UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I

Aluno(a): ..........................................................................

**Lista de Exercícios - Mudanąa de Base.**
**Produto Interno e Norma.**

01. Dado o espaço vetorial $\mathbb{V}$ e o conjunto $\mathbf{B}$ de $\mathbb{V}$, verifique se $\mathbf{B}$ é uma base de $\mathbb{V}$ e, caso positivo, determine a matriz mudança da base canônica do espaço $\mathbb{V}$ para a base $\mathbf{B}$ e, **usando a matriz mudança de base**, expresse o vetor $\mathbf{v}$ (dado na base canônica) porém agora na base $\mathbf{B}$.

    **Sugestão.** Use algum *software* para resolver os sistemas lineares envolvidos.

    (a) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3$, $\mathbf{B} = \{1-x, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$, $\quad \mathbf{v} = 1+x+x^2+x^3$.

    (b) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3$, $\mathbf{B} = \{1, 1+x, 1+2x^2, 1+3x^3\}$, $\quad \mathbf{v} = x - 2x^2 + 5x^3$.

    (c) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbf{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, com $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

    (d) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbf{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, com $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

    (e) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{B} = \{(1,2,1,0), (2,0,1,1), (0,1,1,2), (1,2,0,1)\}$, $\mathbf{v} = (0,1,0,0)$

    (f) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{B} = \{(1,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1)\}$, $\mathbf{v} = (0,0,1,0)$.

02. Sejam $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$ vetores arbitrários de $\mathbb{R}^2$. Verifique se a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ define um produto interno. **Se não definir**, diga porque.

    (a) $\varphi(v_1, v_2) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$.

(b) $\varphi(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$.

(c) $\varphi(v_1, v_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$.

(d) $\varphi(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$.

03. Considere o espaço vetorial $\mathbb{V}$, o PI, a norma induzida pelo PI e o vetores $v_1$ e $v_2$ de $\mathbb{V}$ dados.

(i) **Determine** se $v_1$ e $v_2$ são ortogonais entre si.

(ii) **Verifique** a desigualdade triangular da norma para os vetores $v_1$ e $v_2$.

(iii) Caso $v_1$ e $v_2$ não sejam ortogonais, **verifique** a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores $v_1$ e $v_2$.

(iv) Caso $v_1$ e $v_2$ não sejam ortogonais, **determine** o ângulo entre os vetores $v_1$ e $v_2$.

**Sugestão.** Use o WolframAlpha para calcular as integrais e somas.

(a) $\mathbb{V} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \{a = (a_1, a_2, \dots)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ seja convergente $\}$ com o PI dado por $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_n b_n$, para $v_1 = \{\frac{1}{2^n}\}$ e $v_2 = \{(\frac{2}{3})^n\}$.

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2[0, 1]$ com o PI dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, para $v_1 = 1 - 3x + x^2$ e $v_2 = 2 - x^2$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times3}$ com o PI dado por $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$, para $v_1 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathbb{V} = \mathcal{C}^0[0, 1]$ com o PI dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 e^{-x} f(x)g(x)dx$, para $v_1 = \frac{1}{1+x^2}$ e $v_2 = ln(1 + x)$.

**Referências.**

[1] J. L. Boldrini, S. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler; Álgebra Linear, 3a edição, editora HARBRA, 1986.

[2] E. L. Lima; Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, 6a edição, 2003.

[3] S. Lipschutz, M. Lipson; Álgebra Linear, tradução da 4a edição norte americana "Schaum's outline of theory and problems of linear algebra", Bookman, 2011.

[4] G. Strang; Álgebra Linear e suas aplicações, tradução da 4a edição norte-americana "Linear algebra and its application" , Cengage Learning, 2014.