

Solução Numérica da Equação de Laplace

MARIANA JÓ (7241072)

ABSTRACT

I. INTRODUÇÃO

A Equação de Laplace é dada por

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

As soluções para a Equação de Laplace são funções harmônicas. As funções harmônicas possuem a propriedade do valor médio. Isto é, o valor de $\varphi(x, y, z)$ é a média do valor ao redor deste ponto. Ou seja, ao desenhar uma bola de raio R entorno do ponto (x, y, z) , a média do valor de φ na bola é igual ao valor no centro [Griffiths, 1999]:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{esfera}} \varphi dS.$$

Esta propriedade das funções harmônicas nos permite resolver a Equação de Laplace através de métodos de relaxamento. A partir das condições de contorno e "chutes razoáveis" para φ nas regiões internas, o valor do potencial para cada ponto é calculado a partir dos valores de seus vizinhos. Este procedimento é repetido iterativamente, fazendo com que a solução convirja.

Este trabalho propõe algumas soluções para a Equação de Laplace utilizando métodos de relaxamento.

II. PROBLEMA

Queremos resolver o potencial dentro de uma caixa em (x, y, z) , de lados (a, b, ∞) . Ou seja, o problema possui simetria em z e, portanto, basta-nos resolver um problema em duas dimensões, (x, y) .

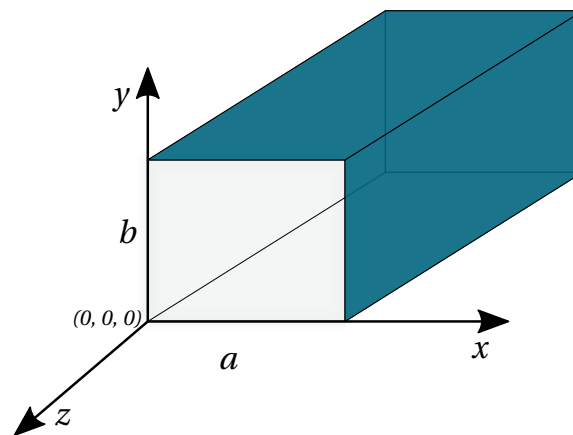


Figura 1: Geometria do problema.

Este problema tem as condições de contorno:

1. $\varphi(x, 0) = -500V$
2. $\varphi(x, b) = 1000V$
3. $\varphi(0, y) = 0V$
4. $\varphi(a, y) = 50V$

III. DISCRETIZAÇÃO E MÉTODO DE RELAXAMENTO

Primeiramente, é necessário discretizar o problema e para isso utilizamos uma malha¹ de pontos que cubra nosso domínio de interesse. Assume-se que os pontos da malha tenham o mesmo espaçamento h entre si, em todas as direções.

Cada ponto da malha é descrito pelo par (i, j) , assumindo o ponto de origem $(x, y) = (0, 0)$, onde as coordenadas (x, y) da malha (i, j) são dadas por $x_i = ih$ e $y_j = jh$. Portanto, o objetivo é calcular os valores de φ na malha, $\varphi(x_i, y_j) \equiv \varphi_{i,j}$.

O próximo passo é transformar o operador Laplaciano ∇^2 para a versão discreta, ou seja, descrever as derivadas segundas em termos de diferenças finitas.

Consideremos primeiramente apenas a variável x :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

Fazendo a expansão de Taylor em φ ao redor de x temos:

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \dots, \quad (2)$$

com todas as derivadas avaliadas no ponto x . A (2) implica

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) = 2\varphi(x) + h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mathcal{O}(h^4).$$

Desconsiderando os termos de maior ordem para um h suficientemente pequeno, podemos reescrever como

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \approx \frac{\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x)}{h^2}. \quad (3)$$

O desenvolvimento para y é completamente análogo. Assim, combinando as duas soluções, chegamos a uma aproximação para o Laplaciano:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\varphi(x + h, y) + \varphi(x - h, y) - 2\varphi(x, y)}{h^2} + \frac{\varphi(x, y + h) + \varphi(x, y - h) - 2\varphi(x, y)}{h^2} \quad (4)$$

¹Traduzido livremente de *mesh grid*.

Portanto, utilizando a notação sobre a malha, onde $\varphi(x \pm h, y) = \varphi_{i \pm 1, j}$ e $\varphi(x, y \pm h) = \varphi_{i, j \pm 1}$, a Equação de Laplace fica

$$\varphi_{i+1, j} + \varphi_{i-1, j} + \varphi_{i, j+1} + \varphi_{i, j-1} - 4\varphi_{i, j} = 0,$$

podendo ser reescrita como

$$\varphi_{i, j} = \frac{\varphi_{i+1, j} + \varphi_{i-1, j} + \varphi_{i, j+1} + \varphi_{i, j-1}}{4}. \quad (5)$$

Esta equação é a manifestação da propriedade do valor médio das funções harmônicas. Isto é, o valor em um ponto é a média dos seus valores vizinhos.

De posse desta aproximação, podemos partir de um valor inicial para o potencial, as condições de contorno nas bordas e aplicar (5) iterativamente até que se queira, a fim de determinar φ . Isto é, chamamos assim num método de relaxamento, onde

$$\varphi_{i, j}^n = \frac{\varphi_{i+1, j}^n + \varphi_{i-1, j}^n + \varphi_{i, j+1}^n + \varphi_{i, j-1}^n}{4}. \quad (6)$$

Agora, para resolver o problema a partir de (6) lançaremos mão de dois métodos iterativos: o Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel.

Método de Jacobi

DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Ao aplicar o este método obtemos a solução

FIGURA DA SOLUÇÃO

O cálculo do erro ϵ é tal que

$$\epsilon = \frac{||\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}||}{||\mathbf{x}^n||} \leq \tau, \quad (7)$$

onde τ é a tolerância para o erro do método, que é utilizada como critério de parada. O método deve continuar iterando até que a condição em (7) seja satisfeita. Para esta solução consideramos $\tau = 10^{-3}$. CITAR REFERENCIA

Método de Gauss-Seidel

O Método de Gauss-Seidel possui a mesma dinâmica do Método de Jacobi, porém ao invés de utilizar todos os valores da iteração anterior, os valores disponíveis para $\varphi_{i \pm 1, j}$ e $\varphi_{i, j \pm 1}$ são os da própria iteração. Isto torna o processo de relaxamento mais eficiente.

FIGURA DA SOLUÇÃO

Para este método o erro e critério de parada são calculados tal como no Método de Jacobi por (7), com a mesma tolerância τ .

Análise de erros

IV. SOLUÇÃO ANALÍTICA

V. CONCLUSÃO

REFERÊNCIAS

[Griffiths, 1999] Introduction to electrodynamics, 3rd ed. Pearson Education.