Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Depto. Computação Científica

Prof. Felipe A. G. Moreno
Álgebra Linear Computacional

Lista de Exercícios 1

Exercício 1. As combinações lineares de $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ geram um plano em $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre um vetor z que seja perpendicular a v e w.

(b) Encontre um vetor u que não pertence ao plano.

Exercício 2. Dada a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se define:

(a) O espaço coluna de A: $C(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \,:\, y = Ax, \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\}$.

(b) O espaço nulo de A: $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = 0\}$.

Calcular $C(A)$ e $N(A)$ para a matriz $A = \begin{bmatrix} v & w & v + 2w \end{bmatrix}$.

Exercício 3. Dado o conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique quais vetores de V, dois a dois, são ortogonais ou paralelos;

(b) Calcule o ângulo, dois a dois, formado pelos vetores de V.

(c) Gere todos os subconjuntos, possíveis de V, com 4 vetores, e verifique se algum destes é um conjunto linearmente independente;

(d) Calcule as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ de cada vetor de V;

(e) Calcule $d_1(\cdot,\cdot)$, $d_2(\cdot,\cdot)$ e $d_\infty(\cdot,\cdot)$ entre todos os vetores, dois a dois, de V, onde

$$d_1(v,w) := \|v - w\|_1, \quad d_2(v,w) := \|v - w\|_2 \quad \text{e} \quad d_\infty(v,w) := \|v - w\|_\infty;$$

Exercício 4. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x\| = \|y\| = a > 0$. Mostrar que

(a) $x - y$ é ortogonal a $x + y$;

(b) O produto interno de $x - 2y$ e $x + 2y$ é negativo.

Exercício 5. As combinações lineares de $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ geram um plano em $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre um vector z que seja perpendicular a v e w;

(b) Encontre um vector u que não pertença ao plano e verifique $u^T z \neq 0$.

Exercício 6. Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Determine se alguma destas expressões define uma norma em $\mathbb{R}^n$:

(a) $\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n-1}|\}$;

(b) $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^3$;

(c) $\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{2}}\right\}^2$;

(d) $\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}|x_i|$;

Exercício 7. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ ortonormais e

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_k a_k$$

onde $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$. Expresar $\|x\|$ em termos de $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$.

Exercício 8. Dados os seguintes vetores $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $\{a_1, a_2, a_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$;

(b) Construir, a partir destes vectores, uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$.

Exercício 9. Consideremos os seguintes n vetores em $\mathbb{R}^n$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad a_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O vector a_i tem as primeiras i componentes iguais a 1, e as restantes iguais a 0.

(a) Descreva que acontece quando aplicamos o algoritmo de Gram-Schmidt a os vectores a_i's.

(b) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma base?

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Depto. Computação Científica

Prof. Felipe A. G. Moreno
Álgebra Linear Computacional

Lista de Exercícios 2

Dado o conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 1. Seja A uma matriz de ordem n. Se

$$A(1,:), \quad A(2,:), \ldots, A(n,:)$$

são os vetores linha de A, e

$$A(:,1), \quad A(:,2), \ldots, A(:,n)$$

são os vetores coluna de A. Note que, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$

$$A(i,:) \quad \text{e} \quad A^T(:,i)$$

são vetores em $\mathbb{R}^n$. Então, determine se alguma destas expressões define uma norma matricial em $\mathbb{R}(n,n)$:

(a) $\max\{\|A(1,:)\|_1, \|A(2,:)\|_1, \ldots, \|A(n,:)\|_1\}$;

(b) $\sum_{i=1}^{n} \|A(i,:)\|_\infty^3$;

(c) $\left\{\sum_{i=1}^{n} \|A(:,i)\|_2^2\right\}^{\frac{1}{2}}$;

(d) $\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\|A(:,i)\|_\infty$;

Exercício 2. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} v_3 & v_1 & v_2 & v_6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v_3 & v_5 & v_2 & v_6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} v_3 & v_1 + v_5 & v_2 & v_6 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} v_5 & v_4 & v_1 & v_3 \end{bmatrix}$$

Calcule as normas matriciais $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_\infty$ das matrizes $A^2 - C$, $B + C$, CB e $D - 2A$;

Exercício 3. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sob cada uma das suposições abaixo, determine se $A = B$ deve sempre valer, ou se $A = B$ vale apenas algumas vezes.

(a) Se $Ax = Bx$ é verdadeiro para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Se $Ax = Bx$ é verdadeiro para algum $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 4. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita **assimétrica** se $A^T = -A$.

(a) Encontre todas as matrizes assimétricas de ordem 2.

(b) Explique o porque as entradas da diagonal de uma matriz assimétrica devem ser zero.

