Integração Numérica

Mariana Bastos dos Santos

Agosto 2019

1 Introdução

As integrais numéricas são utilizadas em casos onde não é possível computar a integral analiticamente devido o integrando ser muito complicado ou por não haver, de fato, uma expressão analítica para a integral. Outros casos são aqueles que há expressão analítica para a integral mas a avaliação da mesma é muito custosa, sendo mais eficiente calcular a integral numericamente. E ainda, em casos onde o integrando é conhecido em apenas alguns pontos o melhor cálculo é por meio da integral numérica. Este trabalho trabalho tem como objetivo implementar a resolução de integrais numéricas utilizando as regras de simpson, trapezoidal e dos pontos médios.

2 Conceitos Fundamentais

2.1 Regra Trapezoidal

[1] A Regra Trapezoidal e integração numérica é uma aproximação simples a qual pode ser observada na Figura 1. As bases do trapezio medem $f(a)$ e $f(b)$ e a altura do trapezio é $b-a$. Observa-se no exemplo da Figura 1 que a aproximação desconsiderou uma parte significativa da área da função $f(x)$. Para melhorar a aproximação aplica-se a divisão do intervalo de integração em diversos subintervalos menores, aproximando essa integral em cada um desses subintervalos pela área dos respectivos trapézios, como pode ser notado na Figura 2.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)(\frac{f(a)+f(b)}{2}) \tag{1}$$

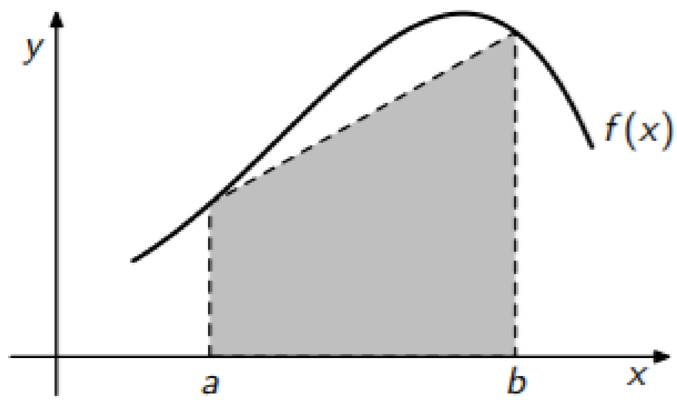

Figura 1: Gráfico de exemplo da aproximação da área da função de $f(x)$ pela regra trapezoidal

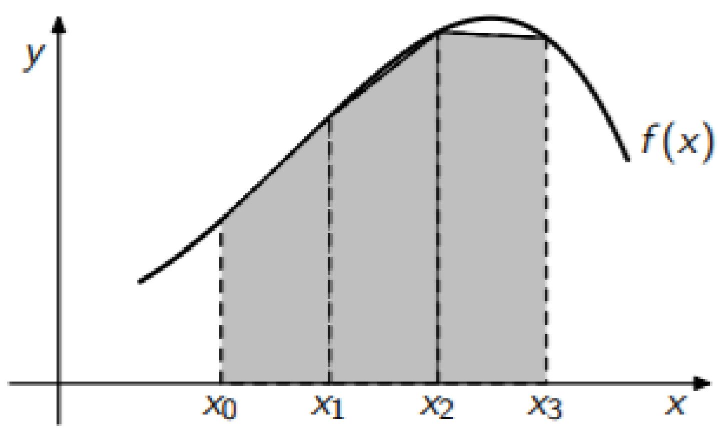

Figura 2: Gráfico de exemplo da aproximação da área da função de $f(x)$ pela regra trapezoidal com 3 subdivisões

2.2 Regra de Simpson

A Regra de Simpson utiliza três pontos da função para construir uma reta interpoladora, que são os extremos do intervalo e o ponto médio, sendo então possível interpolar a função por uma parábola. A área abaixo da função é aproximada pela área abaixo da parábola (Figura 3).

