UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ....

Lista de Exercícios.
O Teorema do Núcleo e da Imagem.

Obs. Na resolução dos sistemas, basta montá-los e obter a solução via algum *software*, indicando qual.

01. Dadas os espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ com as respectivas bases canônicas, a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ e os vetores v e w:

   (i) determine a matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{T}$ nas bases canônicas.

   (ii) determine o subespaço $Im(\mathbf{T})$ e exiba uma base para o mesmo;

   (iii) verifique se o vetor w pertence ao subespço $Im(\mathbf{T})$ e se a resposta for positiva, obtenha o vetor u tal que $\mathbf{T}(u) = w$;

   (iv) determine o subespaço $N(\mathbf{T})$ e exiba uma base para o mesmo;

   (v) verifique se o vetor v pertence ao subepsço $N(\mathbf{T})$;

   (vi) diga se $\mathbf{T}$ é injetiva, sobrejetiva, ou nenhuma das duas coisas;

   (vii) determine a matriz $\mathbf{A}^t$ e escreva a expressão da transformação $\mathbf{T}^*$.

   (viii) determine o subespaço $Im(\mathbf{T}^*)$ e exiba uma base para o mesmo;

   (ix) verifique se o vetor v pertence ao subespaço $Im(\mathbf{T}^*)$ e se a resposta for positiva, obtenha o vetor z tal que $\mathbf{T}^*(z) = v$;

   (x) determine o subespaço $N(\mathbf{T}^*)$ e exiba uma base para o mesmo;

   (xi) verifique se o vetor w pertence ao subespço $N(\mathbf{T}^*)$;

   (xii) diga se $\mathbf{T}^*$ é injetiva, sobrejetiva, ou nenhuma das duas coisas;

   (xiii) Verifique o **teorema do núcleo e da imagem** para a transformação $\mathbf{T}$;

   (xiv) Verifique o **teorema do núcleo e da imagem** para a transformação adjunta $\mathbf{T}^*$;

(a) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{T}(x, y, z) = (x + y, y + z)$,
$v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 1)$.

(b) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{T}(x, y) = (x - y, x + y, \frac{1}{2}(x + y))$,
$v = (1, 0)$, $w = (0, 1, 0)$.

(c) $\mathbf{T} : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{T}(M) = m_{12} + m_{21}$, em que M tem entradas m_{11}, m_{12}, m_{21} e m_{22}, $v = (1, 0, 1, 0)$, $w = 1$.

(d) $\mathbf{T} : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{T}(M) = m_{11} - m_{22}$, em que M tem entradas m_{11}, m_{12}, m_{21} e m_{22}, $v = (1, 0, 1, 0)$, $w = -1$.

(e) $\mathbf{T} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{T}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x + a_0x^2$, $v = (1, 2, 3)$, $w = (3, 2, 1)$.

(f) $\mathbf{T} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{T}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \int_0^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2)dx$, $v = (1, 2, 0)$, $w = 1$.

(g) $\mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{T}(a) = ax^2$, $v = 1$, $w = (1, 0, 2)$.

Referências.

[1] J. L. Boldrini, S. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler; Álgebra Linear, 3a edição, editora HARBRA, 1986.

[2] E. L. Lima; Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, 6a edição, 2003.

[3] S. Lipschutz, M. Lipson; Álgebra Linear, tradução da 4a edição norte americana “Schaum’s outline of theory and problems of linear algebra”, Bookman, 2011.

[4] G. Strang; Álgebra Linear e suas aplicações, tradução da 4a edição norte-americana “Linear algebra and its application” , Cengage Learning, 2014.