

# Solução Numérica da Equação de Laplace

MARIANA JÓ (7241072)

## Resumo

*Propõe-se encontrar a solução da Equação de Laplace a partir de métodos de relaxamento num problema em duas dimensões, com condições de contorno de Dirichlet. São implementados o Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel, comparando a convergência da solução para ambos. Em ambos os casos a solução converge, sendo que o segundo mostra-se mais eficiente, como esperado na literatura.*

## I. INTRODUÇÃO

Uma equação da forma

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{1}$$

é denominada Equação de Laplace e suas soluções são funções harmônicas. Na ausência de cargas, a Equação de Laplace nos dá o potencial numa determinada região.

As funções harmônicas possuem a propriedade do valor médio. Isto é, o valor de  $\varphi(x, y, z)$  é a média do valor ao redor deste ponto. Ou seja, ao desenhar uma bola de raio  $R$  entorno do ponto  $(x, y, z)$ , a média do valor de  $\varphi$  na bola é igual ao valor no centro [1]:

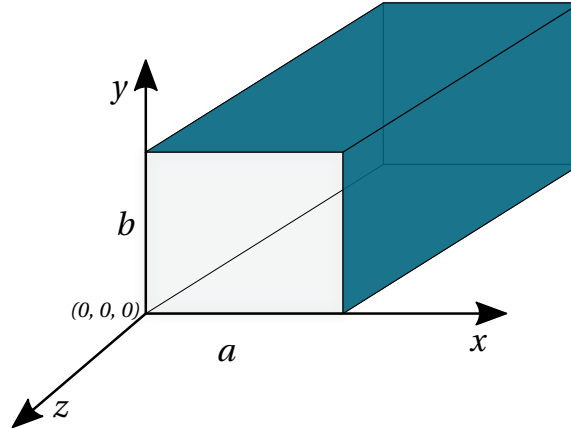
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\text{esfera}} \varphi \, dS.$$

Esta propriedade das funções harmônicas nos permite resolver a Equação de Laplace através de métodos de relaxamento: a partir das condições de contorno e "chutes" iniciais para  $\varphi$  nas regiões internas, o valor do potencial para cada ponto é calculado a partir dos valores de seus vizinhos. Este procedimento é repetido iterativamente, fazendo com que a solução convirja.

Este trabalho propõe duas soluções para a Equação de Laplace utilizando métodos de relaxamento. O *Jupyter Notebook* com as implementações encontra-se disponível no repositório do GitHub [2].

## Problema proposto

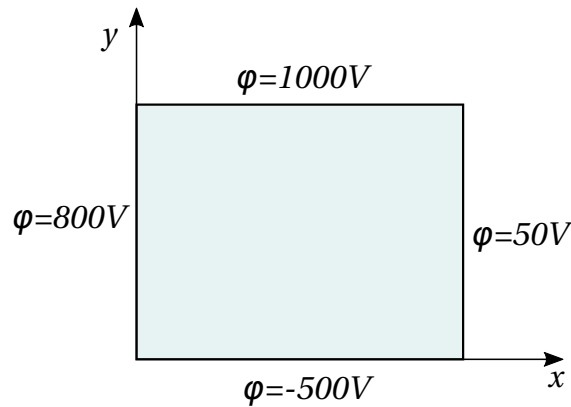
Queremos resolver o potencial dentro de uma caixa em  $(x, y, z)$ , de lados  $(a, b, \infty)$ . Ou seja, o problema possui simetria em  $z$  e, portanto, basta-nos resolver um problema em duas dimensões,  $(x, y)$ .



**Figura 1:** Geometria do problema.

O problema possui condições de contorno de Dirichlet e são dadas por:

- i.  $\varphi(x, 0) = -500V$
- ii.  $\varphi(x, b) = 1000V$
- iii.  $\varphi(0, y) = 800V$
- iv.  $\varphi(a, y) = 50V$



**Figura 2:** Plano  $xy$  com as condições de contorno.

## II. DISCRETIZAÇÃO E MÉTODO DE RELAXAMENTO

Primeiramente, é necessário discretizar o problema e para isso utilizamos uma malha<sup>1</sup> de pontos que cubra nosso domínio de interesse. Assume-se que os pontos da malha tenham o mesmo espaçamento  $h$  entre si, em todas as direções [3].

<sup>1</sup>Trad. *meshgrid*.

Cada ponto da malha é descrito pelo par  $(i, j)$ , assumindo o ponto de origem  $(x, y) = (0, 0)$ , onde as coordenadas  $(x, y)$  da malha  $(i, j)$  são dadas por  $x_i = ih$  e  $y_j = jh$ . Portanto, o objetivo é calcular os valores de  $\varphi$  na malha,  $\varphi(x_i, y_j) \equiv \varphi_{i,j}$ .

O próximo passo é transformar o operador Laplaciano  $\nabla^2$  para a versão discreta, ou seja, descrever as derivadas segundas em termos de diferenças finitas.

