: Considere a função  $f(x)=(3+x)/(1+x)$  definida nos pontos, conforme a tabela:

|        |      |      |      |
|--------|------|------|------|
| $x$    | 0,1  | 0,2  | 0,4  |
| $f(x)$ | 2,82 | 2,67 | 2,43 |

Determine o polinômio interpolador de  $f(x)$ , usando a fórmula de lagrange, avalie  $f(0,25)$  e um limitante superior para o erro.

Resolução:

$$P(x) = x^2 - 1,8x + 2,99 \quad (\text{Polinômio Interpolador})$$

$$f(0,25) \cong P(0,25) \cong 2,6025$$



# Estudo do Erro na Interpolação

A partir da fórmula do limitante superior para o erro:

$$|E_n(x)| = \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{onde } M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$$

para  $n=2$ .

$$|E_2(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \cdot \frac{\max\{|f^{(3)}(x)|\}}{(3)!},$$

como,

$$f^{(3)}(x) = \frac{-12}{(1+x)^4}$$

é uma função decrescente em módulo no intervalo  $[0,1 ; 0,4]$ , temos que  $|f^{(3)}(x)|$  assume o valor máximo em  $x=0,1$ , ou seja:

$$\max |f^{(3)}(x)| = 8,1962$$

# Estudo do Erro na Interpolação

Assim, temos um limitante para o erro no ponto interpolado  $x=0,25$ , como segue:

$$|E_2(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \cdot \frac{\max\{|f^{(3)}(x)|\}}{(3)!},$$

$$|E_2(x)| = |(0,25 - 0,1)(0,25 - 0,2)(0,25 - 0,4)| \cdot \frac{8,1962}{6} = 0,0015$$

# Estudo do Erro na Interpolação

- Na maioria dos problemas não conhecemos  $f(x)$ . Nestes casos, deve-se construir a tabela de diferenças divididas até ordem  $n+1$ , e usar o maior valor em módulo desta ordem como aproximação para:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

no intervalo  $I=(x_0, x_n)$ . Assim teremos um limitante para o erro igual a:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

onde,

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} = \max |f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]| \quad \text{com } x \in (x_0, x_n).$$

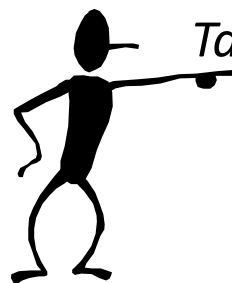
# Estudo do Erro na Interpolação

Exemplo: Seja  $f(x)$  dada na forma:

|        |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| $x$    | 0,2  | 0,34 | 0,4  | 0,52 | 0,6  | 0,72 |
| $f(x)$ | 0,16 | 0,22 | 0,27 | 0,29 | 0,32 | 0,37 |

Obter  $f(0,47)$  usando um polinômio de grau 2. Dar uma estimativa para o erro.

Resolução:

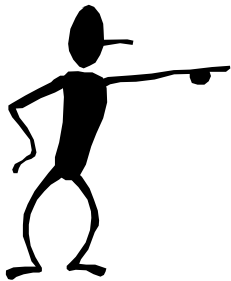


*Tabela de Diferenças*

# Estudo do Erro na Interpolação

| $x$  | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3  |
|------|---------|---------|---------|----------|
| 0,2  | 0,16    |         |         |          |
|      |         | 0,4286  |         |          |
| 0,34 | 0,22    |         | 2,0235  |          |
|      |         | 0,8333  |         | -17,8963 |
| 0,4  | 0,27    |         | -3,7033 |          |
|      |         | 0,1667  |         | 18,2494  |
| 0,52 | 0,29    |         | 1,0415  |          |
|      |         | 0,375   |         | -2,6031  |
| 0,6  | 0,32    |         | 0,2085  |          |
|      |         | 0,4167  |         |          |
| 0,72 | 0,37    |         |         |          |

