UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ....

Lista de Exercícios - Dependência Linear e Espaços Gerados. Base e Dimensão.

01. Dados o espaço vetorial $\mathbb{V}$ e o conjunto X de $\mathbb{V}$

  (a) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $X = \{1 - x, 1 + x\}$,
  (b) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $X = \{1, x^3\}$,
  (c) $\mathbb{V} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $X = \{e^{-x}, e^{-x^2}\}$,
  (d) $\mathbb{V} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $X = \{e^{x}, e^{-x}\}$,
  (e) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$, $X = \{(-1)^n, \left(\frac{1}{2^n}\right)\}$,
  (f) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$, $X = \{\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n^2}\right)\}$,

  Faça:

  ii) determine se o conjunto X é **LI** ou **LD**,
  (ii) determine o subespaço gerado pelo conjunto X.

02. Dado o espaço vetorial $\mathbb{V}$ e o conjunto $\mathbf{B}$ de $\mathbb{V}$, verifique se $\mathbf{B}$ é uma base de $\mathbb{V}$ e, caso positivo, expresse o vetor $\mathbf{v}$ (dado na base canônica) na base $\mathbf{B}$.

  Sugestão. Use algum *software* para resolver os sistemas lineares envolvidos.

  Dica. Para obter a solução do sistema linear $x + 3y = 5$, $2x + y = -2$ usando o "WolframAlpha" disponível em https://www.wolframalpha.com basta digitar x + 3 y = 5, 2x + y = -2 que ele devolve a solução $x = -11/5$, $y = 12/5$.

  (a) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3$, $\mathbf{B} = \{1-x, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$, $\mathbf{v} = 1+x+x^2+x^3$.
  (b) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3$, $\mathbf{B} = \{1, 1 + x, 1 + 2x^2, 1 + 3x^3\}$, $\mathbf{v} = x - 2x^2 + 5x^3$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbf{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, com $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbf{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, com $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{B} = \{(1, 2, 1, 0), (2, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 2), (1, 2, 0, 1)\}$,
$\mathbf{v} = (0, 1, 0, 0)$

(f) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$,
$\mathbf{v} = (0, 0, 1, 0)$.

03. Dado o espaço vetorial $\mathbb{V}$ e o subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$, determine uma base de $\mathbb{W}$.

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{V} : p(0) = 0\}$.

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{V} : p(x) = p(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ (pol. pares).

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{V} : p(x) = -p(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$
(pol. ímpares).

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbb{W} = \{M \in \mathbb{V} : \text{ traço}(M) = 0\}$.

(e) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbb{W} = \{M \in \mathbb{V} : M^t = M\}$ (matrizes simétricas).

(f) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbb{W} = \{M \in \mathbb{V} : M^t = -M\}$ (matrizes anti-simétricas).

Lembrete. O traço de uma matriz quadrada $\mathbf{M}$ é a soma dos elementos da diagonal de $\mathbf{M}$.

Referências.

[1] J. L. Boldrini, S. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler; Álgebra Linear, 3a edição, editora HARBRA, 1986.

[2] E. L. Lima; Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, 6a edição, 2003.

[3] S. Lipschutz, M. Lipson; Álgebra Linear, tradução da 4a edição norte americana “Schaum's outline of theory and problems of linear algebra”, Bookman, 2011.

[4] G. Strang; Álgebra Linear e suas aplicações, tradução da 4a edição norte-americana “Linear algebra and its application” , Cengage Learning, 2014.