UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ....

Lista de Exercícios. Séries de Taylor e de Maclaurin-Parte1.

Obs. Lembre de usar radianos para funções trigonométricas e o logaritmo natural para $ln(x)$.

01. Escreva um programa tal que dados dois números naturais $Kmin$ e $Kmax$, com $Kmax - Kmin \geq 3$ e que exiba numa mesma figura o gráfico de uma função $f(x)$ genérica num intervalo contendo um número real $\mathbf{a}$ e os gráficos das $(\mathbf{k}+\mathbf{1})$ somas parciais (polinômios de Taylor) $P_0(x,\mathbf{a})$, $P_1(x,\mathbf{a})$, $P_2(x,\mathbf{a})$, $\cdots$, $P_{\mathbf{k}}(x,\mathbf{a})$ da série de Taylor de $f(x)$, considerando x num intervalo $[xmin, xmax]$ conveniente contendo o centro $\mathbf{a}$ da série.

    Forneça como dados de entrada:

    (a) a expressão da função $f(x)$;

    (b) o centro $\mathbf{a}$ da série de potências;

    (c) os números naturais **Kmin** e **Kmax**, com $\mathbf{Kmax} - \mathbf{Kmin} \geq 3$, que definem as somas parciais a serem plotadas.

    (d) os números reais $xmin$ e $xmax$, com $xmin < \mathbf{a} < xmax$, que define o intervalo onde os gráficos das somas parciais será plotado. **Caso** o raio $\mathbf{R}$ de convergência da série seja finito (não tão grande) procure considerar $xmin < \mathbf{a} - \mathbf{R}$ e $xmax > \mathbf{a} + \mathbf{R}$, e considere também um número real $\delta > 0$, porém suficientemente pequeno, para que o gráfico da função f seja exibido apenas para x no intervalo fechado $[\mathbf{a} - \mathbf{R} + \delta, \mathbf{a} + \mathbf{R} - \delta] \subset (\mathbf{a} - \mathbf{R}, \mathbf{a} + \mathbf{R})$ diferentemente dos gráficos das somas parciais que devem ser exibidos no intervalo $[xmin, xmax]$ contendo o intervalo de convergência da série $(\mathbf{a} - \mathbf{R}, \mathbf{a} + \mathbf{R})$.

    Ilustre figuras geradas pelo programa, identificando qual a função $f(x)$ e qual o centro $\mathbf{a}$ da série considerados.

02. Considere a função

(a) $f(x) = sen(x)$, (b) $f(x) = cos(x)$,

(c) $f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, (d) $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

(e) $f(x) = arctg(x)$, (f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

(g) $\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}$ (série binomial), (h) $\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}$ (série binomial).

(i) Determine os primeiros coeficientes (no máximo os 10 primeiros) da série de Maclaurin da função $f(x)$ até determinar uma fórmula geral para eles.

(ii) Escreva a expressão da série usando o símbolo de somatório.

(iii) Determine o raio $\mathbf{R}$ e o intervalo de convergência $(-\mathbf{R}, \mathbf{R})$ da série obtida em (ii).

(iv) Escreva as expressões dos **quatro** primeiros polinômios de Taylor, diferentes entre si, $\mathrm{P}_{\mathbf{k}}(x, \mathbf{0})$ associados à função $f(x)$.

(v) Use o seu programa e exiba numa mesma figura os gráficos dos polinômios determinados no item (iv) e da função $f(x)$, para x num intervalo conveniente.

03. Dados a função $f(x)$ e o número $\bar{x}$

(a) $f(x) = cos(x)$, $\bar{x} = 0.1$,

(b) $f(x) = senh(x)$, $\bar{x} = -0.1$,

(c) $f(x) = cosh(x)$, $\bar{x} = -0.1$,

(d) $f(x) = ln(1 + x)$, $\bar{x} = -0.1$,

(e) $f(x) = ln(1 + x)$, $\bar{x} = 0.1$,

(f) $f(x) = senh(x)$, $\bar{x} = 0.1$,

(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)}} = (1 + x)^{-1/2}$, $\bar{x} = 0.1$,

(h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} = (1 + x)^{-3/2}$, $\bar{x} = 0.1$.

(i) Determine a aproximação linear de $f(x)$ em torno de $\mathbf{a} = 0$ para um x qualquer.

(ii) Determine a aproximação linear do valor de $f(\bar{x})$ e estime o erro da aproximação obtida.

(iii) Determine a aproximação quadrática de $f(x)$ em torno de $\mathbf{a} = 0$ para um x qualquer e diga se ela é diferente da aproximação linear de (i).

(iv) Determine a aproximação quadrática do valor de $f(\bar{x})$ e estime o erro da aproximação obtida.

Sugestão. Para estimar o valor de $\mathbf{M} = max|\frac{d^{(n+1)}f(x)}{dx^{n+1}}|$ na estimativa do erro, use qualquer *software* e determine o gráfico de $|\frac{d^{\mathbf{n+1}}f(x)}{dx^{\mathbf{n+1}}}|$ no intervalo considerado. Em seguida obtenha visualmente uma cota superior para os valores asumidos por tal expressão. Ou então obtenha a expressão de tal derivada e programe uma função que aproxime tal valor máximo.

Referências.

[1] Marivaldo P. Matos (2020); Séries e Equações Diferenciais. http://www.mpmatos.com.br/Serie_EDO/Series_EDO_2020.pdf
[2] Earl Swokowski (1995); Cálculo com Geometria Analítica, vol 2.
[3] G. B. Thomas et al. (2012) Cálculo, vol 2.

Dicas do programa WolframAlpha disponivel em https://www.wolframalpha.com

- Para visualizar o gráfico de uma da função $f(x)$ num intervalo $[a, b]$ digite plot$[f(x), x = a..b]$).
- Para calcular a derivada segunda da função $f(x)$ digite $d2/dx2(f(x))$.
- Para visualizar o gráfico do valor absoluto da derivada segunda no intervalo $[a, b]$ digite plot$[abs(d2/dx2(f(x))), x = a..b]$).