# Estudo do Erro na Interpolação



*Deve-se escolher três pontos de interpolação. Como  $0,47 \in (0,4 ; 0,52)$ , dois pontos deverão ser 0,4 e 0,52. O outro pode ser 0,34 como 0,6. Escolheremos:*

$$x_0 = 0,40$$

$$x_1 = 0,52$$

$$x_2 = 0,60$$

# Estudo do Erro na Interpolação

|                   | $x$  | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3  |
|-------------------|------|---------|---------|---------|----------|
|                   | 0,2  | 0,16    |         |         |          |
|                   |      |         | 0,4286  |         |          |
|                   | 0,34 | 0,22    |         | 2,0235  |          |
|                   |      |         | 0,8333  |         | -17,8963 |
| $x_0 \rightarrow$ | 0,4  | 0,27    |         | -3,7033 |          |
|                   |      |         | 0,1667  |         | 18,2494  |
| $x_1 \rightarrow$ | 0,52 | 0,29    |         | 1,0415  |          |
|                   |      |         | 0,375   |         | -2,6031  |
| $x_2 \rightarrow$ | 0,6  | 0,32    |         | 0,2085  |          |
|                   |      |         | 0,4167  |         |          |
|                   | 0,72 | 0,37    |         |         |          |

# Estudo do Erro na Interpolação

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$P_2(x) = 0,27 + (x - 0,4) \cdot 0,1667 + (x - 0,4)(x - 0,52) \cdot 1,0415$$

$$P_2(0,47) = 0,2780 \approx f(0,47)$$

$$|E_n(x)| \approx (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \max |f[x_0, x_1, x_2, x_3]|$$



# Estudo do Erro na Interpolação

|                   | $x$  | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3  |
|-------------------|------|---------|---------|---------|----------|
|                   | 0,2  | 0,16    |         |         |          |
|                   |      |         | 0,4286  |         |          |
|                   | 0,34 | 0,22    |         | 2,0235  |          |
|                   |      |         | 0,8333  |         | -17,8963 |
| $x_0 \rightarrow$ | 0,4  | 0,27    |         | -3,7033 |          |
|                   |      |         | 0,1667  |         | 18,2494  |
| $x_1 \rightarrow$ | 0,52 | 0,29    |         | 1,0415  |          |
|                   |      |         | 0,375   |         | -2,6031  |
| $x_2 \rightarrow$ | 0,6  | 0,32    |         | 0,2085  |          |
|                   |      |         | 0,4167  |         |          |
|                   | 0,72 | 0,37    |         |         |          |

# Estudo do Erro na Interpolação

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$P_2(x) = 0,27 + (x - 0,4) \cdot 0,1667 + (x - 0,4)(x - 0,52) \cdot 1,0415$$

$$P_2(0,47) = 0,2780 \approx f(0,47)$$

$$|E_n(x)| \approx (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \max |f[x_0, x_1, x_2, x_3]|$$

$$|E_n(0,47)| \approx |(0,47 - 0,4)(0,47 - 0,52)(0,47 - 0,6)| 18,2492$$

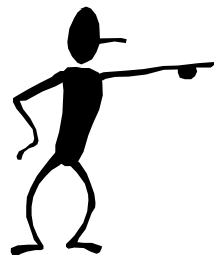
$$|E_n(0,47)| \approx 8,303 \times 10^{-3}$$

# Interpolação Inversa

➤ Seja  $f(x)$  dada na tabela:

|        |   |        |        |        |        |        |
|--------|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$    | 0 | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    |
| $f(x)$ | 1 | 1,1052 | 1,2214 | 1,3499 | 1,4918 | 1,6478 |

obter  $x$  tal que  $f(x)=1,3165$  e encontrar uma estimativa para o erro.



*Este é o problema da  
interpolação inversa*

# Interpolação Inversa

## ➤ SOLUÇÃO 1:

Obtenha  $p_n(x)$  que interpola  $f(x)= 1,3165$  e determine  $x$ .

Problema: *não temos como estimar o erro cometido!!!!!!*

## ➤ SOLUÇÃO 2:

Se  $f(x)$  for monotonicamente crescente ou decrescente no intervalo considerado ela pode ser invertida. Então faça a interpolação da função inversa e calcule o erro.

