UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE INFORMÁTICA
Disciplina: Pesquisa Operacional
Professor: Teobaldo Bulhões

Resolução da lista de exercícios sobre o método Simplex

a)

Modelo original:

$$Max\,Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

s.a:

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$$
$$x_1,\, x_2,\, x_3\ \geq 0$$

Modelo na forma padrão:

$$Max\,Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

s.a:

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 6$$
$$x_1,\, x_2,\, x_3\, x_4,\, x_5 \geq 0$$

Como temos uma função objetivo de **maximização**, a condição de parada do algoritmo é a de que todos os custos reduzidos sejam não positivos.

1ª base: Por conveniência, escolheremos a base formada pelas variáveis x_4 e x_5:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1º dicionário:

$$\begin{array}{rcccc}
x_4 = & 30 & -3x_1 & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 6 & -2x_1 & -2x_2 & -3x_3 \\
\hline
Z = & & 4x_1 & +3x_2 & +6x_3
\end{array}$$

Como ainda há custos reduzidos positivos, continuamos o procedimento. Podemos selecionar qualquer uma das variáveis não básicas com custo reduzido positivo para entrar na base. Neste caso, faremos uma escolha *gulosa*, selecionando x_3. E, pelo teste da razão mínima, escolhemos x_5 para sair da base. O novo dicionário obtido é o seguinte:

$$\begin{array}{rcccc}
x_4 = & 24 & -x_1 & +x_2 & +x_5 \\
x_3 = & 2 & -\frac{2}{3}x_1 & -\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_5 \\
\hline
Z = & 12 & & -x_2 & -2x_5
\end{array}$$

Assim, como todos os custos reduzidos são não positivos, conseguimos alcançar a solução ótima, que é a seguinte:

$$z = 12,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 24,\ x_5 = 0$$

b)

Modelo original:

$$Min\,Z = -x_1 + x_2 - 2x_3$$

s.a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 20$$
$$-x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 5$$
$$x_3 \leq 6$$
$$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$$

Modelo na forma padrão:

$$Min\,Z = -x_1 + x_2 - 2x_3$$

s.a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 20$$
$$-x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 5$$
$$x_3 + x_6 = 6$$
$$x_1,\, x_2,\, x_3\, x_4,\, x_5, x_6 \geq 0$$

Como temos uma função objetivo de **minimização**, a condição de parada do algoritmo é a de que todos os custos reduzidos sejam não negativos.

1ª base: Desta vez, escolheremos a base formada pelas variáveis x_4, x_5 e x_6:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, o dicionário inicial é o seguinte:

$$\begin{array}{rcccc} x_4 = & 20 & -x_1 & -2x_2 & +x_3 \\ x_5 = & 5 & +x_1 & -4x_2 & -5x_3 \\ x_6 = & 6 & & & -x_3 \\ \hline Z = & & -x_1 & +x_2 & -2x_3 \end{array}$$

2ª base: Selecionando x_3 para entrar na base, pelo teste da razão mínima, x_5 sairá da base. Obtemos, assim, o seguinte dicionário:

$$\begin{array}{rcccc} x_4 = & 21 & -\frac{4}{5}x_1 & -\frac{14}{5}x_2 & -\frac{1}{5}x_5 \\ x_3 = & 1 & +\frac{1}{5}x_1 & -\frac{4}{5}x_2 & -\frac{1}{5}x_5 \\ x_6 = & 5 & -\frac{1}{5}x_1 & +\frac{4}{5}x_2 & +\frac{1}{5}x_5 \\ \hline Z = & -2 & -\frac{7}{5}x_1 & +\frac{13}{5}x_2 & +\frac{2}{5}x_5 \end{array}$$

3ª base: Mandando x_1 para a base e, pelo teste da razão mínima, selecionando x_6 para sair da base, o novo dicionário obtido é o seguinte:

$$\begin{array}{rcrrr} x_4 = & 1 & -6x_2 & -x_5 & +4x_6 \\ x_3 = & 6 & & & -x_6 \\ x_1 = & 25 & +4x_2 & +x_5 & -5x_6 \\ \hline Z = & -37 & -3x_2 & -x_5 & +7x_6 \end{array}$$

4ª base: Mandando x_2 para a base e, pelo teste da razão mínima, selecionando x_4 para sair da base, o novo dicionário obtido é o seguinte:

$$\begin{array}{rcrrr} x_2 = & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}x_4 & -\frac{1}{6}x_5 & +\frac{2}{3}x_6 \\ x_3 = & 6 & & & -x_6 \\ x_1 = & \frac{77}{3} & -\frac{2}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & -\frac{7}{3}x_6 \\ \hline Z = & -\frac{75}{2} & +\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & +5x_6 \end{array}$$

