

LAB 5 – Active Circuits with an Operational Amplifier

Ana Lopes (98587)¹ and Mariana Mourão (98473)²

Group number 5

¹ Instituto Superior Técnico,

Integrated Master's in Biomedical Engineering,

ana.rita.santos.lopes@tecnico.ulisboa.pt

² Instituto Superior Técnico,

Integrated Master's in Biomedical Engineering,

mariana.mourao@tecnico.ulisboa.pt

Notas:

Nos laboratórios anteriores, os sistemas analisados não consideravam a presença de dispositivos com funções de amplificação. Neste laboratório, introduz-se o amplificador operacional (AmpOp), um circuito integrado com vários terminais, contendo transístores e resistências, sendo a sua função primordial a amplificação, daí o nome de amplificador. Além desta função, o AmpOp possibilita também a realização de inúmeras operações matemáticas, daí o nome de operacional.

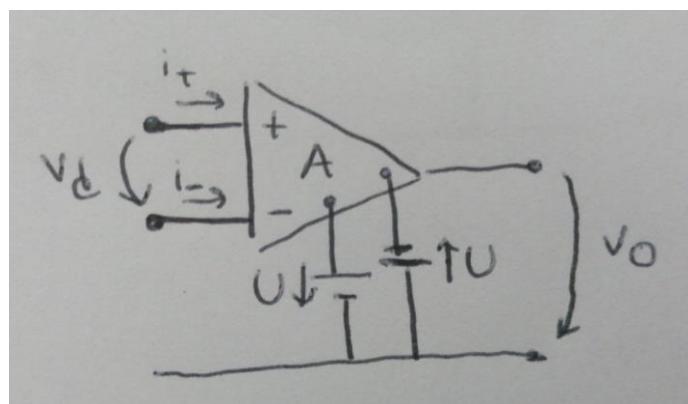


Figura 1 – Amplificador operacional com ganho A.

A figura 1 representa simbolicamente o AmpOp, o qual requer alimentação por fontes externas ($\pm V_{cc}$ ou a partir de uma única tensão de alimentação DC), representando-se também os seus

principais terminais acessíveis, referentes aos dois terminais de entrada (v_+ e v_-) e ao terminal de saída (v_o). A relação típica entre a tensão de saída v_o e a tensão de entrada $v_d = v_+ - v_-$ do amplificador encontra-se esquematizada na figura 2, sendo uma relação não linear traduzida matematicamente pela expressão 1.

$$\begin{cases} +U \text{ para } v_d \geq us \\ A \times v_d \text{ para } -us \leq v_d \leq us \\ -U \text{ para } v_d \leq -us \end{cases} \quad \text{Expressão 1}$$

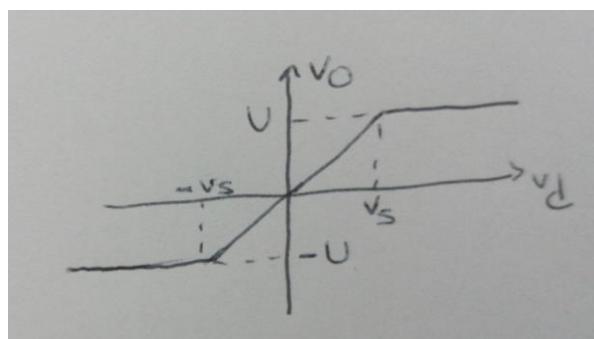


Figura 2 – Característica de transferência do AmpOp, representando-se a sua região linear e os patamares de saturação.

Os valores extremos de $\pm U$ correspondentes às tensões externas de alimentação são da ordem do volt ou dezenas de voltos, enquanto as tensões $\pm us$ (as tensões de saturação) são da ordem da dezena ou centena de microvolts. O ganho A do amplificador, definido na região linear, pode aproximar-se de 10^6 .

Na maioria das aplicações, o AmpOp é utilizado no regime linear de funcionamento. Na figura 3 esquematiza-se o modelo do amplificador contendo uma resistência de entrada r_i (com valores da ordem do Mohm e Gohm), uma resistência de saída r_o (com valores da ordem da dezena de ohm) e uma fonte de tensão dependente controlada por tensão.

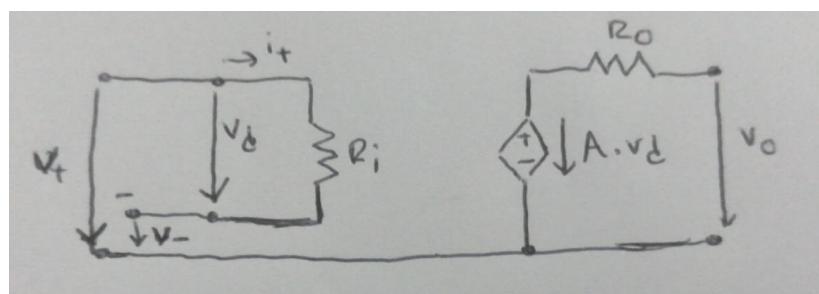


Figura 3 – Modelo interno do amplificador operacional a funcionar em regime linear.

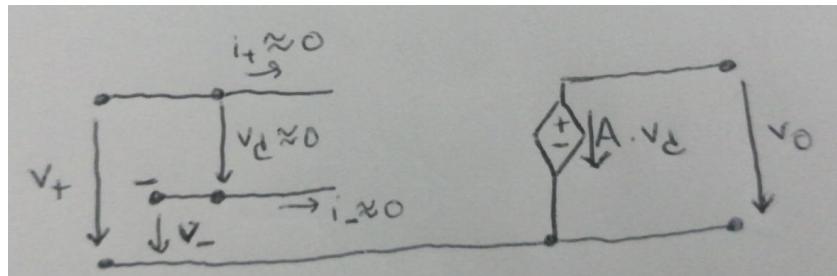


Figura 4 – Modelo ideal do amplificador operacional a funcionar em regime linear.

Este circuito pode ser simplificado para a sua configuração ideal, designando-se AmpOp ideal (figura 4), em que se considera a impedância de entrada $r_i \rightarrow \infty$ e a impedância de saída $r_o \rightarrow 0$, com ganho em malha aberta $A \rightarrow \infty$. Disto resulta que nenhuma corrente é registada em qualquer um dos seus terminais de entrada, encontrando-se os terminais de entrada em curto circuito. Como tal, o AmpOp ideal é definido pelas condições descritas na expressão 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_+ \rightarrow 0 \\ i_- \rightarrow 0 \\ v_d = \frac{v_o}{A} \rightarrow 0 \\ v_+ \approx v_- \text{ (curto circuito virtual)} \end{array} \right. \quad \text{Expressão 2}$$

Estas características conferem ao AmpOp ideal imunidade a interferências externas, possuindo uma largura de banda infinita, o que contribui para que a saída dependa apenas do sinal nas entradas. Contrariamente, uma das limitações apresentadas com o AmpOp real recai no ganho em malha aberta não ser infinito, com o produto do ganho pela largura de banda a assumir um valor constante. Com isto, quando o ganho aumenta, a largura de banda diminui, sendo que por sua vez quando o ganho diminui, a largura de banda aumenta.

Neste laboratório, a região linear de funcionamento do AmpOp será estudada, referentes a montagens que utilizam realimentação saída-entrada (amplificador em malha fechada), nomeadamente as configurações básicas inversor, não-inversor e seguidor de tensão. Aplicações na zona de saturação referem-se a montagens que não utilizam qualquer realimentação saída-entrada (amplificador em malha aberta).

Exercises:

1. Para o presente exercício, pretende-se determinar as funções de transferência referentes às configurações não inversora (Figura 5) e inversora (Figura 6), com e sem condensador.

I. Amplificador operacional não inversor

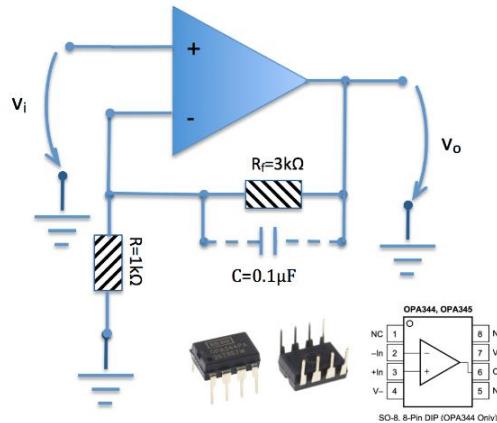


Figura 5 - Configuração do amplificador operacional não inversor.

Na montagem não inversora, o gerador de sinal encontra-se ligado à entrada positiva do AmpOp, sendo a tensão de saída resultante proporcional à de entrada, afetada de um sinal positivo, pelo que a polaridade não é invertida.

a) Com o componente do condensador

Para o cálculo da função de transferência correspondente ao circuito descrito na Figura 5, considerou-se as características inerentes ao AmpOp ideal, mais especificamente as expressas na expressão 2. Adicionalmente, aplicando a lei dos nós (estabelece que a soma das correntes que chegam a um nó corresponde à soma das correntes que saem do mesmo) ao terminal negativo v_- , obtém-se a relação descrita pela expressão 3, considerando-se a corrente i_R a sair do nó v_- e a $i_{R_f}C$ a entrar. A função de transferência $H(\omega)$ é apresentada na expressão 4.

$$i_{R_f}C - i_R = 0 \leftrightarrow \frac{vi - vo}{R_f || Zc} - \frac{(0 - vi)}{R} = 0 \quad \text{Expressão 3}$$

$$H(\omega) = \frac{Vo(\omega)}{Vi(\omega)} = \frac{R_f + R + j\omega R_f C R}{R(1 + j\omega R_f C)} = \frac{4 \times 10^3 + j\omega \times 0.3}{1 \times 10^3 + j\omega \times 0.3} \quad \text{Expressão 4}$$

O circuito não inversor possui um zero (localizado em $\omega_z = 13.33 \text{ krad/s} \Rightarrow f_z = \frac{\omega_z}{2\pi} \approx 2122 \text{ Hz}$), assim como um pólo (localizado em $\omega_p = 3.33 \text{ krad/s} \Rightarrow f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 531 \text{ Hz}$). Tendo em conta a localização do pólo e do zero, em que $\omega_p < \omega_z$, conclui-se que o circuito é um passa-baixo, uma vez que a resposta em frequência $H(\omega)$ decai -20 dB/dec a partir do polo ω_p , sendo que a partir do zero ω_z aumenta +20 dB/dec, com a magnitude da resposta em frequência $|H(\omega)|$ a manter-se constante. Adicionalmente, tem-se que o ganho em regime DC é de $H(0) = +4$.

b) Sem o componente do condensador

Neste caso, a expressão 3 modifica-se para a expressão 5, a qual efetivamente corresponde à situação em que o condensador se encontra em circuito aberto (condensador totalmente carregado, estando em regime estacionário), equivalendo ao regime DC do circuito original. De facto, isto é confirmado pela função de transferência obtida (expressão 6), a qual não apresenta dependência em ω , equivalendo à constante +4, ou seja, o sistema é independente da frequência (regime DC).

$$i_{R_f C} - i_R = 0 \leftrightarrow \frac{Vi}{R} + \frac{Vi - V_0}{R_f} = 0 \quad \text{Expressão 5}$$

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{Vi(\omega)} = 1 + \frac{R_f}{R} = 1 + \frac{3}{1} = 4 \geq 1 \quad \text{Expressão 6}$$

Deste modo, regulando o quociente $\frac{R_f}{R}$, a amplificação do sinal à entrada Vi pode ser modificada, contudo segundo a limitação imposta pela saturação do AmpOp, $|V_o| < U$.

II. Amplificador operacional inversor

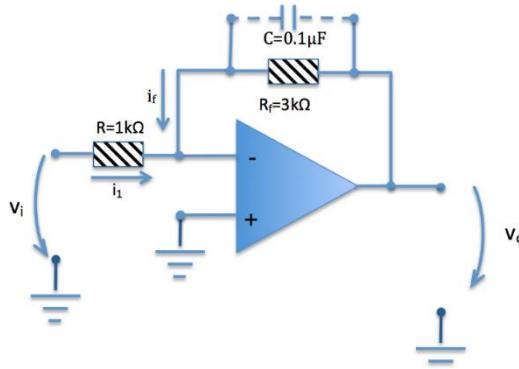


Figura 6 – Configuração do amplificador operacional inversor.

Na montagem inversora, o gerador de sinal encontra-se ligado ao terminal negativo v_- do AmpOp, sendo a tensão de saída resultante proporcional à de entrada, afetada por um sinal negativo, isto é, a polaridade é invertida.

a) Com o componente do condensador

Novamente considerando as características do AmpOp ideal (expressão 2), bem como a lei dos nós aplicada ao nó da entrada v_- , obtém-se a expressão 7, considerando as direções das correntes esquematizadas na figura 6.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_+ = 0 \\ i_1 + i_f = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_- = 0 \\ \frac{v_i - v_-}{R} = \frac{v_- - v_o}{R_f \parallel Z_c} \end{array} \right. \quad \text{Expressão 7}$$

com $Z_c = \frac{1}{sC}$ e $R_f \parallel Z_c = \frac{1}{\frac{1}{R_f} + \frac{1}{Z_c}} = \frac{R_f \times Z_c}{R_f + Z_c} = \frac{R_f \times \frac{1}{sC}}{R_f + \frac{1}{sC}} = \frac{R_f}{R_f \times sC + 1}$, sendo $s = j\omega$. Deste modo, a função

de transferência $H(\omega)$ é dada pela expressão 8.

$$H(\omega) = \frac{V_0(\omega)}{Vi(\omega)} = -\frac{R_f}{R(1 + j\omega R_f C)} = -\frac{3}{1 + 0.0003j\omega} \quad \text{Expressão 8}$$

O circuito inversor possui apenas um polo (localizado em $\omega_p = 3.33$ krad/s $\Rightarrow f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 531$ Hz), sendo novamente um filtro passa-baixo, com a magnitude da resposta em frequência

a decair -20 dB/dec a partir de ω_p , assim como impondo um atraso de fase de 90°. Adicionalmente, tem-se que o ganho em regime DC é de $H(0) = -3$.

b) Sem o componente do condensador

Novamente, ao remover-se o condensador, efetivamente está-se a impor o regime DC (sistema independente da frequência), obtendo-se um circuito inversor apenas constituído por resistências. A função de transferência obtida encontra-se na expressão 9.

$$\frac{V_0(t)}{V_i(t)} = -\frac{R_f}{R} = -\frac{3}{1} = -3 \quad \text{Expressão 9}$$

Note-se que, novamente, regulando o quociente $\frac{R_f}{R}$, a amplificação do sinal à entrada V_i pode ser modificada, contudo segundo a limitação imposta pela saturação do AmpOp, $|V_o| < U$.

2. Neste exercício, para cada uma das montagens em questão (inversor e não inversor, com e sem condensador), realizaram-se diferentes simulações para vários sinais de entrada (sinusoidal, quadrado, triangular e ruído) e frequências, tendo-se recorrido ao software LTSpice. De notar que o AmpOp utilizado diz respeito ao modelo LT1001. Definiu-se a amplitude pico a pico V_{pp} de todas as ondas testadas como sendo 1V, e de modo a garantir que o AmpOp funcione em regime linear, definiu-se $\pm V_{cc} = \pm 3$, dado que, como concluído no exercício 1, o módulo dos ganhos varia entre 3 e 4. O critério para a seleção das frequências das ondas consideradas à entrada foi baseado nas frequências dos pólos (apenas para a configuração não-inversora em regime AC) e dos zeros (ambas as configurações em regime AC).

Nas figuras 7 e 8, encontram-se esquematizados os circuitos em causa, com o parâmetro F no gerador de ondas tipo SINE (onda sinusoidal) a representar a frequência ajustável. Para gerar ondas quadradas e triangulares, modificou-se para o gerador de ondas tipo PULSE (Figura 9), com T (define o parâmetro Tperiod) a representar o período da onda. Para uma onda quadrada com 50% de ciclo de trabalho, cada nível tem uma duração temporal de $T/2$ (define o parâmetro Tdelay e Ton), tendo-se definido o parâmetro Trise Tfall = 1n, de modo a demarcar a transição

abrupta entre os valores de tensão extremos. Já para a onda triangular, definiu-se $T_{on} = 1\mu s$ e $T_{delay} = 0$, de modo a demarcar a transição abrupta nos picos da onda. Definiram-se ainda os parâmetros $T_{rise} = T_{fall} = T/2$.

Quanto ao ruído aplicado à entrada dos sistemas, considerou-se uma fonte de tensão comportamental arbitrária (*arbitrary behavioral voltage source*), recorrendo-se à função white, definindo-se a seguinte expressão $V = (\text{white}(2e6 * \text{time})/10)$. O circuito em causa encontra-se na figura 10.

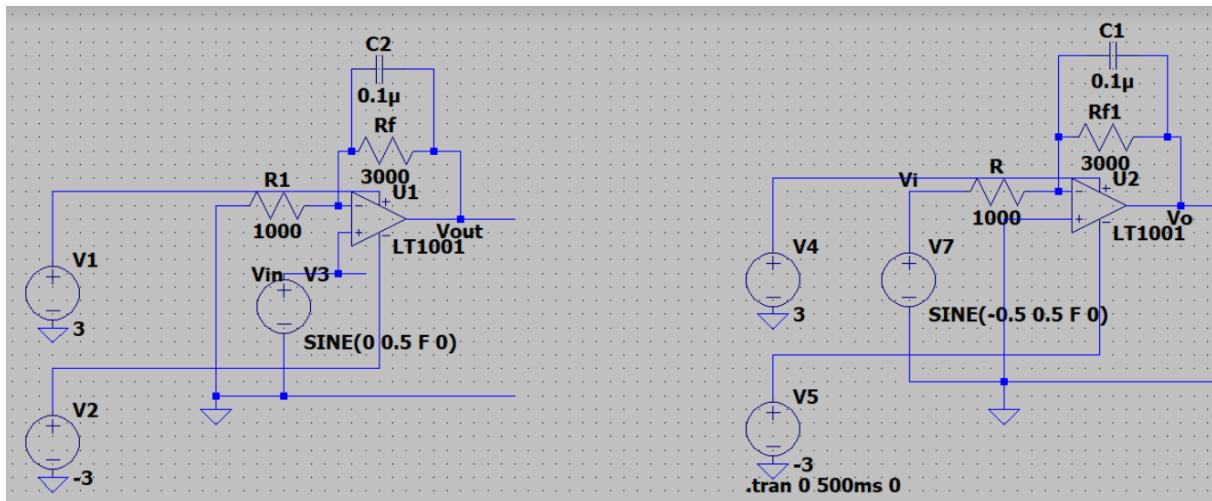


Figura 7 – Circuitos simulados das configurações não-inversora e inversora com condensador.