# Interpolação Inversa

| $y$            | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3 |
|----------------|---------|---------|---------|---------|
| 1              | 0       |         |         |         |
|                |         | 0,9506  |         |         |
| 1,1052         | 0,1     |         | -0,4065 |         |
|                |         | 0,8606  |         | 0,1994  |
| $y_0 = 1,2214$ | 0,2     |         | -0,3367 |         |
|                |         | 0,7782  |         | 0,1679  |
| $y_1 = 1,3499$ | 0,3     |         | -0,2718 |         |
|                |         | 0,7047  |         | 0,1081  |
| $y_2 = 1,4918$ | 0,4     |         | -0,2256 |         |
|                |         | 0,6373  |         |         |
| 1,6487         | 0,5     |         |         |         |

# Interpolação Inversa

➤ Escolhendo  $x_0, x_1, x_2$ .

$$\begin{aligned} p_2(y) &= f^{-1}(y_0) + (y - y_0)f^{-1}[y_0, y_1] + (y - y_0)(y - y_1)f^{-1}[y_0, y_1, y_2] \\ &= 0,2 + (y - 1,2214)(0,7782) + (y - 1,2214)(y - 1,3494)(-0,2718) \end{aligned}$$

a)  $p(1,3165) = 0,27487$

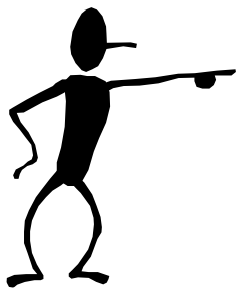
b)  $|E(1,3165)| \approx |(1,3165 - 1,2214)(1,3165 - 1,3499)(1,3165 - 1,4918)| |0,1994|$   
 $|E(1,3165)| \approx 1,1 \times 10^{-4}$



$$x = 0.27487 \pm 0.00011$$

# Grau do Polinômio Interpolador

- Para a escolha do grau do polinômio interpolador:
  - a) *Construir a tabela de diferenças divididas;*
  - b) *Examinar as diferenças na vizinhança do ponto de interesse;*



*Se as diferenças de ordem  $k$  forem praticamente constantes, ou se as diferenças de ordem  $k+1$  variarem em torno de zero, o polinômio de grau  $k$  será o que melhor aproximará a função na região considerada.*

# Grau do Polinômio Interpolador

➤ Seja  $f(x) = \sqrt{x}$  com os valores da tabela:

|        |   |       |      |        |        |        |
|--------|---|-------|------|--------|--------|--------|
| $x$    | 1 | 1.01  | 1.02 | 1.03   | 1.04   | 1.05   |
| $f(x)$ | 1 | 1.005 | 1.01 | 1.0149 | 1.0198 | 1.0247 |



*Qual deverá ser o grau do polinômio interpolador?*

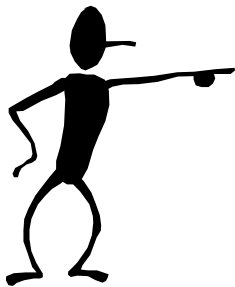


# Grau do Polinômio Interpolador

| $x$  | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 |
|------|---------|---------|---------|
| 1    | 1       |         |         |
|      |         | 0.5     |         |
| 1.01 | 1.005   |         | 0       |
|      |         | 0.5     |         |
| 1.02 | 1.01    |         | -0.5    |
|      |         | 0.49    |         |
| 1.03 | 1.0149  |         | 0       |
|      |         | 0.49    |         |
| 1.04 | 1.0198  |         | 0       |
|      |         | 0.49    |         |
| 1.05 | 1.0247  |         |         |

# Grau do Polinômio Interpolador

| $x$  | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 |
|------|---------|---------|---------|
| 1    | 1       |         |         |
|      |         | 0.5     |         |
| 1.01 | 1.005   |         | 0       |
|      |         | 0.5     |         |
| 1.02 | 1.01    |         | -0.5    |
|      |         | 0.49    |         |
| 1.03 | 1.0149  |         | 0       |
|      |         | 0.49    |         |
| 1.04 | 1.0198  |         | 0       |
|      |         | 0.49    |         |
| 1.05 | 1.0247  |         |         |



*Um polinômio de grau 1 é uma boa aproximação para:*

$$f(x) = \sqrt{x}$$

# Fenômeno de Runge

- QUESTÃO: A sequência  $\{p_n(x)\}$  converge para  $f(x)$  no intervalo  $[a,b]$  se  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  pertencem a  $[a,b]$  e  $n$  tende ao infinito?

