Resolução da lista de soluções básicas

O modelo considerado possui as seguintes restrições:

$$x_1 \leq 4 \tag{1}$$

$$x_2 \leq 6 \tag{2}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \tag{3}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{4}$$

(a)

As restrições de não negatividade, expressas em (4), nos dizem que os valores de x_1 e x_2 são sempre positivos, assim podemos reduzir a região viável ao primeiro quadrante do plano cartesiano. Além disso, considerando as restrições (1) e (2), podemos concluir que os valores de x_1 e x_2 não podem ser maiores que 4 e 6, respectivamente (ver as retas vermelha e azul na Figura 1). Se substituirmos a desigualdade por uma igualdade na restrição (3), veremos que ela nos fornece uma reta cuja equação é a seguinte:

$$x_2 = \frac{-3x_1 + 18}{2}$$

Levando-se em consideração todas essas observações, conseguimos delimitar a região viável como mostrada na Figura 1:

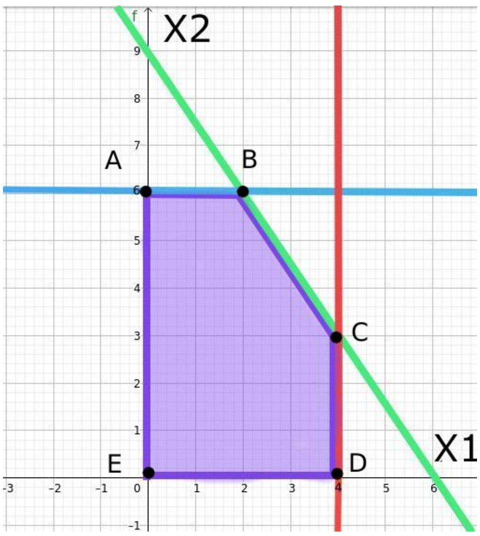

Figura 1: Região viável.

(b)

Devemos converter as restrições em igualdades acrescentando uma nova variável, chamada *variável de folga*, em cada uma delas. Podemos dizer que essas variáveis servem para balancear as relações, transformando-as em relações de igualdade.

Assim, para transformarmos a restrição (1) em uma igualdade, basta somarmos uma variável x_3 ao lado esquerdo. Assim, obtemos uma nova restrição dada por:

$$x_1 + x_3 = 4$$

Analogamente, adicionamos variável x_4 à restrição (2) e x_5 à restrição (3):

$$x_2 + x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

Deste modo, obtemos o novo modelo na forma padrão:

$$Max\, z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a:

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, x_3 \geq 0,\, x_4 \geq 0,\, x_5 \geq 0,$$

(c)

Sejam **A** a matriz dos coeficientes das variáveis nas restrições, **c** o vetor dos coeficientes das variáveis na função objetivo, **x** o vetor de variáveis e **b** o vetor com os termos independentes (lados direitos das restrições). Para o modelo considerado, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\, c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},\, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

O modelo na forma matricial terá o seguinte formato:

$$Max \quad c^T x$$

s.a:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Logo, neste caso em particular, obtemos:

$$Max \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

s.a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d)

Para determinarmos todas as soluções básicas, precisamos passar por todas as partições básicas possíveis. Neste caso, precisamos selecionar 3 colunas linearmente independentes (LI) para criar uma base.

Primeiro, vamos selecionar as 3 primeiras colunas, que são LI e portanto constituem uma base. Assim a base B será dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando x_B como sendo o vetor que contém as variáveis x_1, x_2 e x_3, isto é:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

E levando-se em consideração a seguinte relação:

$$Bx_B = b$$

Podemos, então, obter x_B da seguinte forma:

$$x_B = B^{-1}b$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$. Assim, como não houve a ocorrência de valores negativos nas variáveis, a solução básica encontrada é **viável**. Podemos também observar que essa solução corresponde ao vértice **B** da região viável (mostrada na Figura 1). Agora, basta fazermos o mesmo para todas as bases que pudermos formar.

Colunas 1, 2 e 4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 3, 0, 3, 0)$. Como todos os valores das variáveis obtidos são não negativos, a solução básica é **viável**. Essa solução básica corresponde ao vértice **C** da região viável.

Colunas 1, 2 e 5

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 6, 0, 0, -6)$. Como nem todos os valores das variáveis obtidos são não negativos, a solução básica é **inviável**.

Colunas 1, 3 e 4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 0, -2, 6, 0)$. Como nem todos os valores das variáveis obtidos são não negativos, a solução básica é **inviável**.

Colunas 1, 4 e 5

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 0, 0, 6, 6)$. Como todos os valores das variáveis obtidos são não negativos, a solução básica é **viável**. Essa solução básica corresponde ao vértice **D** da região viável.

Colunas 2, 3 e 4

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \, x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 4, -3, 0)$. Como nem todos os valores das variáveis obtidos são não negativos, a solução básica é **inviável**.

Colunas 2, 3 e 5

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \, x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 4, 0, 6)$. Como todos os valores das variáveis obtidos são não negativos, a solução básica é **viável**. Essa solução básica corresponde ao vértice **A** da região viável.

Colunas 3, 4 e 5

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \, x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Obtivemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 6, 18)$. Como todos os valores das variáveis obtidos são não negativos, a solução básica é **viável**. Essa solução básica corresponde ao vértice **E** da região viável.

Desta forma, podemos observar que todas as 5 soluções básicas viáveis que obtivemos estão associadas aos vértices da região viável mostrada na Figura 1.