Consideremos primeiramente apenas a variável  $x$ :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

Fazendo a expansão de Taylor de  $\varphi$  ao redor de  $x$  temos:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \dots, \quad (2)$$

com todas as derivadas avaliadas no ponto  $x$ . A equação (II) implica

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) = 2\varphi(x) + h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mathcal{O}(h^4).$$

Desconsiderando os termos de maior ordem para um  $h$  suficientemente pequeno, podemos reescrever como

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \approx \frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2}.$$

O desenvolvimento para  $y$  é completamente análogo. Assim, combinando as duas soluções, chegamos a uma aproximação para o Laplaciano:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\varphi(x+h, y) + \varphi(x-h, y) - 2\varphi(x, y)}{h^2} + \frac{\varphi(x, y+h) + \varphi(x, y-h) - 2\varphi(x, y)}{h^2}$$

Portanto, utilizando a notação sobre a malha, onde  $\varphi(x \pm h, y) = \varphi_{i \pm 1, j}$  e  $\varphi(x, y \pm h) = \varphi_{i, j \pm 1}$ , a Equação de Laplace fica

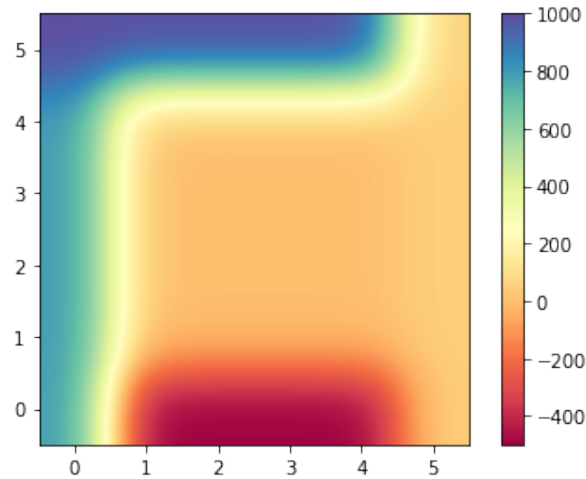
$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0,$$

podendo ser reescrita como

$$\varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1}}{4}. \quad (3)$$

Esta equação é a manifestação da propriedade do valor médio das funções harmônicas. Isto é, o valor em um ponto é a média dos seus valores vizinhos.

Agora, para resolver o problema a partir de (2) lançaremos mão de dois métodos iterativos: o Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel. Para aplicarmos os métodos precisamos "chutar" os valores iniciais na região interna do problema. Assim, consideramos que  $\varphi_{i,j} = 0$  em toda a região interna a temos o potencial inicial como representado na Figura 3.



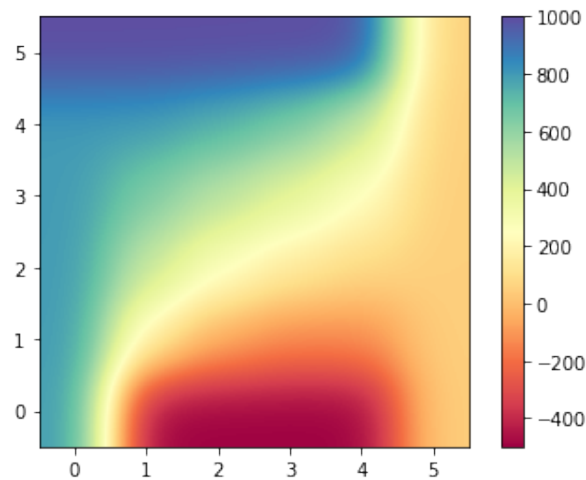
**Figura 3:** Mapa de cores para o potencial inicial.

### Método de Jacobi

De posse da aproximação (2), podemos partir de um valor inicial para o potencial, as condições de contorno nas bordas e aplicar o método iterativamente até que se queira, a fim de determinar  $\varphi$ . Isto é, chegamos assim num método de relaxamento, onde

$$\varphi_{i,j}^n = \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{4}. \quad (4)$$

Aplicando o método obtemos a solução representada no mapa de cores da Figura 4.



**Figura 4:** Mapa de cores para o potencial calculado a partir do Método de Jacobi.

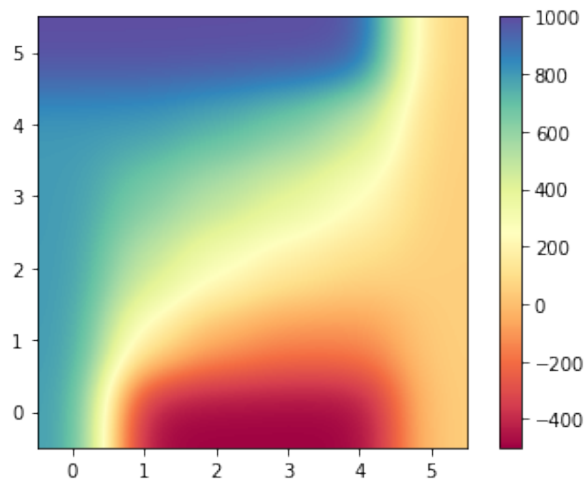
### Método de Gauss-Seidel

O Método de Gauss-Seidel possui a mesma dinâmica do Método de Jacobi, porém ao invés de utilizar todos os valores da iteração anterior, os valores disponíveis para  $\varphi_{i-1,j}$  e  $\varphi_{i,j-1}$