5ª base: Mandando x_5 para a base e, pelo teste da razão mínima, selecionando x_2 para sair da base, o novo dicionário obtido é o seguinte:

$$\begin{array}{rcrrr} x_5 = & 1 & -6x_2 & -x_4 & +4x_6 \\ x_3 = & 6 & & & -x_6 \\ x_1 = & 26 & -\frac{6}{5}x_2 & -\frac{5}{6}x_4 & -\frac{23}{15}x_6 \\ \hline Z = & -38 & +3x_2 & +x_4 & +3x_6 \end{array}$$

Assim, como todos os custos reduzidos são não negativos, conseguimos alcançar a solução ótima, que é a seguinte:

$$Z = -38,\ x_1 = 26,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0$$

c)

Modelo original:

$$Max\,Z\ = x_1 + x_2$$

s.a:

$$x_1 + 3x_2 \geq 3$$
$$x_1 \leq 4$$
$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

Modelo na forma padrão:

$$Max\,Z\ = x_1 + x_2$$

s.a:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1 + x_4 = 4$$
$$x_1,\, x_2,\, x_3\, x_4 \geq 0$$

Como temos uma função objetivo de **maximização**, a condição de parada do algoritmo é a de que todos os custos reduzidos sejam não positivos.

1ª base: Montaremos uma base a partir das variáveis x_3 e x_4:

$$
\begin{array}{rrrr}
x_3 = & -3 & +x_1 & +3x_2 \\
x_4 = & 4 & -x_1 & \\
\hline
Z = & & x_1 & +x_2
\end{array}
$$

2ª base: Mandando x_1 para a base e, pelo teste da razão mínima, selecionando x_3 para sair da base, p dicionário obtido é o seguinte:

$$
\begin{array}{rrrr}
x_1 = & 3 & -3x_2 & +x_3 \\
x_4 = & 1 & +3x_2 & -x_3 \\
\hline
Z = & 3 & -2x_2 & +x_3
\end{array}
$$

3ª base: Mandando x_3 para a base e, pelo teste da razão mínima, selecionando x_4 para sair da base, o dicionário obtido é o seguinte:

$$
\begin{array}{rrrr}
x_1 = & 4 & & -x_4 \\
x_3 = & 1 & +3x_2 & -x_4 \\
\hline
Z = & 4 & +x_2 & -x_4
\end{array}
$$

Podemos observar que o único custo reduzido positivo é o que está associado à variável x_2. Portanto, devemos selecioná-la para entrar na base. Contudo, observando o dicionário, vemos que a variável x_2 não é limitada e por isso o seu valor pode crescer infinitamente. Por este motivo, podemos dizer que este é um **problema ilimitado**.

Podemos verificar este fato através da observação do gráfico da região viável, mostrado na Figura 1.

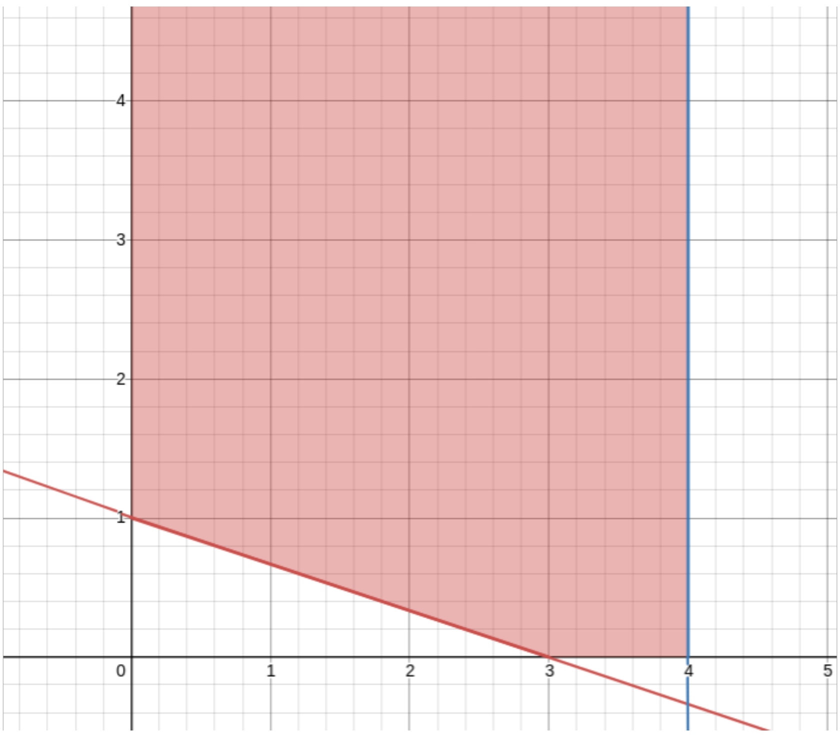

Figura 1: Região viável.

Assim, vemos que a região viável estende-se infinitamente em pelo menos uma direção de aumento da função objetivo — por exemplo, na direção de seu vetor gradiente $(1, 1)$.