UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ....

Lista de Exercícios - Diagonalização de Operadores.

01. Dados o espaço vetorial $\mathbb{V}$, a base canônica de $\mathbb{V}$ e o operador linear $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, faça:

   - determine a matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{T}$;
   - escreva a equação característica para o operador $\mathbf{T}$ e determine os seus autovalores;
   - determine a multiplicidade de cada autovalor λ de $\mathbf{T}$, lembrando que λ é raiz de multiplicidade $\mathbf{k}$ do polinômio $p(x)$ se λ anula $p(x)$ e as suas derivadas $\frac{dp(x)}{dx}, \cdots, \frac{d^{\mathbf{k-1}}p(x)}{dx^{\mathbf{k-1}}}$;
   - escreva as equações dos autovetores associados a cada autovalor de $\mathbf{T}$ e determine-os;
   - se possível, escreva a matriz de diagonalização $\mathbf{S}$ formada por autovetores de $\mathbf{T}$ (ou de $\mathbf{A}$);
   - se possível, escreva a matriz diagonal Λ cuja diagonal são os autovalores de $\mathbf{T}$ (ou de $\mathbf{A}$);
   - se possível, calcule e escreva a matriz inversa $\mathbf{S}^{-1}$; (**obs.:** seja consistente com a ordem dos autovalores e dos autovetores).
   - se possível, escreva a matriz $\mathbf{A}^5$ usando a identidade $\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}$.

   (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{T}(x, y, z, w) = (3x + 4y + 2z, y + 2z, z, x + w)$;

   (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{T}(x, y, z, w) = (x, y, z, 0)$;

   (c) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$;

   (d) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix}$;

   (e) $\mathbb{V} = \mathbf{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{T}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) =$
   $(a_0 + a_1) + (a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)x^2$;

(f) $\mathbb{V} = \mathbf{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{T}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) =$
$$(a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_2 + a_3)x^3;$$

(g) $\mathbb{V} = \mathbf{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{T}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) =$
$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3).$$

02. Exercício 6, pg. 263, do livro do Strang (referência [4]).

03. Exercício 10, pg. 263, do livro do Strang (referência [4]).

04. Exercício 11, pg. 264, do livro do Strang (referência [4]).

05. Exercício 13, pg. 264, do livro do Strang (referência [4]).

Sugestão. Use algum *software* para determinar raízes de polinômios e para resolver os sistemas lineares. Mas não esqueça de informar qual é o *software*, de escrever claramente qual é o polinômio característico e quais os sistemas lineares que são resolvidos. Se quiser, pode usar *software* para calcular derivadas também.

Referências.
[1] J. L. Boldrini, S. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler; Álgebra Linear, 3a edição, editora HARBRA, 1986.
[2] E. L. Lima; Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, 6a edição, 2003.
[3] S. Lipschutz, M. Lipson; Álgebra Linear, tradução da 4a edição norte americana "Schaum's outline of theory and problems of linear algebra", Bookman, 2011.
[4] G. Strang; Álgebra Linear e suas aplicações, tradução da 4a edição norte-americana "Linear algebra and its application" , Cengage Learning, 2014.