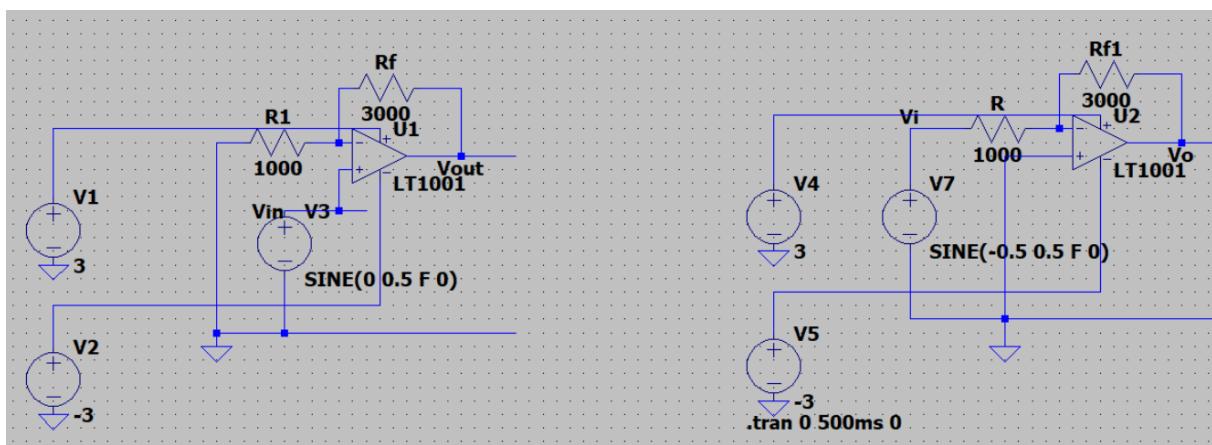


Figura 8 – Circuitos simulados das configurações não-inversora e inversora sem condensador.

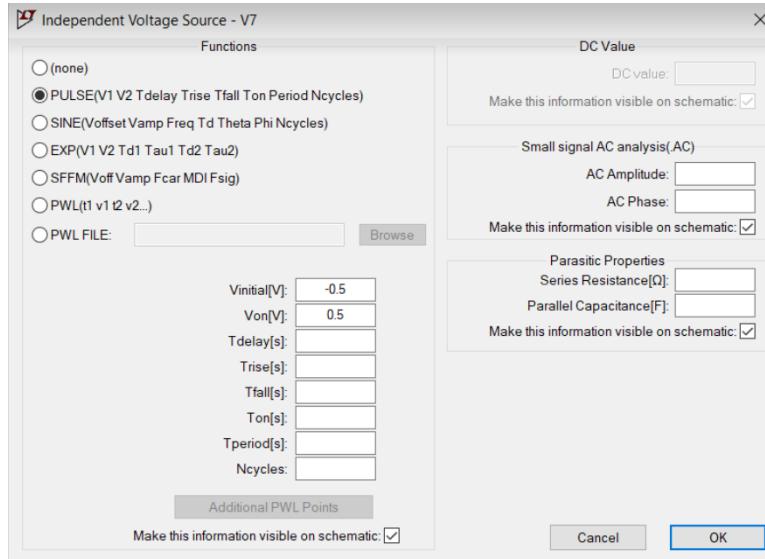


Figura 9 – Parâmetros a definir para o gerador de ondas tipo PULSE.

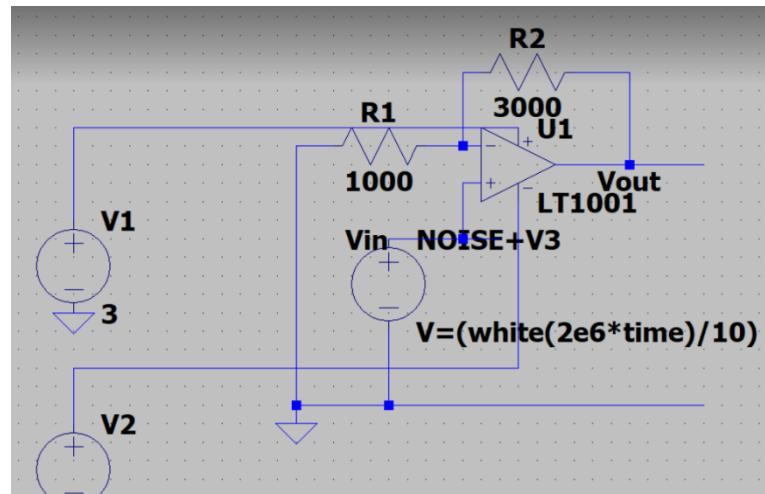
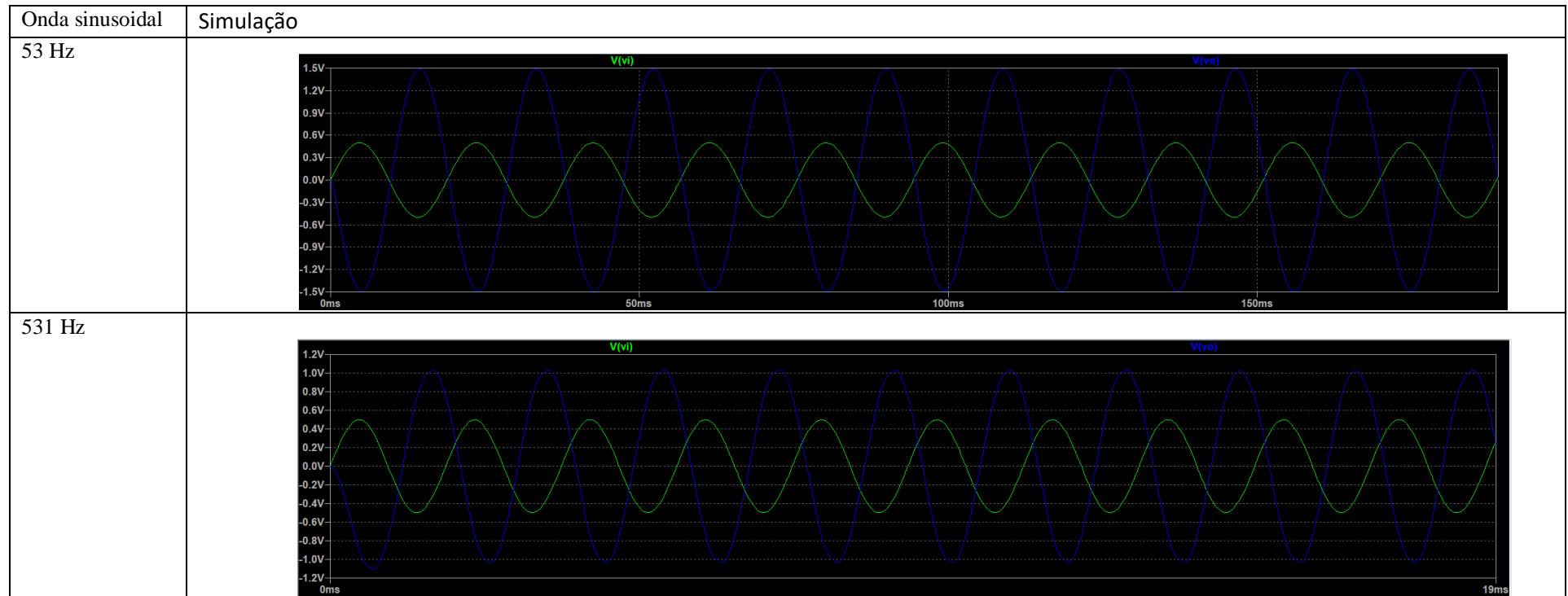
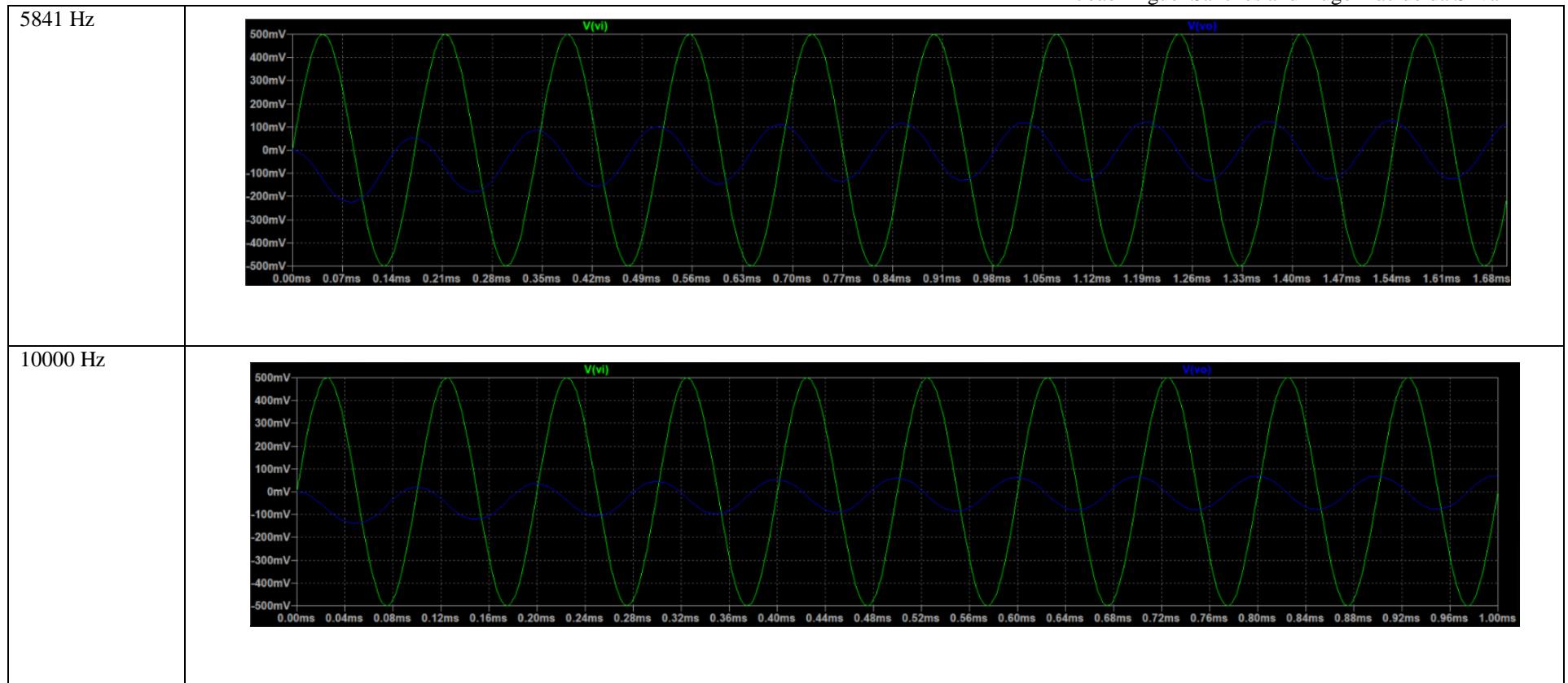
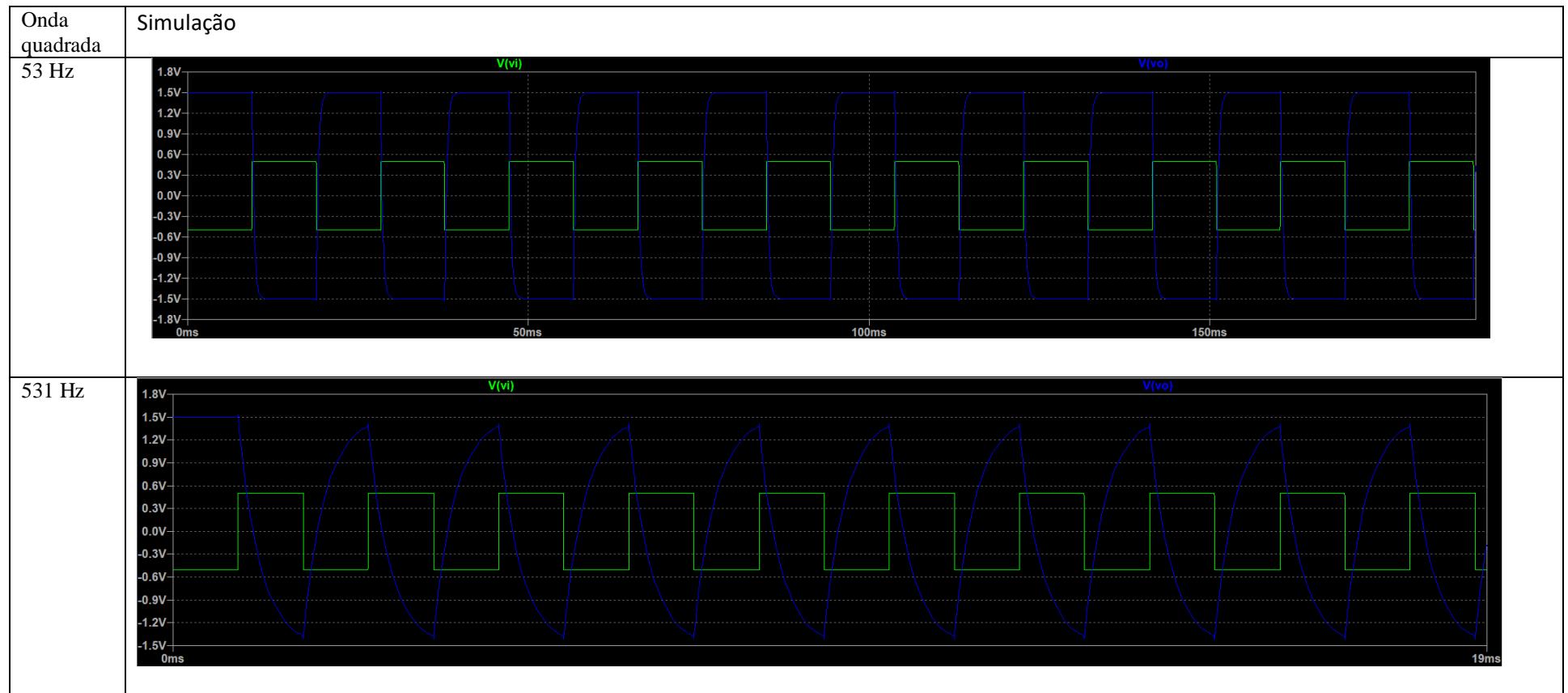


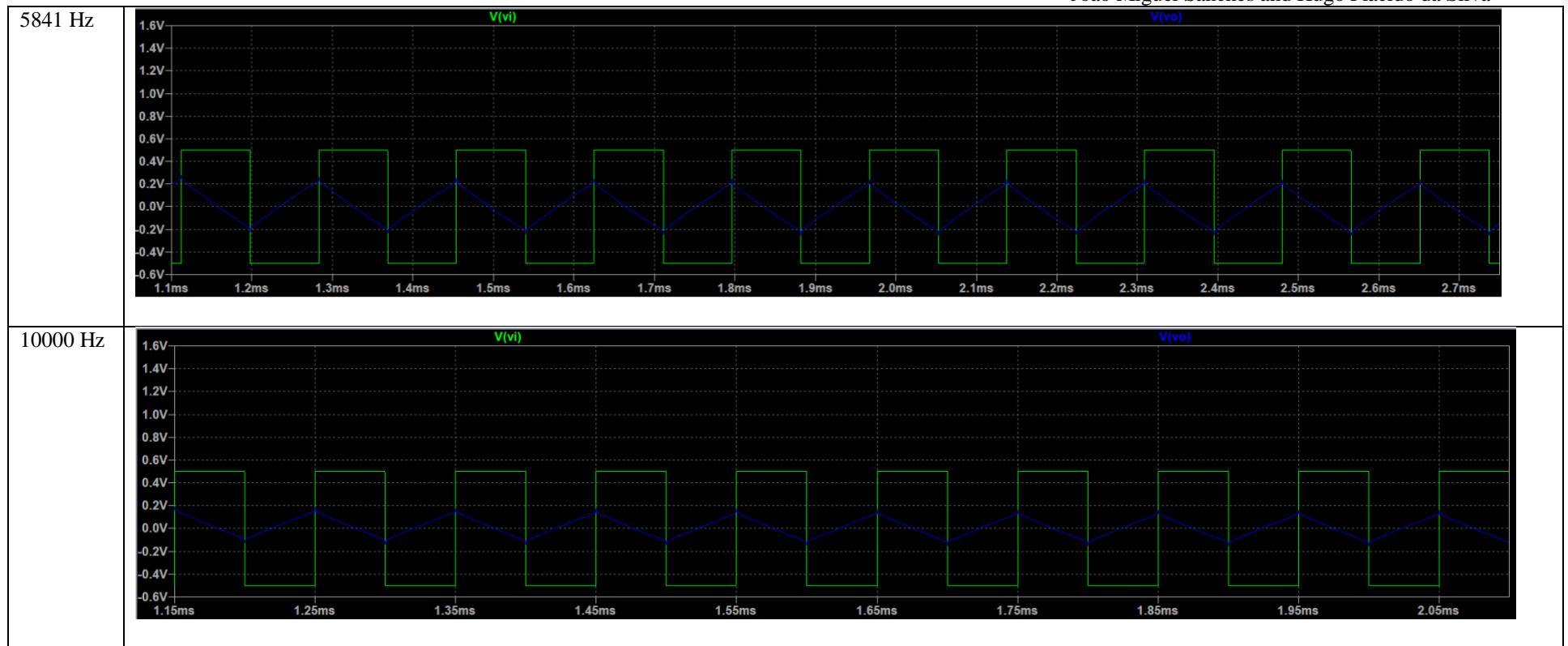
Figura 10 – Circuito simulado da configuração não inversora sem condensador, considerando-se ruído branco como entrada.