são os da própria iteração. Isto é, considerando o nosso problema, as posições à esquerda (do leitor) e acima da do elemento que estamos calculando já passaram pela aproximação na atual iteração  $n$ , e então podemos utilizar estes valores. Fazendo então a troca  $\varphi_{i-1,j}^{n-1} \rightarrow \varphi_{i-1,j}^n$  e  $\varphi_{i,j-1}^{n-1} \rightarrow \varphi_{i,j-1}^n$  ficamos com:

$$\varphi_{i,j}^n = \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j-1}^n}{4} \quad (5)$$

Isto torna o processo de relaxamento mais eficiente. Ao aplicar o Método de Gauss-Seidel obtém-se o potencial representado no mapa de cores da Figura 5.



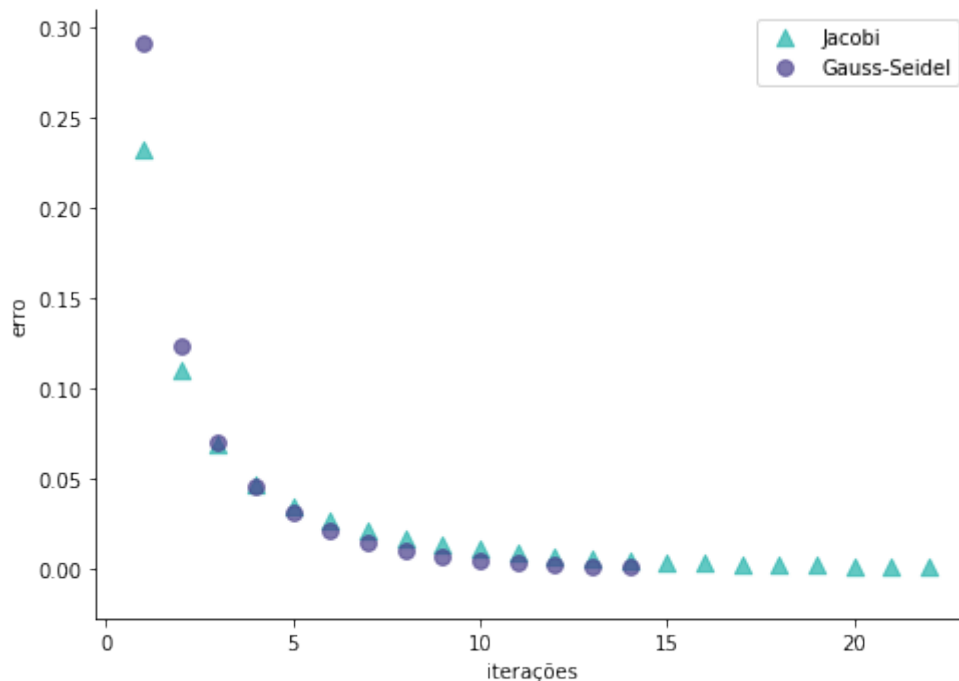
**Figura 5:** Mapa de cores para o potencial calculado a partir do Método de Gauss-Seidel.

## Erros e convergência

A cada iteração  $n$  o valor do potencial converge para a solução. O erro entre uma iteração e outra é calculado a partir de

$$\epsilon = \frac{||\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}||}{||\mathbf{x}^n||} \leq \tau, \quad (6)$$

onde  $\tau$  é a tolerância para o erro do método, que é utilizada como critério de parada, e  $\mathbf{x}$  é a solução. O método deve continuar iterando até que a condição em (5) seja satisfeita. Para esta solução consideramos  $\tau = 10^{-3}$ . Este mesmo cálculo foi utilizado em ambos os métodos iterativos, e a Figura 6 mostra os valores dos erros para cada iteração, em cada método [4].



**Figura 6:** Convergência dos erros de ambos os métodos a cada iteração.

Pode-se observar que o Método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente para a solução, precisando de apenas 14 iterações para convergir, enquanto que o Método de Jacobi necessita de 22.

### III. CONCLUSÃO

A partir das condições de contorno e um chute inicial do potencial  $\varphi$  foi possível obter o resultado para os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, sendo este último mais eficiente, uma vez que chegou à solução mais rapidamente.

### REFERÊNCIAS

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Pearson Education, 3rd ed., 1999.
- [2] “Laplace’s equation, no repositório do github.” <https://github.com/marianajo/laplaces-equation>. Accessed: 2017-11-06.
- [3] N. J. Giordano, *Computational Physics*. Prentice-Hall, 1997.
- [4] J. D. Faires e R. L. Burden, *Análise Numérica*. Thomson Learning, 2003.