UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ....

Lista de Exercícios. Operadores Auto-adjuntos e o Teorema Espectral.

Obs. Na resolução de cada exercício indique todos os passos para que o raciocínio desenvolvido fique extremamente claro. Os cálculo em si podem ser feitos, e devem ser feitos, usando algum *software*. Escreva apenas os resultados dos cálculos indicando qual o *software* utilizado.

(01.) Considere o operador linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado na base canônica por

(a) $\mathbf{T}(x, y, z) = (4x + y - z, 2x + 5y - 2z, x + y + 2z)$.
(b) $\mathbf{T}(x, y, z) = (x + 4y - z, 5x + 2y - 2z, x + y + 2z)$.
(c) $\mathbf{T}(x, y, z) = (-3x + y - z, -7x + 5y - z, -6x + 6y + 2z)$.
(d) $\mathbf{T}(x, y, z) = (x + 3y - z, 7x + 5y + z, 6x + 6y - 2z)$.

Faça o que se pede:

(i) Determine a matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{T}$ e a sua transposta $\mathbf{A}^t$.

(ii) Escreva a expressão do operador $\mathbf{T}^*$ (adjunto de $\mathbf{T}$) em função das variáveis $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ e verifique se
$$\langle \mathbf{T}(x, y, z), (u, v, w)\rangle = \langle (x, y, z), \mathbf{T}^*(u, v, w)\rangle.$$

(iii) Determine o polinômio característico de $\mathbf{T}$ e os autovalores (valores característicos) de $\mathbf{T}$.

(iv) Determine os autovetores (vetores característicos) de $\mathbf{T}$.

(v) Verifique que os autovalores de $\mathbf{T}^*$ são os mesmos de $\mathbf{T}$.

(vi) Verifique que os vetores transpostos dos autovetores de $\mathbf{T}$ são autovetores à esquerda de $\mathbf{T}^*$, isto é,
se $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, então $\mathbf{v}^t\mathbf{A}^t = \lambda\mathbf{v}^t$.

(vii) **Caso** a matriz $\mathbf{A}$ possua somente autovalores reais e três autovetores LI, determine a matriz diagonal Λ, a matriz $\mathbf{S}$ de diagonalização da matriz $\mathbf{A}$, a matriz inversa de $\mathbf{S}$ e verifique que $\mathbf{A}\,\mathbf{S} = \mathbf{S}\,\Lambda$.

(02.) Considere o operador linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado na base canônica por

(a) $\mathbf{T}(x, y, z) = (11x - 8y + 4z, -8x - y - 2z, 4x - 2y - 4z)$.
(b) $\mathbf{T}(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$.
(c) $\mathbf{T}(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z)$.
(d) $\mathbf{T}(x, y, z) = (x + 4y + 2z, 4x - 5y - 4z, 2x - 4y + z)$.

Faça o que se pede:

(i) Determine a matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{T}$ e a sua transposta $\mathbf{A}^t$, na base canônica.

(ii) Verifique que $\mathbf{T}$ é um operador auto-adjunto, isto é, que
$$\langle \mathbf{T}(x, y, z), (u, v, w) \rangle = \langle (x, y, z), \mathbf{T}(u, v, w) \rangle.$$

(iii) Determine o polinômio característico de $\mathbf{T}$ e os autovalores (valores característicos) de $\mathbf{T}$ e verifique que todos os autovalores são número reais (podendo haver repetições).

(iv) Determine três autovetores (vetores característicos) LI de $\mathbf{T}$ e verifique que autovetores associados à autovalores distintos são ortogonais entre si.

(v) Determine uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores (ortonormais) de $\mathbf{T}$.

(vi) Determine a matriz diagonal Λ, a matriz $\mathbf{Q}$ de diagonalização da matriz $\mathbf{A}$, e verifique que $\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\,\Lambda$, conforme especificado no **Teorema Espectral**.

(vii) Determine a expressão do operador $\mathbf{T}$ na base ortonormal em função das variáveis $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$

Referências.

[1] J. L. Boldrini, S. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler; Álgebra Linear, 3a edição, editora HARBRA, 1986.

[2] E. L. Lima; Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, 6a edição, 2003.

[3] S. Lipschutz, M. Lipson; Álgebra Linear, tradução da 4a edição norte americana "Schaum's outline of theory and problems of linear algebra", Bookman, 2011.

[4] G. Strang; Álgebra Linear e suas aplicações, tradução da 4a edição norte-americana "Linear algebra and its application" , Cengage Learning, 2014.