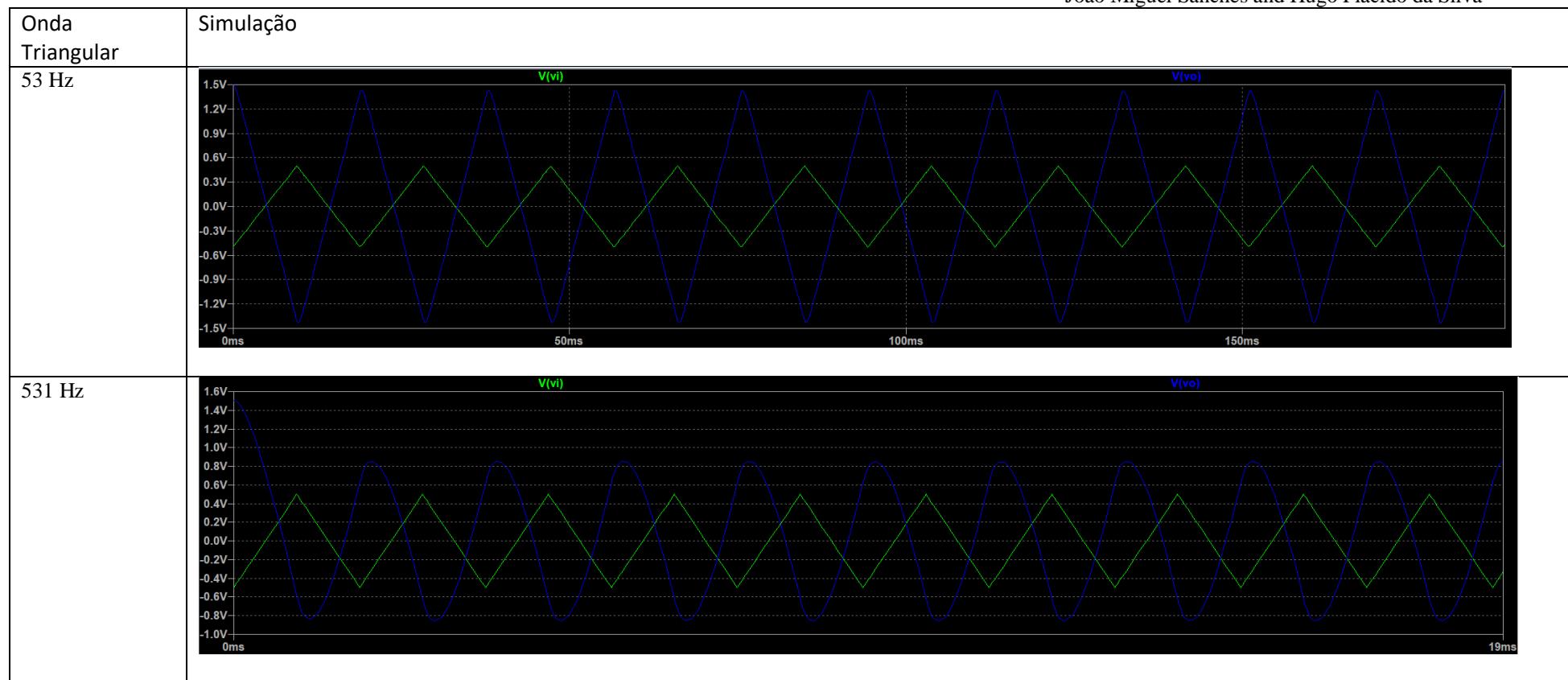
➤ Inversor com condensador

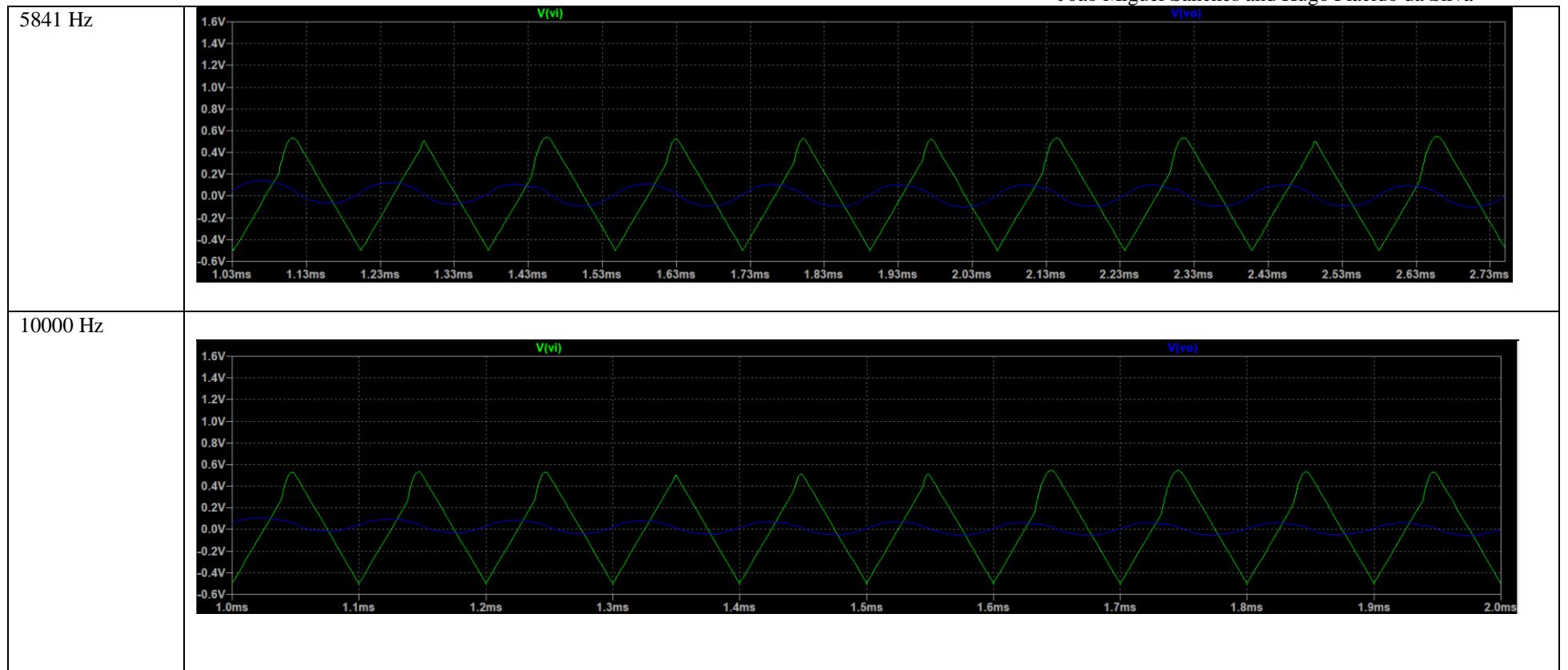


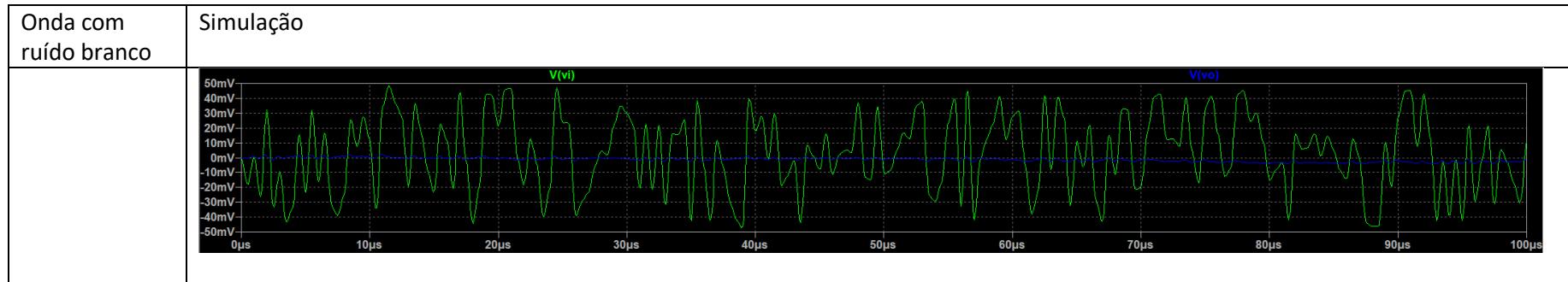












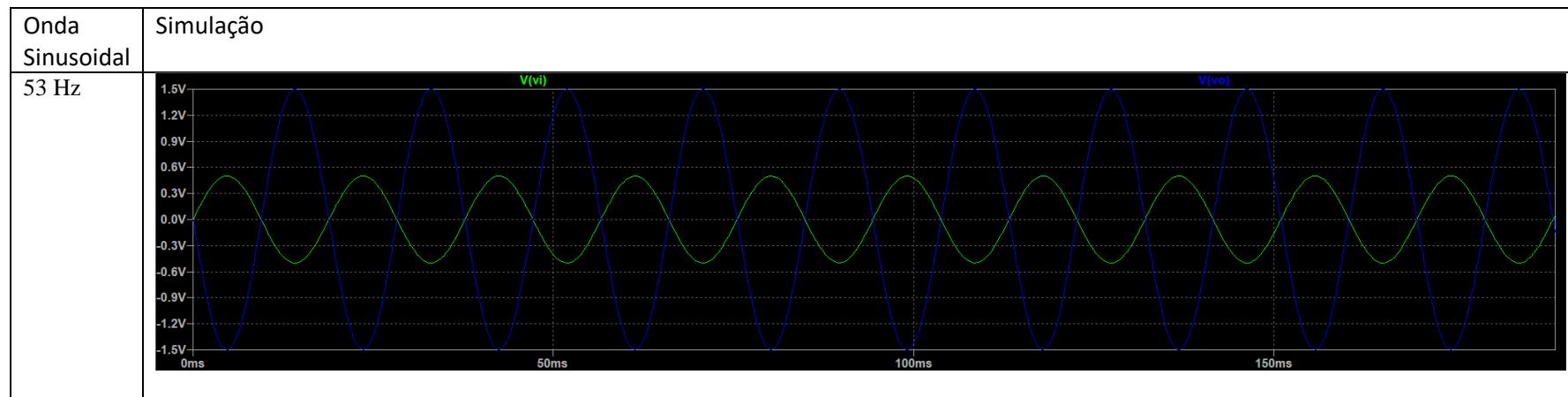
Analisando os gráficos obtidos, as características do circuito referidas no exercício 1 são verificadas, nomeadamente de que o circuito em causa é um filtro passa-baixo, pelo que, para frequências f inferiores a $f_p = 531$ Hz, o sinal de saída encontra-se amplificado pelo ganho em regime DC de -3 (sinal de saída invertido face ao de entrada, como esperado), tendo-se constatado isso para a frequência testada de $f = 53$ Hz. Para $f > f_p$, o ganho diminui abruptamente em módulo (-20 dB/dec), teoricamente começando a atenuar o sinal para valores superiores a $\frac{1}{R \times C} = 10 krad/s \approx 1591$ Hz (ganho unitário de 0 dB). De facto, para $f = 5841$ Hz (1.1 década depois de f_p), o ganho já sofreu uma descida significativa, obtendo-se $20 \times \log \left(\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{0.15}{0.5} \right) \approx -10.46$ dB, sensivelmente -20 dB face ao valor em DC (= 9.54 dB), indo de encontro ao teoricamente esperado. Para a frequência de $f = 10$ kHz, a amplitude do sinal de saída sofre uma atenuação ainda maior, como esperado. Por outro lado, constatou-se um desfasamento dos sinais de 90° a partir da frequência do pólo f_p , como teoricamente esperado.

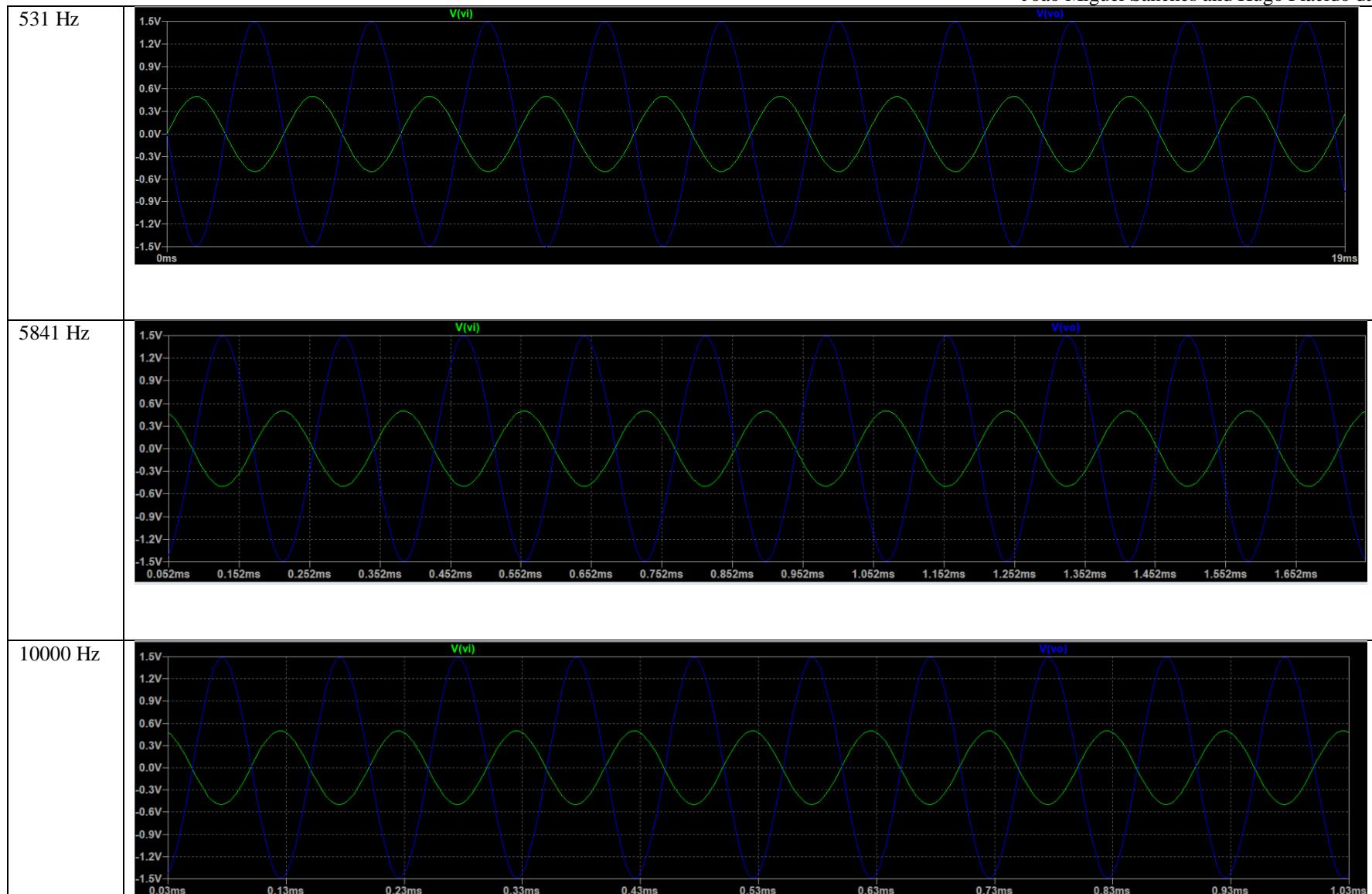
Quanto ao formato das ondas de saída, note-se que este circuito se comporta efetivamente como um integrador, devido ao facto de a corrente no condensador ser dada por $i_c = C \frac{dv}{dt}$, e uma vez que o condensador está ligado entre os nós de entrada e de saída, conclui-se que o sinal de saída é proporcional ao integral do sinal de entrada. Deste modo, para uma onda sinusoidal à entrada, o sinal de saída corresponde a um cosseno (inversão de magnitude). Da mesma forma, o integral de uma onda quadrada corresponde a uma onda triangular, tendo-se constatado

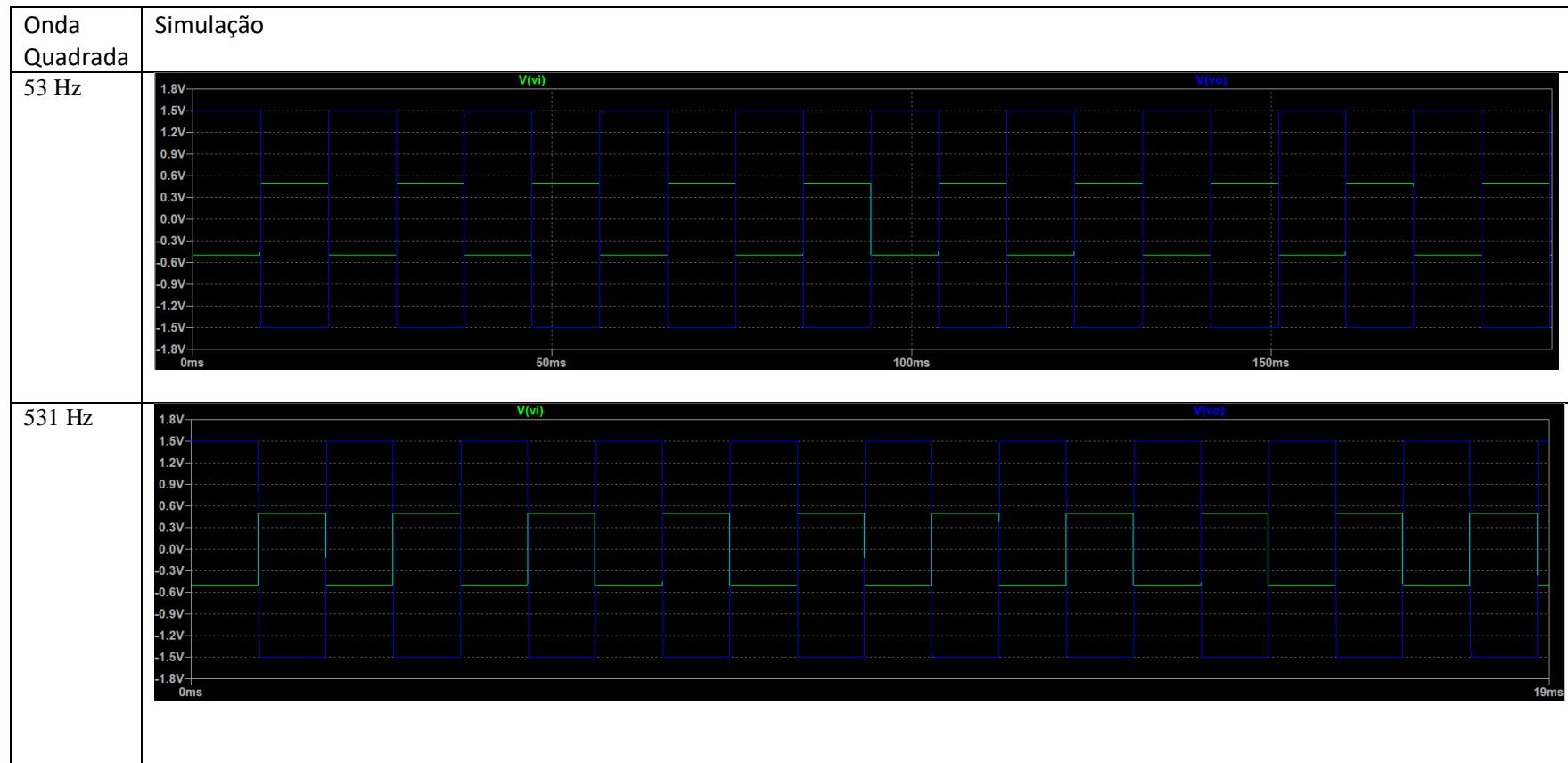
a natureza integradora do circuito mais evidente para frequências de onda mais elevadas, devendo-se ao facto do circuito ser um passa-baixo, pelo que para frequências de onda mais baixas irão ser maioritariamente atenuadas as altas frequências associadas à transição abrupta de amplitude. Por sua vez, o integral de uma onda triangular corresponde a uma parábola, aparentando uma onda sinusoidal, novamente mais evidenciado para frequências mais elevadas.

