UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ....

Lista de Exercícios. Formas Bilineares e Formas Quadráticas.

Obs. Na resolução de cada exercício indique todos os passos para que o raciocínio desenvolvido fique extremamente claro. Os cálculo em si podem, e devem, ser feitos usando algum *software* e colocando apenas os resultados. Por exemplo, no cálculo dos autovalores e autovetores escreva a matriz e em seguida os seus autovalores e respectivos autovetores associados.

01. Considere a forma quadrática $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuja expressão na base canônica do $\mathbb{R}^3$ para um vetor genérico $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ é:

    (**a**) $\mathbf{q}(\mathbf{v}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 8x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$.

    (**b**) $\mathbf{q}(\mathbf{v}) = x_1^2 - 2x_2x_3 + x_1x_3$.

    (**c**) $\mathbf{q}(\mathbf{v}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 7x_2^2 - 10x_2x_3 + 8x_3^2$.

    (**d**) $\mathbf{q}(\mathbf{v}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2^2 - 18x_2x_3 + 4x_3^2$.

    Faça o que se pede nos itens (i)-(viii):

    (i) use a identidade de polarização e determine a forma bilinear simétrica associada;

    (ii) determine a matriz $\mathbf{A}$ da forma quadrática $\mathbf{q}$ (ou da forma bilinear simétrica associada);

    (iii) determine os autovalores da matriz $\mathbf{A}$;

    (iv) baseando no item (iii) diga quais são o índice e o posto de $\mathbf{q}$ (ou de $\mathbf{A}$) e diga também se $\mathbf{q}$ ou $\mathbf{A}$ é positiva definida, negativa definida, não negativa, não positiva ou indefinida (nenhuma delas);

    (v) determine uma base ortonormal $\mathbf{B_2} = \{v_1, v_2, v_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $\mathbf{A}$;

    (vi) considerando um vetor genérico $\mathbf{v}$ do $\mathbb{R}^3$ representado na base ortonormal $\mathbf{B_2}$ por $\mathbf{v} = x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3$ escreva a expressão de $\mathbf{q}(\mathbf{v})$ nesta base $\mathbf{B_2}$ como $\mathbf{q}(\mathbf{v}) = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2$;

(vii) tome $\mathbf{v}$, representado na base canônica $\mathbf{B_1}$ do $\mathbb{R}^3$, como $\mathbf{v} = (1,1,1)$ e escreva v na base $\mathbf{B_2}$; em seguida calcule $\mathbf{q}(\mathbf{v})$ usando a base canônica e também usando na base $\mathbf{B_2}$ de autovetores e verifique se o valor de $\mathbf{q}(\mathbf{v})$ é o mesmo ao usar as duas representações de $\mathbf{v}$;

(viii) determine como fica a expressão dada pela **lei da inércia de Sylvester** da forma quadrática $\mathbf{q}$ (soma de quadrados com coeficientes -1 ou +1).

Referências.

[1] J. L. Boldrini, S. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler; Álgebra Linear, 3a edição, editora HARBRA, 1986.
[2] E. L. Lima; Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, 6a edição, 2003.
[3] S. Lipschutz, M. Lipson; Álgebra Linear, tradução da 4a edição norte americana "Schaum's outline of theory and problems of linear algebra", Bookman, 2011.
[4] G. Strang; Álgebra Linear e suas aplicações, tradução da 4a edição norte-americana "Linear algebra and its application" , Cengage Learning, 2014.