UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ....

Lista de Exercícios Séries Numéricas - Conceitos Iniciais

01. Partindo de uma função que defina o termo geral de uma sequência $a(n)$, para $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots$, implemente um programa para ilustrar o comportamento da série numérica $\sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)$, com as duas opções exclusivas de execução:

   (a) o usuáro **sabe** que a série é convergente para a soma **S**;

   (b) o usuário **não sabe** se a série é convergente.

   – Caso seja feita a escolha da opção (a), o usuário deve fornecer como entradas o valor da soma **S**, o valor de uma tolerância ϵ e dois índices **kmim** $\geq n_0$ e **kmax** $>$ **kmim** tal que $|S(k) - \mathbf{S}| \leq \epsilon$, com $S(k) = \sum_{n=n_0}^{k} a(n)$, para todos índices k com $k = \mathbf{kmim}, \mathbf{kmim} + 1, \cdots, \mathbf{kmax}$ (sugestão: considere $0 < \mathbf{kmax} - \mathbf{kmim} \leq 20$);

   – Caso seja feita a escolha da opção (b), o usuário deve fornecer apenas os dois índices **kmim** e **kmax**.

   O programa deve fornecer como saídas:

   (i) uma tabela mostrando as triplas $(k, a(k), S(k))$, para $k = \mathbf{kmin}, \ldots, \mathbf{kmax}$;

   (ii) uma figura em que o eixo horizontal represente o intervalo $[\mathbf{kmim}, \mathbf{kmax}]$ e mostrando os dois conjuntos de pontos $(k, a(k))$ e $(k, S(k))$ em cores distintas, de maneira discreta, para $k = \mathbf{kmim}, \ldots, \mathbf{kmax}$;

   (iii) Caso o usuário escolha a opção (a), o programa deve acrescentar na figura do item (ii) os gráficos dos três segmentos de reta horizontais, respectivamente com alturas $\mathbf{S} - \epsilon$, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S} + \epsilon$.

02. Considere as séries a seguir. Exiba uma saída do programa do Exercício 1 de acordo com o caso de a série ser convergente ou divergente. Informe os valores **kmin** e **kmax** utilizados no programa e se for o caso os valoes de **S** e de ϵ também.

(a) a série harmônica.

(b) uma série geométrica convergente (veja o Exercício 5).

(c) uma série geométrica divergente.

(d) uma série telescópica convergente (veja o Exercício 5).

(e) uma série telescópica divergente.

03. (Livro do Marivaldo, Ex. 2.2B, pg. 39)

Seja n_0 um número natural. Responda se a afirmação é falsa ou verdadeira. Justifique a sua resposta usando os resultados visto em aula, ou dando contra-exemplos.

(a) Se $\lim a_n = 0$, então $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Se $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge, então $\lim a_n \neq 0$.

(c) Se $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$, então $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

(d) Se $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (a_n)^2$ diverge.

(e) Se $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ divergem, então $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

(f) Se $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge e $a_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$, então $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge.

(g) Se $\{a_n\}$ é uma sequência constante, então $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

(h) Se $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum\limits_{n=n_0+100}^{\infty} a_n$ converge.

04. (Livro do Marivaldo, Ex. 2.2D, pg. 40)

Por observação do limite do termo geral verifique que a série é divergente. Em seguida use o programa do Exercício 01 e ilustre este fato.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(1+(-1)^n]$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^3+n^2+4}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{cos(n)}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, sen\left(\frac{1}{n}\right)$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$

05. (Livro do Marivaldo, Ex. 2.2E, pg. 40)

Verifique se a série pode ser identificada com uma série geométrica ou com uma série telescópica (encaixe). Caso conclua que a série seja convergente, tente calcular o valor da soma **analiticamente** e caso consiga obter o valor da soma execute o programa do Exercício 01 com a tolerância $\epsilon = 10^{-3}$. Caso não seja possível obter o valor da soma **analiticamente** diga o porque.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{2}{5}\right)^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{1}{3^{n+2}}\right)$

Referências.

[1] Notas de aula da disciplina.

[2] Marivaldo P. Matos (2020); Séries e Equações Diferenciais.
http://www.mpmatos.com.br/Serie_EDO/Series_EDO_2020.pdf

[3] Earl Swokowski (1995); Cálculo com Geometria Analítica, vol 2.

[4] G. B. Thomas et al. (2012) Cálculo, vol 2.