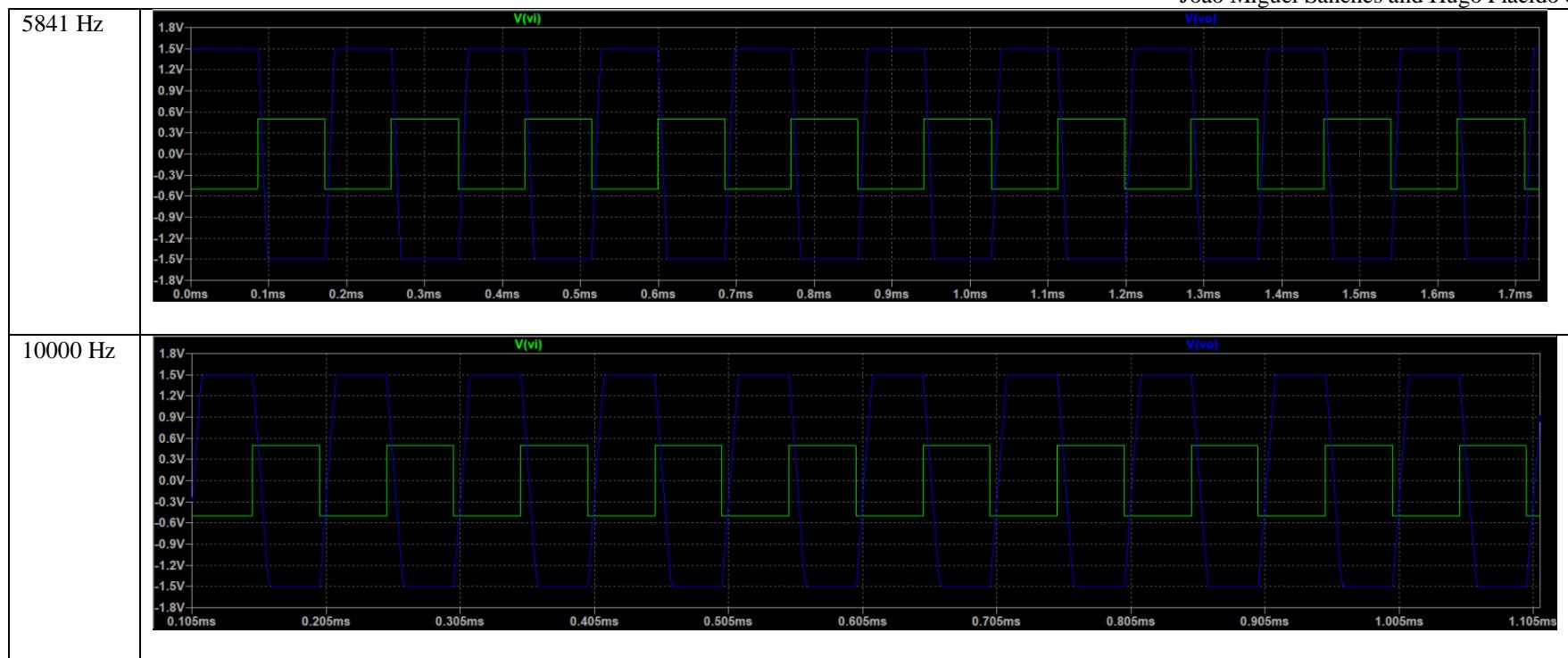
O comportamento de circuito passa-baixo é também verificado quando à entrada se aplica ruído, caracterizado por frequências elevadas, pelo que o mesmo é eficazmente atenuado.

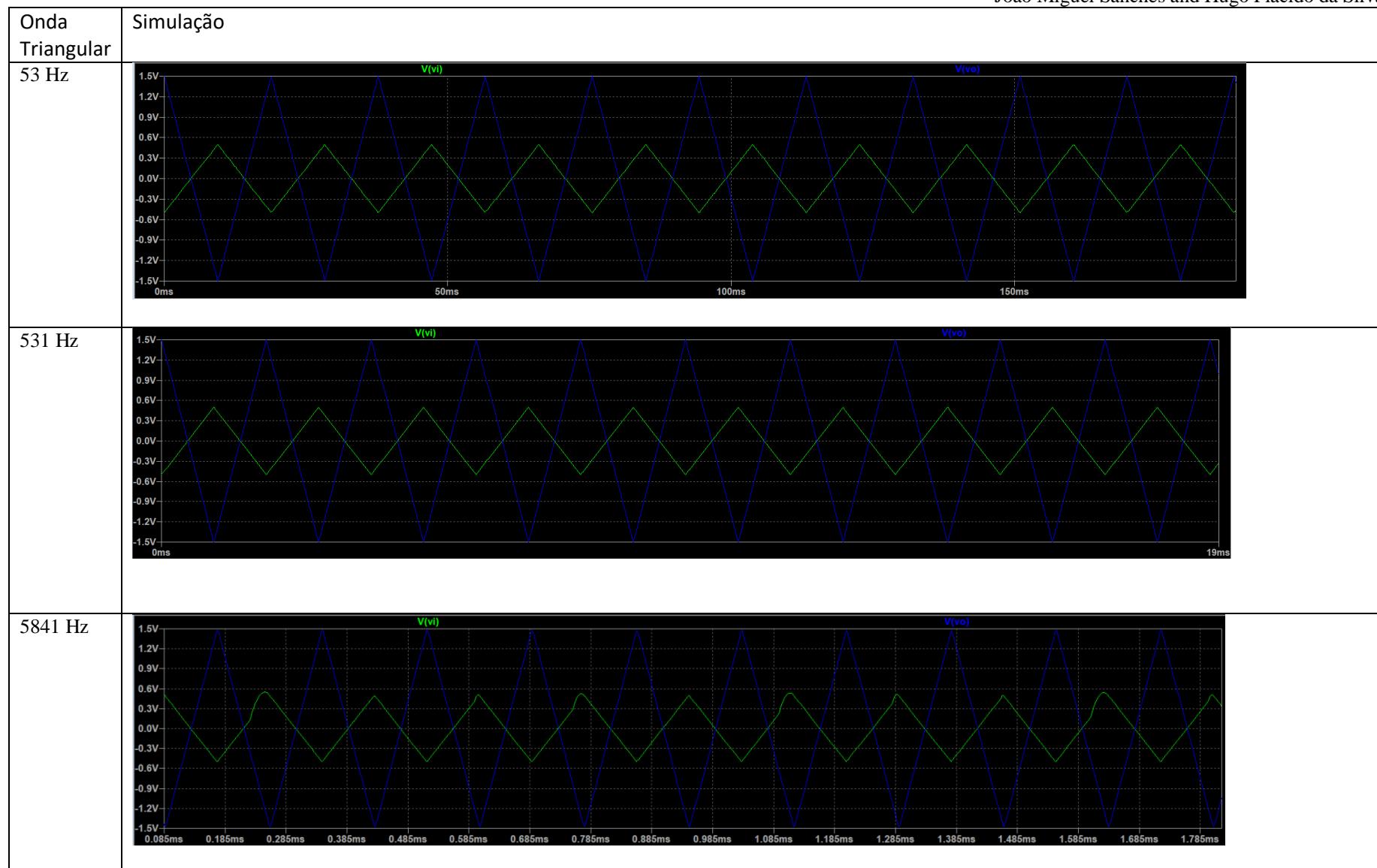
- inversor s\ condensador

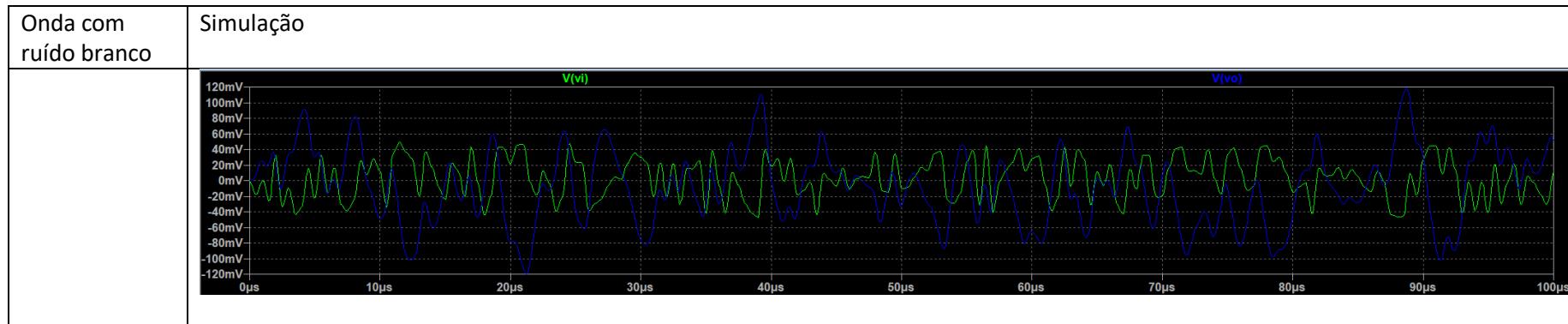
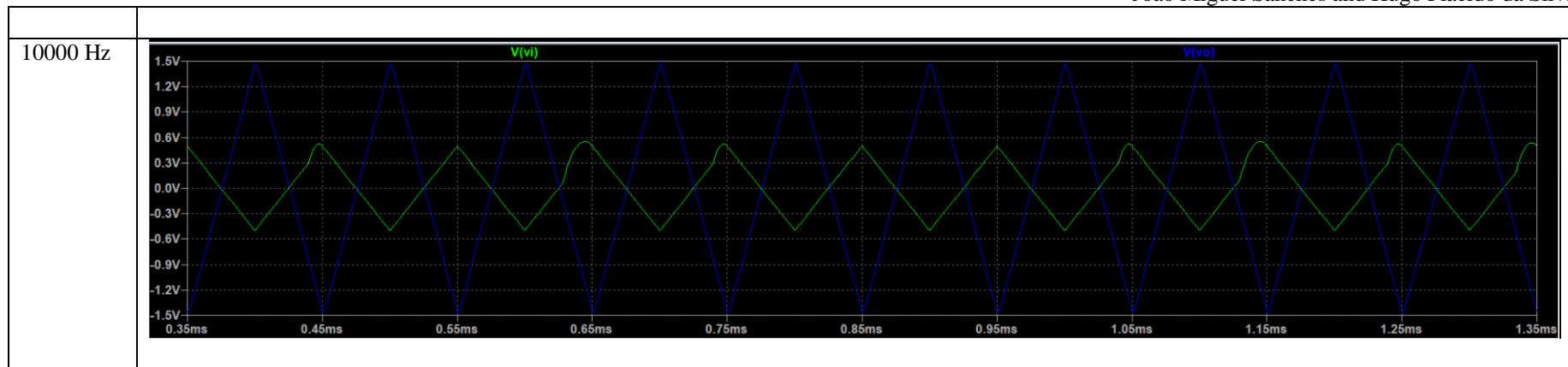








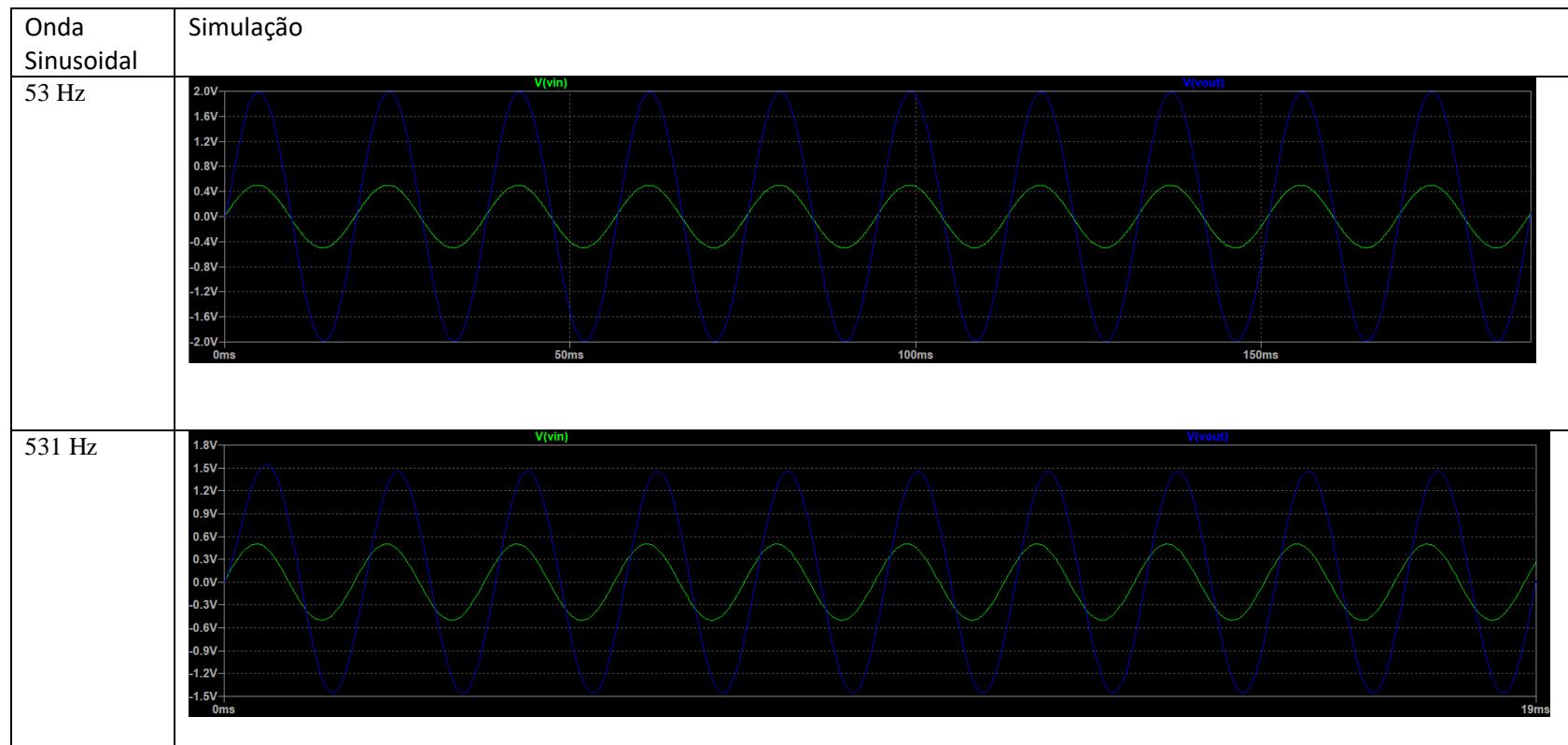


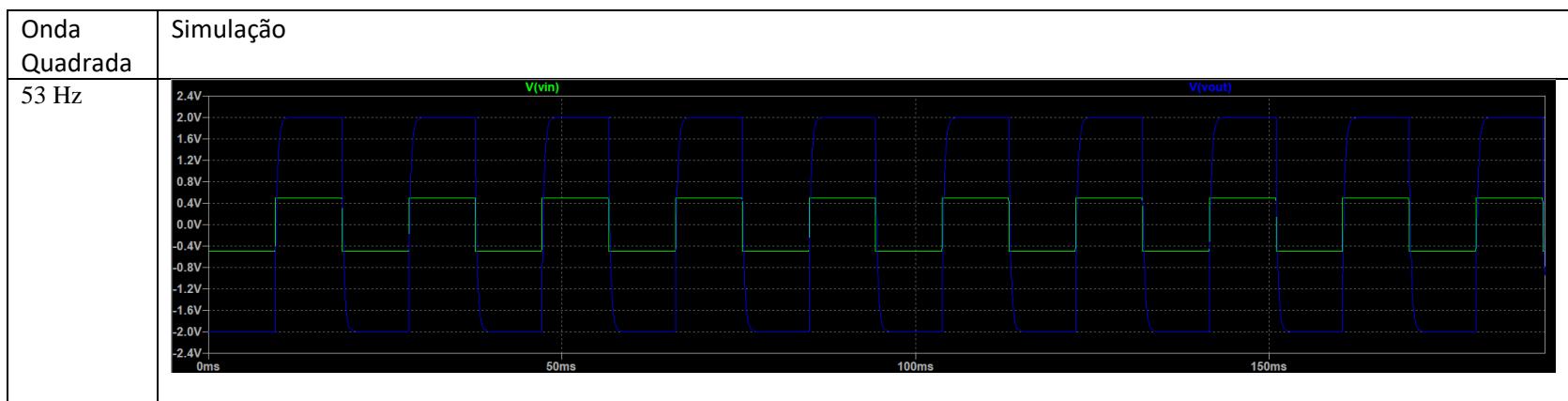
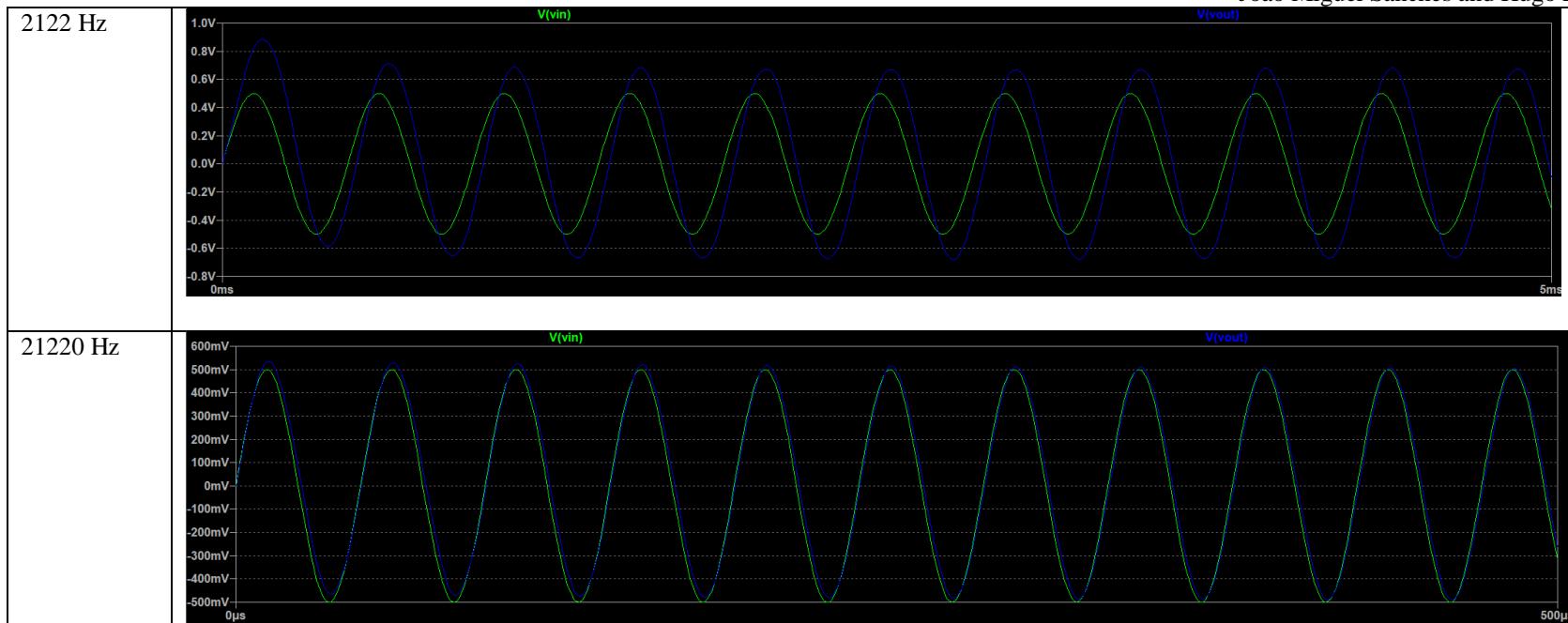


