GRAFOS – 25/2

Ciência da Computação
Universidade do Vale do Itajaí – UNIVALI

Profª Fernanda dos Santos Cunha
fernanda.cunha@univali.br

1

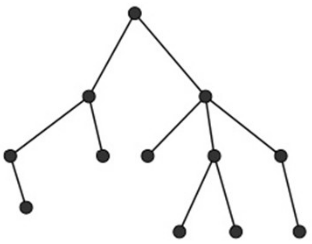
1

Grafos: Unidade 4 – Árvores

- **Árvores**

  É um grafo conexo **T** (*tree*) em que **existe um e somente** um caminho entre qualquer par de vértices de T. E esse caminho é simples.

  Propriedade: para cada aresta a, o grafo T – a não é conexo.

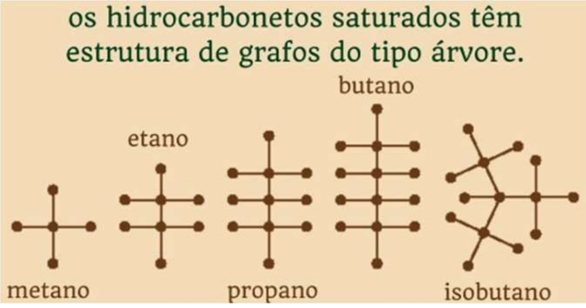


2

Grafos: Unidade 4 – Árvores

- **Floresta**

  Uma floresta **F** (*forest*) é um conjunto de árvores sem vértices em comum.



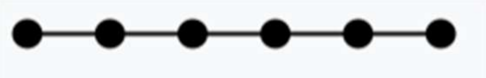
3

Grafos: Unidade 4 – Árvores

- **Grafo Caminho**

  Um grafo caminho **Pn** (*Path*) é uma árvore com n vértices, dos quais apenas dois vértices com grau 1 (extremidades) e todos os outros vértices com grau 2 (conectados a dois outros vértices).

  Também chamado de grafo linear, pois os vértices podem ser conectados em uma sequência linear, formando um caminho.



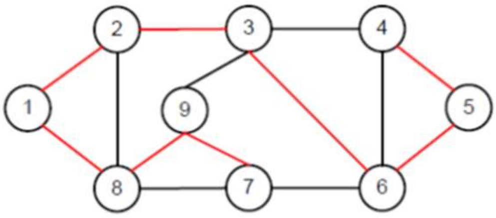
Um grafo caminho em 6 vértices

4

Grafos: Unidade 4 – Árvores

- **Árvore Geradora**

  É um subconjunto de arestas que forma uma árvore onde estão incluídos todos os vértices do grafo original.

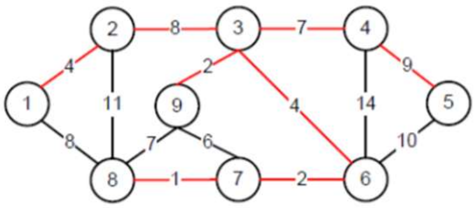


Grafos: Unidade 4 – Árvores

- **Árvore Geradora Mínima – AGM**

  A árvore geradora mínima $\mathbf{T}_{\mathbf{Min}}$ é a árvore geradora de menor custo, dentre todas as possíveis em G.

  Custo = somatório dos custos das arestas de T.



- **Árvore Geradora Máxima – AGMa**

  Trata-se da árvore geradora de maior custo.

Árvore Geradora Mínima – AGM

É um **subgrafo conexo máximo*** do grafo não orientado G com n vértices tendo as seguintes características:

- é acíclico
- tem n-1 arestas
- está associado ao menor dos custos totais de todas as árvores geradoras do grafo
- há uma cadeia elementar única entre qualquer par de vértices
- pode não ser único

(*) Há cadeia entre qualquer par dos seus vértices. É máximo quando engloba todos os vértices que partilham desta condição.

7

AGM – Algumas Aplicações

- **Projeto**

  Redes telefônicas, elétricas, hidráulicas, TV cabo, computadores e rodovias

- **Análise de clusters (exemplo)**

  Análise de padrões espaciais de esporos de fungos

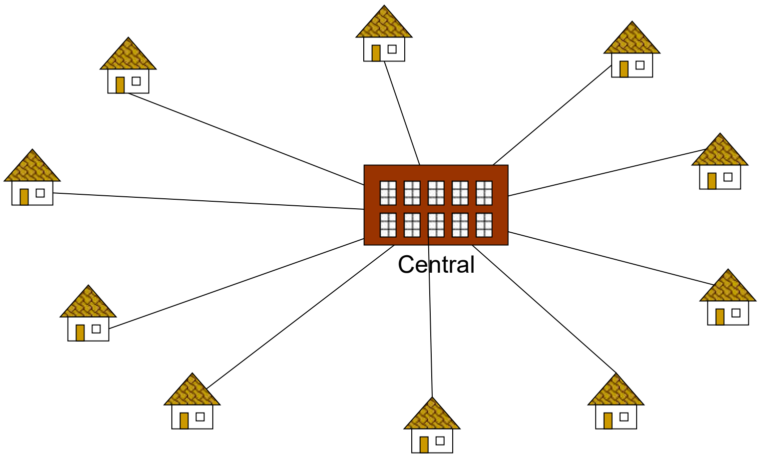
- **Soluções aproximadas de problemas NP**