(c) Mostrar que se A é assimétrica e $x \in \mathbb{R}^n$ temos $(Ax) \perp x$. Dica: $x^T(Ax) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

Exercício 5. Suponha que p é um polinomio de grau $n-1$ ou menor:

$$p(t) = c_1 + c_2t + \cdots + c_nt^{n-1}$$

A derivada $p'(t)$ é um polinomio de grau $n-2$ ou menor:

$$p'(t) = d_1 + d_2t + \cdots + d_{n-1}t^{n-2}$$

Encontrar uma matriz D para a qual $d = Dc$.

Exercício 6. Dada $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$, definida por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique se as colunas da matriz A são L.I.

Exercício 7. Seja a matriz por blocos $S = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Discuta

(a) Quando S tem colunas L.I?

(b) Quando S tem linhas L.I?

Sua resposta pode depender de m, n, ou se A tem ou não colunas ou linhas L.I.

Exercício 8. Suponhamos que precisemos calcular $z = (A+B)(x+y)$, onde $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Calcular a quantidade aproximada de `flops` se calculamos $z = (A+B)(x+y)$;

(b) Calcular a quantidade aproximada de `flops` se calculamos $z = Ax + Ay + Bx + By$;

(c) Qual método requer menos quantidade de `flops`?

Exercício 9. Elabore um algoritmo que calcule $(xy^T)^k$ onde $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $k \geq 0$ é um inteiro.

Exercício 10. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Elabore os seguintes algoritmos:

(a) Multiplique por 2 a todos os elementos da coluna 1.

(b) Multiplique por c a todos os elementos da coluna j, onde $j = 1, \ldots, n$.

(c) Multiplique simultaneamente as colunas $1, 2, \ldots, n$ por $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

(d) Multiplique simultaneamente as linhas $1, 2, \ldots, n$ por $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

(e) Troque as linhas i e j.

Exercício 11. Sejam as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Note que para calcular $C = AB$, podemos usar a seguinte **formula** para calcular cada coluna j:

$$C(:,j) = \sum_{k=1}^{n} B(k,j)A(:,k) \qquad j = 1,\ldots,n$$

(a) Considerando B sendo **triangular superior**. Então

(1) Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de B (sem multiplicações por zero).

(2) Assuma que A também é **triangular superior**. Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de A e B (sem multiplicações por zero).

(b) Considerando B sendo **triangular inferior**. Então

(1) Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de B (sem multiplicações por zero).

(2) Assuma que A também é **triangular inferior**. Usando e modificando a formula, elabore um algoritmo que calcule $C = AB$ e aproveite a estrutura especial de A e B (sem multiplicações por zero).

Use o seguinte modelo para dar sua a resposta de cada item:

```
function C=Mult(A,B)
C=zeros(n,n);
for j=1:n
        v=B(  ,j);
        for k=
                C(  ,  )=C(  ,  )+v(  ) A(  ,  );
        end
end
```

Exercício 12. Dado $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$. Elabore um algoritmo que gere a matriz de Vandermonde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-2} & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-2} & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & \cdots & t_m^{n-2} & t_m^{n-1} \end{bmatrix}$$

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Depto. Computação Científica

Prof. Felipe A. G. Moreno
Álgebra Linear Computacional

Lista de Exercícios 3

Dadas as seguntes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -2 \\ -1 & -7 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 5 \\ -\frac{1}{4} & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & -7 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -\frac{7}{3} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercício 1. Determine a decomposição LU, de A, B, C, D, E, F, se possível.

Exercício 2. Verifique se as matrizes AA^T, B^TB, CC^T, D^TD, EE^T e FF^T são positivas definidas.

Exercício 3. Determine a decomposição de Cholesky, de todas as matrizes definidas positivas, do item(d).

Exercício 4. Dados os vetores:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -18 \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -15 \\ -9 \\ -\frac{31}{4} \end{bmatrix}, \quad \hat{\hat{b}} = \begin{bmatrix} -44 \\ 19 \\ 49 \\ \frac{131}{4} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \\ 0 \\ \frac{65}{4} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} -\frac{221}{3} \\ -\frac{128}{3} \\ \frac{107}{4} \\ \frac{58}{9} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\bar{b}} = \begin{bmatrix} -\frac{80}{3} \\ -\frac{445}{6} \\ 5 \\ -\frac{787}{18} \end{bmatrix}$$

e as matrizes A, B, C, D, E e F, do exercício anterior, resolva os seguintes sistemas de equações:

$$Ax = b, \quad Bx = \tilde{b}, \quad Cx = \hat{b}, \quad Dx = \tilde{b}, \quad AA^Tx = \hat{\hat{b}}, \quad CC^T = \bar{b}, \quad EE^Tx = \tilde{\tilde{b}} \quad \text{e} \quad FF^Tx = \bar{\bar{b}}$$