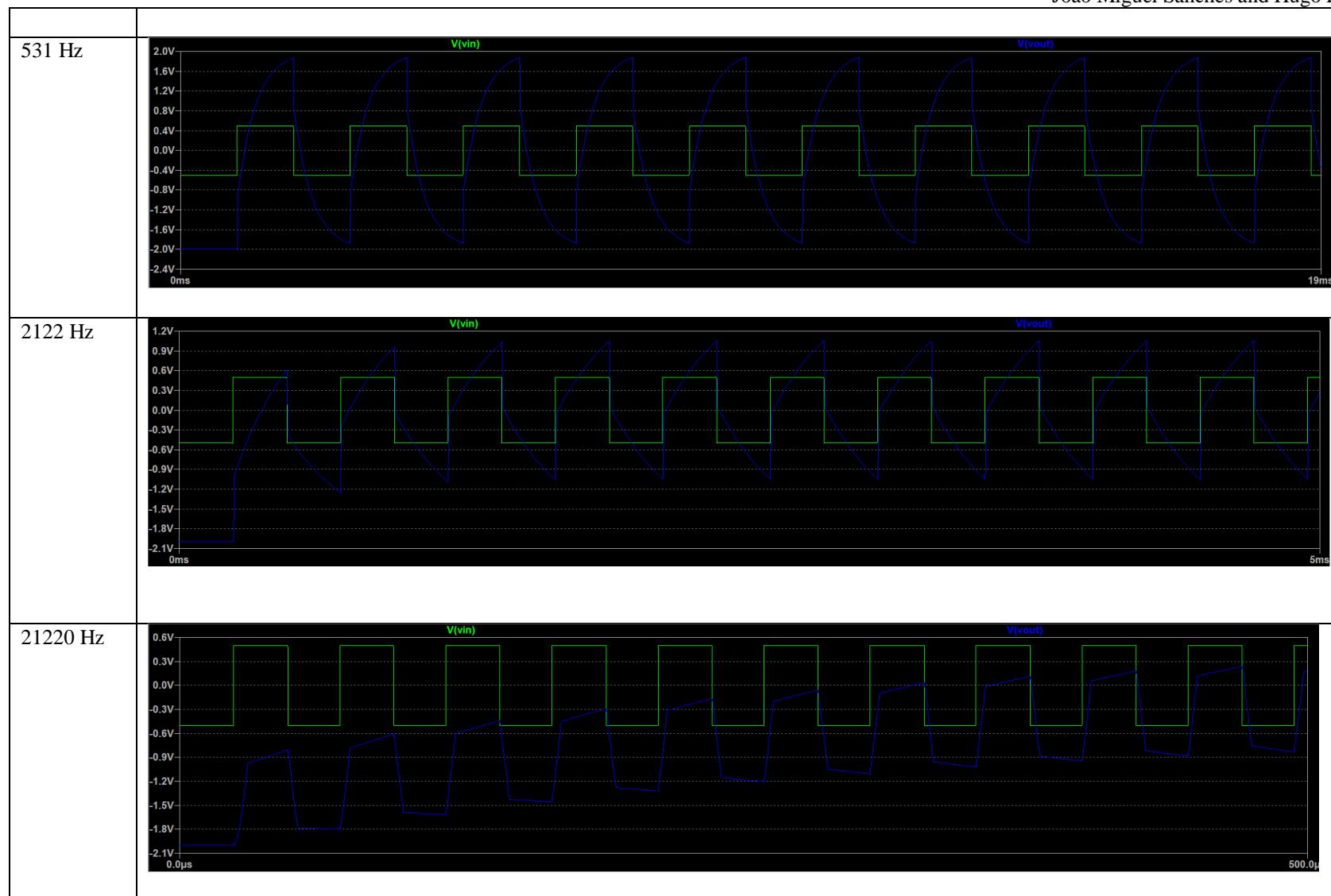
Analisando os gráficos obtidos, para uma montagem sem condensador está-se efetivamente a impor o regime DC (comportamento independente da frequência do sinal à entrada), sendo isso evidenciado pelo ganho constante de -3, ou seja, as ondas de saída encontram-se amplificadas por um fator de 3, com a sua polaridade invertida. Adicionalmente, não foi verificado qualquer desfasamento, novamente devido ao facto de se estar em regime DC. Note-se que, contudo, devido a características inerentes ao AmpOp, o formato esperado das ondas (particularmente as ondas triangulares e quadradas) é distorcido para frequências elevadas, tendo-se verificado para a frequência de $f = 10\text{kohm}$. Idealmente, uma variação instantânea do sinal à entrada traduzir-se-ia numa variação instantânea no sinal à saída. O simulador efetivamente simula um modelo de um AmpOp real, sujeito a limitações, não tendo uma taxa de variação infinita, refletindo-se mais evidentemente para frequências mais elevadas.

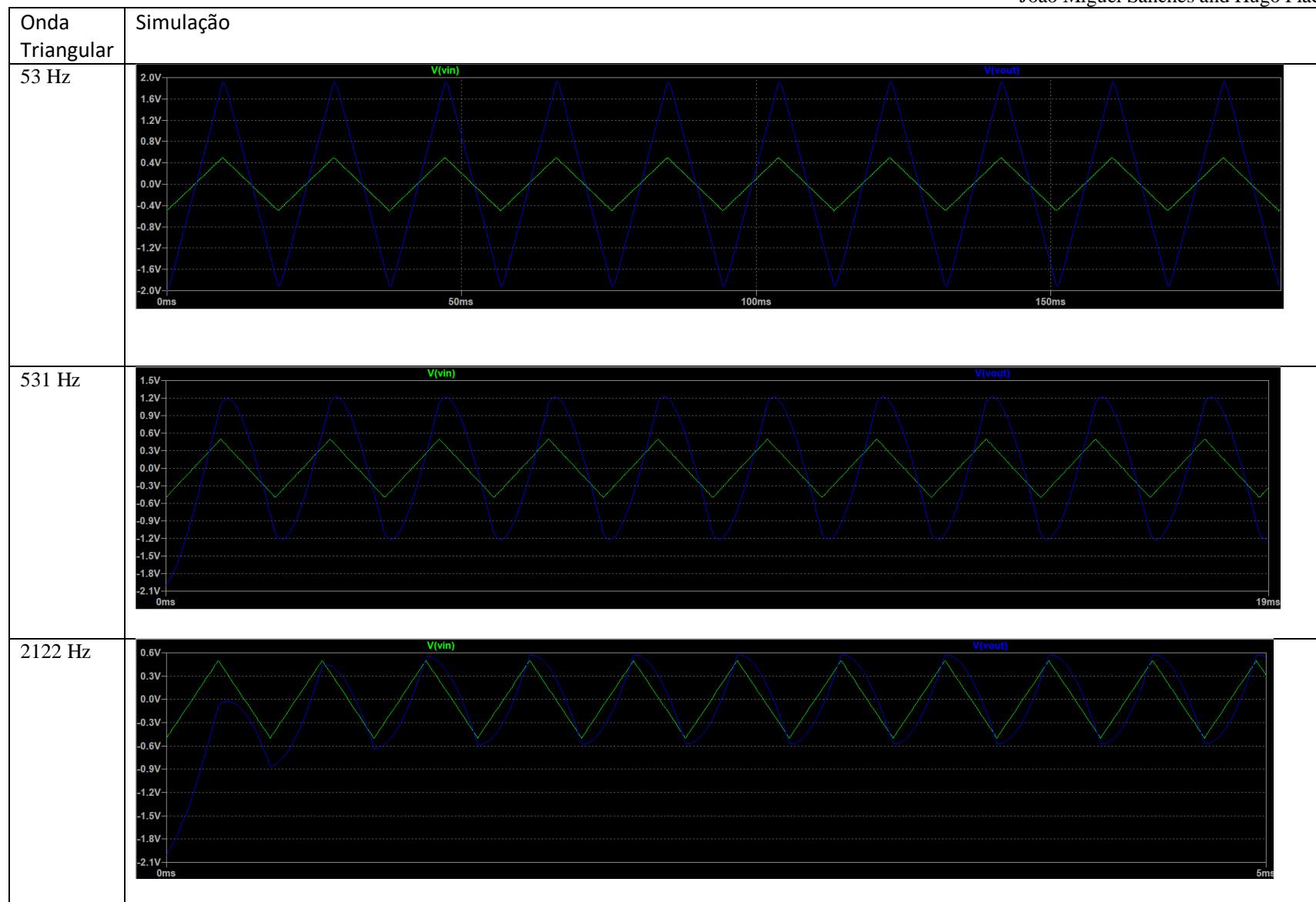
Por último, quanto ao ruído aplicado à entrada, verificou-se a sua amplificação e inversão por um fator de -3, como esperado, visto o circuito em causa estar em regime DC.

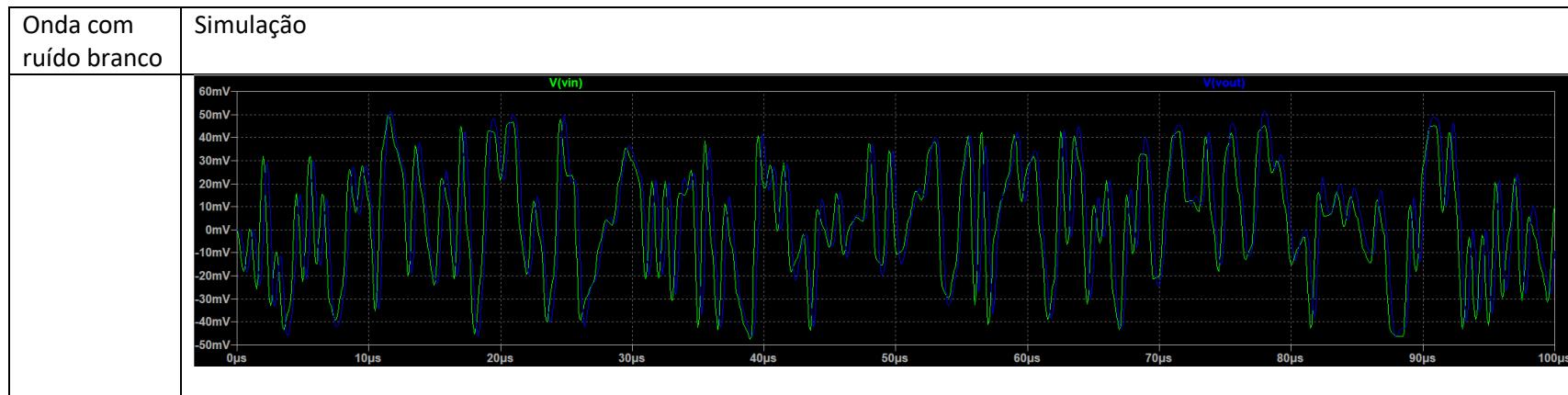
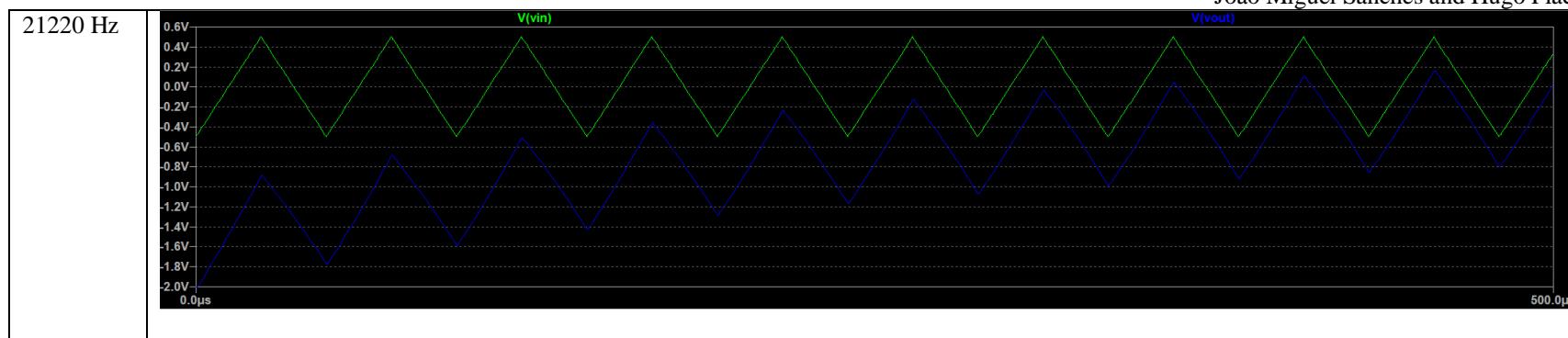
➤ não inverter c\ condensador











Analisando os gráficos obtidos, as características do circuito referidas no exercício 1 são verificadas, nomeadamente de que o circuito em causa é um filtro passa-baixo, pelo que, para frequências f inferiores a $f_p = 531$ Hz, o sinal de saída encontra-se amplificado pelo ganho em regime DC de 4, tendo-se constatado isso para a frequência testada de $f = 53$ Hz. Um decaimento de -20 dB/dec após f_p é esperado, sendo

que a partir do zero, localizado em $f_z = 2122$ Hz, o ganho passa a ser constante, visto que o pólo e o zero contribuem com +20 dB/dec e -20 dB/dec, respetivamente.

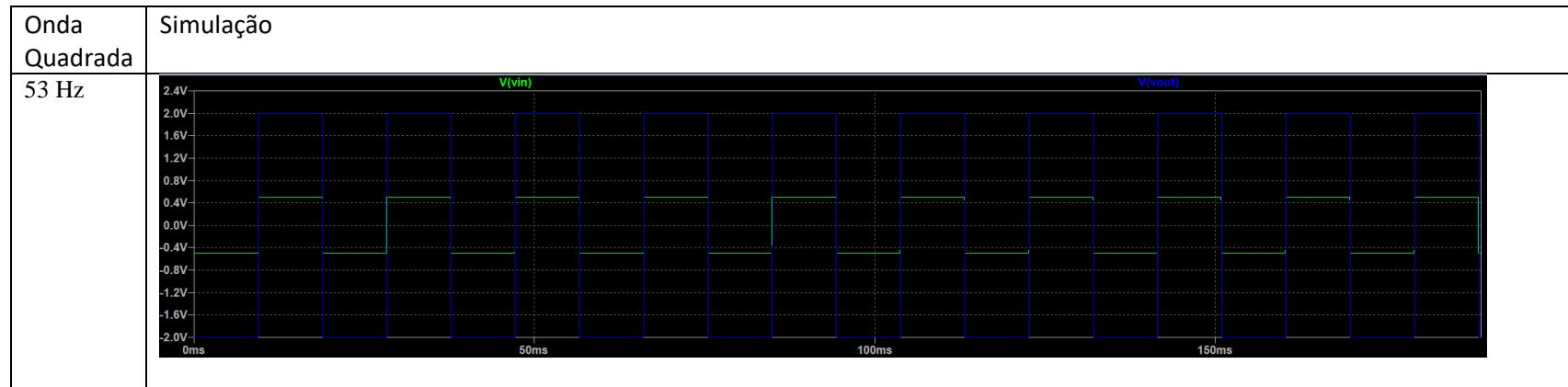
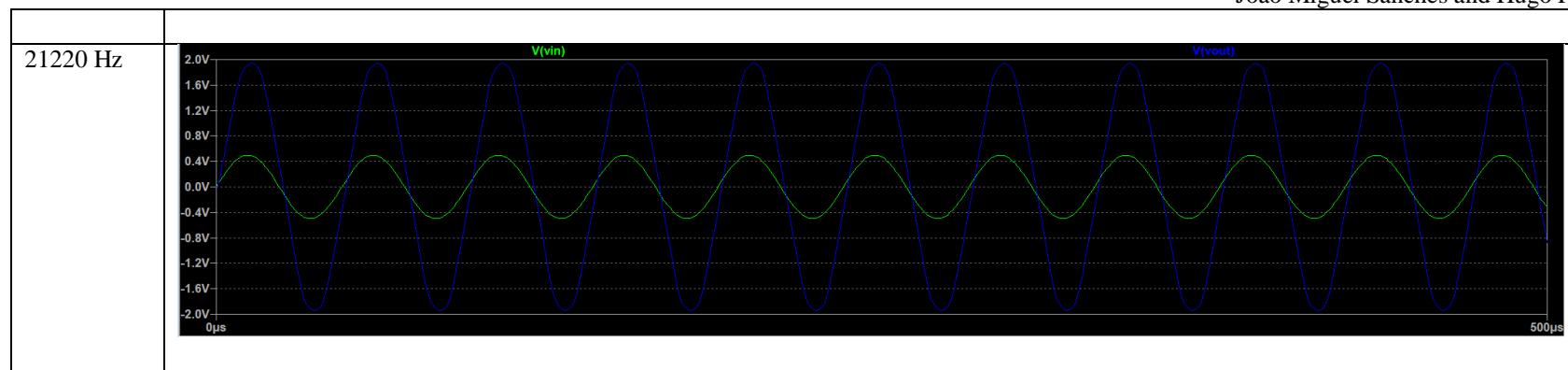
Quanto à fase, um desfasamento de -45° é verificado para a frequência do pólo f_p (teoricamente esperado), sendo que a partir do zero um desfasamento de $+45^\circ$ é introduzido, revertendo-se para a fase original, isto é, os sinais deixam de estar desfasados para $f > f_z$. Deste modo, para frequências $f > f_z$, tendo sido a testada de $f = 21220$ Hz, o sinal de saída apresentará uma menor amplitude do que o sinal à entrada (em virtude do decaimento de -20 dB/dec introduzido pelo polo antes do zero, sendo que a partir deste último o ganho é mantido constante) e não desfasado.

Relativamente ao formato das ondas, a natureza integradora do circuito continua a manifestar-se, como esperado, embora tenham-se observado algumas discrepâncias. Para as ondas triangular e quadrada de frequências entre $f_p = 531$ Hz e $f_z = 2122$ Hz, a onda de saída aproxima-se do formato esperado produzido pela integração do sinal à entrada (ondas de saída com formato de parábola e triangular para ondas de entrada triangular e quadrada, respetivamente), em que as frequências elevadas associadas às variações abruptas do sinal são atenuadas pelo passa-baixo. Contudo, quando a frequência da onda é superior a f_z (caso testado de 21220 Hz), a frequência fundamental da onda e as suas harmónicas ímpares são atenuadas segundo a mesma magnitude, preservando-se o formato original da onda à saída.