  Circuito de Hamilton, Árvore de Steiner

8

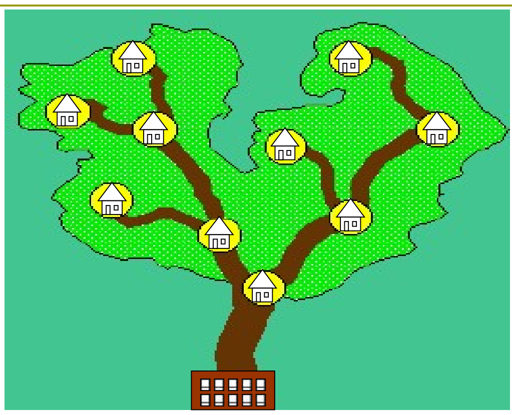
Instalação de Rede Telefônica

Problema de cobertura de nós



Modalidade dispendiosa …

Instalação de Rede Telefônica



Como otimizar... (inspiração na natureza.)

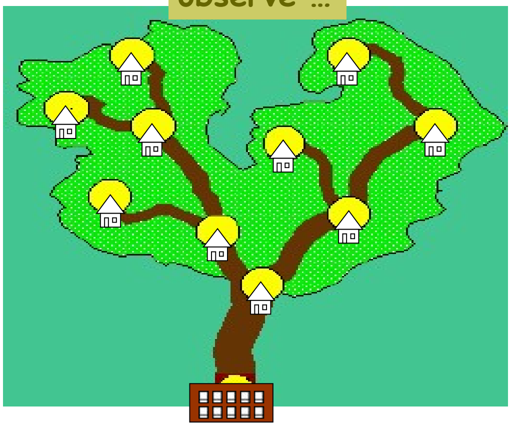
Instalação de Rede Telefônica

Há ligação entre qualquer par de vértices (grafo conexo)

Não há ciclos

Removendo qualquer das arestas a conexidade desaparece

observe ...



Liga 11 vertices com 10 arestas

Qualquer nova ligação entre vertices origina um ciclo

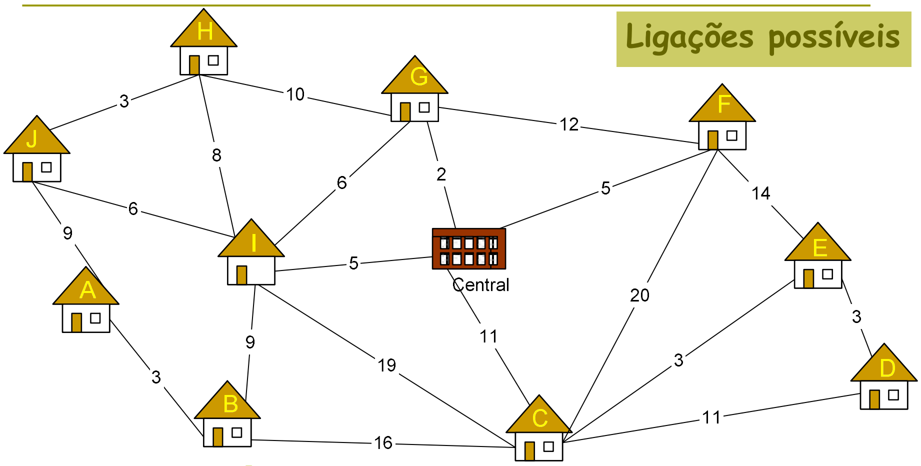
Há uma cadeia elementar única entre qualquer par de vértices

A melhor solução é ? Árvore Geradora !