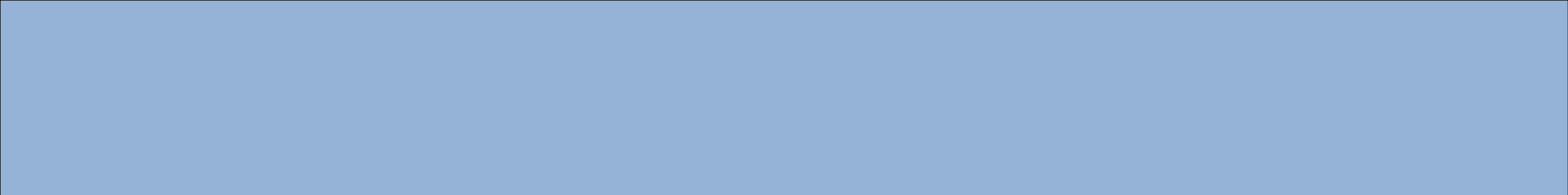
*Vamos interpolar a função:*



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

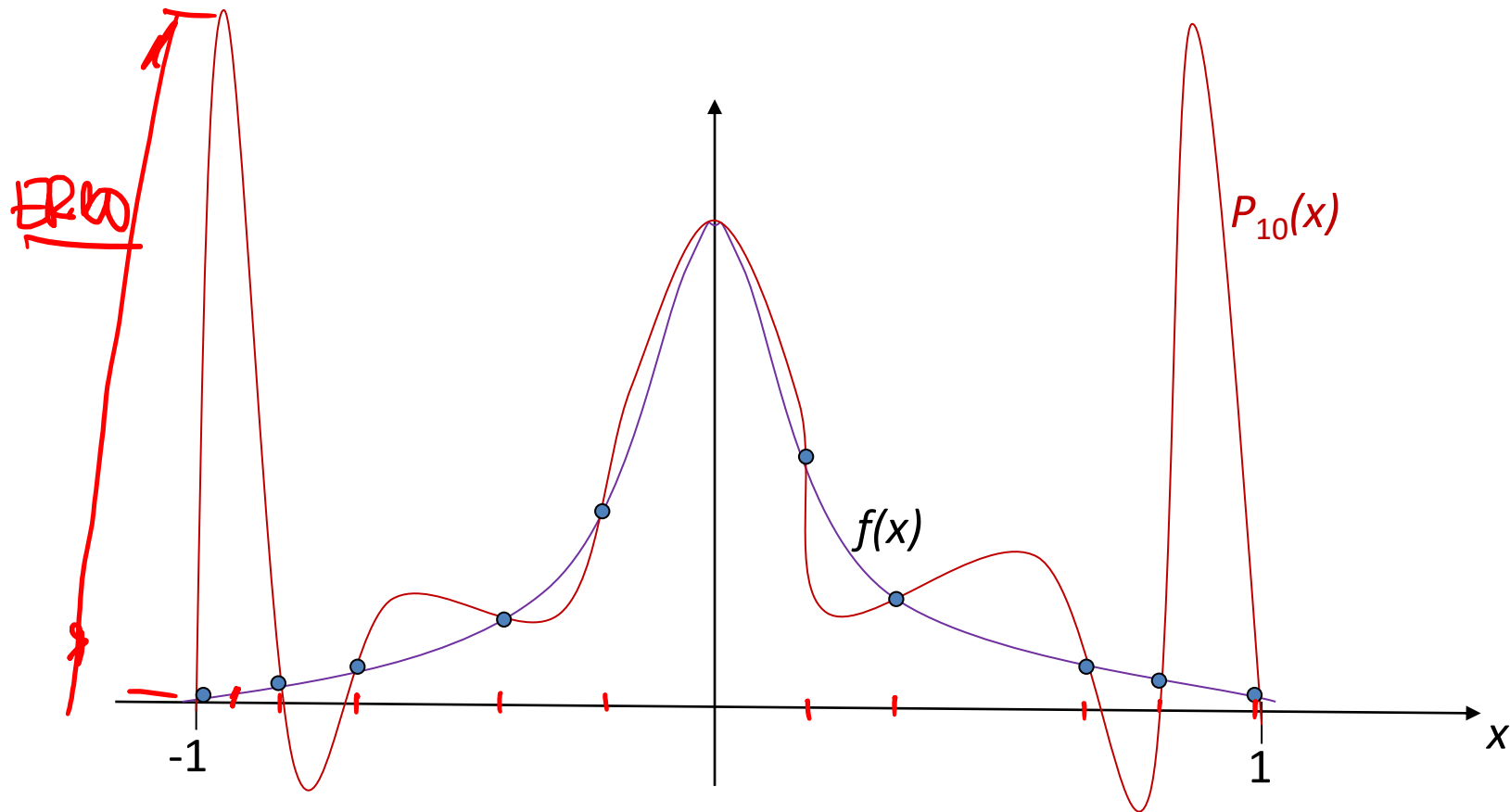
*no intervalo  $[-1,1]$  com:*

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

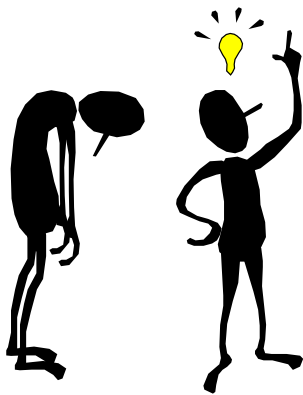
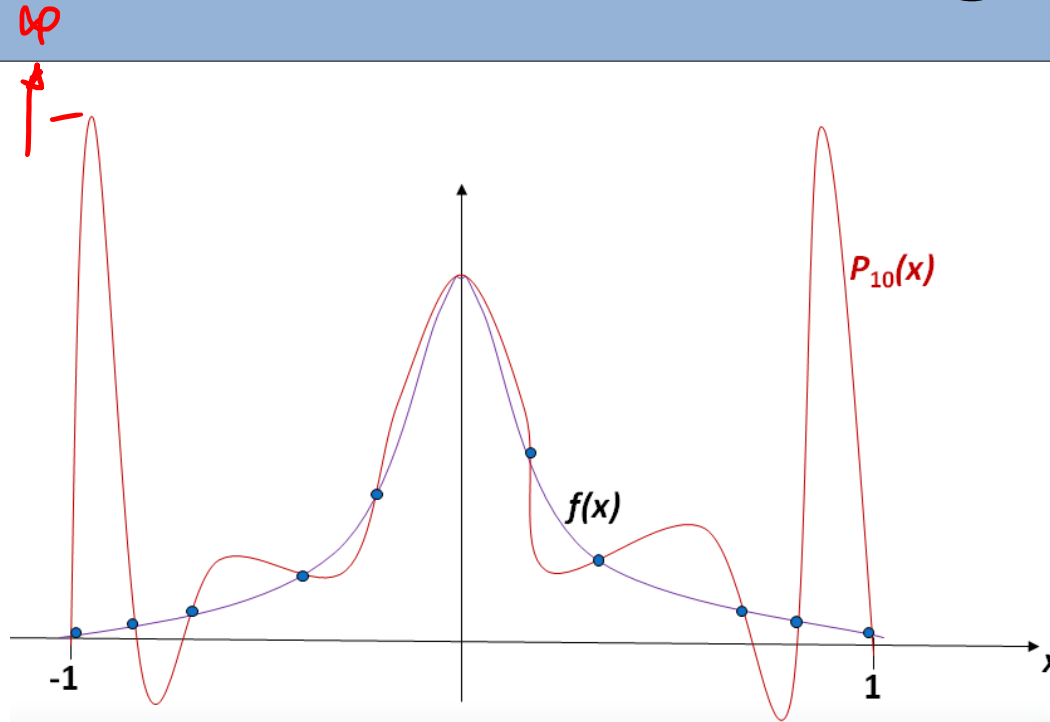


# Fenômeno de Runge

➤ Para  $n=10$  temos que:



# Fenômeno de Runge



*Utilizar funções Spline em Interpolação –  
convergência garantida!*

# Função Spline

➤ Fenômeno de Runge é superado pela função Spline.

Definição: Seja  $f(x)$  tabelada para  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . A função  $S_p(x)$  é denominada *spline* de grau  $p$  se:

- a) Em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , para  $i=0,1,2,\dots,(n-1)$ ,  $S_p(x)$  é um polinômio de grau  $p$ .
- b)  $S_p(x)$  é contínua e tem derivadas contínuas até ordem  $(p-1)$  em  $[a=x_0, x_n=b]$ .
- c)  $S_p(x_i)=f(x_i)$  para  $i=1,2,\dots,n$ .

# Função Spline

- A função spline linear interpolante de  $f(x)$ , ou seja  $S_1(x)$  nos nós  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pode ser escrita em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  como:

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

- ✓ Note que  $S_1(x)$  é polinômio de grau 1 no intervalo.
- ✓  $s_1(x)$  é contínua em todo intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$
- ✓ Nos pontos nós  $s_1(x_i) = f(x_i)$ .



