Nome: Vinícius Damodo Silva
Matrícula: 201900790379

LoB – Aula 8

Exemplo 12.7

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\mu = -1,8 \pm j2,4$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix}$$

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para realimentação de estado observado:

$$u = -K\tilde{x} = -\begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

com os polos observados sendo $s = -8$ e $s = -8$

Obtenha a matriz de ganho $\mathbf{K}_e$ do observador e desenhe um diagrama de blocos do sistema de controle realimentado por meio do estado observado. Então, obtenha a função de transferência $U(s)/[-Y(s)]$ do controlador-observador e desenhe um outro diagrama de blocos com o controlador-observador como um controlador em série no ramo direto. Por fim, obtenha a resposta do sistema às seguintes condições iniciais:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico será:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20,6 = s^2 + a_1 s + a_2$$

Assim, $a_1 = 0$ e $a_2 = -20,6$

Já para o observador, temos:

$$(s+8)(s+8) = s^2 + 16s + 64 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

Assim, $\alpha_1 = 16$ e $\alpha_2 = 64$

Para determinar a matriz de ganho do observador, temos:

$$K_e = (WN^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

onde,

$$N = [C^* \mid A^* C^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore K_e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20,6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84,6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}$$

Assim a eq. do observador será:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C)\tilde{x} + B\mu + K_e y$$

mas como $\mu = -K\tilde{x}$, temos:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C - BK)\tilde{x} + K_e y$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29{,}6 & 3{,}6 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84{,}6 \end{bmatrix} y$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93{,}6 & -3{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84{,}6 \end{bmatrix} y$$

A função de transferência do controlador-observador é dada por:

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e$$

$$= \begin{bmatrix} 29{,}6 & 3{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+16 & -1 \\ 93{,}6 & s+3{,}6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 84{,}6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{778{,}16s + 3690{,}72}{s^2 + 19{,}6s + 151{,}2}$$

A eq. característica do sistema é:

$$|sI - A + BK|\,|sI - A + K_e C| = (s^2 + 3{,}6s + 9)(s^2 + 16s + 64)$$

$$\Rightarrow s^4 + 19{,}6s^3 + 130{,}6s^2 + 374{,}4s + 576 = 0$$

Agora considerando as seguintes condições iniciais

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad e(0) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos a resposta a partir de:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \text{ sendo } \begin{bmatrix} x(0) \\ e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
A = [0 1; 20.6 0];
B = [0;1];
C = [1 0];
K = [29.6 3.6];
Ke = [16; 84.6];
sys = ss([A-B*K B*K; zeros(2,2) A-Ke*C],eye(4),eye(4),eye(4));
t = 0:0.01:4;
z = initial(sys,[1;0;0.5;0],t);
x1 =[1 0 0 0]*z';
x2 = [0 1 0 0]*z';
e1 = [0 0 1 0]*z';
e2 = [0 0 0 1]*z';

subplot(2,2,1); plot(t,x1 ),grid
title('Response to Initial Condition')
ylabel('state variable x1 ')

subplot(2,2,2); plot(t,x2),grid
title('Resp0nse to Initial Condition')
ylabel('state variable x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e1 ),grid
xlabel('t (sec)'), ylabel('error state variable e1 ')
subplot(2,2,4); plot(t,e2),grid
xlabel('t (sec)'), ylabel('error state variable e2 ')
```