11

Instalação de Rede Telefônica

Ligações possíveis

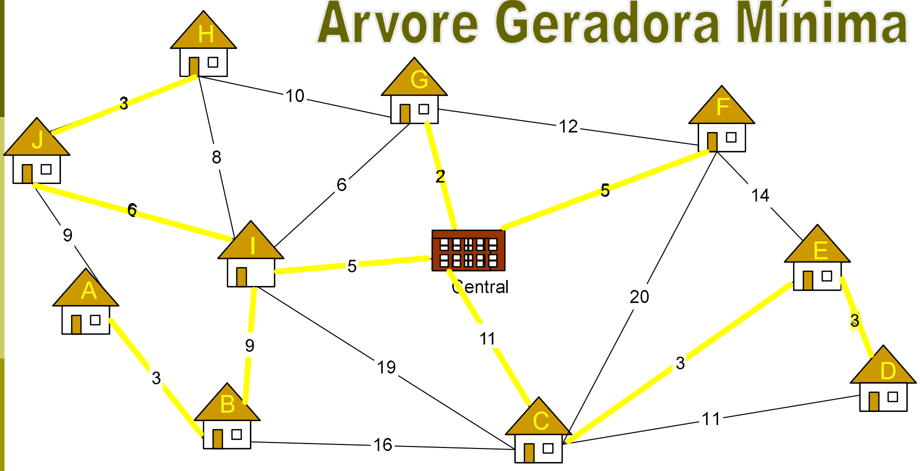


Qual das Árvores Geradoras tem peso mínimo?

12

Instalação de Rede Telefônica

Árvore Geradora Mínima



Peso=50 (mínimo)

Algoritmo de PRIM (Robert C. Prim, 1957)

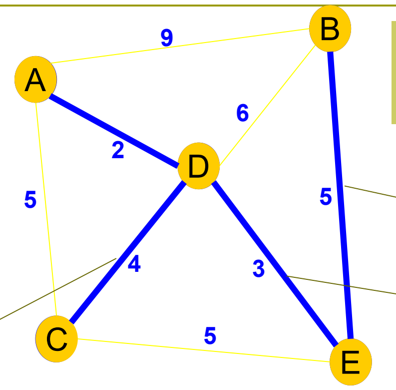
LER G=(N,M) e D=[dij] (matriz de pesos de G)
T←{i} // vértices visitados, árvore corrente
V←N\{i} // cjto vértices não visitados
$T_{min} \leftarrow \phi$
ENQUANTO T ≠ N FAÇA
  Achar aresta(j,k)∈M | j∈T, k∈V e d_{jk} é mínimo
  T←T∪{k}
  V←V\{k}
  $T_{min} \leftarrow T_{min} \cup (j,k)$
FIMENQUANTO
ESCREVER T_{min} // cjto de arestas da AGM

O algoritmo parte de qualquer vértice, e a cada passo acrescenta a menor aresta que sai no conjunto de vértices selecionados e que possui extremidade com vértice fora do conjunto.

Cálculo da Árvore Geradora Mínima (AGM)

Nº de vértices	5

Nº de arestas da AGM	5-1=4



AGM calculada (peso=14) via método de PRIM

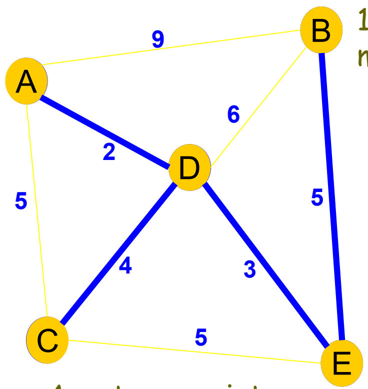
Aresta de menor peso EB (B vértice novo)

Aresta de menor peso DE (E vértice novo)

Aresta de menor peso DC (C vértice novo)

Inicialização: Partindo do vértice A escolhe aresta AD (com menor peso) para a árvore.
Arestas seguintes: escolher a aresta de menor peso que tenha apenas um vértice na árvore corrente

AGM – Método de PRIM



1ª aresta : escolher o menor valor da matriz

	A	B	C	D	E
A					
B	9				
C	5	∞			
D	2	6	4		
E	∞	5	5	3	

Todos os valores cortados por 2 retas. AGM calculada.

Arestas seguintes:

No valor escolhido cortar linha e coluna dos 2 vértices extremos da aresta escolhida.

Escolher nova aresta no menor dos valores cortados por **uma única reta**.

AGM – Teste

Escolha a aresta e clique para verificar se atuou corretamente

	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B	22							
C	14	12						
D	13	9	7					
E	11	8	14	17				
F	19	10	11	22	11			
G	12	13	23	12	45	12		
H	12	5	11	12	33	14	7	

AGM calculada: 57 (para 8 vértices, 7 arestas escolhidas; todos os valores estão cortados por 2 retas)

AGM – Teste

	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B	22							
C	14	12						
D	13	9	7					
E	11	8	14	17				
F	19	10	11	22	11			
G	12	13	23	12	45	12		
H	12	5	11	12	33	14	7	

8-1=7 ARESTAS

LIGAÇÃO ÚNICA ENTRE QUALQUER PAR DE VÉRTICES

CONEXO