

Lista de Exercícios

Sequências Numéricas - Conceitos Iniciais e Limite.

Aluna: Mariana da Silva Martins ; 20220071188

Questão 1: Escreva um programa e envie ao arquivo fonte ou um link do mesmo, o qual tenha como ponto de partida uma função $a(n)$ que define o termo geral de uma sequência numérica $a_n = a(n)$ (use n como a variável do programa), que sejam fornecidos dois números naturais **nmin** e **nmax** que definem um intervalo $[n_{\min}, n_{\max}]$ para os índices “plotados” e que tenha duas opções exclusivas de execução:

- (a) o usuário não sabe se a sequência é convergente para um limite L ;
- (b) o usuário sabe que a sequência é convergente para um limite L .

– Caso seja feita a escolha da opção (b), o usuário deve acrescentar também como entradas o valor do limite L , o valor de uma tolerância ϵ , um índice $N(\epsilon)$ tais que $|a(n) - L| \leq \epsilon$, para todos índices n com $n \geq N(\epsilon)$. O programa deve fornecer como saídas:

- (i) uma tabela mostrando os pares $(n, a(n))$, para $n = n_{\min}, \dots, n_{\max}$;
- (ii) uma figura em que o eixo horizontal represente o intervalo $[n_{\min}, n_{\max}]$ e mostrando os pares $(n, a(n))$, de maneira discreta, para $n = n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\max}$;
- (iii) caso o usuário escolha a opção (b), o programa deve acrescentar na figura do item (ii) os gráficos dos três segmentos das retas horizontais $y = L - \epsilon$, $y = L$ e $y = L + \epsilon$, para x no intervalo $[n_{\min}, n_{\max}]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def sequencia(func, nmin, nmax, L=None, epsilon=None, N=None):
    n_values = range(nmin, nmax+1)
    a_values = [func(n) for n in n_values]

    # Imprimir tabela
    print("n\t a(n)")
    for n, a_n in zip(n_values, a_values):
        print(f"{n}\t {a_n}")

    # Plotar gráfico
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    plt.plot(n_values, a_values, 'o', color='purple')
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('a(n)')
    plt.title('Sequência numérica')

    # Se o usuário sabe que a sequência converge para um limite L
```

```

    if L is not None and epsilon is not None and N is not None:
        plt.hlines([L - epsilon, L, L + epsilon], xmin=nmin,
xmax=nmax, colors=['r', 'g', 'b'])
    else:
        # Verificar se a sequência é convergente
        diff = np.diff(a_values)
        if np.allclose(diff, diff[0], atol=1e-5):
            L = a_values[-1]
            print(f"\nA sequência parece ser convergente.")
            plt.hlines(L, xmin=nmin, xmax=nmax, colors='g')
        else:
            print("\nA sequência parece ser divergente.")

plt.show()

```

Ilustre resultados do programa para as sequências dadas no exercício 02 escolhido para você (Letra A)

```

# Exemplo a da lista
def a1(n):
    return (n-1) / (n+1)

```

Questão 2:

(i) Use a opção (a) do seu programa e entre com valores nmin e nmax para fazer uma averiguação se a sequência $\{a_n\}$ tem limite L (sugestão: tome nmin ≥ 10 ou grande o suficiente para dar uma indicação de existência do limite)

Exemplo de uma sequência divergente - letra E da lista.