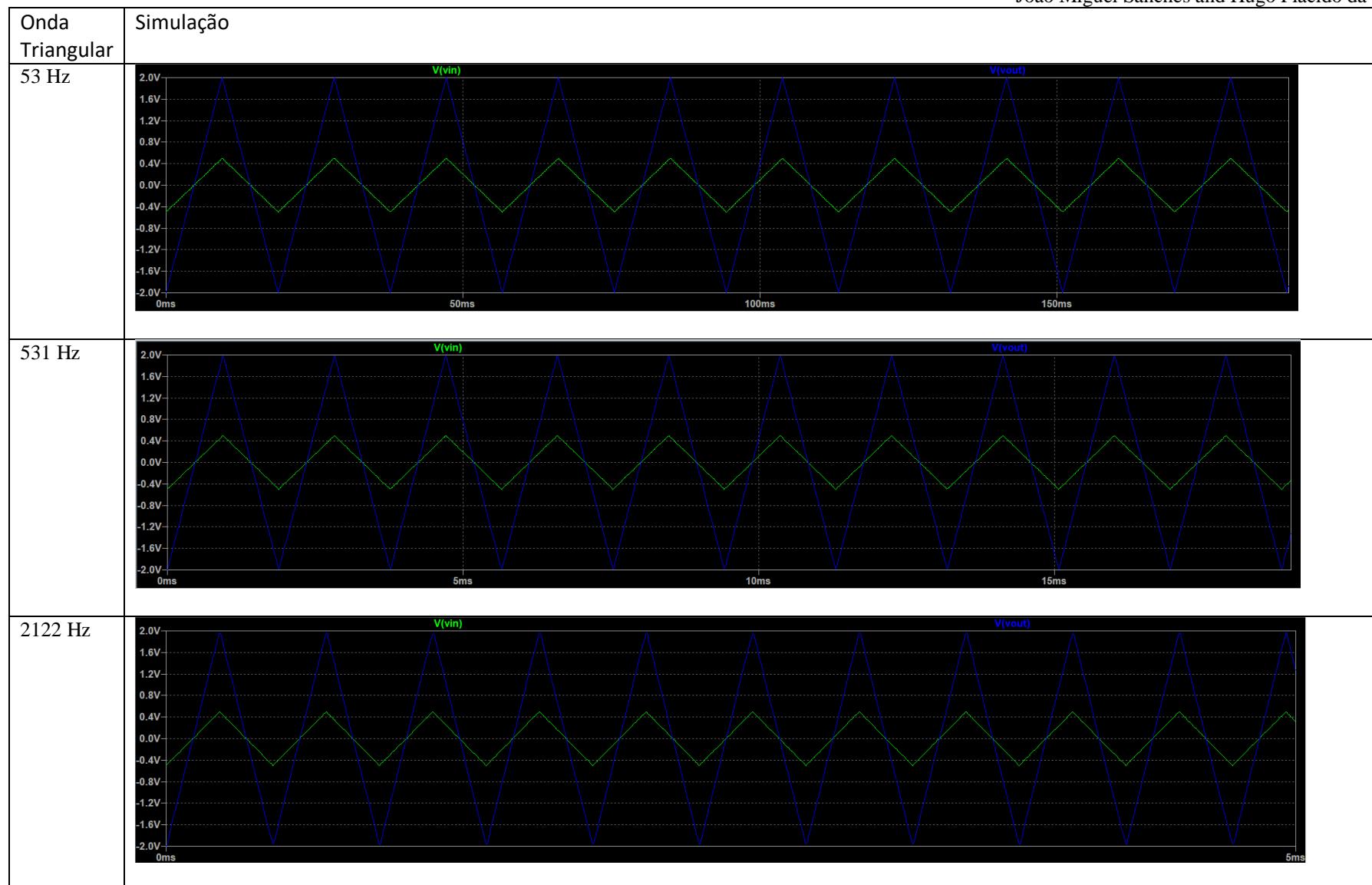
Quanto à situação em que é aplicado ruído à entrada, devido ao facto de conter elementos de elevada frequência, o circuito funciona com ganho aproximadamente unitário (frequências superiores a f_z), pelo que o sinal à saída é aproximadamente igual ao sinal à entrada.

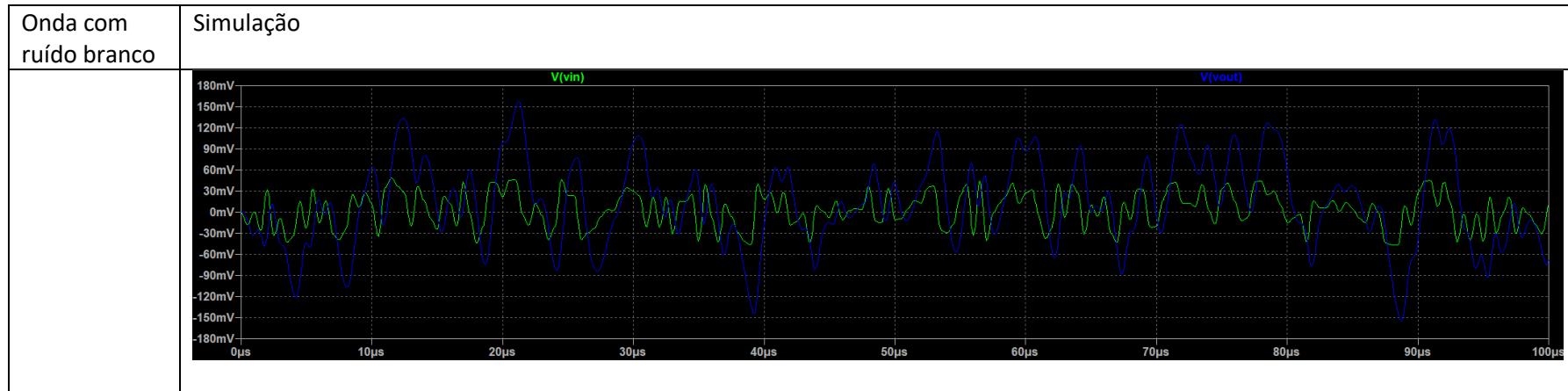
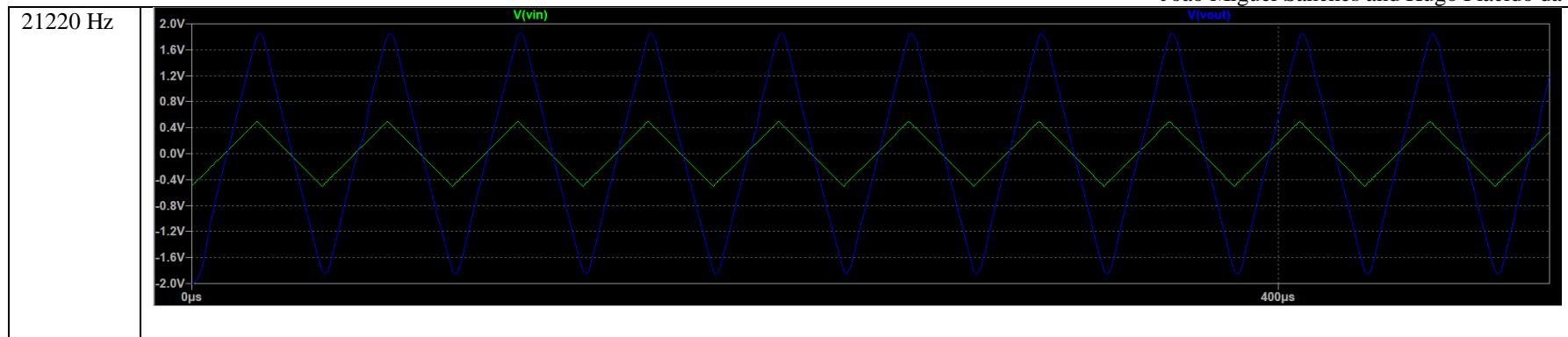
➤ não inverSOR s\ condensador











As mesmas conclusões que foram retiradas para a montagem do amplificador operacional inversor sem condensador aplicam-se para esta montagem, à exceção de que o ganho constante (comportamento independente da frequência do sinal à entrada, impondo-se o regime DC) é positivo, com valor de 4. Disto resulta que, para todas as frequências testadas, o sinal à saída encontra-se amplificado por um fator de 4,

tendo a mesma fase. Deste modo, o ruído encontra-se amplificado, como esperado. Note-se que as discrepâncias observadas são explicadas da mesma forma que exposto anteriormente.

3. Neste exercício são calculadas as impedâncias de entrada e de saída respetivas a cada um dos circuitos, com recurso ao teorema de Thévenin, em que da perspetiva dos terminais de entrada e de saída, respetivamente, se considera as fontes independentes em curto circuito. Para isto, tem-se em conta o modelo ideal do AmpOp apresentado nas notas iniciais deste relatório (Figura 4), aplicando-o para o cálculo da impedância de entrada. Para o cálculo da impedância de saída, considera-se o modelo interno do AmpOp (figura 3), em que as correntes i_+ e i_- são não nulas, com as tensões v_+ e v_- serem diferentes, resultando um ganho finito.

➤ Circuito do amplificador inverter

Primeiramente calculando a impedância de entrada, considere-se o circuito equivalente ilustrado na figura 11.

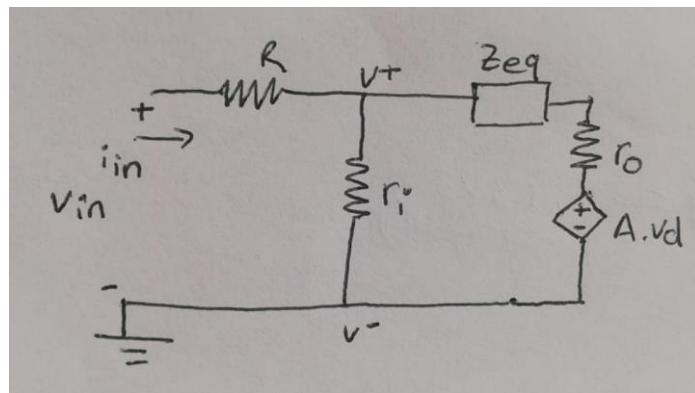


Figura 11 – Circuito equivalente para o cálculo da impedância de entrada do circuito inverter, com $Z_{eq} = R_f \parallel Z_c$.

Com base nas características do AmpOp ideal descritas pela expressão 2, obtém-se a expressão 10 para a impedância de entrada Z_{in} vista dos terminais v_{in} e do ground.

$$Z_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{v_{in}}{\frac{(v_{in} - v_-)}{R}} = R \quad \text{Expressão 10}$$

Já para o cálculo da impedância de saída Z_{out} , considere-se o circuito equivalente ilustrado na figura 12.

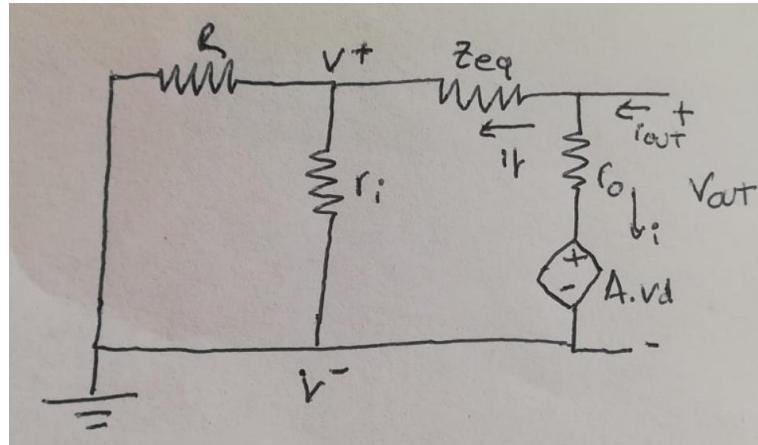


Figura 12 - Circuito equivalente para o cálculo da impedância de saída do circuito inversor, com $Z_{eq} = R_f \parallel Z_c$.

Aplicando a lei das malhas à malha direita, obtém-se a expressão 11.

$$v_o = Av_d + ir_o = Av_d + (i_f + i_{ri} + i_o)r_o \quad \text{Expressão 11}$$

Tal como já referido anteriormente, a resistência de entrada r_i do modelo interno do AmpOp assume uma ordem de grandeza significativamente superior à dos outros componentes, aproximando-se do modelo ideal, pelo que pode ser desprezada do circuito, substituindo-a por um circuito aberto. Enquanto consequência imediata, tem-se que $i_f = \frac{v_d}{R}$, com $v_d = -\frac{R}{R+Z_{eq}}v_o$ a corresponder à voltagem de saída do divisor de tensão constituído por R e Z_{eq} . Tendo em conta estas considerações, tem-se que:

$$\begin{aligned} v_o &= Av_d + (i_f + i_o)r_o = Av_d + \left(\frac{v_d}{R} + i_o\right)r_o = -A\left(\frac{R}{R+Z_{eq}}\right)v_o - \frac{r_o}{R}\left(\frac{R}{R+Z_{eq}}\right)v_o + i_o r_o = \\ &= v_o \left[A\frac{R}{R+Z_{eq}} + \frac{r_o}{R+Z_{eq}} + 1 \right] = i_o r_o \Rightarrow \frac{v_o}{i_o} = Z_o = \frac{r_o}{A\frac{R}{R+Z_{eq}} + \frac{r_o}{R+Z_{eq}} + 1} \cong \frac{r_o(R+Z_{eq})}{AR} \end{aligned}$$

A aproximação feita deve-se ao facto da parcela do denominador que contém o ganho A ser muito superior às restantes, com A podendo atingir o valor de 10^6 . Comparando-se Z_i e Z_o ,

verifica-se que, de facto, Z_o é algumas ordens de grandeza inferior, razão pela qual é válido aproximar-se $Z_o \approx 0$, obtendo-se uma maximização da potência do sistema.

➤ Circuito do amplificador não-inversor

Para o cálculo da impedância de entrada Z_{in} , considere-se o circuito equivalente ilustrado na Figura 13.

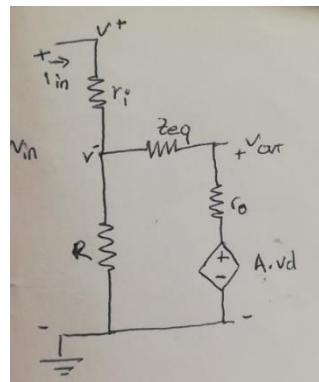


Figura 13 - Circuito equivalente para o cálculo da impedância de entrada do circuito não-inversor, com $Z_{eq} = R_f \parallel Z_c$.

Visto que das condições impostas pelo AmpOp ideal se tem $i_+ = i_- = 0$, e sendo $Z_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}}$, com v_{in} a assumir um valor finito, tem-se que $Z_{in} = \frac{v_{in}}{0} = \infty$. Num contexto real, Z_{in} é finita, mas assume uma ordem de grandeza significativamente superior à dos restantes componentes, validando-se a aproximação.

Já para o cálculo da impedância de saída Z_o , considere-se o circuito equivalente ilustrado na figura 14.

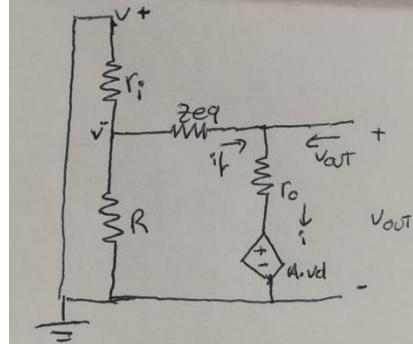


Figura 14 - Circuito equivalente para o cálculo da impedância de saída do circuito não-inversor, com $Z_{eq} = R_f \parallel Z_c$.

Novamente aplicando a lei das malhas à malha da direita, obtém-se a mesma expressão 11 apresentada para o circuito inversor, novamente considerando-se $r_i \rightarrow \infty$. Mais uma vez, v_d é a tensão de saída do divisor de tensão constituído por Z_{eq} e R , pelo que $v_d = -\frac{R}{R+Z_{eq}}v_o$, sendo que ao substituir-se na expressão 11, volta-se, obviamente, a obter a mesma impedância de saída, dada por $Z_o \cong \frac{r_o(R+Z_{eq})}{AR}$.

4. Considerando o firmware desenvolvido no trabalho laboratorial anterior, tem-se uma saída digital enquanto gerador de onda quadrada, por default com amplitudes de [0; Vcc], sendo que para alterar para amplitudes de [0;Vcc/4] conjugou-se com um divisor de tensão. Como derivado em relatórios passados, a equação do divisor de tensão é dada pela expressão 12. Como tal, de modo a que a amplitude da onda quadrada seja de [0;Vcc/4], pretende-se que $V_{in} = V_{cc}$ e $R2/(R1+R2) = \frac{1}{4}$, pelo que estabelecendo $R2 = 1$ kohm, tem-se que $R1 = 3$ kohm.

$$V_{out} = \frac{R2}{R1 + R2} \times V_{in} \quad \text{Expressão 12}$$

Note-se que poderíamos ter utilizado um potenciômetro para controlar a amplitude da onda quadrada gerada, ao invés da voltagem fixa imposta pelo divisor de tensão. Para o efeito deste exercício, pretendeu-se ter uma onda quadrada bem caracterizada enquanto input para o amplificador operacional.

Para cronometrar o tempo de execução do programa, recorreu-se à função `micros()`. Os sinais quantizados V_i e V_o foram transmitidos enquanto séries temporais para as entradas analógicas A0 e A1 (mimetizam um osciloscópio), respetivamente, estabelecendo-se uma baud rate de 1M bits/s, de forma a não interferir no streaming dos dados e, consequentemente, na performance do sistema. As montagens encontram-se ilustradas nas Figuras 15 e 16, para o Seeeduino Nano e no TinkerCad, respetivamente. No Anexo I, disponibiliza-se o código desenvolvido para este exercício, incorporando-se os comentários considerados necessários. Note-se que, os resultados experimentais obtidos com o Seeeduino Nano não serão analisados visto que não correspondiam ao esperado, devendo-se a uma falha desconhecida do sistema construído.

Para este exercício, apenas se simulou uma onda quadrada de frequência 20 Hz, assim como os dados fornecidos pelo professor, com uma onda quadrada de frequência desconhecida. Pretende-se a partir dos dados derivar esta frequência. Para isso, realiza-se a *Discrete Fourier Transform*, a qual considera um sinal de N amostras e assume uma extensão periódica do sinal ao infinito em ambas as direções, decompondo o sinal periódico numa soma de N componentes de frequência discreta. Como tal, recorreu-se ao matlab, aplicando-se o algoritmo da *Fast Fourier transform* (FFT), sendo que o código desenvolvido para este fim se encontra no anexo II. Note-se que, para os dados por nós gerados, a frequência de amostragem foi de 1060 Hz, sendo que calculando a diferença entre amostras consecutivas dos dados fornecidos pelo professor obteve-se $10000 \mu\text{s} \rightarrow fs = \frac{1}{10000 \times 10^{-6}} = 100 \text{ Hz}$. As frequências de amostragem devem garantir que não ocorra aliasing, sendo que para o caso em que ambas as frequências de amostragem e da onda são conhecidas (dados gerados por nós), a condição $f < fs/2$ verifica-se (não ocorre aliasing). Note-se que idealmente, pretendia-se testar as mesmas frequências aplicadas no exercício 2, contudo, o simulador não permitiu atingir a frequência de amostragem que necessitávamos para amostrar as ondas que pretendíamos adquirir, não permitindo caracterizar bem o circuito neste regime de frequências mais elevadas. Utilizando um osciloscópio, esta limitação seria ultrapassada.