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)(\frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6}) \quad (2)$$

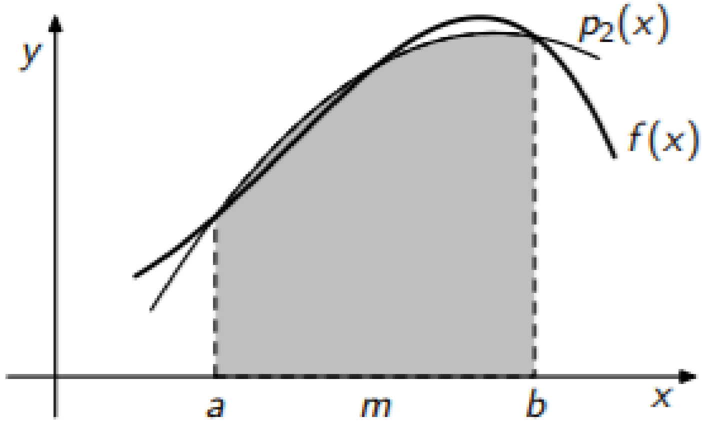

Figura 3: Gráfico de exemplo da aproximação da área da função de $f(x)$ pela Regra de Simpson

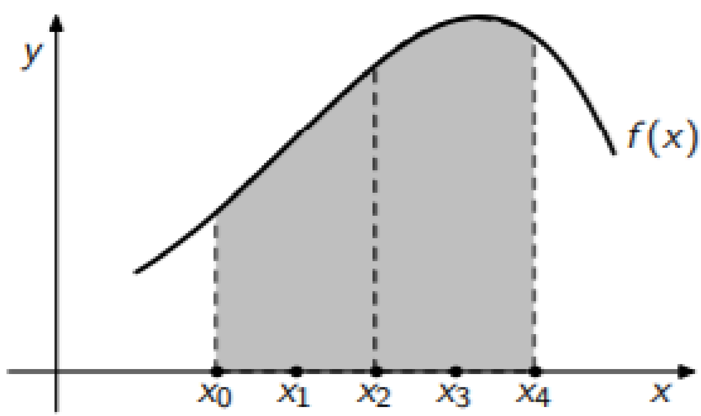

Figura 4: Gráfico de exemplo da aproximação da área da função de $f(x)$ pela Regra de Simpson com 2 subintervalos e 3 pontos

Na Figura 4 é mostrada a aplicação da Regra de Simpson composta, na qual a cada dois subintervalos é aplicada a regra e então somada.

2.3 Regra dos Pontos Médios

A Regra dos Pontos Médios também é uma aproximação da área de uma função e o seu cálculo pode ser obtido da Equação 3

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)(\frac{a+b}{2}) \tag{3}$$

3 Implementação

A implementação desse trabalho foi feita na linguagem Python. Foram criadas funções individuais para cada uma das regras: simpson, trapezoidal e dos pontos médios. Para o cálculo do erro, foi necessário criar funções das derivadas de cada uma das funções das integrais, e na sequência foi criada uma função para o cálculo do erro de cada uma das regras. E por fim, foi implementada uma função do método de quadratura adaptativa sendo possível atribuir a cada uma das regras.

4 Experimentos e Resultados

O experimento aplicado foi a verificação dos resultados e o erro de aproximação apresentado por cada um deles. Abaixo é possível verificar que a Regra de Simpson se mostrou mais próximo do valor real da Equação a da Tabela 1, pois o seu erro é o menor, comparado às outras regras. Nas demais Equações a derivada a segunda zera os erros, o que impossibilita, para esses casos, dizer que as regras de trapézio e dos pontos médios são mais eficazes apenas olhando a informação do erro. Portanto, para as Equações b e c, pode se dizer que a Regra de Simpson é a mais eficaz. Em relação a quadratura, tanto a da Regra de Simpson quanto da Regra dos Pontos Médios mostraram resultados muito próximos do real, já a Regra Trapezoidal, não se aproximou em nenhum dos casos.

5 Conclusão

A integração numérica se mostrou bastante eficaz para o cálculo de integrais que analiticamente são impossíveis de serem calculadas e se mostrou uma solução, para os casos aplicados, rápida e eficaz.

Tabela 1: Resultados apresentados por cada uma das regras em 3 diferentes equações

Equação a: $\int_0^1 e^x dx$			
Regra	Resultado	Erro	Quadratura
simpson	1,718861152	0,000944	1,718281974
retangulo	1,648721271	0,113262	1,700512717
trapezoidal	1,859140914	0,226523	3,507862185
Equação b: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$			
simpson	0,744016936	0,000347	0,770898789
retangulo	0,866025404	0	0,785406844
trapezoidal	0,5	0	1
Equação c: $\int_0^1 e^((-x)^2) dx$			
simpson	0,747180429	0,000255	0,746820778
retangulo	0,778800783	0	0,746702675
trapezoidal	0,683939721	0	1,462740504

Referências

[1] Ricardo Biloti. Integração numérica, 2019.