```

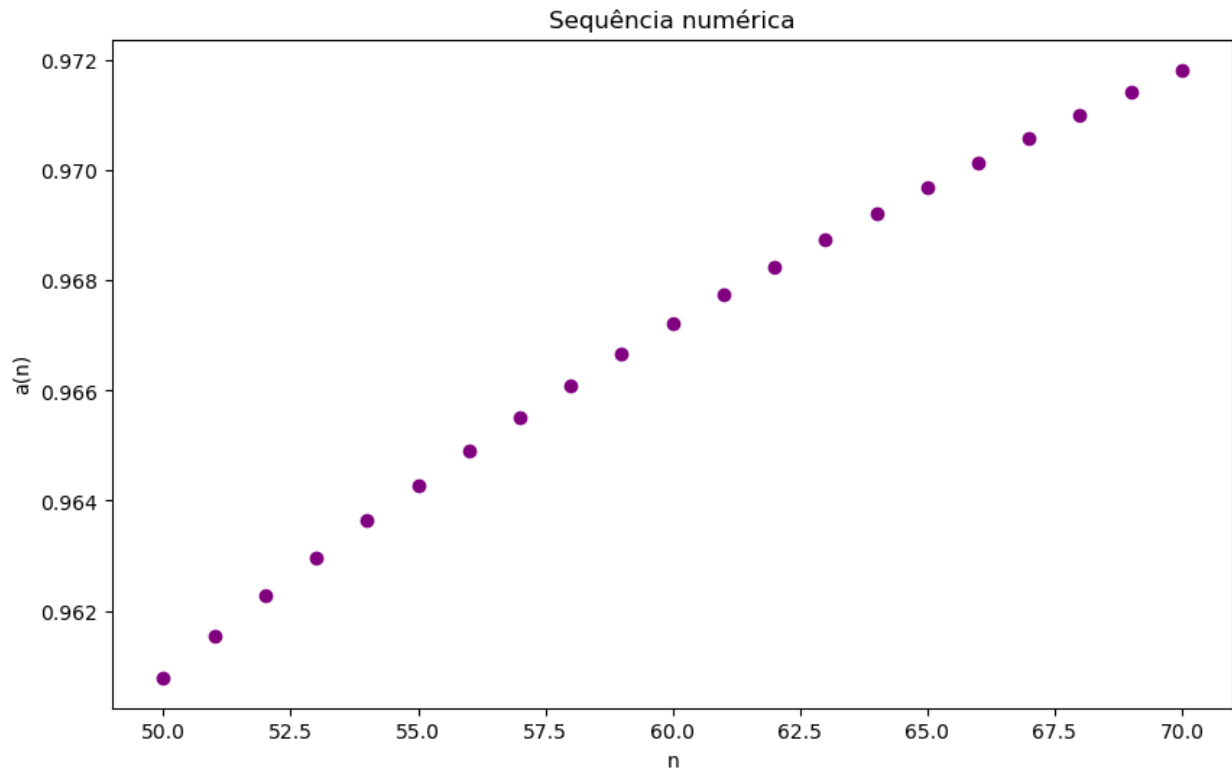
# Usuário não sabe se a sequência é convergente, ou seja, se tende a
um limite.
sequencia(a1, 50, 70)

```

n	a(n)
50	0.9607843137254902
51	0.9615384615384616
52	0.9622641509433962
53	0.9629629629629629
54	0.9636363636363636
55	0.9642857142857143
56	0.9649122807017544
57	0.9655172413793104
58	0.9661016949152542
59	0.9666666666666667
60	0.9672131147540983
61	0.967741935483871
62	0.9682539682539683
63	0.96875

64	0.9692307692307692
65	0.9696969696969697
66	0.9701492537313433
67	0.9705882352941176
68	0.9710144927536232
69	0.9714285714285714
70	0.971830985915493

A sequência parece ser divergente.



(ii) Tente calcular analiticamente o valor do limite L da sequência $\{a_n\}$ (fazendo contas e usando cálculo 1, ou mesmo um programa simbólico). Apresente as contas manuscritamente.

```
import sympy as sp

n = sp.symbols('n')
a1 = (n-1) / (n+1)
lim = sp.limit(a1, n, sp.oo)
print(f"O limite da sequência quando n tende ao infinito é {lim}.")
```

O limite da sequência quando n tende ao infinito é 1.

```
from IPython.display import Image

imagem_path = "questao2-lista1-mm1.jpg"
Image(filename=imagem_path)
```

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{N}{N} - \frac{1}{N}}{\frac{N}{N} + \frac{1}{N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 + \frac{1}{N}}$$

quando $N \rightarrow \infty$, temos $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0}$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1, \text{ logo}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N+1} = 1$$

(iii) Caso a sequência possua limite L , tome a tolerância $\epsilon = 10^{-3}$ e calcule o valor mínimo de $N(\epsilon)$ tal que $|a(n) - L| \leq \epsilon$, para $n \geq N(\epsilon)$. Apresente as contas manuscritamente

```
from IPython.display import Image

imagem_path = "questao2.1-lista1-mm1.jpg"
Image(filename=imagem_path)
```

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N+1} = 1$$

• encontre o valor mínimo de $N(\epsilon)$, tal que $|a(n)-L| \leq \epsilon$, para $n \geq N(\epsilon)$, onde $\epsilon = 10^{-3}$

$$|a(n)-L| = \left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| = \frac{2}{n+1} \leq 10^{-3}$$

$$n \geq \frac{2}{10^{-3}} - 1 = 2000 - 1 = 1999$$

(iv) Use a opção (b) do seu programa e tome n_{\min} e n_{\max} tais que $n_{\min} < N(\epsilon) < n_{\max}$ e exiba a tabela (n, a_n) , assim como a figura com os pares $(n, a(n))$, para $n = n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\max}$ (sugestão: tome $n_{\max} - n_{\min} = 10$)

```
def find_N(func, L, epsilon, nmin, nmax):
    for n in range(nmin, nmax+1):
        if abs(func(n) - L) <= epsilon:
            return n
    return None
```

```
N = find_N(a1, 1, epsilon, nmin, nmax)
print(N)
```

None

Considere a sequência a1 e N = None.

```
N = None
```

```
e = 1e-3
```

```
if N is not None:
```

```
    sequencia(a1, N - 5, N + 5, 1, e, N)
```

```
else:
```

```
    print("Não foi possível encontrar um valor de N que satisfaça a condição.")
```

Não foi possível encontrar um valor de N que satisfaça a condição.