*Logo,  $S_1(x)$  é a spline linear interpolante de  $f(x)$ .*



# Função Spline

Exemplo: Achar a função *spline* linear que interpola  $f(x)$ .

|          |            |            |            |             |
|----------|------------|------------|------------|-------------|
| $k$      | 0          | 1          | 2          | 3           |
| $x_k$    | 1 $x_0$    | 2 $x_1$    | 5 $x_2$    | 7 $x_3$     |
| $f(x_k)$ | 1 $f(x_0)$ | 2 $f(x_1)$ | 3 $f(x_2)$ | 25 $f(x_3)$ |

$S_2(x)$  (above nodes 1, 2, 3)  
 $S_1(x)$  (below nodes 0, 1)  
 $S_3(x)$  (below nodes 2, 3)

Resolução:

Da definição:

$$s_1(x) = f(x_0) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$s_1(x) = 1 \frac{2 - x}{2 - 1} + 2 \frac{x - 1}{2 - 1} = 2 - x + 2x - 2 = \underline{x} \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$\begin{aligned}
 &S_1(x) \\
 &\begin{cases} S_1(x_0) = f(x_0) \\ S_1(x_1) = f(x_1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

# Função Spline

Exemplo: Achar a função *spline* linear que interpola  $f(x)$ .

|          |   |   |   |    |
|----------|---|---|---|----|
| $k$      | 0 | 1 | 2 | 3  |
| $x_k$    | 1 | 2 | 5 | 7  |
| $f(x_k)$ | 1 | 2 | 3 | 25 |

Resolução:

$$s_1(x) = x \quad \forall x \in [1, 2]$$

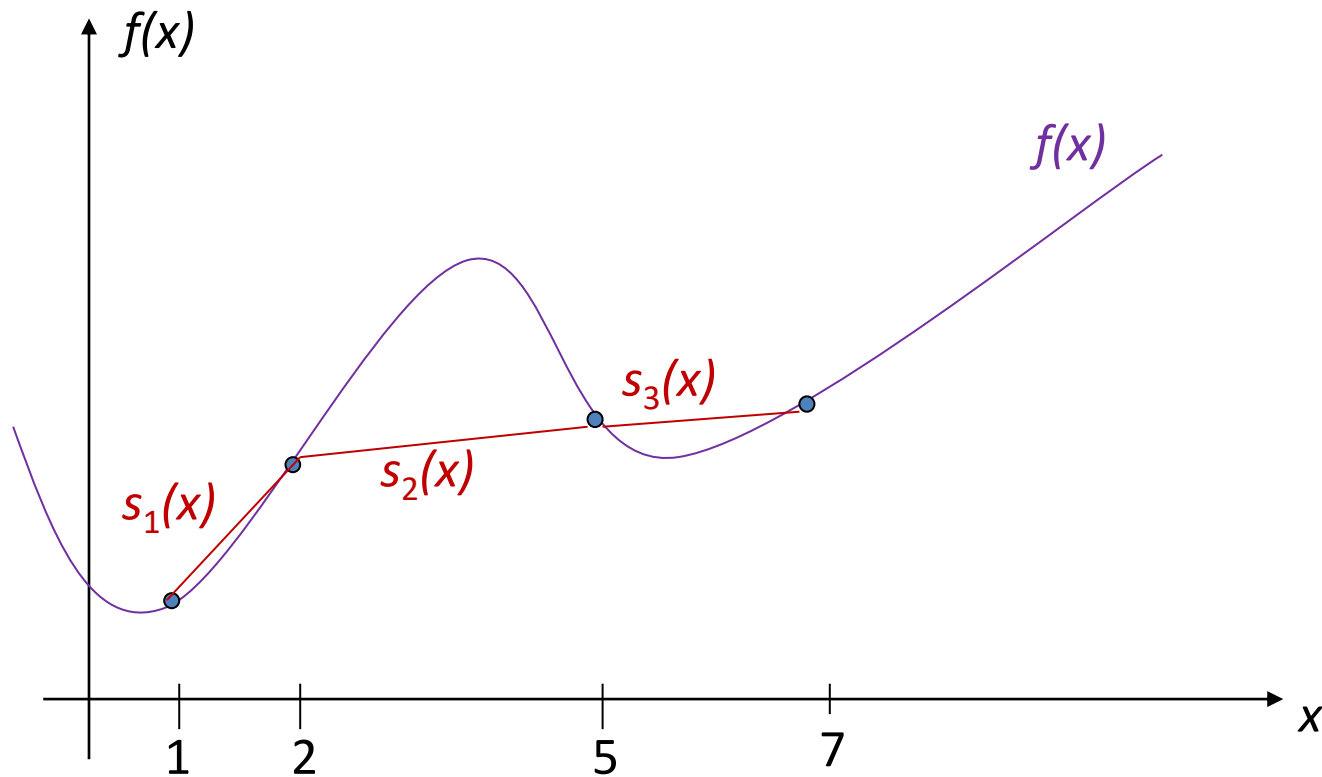
Analogamente,

$$s_2(x) = \frac{1}{3}(x + 4) \quad \forall x \in [2, 5]$$

$$s_3(x) = \frac{1}{2}(-0.5x + 8.5) \quad \forall x \in [5, 7]$$

# Função Spline

Graficamente,



# Função Spline

- As *splines* cúbicas são as mais usadas,
- Uma spline cúbica  $S_3(x)$  é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte  $s_k(x)$  é um polinômio de grau 3 nos intervalos  $[x_{k-1}, x_k]$ .
- $S_3(x)$  tem derivadas primeira e segunda contínuas, logo não tem bicos e não troca abruptamente a curvatura nos nós.



*A função spline cúbica interpolante de  $f(x)$ , ou seja  $S_3(x)$ , nos nós  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pode ser escrita em cada subintervalo como polinômios de grau 3.*

# Função Spline

Denotada por  $s_k(x)$  para  $k=1,2,\dots,n$ , deve satisfazer:

1.  $S_3(x) = s_k(x)$  para  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .
2.  $S_3(x_i) = f(x_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
3.  $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .
4.  $s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .
5.  $s_k''(x_k) = s_{k+1}''(x_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

# Função Spline

Sejam as parte da *spline* cúbica dadas por,

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

O Cálculo de  $S_3(x)$  envolve a determinação de  $4n$  coeficientes:

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n.$$



Condições 1: satisfeitas por construção.

Condições 2:  $(n+1)$  condições nos nós.

Condições 3:  $(n-1)$  condições de continuidade de  $S_3$  nos nós.

Condições 4:  $(n-1)$  condições de continuidade de  $S_3'$  nos nós.

Condições 5:  $(n-1)$  condições de continuidade de  $S_3''$  nos nós.

Total de  $4n-2$  condições. Restam duas condições em aberto!!!

# Função Spline

Notação:

$$h_k = x_k - x_{k-1} \quad , \quad s_k''(x_k) = g_k \quad , \quad f(x_k) = y_k \quad .$$

Impondo as condições:

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \quad , \quad b_k = \frac{g_k}{2} \quad , \quad d_k = y_k$$

$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6}$$

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1} g_{k+1} = 6 \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$$

Sistema Linear



Note que o sistema linear tem  $(n-1)$  equações para  $g_0, g_1, \dots, g_n$ .

# Função Spline

Resta impor mais duas condições:

**Alternativas 1:** Chamada spline natural

$$S_3''(x_0) = g_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_3''(x_n) = g_n = 0$$

