Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Depto. Computação Científica

Prof. Felipe A. G. Moreno
Álgebra Linear Computacional

Lista de Exercícios 2

Dado o conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 1. Seja A uma matriz de ordem n. Se

$$A(1,:), \quad A(2,:), \ldots, A(n,:)$$

são os vetores linha de A, e

$$A(:,1), \quad A(:,2), \ldots, A(:,n)$$

são os vetores coluna de A. Note que, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$

$$A(i,:) \quad \text{e} \quad A^T(:,i)$$

são vetores em $\mathbb{R}^n$. Então, determine se alguma destas expressões define uma norma matricial em $\mathbb{R}(n,n)$:

(a) $\max\{\|A(1,:)\|_1, \|A(2,:)\|_1, \ldots, \|A(n,:)\|_1\}$;

(b) $\sum\limits_{i=1}^{n} \|A(i,:)\|_\infty^3$;

(c) $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \|A(:,i)\|_2^2\right\}^{\frac{1}{2}}$;

(d) $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-i}\|A(:,i)\|_\infty$;

Exercício 2. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} v_3 & v_1 & v_2 & v_6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v_3 & v_5 & v_2 & v_6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} v_3 & v_1 + v_5 & v_2 & v_6 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} v_5 & v_4 & v_1 & v_3 \end{bmatrix}$$

Calcule as normas matriciais $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_\infty$ das matrizes $A^2 - C$, $B + C$, CB e $D - 2A$;

Exercício 3. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Sob cada uma das suposições abaixo, determine se $A = B$ deve sempre valer, ou se $A = B$ vale apenas algumas vezes.

(a) Se $Ax = Bx$ é verdadeiro para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Se $Ax = Bx$ é verdadeiro para algum $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 4. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita **assimétrica** se $A^T = -A$.

(a) Encontre todas as matrizes assimétricas de ordem 2.

(b) Explique o porque as entradas da diagonal de uma matriz assimétrica devem ser zero.

(c) Mostrar que se A é assimétrica e $x \in \mathbb{R}^n$ temos $(Ax) \perp x$. Dica: $x^T(Ax) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

Exercício 5. Suponha que p é um polinomio de grau $n-1$ ou menor:

$$p(t) = c_1 + c_2t + \cdots + c_nt^{n-1}$$

A derivada $p'(t)$ é um polinomio de grau $n-2$ ou menor:

$$p'(t) = d_1 + d_2t + \cdots + d_{n-1}t^{n-2}$$

Encontrar uma matriz D para a qual $d = Dc$.

Exercício 6. Dada $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$, definida por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique se as colunas da matriz A são L.I.

Exercício 7. Seja a matriz por blocos $S = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Discuta

(a) Quando S tem colunas L.I?

(b) Quando S tem linhas L.I?

Sua resposta pode depender de m, n, ou se A tem ou não colunas ou linhas L.I.

Exercício 8. Suponhamos que precisemos calcular $z = (A+B)(x+y)$, onde $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Calcular a quantidade aproximada de `flops` se calculamos $z = (A+B)(x+y)$;

(b) Calcular a quantidade aproximada de `flops` se calculamos $z = Ax + Ay + Bx + By$;

(c) Qual método requer menos quantidade de `flops`?

Exercício 9. Elabore um algoritmo que calcule $(xy^T)^k$ onde $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $k \geq 0$ é um inteiro.

Exercício 10. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Elabore os seguintes algoritmos:

(a) Multiplique por 2 a todos os elementos da coluna 1.

(b) Multiplique por c a todos os elementos da coluna j, onde $j = 1, \ldots, n$.

(c) Multiplique simultaneamente as colunas $1, 2, \ldots, n$ por $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

(d) Multiplique simultaneamente as linhas $1, 2, \ldots, n$ por $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

(e) Troque as linhas i e j.

Exercício 11. Sejam as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Note que para calcular $C = AB$, podemos usar a seguinte **formula** para calcular cada coluna j:

$$C(:,j) = \sum_{k=1}^{n} B(k,j)A(:,k) \qquad j = 1,\ldots,n$$

(a) Considerando B sendo **triangular superior**. Então

   (1) Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de B (sem multiplicações por zero).

   (2) Assuma que A também é **triangular superior**. Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de A e B (sem multiplicações por zero).

(b) Considerando B sendo **triangular inferior**. Então

   (1) Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de B (sem multiplicações por zero).

   (2) Assuma que A também é **triangular inferior**. Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de A e B (sem multiplicações por zero).

Use o seguinte modelo para dar sua a resposta de cada item:

```
function C=Mult(A,B)
C=zeros(n,n);
for j=1:n
        v=B(  ,j);
        for k=
                C(  ,  )=C(  ,  )+v(  ) A(  ,  );
        end
end
```

Exercício 12. Dado $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$. Elabore um algoritmo que gere a matriz de Vandermonde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-2} & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-2} & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & \cdots & t_m^{n-2} & t_m^{n-1} \end{bmatrix}$$