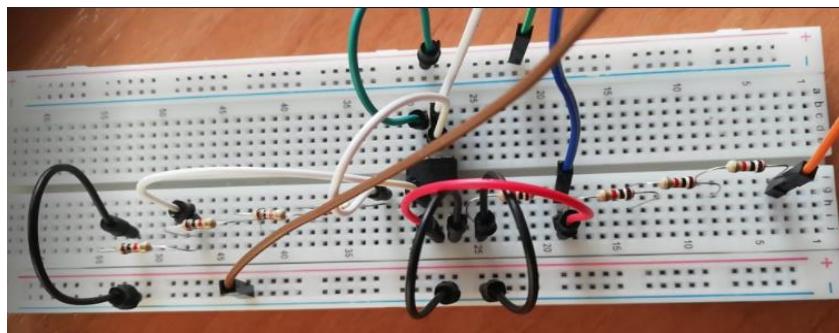


Figura 15 – Montagem da configuração não-inversora sem condensador com recurso ao Seeeduino Nano. Para obter as resistências de 3kohm, conjugaram-se 3 resistências em série de 1kohm, obtendo-se num total 8 resistências no circuito. Os cabos a preto estabelecem a ligação ao ground, posteriormente conectados pelo cabo castanho ao ground do seeeduino Nano. O Cabo vermelho liga a saída do divisor de tensão ao terminal positivo do AmpOp. O cabo a laranja estabelece a ligação com o pin digital de saída 2, funcionando como gerador de ondas quadradas. O cabo azul estabelecer a ligação com a entrada A0, de modo a registar os valores V_i . Os cabos verdes ligam o $V+=V_{cc}$. Os cabos brancos estabelecem a ligação entre o terminal negativo do AmpOp e as resistências de 1k ohm e 3k ohm, assim como a ligação entre a resistência de 3k ohm e o terminal de saída, estabelecendo a ligação com a entrada analógica A1, de modo a registar os valores V_o .

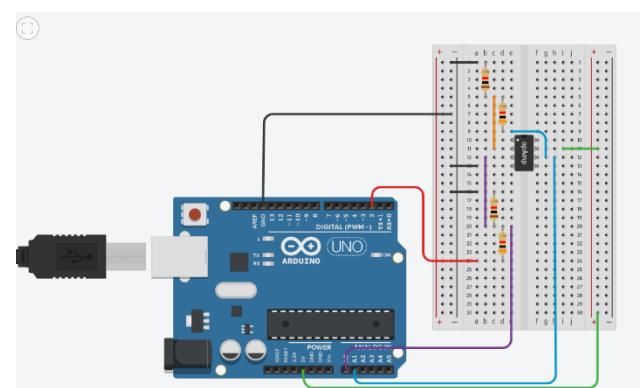


Figura 16 – Montagem da configuração não-inversora sem condensador, com recurso ao simulador do Tinkercad.

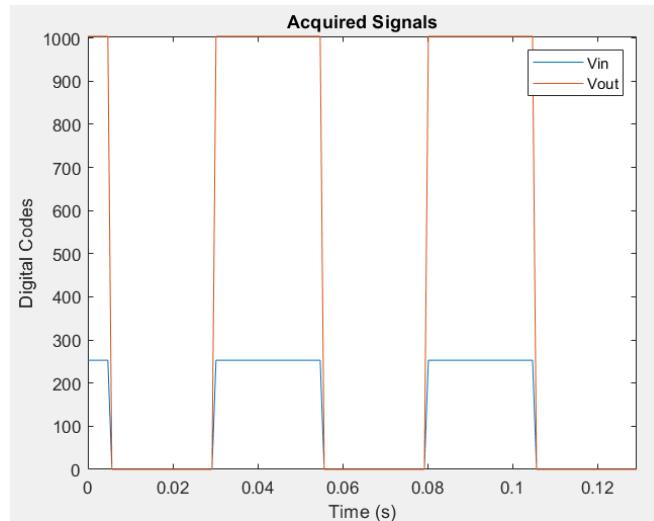


Figura 17 – Sinais de entrada e de saída amostrados a 1060 Hz, com a onda quadrada de entrada de 20 Hz.

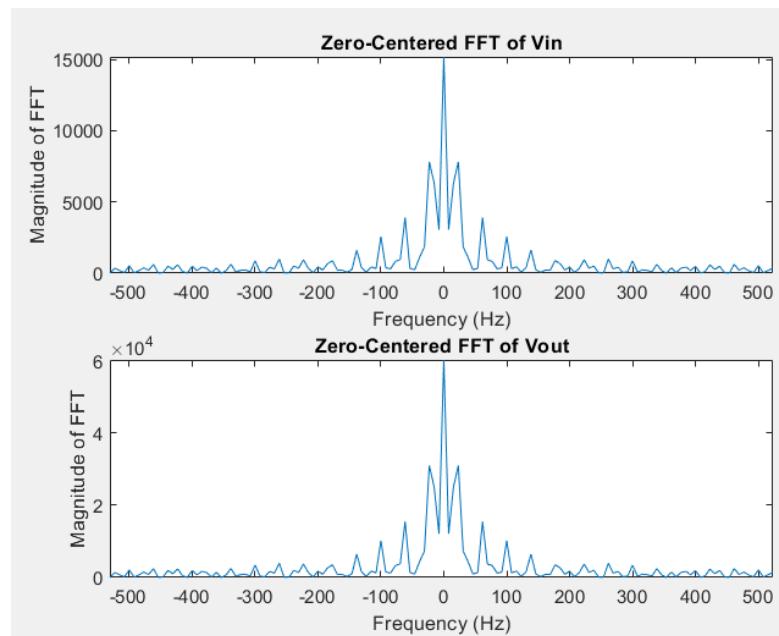


Figura 18 – Magnitude da FFT dos sinais de entrada e de saída, centrando-se a componente DC em f = 0Hz.

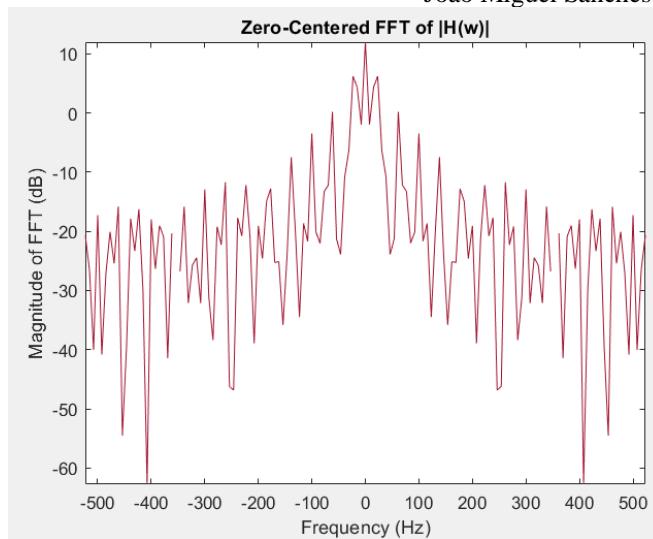


Figura 19 – Magnitude da FFT (em dB) da razão entre os sinais de saída e de entrada, centrando-se a componente DC em f = 0Hz.

Ora, através das conclusões derivadas no exercício 2, tem-se que a resposta do circuito deverá de ser independente da frequência, pelo que para qualquer frequência testada, o sinal de saída será sempre amplificado pelo fator dado pelo ganho em regime DC (=4), estando os dois sinais sempre em fase. De facto, os códigos digitais máximos atribuídos a V_i e V_o são, respetivamente, 253 e 1004 (Figura 17), pelo que através da expressão 13, tal equivale a 1.24 V e 4.90 V, respetivamente. Os códigos mínimos são, como esperado, 0 (=0 V). As pequenas discrepâncias obtidas podem dever-se ao facto de o circuito nunca conseguir chegar ao seu valor máximo, daí o código digital máximo atribuído a V_o seja 1004 e não 253×4 . Assim, calculando o ganho obtido, tem-se que corresponde a $\frac{4.9}{1.24} = 3.95 \approx 4$ (ganho teórico). Quanto à FFT de ambos os sinais de entrada e saída (Figura 18), tem-se que a componente DC na frequência $f = 0$ Hz encontra-se presente, sendo que através do $|H(w)|$ (Figura 19) verificou-se que correspondia a sensivelmente $20 \times \log(3.95) = 11.93$ dB. Por outro lado, outros picos são visualizados, distinguindo-se com mais clareza os picos positivos sensivelmente a 20 Hz, 60 Hz, 100 Hz e 140 Hz (note-se que a DFT de cada função seno corresponde a dois deltas dirac para a frequência fundamental f e a sua simétrica $-f$).

$$Voltagem = \frac{valorADC \times Vcc}{2^{10}} \quad \text{Expressão 13}$$

De facto, a expansão da série de Fourier de uma onda quadrada corresponde à soma de senos com múltiplos inteiros ímpares da frequência fundamental, tendo-se identificado a frequência

fundamental de 20 Hz e as suas 3^a, 5^a e 7^a harmónicas. Ao contrário do que seria previsto pela *Continuous Fourier Transform*, os picos obtidos não correspondem a delta diracs. Isso deve-se ao facto de o suporte computacional finito apenas permitir uma representação finita dos sinais, correspondendo no domínio temporal à multiplicação do sinal original pela janela retangular, introduzindo descontinuidades repentinas no início e no final do sinal. No domínio espectral, isto equivale a convolver o espectro do sinal original com o espectro da janela retangular. Uma vez que o espectro da janela retangular é a função $\text{sinc}(x)$, $\sin(x)/x$ lobes são observados ao redor de cada componente espectral original. Este fenómeno é designado spectral leakage.

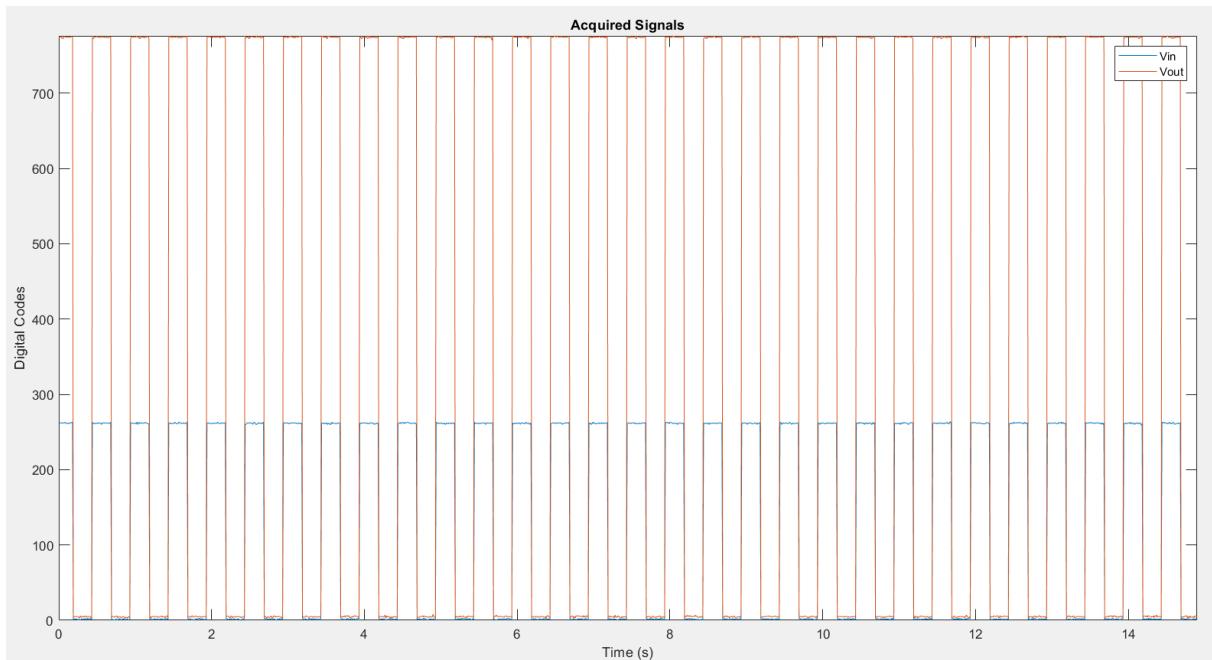


Figura 20 – Sinais de entrada e de saída amostrados a 100 Hz, com uma onda quadrada de frequência desconhecida.

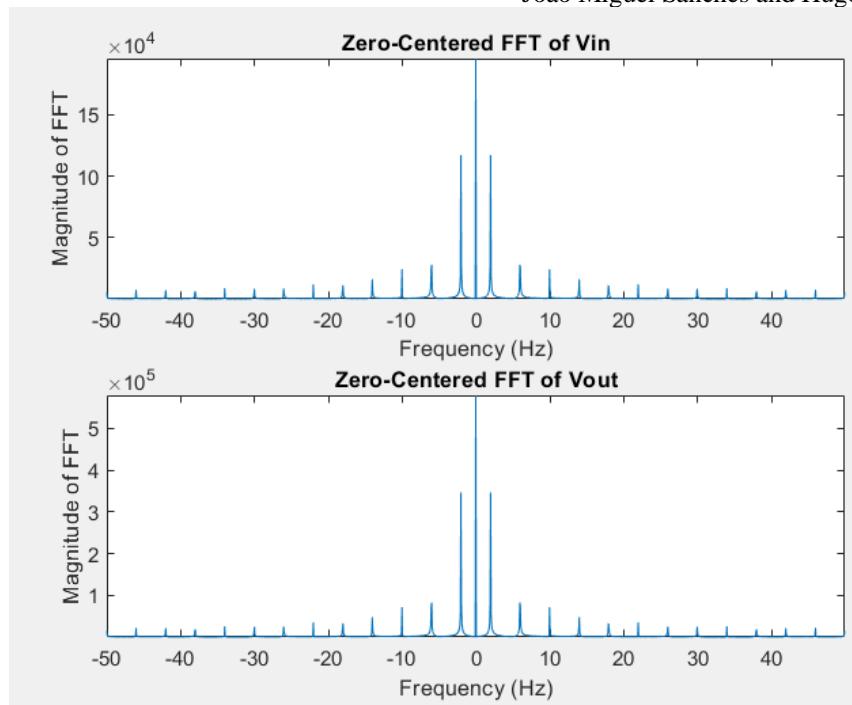


Figura 21 – Magnitude da FFT dos sinais de entrada e de saída, centrando-se a componente DC em f = 0Hz.

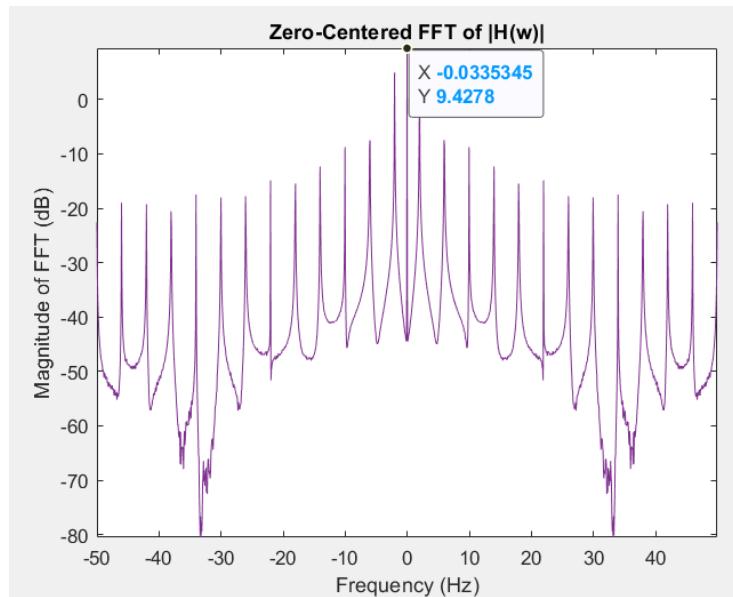


Figura 22 – Magnitude da FFT (em dB) da razão entre os sinais de saída e de entrada, centrando-se a componente DC em f = 0Hz.

Analizando os dados facultados pelo professor (Figuras 20, 21 e 22), as observações anteriormente reportadas aplicam-se também para este caso, observando-se agora todas as harmónicas da frequência fundamental $f \approx 2\text{Hz}$ inferiores a $f_s/2 = 50\text{ Hz}$, isto é, todas as

harmónicas ímpares até à 23^a harmónica ($=46$ Hz). Deste modo, pode-se concluir que a frequência da onda quadrada gerada pelo professor foi de 2 Hz, indo de encontro ao número de amostras atribuída a cada período da onda ($N = 50$ amostras). Para um período de amostragem T_s de 0.01 s, cada período tem uma duração de $T = N \times T_s = 50 \times 0.01 = 0.5$ segundos $\Rightarrow f = 1/T = 2$ Hz. Note-se que, contrariamente ao que seria de esperar para a montagem deste circuito, com a tensão de saída amplificada por um fator de 4, neste caso o fator é inferior, refletindo-se na Figura 22, com o ganho DC a ser sensivelmente 9.4 dB \Rightarrow ganho $= 10^{\frac{9.4}{20}} = 2.95$. De facto, os códigos digitais máximos atribuídos à tensão de saída e de entrada rodam os valores de 775 e 263, respetivamente, com $775/263 = 2.95$.

5. Considerando a configuração não-inversora sem condensador e com $R_f = 0\Omega$, obtém-se o circuito ilustrado na Figura 23, sendo a sua montagem no TinkerCad ilustrada na Figura 24.

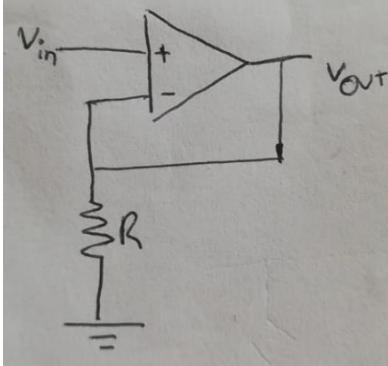


Figura 23 – Circuito da configuração não-inversora sem condensador e com $R_f = 0\Omega$ obtendo-se um seguidor de tensão.

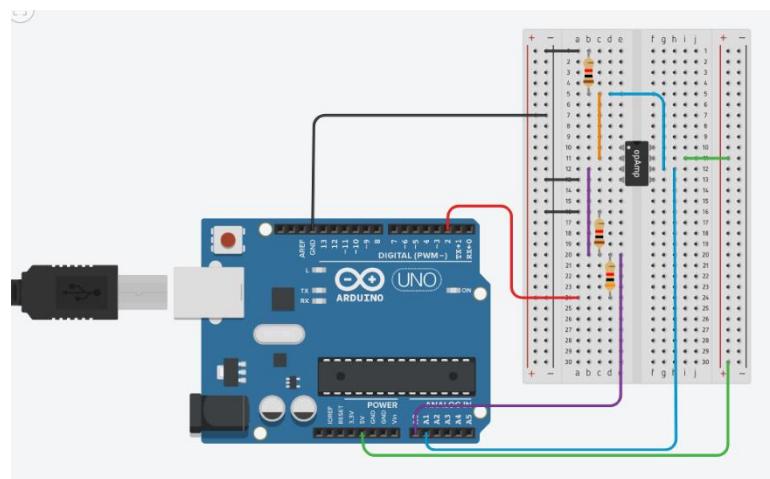


Figura 24 – Circuito da configuração não-inversora sem condensador e com $R_f = 0\Omega$, recorrendo-se ao TinkerCad.