**Alternativa 2:** Chamada spline parabólica.

$$g_0 = g_1 \quad \text{e} \quad g_n = g_{n-1}$$

**Alternativa 3:** Impor inclinações nos extremos.

$$S_3'(x_0) = A \quad \text{e} \quad S_3'(x_n) = B$$

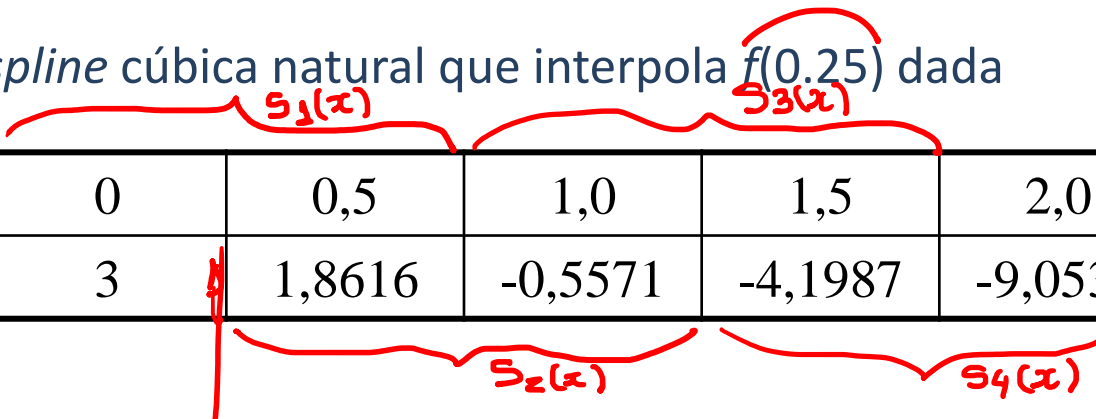


Geralmente quando  
temos informações  
físicas do problema



# Função Spline

Exemplo: Achar a *spline* cúbica natural que interpola  $f(0.25)$  dada



|        |   |        |         |         |         |
|--------|---|--------|---------|---------|---------|
| $x$    | 0 | 0,5    | 1,0     | 1,5     | 2,0     |
| $f(x)$ | 3 | 1,8616 | -0,5571 | -4,1987 | -9,0536 |

Resolução:

Temos 4 subintervalos iguais. Dadas  $s_1(x)$ ,  $s_2(x)$ ,  $s_3(x)$ ,  $s_4(x)$  resolvendo o sistema linear para  $1 \leq k \leq 3$ , pois  $(n-1)=3$

# Função Spline

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

todos os intervalos = 0,5

$$h_k = h_{k+1} = 0,5 = h$$

$$h_k \bar{g}_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1}) \bar{g}_k + h_{k+1} \bar{g}_{k+1} = 6 \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$$

OBTENDO O SISTEMA DE EQUAÇÕES:

$$k=1 \Rightarrow h_1 \cancel{g_0} + 2(h_1 + h_2) g_1 + h_2 g_2 = 6 \left( \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right) =$$

$$k=2 \Rightarrow h_2 g_1 + 2(h_2 + h_3) g_2 + h_3 g_3 = \frac{6}{h} (y_2 - 2y_1 + y_0) \frac{y_2 - y_1}{h_2}$$

$$k=3 \Rightarrow h_3 g_2 + 2(h_3 + h_4) g_3 + h_4 g_4 = \frac{6}{h} (y_3 - 2y_2 + y_1) \frac{y_3 - y_2}{h_3}$$

$$g_0 = g_4 = 0$$

$$4h g_1 + h g_2 = \frac{6}{h} (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$h g_1 + 4h g_2 + h g_3 = \frac{6}{h} (y_3 - 2y_2 + y_1)$$

$$0 + h g_2 + 4h g_3 = \frac{6}{h} (y_4 - 2y_3 + y_2)$$

$$\begin{cases} 2g_1 + 0,5g_2 = -15,4 \\ 0,5g_1 + 2g_2 + 0,5g_3 = -17 \\ 0,5g_2 + 2g_3 = -14,6 \end{cases}$$

# Função Spline

Substituindo os valores de  $y_k=f(x_k)$  e  $h_k=h=0,5$  resolvemos o sistema linear obtendo:

$$g_0 = g_4 = 0$$

$$g_1 = -6.654 \quad , \quad g_2 = -4.111 \quad , \quad g_3 = -6.252$$

Calculamos,

$$a_k, b_k, c_k, d_k, \quad \text{e} \quad s_1(x), s_2(x), s_3(x), s_4(x)$$

$$s_1(x) = a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1$$

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \quad , \quad b_k = \frac{g_k}{2} \quad , \quad d_k = y_k$$

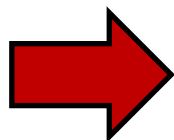
$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6}$$

$$a_1 = \frac{-6,654 - 0}{3} =$$

$$b_1 = \frac{-6,654}{2} =$$

$$c_1 = \frac{18,16 - 3}{0,5} + \frac{-6,654}{6}$$

$$d_1 = 18,16$$



# Função Spline

Como queremos  $f(0,25)$  fazemos:

$$f(0,25) \approx s_1(0,25)$$



$$s_1(0,25) = a_1(0,25 - x_1)^3 + b_1(0,25 - x_1)^2 + c_1(0,25 - x_1) + d_1$$
$$\Rightarrow s_1(0,25) = 2,5348$$