Exercício 5. Usando pivoteamento parcial, resolva os seguintes sistemas de equações:

$$Ax = b, \quad Cx = \hat{b} \quad \text{e} \quad Ex = \bar{\bar{b}}$$

Exercício 6. Usando pivoteamento completo, resolva os seguintes sistemas de equações:

$$Bx = \tilde{b}, \quad Dx = \tilde{b}, \quad \text{e} \quad Fx = \bar{\bar{b}}$$

Exercício 7. Usando a decomposição LU, obtida no item (c) do exercício 1, de A, C e F, determine A^{-1}, C^{-1} e F^{-1}, respectivamente.

Dados os seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{bmatrix}$$

.

Verifique:

1. $\|v_1\|_\infty \geq \|v_2\|_1 + \|v_3\|_2$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\|v_3\|_2 \leq \|v_1\|_1 + \|v_2\|_\infty$ $\boxed{\text{V}}$
3. $\|v_1 - v_2\|_2 \leq \|v_1 - v_2\|_1$ $\boxed{\text{V}}$
4. $\|v_2 - v_3\|_1 \leq \|v_1 - v_3\|_\infty$ $\boxed{\text{F}}$

Dadas as seguintes matrices em $\mathbb{R}^{3\times3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes desigualdades:

1. $\|D\|_F > \|B\|_1 + \|A\|_\infty$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\|B\|_1 > \|C\|_\infty + \|A\|_F$ $\boxed{\text{F}}$
3. $\|D + C\|_\infty \leq \|D + A\|_\infty$ $\boxed{\text{V}}$
4. $\|A + B\|_F \geq \|C + D\|_F$ $\boxed{\text{F}}$

Dados os seguintes vetores $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Desta forma:

1. Verifique que $\{a_1, a_2, a_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$;
2. Construir, a partir destes vectores, uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$.

Dados os seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique:

1. $\|v_1\|_\infty \leq \|v_2\|_1 + \|v_3\|_2$ $\boxed{\text{V}}$
2. $\|v_3\|_2 \leq \|v_1\|_1 + \|v_2\|_\infty$ $\boxed{\text{V}}$
3. $\|v_1 - v_2\|_2 \leq \|v_1 - v_2\|_1$ $\boxed{\text{V}}$
4. $\|v_2 - v_3\|_1 \geq \|v_1 - v_3\|_\infty$ $\boxed{\text{V}}$

Dadas as seguintes matrices em $\mathbb{R}^{3\times3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes desigualdades:

1. $\|D\|_F > \|B\|_1 + \|A\|_\infty$ F
2. $\|B\|_1 > \|C\|_\infty + \|A\|_F$ F
3. $\|D + C\|_\infty \leq \|D + A\|_\infty$ V
4. $\|A + B\|_F \geq \|C + D\|_F$ F

Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ elabore um Algoritmo que:

Multiplique o escalar $c \in \mathbb{R}$ a todos os elementos da coluna j, onde $j = 1, \ldots, n$, da matriz A.

Anexe sua resposta, contendo o algoritmo.

Dado $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Determine se a expressão:

$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^3$$

define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Dado $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Determine se a expressão:

$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} |x_i|$$

define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Anexe sua resposta, contendo a justificativa detalhada.

Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ elabore um Algoritmo que:

Multiplique simultaneamente as linhas $1, 2, \ldots, n$ por $c_1, c_2, \ldots, c_n$ respectivamente, da matriz A.

Anexe sua resposta, contendo o algoritmo.

Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ elabore um Algoritmo que:

Multiplique o escalar $c \in \mathbb{R}$ a todos os elementos da linha i, onde $i = 1, \ldots, n$, da matriz A.

Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ elabore um Algoritmo que:

Multiplique o escalar $c \in \mathbb{R}$ a todos os elementos da coluna j, onde $j = 1, \ldots, n$, da matriz A.

Dadas as seguintes matrices em $\mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique quais das seguintes desigualdades:

1. $\|A\|_F \leq \|B\|_1 + \|D\|_\infty$ V
2. $\|A\|_1 \geq \|B\|_\infty + \|C\|_F$ F
3. $\|A - D\|_\infty \geq \|A - D\|_F$ V
4. $\|D - C\|_F \leq \|A - C\|_\infty$ V

são verdadeiras ou falsas. Assim, arrastre e solte sobre o texto.

V F

Dados os seguintes vetores $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Desta forma:

1. Verifique que $\{a_1, a_2, a_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$;
2. Construir, a partir destes vectores, uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$.

Anexe sua resposta, contendo a justificativa detalhada.