Novamente, o circuito vai ser testado para a frequência de onda quadrada de 20 Hz, amostrada a 1060 Hz (Figuras 25, 26 e 27). Os dados facultados pelo professor serão também analisados (Figuras 28, 29 e 30).

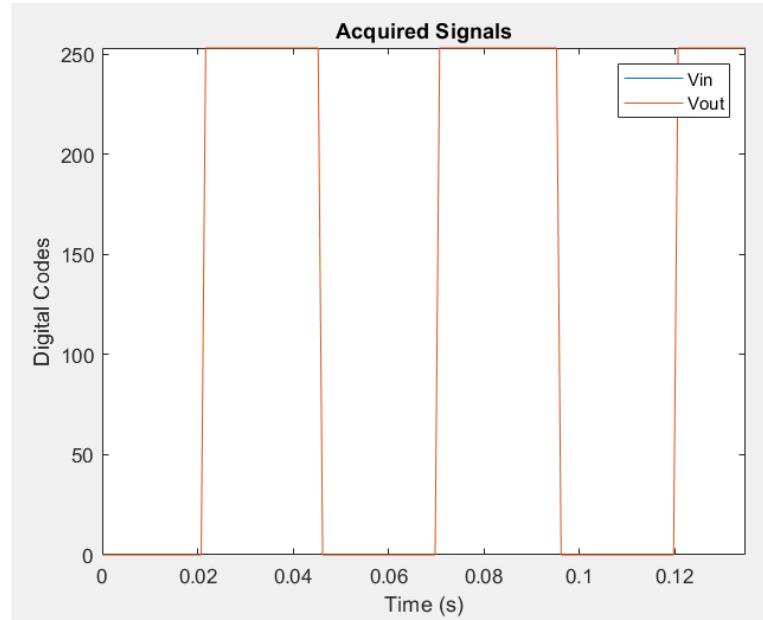


Figura 25 – Sinais de entrada e de saída amostrados a 1060 Hz, com a onda quadrada de entrada de 20 Hz.

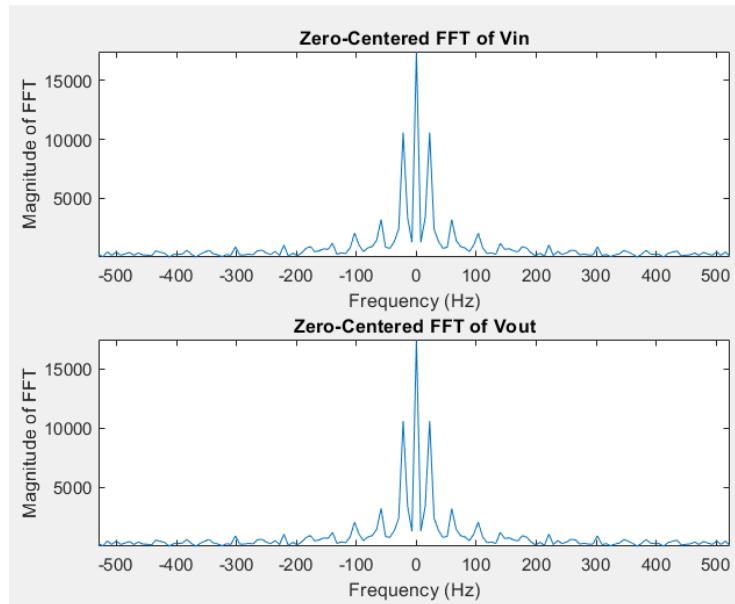


Figura 26 – Magnitude da FFT dos sinais de entrada e de saída, centrando-se a componente DC em $f = 0\text{Hz}$.

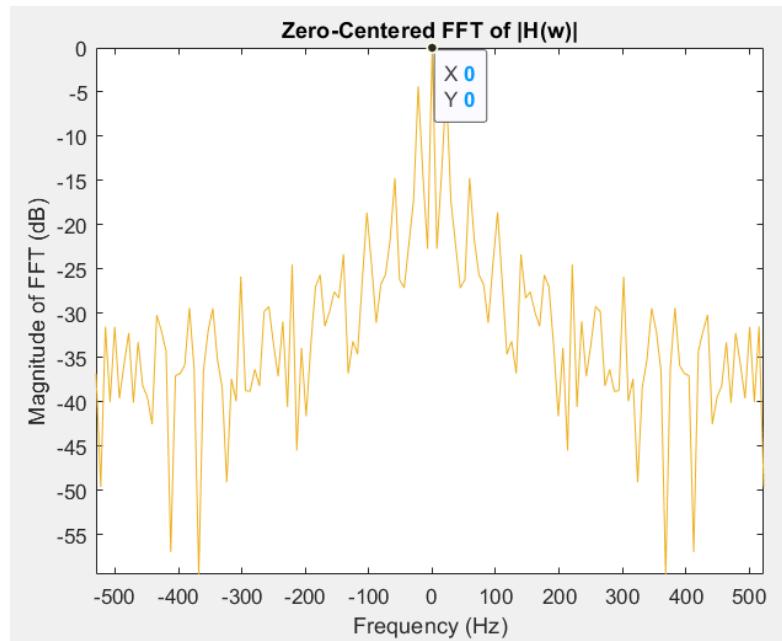


Figura 27 – Magnitude da FFT (em dB) da razão entre os sinais de saída e de entrada, centrando-se a componente DC em f = 0Hz.

Considerando as conclusões retiradas no exercício 4, aplicam-se também para este exercício, agora verificando-se que $v_{in} = v_{out}$, pelo que o ganho na componente de frequência DC (0Hz) é de 0 dB (=1). Considerando o modelo ideal do AmpOp, tem-se que $v_+ = v_- = v_{in}$. Visto a saída estabelecer ligação direta com o terminal v_- (curto circuito), tem-se que $v_o = v_i$, razão pela qual esta configuração é designada de seguidor de tensão, com a tensão à saída a ser igual à de entrada. Neste caso, o ganho é idealmente unitário, com o circuito a funcionar como um buffer que separa duas partes do circuito. Ao contrário deste, um divisor de tensão é tipicamente influenciado por outras partes do circuito que estão conectadas ao nó de saída. Contudo, o amplificador operacional como um seguidor de tensão permite desacoplar duas partes diferentes do circuito, pelo que a voltagem à saída do divisor não é influenciada ao que se encontra conectado à saída do AmpOp. Deste modo, o buffer é utilizado para se transferir um valor de tensão (por exemplo, referente à tensão de saída de um divisor de tensão) para um determinado circuito, uma vez que a impedância de saída é praticamente nula. No entanto, a impedância de entrada é elevada e, como o *ganho × largura de banda* = valor constante, um ganho unitário implicaria uma largura de banda próxima da máxima possível.

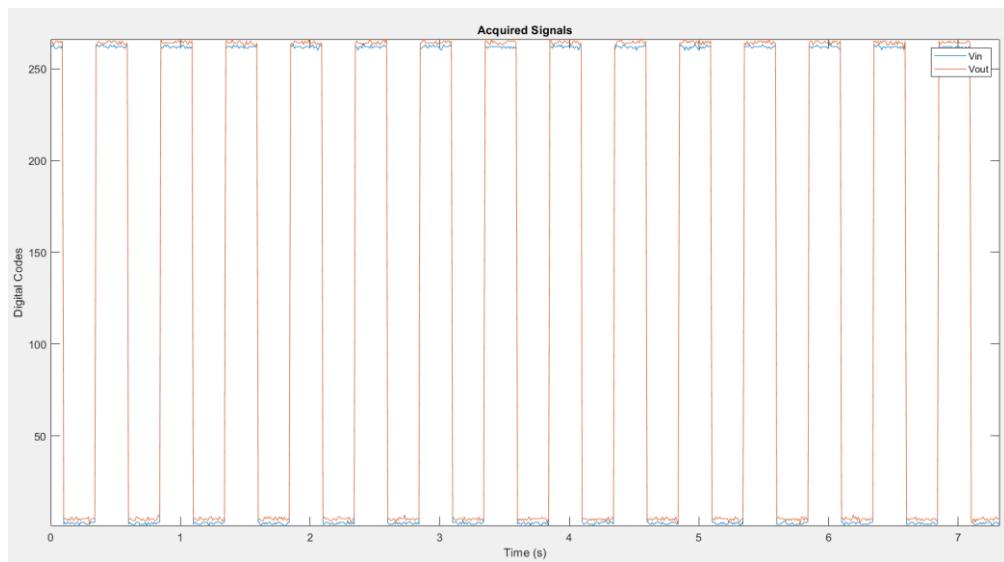


Figura 28 – Sinais de entrada e de saída amostrados a 100 Hz, com uma onda quadrada de frequência desconhecida.

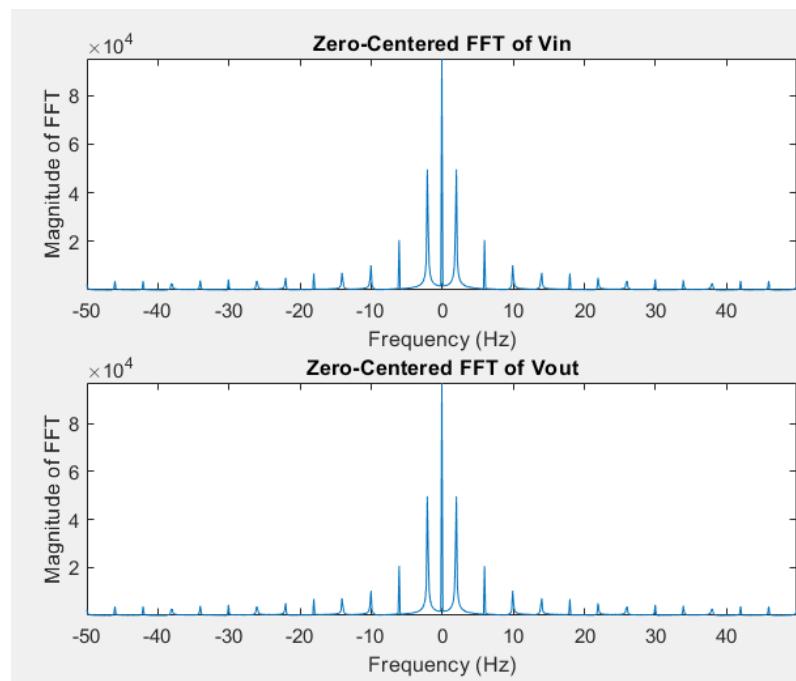


Figura 29 – Magnitude da FFT dos sinais de entrada e de saída, centrando-se a componente DC em f = 0Hz.

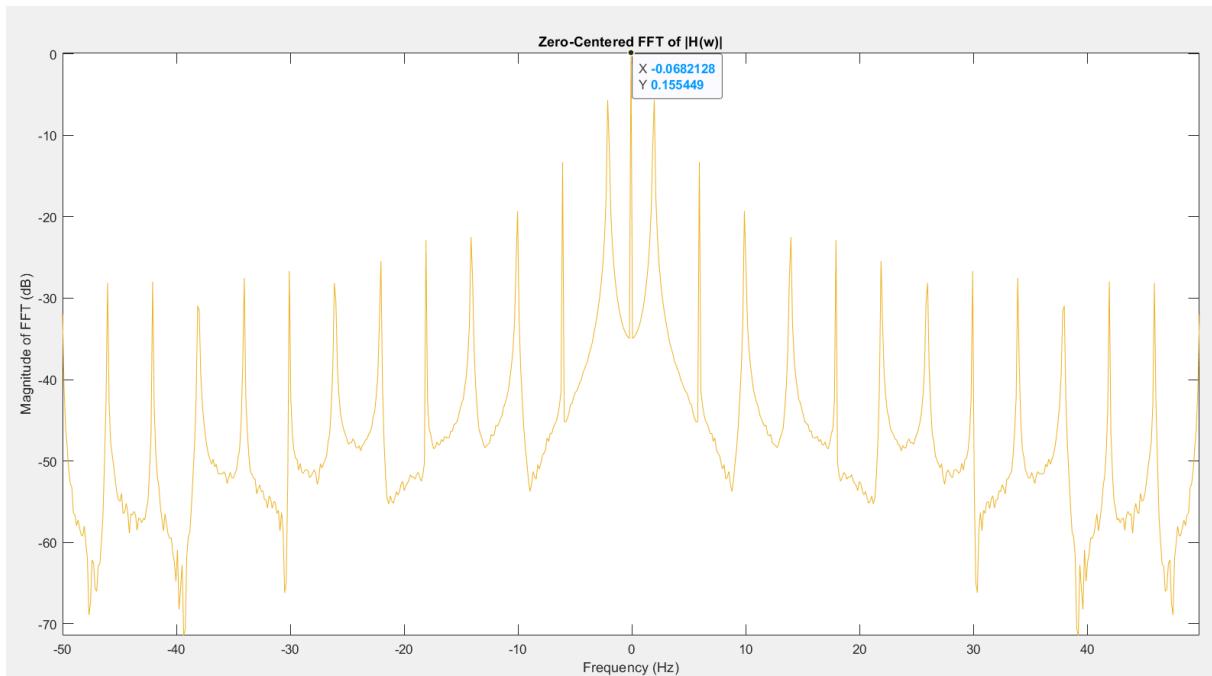


Figura 30 – Magnitude da FFT (em dB) da razão entre os sinais de saída e de entrada, centrando-se a componente DC em f = 0Hz.

Contrariamente ao obtido no simulador, o ganho obtido não foi de 0 dB, verificando-se que o sinal de saída se encontra de facto ligeiramente amplificado. De facto, em contexto experimental, o curto-circuito entre v_o e v_i é estabelecido por um fio condutor, o qual apresenta resistência finita e diferente de 0 ohm, pelo que pela expressão 6 do ganho em regime DC para a configuração não-inversora, tem-se que o ganho experimental pode ser na realidade superior a 1 ($R_f \neq 0$).

Anexos

Anexo I – Código para o exercício 4 e 5, no Arduino IDE

```

int sensorPin_0 = A0; // selects the analog pin (A0) for transmitting the square wave, with amplitude [0; Vcc] V
int sensorPin_1 = A1; // selects the analog pin (A1) for transmitting the square wave, with amplitude [0; Vcc/4] V

bool digitalpin_state = HIGH; // initializes the state of the digital pin
const byte digitalpin = 2; // selects the digital pin (D2)

// Set the wave frequency
int frequency = 20; // In Hz

// duty cycle 50%, corresponding to half of the wave period (in ms)
unsigned long interval_duty50 = pow(10,6)/(frequency*2);

// creates the variable for storing the char coming from the serial port
char incoming_byte;

// defines the sampling period (in mius), for a sampling frequency of 1060 Hz
int sampling_period = pow(10,6)/(2*530);

// initializes the system's state, controlling data transmission (0 not transmitting, and 1 for transmitting)
bool system_state = 0;

// initializes the variable to store the time instant associated to the last sample
unsigned long previous_micros = 0L;

// creates the variable for accessing the number of milliseconds passed since the arduino board began
// running the current program
unsigned long current_micros;

// instant that marks the beginning of a specific level
unsigned long half_cycle = 0L;

// the setup routine runs once when you press reset:
void setup() {
    // configures the digital pin as output, being assigned the operating voltage when set to HIGH state,
    // or 0V when set to LOW state

    pinMode(digitalpin, OUTPUT);

    // initialize serial communication at 1000000 bits per second:
    Serial.begin(1000000);
}

// the loop routine runs over and over again forever:
void loop() {
    if (Serial.available()>0){
        incoming_byte = Serial.read(); // read the incoming byte

        switch(incoming_byte){
            case 'S': // character for starting streaming
            system_state = 1;

            // assigns the operating voltage since the HIGH state was define as the initial state
            digitalWrite(digitalpin, digitalpin_state);
            break;

            case 'E': // character for ending streaming
            system_state = 0;
            previous_micros = 0L; // resets
            half_cycle = 0L;
            break;
        }
    }
}

```

```
case 'F':  
    frequency = Serial.parseInt();  
    interval_duty50 = pow(10,6)/(frequency*2.0);  
  
    previous_micros = 0L;  
    half_cycle = 0L;  
}  
}  
  
if (system_state) // streams sampled and quantitized data  
  
{  
    current_micros = micros();  
  
    // define the next level  
    if (current_micros - half_cycle >= interval_duty50){  
        digitalpin_state = !digitalpin_state;  
        digitalWrite(digitalpin, digitalpin_state);  
  
        half_cycle = current_micros;  
    }  
  
    // sampling and quantization will be performed  
    if (current_micros - previous_micros >= sampling_period){  
        Serial.print(current_micros);  
        Serial.print(",");  
  
        Serial.print(analogRead(sensorPin_0));  
        Serial.print(",");  
  
        Serial.println(analogRead(sensorPin_1));  
  
        previous_micros = current_micros; // assigns the time instant associated to the last sample|  
    }  
}  
}
```

Anexo II – Código para calcular a FFT, implementado em matlab

```

1 - data = readtable('ex5_nosso.txt');
2
3 - vin = data.vi;
4 - vout = data.vo;
5
6 - fft_vin = abs(fft(vin));
7 - fft_vout = abs(fft(vout));
8
9 - fs = 1060; % sampling frequency
10
11 %fs = 1/(10000*10^(-6)); % sampling frequency for the professor's data
12
13 - t = (0:length(vin)-1)/fs; % t = (N-1)/fs
14
15 - nFFT = length(vin); % Number of points used for computing the FFT
16
17 % Reorganizes the DFT by moving the DC component (0 Hz frequency) to the center of the array
18 - fshift = (-nFFT/2:nFFT/2 - 1)*(fs/nFFT); % Zero-centered frequency range
19
20 - figure;
21 - plot(t, vin);
22 - hold on;
23 - plot(t, vout);
24 - legend('Vin', 'Vout')
25 - xlabel('Time (s)')
26 - ylabel('Digital Codes');
27 - title('Acquired Signals');
28 - axis tight
29

30 - figure;
31 - subplot(2,1,1);
32 - plot(fshift, fftshift(fft_vin));
33 - xlabel('Frequency (Hz)')
34 - ylabel('Magnitude of FFT')
35 - title('Zero-Centered FFT of Vin');
36 - axis tight
37
38 - subplot(2,1,2);
39 - plot(fshift, (fftshift(fft_vout)));
40 - xlabel('Frequency (Hz)');
41 - ylabel('Magnitude of FFT');
42 - title('Zero-Centered FFT of Vout');
43 - axis tight
44
45 - fft_gain = fftshift(20*log10(fft_vout/fft_vin));
46 - figure;
47 - plot(fshift, fft_gain);
48 - axis tight
49 - xlabel('Frequency (Hz)')
50 - ylabel('Magnitude of FFT (dB)')
51 - title('Zero-Centered FFT of |H(w)|')

```