Tempo restar

Dados os seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique:

1. $\|v_1\|_\infty \leq \|v_2\|_1 + \|v_3\|_2$ $\boxed{V}$
2. $\|v_3\|_2 \leq \|v_1\|_1 + \|v_2\|_\infty$ $\boxed{V}$
3. $\|v_1 - v_2\|_2 \leq \|v_1 - v_2\|_1$ $\boxed{V}$
4. $\|v_2 - v_3\|_1 \geq \|v_1 - v_3\|_\infty$ $\square$

Dados os seguintes vetores $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Desta forma:

1. Verifique que $\{a_1, a_2, a_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$;
2. Construir, a partir destes vectores, uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$.

Dado $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Determine se a expressão:

$$N(x) = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n-1}|\}$$

define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Dadas as seguintes matrices em $\mathbb{R}^{3\times3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes desigualdades:

1. $\|A\|_1 \leq \|B\|_F + \|C\|_\infty$ $\square$
2. $\|D\|_F \geq \|B\|_1 + \|C\|_\infty$ $\square$
3. $\|A - B\|_\infty \leq \|A - B\|_1$ $\square$
4. $\|B - C\|_1 \geq \|A - C\|_F$ $\square$

Dadas as seguintes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 30 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. A é Definida Positiva ☐
2. B é Definida Positiva ☐
3. C é Definida Positiva ☐
4. D é Definida Positiva ☐

Dadas as seguintes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. A é Definida Positiva F
2. B é Definida Positiva V
3. C é Definida Positiva F
4. D é Definida Positiva V

Dado um sistema de equações lineares $Ax = b$ temos que a matriz aumentada associada é

$$[\, A \mid b \,] \in \mathbb{R}^{3\times4}$$

Tempo restante 4:59

e obtivemos a forma reduzida escalonada desta matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. O sistema $Ax = b$ tem uma unica solução. ☐
2. $\text{posto}(A) = 2$. ☐
3. A solução do sistema é $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. ☐
4. Existe A^{-1}. ☐

Dado um sistema de equações lineares $Ax = b$ temos que a matriz aumentada associada é

$$[A \quad | \quad b] \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

e obtivemos a forma reduzida escalonada desta matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. O sistema $Ax = b$ tem uma única solução. $\boxed{\text{F}}$
2. $\text{posto}(A) = 2$. $\boxed{\text{V}}$
3. Uma solução do sistema é $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\boxed{\text{V}}$
4. Existe A^{-1}. $\boxed{\text{F}}$

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração LU da matriz A, isto é $A = LU$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Ly = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $Ux = y$.**

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração LU da matriz A, isto é $A = LU$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Ly = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $Ux = y$.**

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração de Cholesky da matriz A, isto é $A = GG^T$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Gy = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $G^T x = y$.**

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração de Cholesky da matriz A, isto é $A = GG^T$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Gy = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $G^T x = y$.**

Dado um sistema de equações lineares $Ax = b$ temos que a matriz aumentada associada é

$$[\,A \quad | \quad b\,] \in \mathbb{R}^{3\times4}$$

e obtivemos a forma reduzida escalonada desta matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. O sistema $Ax = b$ tem uma única solução. ☐
2. $\text{posto}(A) = 3$. ☐
3. A solução do sistema é $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ☐
4. Existe A^{-1}. ☐

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração LU da matriz A, isto é $A = LU$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Ly = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $Ux = y$.**

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração de Cholesky da matriz A, isto é $A = GG^T$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Gy = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $G^T x = y$.**

Dadas as seguintes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. A é Definida Positiva ☐
2. B é Definida Positiva ☐
3. C é Definida Positiva ☐
4. D é Definida Positiva ☐

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração de Cholesky da matriz A, isto é $A = GG^T$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Gy = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $G^T x = y$.**

Dadas as seguintes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 30 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. A é Definida Positiva ☐
2. B é Definida Positiva ☐
3. C é Definida Positiva ☐
4. D é Definida Positiva ☐

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Desta forma:

1. **Calcule a fatoração LU da matriz A, isto é $A = LU$.**
2. **Resolva o sistema triangular inferior $Ly = b$.**
3. **Resolva o sistema triangular superior $Ux = y$.**

Dado um sistema de equações lineares $Ax = b$ temos que a matriz aumentada associada é

$$[\, A \quad | \quad b \,] \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

e obtivemos a forma reduzida escalonada desta matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

.

Verifique quais das seguintes afirmações:

1. O sistema $Ax = b$ tem uma unica solução. $\boxed{\text{V}}$
2. $\mathrm{posto}(A) = 2$. $\boxed{\text{F}}$
3. A solução do sistema é $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. $\boxed{\text{F}}$
4. Existe A^{-1}. $\boxed{\text{V}}$